

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**DESENVOLVIMENTO DE ESTRATÉGIAS  
DE CONTROLE PARA  
RASTREAMENTO E ESTABILIZAÇÃO DE  
SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS**

POR  
LUIZ CARLOS FIGUEIREDO

Texto submetido à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial a obtenção de título de Doutor em Engenharia Elétrica

**Orientador : Fábio Gonçalves Jota**

14 de maio de 2004



# Agradecimentos

Ao Centro Universitário do Leste de Minas Gerais, nas pessoas de sua diretoria, e colegas de trabalho (professores e funcionários), e a Fundação Geraldo Perligeiro de Abreu pela oportunidade da complementação dos estudos através do apoio financeiro.

Ao orientador Prof. Dr. Eng. Fábio Gonçalves Jota, pelo incentivo e orientação, e a todo corpo docente, discente e de funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais.

Aos meus familiares (pais, irmãos e irmãs) e amigos, pelo incentivo, compreensão e apoio nos momentos difíceis. Em especial, a minha esposa Solange e filhas Andréia e Laís, razão deste trabalho.

A todos, o meu muito obrigado.



# Resumo

O principal problema prático que motivou o desenvolvimento desta tese foi a necessidade de controlar veículos autônomos com restrições não-holonômicas. Sistemas não-holonômicos formam uma classe com características especiais: apesar de seus movimentos serem limitados, os mesmos podem atingir qualquer configuração no espaço onde estão definidos (quando controláveis e atingíveis); infelizmente, as leis de controle para estabilização de sistemas não-holonômicos não são fáceis de serem geradas, e constituem um campo de pesquisas em aberto. Especificamente, devido à estrutura das equações diferenciais que governam tais sistemas, o problema de regulação não pode ser resolvido através de uma lei de realimentação de estados suave, puramente invariante no tempo como decorrência das condições do teorema de Brockett.

Para o controle de veículos autônomos é necessário um sistema que identifique claramente sua posição, um sistema de planejamento de trajetórias que gere caminhos possíveis de serem seguidos, e um sistema de controle para seguir tais trajetórias e estabilizar o veículo num ponto de equilíbrio. O foco deste trabalho é a estabilização e rastreamento de trajetórias de sistemas com restrições não-holonômicas.

O problema da estabilização é resolvido aqui através de uma lei descontínua (escalamamento de estados) que leva o sistema a convergência exponencial para sistemas não-holonômicos na forma encadeada. Estes resultados são estendidos para o problema da regulação numa trajetória utilizando um modelo interno. Para o problema do rastreamento é proposto ainda o uso do controle preditivo generalizado (CPG). A utilização do CPG permite que sejam empregadas no controle informações sobre a dinâmica do modelo do processo. A adaptação do modelo às novas condições proporciona maior robustez ao sistema de controle. Inicialmente, é proposto um controlador CPG para um robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana discreta e, posteriormente, o CPG é estendido para o robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada discreta. Os resultados obtidos nesta última etapa são válidos para sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas, representados na forma encadeada discreta ou que podem ser transformados para esta forma com  $n$  estados e duas entradas ou controles.

**Palavras-chave:** Sistemas não-holonômicos, controle híbrido, controle adaptativo, robôs móveis, controle geométrico não-linear.



# Abstract

The main practical problem that motivates the development of this thesis was the necessity to control autonomous vehicles with nonholonomic constraints. Nonholonomic systems constitute a system class with special characteristics: despite their movements are constraint, they can reach any configuration in the space where they are defined (when controllable and reachable); unfortunately control laws to stabilize nonholonomic systems are not easy to be generated, and constitute an open research area. Specifically, due to differential equations structure governing the nonholonomic system, the regulation problem cannot be solved via a smooth, time-invariant pure state feedback law due to the implications of Brockett's condition.

To control autonomous vehicles it is necessary a system that identifies its position, a path planner system that generates path compatibles with the system constraints, and a control system to follow this trajectory and stabilize the vehicle at equilibrium point. The main subject of this work is the stabilization and trajectory tracking of systems with nonholonomic constraints.

A discontinuous control law (state scaling) is used to exponentially stabilize nonholonomic chained form systems. The previous results are extended to trajectory tracking regulation of  $n$ -dimensional chained form systems using internal model. To the trajectory tracking regulation problem yet is proposed to use generalized predictive control (GPC). Employing the GPC is possible to use actual information from the process model dynamics. Control system robustness is improved by adapting the model to the new conditions. At the beginning a GPC controller is proposed to the differential driven wheeled mobile robot in Cartesian discrete form and further the GPC is extended to the differential driven wheeled mobile robot in discrete chained form. The results obtained at the last step are valid to nonlinear system with nonholonomic constraints in discrete chained form or that ones which can be transformed to this form with  $n$  states and two inputs or controls.

**Keywords:** Nonholonomic systems, hybrid control, adaptive control, Wheeled Mobile Robots, Geometric nonlinear control.





# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Abreviações</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação Prática . . . . .	1
1.2 Controle de sistemas não-holonômicos: trabalhos anteriores . . . . .	2
1.3 Contribuições . . . . .	6
1.4 Organização da tese . . . . .	8
<b>2 Sistemas não-holonômicos</b>	<b>11</b>
2.1 Fundamentos sobre restrições não-holonômicas . . . . .	11
2.2 Ferramentas básicas para o estudo de sistemas não-holonômicos . . . . .	14
2.3 Exemplo: Robô móvel com acionamento diferencial . . . . .	20
2.4 Formas Canônicas . . . . .	22
2.5 Controle de sistemas não-holonômicos . . . . .	24
2.5.1 Métodos para malha aberta . . . . .	24
2.5.2 Métodos para malha fechada . . . . .	29
2.6 Comentários . . . . .	30
<b>3 Estabilização e rastreamento de trajetórias através de realimentação não-linear</b>	<b>31</b>
3.1 Estabilização de sistemas na forma encadeada . . . . .	32
3.1.1 Sistemas na forma encadeada com três estados . . . . .	33
3.1.2 Sistemas de ordem elevada . . . . .	40
3.2 Rastreamento de trajetórias usando realimentação não-linear . . . . .	42

3.2.1	Formulação do Problema de Controle . . . . .	42
3.2.2	Proposta de Lei de Controle para Rastreamento de Trajetória . . . . .	44
3.2.3	Controle não-holonômico de sistemas de ordem elevada . . . . .	46
3.2.4	Simulações Numéricas . . . . .	49
3.3	Conclusão . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Rastreamento de trajetórias empregando o Controlador Preditivo Generalizado</b>	<b>57</b>
4.1	Controlador Preditivo Generalizado [27, 28] . . . . .	58
4.1.1	Descrição da planta . . . . .	59
4.1.2	Estimador de parâmetros . . . . .	61
4.2	Controle Preditivo Generalizado para rastreamento de robôs móveis . . . . .	61
4.2.1	Proposta de lei de controle para rastreamento de trajetória . . . . .	64
4.2.2	Simulações Numéricas . . . . .	73
4.3	Controle Preditivo Generalizado para sistemas na forma encadeada . . . . .	75
4.3.1	Proposta de lei de controle . . . . .	78
4.3.2	Simulações Numéricas . . . . .	85
4.4	Conclusão . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Estudo comparativo entre as técnicas de rastreamento propostas</b>	<b>89</b>
5.1	Controle com realimentação não-linear para rastreamento . . . . .	90
5.2	Controle CPG direto para forma cartesiana . . . . .	94
5.3	Controle CPG indireto usando forma encadeada . . . . .	94
5.4	Conclusões . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>99</b>
6.1	Resultados apresentados . . . . .	100
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	101
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>109</b>
	<b>A Glossário</b>	<b>123</b>
	<b>B Prova do teorema para CPG</b>	<b>129</b>
	<b>C Recursão da Equação Diofantina para o CPG</b>	<b>135</b>

# Abreviações

As principais abreviações usadas neste trabalho são listadas a seguir. Algumas siglas consagradas na literatura internacional foram mantidas em Inglês.

AP - Propriedade de acessibilidade;

CARIMA - *Controlled AutoRegressive and Integrated Moving Average* - Modelo Controlado auto-regressivo incremental com média móvel;

CC - Sistema completamente controlável;

CPG - Controle Preditivo Generalizado;

CS - Espaço de configuração;

DAS - *Driver assistance system* - sistema de assistência ao motorista;

FK - Filtro de Kalman;

G - Graminiano;

GAR - Globalmente assintoticamente regulado;

GER - Globalmente exponencialmente regulado;

LARC - Condição de posto da álgebra de Lie;

LMI - Desigualdades matriciais lineares;

LT - Viagem longa;

LQG - Linear, quadrático e gaussiano;

MRAC - *Model Reference Adaptive Control* - Controle adaptativo com modelo de referência;

NMP - Planejador de movimentos para sistemas não-holonômicos;

RLQ - Regulador linear quadrático;

RPP - Planejador de caminhos aleatórios;

ST - Viagem curta.

# Lista de Símbolos

Nesta Tese, vetores são indicados por letras latinas minúsculas em negrito. Escalares são representados por letras minúsculas gregas ou latinas em itálico com ou sem sub-índice. A seguir são listados os principais símbolos usados neste trabalho. Símbolos específicos serão definidos *in loco*.

$x$	Abcissa no plano cartesiano;
$\mathbf{x}$	Vetor de estados;
$y$	Ordenada no plano cartesiano;
$X$	Sistema de coordenadas cartesianas;
$l$	Distância entre o centro da roda e a origem do sistema móvel de robô;
$r$	Raio da roda;
$z, q$	Coordenada generalizada;
$u$	Vetor de entradas de controle;
$v$	Entrada de controle auxiliar;
$L$	Meia distância entre as rodas medida sobre o eixo destas;
$\theta$	Posição angular do robô em relação ao sistema de referência inercial;
$\triangle$	Distribuição;
$\bar{\triangle}$	Distribuição involutiva;
$\nabla$	Gradiente;
$\mathbf{L}(g_1, \dots, g_n)$	Álgebra de Lie;
$p(t)$	Forma parametrizada da posição e atitude de uma partícula;
$g(t)$	Família de mapeamentos;
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos;
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\frac{df}{dt}$	Derivada temporal de $f$ ;
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial de $f$ em relação a $x$ ;
$\dot{q}$	Derivada temporal de $q$ ;
$var.$	Varredura ou base criada pelos vetores especificados;
$T_q\mathbb{R}^n$	Espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ no ponto $q \in \mathbb{R}^n$ ;

$V$	Função de energia de Lyapunov;
$L_f V$	Derivada de Lie de $V$ ao longo do fluxo $f$ ;
$[\cdot, \cdot]$	Colchete de Lie;
$w(q)$	Uma-forma;
$\Omega$	Codistribuição;
$\Sigma$	Sistema de controle;
$G_i$	Distribuição;
$l(\cdot)$	Comprimento de um produto de Lie;
$H$	Base de Philip Hall;
$T$	Transposição de vetores ou matrizes.

# Lista de Figuras

2.1	Sistema de coordenadas para o robô. . . . .	20
3.1	Evolução dos estados e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial. . . . .	39
3.2	Controle de seguimento com modelo interno. . . . .	44
3.3	Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória circular. . . . .	50
3.4	Evolução das trajetórias referência e real para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória circular. . . . .	50
3.5	Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag. . . . .	51
3.6	Evolução das trajetórias referência e real do robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag. . . . .	52
3.7	Evolução dos erros de estado e sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial de Jiang. . . . .	53
3.8	Evolução das trajetórias referência e real para o robô móvel com acionamento diferencial de Jiang. . . . .	53
3.9	Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag com ruído nos estados medidos. . . . .	54
3.10	Evolução das trajetórias referência e real do robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag com ruído nos estados medidos. . . . .	54
4.1	Controle de seguimento com o CPG. . . . .	73
4.2	Evolução das trajetórias referência e real usando o CPG para controle de robô móvel. . . . .	74
4.3	Estimação de parâmetros do robô móvel com acionamento diferencial. . . . .	75
4.4	Comparação de modelos na forma encadeada contínua e discreta. . . . .	78
4.5	Evolução das trajetórias referência e real usando o CPG para controle de robô móvel na forma encadeada. . . . .	86

4.6	Estimação de parâmetros do robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada. . . . .	87
5.1	(a )Transformação da forma cartesiana para a encadeada; (b) Conversão dos sinais de entrada; (c) Robô móvel na forma cartesiana; (d) Transformação para a forma encadeada. . . . .	91
5.2	Erro de estado na forma encadeada. . . . .	92
5.3	Trajетórias dos estados na forma encadeada. . . . .	93
5.4	Erro de estado na forma encadeada - trajetória circular. . . . .	93
5.5	Trajетória de estado na forma encadeada - trajetória circular. . . . .	93
5.6	Erro de estados para o CPG indireto. . . . .	94
5.7	Trajетória de estado na forma encadeada usando CPG indireto. . . . .	95
5.8	Evolução do erro de estados para o CPG indireto - trajetória circular. . . . .	95
5.9	Trajетória de estado na forma cartesiana usando CPG indireto - trajetória circular. . . . .	95
5.10	Trajетória, evolução de estados e sinal de controle na forma cartesiana para trajetória zig-zag; coluna 1 : Controlador com realimentação não-linear, coluna 2 : CPG direto, coluna 3 : CPG indireto. . . . .	96
5.11	Trajетória, evolução de estados e sinal de controle na forma cartesiana para trajetória circular; coluna 1 : Controlador com realimentação não-linear, coluna 2 : CPG direto, coluna 3 : CPG indireto. . . . .	97
6.1	Estabilização com o CPG e função de custo original. . . . .	103
6.2	Estabilização com o CPG e função de custo modificada. . . . .	104



# Capítulo 1

## Introdução

O termo holonômico é atribuído a Hertz [14] e significa "universal", "integral", "integrável" (literalmente: holo = o todo, conjunto, totalidade - nomia = lei). Portanto, sistemas não-holonômicos podem ser interpretados como sistemas não integráveis.

A abordagem matemática à este tipo de problema é realizada através de ferramentas da geometria diferencial. Este trabalho busca contribuir para o avanço das pesquisas nesta área.

### 1.1 Motivação Prática

O principal problema prático que motivou o desenvolvimento desta tese foi a necessidade de controlar veículos autônomos com restrições não-holonômicas ao movimento.

Tanto em aplicações industriais, militares e de uso geral, a necessidade de utilização de veículos móveis que se movimentam de forma autônoma vem crescendo continuamente. A facilidade do comércio eletrônico exige que sistemas logísticos e de manipulação de produtos sejam cada vez mais automatizados. Da mesma forma, a competitividade no meio industrial busca formas de ganho em produtividade. Estes ganhos estão sendo auferidos empregando a automação e robotização de processos. Neste quadro destaca-se a robótica móvel.

Recentemente, a Agência de Projetos de Pesquisa Avançada da Defesa, ou Darpa, um ramo do Departamento de Defesa dos Estados Unidos, instituiu um prêmio de um milhão de dólares para o veículo vencedor - se houver um - que primeiro cruzar a linha de chegada após atravessar cerca de 230 quilômetros de deserto, em menos de 10 horas, sem um motorista ou controle remoto. Isto porque uma determinação do Congresso Norte-Americano exige que um terço dos veículos de combate terrestres sejam operados sem assistência até 2015 (Ashlee Vance - *The New York Times* - Outubro/2003).

Isto vem indicar a importância que o controle de veículos autônomos está tendo nos últimos anos.

Para o controle de veículos autônomos é necessário um sistema que identifique claramente sua posição, um sistema de planejamento de trajetórias que gere caminhos possíveis de serem seguidos, e um sistema de controle para seguir tais trajetórias. Neste trabalho, está-se particularmente interessado no sistema de controle de seguimento de trajetória e estabilização num ponto de equilíbrio. Apesar de o enfoque do trabalho ser o controle de veículos autônomos, procurou-se desenvolver ferramentas de controle que atendem a uma classe mais geral de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas. Alguns autores fazem distinção entre os termos rastreamento de trajetórias e seguimento de trajetórias. Para estes, o rastreamento é seguir uma trajetória parametrizada no tempo, e o seguimento é o acompanhamento de uma trajetória sem especificação de tempo. Neste trabalho, considera-se o seguimento como o rastreamento no tempo.

Pode-se dividir o problema de controle em três partes: geração de trajetórias, seguimento de trajetórias e estabilização num ponto de equilíbrio. O interesse aqui se restringe ao controle para seguimento (rastreamento) de trajetórias e estabilização num ponto de equilíbrio. Devido às restrições ao movimento, tais sistemas devem ser tratados como problemas de controle não-linear [78].

O interesse nestes problemas de controle não-holonômico é motivado pelo fato de que eles não podem ser tratados pelos métodos clássicos da teoria de controle linear, e eles não são facilmente transformáveis em problemas de controle linear. Deste modo, estes são problemas que requerem fundamentalmente métodos não-lineares.

## 1.2 Controle de sistemas não-holonômicos: trabalhos anteriores

O desenvolvimento sistemático da teoria iniciou-se há mais de 150 anos, baseado numa série de artigos clássicos sobre a mecânica não-holonômica de matemáticos e físicos tais como: Hertz, Voss, Hölder, Chaplygin, Appel, Rooth, Woronets, Korteweg, Carathéodory, Horac, Voltera, dentre outros. Apesar disto, apenas recentemente [78] se iniciou o estudo de problemas de controle para tais sistemas.

Definem-se como não-holonômicos os sistemas com dimensão finita onde algum tipo de restrição é imposta a um ou mais estados do sistema. Estas limitações podem ser provocadas pela conservação do momento angular, condições impostas pela impossibilidade de deslocar em uma ou mais direções, como resultado da imposição de restrições durante o projeto do sistema de controle, pelo fato de o sistema não ter atuadores em todas as direções do espaço do problema, e em várias outras situações [107].

Sistemas não-holonômicos formam uma classe com características especiais: apesar de seus movimentos serem limitados, os mesmos podem atingir qualquer configuração no espaço onde estão definidos (quando controláveis e atingíveis); infelizmente, as leis de

controle para estabilização de sistemas não-holonômicos não são fáceis de serem geradas; há necessidade de emprego de ferramentas matemáticas mais elaboradas para análise e projeto (geometria diferencial e controle não-linear ou linear variante no tempo).

A consideração de restrições ao movimento melhora consideravelmente o controle de sistemas não-holonômicos possibilitando o projeto de controladores multivariáveis exponencialmente estáveis de forma integrada. O desafio para análise e síntese de controladores para sistemas deste tipo tem propiciado o desenvolvimento da teoria de controle não-linear. Técnicas de otimização e controle geométrico empregando transformações de coordenadas (transformações lineares e não-lineares) e sinais variantes no tempo ou não-contínuos são utilizadas para a geração de trajetórias e projeto de controladores em malha aberta. Em malha fechada destacam-se: controle adaptativo, robusto, inteligência artificial, linearização por realimentação de estados e das saídas empregando sinais contínuos variante no tempo ou não-contínuos, e controle híbrido. As principais técnicas de controle empregam funções de Lyapunov, associada a um método para gerar as leis de controle: integrador de um passo atrás (*backstepping*), método direto, método inverso, métodos matemáticos, métodos utilizando a física do processo, etc. Segue uma breve revisão bibliográfica sobre as pesquisas mais significativas já desenvolvidas na área.

- **Tutoriais:** O trabalho que serve como tutorial para iniciantes no controle de sistemas não-holonômicos foi desenvolvido por Kolmanovsky [78]. Nele é apresentado de forma clara e acessível os estágios de desenvolvimento da teoria indicando modelos, técnicas de controle em malha aberta e fechada e métodos de planejamento de trajetórias. Avanços no controle por realimentação variante no tempo são abordados por Morin [104]. Uma visão geral sobre o problema da estabilização de veículos autônomos, indicando problemas em aberto e tendências são relacionados por Aguiar [2], onde se destaca a necessidade do estudo de incertezas no modelo e o desenvolvimento de controladores robustos, principalmente para veículos marinhos.
- **Planejamento de trajetórias:** Pode-se dividir os métodos de planejamento de trajetórias em: métodos usando geometria diferencial [133, 132, 23]; métodos empregando sinais variantes no tempo como sinais senoidais [126, 108]; métodos de deslocamento em malha aberta usando senoides e, em alguns casos, transformações não-lineares [23, 143, 142, 67]; métodos explorando o colchete de Lie [80]; métodos que empregam técnicas de controle ótimo [134]; métodos que incorporam a dinâmica dos sensores [127]; métodos de planejamento de trajetória que evitam obstáculos [83, 81, 32, 97]; métodos de planejamento e controle totalmente em tempo real [87]. Sistemas não-holonômicos que não satisfazem à condição ideal de restrição de velocidade, isto é, podem apresentar deslizes laterais, são estudados em profundidade em D'Andréa-Novel [30].

- **Rastreamento de trajetórias:** O rastreamento de trajetórias para sistemas não-holonômicos tem sido buscado por inúmeros pesquisadores. O problema da estabilização em uma trajetória é mais fácil de ser resolvido do que o da estabilização em um ponto [145] desde que seja possível calcular previamente uma trajetória que satisfaça as restrições. Métodos simples utilizando controladores PID [119] e trajetórias compatíveis com a restrição não-holonômica [66] têm sido propostos. Pode-se destacar casos como: Jiang e seus colaboradores [73] que desenvolveram uma metodologia através da realimentação variante no tempo, associada à técnica do integrador de um passo atrás (*backstepping*) para robôs móveis com acionamento diferencial. Esta técnica foi estendida para sistemas na forma encadeada [74] e com incertezas [70] de forma robusta. O controle de trajetória de um navio sub-atuado empregando o método direto de Lyapunov é tratado também por Jiang [71]. O guiamento de veículos marinhos utilizando modelos na forma polar é apresentado em Aicardi [11, 10]. Redes neurais são empregadas em sistemas não-holonômicos tanto para localização [69], como para controle [18]. Estratégias para rastreamento de trajetórias por modos deslizantes para o robô móvel com acionamento diferencial são propostas por Yang [148, 147] e Chwa [26].
- **Estabilização num ponto:** Diversas técnicas tem sido desenvolvidas para a estabilização num ponto de equilíbrio de sistemas não-holonômicos. Sistemas de controle variantes no tempo têm sido estudados em profundidade a partir dos anos 90 [100, 99, 105, 106, 98, 105, 123, 121, 124, 120, 101, 102, 122, 103, 54, 141, 45]. Apesar destes métodos propiciarem a estabilização de sistemas não-holonômicos, até 1996 não se podia garantir estabilidade exponencial, apenas assintótica. A estabilização exponencial, em geral, é obtida empregando-se métodos baseados em funções de Lyapunov e/ou escalamento de estados. Sordalen e al. [129] apresentam um controlador variável no tempo empregando conceitos de estabilidade exponencial K, que apesar de ser uma forma de estabilidade mais fraca que a estabilidade exponencial, possui a mesma taxa de convergência. A abordagem da estabilização exponencial usando realimentação homogênea variante no tempo é realizada em M'Closkey [96]. Uma técnica para construir controladores exponencialmente convergentes para sistemas não-holonômicos na forma de potência é apresentada por Luo [89]; baseia-se num algoritmo recursivo que utiliza uma série de variedades invariantes para construir uma seqüência de sistemas na forma de potência de dimensão reduzida. Utilizando mudanças de coordenadas e uma lei de controle por realimentação de estados descontínua (escalamento de estados), limitada, e invariante no tempo, Astolfi [16] propõe um sistema de controle para estabilizar exponencialmente um robô móvel de acionamento diferencial. Utilizando técnicas de Lyapunov, Pournoghbat [115] estabiliza exponencialmente um robô móvel de acionamento diferencial. Uma

transformação descontínua é utilizada para facilitar o projeto do controlador. A estabilização de sistemas não-holonômicos usando fluxos isoespectrais é tratada por Bloch [19]. O sistema na forma de integrador de Brockett é estabilizado usando controle híbrido com chaveamento discreto entre fluxos isoespectrais e norma decrescente. A estabilização de sistemas na forma encadeada através da linearização por realimentação é mostrada em Sun [131] e Ge [55]. Tayebi e colaboradores [140] mostram que sistemas  $n$ -dimensionais na forma encadeada podem ser estabilizados usando o método da variedade invariante. Primeiro deriva-se uma variedade invariante para esta classe de sistemas e mostra-se, a seguir, que todas as trajetórias em malha fechada tendem para a origem sob uma realimentação de estados suave, linear, invariante no tempo. Mostra-se, ainda, que esta variedade pode se tornar atrativa através de uma realimentação de estados descontínua, invariante no tempo. O controle de sistemas não-holonômicos de ordem alta na forma de potência encadeada usando realimentação descontínua é estudado por Lin [86]. Esta é uma classe particular de sistemas não-lineares que é uma extensão da forma encadeada. A lei de controle é obtida de forma recursiva, através da adição de integradores. A estabilização de sistemas não-contínuos empregando a técnica do integrador de um passo atrás (*backstepping*) é proposta por Tanner [138] para robôs móveis com acionamento diferencial. A estabilização de veículos marinhos sub-atuados é tratada por Indiveri [68] e Aicardi [6]. Pilotos automáticos empregando esta técnica são globalmente estáveis, enquanto que, pela técnica tradicional baseada em modelos linearizados, a estabilidade é local. Aguiar e colaboradores [5] apresentam resultados para veículos submarinos com incerteza paramétrica usando funções de Lyapunov. A estabilização de sistemas empregando coordenadas polares é abordada por Aicardi [9] para o robô móvel com acionamento diferencial e em Aicardi [7] para um veículo aquático. Em ambos os casos é mostrado que a mudança de coordenadas gera um sistema holonômico de fácil controle. A técnica de controle por realimentação descontínua pode ser estendida para manipuladores planos sub-atuados produzindo sistemas estáveis [92]. Resultados experimentais de controladores são apresentados tendo como plataforma o robô móvel com acionamento diferencial Khepera [76]. Neste caso, observaram-se características e desempenho de diversos controladores frente a dinâmicas desprezadas, quantização, ruído, atrasos, etc.

- **Controle híbrido:** Uma revisão da literatura, indicando as bases para sistemas híbridos e seus benefícios no projeto de controladores para sistemas lineares e não-lineares, bem como das diversas metodologias de análise e projeto, podem ser obtidas em Antsaklis [12], Hespanha [59, 60], e McClamroch [94]. A questão da estabilidade, projeto de sistemas híbridos e ferramentas básicas de análise são apresentadas em Liberzon [85], McClamroch [95], Agrachev [1], Ye [149], e Decarlo [31]. Estruturas

dinâmicas de transição de controle, aplicação de múltiplas funções de Lyapunov em sistemas chaveados e híbridos, e a utilização de novos conceitos de estabilidade aplicados a sistemas híbridos são apresentados em Sun [130], Branicky [21], e Hespanha [62]. A aplicação da teoria de controle híbrido a sistemas não-holonômicos com exemplos práticos do projeto de controladores é apresentada em Frommer [52], Hespanha [63, 62], Lygeros [91], Piccoli [113], e Bloch [19].

- **Controle adaptativo:** O projeto de controladores adaptativos para rastreamento de sistemas não-holonômicos, usando o método do integrador de um passo atrás (*backstepping*), é proposto por alguns pesquisadores [53, 139, 115, 34, 56]. O controle adaptativo para o rastreamento, na presença de incertezas no modelo e estados do sistema, usando soluções de controle robusto são considerados por Colbaugh [29] e Dong [36]. Funções de Lyapunov [3, 125], passividade [35], modelo preditivo [88, 51], e estratégias de inteligência artificial [25, 136, 137] são outras ferramentas geralmente utilizadas (veja também [24, 57, 84, 146]). O controle preditivo generalizado (CPG) foi usado no projeto de um sistema de auxílio ao motorista (DAS) [65], o qual ajuda o motorista na tarefa de controle para seguir uma faixa na pista de direção. Este sistema tem a estrutura de um motorista virtual em paralelo, e foi projetado para agir do mesmo modo que um motorista ideal. Os resultados relatados mostram que a execução da tarefa foi melhorada pelo sistema de controle DAS.

### 1.3 Contribuições

Desde 1999, o autor vem pesquisando sobre o controle de sistemas com restrições não-holonômicas. Um dos primeiros trabalhos nesta área foi uma coletânea de técnicas de modelagem matemática de sistemas de rastreamento de veículos que foi publicada posteriormente [40]. Estudos sobre sensores de posição de veículos móveis e sua robustez em sistemas de medição foram realizados empregando o filtro de Kalman [50].

As ferramentas básicas para a análise e projeto de sistemas com restrições não-holonômicas foram desenvolvidas no projeto de tese I [41] e parte deste material foi aceito para publicação como tutorial na revista da Sociedade Brasileira de Automática [46]. Também o planejamento de trajetórias na presença de obstáculos e controle robusto aplicado a sistemas não-holonômicos foram abordados no projeto de tese II [42].

Uma coletânea das principais técnicas de controle por realimentação para estabilização e rastreamento de trajetórias para sistemas não-holonômicos, incluindo técnicas inéditas foi publicada no ICAIS-2002 em Geelong na Austrália em fevereiro de 2002 [44]. Duas novas técnicas de controle para estabilização de sistemas não-holonômicos foram apresentadas no CBA-2002, são elas: controlador chaveado invariante e variante no tempo para estabilização de sistemas não-holonômicos [45] e controlador por realimentação não-linear

para estabilização de sistemas não-holonômicos [43].

As principais contribuições deste trabalho estão resumidas a seguir, bem como referência aos artigos que foram produzidos a partir destes desenvolvimentos.

- **Estabilização de sistemas não-holonômicos na forma encadeada:** É apresentado o modelo de sistemas não-holonômicos na forma encadeada. Grande parte dos sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas pode ser convertida para a forma encadeada. A grande vantagem desta representação é que se pode provar que sistemas não-lineares na forma encadeada são controláveis [107]. Existem três técnicas de controle não-linear para estabilizar sistemas não-holonômicos: empregando sinais variantes no tempo, empregando controle descontínuo e empregando controle híbrido (combinação das duas técnicas anteriores). Dentro da segunda opção, há sistemas que utilizam o escalamento de estados e sinais contínuos por partes. Apesar de já existir diversas leis de controle já propostas na literatura, o problema da estabilização de sistemas não-holonômicos ainda não está completamente resolvido [117]. Neste trabalho, um método de realimentação não-linear de estados empregando linearização descontínua (escalamento de estado) foi desenvolvido para a estabilização de sistemas não-holonômicos na forma encadeada com duas entradas ou controles. Este método difere de outros [15, 93, 141, 90] pela simplicidade na geração das leis de controle. O método permite estabelecer facilmente pólos que estabilizam assintoticamente o sistema [43]. A contribuição consiste no desenvolvimento de uma metodologia para se chegar a transformação de estados (escalamento de estados) e o desenvolvimento de um controlador chaveado (projeto sem similar) para estabilização num ponto de equilíbrio. A convergência do controlador é provada através de funções de Lyapunov. Esta metodologia permitiu o desenvolvimento de um controlador para seguimento de trajetórias.
- **Regulação de sistemas na forma encadeada para seguimento de trajetórias:** O problema da regulação de sistemas com restrições não-holonômicas também não está completamente resolvido [17, 118, 4, 77]. É proposta uma nova solução para regulação numa trajetória de sistemas na forma encadeada utilizando conceitos similares aos do item anterior e empregando modelo de referência. A extensão dos conceitos de escalamento de estado para rastreamento de estados é inteiramente nova, e constitui uma contribuição original ao rastreamento de trajetórias para sistemas não-holonômicos. As condições de estabilidade do sistema podem ser verificadas utilizando o critério de Routh-Hurwitz ou a determinação dos autovalores da matriz resultante do sistema em malha fechada após a utilização do escalamento de estados [47].
- **Regulação de um robô móvel com acionamento diferencial utilizando um**

**controlador adaptativo:** Técnicas de controle adaptativo, principalmente aquelas baseadas em modelo referência (MRAC), têm sido apresentadas ultimamente na literatura sobre controle de sistemas não-holonômicos [33, 56, 109, 116, 34, 53, 139]. Embora apresente um excelente desempenho, elas necessitam do conhecimento exato do modelo. O controle preditivo generalizado adaptativo (CPG) tem como uma de suas principais características a utilização de um estimador de parâmetros "on line". Isto confere maior robustez ao sistema de controle. Em uma pesquisa sobre a utilização do CPG no controle de sistemas não-holonômicos, verificou-se a existência de uma lacuna nesta área.

Neste trabalho, o Controle Preditivo Generalizado (CPG) é proposto para a regulação numa trajetória pré-especificada de um sistema na forma cartesiana. A estrutura do modelo para um robô móvel com acionamento diferencial baseado nas leis físicas é apresentada e um modelo aproximado é obtido. O controlador adaptativo é desenvolvido utilizando um estimador de parâmetros recursivo por mínimos quadrados com fatoração UD para estabilidade numérica. As leis de controle são derivadas a partir da minimização de uma função custo que leva em consideração valores das variáveis, passados e futuros, e variância do sinal de controle [48].

- **Regulação de sistemas não-holonômicos na forma encadeada utilizando o CPG:** Como uma quarta contribuição, os resultados do item anterior são estendidos para uma classe mais geral de sistemas não-lineares. Uma técnica aproximada para discretização de sistemas não-lineares na forma encadeada é apresentada e o controlador adaptativo do tipo preditivo (CPG) é empregado para a regulação destes sistemas [49].

## 1.4 Organização da tese

Segue uma breve apresentação do conteúdo dos vários capítulos deste trabalho.

O Capítulo 2 introduz as bases de sistemas com restrições não-holonômicas, ferramentas para a verificação da controlabilidade de sistemas não-lineares usando controle geométrico não-linear, e apresenta os diversos modelos e exemplos de sistemas que serão abortados ao longo deste trabalho.

O Capítulo 3 apresenta um controlador para estabilização de sistemas não-holonômicos na forma encadeada empregando linearização descontínua, e um regulador para seguimento de trajetória para sistemas na forma encadeada.

O Capítulo 4 apresenta uma revisão do controlador preditivo generalizado (CPG) proposto por Clark, e sua aplicação para seguimento de trajetória de um robô móvel com acionamento diferencial representado na forma cartesiana. Os resultados são estendidos para sistemas não-lineares na forma encadeada.



Uma comparação entre as técnicas propostas nos Capítulos 3 e 4 para rastreamento de trajetória é realizada no Capítulo 5. A base de comparação foi unificada considerando o controle de um robô móvel com acionamento diferencial, na forma cartesiana, seguindo trajetórias em zig-zag e circular.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões e comentários sobre os principais resultados obtidos e contém recomendações para futuros trabalhos.



# Capítulo 2

## Sistemas não-holonômicos

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica dos principais conceitos e técnicas de controle envolvendo sistemas não-holonômicos.

Inicia com os fundamentos básicos sobre restrições não-holonômicas e as ferramentas matemáticas utilizadas para o estudo de tais sistemas, e termina com as técnicas de controle tanto em malha aberta como em malha fechada.

### 2.1 Fundamentos sobre restrições não-holonômicas

O movimento de uma partícula no espaço euclidiano é descrito pelas coordenadas da partícula em cada instante de tempo [107], relativas a um sistema de eixos ortogonais  $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ . A trajetória da partícula é dada na forma parametrizada por  $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3$ . Muitas vezes não se está interessado no movimento de uma partícula, mas no de um corpo (articulado ou não) composto por diversas partículas. Para simplificar o estudo pode-se assumir que o corpo é indeformável (corpo rígido), neste caso, a distância entre duas partículas quaisquer deste corpo será fixa. Logo, se  $p$  e  $q$  são as posições de duas partículas deste corpo, então a relação abaixo deve ser satisfeita:

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \textit{constante}.$$

Um movimento rígido de um objeto é um movimento contínuo de partículas no objeto, de forma tal que a distância entre duas partículas quaisquer seja preservada. Este movimento é representado por uma família de mapeamentos  $g(t) : O \rightarrow \mathbf{R}^3$  (onde  $O$  é o conjunto de vetores-eixos ortogonais). Nota-se que a condição de preservação de distância é uma condição necessária, mas não suficiente, para que  $g(t)$  seja o mapeamento deste movimento, pois a orientação não é preservada. Para atender a este último requisito, o produto vetorial entre vetores pertencentes ao corpo também deve ser preservado. Assim, para rastrear o movimento de qualquer partícula num corpo rígido basta rastrear o movimento de uma partícula sobre o corpo e a rotação do mesmo em torno deste ponto.

Esta relação entre partículas (limitação do grau de liberdade) é chamada de restrição. Cada restrição pode ser representada por uma função  $g_j : \mathbf{R}^{3n} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$g_j(r_1, \dots, r_n) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

ou seja, como uma relação algébrica entre as posições das partículas. Tal restrição define uma hipersuperfície [37] ou variedade, logo, o movimento será limitado a esta hipersuperfície. Tal restrição é chamada de **holonômica**, ou integrável. Uma restrição age sobre um sistema de partículas através da aplicação de forças de restrição. Se estas restrições forem consideradas hipersuperfícies suaves em  $\mathbf{R}^n$ , as forças de restrição são normais a esta hipersuperfície e restringem a velocidade do sistema a serem tangentes a esta superfície, em qualquer instante de tempo. Uma vez que restrições holonômicas definem uma hipersuperfície suave no espaço de configuração, é possível eliminar estas restrições pela escolha de novas coordenadas apropriadas a esta superfície [107]. Estas novas coordenadas parametrizam todos os movimentos permitidos do sistema e este, por sua vez, não estará sujeito a qualquer restrição nesta nova base.

Uma restrição de um tipo fundamentalmente diferente ocorre onde os movimentos permissíveis do sistema estão limitados por restrições de velocidade da forma

$$A(q)\dot{q} = 0,$$

onde  $A(q) \in \mathbf{R}^{k \times n}$  representa um conjunto de  $k$  restrições de velocidade. Uma restrição desta forma é chamada de *restrição Pfaffiana*. Uma vez que uma restrição Pfaffiana limita as velocidades permissíveis do sistema, mas não necessariamente as configurações, geralmente não se pode representá-la como uma restrição algébrica sobre o espaço de configuração. Uma restrição Pfaffiana é dita ser integrável se existir uma função vetorial  $h : Q \rightarrow \mathbf{R}^k$  tal que

$$A(q)\dot{q} = 0 \iff \frac{\partial h}{\partial q}\dot{q} = 0.$$

Assim, uma restrição Pfaffiana integrável é equivalente a uma restrição holonômica.

Uma restrição Pfaffiana que não é integrável é um exemplo de restrição *não-holonômica*. Restrições não-holonômicas deste tipo ocorrem quando as velocidades instantâneas do sistema são limitadas a um sub-espaço de dimensão  $n - k$ , porém o conjunto de configurações atingíveis não está restrito a uma superfície  $n - k$  dimensional no espaço de configuração.

Deseja-se descobrir como a condição não-holonômica das restrições pode ser explorada para se obter deslocamentos entre configurações diferentes, ou seja, verificar se é possível deslocar por um caminho  $q(t)$  do ponto  $q_0$  ao ponto  $q_f$  satisfazendo às restrições não-holonômicas.

A determinação se um sistema é ou não holonômico não é uma tarefa fácil. Seja o

caso no qual existe uma única restrição de velocidade [107]

$$w(q)\dot{q} = \sum_{j=1}^n w_j(q)\dot{q}_j = 0.$$

Esta restrição é integrável se existe uma função  $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$w(q)\dot{q} = 0 \iff h(q) = 0.$$

Se a restrição Pfaffiana é holonômica então diferenciando  $h(q)$  com relação ao tempo tem-se:

$$\sum_{j=1}^n w_j(q)\dot{q}_j = 0 \implies \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial q_j} \dot{q}_j = 0.$$

Por sua vez, isto implica que existe alguma função  $\alpha(q)$ , chamada de fator de integração, tal que:

$$\alpha(q)w_j(q) = \frac{\partial h}{\partial q_j}(q) \quad j = 1, \dots, n.$$

Logo, uma restrição Pfaffiana é holonômica se e somente se existir um fator de integração  $\alpha(q)$  tal que  $\alpha(q)w(q)$  seja a derivada de alguma função  $h$ . Para facilitar a verificação pode-se usar o fato que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_j \partial q_i},$$

para obter

$$\frac{\partial(\alpha w_j)}{\partial q_i} = \frac{\partial(\alpha w_i)}{\partial q_j} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

que é equivalente à afirmação de que  $h(q) = 0$  se existir algum fator de integração  $\alpha(q)$  que satisfaça à equação acima. A situação se complica mais para o caso de múltiplas restrições Pfaffianas. Para um conjunto de  $k$  equações de restrição, deve-se não apenas verificar a integrabilidade de cada uma mas também a de combinações linearmente independentes destas. Assim, podem existir funções  $h_i$  para  $i = 1, \dots, p$  com  $p \leq k$  tal que

$$\text{var} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial q}(q), \dots, \frac{\partial h_p}{\partial q}(q) \right\} \subset \text{var} \{w_1(q), \dots, w_k(q)\},$$

para todo  $q$ , onde o operador  $\text{var}\{\cdot\}$  indica a varredura ou base criada pelos vetores especificados. Se for possível achar estas funções, o movimento do sistema estará restrito a superfícies de nível de  $h$ . Se  $p = k$ , então as restrições são holonômicas. Quando  $p < k$ , as restrições não são holonômicas, porém, os pontos atingíveis do sistema continuam restritos. Logo as restrições são parcialmente holonômicas. Para fins de controle, está-se interessado em situações nas quais as restrições não limitam as configurações atingíveis. Estes casos são chamados de *completamente não-holonômicos*.

## 2.2 Ferramentas básicas para o estudo de sistemas não-holonômicos

É necessário converter problemas com restrições não-holonômicas para uma outra forma, ou seja, ver o problema não do ponto de vista das direções onde o movimento não é possível, e sim o contrário. Isto pode ser conseguido escolhendo-se uma base para o espaço nulo à direita das restrições, denotado por  $g_j(q) \in \mathbf{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n - k =: m$ . Por construção esta base satisfaz

$$w_i(q)g_j(q) = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, k, \\ j = 1, \dots, n - k, \end{array}$$

e as trajetórias permissíveis para o sistema podem ser escritas como as possíveis soluções do sistema de controle

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m. \quad (2.1)$$

Isto é,  $q(t)$  é uma trajetória realizável para o sistema se e somente se  $q(t)$  satisfaz à equação (2.1) para algum valor dos controles  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ . Neste contexto, uma restrição é completamente não-holonômica se os estados do sistema correspondente podem ser deslocados de um estado inicial a outro final qualquer. Logo, o espaço de atingibilidade das configurações do sistema não está restrito. Por outro lado, se a restrição é holonômica, então todos os movimentos do sistema estão confinados numa superfície limitada e os estados do sistema correspondente só podem se mover sobre esta variedade. Assim, pode-se estudar a natureza das restrições Pfaffianas estudando as propriedades de controlabilidade da equação (2.1).

Para facilitar o entendimento desta abordagem serão considerados sistemas de controle sem deriva (em que os estados dependem apenas das entradas correspondentes) em  $\mathbf{R}^n$ . Seja  $T_q\mathbf{R}^n$  o espaço tangente a  $\mathbf{R}^n$  no ponto  $q \in \mathbf{R}^n$ . Um campo vetorial sobre  $\mathbf{R}^n$  é um mapa suave que atribui a cada ponto  $q \in \mathbf{R}^n$  um vetor tangente  $f(q) \in T_q\mathbf{R}^n$ , tal que

$$f(q) = \begin{bmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{bmatrix}.$$

Um campo vetorial será suave se cada vetor  $f_i(q)$  for suave. Campos vetoriais podem ser imaginados como o lado direito de equações diferenciais:

$$\dot{q} = f(q). \quad (2.2)$$

Associado a um campo vetorial, define-se o *fluxo* de um campo vetorial como a representação da solução da equação diferencial (2.2). Especificamente  $\phi_t^f(q)$  representa o estado da equação diferencial no instante  $t$  partindo de  $q$  no instante 0. Assim  $\phi_t^f(q) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  satisfaz

$$\frac{d}{dt}\phi_t^f(q) = f(\phi_t^f(q)) \quad q \in \mathbf{R}^n.$$

A taxa de variação de uma função suave  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  ao longo do fluxo de  $f$  é dada por

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} f(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} f_i.$$

A derivada no tempo de  $V$  ao longo do fluxo de  $f$  é referenciada como a *derivada de Lie* de  $V$  ao longo de  $f$  e denotada por  $L_f V$ :

$$L_f V := \frac{\partial V}{\partial q} f(q).$$

Um mapeamento  $T : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  é um *difeomorfismo* [75] sobre  $D$  se ele for invertível sobre  $D$ , isto é, existe uma função  $T^{-1}(x)$  tal que  $T^{-1}(T(x)) = x$  para todo  $x \in D$ , e tanto  $T(x)$  quanto  $T^{-1}(x)$  são continuamente diferenciáveis. Se a Matriz Jacobiana  $\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]$  é não-singular num ponto  $x_0 \in D$ , então segue do teorema da função inversa que existe uma vizinhança  $N$  de  $x_0$  tal que  $T$  restrito a  $N$  é um difeomorfismo sobre  $N$ .

Um campo vetorial é dito ser *completo* se seu fluxo está definido para todo  $t$ . Pelo teorema da existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias, para cada  $t$  fixo,  $\phi_t^f$  é um difeomorfismo local de  $\mathbf{R}^n$  sobre ele próprio. Além disto, ele satisfaz à propriedade de grupo:

$$\phi_t^f \circ \phi_s^f(q) = \phi_{t+s}^f,$$

para todo  $t$  e  $s$ , onde "o" indica a composição de dois fluxos ( $\phi_t^f(\phi_s^f(q))$ ).

Define-se a operação denominada *colchete de Lie* [37] como:

$$\begin{aligned} [.,.] : V \times V &\rightarrow V, \\ A, B &\rightarrow [A, B], \end{aligned}$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

### 1. Bilinearidade

$$\begin{aligned} [A + \lambda B, C] &= [A, C] + \lambda[B, C], \\ [A, B + \lambda C] &= [A, B] + \lambda[A, C]; \end{aligned}$$

### 2. Anticomutatividade

$$[A, B] = -[B, A];$$

## 3. Identidade de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0;$$

O colchete de Lie para dois campos vetoriais  $f$  e  $g$  é definido como

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q).$$

e pode ser interpretado como o movimento infinitesimal resultante do fluxo em torno de um quadrado definido por dois campos vetoriais  $f$  e  $g$ . Se este movimento for nulo, diz-se que os campos comutam. Isto pode ser melhor visualizado para operadores lineares (matrizes), onde o colchete de Lie é definido como produto vetorial

$$[A, B] = AB - BA;$$

se  $A$  e  $B$  comutarem, o colchete de Lie será nulo. O colchete de Lie algumas vezes é chamado de comutador.

Uma *distribuição* atribui um subespaço do espaço tangente a cada ponto em  $\mathbf{R}^n$  de um modo suave. Seja  $g_1, g_2, \dots, g_k$  campos vetoriais sobre  $V \subset \mathbf{R}^n$ . Em qualquer ponto fixo  $q \in V$ ,  $g_1(q), g_2(q), \dots, g_k(q)$  são vetores em  $\mathbf{R}^n$  e

$$\Delta(q) = \text{var}\{g_1(q), g_2(q), \dots, g_k(q)\} \subset T_q \mathbf{R}^n,$$

é um subespaço de  $\mathbf{R}^n$ . Para cada ponto  $q \in \mathbf{R}^n$ , atribui-se um subespaço  $\Delta(q)$ , referenciado como

$$\Delta = \text{var}\{g_1, g_2, \dots, g_k\}.$$

Em outras palavras, uma distribuição  $\Delta$  é uma coleção de todos os espaços vetoriais  $\Delta(q)$  para  $q \in V$ .

Uma distribuição é dita ser *regular* se a dimensão do subespaço  $\Delta(q)$  não varia com  $q$ . Uma distribuição é *involutiva* se ela for fechada sob o colchete de Lie, isto é,

$$\Delta \text{ involutiva} \iff \forall f, g \in \Delta, [f, g] \in \Delta.$$

Para uma distribuição de dimensões finitas é suficiente verificar que o colchete de Lie dos elementos-base estão contidos na distribuição. O *fechamento involutivo* de uma distribuição, denotado por  $\bar{\Delta}$ , é o fechamento de  $\Delta$  sob a operação colchete de Lie; ou seja,  $\bar{\Delta}$  é a menor distribuição contendo  $\Delta$  tal que se  $f, g \in \bar{\Delta}$  então  $[f, g] \in \bar{\Delta}$ .

Um espaço vetorial real  $V$  onde a operação colchete de Lie está definida é denominado de *Álgebra de Lie* e aqui denotado por  $\mathcal{X}(\mathbf{R}^n)$ . Seja  $g_1, \dots, g_m$  um conjunto de campos



vetoriais suaves,  $\Delta$  a distribuição definida por estes campos vetoriais, e  $\bar{\Delta}$  o fechamento involutivo de  $\Delta$ , logo  $\bar{\Delta}$  é uma álgebra de Lie e é denotado por  $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$ . Os elementos de  $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$  são obtidos tomando-se todas as combinações lineares dos elementos de  $g_1, \dots, g_m$ , tomando os colchetes de Lie destes, tomando todas as combinações lineares destes, e assim por diante. Define-se o posto de  $\mathcal{L}(g_1, \dots, g_m)$  num ponto  $q \in \mathbf{R}^n$  como sendo a dimensão de  $\bar{\Delta}_q$  como uma distribuição.

Uma distribuição  $\Delta$  de dimensão  $k$  constante é dita ser *integrável* se, para todo ponto  $q \in \mathbf{R}^n$ , existe um conjunto de funções suaves  $h_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n - k$  tal que os vetores linha  $\frac{\partial h_i}{\partial q}$  são linearmente independentes em  $q$ , e para todo  $f \in \Delta$

$$L_f h_i = \frac{\partial h_i}{\partial q} f(q) = 0 \quad i = 1, \dots, n - k. \quad (2.3)$$

As hipersuperfícies definidas pelos conjuntos níveis

$$\{q : h_1 = c_1, \dots, h_{n-k}(q) = c_{n-k}\},$$

são chamadas *variedades integrais* da distribuição. Imagina-se uma variedade integral como uma superfície suave em  $\mathbf{R}^n$ , então a equação (2.3) requer que a distribuição seja igual ao espaço tangente desta superfície no ponto  $q$ .

Variedades integrais estão relacionadas com distribuições involutivas pelo celebre *teorema de Frobenius* [14] que afirma que uma distribuição regular é integrável se e somente se ela for involutiva. Assim, se  $\Delta$  é uma distribuição involutiva  $k$ -dimensional, então localmente existem  $n - k$  funções  $h_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  tal que variedades integrais de  $\Delta$  são dadas pelas superfícies de nível de  $h = (h_1, \dots, h_{n-k})$ .

Associado com o espaço tangente  $T_q \mathbf{R}^n$  está o espaço dual  $T_q^* \mathbf{R}^n$ , o conjunto de funções lineares sobre  $T_q \mathbf{R}^n$ . Tal como foram definidos campos vetoriais sobre  $\mathbf{R}^n$ , define-se uma *uma-forma* como um mapa que atribui a cada ponto  $q \in \mathbf{R}^n$  um *covetor*  $w(q) \in T_q^* \mathbf{R}^n$ . Em coordenadas locais representa-se uma uma-forma suave como um vetor linha

$$w(q) = [w_1(q) \ w_2(q) \ \dots \ w_n(q)].$$

Diferenciais de funções suaves são bons exemplos de uma-forma. Por exemplo, se  $\beta : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , então a uma-forma  $d\beta$  é dada por

$$d\beta = \left[ \frac{\partial \beta}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \beta}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \beta}{\partial q_n} \right].$$

Uma uma-forma age sobre um campo vetorial para gerar uma função real sobre  $\mathbf{R}^n$

tomando o produto interno entre um vetor linha  $w$  e um vetor coluna  $f$ :

$$w \cdot f = \sum_i w_i f_i.$$

Uma *codistribuição* atribui um subespaço de  $T_q^* \mathbf{R}^n$  suavemente a cada  $q \in \mathbf{R}^n$ . Um caso especial é uma codistribuição obtida como uma varredura de um conjunto de umas-forma,

$$\Omega = \text{var}\{w_1, \dots, w_n\},$$

onde a varredura está sobre o conjunto de funções suaves. O posto da codistribuição é a dimensão de  $\Omega_q$ . A codistribuição  $\Omega$  é dita ser regular se seu posto for constante.

No planejamento de movimento para sistemas não-holonômicos, a primeira tarefa é converter as restrições dadas como umas-forma num sistema de controle equivalente. Para isto, considere o problema de construir um caminho  $q(t) \in \mathbf{R}^n$  entre um dado  $q_0$  e  $q_f$  sujeito às restrições

$$w_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Os  $w_i$ 's são funções lineares sobre os espaços tangentes de  $\mathbf{R}^n$ , isto é, umas-forma. Considerando que os  $w_i$ 's são suaves e linearmente independentes sobre o conjunto de funções suaves, a seguinte proposição [107] é uma formalização da discussão da introdução.

**Proposição 1. Distribuição aniquilando restrições**

*Dado um conjunto de umas-forma  $w_i(q), i = 1, \dots, k$ , existem campos vetoriais suaves, linearmente independentes  $g_j(q), j = 1, \dots, n - k$  tal que  $w_i(q) \cdot g_j(q) = 0$  para todo  $i$  e  $j$ .*

Na linguagem de distribuições e codistribuições, os resultados desta proposição são expressos definindo a codistribuição

$$\Omega = \text{var}\{w_1, \dots, w_k\},$$

e a distribuição

$$\Delta = \text{var}\{g_1, \dots, g_{n-k}\},$$

e declarando que

$$\Delta = \Omega^\perp.$$

Diz-se que a distribuição  $\Delta$  aniquila a codistribuição  $\Omega$ . O sistema de controle associado com a distribuição  $\Delta$  é da forma

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_{n-k}(q)u_{n-k},$$

com os controles  $u_i$  a serem livremente especificados. Estes resultados podem ser usados para determinar se um conjunto de restrições são holonômicas através da seguinte

proposição:

**Proposição 2. Integrabilidade de restrições Pfaffianas**

*Um conjunto de restrições Pfaffianas suaves é integrável se e somente se a distribuição que aniquila as restrições é involutiva.*

Considerando a proposição 1, que produz um conjunto de campos vetoriais ortogonais a um dado conjunto de formas, fica claro que o problema do planejamento de movimento é equivalente ao do deslocamento dos estados de um sistema de controle. Assim, restringe-se a atenção a sistemas de controle da forma

$$\begin{aligned} \Sigma : \quad \dot{q} &= g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m, \\ q &\in \mathbf{R}^n, \\ u &\in \mathbf{U} \subset \mathbf{R}^m. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Este sistema é dito *livre de deriva*, o que significa dizer que quando os controles são colocados em zero, os estados do sistema não se alteram. Considerando  $g_j$  campos vetoriais suaves, linearmente independentes sobre  $\mathbf{R}^n$  e que seus fluxos são definidos durante todo o tempo, deseja-se determinar as condições sob as quais pode-se deslocar o sistema de  $q_0 \in \mathbf{R}^n$  para um  $q_f \in \mathbf{R}^n$  arbitrário, pela escolha de um sinal  $u(\cdot)$  adequado.

Um sistema  $\Sigma$  é controlável se para qualquer  $q_0, q_f \in \mathbf{R}^n$  existe um  $T > 0$  e  $u : [0, T] \rightarrow \mathbf{U}$  tal que  $\Sigma$  satisfaz  $q(0) = q_0$  e  $q(T) = q_f$ . Um sistema é dito ser *localmente controlável a curto tempo* em  $q_0$  se pontos próximos podem ser atingidos num intervalo de tempo arbitrariamente curto e permanecer sempre próximo de  $q_0$ . Dado um conjunto aberto  $V \subseteq \mathbf{R}^n$ , define-se  $\mathcal{R}^V(q_0, T)$  como sendo o conjunto de estados  $q$  tal que exista  $u : [0, T] \rightarrow \mathbf{U}$  que desloca  $\Sigma$  de  $q(0) = q_0$  até  $q(T) = q_f$  e satisfaz  $q(t) \in V$  para  $0 \leq t \leq T$ . Também define-se

$$\mathcal{R}^V(q_0, t \leq T) = \bigcup_{0 < \tau \leq T} \mathcal{R}^V(q_0, \tau),$$

como sendo os estados atingíveis até o tempo  $T$ . Um sistema é localmente controlável a curto tempo se  $\mathcal{R}^V(q_0, t \leq T)$  contém uma vizinhança de  $q_0$  para todas as vizinhanças de  $V$  de  $q_0$  e  $T > 0$ .

O Teorema de Chow [107] afirma que um sistema de controle (2.4) é localmente controlável em  $q \in \mathbf{R}^n$  se  $\bar{\Delta}_q = T_q \mathbf{R}^n$ . Este resultado comprova que um sistema sem deriva  $\Sigma$  é controlável se o posto da matriz de controlabilidade da álgebra de Lie for  $n$ . A condição do teorema de Chow consiste em verificar o posto da álgebra de Lie de controlabilidade, e será aqui referenciado como *condição de posto de controlabilidade*.

Em princípio, tem-se agora uma receita para resolver o problema do planejamento de movimento para sistemas que satisfaçam a condição de posto de controlabilidade. Dado um ponto inicial  $q_0$  e um ponto final  $q_f$ , encontra-se um número finito de caminhos

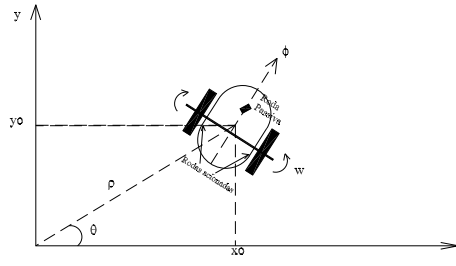


Figura 2.1: Sistema de coordenadas para o robô.

intermediários  $q_1, q_2, \dots, q_p \in \mathbf{R}^n$  e vizinhanças de  $V_i$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^p \mathcal{R}^{V_i}(q_i, t \leq T),$$

contenha segmentos de linha reta conectando  $q_0$  a  $q_f$ . Então existe uma lei de controle com  $p$  segmentos que desloca o sistema de  $q_0$  até  $q_f$ . A dificuldade deste procedimento (e dos teoremas aqui apresentados) é que eles não mostram como *construir* o caminho juntando  $q_0$  a  $q_f$ , só provam sua existência.

## 2.3 Exemplo: Robô móvel com acionamento diferencial

Um robô que se move com acionamento diferencial é o exemplo utilizado como base de comparação no desenvolvimento de estratégias de controle para sistemas não-holonômicos. Para reduzir o espaço de configuração, considera-se que o robô possui três rodas, duas acionadas individualmente e uma terceira que gira livremente, cuja função é apenas servir de suporte para o robô (evitar que ele se incline quando se move sobre um plano). Considera-se que esta terceira roda tem efeitos desprezíveis na dinâmica do veículo. As duas rodas acionadas individualmente são responsáveis pelo movimento do robô e diferenças de velocidade entre as mesmas fazem com que o robô mude sua orientação. No caso limite, uma roda girando em sentido contrário ao da outra, com o mesmo módulo de velocidade, provocam a rotação do robô em torno do seu eixo. O corpo do robô tem uma forma simétrica e o centro de massa está no centro geométrico do corpo.

Tal sistema está representado na Figura 2.1, onde a posição do mesmo está representada tanto em coordenadas retangulares quanto polares. A posição do centro geométrico em coordenadas retangulares é dada por  $(x_0, y_0)$ , e  $\phi$  é o ângulo entre o eixo central do robô (sentido longitudinal) e o eixo  $x$  do sistema de coordenadas, representando a direção à frente. O sistema também pode ser representado em coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ . A velocidade linear do robô é dada por  $v_o$ , e  $w_o$  indica a velocidade angular.

A postura do robô,  $q$ , é definida [147] como

$$q = [x_o, y_o, \phi]^T.$$

O robô móvel tem restrição não-holonômica já que as rodas acionadas apenas giram para frente ou para trás e não deslizam lateralmente, podendo esta ser escrita como

$$\dot{y}_o \cos(\phi) - \dot{x}_o \sin(\phi) = 0.$$

Portanto, o sistema tem espaço de configuração tri-dimensional ( $n = 3$ ) e uma restrição ( $p = 1$ ), o que leva a um vetor de velocidade de dimensão  $m = n - p = 2$ . Escolhendo  $v_o$  e  $w_o$  como as variáveis de estado internas tais que

$$z = [v_o, w_o]^T,$$

obtem-se a equação na forma (2.4) como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_o \\ w_o \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Logo, tem-se que [144]

$$g_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O posto da matriz formada por  $(g_1, g_2)$  é dois e inferior ao espaço de configuração, portanto, deve-se gerar o colchete de Lie  $[g_1, g_2]$  para verificar se o sistema é holonômico, e a possibilidade de completar a distribuição para verificar se o sistema é controlável. Logo

$$[g_1, g_2] = g_3 = \nabla g_2 g_1 - \nabla g_1 g_2 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix},$$

e do teorema de Frobenius, se o sistema  $\dot{q} = G.u$  é completamente integrável (holonômico) então ele é involutivo, ou seja

$$\text{Posto}(g_1 \ g_2) = \text{Posto}(g_1 \ g_2 \ [g_1, g_2]).$$

A verificação leva a:

$$\text{Posto} \left\{ \left[ \begin{array}{ccc} -\text{sen}(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & \text{sen}(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \right\} = 3.$$

Com isto conclui-se que o sistema é não-holonômico. Pelo teorema de Chow (condição de posto da álgebra de Lie) tem-se que o posto do sistema acrescido de  $g_3$  é igual ao do espaço de configuração, logo o sistema é controlável.

## 2.4 Formas Canônicas

Está-se principalmente interessado na construção de sistemas não-holonômicos que sejam canônicos [108] no sentido em que permitam a expansão máxima por colchete de Lie dos campos vetoriais  $G = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ . Bases que sejam álgebras de Lie possuem esta propriedade inerente. A base de Philip Hall [79] é uma álgebra de Lie e permite tal expansão além de levar em consideração as propriedades anti-simétrica e a identidade de Jacobi durante a expansão [107]. Classes bem conhecidas de sistemas não-holonômicos são aquelas na forma encadeada [78] dadas por sistemas do tipo

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= y_1 \dot{y}_2, \\ \dot{z}_2 &= z_1 \dot{y}_2, \\ \dot{z}_3 &= z_2 \dot{y}_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-m} &= z_{n-m-1} \dot{y}_2, \\ \dot{y}_1 &= u_1, \\ \dot{y}_2 &= u_2. \end{aligned}$$

e de sistemas na forma de potência, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= y_1 \dot{y}_2, \\ \dot{z}_2 &= \frac{1}{2} (y_1)^2 \dot{y}_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-m} &= \frac{1}{(n-m)!} (y_1)^{n-m} \dot{y}_2, \\ \dot{y}_1 &= u_1, \\ \dot{y}_2 &= u_2. \end{aligned}$$

Ambas as classes acima satisfazem a condição de não-holonomicidade completa do teorema de Chow, portanto, são controláveis. As duas formas são equivalentes através de uma transformação de estados.

A forma de integrador não-holonômico ou sistema de Heisenberg ou integrador de Brockett é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde  $x_1, u_1, x_2, u_2, x_3 \in \mathbf{R}$ . Este sistema pode ser representado na forma compacta empregando a definição de colchete de Lie como [19]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ \dot{Y} &= [u, x],\end{aligned}\tag{2.7}$$

onde  $u = (u_1, u_2)$ ,  $x = (x_1, x_2)$  e  $Y = \begin{pmatrix} 0 & x_3 \\ -x_3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Sistemas na forma cartesiana como o do robô móvel com acionamento diferencial podem ser convertidos para a forma do integrador não-holonômico (2.6), através da aplicação da seguinte transformação de coordenadas [61]:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_c \cos(\theta) + y_c \text{sen}(\theta), \\ x_2 &= \theta, \\ x_3 &= 2(x_c \text{sen}(\theta) - y_c \cos(\theta)) - \theta(x_c \cos(\theta) + y_c \text{sen}(\theta)), \\ u_1 &= v - w(x_c \text{sen}(\theta) - y_c \cos(\theta)), \\ u_2 &= w.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Ao invés de representar o robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana, Aicardi e seus colaboradores [8] sugerem a representação do mesmo em termos de coordenadas polares, envolvendo o erro de distância  $e > 0$  e sua orientação  $\phi$  em relação a origem da base  $\langle g \rangle$ , desta forma obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -u \cos(\phi - \theta), \\ \dot{\phi} &= u \frac{\text{sen}(\phi - \theta)}{e}, \\ \dot{\theta} &= w.\end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha = \phi - \theta$  como sendo o ângulo medido entre o eixo principal do veículo e o vetor distância  $e$ , chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -u \cos(\alpha), \\ \dot{\alpha} &= -w + u \frac{\text{sen}(\alpha)}{e}, \\ \dot{\phi} &= u \frac{\text{sen}(\alpha)}{e}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Utilizando esta última forma, o projeto de leis de controles lineares, invariantes no tempo, em malha fechada se torna direto. Entretanto, deve ser observado que as equa-

ções somente são válidas quando o erro do vetor distância é diferente de zero ou que simultaneamente  $\sin(\alpha)$  também seja zero.

## 2.5 Controle de sistemas não-holonômicos

O controle de sistemas não-holonômicos pode ser agrupado como na teoria clássica de controle em: métodos de malha aberta e métodos de malha fechada. Os métodos de malha aberta são também conhecidos como planejamento do movimento para sistemas não-holonômicos, e buscam leis de controle em malha aberta que desloque o sistema de um estado inicial até um estado final. Já os métodos de malha fechada são aqueles que possuem alguma lei de realimentação para: estabilizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio, seguir uma trajetória, ou rejeitar distúrbios.

### 2.5.1 Métodos para malha aberta

Tais métodos, em contraste com técnicas tradicionais, devem levar em consideração as restrições instantâneas ao movimento. As técnicas mais difundidas são as baseadas em:

- geometria diferencial e álgebra diferencial;
- fase geométrica;
- parametrização da entrada;
- controle ótimo do movimento;
- planejamento do movimento evitando-se obstáculos.

#### Métodos empregando geometria diferencial e álgebra diferencial

Utilizam extensivamente o conceito de colchete e álgebra de Lie para o planejamento do movimento, encontra-se entre seus maiores defensores pesquisadores como G. Lafferriere e Héctor J. Sussmann. O primeiro método neste grupo utiliza entradas constantes por parte para gerar movimentos nas direções dos colchetes de Lie, e é chamado de método de aproximação nilpotente [80]. Baseia-se no fato de que, se um sistema de controle pode ser expandido pelo colchete de Lie (é uma álgebra de Lie), então têm-se duas situações: se o sistema é nilpotente existe uma solução única para o problema, caso contrário, pode-se aplicar um método de nilpotencialização por realimentação através de um pré-compensador e fazer com que um algoritmo de controle produza uma solução exata num número finito de passos.

O método de aproximação nilpotente considera que o sistema é completamente controlável, não possui deriva e é formado por campos vetoriais reais e analíticos. A primeira condição é equivalente à condição do posto da álgebra de Lie (LARC) ou condição de



posto de controlabilidade. Uma álgebra de Lie é dita ser nilpotente se existe um inteiro  $k > 0$  com a propriedade de que todos os colchetes de Lie  $[v_1, [v_2, \dots, [v_k, v_{k+1}]]$  se anulam. O menor deste  $k$  é a ordem de nilpotência da álgebra de Lie, e a álgebra de Lie é dita ser nilpotente de ordem  $k$ . Para ilustrar, o sistema será de ordem um se  $[f_i, f_j] = 0$  para todo  $i, j$ , ou seja, se o sistema for Abeliano (comutativo). Lafferriere e seus colaboradores [80] mostraram que, se a ordem de nilpotência for igual ou maior que o número de estados do sistema, pode-se então criar um sistema estendido, achar um controle  $v$  que desloca  $p$  para  $q$  para o sistema estendido, e então achar  $u$  que desloca  $p$  para  $q$  no sistema original. Para facilitar a expansão do sistema (evitar termos anti-simétricos e que satisfazem a identidade de Jacobi) é utilizado a base de Philipp Hall.

Muitos sistemas que não são nilpotentes podem ser transformados em sistemas nilpotentes através de realimentação que consiste numa mudança linear dos controles

$$u_i = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x)v_j,$$

tal que  $\beta(x)$  seja uma matriz não singular para cada  $x$ , e  $\beta(x)$  seja suave como função de  $x$ .

Considerando o robô descrito anteriormente, onde os controles são a velocidade de acionamento e a velocidade angular, as equações para o sistema são:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \cos(x_3)u_1, \\ \dot{x}_2 &= \text{sen}(x_3)u_1, \\ \dot{x}_3 &= u_2.\end{aligned}$$

onde  $(x_1, x_2)$  são as coordenadas cartesianas do centro do robô e  $x_3$  é o ângulo que seu eixo principal faz com o eixo  $x_1$ . Pode-se reescrever o sistema como  $\dot{x} = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x)$  onde

$$f_1(x) = (\cos(x_3), \text{sen}(x_3), 0) \quad f_2(x) = (0, 0, 1).$$

Vê-se que os vetores  $f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)$  varrem  $\mathbf{R}^3$  próximo de  $x = 0$ , de forma que o sistema é nilpotencializável, porém, o mesmo não é nilpotente. O sistema pode ser tornado nilpotente usando a seguinte realimentação

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{\cos(x_3)}w_1, \\ u_2 &= \cos^2(x_3)w_2.\end{aligned}$$

O sistema é transformado então em

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= w_1, \\ \dot{x}_2 &= \tan(x_3)w_1, \\ \dot{x}_3 &= \cos^2(x_3)w_2,\end{aligned}$$

o qual é nilpotente de ordem 2. Calculam-se então os sinais de controle desejados como segue. Primeiro aplica-se o procedimento ao sistema nilpotente para obter os controles  $w_i$ , então usando a realimentação calcula-se os controles para o sistema original. A solução para o sistema estendido será da forma

$$S(T) = e^{\alpha f_1} e^{\beta f_2} e^{\gamma[f_1, f_2]}.$$

O movimento no sentido de  $[f_1, f_2]$  é equivalente ao deslocamento do sistema na direção de  $f_1$  por  $\Delta t$  segundos, seguida na direção  $f_2$  por  $\Delta t$  segundos, na direção  $-f_1$  por  $\Delta t$  segundos, e finalmente na direção  $-f_2$  por  $\Delta t$  segundos.

Sussmann e seus colaboradores [135] propuseram um método que emprega entradas altamente oscilatórias. A idéia deste método é tomar um caminho  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p, \gamma(T) = q$ , que não precisa ser admissível, e tentar aproximar deste caminho total através de uma seqüência  $\{\gamma_i\}$  de caminhos admissíveis, também definidos sobre  $[0, T]$ , e também satisfazendo às condições iniciais. Para tal, estende-se o sistema original empregando o colchete de Lie e então expressa-se o caminho  $\gamma$  como uma trajetória no novo sistema correspondente a alguma entrada estendida  $v$ . Tenta-se encontrar uma seqüência de entradas comuns  $w^j$  cujas trajetórias convergem para as entradas estendidas. Usam-se entradas de controle periódicas de alta freqüência e alta amplitude para gerar movimento na direção dos novos campos vetoriais (gerados pelos colchetes de Lie). O resultado do movimento médio do sistema, obtido no limite destas entradas de alta freqüência, é um deslocamento preciso (dentro de uma determinada tolerância). Os sinais de controle são do tipo  $u_i^k = \eta_1(t) + \sqrt{j} \eta_3(t) \text{sen}(jt)$ . Deve-se tomar cuidado para escolher freqüências e coeficientes de forma que os sinais de controle resultantes sejam reais. Este método tem uso limitado devido ao tipo de sinal de controle utilizado. Pode ser utilizado como aproximação inicial para problemas onde seja necessário evitar obstáculos.

### Método usando fase geométrica

Este método se aplica a sistemas de controle não-holonômicos do tipo cinemático de Chaplygin. Consiste na determinação da alteração resultante no vetor fibra baseado na integral de linha ao longo do caminho do vetor base, quando este é submetido a um movimento cíclico. O valor desta integral de linha independe de qualquer parametrização do caminho, dependendo apenas da geometria do mesmo; assim, este valor é referenciado como a geometria de fase [78]. O problema então se reduz à determinação de um caminho base que produza a desejada geometria de fase.

O emprego do teorema de Stokes e a expansão em série de Taylor permite a expansão da integral de linha utilizando colchetes de Lie. Para um sistema nilpotente esta série termina após um número finito de termos, fornecendo desse modo uma expressão explícita para a geometria de fase.

Este método foi usado para resolver problemas de reorientação de satélites no espaço, e para explicar como os movimentos cíclicos dos cílios sobre a superfície do paramecium provocam o movimento do mesmo [107].

### Métodos de parametrização da entrada

Brockett mostrou [107] que para sistemas de controle descrito por equações como (2.1), os sinais de controles que levam uma função de energia a ser otimizada da forma:

$$L(q, \dot{q}) = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \lambda(\dot{q}_3 - q_1\dot{q}_2 + q_2\dot{q}_1),$$

onde a primeira parte do lado direito representa o quadrado do sinal de entrada e a segunda parte corresponde as restrições ao movimento; são sinais periódicos, mais especificamente, senóides. O sinal ótimo é obtido aplicando-se as equações de Euler-Lagrange para minimizar a função Lagrangeana acima. A solução do sistema indica que  $\lambda$  é constante e que os sinais que satisfazem o sistema resultante (uma matriz real anti-simétrica, portanto, possuindo autovalores complexos conjugados) são senóides de frequência  $\lambda$ .

Baseados nestes resultados, Murray e seus colaboradores [108] propuseram um método de deslocamento por parametrização da entrada usando senóides. Para sistemas que se tornam completamente não-holonômicos com apenas o primeiro nível de colchete de Lie ( $[g_i, g_j]$ ), o método consiste basicamente em: deslocar os  $x_i$ 's até que seus valores finais sejam atingidos usando um sinal qualquer e ignorando a evolução dos estados  $x_{ij}$ 's; usando senóides com frequências múltiplas, encontrar  $u_0$  que desloca os estados  $x_{ij}$ 's até o valor objetivado. Esta última ação mantém os estados  $x_i$ 's inalterados (sinal periódico) enquanto gera um deslocamento nos estados  $x_{ij}$ 's. O método pode ser estendido a sistemas de segunda ordem (onde é necessário um segundo nível de colcheteamento para varrer todo o espaço tangencial em  $q$ ). Neste caso, os dois passos anteriores são aplicados acrescidos de um terceiro: utilizam-se entradas senoidais uma segunda vez para mover todos os estados previamente deslocados e gerar movimento apenas nas direções  $x_{ijk}$ 's.

### Método de controle ótimo do movimento

Sussmann [133] considera o controle ótimo um método natural para problemas de busca de caminhos para sistemas não-holonômicos. Em muitos casos existe uma função que se deseja minimizar ou quase minimizar. E, mesmo que a escolha desta função não seja óbvia, a transformação *artificial* do problema de encontrar um caminho em um de otimização é desejada.

A principal limitação do método por controle ótimo é que, exceto em alguns casos muito especiais, os sinais de controle ótimo são muito difíceis de se calcular. Entretanto, usando métodos recentes da geometria diferencial, algum progresso tem sido obtido para sistemas que não podem ser tratados pelos métodos clássicos de controle ótimo.

Pode-se aplicar o método de controle ótimo por mínimos quadrados para sistemas na forma da equação (2.1), quando o mesmo atende a condição de posto de controlabilidade.

A função de custo a ser minimizada será do tipo

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt.$$

Murray e seus colaboradores [107] apresentam uma derivação heurística das condições necessárias para otimalidade usando cálculo de variações. Neste caso, a função de custo deve incorporar as restrições usando uma função multiplicadora de Lagrange  $p(t)$ , obtendo

$$J(q, p, u) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} u^T(t) u(t) - p^T (\dot{q} - \sum_{i=1}^m g_i(q) u_i) \right\} dt.$$

Prova-se [107] que a norma da entrada ótima é constante, isto é,

$$\|u(t)\|^2 = \|u(0)\|^2 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Desenvolvendo o sistema acima obtém-se

$$\dot{u} = \Omega(q, p)u,$$

onde  $\Omega(q, p)$  é uma matriz anti-simétrica dada por

$$\Omega(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & p^T [g_1, g_2] & \cdots & p^T [g_1, g_m] \\ -p^T [g_1, g_2] & 0 & \cdots & p^T [g_2, g_m] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p^T [g_1, g_m] & -p^T [g_2, g_m] & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução da equação  $\dot{u}$  é da forma

$$u(t) = U(t)u(0),$$

para algum  $U(t) \in SO(m)$ . Brockett e Dai [78] demonstraram a otimalidade de sinais de controle senoidais e elípticos que satisfazem o sistema acima.

### Métodos de planejamento do movimento evitando-se obstáculos

Existe uma distinção entre método de deslocamento e de planejamento do caminho evitando-se obstáculos. Enquanto o primeiro busca funções de entradas para seguir uma trajetória utilizando tanto métodos de malha aberta quanto de malha fechada, o segundo preocupa-se em gerar uma trajetória livre de obstáculos. Pode-se citar como métodos de deslocamentos aqueles que buscam caminhos ótimos, sistemas com entradas senoidais [126] e na forma encadeada, métodos de deslocamento baseados na planicidade para robôs móveis com reboques, dentre outros [82]. Para o planejamento de caminhos na presença de obstáculos, destacam-se os métodos: derivação a partir de caminhos holonômicos, proba-

bilístico, utilizando técnicas de otimização, espaço de caminho, multi-nível, empregando técnicas de inteligência artificial (algoritmo A estrela), etc. Métodos desenvolvidos para sistemas na ausência de obstáculos podem ser estendidos para sistemas com obstáculos dependendo de algumas propriedades topológicas destes [83].

A grande maioria destes métodos inicia a construção do caminho desprezando as restrições não-holonômicas, buscando apenas um caminho realizável. Nesta fase, os métodos descritos anteriormente para deslocamento do sistema e outros mais comuns são empregados. Encontrada uma trajetória realizável, são introduzidas as restrições não-holonômicas e um caminho livre de obstáculos sujeito a restrições não-holonômicas é obtido.

Para sistemas não-holonômicos simples do tipo robô móvel é possível planejar caminhos melhores usando esqueletos [97, 78]. Um esqueleto é uma coleção de caminhos fixos (geralmente não realizáveis) que estão de forma máxima livres de obstáculos. O sistema é forçado a seguir o esqueleto de um estado inicial até um estado final enquanto evita obstáculos. Uma vez que o esqueleto fica de forma máxima livre de obstáculos, o caminho resultante tende a ser de baixa complexidade.

## 2.5.2 Métodos para malha fechada

Muitas vezes é necessário a utilização de controle por realimentação. Dependendo do tipo de resposta desejada, existem diversas formulações para o problema de controle. Pode-se destacar três abordagens mais comuns [75]: estabilização, rastreamento, e rejeição / atenuação de distúrbios (e várias combinações das mesmas). No caso da estabilização, procura-se leis de realimentação (variantes ou invariantes no tempo) que estabilizem um sistema para um determinado ponto de equilíbrio. Para o rastreamento, a meta básica é projetar um sinal de controle de forma que a saída controlada  $y$  siga um sinal de referência  $y_R$ , isto é,

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \approx 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde  $t_0$  é o instante em que o controle se inicia. Como o valor inicial de  $y$  depende do estado inicial ( $x_0$ ), é necessário partir de um estado "pré-estabelecido".

Um postulado bem conhecido dos pesquisadores em controle não-linear proposto por Brockett [22] diz que: *Um sistema não-holonômico, embora seja completamente controlável, não pode ser estabilizado para uma configuração final de repouso através de leis suaves de realimentação nos estados.* Este postulado se aplica à estabilização em torno de um ponto de equilíbrio e leis de controle invariantes no tempo, porém, não é válido para o rastreamento de uma trajetória [144]. Neste último caso, pode-se usar as leis de controle conhecidas se o sistema for linearizável por realimentação estática ou dinâmica de estados, e uma vez que a trajetória de referência não contenha configurações de repouso.

Para sistemas lineares invariantes no tempo, se os autovalores instáveis do sistema são controláveis, então a origem pode ser estabilizada de forma assintótica. Sistemas

não-holonômicos apresentam características que o diferenciam consideravelmente do caso anterior. Mesmo que linearizado em torno de um ponto de operação, o sistema não é assintoticamente estável, logo, as estratégias tradicionais não podem ser empregadas. As técnicas de controle desenvolvidas para vencer esta limitação mais difundidas são:

- estabilização variante no tempo;
- estabilização usando sinais não-contínuos ou transformações não-lineares;
- leis híbridas de realimentação.

## 2.6 Comentários

Os desenvolvimentos da teoria de controle não-linear têm propiciado avanços no controle de sistemas não-holonômicos. Pode-se citar como linhas básicas de pesquisa, o emprego de realimentação com sinais variantes no tempo e usando sinais não-contínuos. A utilização de transformações não-lineares e/ou mudança de bases de representação possibilitam o uso de técnicas de controle linear.

As ferramentas mostradas neste capítulo permitem a verificação da condição de restrição não-holonômica, da controlabilidade e da possibilidade de usar transformações não-lineares. Diversos métodos de controle têm sido desenvolvidos para o controle de sistemas não-holonômicos, mas esta ainda é uma área fértil para novas pesquisas.

A base matemática mostrada neste capítulo é usada ao longo deste trabalho para o desenvolvimento de controladores para estabilização e rastreamento de trajetórias. Alguns desenvolvimentos mais aprofundados foram omitidos, mas podem ser encontrados na literatura citada no primeiro capítulo.

## Capítulo 3

# Estabilização e rastreamento de trajetórias através de realimentação não-linear

A estabilização (ou convergência) por realimentação de sistemas não-holonômicos [46] a uma determinada configuração é crítica porque não é possível encontrar leis de realimentação suaves invariantes no tempo para esta classe de sistemas [22], excetuando-se os casos onde há uma mudança de base que lineariza o sistema. Apesar da limitação imposta pela condição de Brockett, o fato do sistema ser completamente não-holonômico garante a existência de estratégias de controle em malha fechada que estabilizam assintoticamente o sistema [78]. Os métodos existentes para estabilização num ponto de equilíbrio de sistemas não-holonômicos podem ser divididos em pelo menos três classes: estabilização por realimentação de sinais não contínuos (descontínuos) [129, 8, 15, 16, 43, 93, 47], realimentação de sinais periódicos variantes no tempo [114, 107, 122, 101, 141, 45], e técnicas de controle híbrido [113, 64, 19, 20].

Dentre as diversas representações de sistemas não-holonômicos destaca-se particularmente a forma encadeada [107, 78, 43]. Muitos sistemas mecânicos não-lineares podem ser transformados (através de mudanças de coordenadas e realimentação) nesta forma [107, 78]. Sistemas na forma encadeada são conhecidos por constituírem uma importante classe de sistemas não-holonômicos sem deriva e terem uma vasta aplicação prática (modelagem de veículos, robôs móveis, naves sub atuadas, dentre outras).

Este capítulo trata, inicialmente, o problema da realimentação de sinais não-contínuos (escalonamento de estados e chaveamento de sinais) para estabilizar um robô móvel com acionamento diferencial (sistema não-holonômico tido como *benchmark*), isto é, um robô móvel com as duas rodas traseiras controladas independentemente, e uma roda frontal de livre giro que evita que o robô se incline quando o mesmo se move no plano horizontal [94]. Os resultados iniciais posteriormente são estendidos para a estabilização de sistemas

não-holonômicos de ordem elevada e rastreamento de trajetórias.

O objetivo é desenvolver controladores com convergência assintótica para estabilizar e rastrear trajetórias de sistemas não-holonômicos na forma encadeada. Uma vez que a taxa de convergência obtida através de leis de realimentação periódicas suaves (variantes no tempo) são necessariamente não-exponenciais [107], utiliza-se aqui uma combinação de sinais não-contínuos e controle chaveado (híbrido) buscando uma convergência assintótica. A metodologia para obtenção das leis de controle deve ser simples, de fácil assimilação, e, dentro do possível, utilizar conceitos empregados em sistemas lineares.

### 3.1 Estabilização de sistemas na forma encadeada

A utilização do escalonamento de estados (dentre estes métodos o processo sigma), a partir de 1996 [15], permitiu resolver o problema da convergência exponencial para sistemas não-holonômicos. Os métodos disponíveis até esta época (sinais contínuos por partes e/ou variantes no tempo) só permitiam projetar sistemas estáveis ou assintoticamente estáveis [78]. O tempo para convergência não era assegurado [107], podendo o sistema exibir movimentos oscilatórios por um tempo indeterminado até atingir a meta desejada. A justificativa para este fato é que quando cada estado se aproxima de zero, sendo a lei de controle inversamente proporcional a este estado, maior deve ser o ganho para que a convergência seja exponencial. Daí a necessidade de se ter um ganho inversamente proporcional a pelo menos um dos estados. Métodos empregando controle não-contínuo (descontínuo) utilizam esta transformação [15, 90, 141, 93]. Este artifício permite gerar leis inversamente proporcionais a um ou mais estados que estabilizam exponencialmente o sistema. Embora a estabilização exponencial possa ser obtida com esta transformação, sendo a mesma não-contínua, existe uma região onde a transformação pode não ser aplicável. Vários métodos foram propostos para vencer esta dificuldade, porém, nenhum apresentou uma prova formal para a convergência global do sistema [93].

Um sistema não-holonômico, sem deriva, com duas entradas e "n" estados, na forma encadeada é representado como:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= v_1, \\
 \dot{z}_2 &= z_3 v_1, \\
 \dot{z}_3 &= z_4 v_1, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1} &= z_n v_1, \\
 \dot{z}_n &= v_2,
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$



ou, de uma forma mais genérica como:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z} &= v_1 A z + B v_2,\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1 \times n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

### 3.1.1 Sistemas na forma encadeada com três estados

Para facilitar o entendimento, primeiramente é desenvolvido um controlador para um robô móvel com acionamento diferencial. Um robô deste tipo pode ser representado em formas canônicas tais como: cartesiana, encadeada, de potência, anti-simétrica e na forma de integrador não-holonômico, para citar algumas [43]. A representação do mesmo na forma encadeada é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 v_1, \\ \dot{z}_3 &= v_2,\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde  $\vec{z}$  são estados e  $\vec{v}$ , entradas.

Como pode ser visto, os estados  $z_1$  e  $z_3$  são controlados diretamente, isto significa que é possível fazer  $v_1 = -\lambda_1 z_1$  e  $v_2 = -\lambda_3 z_3$  para estabilizar exponencialmente  $z_1$  e  $z_3$ . Entretanto, isto não implica na estabilização de  $z_2$ , porque não há acesso direto a este estado.

A idéia deste novo controlador é estabilizar exponencialmente  $z_2$  antes dos outros estados pela escolha de diferentes constantes de tempo, tentando estabilizar  $z_2$ , depois  $z_3$ , e finalmente  $z_1$ . Como em outros trabalhos [15, 90, 141] este método também se baseia em ferramentas do controle linear. Desta forma é possível aplicar mudanças de variáveis que transformam o sistema (3.1) num sistema linear quando  $z_1 \neq 0$  ou considerar o subsistema (3.2) como um sistema variante no tempo com  $v_1$  sendo uma função do tempo [93]. Saiba-se que a estabilidade de sistemas variantes no tempo não pode ser assegurada através do espectro dos autovalores [75]. Entretanto, isto não acontece se a influência do tempo modifica lentamente (veja abaixo) o comportamento geral do sistema [75].

Um sistema não-holonômico na forma encadeada será lentamente variante no tempo caso  $v_1$  atenda às seguintes condições [93]:

1. para todo  $t \geq 0, v_1(t) \neq 0$ ,

2. para todo  $t \geq 0$ ,  $|(\frac{dv_1}{dt})| \leq \alpha|v_1(t)|$ ,  $\alpha$  sendo algum valor constante positivo.

Para estabilizar exponencialmente  $z_2$  é necessário que  $\dot{z}_2 = z_3v_1 = -\lambda_2z_2$  ou

$$z_3 = \frac{-\lambda_2z_2}{v_1}. \quad (3.4)$$

Neste ponto é necessário alguns comentários:

1. pode-se fazer  $v_1 = -\lambda_1z_1$  como proposto por alguns autores [15] evitando a vizinhança de  $z_1 = 0$ . Isto tornará a convergência exponencial;
2. na vizinhança de  $z_1 = 0$  pode-se substituir a lei de controle por  $v_1 = -\text{sin}al(z_1)\delta$  sendo  $\delta$  constante, onde a função  $\text{sin}al(x)$  é igual a  $+1 \ \forall x \geq 0$ ; caso contrário é igual a  $-1$ . Isto garante a estabilização de todos os estados como será mostrado a seguir.
3. apesar de cada lei de controle indicada acima levar a um sistema estável nesta faixa de controle, falta provar que o chaveamento entre as mesmas levará a um sistema globalmente estável. Para sistemas híbridos a existência de uma função comum de Lyapunov confirma esta estabilidade [112, 85, 31].

Considerando o primeiro caso, as entradas serão então escolhidas como:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\lambda_1z_1, \\ v_2 &= \left(\frac{-\lambda_2z_2}{v_1}\right) - \lambda_3z_3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

e  $\lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_1 > 0$ . Como  $\lambda$  é o inverso da constante de tempo, isto significa que  $z_2$  irá convergir antes de  $z_3$  e esta última antes de  $z_1$ , dependendo das condições iniciais de  $z_1, z_2, z_3$ . É necessário atrasar a convergência de  $z_1$  para evitar singularidades em  $v_2$  que podem ocorrer caso  $z_1 = 0$ . Se  $z_1$  anular ou for menor que um valor  $\gamma$  suficientemente pequeno em algum instante, as ações de controle,  $v_1$  e  $v_2$ , devem ser chaveadas para:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\text{sin}al(z_1)\delta, \\ v_2 &= \left(\frac{-\lambda_2z_2}{-\text{sin}al(z_1)\delta}\right) - \lambda_3z_3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo o sinal de  $\delta$  o inverso do sinal de  $z_1$ . Isto garantirá que  $z_1$  se mantenha ao redor da posição desejada até que os demais estados se estabilizem.

Existem duas condições distintas de funcionamento do sistema: quando o mesmo está fora da vizinhança de  $z_1 = 0$  ou quando o mesmo está na situação inversa. No primeiro caso utiliza-se  $v_1 = -\lambda_1z_1$  para garantir uma estabilização assintótica de  $z_1$ . Quando  $z_1$  estiver na vizinhança de zero utiliza-se  $v_1 = -\text{sin}al(z_1)\delta$ . O primeiro sistema pode ser

linearizado através de uma transformação não-contínua [15, 90, 141, 93] e sua estabilidade analisada a partir do sistema linearizado.

Considerando a seguinte mudança de variável para o sistema (3.3):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_1, \\ \xi_2 &= -\frac{z_2}{z_1}, \\ \xi_3 &= z_3,\end{aligned}\tag{3.7}$$

então

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1, \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\dot{z}_2}{z_1} + \frac{z_2}{z_1^2}\dot{z}_1 = -\frac{z_3 v_1}{z_1} + \frac{z_2 v_1}{z_1^2} = \left(\frac{\xi_2 - \xi_3}{\xi_1}\right)v_1, \\ \dot{\xi}_3 &= v_2,\end{aligned}\tag{3.8}$$

usando os sinais de controle propostos

$$\begin{aligned}v_1 &= -\lambda_1 \xi_1, \\ v_2 &= p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3\end{aligned}\tag{3.9}$$

logo,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1 \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= (\xi_2 - \xi_3)(-\lambda_1) = \lambda_1 \xi_3 - \lambda_1 \xi_2, \\ \dot{\xi}_3 &= p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3,\end{aligned}\tag{3.10}$$

tem-se então um subsistema com coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.\tag{3.11}$$

Utilizando a candidata a função de Lyapunov

$$V(\xi) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{2},\tag{3.12}$$

claramente definida positiva, sua derivada é dada por

$$\dot{V} = \xi_1 \dot{\xi}_1 + \xi_2 \dot{\xi}_2 + \xi_3 \dot{\xi}_3,\tag{3.13}$$

Logo

$$\dot{V} = -\lambda_1 \xi_1^2 - \lambda_1 \xi_2^2 + \lambda_1 \xi_2 \xi_3 + p_2 \xi_2 \xi_3 + p_3 \xi_3^2.\tag{3.14}$$

Fazendo  $p_2 = -\lambda_1$  e  $p_3 < 0$  este sistema será assintoticamente estável.

Considerando agora uma nova mudança de variável para o sistema (3.3) do tipo:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_1, \\ \xi_2 &= -\frac{z_2}{v_1}, \\ \xi_3 &= z_3,\end{aligned}\tag{3.15}$$

e, se  $v_1$  for constante, então

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1, \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\dot{z}_2}{v_1} = -\frac{z_3 v_1}{v_1} = \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= v_2,\end{aligned}\tag{3.16}$$

usando os sinais de controle propostos

$$\begin{aligned}v_1 &= -\text{sinal}(z_1)\delta, \\ v_2 &= p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3\end{aligned}\tag{3.17}$$

logo,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\text{sinal}(z_1)\delta, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3,\end{aligned}\tag{3.18}$$

tem-se então um subsistema com coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.\tag{3.19}$$

Definindo  $V_1(\xi_1)$  como uma candidata a função de Lyapunov para o primeiro subsistema e  $V_2(\xi_2, \xi_3)$  como uma função de Lyapunov para o segundo subsistema, então  $V(\xi) = V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2, \xi_3)$  é uma função global do sistema [70]. Se  $\dot{V}_1(\xi_1) < 0$  e  $\dot{V}_2(\xi_2, \xi_3) < 0$  então  $\dot{V}(\xi) < 0$ , o que implica a estabilidade de todo o sistema.

A convergência de  $\xi_1$  pode ser demonstrada, utilizando a candidata a função de Lyapunov:

$$V_1(\xi_1) = \frac{\xi_1^2}{2}.\tag{3.20}$$

Como  $\dot{V}_1(\xi_1) = \xi_1 \dot{\xi}_1$  deve ser negativa, logo  $\delta$  deve ter sinal contrário ao de  $\xi_1$  porque  $\dot{\xi}_1 = v_1 = -\text{sinal}(z_1)\delta$ , lembrando que  $\xi_1 = z_1$ .

Observa-se também que a solução de  $\dot{\xi}_1(t) = \delta$  é uma função linear  $\xi_1(t) = \xi_1(0) + \delta t$ . Desta forma, como o chaveamento ocorre sempre em  $\xi_1 = 0$ , quando atingir este valor o sistema apresentará oscilações com frequência crescente. Estabelecendo o ponto de chaveamento em  $\xi_1 = \pm\gamma$  impõe-se um limite para a frequência de chaveamento.

Escolhendo como candidata a função de Lyapunov:

$$V_2(\xi_2^2 + \xi_3^2)/2, \quad (3.21)$$

claramente definida positiva, então  $\dot{V}_2(\xi_2, \xi_3)$  se torna

$$\dot{V}_2(\xi_2, \xi_3) = \xi_2 \dot{\xi}_2 \xi_3 + \xi_3 \dot{\xi}_3 = \xi_2 \xi_3 + p_2 \xi_2 \xi_3 + p_3 \xi_3^2. \quad (3.22)$$

Escolhendo  $p_2 = -1$  e  $p_3 < 0$ , então  $\dot{V}_2(\xi_2, \xi_3) < 0$  e o subsistema é assintoticamente estável.

O resultado para o subsistema representado por  $V_2(\xi_2, \xi_3)$  pode ser combinado com o de  $V_1(\xi_1)$  na expressão

$$V(\xi) = V_1(\xi_1) + V_2(\xi_2, \xi_3), \quad (3.23)$$

portanto, o sistema (3.3) com entradas (3.17) é globalmente assintoticamente estável. Como a candidata a função de Lyapunov é puramente quadrática, o sinal de controle pode assumir valores positivos e negativos sem alterar o valor desta função.

Quanto ao chaveamento entre sistemas lineares que satisfazem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{p(t)}x(t), \\ p(t^+) &= \varphi(x(t), p(t)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

para  $p(t) \in \{1, 2\}$  sendo a função de chaveamento, pode-se afirmar [85] que existe uma função  $p(t)$  tal que o sistema (3.24) seja estável se e somente se existir uma candidata a função de Lyapunov comum entre os sistemas sob chaveamento (isto é, uma função  $V(x)$  definida positiva cuja derivada é definida negativa para todo  $x \neq 0$  e todo  $p(t)$  levando a sistemas definidos), então o sistema chaveado será assintoticamente estável para qualquer sinal de chaveamento  $p(t)$ .

Este resultado é apresentado como teorema [31, 112]:

**Teorema:** *Seja um sistema híbrido descrito por (3.24). Se para todas as seqüências de chaveamento  $p(t)$  previamente definidas dentro da região*

1.  $\dot{V}_k(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [\tau_k, \tau_{k+1}),$
2.  $V_{k+1}(x(\tau_k)) \leq V_k(x(\tau_k^-))$

onde  $V_k$  é uma candidata a função de Lyapunov comum aos dois sistemas sob chaveamento, então a origem é estável no sentido de Lyapunov.

Considerando a derivada definida negativa no item 1 do teorema acima, o sistema será assintoticamente estável.

Assim, pode-se provar a estabilidade do sistema (3.3) através de uma candidata a função de Lyapunov comum aos dois sistemas sob chaveamento. A candidata a função de Lyapunov para os sistemas mostrados é comum. Falta a garantia que a energia será

decrecente entre chaveamentos adjacentes. Para o caso do chaveamento entre  $\delta$  e  $-\delta$  sendo a função de energia quadrática, fica evidente que entre instantes de chaveamento o valor da energia será o mesmo. O fato da função ser decrescente garante que a energia decresce. Para o chaveamento entre as leis de controle dadas pelas equações (3.5) e (3.17) deve-se considerar que o sistema só utilizará a lei dada pela equação (3.5) se

$$\left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \geq \left| \frac{\xi_2}{v_1} \right| \quad (3.25)$$

e  $|\xi_1| \geq \gamma$ , assegurando assim que a função de energia no instante anterior ao chaveamento será maior ou igual a função de energia no instante posterior. Assim a estabilidade estará garantida.

A estabilidade do sistema também pode ser provada pelo emprego de múltiplas funções de Lyapunov [112, 31]. Neste caso, deve-se mostrar que o sistema sob chaveamento apresenta funções decrescente de Lyapunov para cada lei de controle associada a respectiva função, e que entre dois chaveamentos para a mesma lei de controle a energia final é sempre menor que a energia no final do chaveamento para a mesma lei de controle anterior. Para o problema abordado neste artigo, a continuidade da função decrescente de Lyapunov entre os chaveamentos, como mostrado, garante a estabilidade.

Os resultados obtidos até aqui podem ser resumidos no seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Considere o robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada (3.3) e as leis de controle definidas sobre  $\Omega = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}^3$  como apresentado nas equações (3.5) e (3.17). Então o seguinte é válido:*

1. *Todos os estados do sistema em malha fechada permanecem no domínio  $\Omega$ ,*
2. *todos os estados do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente a zero quando  $t$  tende ao infinito,*
3. *A lei de controle é limitada e bem definida para todo  $t \geq 0$ .*

**Exemplo:** Considere o simples exemplo de um sistema de controle não-holonômico do tipo modelo cinemático do robô móvel com acionamento diferencial. Equações na forma encadeada para tal modelo cinemático do robô móvel podem ser escritas como a equação (3.3).

Uma simulação foi efetuada usando as entradas de controle (3.5) e (3.6), respeitando a condição de chaveamento dada por (3.25). A Figura 3.1 apresenta os resultados da simulação do sistema sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como  $(z_1, z_2, z_3)^T = (1, \pi/8, 1)^T$ , e  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 5$ . Para estes valores em particular o Teorema 1 pode ser aplicado.

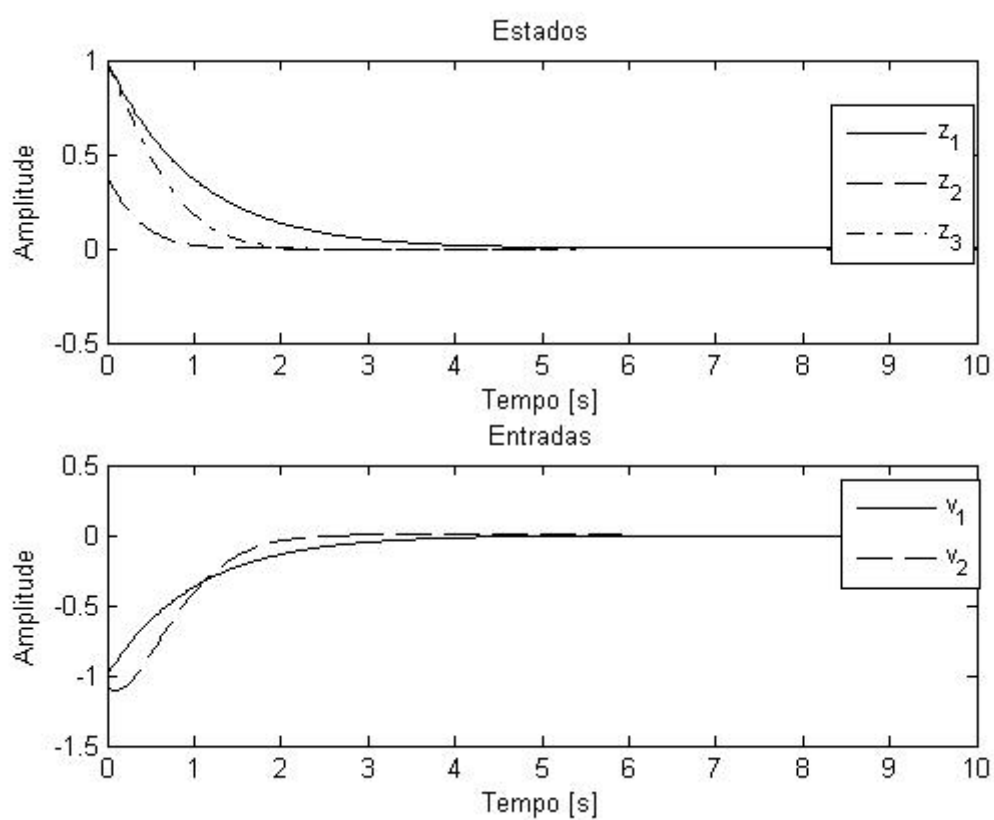


Figura 3.1: Evolução dos estados e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial.

### 3.1.2 Sistemas de ordem elevada

É possível gerar leis de controle para classes canônicas de sistemas de ordem elevada, isto é, sistemas onde mais que um nível de colchete de Lie são necessários para varrer o espaço tangente ao espaço de configuração. Deste modo, uma pequena classe de sistemas de ordem elevada referenciada como sistemas na forma encadeada com duas entradas, será considerada. Isto ainda é interessante porque diversos sistemas não-lineares podem ser convertidos para a forma encadeada.

Considere o sistema a duas entradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 v_1, \\ \dot{z}_3 &= z_4 v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n v_1, \\ \dot{z}_n &= v_2.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Sistemas desta forma são completamente não-holonômicos, portanto, são controláveis [107]. O mesmo procedimento usado anteriormente será repetido. Fazendo a mudança de estados:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_1, \\ \xi_2 &= \frac{z_2}{v_1}, \\ &\vdots \\ \xi_n &= z_n.\end{aligned}$$

Desta forma o sistema pode ser representado como:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n, \\ \dot{\xi}_n &= v_2, \\ &\cdot\end{aligned}\tag{3.27}$$

e os sinais de controle serão

$$\begin{aligned}v_1 &= -\text{sinal}(z_1)\delta, \\ v_2 &= p_2\xi_2 + p_3\xi_3 + \cdots + p_n\xi_n.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Então, o Teorema 1 pode ser generalizado como segue:

**Teorema 2.** *Considere o sistema na forma encadeada (3.26) e a lei de controle*



definida sobre  $\Omega = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n \mid z_1 \neq 0\}$  como mostrado nas equações (3.27) e (3.28) com  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ . Então, o seguinte é válido:

1. Todos os estados do sistema em malha fechada permanecem no domínio  $\Omega$ ,
2. Todos os estados do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente a zero quando  $t$  tende ao infinito,
3. A lei de controle é limitada e bem definida para todo  $t \geq 0$ .

**Prova.** Considere a seguinte mudança de variável para o sistema 3.3:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_1, \\ \xi_i &= \frac{z_i}{v_1}, \\ \xi_n &= z_n,\end{aligned}$$

com  $v_i$  constante, então:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1, \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\dot{z}_i}{v_1} = \frac{z_{i+1}v_1}{v_1} = \xi_{i+1}, \\ \dot{\xi}_n &= v_2,\end{aligned}$$

usando os sinais de controle propostos

$$\begin{aligned}v_1 &= -\text{sinal}(z_1)\delta, \\ v_2 &= p_2\xi_2 + \dots + p_n\xi_n,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\text{sinal}(z_1)\delta, \\ \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \\ \dot{\xi}_n &= p_2\xi_2 + \dots + p_n\xi_n,\end{aligned}$$

tem-se então um subsistema com coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Como este sistema é do tipo  $\dot{x} = Ax$ , onde os coeficientes da matriz  $A$  são constantes, então a equação característica deste sistema é do tipo:

$$\det(sI - A).$$

Se os coeficientes  $\lambda_1$  e  $p_2, p_3, \dots, p_n$  acima forem escolhidos de forma que a equação

característica acima multiplicada por  $(s + \lambda_1)$  seja Hurwitz e  $\lambda_1$  seja o menor dos autovalores, então o sistema (3.26) com entradas (3.28) é globalmente assintoticamente estável.

□

O vetor de ganho também pode ser obtido utilizando o método de projeto de controle ótimo LQG com o critério de otimalidade:

$$J = \int_0^{\infty} [y^T(t)Qy(t) + u^T Ru]dt.$$

## 3.2 Rastreamento de trajetórias usando realimentação não-linear

Sistemas não-holonômicos são parte de uma classe especial de sistemas não-lineares: suas restrições limitam os tipos de movimento mas não as posições e orientações que podem assumir [20]. Sistemas não-holonômicos têm sido estudados em profundidade principalmente pelo fato da conexão entre a teoria de controle e a mecânica geométrica poder ser explorada. As ferramentas de análise comumente usadas para estudar este tipo de sistema estão sendo desenvolvidas agora partindo de conceitos da geometria diferencial e da teoria de controle linear e não-linear. Infelizmente, as leis de controle aplicadas a estes sistemas são muito difíceis de se obter. Neste trabalho, um novo método para projetar sistemas de controle para se obter o seguimento (rastreamento) de trajetória de sistemas não-holonômicos é proposto.

A forma cartesiana [107] pode apresentar singularidades quando a dinâmica inversa é utilizada para gerar trajetórias, porém, sistemas na forma encadeada ou de integrador não-holonômico podem evitar tais singularidades. Este novo método utiliza um modelo interno no qual o erro no seguimento de uma trajetória é realimentado (através de um controlador) para permitir que os estados sigam suas referências. Os erros de estado são funções do sinal de controle e das referências. Ajustando os sinais de controle adequadamente, o sistema pode ser transformado num sistema autônomo. Usando o critério de Routh-Hurwitz ou a partir dos valores projetados para os autovalores do sistema, é possível ajustar os ganhos que garantirão pólos no lado esquerdo do plano complexo. É mostrado que, fazendo isto, o sistema terá uma estabilização exponencial. Para mostrar as propriedades do esquema proposto, um sistema com três estados, duas entradas e restrições não-holonômicas é considerado aqui.

### 3.2.1 Formulação do Problema de Controle

O robô móvel com acionamento diferencial pode ser descrito em formas canônicas tais como: cartesiana, encadeada, de potência, anti-simétrica e na forma de integrador não-

holonômico (para mais detalhes veja Figueiredo e Jota [43] e suas referências). Na forma cartesiana, a cinemática do robô é modelada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \text{sen}(\theta), \\ \dot{\theta} &= w,\end{aligned}\tag{3.29}$$

onde  $(x, y)$  denotam a posição do centro de massa do robô,  $\theta$  é o ângulo da direção do robô em relação ao eixo  $x$ ,  $v$  é a velocidade à frente, enquanto  $w$  é a velocidade angular do robô.

O modelo (3.29) assume rolamento puro sem escorregamento e que a massa e a inércia das rodas são desprezíveis.

Para evitar o problema de gerar sinais com singularidade, a seguinte transformação pode ser usada [38]

$$\begin{aligned}z_1 &= -\theta, \\ z_2 &= x \text{sen}(\theta) - y \cos(\theta), \\ z_3 &= x \cos(\theta) + y \text{sen}(\theta), \\ v_1 &= -w, \\ v_2 &= v + (y \cos(\theta) - x \text{sen}(\theta))w = v + z_2 w,\end{aligned}\tag{3.30}$$

tal que

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 u_1, \\ \dot{z}_3 &= u_2.\end{aligned}\tag{3.31}$$

esta forma é referenciada como encadeada. A transformação de coordenadas pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\tag{3.32}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},\tag{3.33}$$

que forma uma base ortogonal e, portanto, singularidades são evitadas.

Considerando agora o problema do rastreamento de trajetória, é possível usar um modelo interno ou modelo de referência com  $(z_{r1}, z_{r2}, z_{r3}, v_{r1}, v_{r2})$ , um sistema real  $(z_1, z_2, z_3, v_1, v_2)$  e o erro de estado do sistema, onde  $\vec{z}_e = \vec{z} - \vec{z}_r$ . O modelo do erro é dado por

$$\begin{aligned}\dot{z}_{e1} &= v_1 - v_{r1}, \\ \dot{z}_{e2} &= z_{e3} v_1 + z_{r3} (v_1 - v_{r1}) = (z_{e3} + z_{r3})(v_1 - v_{r1}) + z_{e3} v_{r1}, \\ \dot{z}_{e3} &= v_2 - v_{r2}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

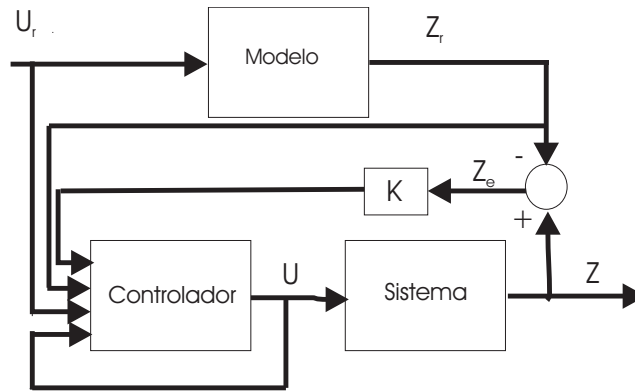


Figura 3.2: Controle de seguimento com modelo interno.

O objetivo do sistema de controle é encontrar os controles  $(v_1, v_2)$  capazes de levar os erros de estado a zero, isto é, fazer os estados reais convergirem para a referência num tempo finito.

O problema considerado neste trabalho pode ser formulado como segue:

*Dado um sistema na forma encadeada (3.31), derivar uma lei de controle por realimentação globalmente estável para regular a trajetória do sistema usando modelo de referência e ferramentas de controle linear, não-linear e híbrido.*

### 3.2.2 Proposta de Lei de Controle para Rastreamento de Trajetória

A partir da análise do modelo de erro de estado (3.34), pode ser verificado que é possível aplicar um novo método para o rastreamento de trajetória. O método foi desenvolvido baseado no fluxo isoespectral [19], controle não-contínuo [15, 93, 141, 90] e usando conceitos de controle linear. O erro de estado  $z_{e2}$  pode ser exponencialmente estabilizado fazendo

$$\begin{aligned} z_{e3}v_1 + z_{r3}(v_1 - v_{r1}) &= -\lambda_2 z_{e2}, \\ \therefore z_{e3} &= \frac{-\lambda_2 z_{e2} - z_{r3}(v_1 - v_{r1})}{v_1}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

tal que o sinal de controle será

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{r1} - \lambda_1 z_{e1}, \\ v_2 &= v_{r2} + \frac{-\lambda_2 z_{e2} - z_{r3}(v_1 - v_{r1})}{v_1} - \lambda_3 z_{e3}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A Figura 3.2 mostra o sistema com o controlador.

A desvantagem deste método é que  $v_1$ , não pode ser igual a zero. Se isto acontecer, uma singularidade na lei de controle  $v_2$  irá ocorrer. Para contornar este problema, um sinal na forma de onda quadrada com pequena amplitude,  $\pm\epsilon$ , pode ser usado no lugar do sinal de controle,  $v_1$ , sempre que  $v_1 = 0$ .

Os resultados anteriores podem ser sintetizados no seguinte teorema:

**Teorema 3.** *Considere o sistema de erro para o robô móvel com acionamento diferencial derivado a partir do modelo na forma encadeada (3.34) e a lei de controle definida sobre  $\Omega = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{R}^3 | v_1 \neq 0\}$  como mostrado na equação (3.36) com  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ . Então, o seguinte é válido:*

1. *Todos os erros de estado do sistema em malha fechada permanecem no domínio  $\Omega$ ,*
2. *Todos os erros de estado do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente para zero quando  $t$  tende ao infinito.*

**Prova.**

**Caso 1:**  $v_1 \neq 0$ .

Considere a seguinte mudança de variável para o sistema 3.34:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_{e1}, \\ \xi_2 &= \frac{z_{e2}}{z_{e1}}, \\ \xi_3 &= z_{e3} + z_{r3},\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1 - v_{r1}, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\dot{z}_{e2}}{z_{e1}} - \frac{z_{e2}\dot{z}_{e1}}{z_{e1}^2} = \frac{\xi_3(v_1 - v_{r1})}{\xi_1} + \frac{z_{e3}v_{r1}}{\xi_1} - \frac{\xi_2}{\xi_1}(v_1 - v_{r1}), \\ \dot{\xi}_3 &= v_2 - v_{r2},\end{aligned}$$

considerando os seguintes sinais de controle:

$$\begin{aligned}v_1 &= v_{r1} - \lambda_1 \xi_1, \\ v_2 &= v_{r2} + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1 \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \lambda_1 \xi_2 - \lambda_1 \xi_3 + \frac{z_{e3}}{\xi_1} v_{r1}, \\ \dot{\xi}_3 &= p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3,\end{aligned}$$

tem-se então um subsistema com coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_{e3}}{\xi_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{r1}.$$

Como este sistema é do tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$ , onde os coeficientes da matriz  $A$  são constantes, então a equação característica deste sistema é do tipo:

$$\det(sI - A) = \det \left( \begin{bmatrix} s - \lambda_1 & -\lambda_1 \\ -p_2 & s - p_3 \end{bmatrix} \right) = (s - \lambda_1)(s - p_3) + \lambda_1 p_2.$$

Se os coeficientes  $\lambda_1$  e  $p_2$  e  $p_3$  acima forem escolhidos de forma que a equação característica acima multiplicada por  $(s + \lambda_1)$  seja Hurwitz e  $\lambda_1$  seja o menor dos autovalores, então o sistema (3.34) com entradas (3.36) é globalmente assintoticamente estável.

**Caso 2:**  $v_1 = v_{r1} = 0$ .

Então (3.34) assume a forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{e1} &= \epsilon, \\ \dot{z}_{e2} &= z_{e3}\epsilon, \\ \dot{z}_{e3} &= \frac{-\lambda_2 z_{e2}}{\epsilon} - \lambda_3 z_{e3}.\end{aligned}$$

Neste caso, o erro de estado  $z_{e1}$  será inicialmente igual a zero. O sinal em  $v_1 = \epsilon$  provocará um pequeno deslocamento em  $z_1$  gerando um erro que será corrigido pela lei de controle descrita no caso 1.

Como anteriormente, da segunda equação tem-se  $z_{e3}\epsilon = -z_{e2}$  o que resulta em  $z_{e3} = \frac{-z_{e2}}{\epsilon}$ . Portanto, o sinal em  $\dot{z}_{e3}$  irá estabilizar  $z_{e2}$  como no caso da estabilização descrito anteriormente. Com a estabilização de  $z_{e2}$ ,  $z_{e3}$  também será estabilizado através de  $-\lambda_3 z_{e3}$ .

**Caso 3:**  $v_1 = 0$  e  $v_{r1} = \lambda_1 z_{e1}$

Neste caso, deve-se forçar  $v_{r1} = 0$  retornando ao sistema do caso 1.  $\square$

### 3.2.3 Controle não-holonômico de sistemas de ordem elevada

É possível gerar uma lei de controle para classes canônicas de sistemas de ordem elevada, isto é, sistemas onde mais de um nível de colchete de Lie são necessários para varrer o espaço tangente ao espaço de configuração. Ainda, uma pequena classe de sistemas de ordem elevada, referenciados como sistemas encadeados com duas entradas, será considerada. Isto ainda é interessante porque muitos sistemas não-lineares podem ser convertidos para a forma encadeada.

Considere um sistema com duas entradas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 v_1, \\ \dot{z}_3 &= z_4 v_1, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n v_1, \\ \dot{z}_n &= v_2.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Sistemas nesta forma são completamente não-holonômicos, conseqüentemente eles são controláveis [107]. Considerando o problema do rastreamento de trajetória, é possível usar um modelo interno ou modelo de referência com  $(z_{r1}, z_{r2}, \dots, z_{rn}, v_{r1}, v_{r2})$ , um sistema real

$(z_1, z_2, \dots, z_n, v_1, v_2)$  e um sistema de erro de estados, onde  $\vec{z}_e = \vec{z} - \vec{z}_r$ . O modelo do erro de estados será:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{e1} &= v_1 - v_{r1}, \\ \dot{z}_{e2} &= z_3 v_1 - z_{r3} v_{r1} = z_{e3} v_1 + z_{r3} (v_1 - v_{r1}), \\ \dot{z}_{e3} &= z_4 v_1 - z_{r4} v_{r1} = z_{e4} v_1 + z_{r4} (v_1 - v_{r1}), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{en} &= v_2 - v_{r2}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

O objetivo do sistema de controle é encontrar os controles  $(v_1, v_2)$  que fazem os erros de estado igualar a zero, isto é, os estados reais convergem para as respectivas referências.

O mesmo procedimento usado previamente se aplica a este caso:

$$\begin{aligned}z_{e3} v_1 + z_{r3} (v_1 - v_{r1}) &= -\lambda_2 z_{e2} \\ \implies z_{e3} &= \frac{-\lambda_2 z_2 - z_{r3} (v_1 - v_{r1})}{v_1}, \\ z_{e4} v_1 + z_{r4} (v_1 - v_{r1}) &= \frac{-\lambda_2 z_2 - z_{r3} (v_1 - v_{r1})}{v_1} - \lambda_3 z_{e3} \\ \implies z_{e4} &= \frac{-z_{r3} (v_1 - v_{r1}) - \lambda_2 z_2}{v_1^2} + \frac{-z_{r4} (v_1 - v_{r1}) - \lambda_3 z_{e3}}{v_1}, \\ &\vdots \\ z_{en} v_1 + z_{rn} (v_1 - v_{r1}) &= \sum_{j=1}^{n-4} \frac{-z_{r(n-j)} (v_1 - v_{r1}) - \lambda_{n-1-j} z_{e(n-1-j)}}{v_1^j} - \lambda_{n-1} z_{e(n-1)} \\ \implies z_{en} &= \sum_{j=1}^{n-3} \frac{-z_{r(n+1-j)} (v_1 - v_{r1}) - \lambda_{n-j} z_{e(n-j)}}{v_1^j},\end{aligned}\tag{3.39}$$

tal que os controles serão

$$\begin{aligned}v_1 &= v_{r1} - \lambda_1 z_{e1}, \\ v_2 &= v_{r2} + \left( \sum_{j=1}^{n-3} \frac{-z_{r(n+1-j)} (v_1 - v_{r1}) - \lambda_{n-j} z_{e(n-j)}}{v_1^j} \right) - \lambda_n z_{en}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Então, o teorema 3 pode ser generalizado como segue:

**Teorema 4.** *Considere o sistema de erro de estados derivado a partir de modelos na forma encadeada (3.38) e a lei de controle definida sobre  $\Omega = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n | v_1 \neq 0\}$  como mostrado nas equações (3.40) com  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$  e as raízes da equação característica geradas pelo sistema obtido desta forma apresentando parte real negativa. Então, o seguinte é válido:*

1. *Todos os erros de estado do sistema em malha fechada permanecem no domínio  $\Omega$ ,*
2. *Todos os erros de estado do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente a zero quando  $t$  tende ao infinito.*

**Prova:**

**Caso 1:**  $v_1 \neq 0$ .

Considere a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= z_{e1}, \\ \xi_2 &= \frac{z_{e2}}{z_{e1}^{n-2}}, \\ \xi_3 &= \frac{z_{e3}+z_{r3}}{z_{e1}^{n-3}}, \\ \xi_i &= \frac{z_{ei}+z_{ri}}{z_{e1}^{n-i}}, \\ \xi_n &= z_n,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= v_1 - v_{r1}, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{\dot{z}_{e2}}{z_{e1}^{n-2}} - (n-2)\frac{z_{e2}}{z_{e1}^{n-1}}\dot{z}_{e1} = \left(\frac{\xi_3 - (n-2)\xi_2}{\xi_1}\right)v_1 + \frac{z_{e3}}{z_{e1}^{n-2}}v_{r1}, \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\dot{z}_{ei}}{z_{e1}^{n-i}} - (n-i)\frac{z_{ei}}{z_{e1}^{n-i+1}}\dot{z}_{e1} = \left(\frac{\xi_{i+1} - (n-i)\xi_i}{\xi_1}\right)v_1 + \frac{z_{e(i+1)}+z_{r(i+1)}}{z_{e1}^{n-2}}v_{r1}, \\ \dot{\xi}_n &= v_2 - v_{r2},\end{aligned}$$

usando os sinais de controle propostos

$$\begin{aligned}v_1 &= v_{r1} - \lambda_1\xi_1, \\ v_2 &= v_{r2} + p_2\xi_2 + \cdots + p_n\xi_n,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= -\lambda_1\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= (\xi_3 - (n-2)\xi_2)(-\lambda_1) + \frac{z_{e3}+z_{r3}}{z_{e1}^{n-2}}v_{r1} = \lambda_1\xi_2 - \lambda_1(n-2)\xi_3 + \frac{z_{e3}}{z_{e1}^{n-2}}v_{r1}, \\ \dot{\xi}_i &= (\xi_{i+1} - (n-i)\xi_i)(-\lambda_1) + \frac{z_{e(i+1)}+z_{r(i+1)}}{z_{e1}^{n-i}}v_{r1} = \lambda_1\xi_i - \lambda_1(n-i)\xi_{i+1} + \frac{z_{e(i+1)}+z_{r(i+1)}}{z_{e1}^{n-i}}v_{r1}, \\ \dot{\xi}_n &= p_2\xi_2 + \cdots + p_n\xi_n,\end{aligned}$$

tem-se então um subsistema com coeficientes constantes,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & (n-2)\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & (n-3)\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z_{e3}}{z_{e1}^{n-2}} \\ \frac{z_{e4}+z_{r4}}{z_{e1}^{n-3}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v_{r1}.$$

Como este sistema é do tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$ , onde os coeficientes da matriz  $A$  são constantes, então a equação característica deste sistema é do tipo:

$$\det(sI - A).$$

Se os coeficientes  $\lambda_1$  e  $p_2, p_3, \dots, p_n$ , acima forem escolhidos de forma que a equação característica acima multiplicada por  $(s + \lambda_1)$  seja Hurwitz e  $\lambda_1$  seja o menor dos



autovalores, então o sistema (3.38) com entradas (3.40) é globalmente assintoticamente estável.

**Caso 2:**  $v_1 = v_{r1} = 0$ .

Então (3.38) assume a forma:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{e1} &= \epsilon, \\ \dot{z}_{e2} &= z_{e3}\epsilon, \\ \dot{z}_{en} &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{-\lambda_i z_{ei}}{\epsilon^{n-i}} - \lambda_n z_{en}.\end{aligned}$$

Neste caso, o erro de estado  $z_{e1}$  será inicialmente igual a zero. O sinal em  $v_1 = \epsilon$  provocará um pequeno deslocamento em  $z_1$  gerando um erro que será corrigido pela lei de controle descrita no caso 1.

Como anteriormente, da segunda equação tem-se  $z_{e3}\epsilon = -z_{e2}$  o que resulta em  $z_{e3} = \frac{-z_{e2}}{\epsilon}$  e assim sucessivamente. Portanto, o sinal em  $\dot{z}_{e3}$  irá estabilizar  $z_{e2}$  e os demais estados como no caso da estabilização descrito anteriormente. Com a estabilização de  $z_{ei}$ ,  $z_{en}$  também será estabilizado através de  $-\lambda_n z_{en}$ .

**Caso 3:**  $v_1 = 0$  e  $v_{r1} = \lambda_1 z_{e1}$

Neste caso, deve-se forçar  $v_{r1} = 0$  retornando ao sistema do caso 1.  $\square$

### 3.2.4 Simulações Numéricas

Nesta seção, algumas simulações em computador são apresentadas para demonstrar o desempenho do controlador e para validar a metodologia construtiva.

**Exemplo 1 (trajetória circular):** Considere o simples exemplo de um sistema de controle não-holonômico, particularmente o robô móvel com acionamento diferencial. As equações na forma encadeada para este robô móvel podem ser escritas como as equações (3.31) e o modelo de erro de estados como em (3.34).

Uma simulação em computador foi efetuada usando os sinais de controle (3.36) e o chaveamento por relé para evitar que  $v_{r1}$  seja igual a zero, como descrito anteriormente. A Figura 3.3 apresenta os resultados da simulação do sistema sob as seguintes condições: a posição inicial do robô foi escolhida como sendo  $(z_1, z_2, z_3)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ ,  $(z_{r1}, z_{r2}, z_{r3})^T = (0, 0, 0)^T$  e  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 50, \lambda_3 = 20$ . Com  $w = v_{r1} = 0.6$  e  $v = v_{r2} = 0.3$ , uma trajetória circular é obtida. Pode ser visto que a convergência é exponencial.

A Figura 3.4 mostra as trajetórias referência e real no plano X-Y. Note que a transformação de coordenadas (3.32) é apenas uma rotação no plano X-Y. O erro inicial é eliminado e  $v_1 = v_{r1}$  e  $v_2 = v_{r2}$ . O gráfico da evolução dos estados mostra que  $z_1$  também converge para  $z_{r1}$ .

**Exemplo 2 (trajetória zig-zag):** Considere novamente o robô móvel com acionamento diferencial. Simulações foram efetuadas usando as entradas de controle (3.36) e

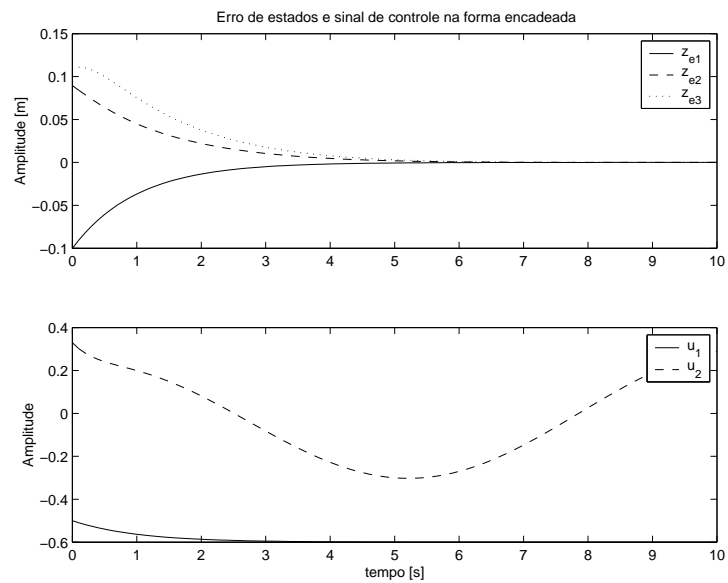


Figura 3.3: Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória circular.

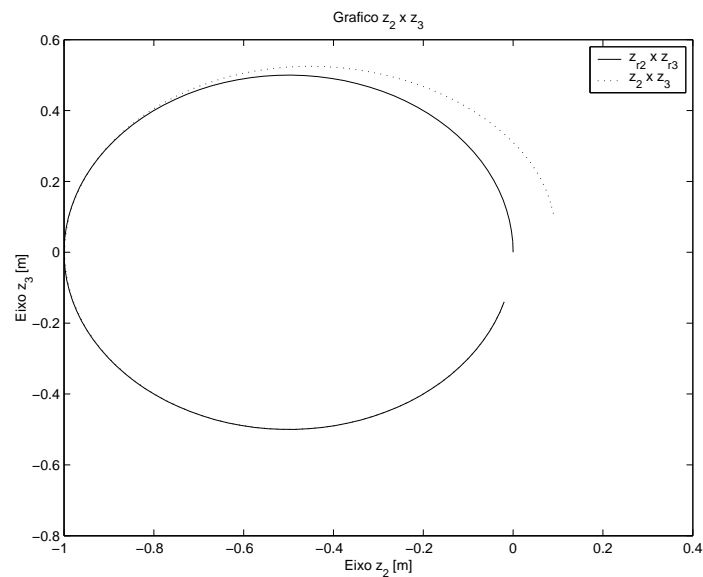


Figura 3.4: Evolução das trajetórias referência e real para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória circular.

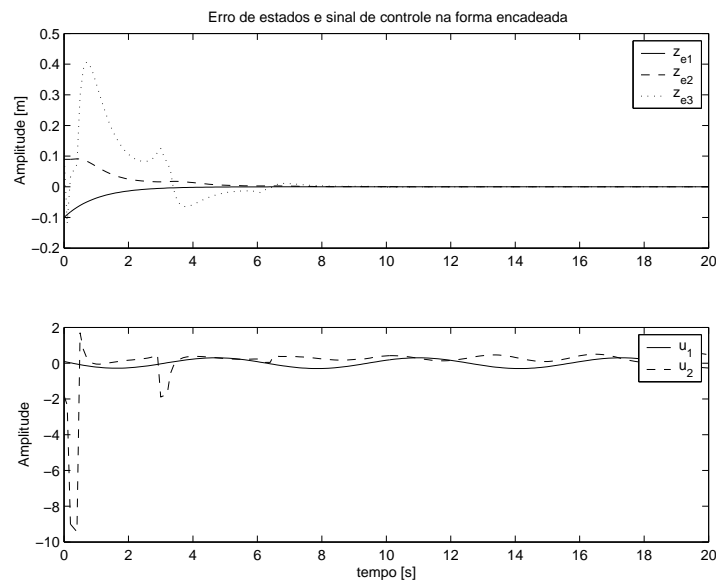


Figura 3.5: Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag.

o chaveamento por relé para evitar que  $v_1$  seja igual a zero. A Figura 3.5 apresenta o resultado da simulação sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como sendo  $(z_1, z_2, z_3)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ ,  $(z_{r1}, z_{r2}, z_{r3})^T = (0, 0, 0)^T$  e  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ . Com  $v = v_{r2} = 0.3$  e  $w = v_{r1}$  igual a uma onda senoidal com amplitude de 0,3 e frequência de 1 rad/s, obtém-se uma trajetória em zig-zag. Pode ser visto que a convergência é exponencial mesmo quando o sinal de  $w$  se torna negativo.

A Figura 3.6 mostra as trajetórias referência e real no plano X-Y. O erro inicial tende a zero e  $v_1 = v_{r1}$  e  $v_2 = v_{r2}$ . O gráfico da evolução dos estados mostra que  $z_1$  também converge a  $z_{r1}$ .

**Exemplo 3 (exemplo comparativo):** Jiang e seus colaboradores (2001) consideram o controle global de rastreamento para o modelo cinemático do robô móvel com acionamento diferencial. Eles usaram o modelo (3.29), com uma transformação de coordenadas adequadas como as da equação (3.30), e o seguinte modelo de erro de rastreamento:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= wy_e - v + v_r \cos(\theta_e), \\ \dot{y}_e &= -wx_e + v_r \text{sen}(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e &= w_r - w. \end{aligned} \quad (3.41)$$

É mostrado [72] que a seguinte lei de controle resolve o problema de rastreamento:

$$\begin{aligned} w &= w_r + \frac{\lambda_1 v_r y_e}{1+x_e^2+y_e^2} \frac{\text{sen}(\theta_e)}{\theta_e} + h_{\lambda_2}(\theta_e), \\ v &= v_r \cos(\theta_e) + h_{\lambda_3}(x_e), \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são parâmetros positivos de projeto. O exemplo do robô móvel foi simulado

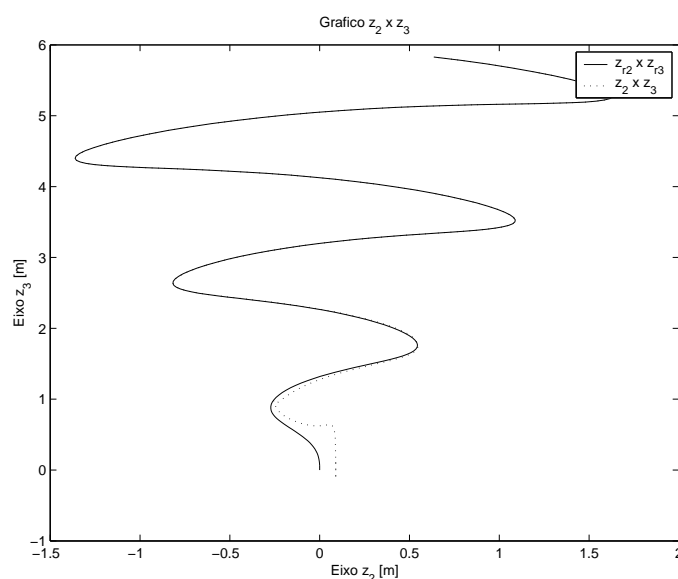


Figura 3.6: Evolução das trajetórias referências e reais do robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag.

usando a trajetória zig-zag anterior com  $\lambda_1 = 10$  e  $h_{\lambda_2}(s) = h_{\lambda_3} = \tanh(s)$  e as mesmas condições iniciais do exemplo 2. A Figura 3.7 apresenta os resultados da simulação. Pode ser visto que todos os erros de estado convergem.

A Figura 3.8 mostra que a trajetória real segue a referências (no plano X-Y). Com a evolução do sistema, o erro de posição inicial (*offset*) diminui.

**Exemplo 4 (trajetória zig-zag com ruído):** Simulações foram efetuadas usando as entradas de controle (3.36) e o chaveamento por relé para evitar que  $v_1$  seja igual a zero. A Figura 3.9 apresenta o resultado da simulação sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como sendo  $(z_1, z_2, z_3)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$ ,  $(z_{r1}, z_{r2}, z_{r3})^T = (0, 0, 0)^T$  e  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ . Com  $v_{r2} = 0.3$  e  $v_{r1}$  igual a uma onda senoidal com amplitude de 0,3 metros e frequência de 1 rad/s, obtém-se uma trajetória em zig-zag. Foram introduzidos ruídos com amplitude máxima de 0,02 metros em  $z_1, z_2, z_3$ , simulando erros de medição nestes estados. Pode ser visto que a convergência é exponencial mesmo quando o sinal de  $w$  se torna negativo. Entretanto, quando o sinal de controle  $v$  passa por zero, há um aumento na amplitude do sinal de controle (devido ao chaveamento), porém o controle do sistema ainda é mantido.

A Figura 3.10 mostra as trajetórias referências e reais no plano X-Y. O erro inicial tende a zero e  $v_1 = v_{r1}$  e  $v_2 = v_{r2}$ . O gráfico da evolução dos estados mostra que  $z_1$  também converge a  $z_{r1}$ .

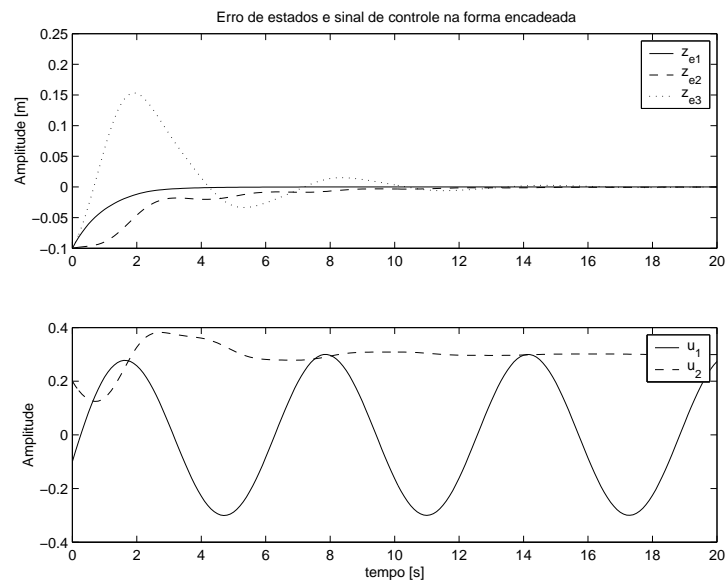


Figura 3.7: Evolução dos erros de estado e sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial de Jiang.

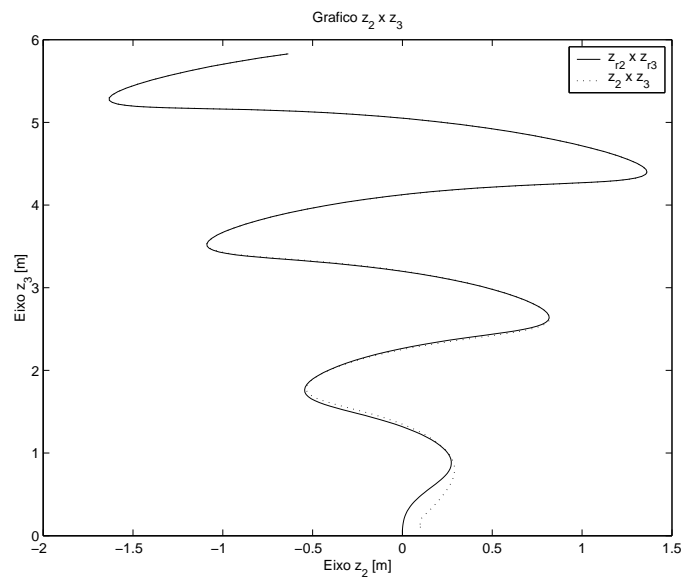


Figura 3.8: Evolução das trajetórias referência e real para o robô móvel com acionamento diferencial de Jiang.

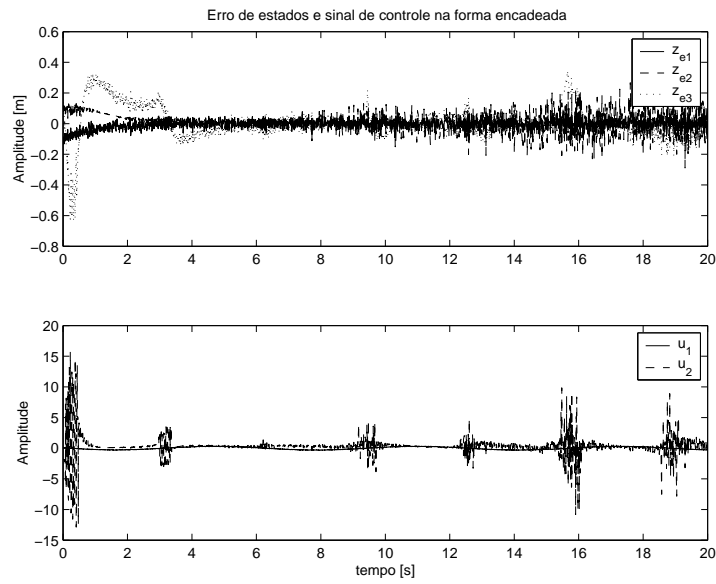


Figura 3.9: Evolução dos erros de estado e dos sinais de controle para o robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag com ruído nos estados medidos.

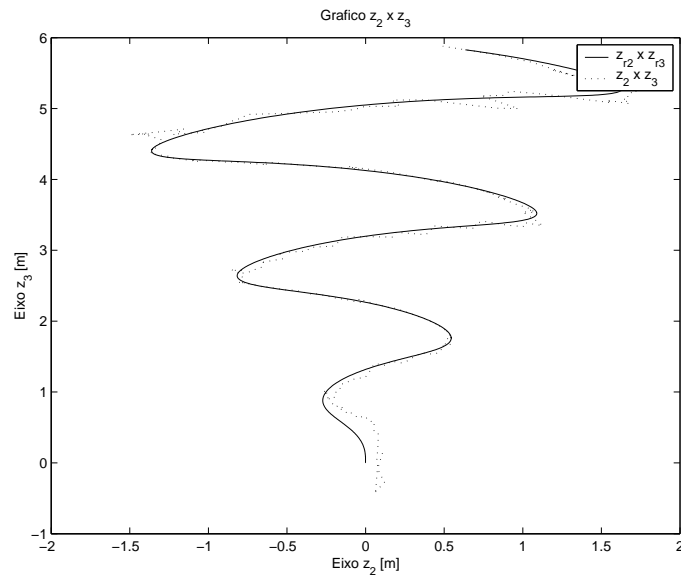


Figura 3.10: Evolução das trajetórias referência e real do robô móvel com acionamento diferencial seguindo trajetória zig-zag com ruído nos estados medidos.

### 3.3 Conclusão

O trabalho apresenta uma nova técnica de realimentação não-linear de estados para o projeto de um controlador para estabilização e seguimento de trajetória. Estes controladores são especialmente adequados em aplicações envolvendo sistemas não-lineares na forma encadeada com duas entradas. O método permite ajustar valores que assintoticamente estabilizam o sistema de uma forma fácil. O critério de Routh-Hurwitz e a escolha de autovalores que satisfaçam as condições dos teoremas 1 – 4 são usados para provar a estabilidade do sistema e projetar o controlador. Os pólos devem ser escolhidos de forma a atenderem o descrito nos teoremas 1 e 2, no caso de estabilização, e teoremas 3 e 4 para o caso de rastreamento de trajetórias. Como mostrado nos teoremas 3 e 4, para o rastreamento de trajetória, um sinal de baixa amplitude (2% do valor nominal do sinal de entrada) na forma de onda quadrada (ou sinal cíclico com média zero) deve ser aplicado ao controlador para garantir que o sistema não exiba singularidades quando a velocidade angular é igual a zero ( $v_1 = 0$ ).

A metodologia do projeto de controladores para o rastreamento, bem como as leis de controle obtidas, não encontram similaridades com outros trabalhos apresentados na literatura, constituindo uma contribuição original ao desenvolvimento de métodos de controle para sistemas com restrições não-holonômicas.





## Capítulo 4

# Rastreamento de trajetórias empregando o Controlador Preditivo Generalizado

O problema do rastreamento de trajetória para sistemas não-holonômicos é (relativamente) mais fácil de resolver do que o da estabilização num ponto de equilíbrio [145]. Métodos simples utilizando controladores PID [119] e trajetórias compatíveis com as restrições não-holonômicas [66] já foram propostos. Pesquisas mais recentes incluem:

1. O trabalho de Jiang [73], que desenvolveu uma metodologia usando realimentação variante no tempo e o integrador de um passo atrás (*backstepping*), aplicada a um robô móvel com acionamento diferencial; esta metodologia foi estendida a sistemas na forma encadeada [74] e a sistemas com incertezas [70].
2. O rastreamento de trajetórias para navios sub-atuados usando o método direto de Lyapunov [71], e o guiamento de veículos marinhos usando modelos em coordenadas polares [11, 10].
3. O rastreamento de trajetória empregando estratégias de modo deslizante para robôs móveis com acionamento diferencial [148, 147, 26].

Neste trabalho, um novo método para projetar sistemas de controle para se obter o seguimento de trajetória de sistemas não-holonômicos é proposto. Esta nova metodologia utiliza um modelo preditivo de faixa ampla (horizonte de controle estendido), no qual os erros do rastreamento são realimentados (através de um controlador) para estabilizar os estados reais às referências de estados futuros. Os erros de estado são funções dos sinais de controle e referências de estado. Ajustando os sinais de controle adequadamente o sistema pode ser estabilizado. Para mostrar as propriedades do esquema proposto, sistemas compostos de três estados e duas entradas ou controles com restrições não-holonômicas e sistemas de ordem elevada são considerados aqui como estudo de casos.

A utilização do Controle Preditivo Generalizado (CPG) tem como vantagem adicional a robustez devido à estimação recursiva do modelo do sistema durante a etapa de controle.

## 4.1 Controlador Preditivo Generalizado [27, 28]

O Controlador Preditivo Generalizado (CPG) foi proposto por Clarke [27, 28] para resolver problemas que o Controlador de Variância Mínima e o Controlador por Alocação de Pólos apresentavam tais como: problemas quanto à incerteza a respeito do tempo morto do processo e sobreparametrização do modelo. Isto é obtido através do uso de previsões do sinal de saída do processo em vários intervalos de amostragem ("horizonte de previsão") e fazendo suposições a respeito das ações de controle futuras. Uma dessas suposições é a de que, além de um certo "horizonte de controle", as variações do sinal de controle são nulas.

A escolha dos valores para os horizontes de controle e de previsão produz diferentes algoritmos de controle, como, por exemplo, o próprio Controlador de Variância Mínima (CVM). Dessa forma, o CPG pode ser usado tanto em plantas simples, com pouco conhecimento a respeito do processo, quanto em sistemas mais complexos (de fase não-mínima, instáveis, ou com tempo morto variável), sendo particularmente adequado para controle de sistemas que exigem alto desempenho como no caso dos sistemas flexíveis.

A idéia de um controle preditivo é que dado:

- um modelo adequadamente parametrizado  $M(\theta)$ ,
- um vetor  $\mathbf{y} = [y(t), y(t-1), \dots]^T$  com as saídas passadas,
- um vetor  $\mathbf{w} = [w(t+1), w(t+2), \dots]^T$  com as futuras referências,
- um vetor  $\mathbf{u} = [u(t-1), u(t-2), \dots]^T$  dos controles passados,
- um vetor  $\Delta\mathbf{u} = [u(t), u(t+1), \dots]^T$  dos potenciais controles futuros (também chamados de controles projetados),

a predição da saída  $\hat{y}(t+j)$  sobre uma faixa que vai até um "horizonte de predição" pré-especificado pode ser calculada. Correspondendo a estas predições há os "erros preditos do sistema",  $e(t+j) = w(t+j) - \hat{y}(t+j)$ , os quais também podem ser montados num vetor  $\mathbf{e} = [e(t+1), e(t+2), \dots]^T$ . A questão chave é determinar quais considerações devem ser feitas sobre as ações de controle futuras.

Todos os futuros controles (exceto pelos últimos  $d$ , onde  $d$  é o parâmetro de atraso) afetam o vetor  $\mathbf{e}$  e assim devem ser levados em consideração. Se o projeto envolve utilizar todos os valores dos controles, então os valores de  $u(t+j)$  até um horizonte de predição devem ser incluídos. Supondo, entretanto, que sejam considerados incrementos nos

controles ao invés do valor total do controle, então se pode assumir um "horizonte de controle",  $NU$ , após o qual estes incrementos sejam iguais a zero

$$\Delta u(t+j) = u(t+j) - u(t+j-1) = 0, \quad j > NU.$$

Isto implica num controle constante (e possivelmente não nulo) após este horizonte, e num vetor  $\Delta \mathbf{u}$  de incrementos projetados para o controle

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \dots, \Delta u(t+NU-1), 0, 0, \dots]^T.$$

Um caso particular de muita importância é quando  $NU = 1$  onde apenas um incremento de controle deve ser calculado:  $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$ .

Todos os algoritmos de controladores que utilizam predição longa à frente calculam o vetor de controles usando a otimização de alguma função de controle. No caso do CPG, a função de controle utilizada é

$$J_{CPG} = \sum_{j=N_1}^{N_2} e^2(t+j) + \sum_{j=1}^{NU} \lambda(j) \Delta u^2(t+j-1),$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são os "horizontes de previsão",  $NU$  ( $\leq N_2$ ) é o "horizonte de controle" e  $\lambda(j)$  são pesos atribuídos aos incrementos no sinal de controle.

### 4.1.1 Descrição da planta

Quando é considerado um modelo sobre um ponto de operação particular, até uma planta não-linear geralmente admite um modelo linearizado localmente:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + x(t),$$

onde  $A$  e  $B$  são polinômios do operador  $q^{-1}$ :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}, \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}, \end{aligned}$$

$u(t)$  é a entrada de controle,  $y(t)$  é a variável medida ou saída e  $x(t)$  é um termo de distúrbio.

Na literatura,  $x(t)$  tem sido considerado como tendo a forma de média móvel:

$$x(t) = C(q^{-1})\xi(t),$$

onde,  $C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$  e  $\xi(t)$  é uma seqüência aleatória não correlacionada.

Combinando estes resultados, obtem-se o modelo CARMA (Controlado, Auto-Regressivo de Média Móvel):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t).$$

Embora muitas teorias de auto-regulagem sejam baseadas neste modelo, ele parece ser inapropriado para muitas aplicações industriais nas quais os distúrbios são não-estacionários. Para acomodar distúrbios como, por exemplo, mudanças na qualidade do material e movimento Browniano, um modelo mais apropriado seria:

$$x(t) = C(q^{-1})\xi(t)/\Delta,$$

onde  $\Delta$  é o operador diferencial  $1 - q^{-1}$ .

Utilizando este último termo de distúrbio chega-se ao modelo CARIMA (Controlado, Auto-Regressivo, Incremental com Média Móvel):

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta.$$

Para simplificar o desenvolvimento a seguir,  $C(q^{-1})$  é escolhido ser 1 (alternativamente  $C$  é truncado e absorvido dentro dos polinômios  $A$  e  $B$ ) para gerar o modelo:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \xi(t)/\Delta. \quad (4.1)$$

Para derivar um passo  $j$  à frente utiliza-se este modelo e um preditor baseado na equação Diofantina:

$$1 = E(j)(q^{-1})A(q^{-1})\Delta + q^{-j}F(j)(q^{-1}), \quad (4.2)$$

onde  $E(j)(q^{-1})$  e  $F(j)(q^{-1})$  são polinômios somente definidos por  $A(q^{-1})$  dado e o intervalo de predição  $j$ . Se (4.1) é multiplicado por  $E(j)(q^{-1})\Delta q^j$ , tem-se:

$$E(j)(q^{-1})A(q^{-1})\Delta y(t+j) = E(j)(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + E(j)(q^{-1})\xi(t+j).$$

E substituindo por  $E(j)(q^{-1})A(q^{-1})\Delta$  de (4.2), dá:

$$y(t+j) = E(j)(q^{-1})B(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + F(j)(q^{-1})y(t) + E(j)(q^{-1})\xi(t+j). \quad (4.3)$$

Como  $E(j)(q^{-1})$  é de grau  $j-1$ , as componentes do "ruído" estão todas no futuro de maneira que o preditor ótimo, conhecidos os dados de resposta medidos até o tempo  $t$  e qualquer  $u(t+i)$  dado, para  $i > 1$ , é claramente:

$$\hat{y}(t+j|t) = G(j)(q^{-1})\Delta u(t+j-1) + F(j)(q^{-1})y(t), \quad (4.4)$$

onde,  $G(j)(q^{-1}) = E(j)(q^{-1})B(q^{-1})$ .

Note que  $G(j)(q^{-1}) = B(q^{-1})[1 - q^{-j}F(j)(q^{-1})]/A(q^{-1})\Delta$ , de maneira que um meio de calcular  $G(j)(q^{-1})$  é simplesmente considerar a transformada Z da resposta da planta e tomar os primeiros termos  $j$ .

### 4.1.2 Estimador de parâmetros

Em aplicações utilizando o CPG adaptativo, os parâmetros dos polinômios  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  são estimados recursivamente "on line" ( $\hat{A}, \hat{B}$ ) e são utilizados na equação da malha fechada. Isto confere maior robustez ao sistema. Observa-se que o CPG não é afetado pela sobreparametrização do modelo.

O estimador de parâmetros utilizado neste trabalho é o estimador por mínimos quadrados recursivo com fatoração UD da matriz de covariância.

O anexo B reapresenta a prova do Teorema da Estabilidade do Controlador Preditivo Generalizado apresentada por Clarke [27].

## 4.2 Controle Preditivo Generalizado para rastreamento de robôs móveis

O robô móvel com acionamento diferencial pode ser descrito em formas canônicas como: cartesiana, encadeada, de potência, anti-simétrica e na forma de integrador não-holonômico [43]. Na forma cartesiana, a cinemática do robô é modelada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos(\theta), \\ \dot{y} &= v \sin(\theta), \\ \dot{\theta} &= w,\end{aligned}\tag{4.5}$$

onde  $(x, y)$  denota a posição do centro de massa do robô,  $\theta$  é o ângulo de direção do robô,  $v$  é a velocidade a frente, enquanto  $w$  é a velocidade angular do robô.

O modelo (4.5) assume rolamento puro, sem escorregamento, desprezando a massa e a inércia das rodas.

Também, pode-se mostrar que

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad e \quad w = \frac{v_1 - v_2}{L},\tag{4.6}$$

onde  $v_1(v_2)$  é a velocidade linear de um ponto localizado na borda da roda 1(2), e  $L$  é a distância entre os centros das rodas.

Arai [13] apresenta a discretização de um sistema não-linear na forma:

$$\dot{q} = g(q, u), \quad (u : \text{entrada}),$$

com um intervalo de amostragem de  $\Delta t$ . O estado  $q(k-1)$  do sistema discretizado é amostrado a partir do estado  $q(t)$  do sistema contínuo original como  $q(k-1) = q((k-1)\Delta t, k = 0, 1, \dots)$ . Entradas constantes por parte,  $u(t) = u(k-1)$ , são aplicadas ao sistema contínuo durante cada intervalo  $(k-1)\Delta t < t < k\Delta t$ . Então o estado no próximo passo é,

$$q(k) = q(k-1) + \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} g(q, u(k-1))dt.$$

Uma vez que  $u(k-1)$  e  $\Delta t$  são constantes, a integral resulta numa função de  $q(k-1)$  e  $u(k-1)$ .

Aplicando este método ao sistema (4.5), Arai chega aos seguintes resultados:

- quando  $w(k-1) \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} x(k) &= x(k-1) + [\text{sen}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t) - \text{sen}(\theta(k-1))]v(k-1)/w(k-1), \\ y(k) &= y(k-1) + [\text{cos}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t) - \text{cos}(\theta(k-1))]v(k-1)/w(k-1), \\ \theta(k) &= \theta(k-1) + w(k-1)\Delta t; \end{aligned}$$

- quando  $w(k-1) = 0$ ,

$$\begin{aligned} x(k) &= x(k-1) + \text{cos}(\theta(k-1))v(k-1)\Delta t, \\ y(k) &= y(k-1) + \text{sen}(\theta(k-1))v(k-1)\Delta t, \\ \theta(k) &= \theta(k-1). \end{aligned}$$

Para utilizar a discretização acima é necessário chavear entre modelos dependendo do valor de  $w(k-1)$ . Para  $w(k-1)$  próximo de zero pode haver singularidade. Pode-se evitar estes problemas usando um modelo aproximado. Aplicando a aproximação de Euler à terceira equação em (4.5), obtem-se:  $\theta(k) = \theta(k-1) + w(k-1)\Delta t$ , uma vez que entre os instantes de amostragem  $[k-1, k)$  os sinais de controle ( $v, w$ ) permanecem constantes e iguais a  $v(k-1)$  e  $w(k-1)$  [39]. Na primeira e segunda equações em (4.5) aparecem os termos co-seno e seno, respectivamente. No instante de amostragem  $k-1$  tem-se:  $\text{cos}(\theta(k-1))$  e  $\text{sen}(\theta(k-1))$ . Imediatamente antes do instante de amostragem  $k$  tem-se:  $\text{cos}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t)$  e  $\text{sen}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t)$ . Usando conhecidas identidades para  $\text{cos}(a+b)$  e  $\text{sen}(a+b)$  chega-se a:

$$\begin{aligned} \text{cos}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t) &= \text{cos}(\theta(k-1))\text{cos}(w(k-1)\Delta t) - \\ &\quad - \text{sen}(\theta(k-1))\text{sen}(w(k-1)\Delta t), \\ \text{sen}(\theta(k-1) + w(k-1)\Delta t) &= \text{sen}(\theta(k-1))\text{cos}(w(k-1)\Delta t) + \\ &\quad + \text{cos}(\theta(k-1))\text{sen}(w(k-1)\Delta t), \end{aligned}$$

Uma vez que o sinal de controle tem valor limitado ( $w_{max} = 1$ ) e que o período de amostragem será curto, de forma que  $\text{cos}(w(k-1)\Delta t) \approx 1$  e  $\text{sen}(w(k-1)\Delta t) \approx 0$ , pode-se

aproximar o sistema considerando que  $\cos(\theta(k-1))$  e  $\sin(\theta(k-1))$  são constantes entre os instantes de amostragem  $[k-1, k)$ . Note que isto será sempre verdade para  $w = 0$ , ou seja, para movimentos retilíneos. Assim, aplicando a aproximação de Euler e fazendo as considerações acima, o sistema (4.5) pode ser discretizado como:

$$\begin{aligned}x(k) &= x(k-1) + v(k-1) \cos(\theta(k-1)) \Delta t, \\y(k) &= y(k-1) + v(k-1) \sin(\theta(k-1)) \Delta t, \\ \theta(k) &= \theta(k-1) + w(k-1) \Delta t,\end{aligned}\tag{4.7}$$

onde  $x(k)$  indica o valor de  $x$  no instante de amostragem  $k$  e  $x(k-1)$  seu valor anterior (isto é, no  $(k-1)$ -ésimo instante de amostragem) [111]. Para efeito de simulação, valores de  $\Delta t \leq 100$  mili-segundos mostraram que a aproximação é válida.

Um modelo geral para o robô móvel pode ser obtido a partir dos modelos dados pelas equações (4.7) e (4.6), o que resulta em:

$$\begin{aligned}x(k) &= \beta_x x(k-1) + (\gamma_{x1} u_1(k-d) + \gamma_{x2} u_2(k-d)) \cos(\theta(k-1)), \\y(k) &= \beta_y y(k-1) + (\gamma_{y1} u_1(k-d) + \gamma_{y2} u_2(k-d)) \sin(\theta(k-1)), \\ \theta(k) &= \beta_\theta \theta(k-1) + \gamma_{\theta 1} u_1(k-d) + \gamma_{\theta 2} u_2(k-d),\end{aligned}\tag{4.8}$$

onde  $\beta_x = \beta_y = \beta_\theta = 1$ ,  $\gamma_{xi} = \gamma_{yi} = \frac{a_i \Delta t}{2}$ ,  $\gamma_{\theta 1} = -\gamma_{\theta 2} = \frac{a_i \Delta t}{L}$  e  $d$  é o atraso de transporte.

Considera-se o problema do rastreamento de uma trajetória referência possível, isto é, uma trajetória  $w_x, w_y, w_\theta$  satisfazendo (4.8). Esta trajetória referência pode ser gerada por qualquer das técnicas de planejamento do movimento disponíveis na literatura [78]. O objetivo do sistema de controle é encontrar controles  $(u_1, u_2)$  capazes de levar os erros de estado (4.9) a zero, ou seja, fazer os estados reais convergirem a suas referências.

$$\begin{aligned}e_x(k) &= w_x(k) - x(k), \\e_{y,k} &= w_y(k) - y(k), \\e_\theta(k) &= w_\theta(k) - \theta(k).\end{aligned}\tag{4.9}$$

O problema considerado neste trabalho pode ser formulado como:

*Dado um sistema na forma cartesiana não-holonômica (4.8), derivar uma lei de controle estável para regular a trajetória do sistema usando controle preditivo com horizonte estendido e um procedimento "on line" de identificação de sistema, tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=N_1}^{N_2} \{ [w_x(k+j) - x(k+j)]^2 + [w_y(k+j) - y(k+j)]^2 + [w_\theta(k+j) - \theta(k+j)]^2 \} = 0$$

*usando sinais de controle limitados,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ .*

### 4.2.1 Proposta de lei de controle para rastreamento de trajetória

Considere um modelo CARIMA do tipo

$$A(q^{-1})\Delta y(k) = B_{y1}(q^{-1})\Delta u_1(k-1) + B_{y2}(q^{-1})\Delta u_2(k-1) + C(q^{-1})\xi(k),$$

e a identidade

$$1 = E(j)(q^{-1})A(q^{-1})\Delta + q^{-j}F(j)(q^{-1}),$$

onde  $E(j)(q^{-1})$  e  $F(j)(q^{-1})$  são polinômios unicamente definidos por  $A(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$  e pelo intervalo de predição  $j$ . Multiplicando-se a equação do modelo CARIMA por  $E(j)(q^{-1})\Delta q^j$ , e considerando  $C(q^{-1}) = 1$ , tem-se (nas equações a seguir o termo  $(q^{-1})$  será omitido para simplificar a notação):

$$E(j)A\Delta y(k+1) = E(j)B_{y1}\Delta u_1(k+j-1) + E(j)B_{y2}\Delta u_2(k+j-1) + E(j)\xi(k+j).$$

Substituindo  $E(j)A\Delta$  dado pela equação Diofantina (ver forma recursiva no Anexo C), obtem-se:

$$y(k+j) = E(j)B_{y1}\Delta u_1(k+j-1) + E(j)B_{y2}\Delta u_2(k+j-1) + F(j)y(k) + E(j)\xi(k+j).$$

O preditor ótimo (com dados obtidos até o tempo  $k$ ), fazendo  $E(j)B_{y1} = G_{y1}(j)$  e  $E(j)B_{y2} = G_{y2}(j)$ , é:

$$\hat{y}(k+j) = G_{y1}(j)\Delta u_1(k+j-1) + G_{y2}(j)\Delta u_2(k+j-1) + F(j)y(k). \quad (4.10)$$

Aplicando este resultado (4.10) ao modelo CARIMA do robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana:

$$\begin{aligned} x(k) &= \tilde{A}_x x(k-1) + [B_{x1}\Delta u_1(k-1) + B_{x2}\Delta u_2(k-1)]\cos(\theta(k-1)) + C_x \xi_x(k-1), \\ y(k) &= \tilde{A}_y y(k-1) + [B_{y1}\Delta u_1(k-1) + B_{y2}\Delta u_2(k-1)]\sen(\theta(k-1)) + C_y \xi_y(k-1), \\ \theta(k) &= \tilde{A}_\theta \theta(k-1) + B_{\theta1}\Delta u_1(k-1) + B_{\theta2}\Delta u_2(k-1) + C_\theta \xi_\theta(k-1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $C_x = C_y = C_\theta = 1$ , chega-se ao preditor ótimo:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+j) &= G_{x1}(j)\cos(\theta(k+j-1))\Delta u_1(k+j-1) + \\ &\quad + G_{x2}(j)\cos(\theta(k+j-1))\Delta u_2(k+j-1) + F_x(j)x(k) + E_x(j)\xi_x(k+j), \\ \hat{y}(k+j) &= G_{y1}(j)\sen(\theta(k+j-1))\Delta u_1(k+j-1) + \\ &\quad + G_{y2}(j)\sen(\theta(k+j-1))\Delta u_2(k+j-1) + F_y(j)y(k) + E_y(j)\xi_y(k+j), \\ \hat{\theta}(k+j) &= G_{\theta1}(j)\Delta u_1(k+j-1) + G_{\theta2}(j)\Delta u_2(k+j-1) + F_\theta(j)\theta(k) + \\ &\quad + E_\theta(j)\xi_\theta(k+j), \end{aligned} \quad (4.12)$$



onde  $k$  é a amostragem corrente,  $j$  indica o número de amostras a frente,  $\Delta$  é o operador diferença  $(1 - q^{-1})$ ,  $G_{x1}(j) = E_{x1}(j)B_{x1}$ ,  $G_{x2}(j) = E_{x2}(j)B_{x2}$ ,  $G_{y1}(j) = E_{y1}(j)B_{y1}$ ,  $G_{y2}(j) = E_{y2}(j)B_{y2}$ ,  $G_{\theta1}(j) = E_{\theta1}(j)B_{\theta1}$ ,  $G_{\theta2}(j) = E_{\theta2}(j)B_{\theta2}$ ,  $F_x(j) = q(1 - \tilde{A}_x)$ ,  $F_y(j) = q(1 - \tilde{A}_y)$ ,  $F_\theta(j) = q(1 - \tilde{A}_\theta)$   $\xi_i(k)$  é um distúrbio aleatório Gaussiano com média igual a zero e não correlacionado.

Estima-se os parâmetros do modelo dado pela equação (4.11) assumindo que o sistema é pseudo-linearizável [151, 150] (o sistema é linear nos parâmetros), utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo ("on line") com fatoração UD da matriz de covariância. Neste caso os parâmetros de  $\tilde{A}_x, B_{x1}, B_{x2}$  são estimados a partir dos sinais  $x(k-1), \Delta u_1(k-1)\cos(\theta(k-1)), \Delta u_2(k-1)\cos(\theta(k-1))$ ; os de  $\tilde{A}_y, B_{y1}, B_{y2}$  são estimados a partir dos sinais  $y(k-1), \Delta u_1(k-1)\sin(\theta(k-1)), \Delta u_2(k-1)\sin(\theta(k-1))$ ; e os de  $\tilde{A}_\theta, B_{\theta1}, B_{\theta2}$  são estimados a partir dos sinais  $\theta(k-1), \Delta u_1(k-1), \Delta u_2(k-1)$  (modelo linear neste último caso). Como os parâmetros de (4.11) são lineares o cálculo de  $G, F$  e  $E$  é realizado como descrito na seção anterior. Caso haja erro no modelo não-linear assumido na pseudo-linearização, pode ocorrer: necessidade de estender o modelo para acomodar os novos parâmetros; o erro não ter correlação alguma com os sinais de controle, e neste caso o CPG continuaria operando normalmente; aparecer um novo termo não-linear, e neste caso a lei de controle derivada para este sistema não seria mais válida. Neste último caso, dois estados convergiam (estados controlados diretamente) e o terceiro apresentaria um erro de "offset". Para a derivação do algoritmo do CPG, assume-se a seguir  $\lambda(j)$  na função de custo constante e igual a  $\lambda$ , e  $N_1 = 1$  e  $N_2 = N$ , assim:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= G_{x1}(1)\cos(\theta(k))\Delta u_1(k) + G_{x2}(1)\cos(\theta(k))\Delta u_2(k) + F_x(1)x(k) + \\ &\quad + E_x(1)\xi_x(k+1), \\ \hat{x}(k+2) &= G_{x1}(2)\cos(\theta(k+1))\Delta u_1(k+1) + G_{x2}(2)\cos(\theta(k+1))\Delta u_2(k+1) + \\ &\quad + F_x(2)x(k) + E_x(2)\xi_x(k+2), \\ &\vdots \\ \hat{x}(k+N) &= G_{x1}(N)\cos(\theta(k+N-1))\Delta u_1(k+N-1) + \\ &\quad + G_{x2}(N)\cos(\theta(k+N-1))\Delta u_2(k+N-1) + F_x(N)x(k) + E_x(N)\xi_x(k+N).\end{aligned}$$

O sinal  $\hat{x}(k+j)$  consiste de quatro termos: dois dependentes de ações de controle futuras a serem determinadas, um dependente de sinais de controle passados e saídas medidas, e o quarto dependente de perturbações futuras.

Chamando de  $f_x(k+j)$  a componente de  $\hat{x}(k+j)$  composta de sinais conhecidos no

instante  $k$ , então:

$$\begin{aligned} f_x(k+1) &= [G_{x1}(1) - g_{x1}(1,0)] \cos(\theta(k)) \Delta u_1(k) + [G_{x2}(1) - g_{x2}(1,0)] \cos(\theta(k)) \Delta u_2(k) + \\ &\quad + F_x(1)x(k), \\ f_x(k+2) &= [zG_{x1}(2) - zg_{x1}(2,0) - g_{x1}(2,1)] \cos(\theta(k)) \Delta u_1(k) + \\ &\quad + [zG_{x2}(2) - zg_{x2}(2,0) - g_{x2}(2,1)] \cos(\theta(k)) \Delta u_2(k) + F_x(2)x(k), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na forma matricial, tem-se:

$$X = \tilde{G}_{x1} \tilde{M} \tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2} \tilde{M} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x, \quad (4.13)$$

onde:

$$\begin{aligned} X &= [\hat{x}(k+1), \hat{x}(k+2), \dots, \hat{x}(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_1 &= [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N-1)]^T, \\ \tilde{U}_2 &= [\Delta u_2(k), \Delta u_2(k+1), \dots, \Delta u_2(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_x &= [f_x(k+1), f_x(k+2), \dots, f_x(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_x &= [E_x(1)\xi(k+1), E_x(2)\xi(k+2), \dots, E_x(N)\xi(k+N)]^T, \end{aligned}$$

$\tilde{G}_{x1}$  e  $\tilde{G}_{x2}$  são matrizes triangulares inferiores:

$$\tilde{G}_{x1} = \begin{bmatrix} g_{x1}(1,0) & 0 & \dots & 0 \\ g_{x1}(2,1) & g_{x1}(2,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x1}(N, N-1) & g_{x1}(N, N-2) & \dots & g_{x1}(N, 0) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}_{x2} = \begin{bmatrix} g_{x2}(1,0) & 0 & \dots & 0 \\ g_{x2}(2,1) & g_{x2}(2,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x2}(N, N-1) & g_{x2}(N, N-2) & \dots & g_{x2}(N, 0) \end{bmatrix},$$

e  $\tilde{M}$  é uma matriz diagonal:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(k)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cos(\theta(k+1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\theta(k+N-1)) \end{bmatrix}.$$

Repetindo o mesmo procedimento para  $\hat{y}(k+j)$  e  $\hat{\theta}(k+j)$ , obtem-se:

$$Y = \tilde{G}_{y1} \tilde{N} \tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2} \tilde{N} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y, \quad (4.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} Y &= [\hat{y}(k+1), \hat{y}(k+2), \dots, \hat{y}(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_1 &= [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N-1)]^T, \\ \tilde{U}_2 &= [\Delta u_2(k), \Delta u_2(k+1), \dots, \Delta u_2(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_y &= [f_y(k+1), f_y(k+2), \dots, f_y(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_y &= [E_y(1)\xi(k+1), E_y(2)\xi(k+2), \dots, E_y(N)\xi(k+N)]^T, \end{aligned}$$

$\tilde{G}_{y1}$  e  $\tilde{G}_{y2}$  são matrizes triangulares inferiores:

$$\tilde{G}_{y1} = \begin{bmatrix} g_{y1}(1,0) & 0 & \dots & 0 \\ g_{y1}(2,1) & g_{y1}(2,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{y1}(N, N-1) & g_{y1}(N, N-2) & \dots & g_{y1}(N, 0) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}_{y2} = \begin{bmatrix} g_{y2}(1,0) & 0 & \dots & 0 \\ g_{y2}(2,1) & g_{y2}(2,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{y2}(N, N-1) & g_{y2}(N, N-2) & \dots & g_{y2}(N, 0) \end{bmatrix},$$

e  $\tilde{N}$  é uma matriz diagonal:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta(k)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta(k+1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \text{sen}(\theta(k+N-1)) \end{bmatrix}.$$

$\Theta$  é dado por:

$$\Theta = \tilde{G}_{\theta 1} \tilde{U}_1 + \tilde{G}_{\theta 2} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_\theta + \tilde{E}_\theta, \quad (4.15)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Theta &= [\hat{\theta}(k+1), \hat{\theta}(k+2), \dots, \hat{\theta}(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_1 &= [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N-1)]^T, \\ \tilde{U}_2 &= [\Delta u_2(k), \Delta u_2(k+1), \dots, \Delta u_2(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_\theta &= [f_\theta(k+1), f_\theta(k+2), \dots, f_\theta(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_\theta &= [E_\theta(1)\xi(k+1), E_\theta(2)\xi(k+2), \dots, E_\theta(N)\xi(k+N)]^T, \end{aligned}$$

e  $\tilde{G}_{\theta_1}$  e  $\tilde{G}_{\theta_2}$  são matrizes triangulares inferiores:

$$\tilde{G}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} g_{\theta_1}(1,0) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{\theta_1}(2,1) & g_{\theta_1}(2,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\theta_1}(N,N-1) & g_{\theta_1}(N,N-2) & \cdots & g_{\theta_1}(N,0) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{G}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} g_{\theta_2}(1,0) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{\theta_2}(2,1) & g_{\theta_2}(2,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\theta_2}(N,N-1) & g_{\theta_2}(N,N-2) & \cdots & g_{\theta_2}(N,0) \end{bmatrix}.$$

Considerando os vetores  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_\theta$  compostos pelos erros preditos no futuro para o sistema  $w_x(t+j) - \hat{x}(t+j), w_y(t+j) - \hat{y}(t+j), w_\theta(t+j) - \hat{\theta}(t+j)$ , a seqüência de controles futura,  $\Delta u_1(t+j), \Delta u_2(t+j)$ , é escolhida pelo CPG, no instante t, de forma a minimizar a seguinte função custo:

$$J = E\{\sum_{j=N_1}^{N_2} e_x^2(t+j) + \sum_{j=N_1}^{N_2} e_y^2(t+j) + \sum_{j=N_1}^{N_2} e_\theta^2(t+j) + \lambda(\sum_{j=1}^{NU} \Delta u_1^2(t+j-1) + \sum_{j=1}^{NU} \Delta u_2^2(t+j-1)), \quad (4.16)$$

onde

- $N_1$  é o horizonte de custo mínimo,
- $N_2$  é o horizonte de custo máximo,
- $NU$  é o horizonte de controle, e
- $\lambda$  é o peso do sinal de controle,

sujeito a restrição que os incrementos no controle  $\Delta u_i(t+j)$  para  $j > NU$  são nulos.

A função de custo pode também ser expressa na forma:

$$J = E\{(X - \tilde{W}_x)^T(X - \tilde{W}_x) + (Y - \tilde{W}_y)^T(Y - \tilde{W}_y) + (\Theta - \tilde{W}_\theta)^T(\Theta - \tilde{W}_\theta) + \lambda\tilde{U}_1^T\tilde{U}_1 + \lambda\tilde{U}_2^T\tilde{U}_2\},$$

isto é, substituindo  $X, Y$ , e  $\Theta$  pelos valores dados nas equações 4.13, 4.14 e 4.15, chega-se a:

$$J = E\{(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x)^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y)^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + (\tilde{G}_{\theta 1}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{\theta 2}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_\theta + \tilde{E}_\theta - \tilde{W}_\theta)^T(\tilde{G}_{\theta 1}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{\theta 2}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_\theta + \tilde{E}_\theta - \tilde{W}_\theta) + \lambda\tilde{U}_1^T\tilde{U}_1 + \lambda\tilde{U}_2^T\tilde{U}_2\}, \quad (4.17)$$

onde,

$$\begin{aligned}\tilde{W}_x &= [w_x(k+1), w_x(k+2), \dots, w_x(k+N)]^T, \\ \tilde{W}_y &= [w_y(k+1), w_y(k+2), \dots, w_y(k+N)]^T, \\ \tilde{W}_\theta &= [w_\theta(k+1), w_\theta(k+2), \dots, w_\theta(k+N)]^T.\end{aligned}$$

Na função de custo assume-se que  $E\{\tilde{E}_x^T \tilde{U}_1\} = E\{\tilde{E}_x^T \tilde{U}_2\} = E\{\tilde{E}_y^T \tilde{U}_1\} = E\{\tilde{E}_y^T \tilde{U}_2\} = E\{\tilde{E}_\theta^T \tilde{U}_1\} = E\{\tilde{E}_\theta^T \tilde{U}_2\} = 0$  (não há correlação entre o ruído e o sinal de controle),  $E\{\tilde{E}_x\} = E\{\tilde{E}_y\} = E\{\tilde{E}_\theta\} = 0$  e  $E\{\tilde{E}_x^T \tilde{E}_x\}, E\{\tilde{E}_y^T \tilde{E}_y\}, E\{\tilde{E}_\theta^T \tilde{E}_\theta\}$  não são afetadas por  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2$ .

É válido lembrar que a derivada de uma função escalar,  $J$ , em relação a um vetor  $\tilde{U} = [\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n]^T$  é dada por [110]:

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \Delta u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta u_n} \end{bmatrix},$$

e a condição necessária para achar o mínimo de uma função de várias variáveis consiste em igualar as derivadas parciais a zero e resolver o sistema resultante [58].

Diferenciando a função de custo (4.17) em relação a  $\tilde{U}_1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1} &= 2E\{(\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ &\quad + (\tilde{G}_{x1}\tilde{P}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ &\quad + (\tilde{G}_{x2}\tilde{P}\tilde{U}_2)^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ &\quad + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ &\quad + (\tilde{G}_{y1}\tilde{Q}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ &\quad + (\tilde{G}_{y2}\tilde{Q}\tilde{U}_2)^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ &\quad + \tilde{G}_{\theta 1}^T(\tilde{G}_{\theta 1}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{\theta 2}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_\theta + \tilde{E}_\theta - \tilde{W}_\theta) + \lambda I\tilde{U}_1\},\end{aligned}$$

onde  $\tilde{P}$  é uma matriz que contém a derivada de  $\cos(\theta(k+j-1))$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{Q}$  é uma matriz que contém a derivada de  $\text{sen}(\theta(k+j-1))$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_1$ , e tem a forma:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta(k+1))B_{\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\theta(k+1))B_{\theta_1} & -\text{sen}(\theta(k+2))B_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\text{sen}(\theta(k+1))B_{\theta_1} & -\text{sen}(\theta(k+2))B_{\theta_1} & \dots & -\text{sen}(\theta(k+N-1))B_{\theta_1} \end{bmatrix},$$

e

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_1}) & \cos(\theta(k+2)B_{\theta_1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_1}) & \cos(\theta(k+2)B_{\theta_1}) & \cdots & \cos(\theta(k+N-1)B_{\theta_1}) \end{bmatrix},$$

o polinômio  $B_{\theta_1}$  só tem um termo ( $\theta$  depende apenas de  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$  anterior).

Considerando  $NU = 1$  (controlador *dead-beat*), então  $\Delta u_1(k+1) = \Delta u_1(k+2) = \cdots = \Delta u_1(k+N-1) = 0$ , o mesmo ocorrendo para  $\Delta u_2(k+1) = \Delta u_2(k+2) = \cdots = \Delta u_2(k+N-1) = 0$ . Logo, os termos envolvendo  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$  não terão nenhuma influência no cálculo da lei de controle e podem ser desprezados. Tem-se então a equação simplificada para  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1} = & 2[ ((\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T\tilde{G}_{x1}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T\tilde{G}_{y1}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 1}^T\tilde{G}_{\theta 1} + \lambda I)\tilde{U}_1 + \\ & + ((\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T\tilde{G}_{x2}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T\tilde{G}_{y2}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 1}^T\tilde{G}_{\theta 2})\tilde{U}_2 + \\ & + (\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T(\tilde{F}_x - \tilde{W}_x) + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T(\tilde{F}_y - \tilde{W}_y) + \tilde{G}_{\theta 1}^T(\tilde{F}_\theta - \tilde{W}_\theta) ] = 0. \end{aligned}$$

Diferenciando a função de custo (4.17) em relação a  $\tilde{U}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2} = & 2E\{ (\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ & + (\tilde{G}_{x1}\tilde{R}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ & + (\tilde{G}_{x2}\tilde{R}\tilde{U}_2)^T(\tilde{G}_{x1}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{x2}\tilde{M}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_x + \tilde{E}_x - \tilde{W}_x) + \\ & + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ & + (\tilde{G}_{y1}\tilde{S}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ & + (\tilde{G}_{y2}\tilde{S}\tilde{U}_2)^T(\tilde{G}_{y1}\tilde{N}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{y2}\tilde{N}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_y + \tilde{E}_y - \tilde{W}_y) + \\ & + \tilde{G}_{\theta 2}^T(\tilde{G}_{\theta 1}\tilde{U}_1 + \tilde{G}_{\theta 2}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_\theta + \tilde{E}_\theta - \tilde{W}_\theta) + \lambda I\tilde{U}_2 \}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{R}$  é uma matriz que contém a derivada de  $\cos(\theta(k+j-1))$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_2$  e  $\tilde{S}$  é uma matriz que contém a derivada de  $\sin(\theta(k+j-1))$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_2$ , e tem a forma:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sin(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\sin(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & -\sin(\theta(k+2)B_{\theta_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\sin(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & -\sin(\theta(k+2)B_{\theta_2}) & \cdots & -\sin(\theta(k+N-1)B_{\theta_2}) \end{bmatrix},$$

e

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & \cos(\theta(k+2)B_{\theta_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cos(\theta(k+1)B_{\theta_2}) & \cos(\theta(k+2)B_{\theta_2}) & \cdots & \cos(\theta(k+N-1)B_{\theta_2}) \end{bmatrix},$$

o polinômio  $B_{\theta_2}$  só tem um termo ( $\theta$  depende apenas de  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$  anterior).

Fazendo a mesma consideração anterior ( $NU = 1$ , para o controlador *dead-beat*), então  $\Delta u_1(k+1) = \Delta u_1(k+2) = \cdots = \Delta u_1(k+N-1) = 0$ , o mesmo ocorrendo para  $\Delta u_2(k+1) = \Delta u_2(k+2) = \cdots = \Delta u_2(k+N-1) = 0$ . Logo, os termos envolvendo  $\tilde{R}$  e  $\tilde{S}$  não terão nenhuma influência no cálculo da lei de controle e podem ser desprezados. Tem-se então a equação simplificada para  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2} = & 2[ ((\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x2}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y2}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 2}^T \tilde{G}_{\theta 2} + \lambda I) \tilde{U}_2 + \\ & + ((\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x1}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y1}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 2}^T \tilde{G}_{\theta 1}) \tilde{U}_1 + \\ & + (\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T (\tilde{F}_x - \tilde{W}_x) + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T (\tilde{F}_y - \tilde{W}_y) + \tilde{G}_{\theta 2}^T (\tilde{F}_\theta - \tilde{W}_\theta) ] = 0. \end{aligned}$$

Rearranjando estes resultados na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} p_{11} &= ((\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x1}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y1}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 1}^T \tilde{G}_{\theta 1} + \lambda I), \\ p_{12} &= (\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x2}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y2}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 1}^T \tilde{G}_{\theta 2}, \\ p_{21} &= (\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x1}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y1}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 2}^T \tilde{G}_{\theta 1}, \\ p_{22} &= (\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T \tilde{G}_{x2}\tilde{M} + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T \tilde{G}_{y2}\tilde{N} + \tilde{G}_{\theta 2}^T \tilde{G}_{\theta 2} + \lambda I, \\ r_1 &= (\tilde{G}_{x1}\tilde{M})^T (\tilde{F}_x - \tilde{W}_x) + (\tilde{G}_{y1}\tilde{N})^T (\tilde{F}_y - \tilde{W}_y) + \tilde{G}_{\theta 1}^T (\tilde{F}_\theta - \tilde{W}_\theta), \\ r_2 &= (\tilde{G}_{x2}\tilde{M})^T (\tilde{F}_x - \tilde{W}_x) + (\tilde{G}_{y2}\tilde{N})^T (\tilde{F}_y - \tilde{W}_y) + \tilde{G}_{\theta 2}^T (\tilde{F}_\theta - \tilde{W}_\theta), \end{aligned}$$

Para solução da equação (4.18), é necessário o conhecimento do valor de  $\theta$  atual e de seus valores futuros ( $\tilde{M}$  e  $\tilde{N}$  dependem do co-seno e seno de  $\theta$ ). Considerando que o CPG funciona como um controlador *dead-beat* quando  $\lambda = 0$  e  $NU = 1$  (o controlador atraca no segundo instante de amostragem [27]), usa-se o valor atual de  $\theta$  quando  $j = 1$  e para os demais valores de  $j$  utiliza-se os valores de referência  $w_\theta(k+j-1)$ .

O algoritmo base do conhecido Controlador Preditivo Generalizado (CPG) é revisto e adaptado para o modelo não-linear. Sistemas não-lineares geralmente requerem uma solução ótima, como o algoritmo CPG trabalha nesta direção ele é a escolha natural para o controle adaptativo.

Para fins de controle, é assumido que o modelo Controlado Auto Regressivo e de Média

Móvel Integrada (CARIMA), tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
x(k+j) &= (G_{x1}\Delta u_1(k+j-1) + G_{x2}\Delta u_2(k+j-1)) \cos(\theta(k+j-1)) + \\
&\quad + F_x x(k) + E_x(j)\xi_x(k+j) \cos(\theta_{k-1}), \\
y(k+j) &= (G_{y1}\Delta u_1(k+j-1) + G_{y2}\Delta u_2(k+j-1)) \text{sen}(\theta(k+j-1)) + \\
&\quad + F_y y(k) + E_y(j)\xi_y(k+j), \\
\theta(k+j) &= G_{\theta 1}\Delta u_1(k+j-1) + G_{\theta 2}\Delta u_2(k+j-1) + F_\theta \theta(k) + E_\theta(j)\xi_\theta(k+j),
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde  $k$  é a amostra corrente,  $j$  indica o número de amostras à frente,  $\Delta$  é o operador diferença  $(1 - q^{-1})$ , e  $\xi_i(k)$  é um distúrbio aleatório genérico.

Considerando os vetores  $e_x, e_y, e_\theta$  compostos pelos erros futuros do sistema previstos  $w_x(t+j) - \hat{x}(t+j)$ ,  $w_y(t+j) - \hat{y}(t+j)$ ,  $w_\theta(t+j) - \hat{\theta}(t+j)$ , a sequência de futuros controles,  $u_1(t+j)$ ,  $u_2(t+j)$ , são escolhidos pelo GPC, no instante  $t$ , de forma a minimizar a seguinte função custo:

$$\begin{aligned}
J &= E\{\sum_{j=N_1}^{N_2} e_x^2(t+j) + \sum_{j=N_1}^{N_2} e_y^2(t+j) + \sum_{j=N_1}^{N_2} e_\theta^2(t+j) + \\
&\quad + \lambda(\sum_{j=1}^{NU} \Delta u_1^2(t+j-1) + \sum_{j=1}^{NU} \Delta u_2^2(t+j-1))\},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde

- $N_1$  é o horizonte de custo mínimo,
- $N_2$  é o horizonte de custo máximo,
- $NU$  é o horizonte de controle, e
- $\lambda$  é o peso do sinal de controle,

sujeito a restrição que os incrementos no controle  $\Delta u_i(t+j)$  para  $j > NU$  são nulos.

A solução para  $J_{min}$ , da equação (4.20) usando (4.19) e assumindo que  $E\{E_i \Delta u_i\} = 0$ , com o controle ótimo será então:

$$\begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
p_{11} &= G_{x1}^T G_{x1} \cos^2 \theta + G_{y1}^T G_{y1} \text{sen}^2 \theta + G_{\theta 1}^T G_{\theta 1} + \lambda I, \\
p_{12} &= G_{x1}^T G_{x2} \cos^2 \theta + G_{y1}^T G_{y2} \text{sen}^2 \theta + G_{\theta 1}^T G_{\theta 2}, \\
p_{21} &= G_{x2}^T G_{x1} \cos^2 \theta + G_{y2}^T G_{y1} \text{sen}^2 \theta + G_{\theta 2}^T G_{\theta 1}, \\
p_{22} &= G_{x2}^T G_{x2} \cos^2 \theta + G_{y2}^T G_{y2} \text{sen}^2 \theta + G_{\theta 2}^T G_{\theta 2} + \lambda I, \\
r_1 &= G_{x1}^T \cos \theta (F_x x - w_x) + G_{y1}^T \text{sen} \theta (F_y y - w_y) + G_{\theta 1}^T (F_\theta \theta - w_\theta), \\
r_2 &= G_{x2}^T \cos \theta (F_x x - w_x) + G_{y2}^T \text{sen} \theta (F_y y - w_y) + G_{\theta 2}^T (F_\theta \theta - w_\theta),
\end{aligned}$$



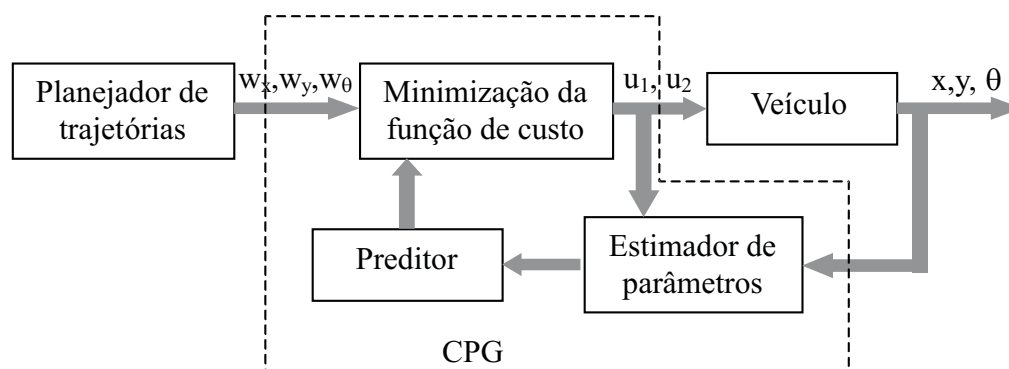


Figura 4.1: Controle de seguimento com o CPG.

A Figura 4.1 mostra o diagrama do sistema com o controlador.

Os resultados apresentados até aqui podem ser sintetizados na seguinte conjectura:

**Conjectura 1.** *Considere o robô móvel com acionamento diferencial, o modelo CARIMA derivado na forma cartesiana não-holonômica (4.11) e a lei de controle definida sobre  $\Omega = \{(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^3\}$  obtida usando o Controle Preditivo Generalizado (CPG) como mostrado na equação (4.18) com*

1.  $N_1 = 1$ ;
2.  $N_2$  um múltiplo de  $\Delta t$  (tempo de amostragem), cujo produto  $N_2 \Delta t$  seja no mínimo igual o tempo de subida da planta;
3.  $NU = 1$ ;
4.  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \epsilon$ , caso seja necessário melhorar a robustez numérica;
5. e sendo o modelo do sistema estabilizável e detectável;

então, todos os erros de estado do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente a zero quando  $t$  tende ao infinito.

### 4.2.2 Simulações Numéricas

Nesta seção, uma simulação em computador é apresentada para demonstrar o desempenho do controlador e para validar a metodologia construtiva.

Considere o simples exemplo de um sistema de controle não-holonômico, especificamente o robô móvel com acionamento diferencial. Equações na forma cartesiana não-holonômica para este robô móvel podem ser escritas como em (4.12) e a função de custo a ser minimizada como em (4.16). As trajetórias referências foram geradas pelo seguinte

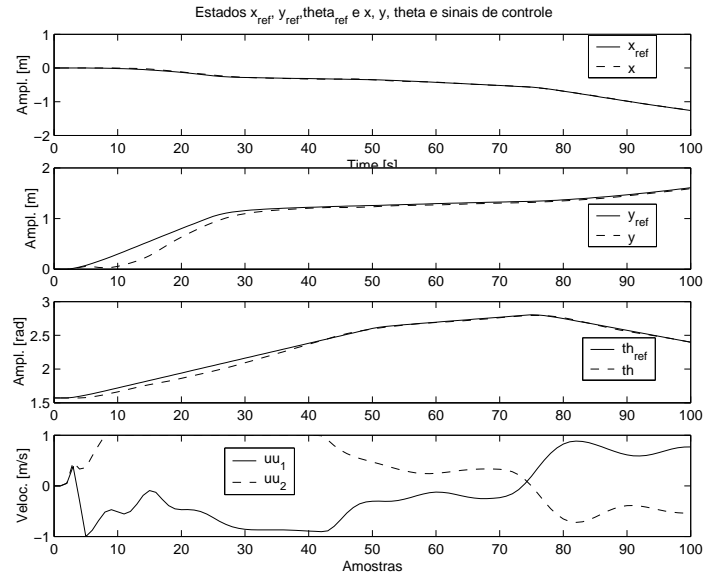


Figura 4.2: Evolução das trajetórias referência e real usando o CPG para controle de robô móvel.

modelo [50]:

$$\begin{aligned}
 x(k) &= 1.6824x(k-1) - 0.6824x(k-2) + (0.0441u_1(k-1) \\
 &\quad + 0.0403u_2(k-1)) \cos(\theta(k-1)), \\
 y(k) &= 1.7150y(k-1) - 0.7152y(k-2) + (0.0336u_1(k-1) \\
 &\quad + 0.0318u_2(k-1)) \text{sen}(\theta(k-1)), \\
 \theta(k) &= 1.5640\theta(k-1) - 0.5640\theta(k-2) + 0.0063u_1(k-1) \\
 &\quad + 0.0065u_2(k-1),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

com

- se  $k < 25$  então  $u_1 = -0.5$ , e  $u_2 = 1$ ,
- se  $25 \leq k < 50$  então  $u_1 = -0.7$ , e  $u_2 = 0.8$ ,
- se  $50 \leq k < 75$  então  $u_1 = -0.2$ , e  $u_2 = 0.3$ ,
- se  $k \geq 75$  então  $u_1 = 0.7$ , e  $u_2 = -0.50$ .

A Figura 4.2 apresenta o resultado da simulação do sistema sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como  $(x, y, \theta)^T = (0, 0, \pi/2)^T$ , e  $\lambda = 0.01$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 5$ ,  $NU = 1$ , o modelo CARIMA usa  $n_a = n_b = n_c = 1$ , e  $u_1$  e  $u_2$  estão limitados a  $\pm 1.0$ . Pode ser observada a convergência de todos os estados.

A Figura 4.3 mostra a evolução dos parâmetros estimados. Note que o controlador apresenta erro inicialmente até os valores estimados convergirem. Após isto ocorrer, o erro

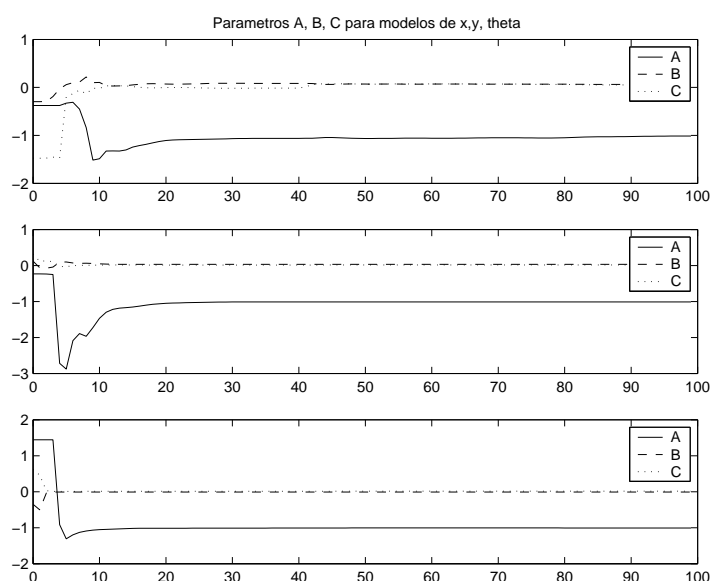


Figura 4.3: Estimação de parâmetros do robô móvel com acionamento diferencial.

inicial de estado é eliminado. Os parâmetros estimados na primeira vez que o algoritmo é executado são usados para partir o controlador CPG e fazer o robô móvel seguir outras trajetórias minimizando o erro inicial.

### 4.3 Controle Preditivo Generalizado para sistemas na forma encadeada

Busca-se, nesta seção, uma generalização da aplicação do CPG a uma classe mais ampla de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas. Como é do conhecimento geral, a classe de sistemas não-holonômicos na forma encadeada é uma classe com propriedades especiais:

- qualquer sistema não-linear que atenda ao teorema de Chow pode ser transformado para esta forma [128];
- esta forma tem ainda a característica de ser controlável [107];
- as equações obtidas na forma encadeada por serem controláveis também são integráveis, gerando um modelo discreto linear [38];
- outra vantagem desta representação é que a descrição estocástica do ruído na forma encadeada é mais natural pelo fato das incertezas serem representadas num sistema de coordenadas fixas [38].

A idéia principal do projeto do controlador é transformar as equações diferenciais do sistema original numa representação discreta que é equivalente a dinâmica contínua original nos instantes de amostragem [39].

Como o CPG necessita de um modelo discreto do tipo CARIMA, faz-se necessário a discretização da forma encadeada. Fabrizio [38] apresenta uma forma de discretização para o robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada. Uma forma mais geral é apresentada em Conticelli [39], considerando a evolução de cada estado num sub-intervalo do tempo de amostragem. O modelo contínuo de um sistema não-holonômico na forma encadeada considerado é

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_i &= x_{i-1}u_1, \quad i = 3, \dots, n,\end{aligned}\tag{4.23}$$

onde  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  é o vetor de estados, e  $\vec{u} = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$  é o vetor de entradas de controle. Denota-se por  $\Delta t > 0$  o período de amostragem. Aplica-se ao sistema na forma encadeada (4.23), entradas constantes por partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= u_1^*(t_{k,0}) & t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t), \\ u_2(t) &= u_2^*(t_{k,0}) & t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t),\end{aligned}\tag{4.24}$$

onde os valores constantes  $u_1^*(t_{k,0})$  e  $u_2^*(t_{k,0})$ , e  $k \in \mathbf{N}$ , são parâmetros do controle.

Uma vez que  $u_1(t)$  permanece constante durante o período de amostragem  $\Delta t$ , o sub-sistema dado pelas variáveis de estado dinâmicas  $\vec{x}_r = [x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{r}^{n-1}$  produz o seguinte sistema linear, invariante no tempo (LTI) no intervalo de tempo  $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ :

$$\dot{\vec{x}}_r = A_r(u_1^*)\vec{x}_r + b_r u_2(t),\tag{4.25}$$

onde  $A_r(u_1^*) \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  tem a seguinte expressão

$$A_r(u_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & u_1^* & 0 \end{bmatrix},\tag{4.26}$$

e  $b_r = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{(n-1)}$ . O sistema LTI contínuo no tempo acima é controlável se  $u_1^*$  for diferente de zero.

Note que a matriz  $A_r(u_1^*)$  tem todos os seus  $(n-1)$  autovalores iguais a zero, e uma vez que as colunas da matriz são linearmente independentes se  $u_1^*$  não for nulo, o núcleo da matriz tem dimensão unitária. Integrando a equação (4.23) sobre o intervalo de amostragem, a seguinte representação discreta no tempo é obtida:

$$\vec{x}_r(t_{k+1}) = A_\delta \vec{x}_r(t_k) + b_\delta u_2(t_k),\tag{4.27}$$

onde

$$A_\delta = \exp(A_r(u_1^*)\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ u_1^*\Delta t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_1^*(\Delta t)^{n-2} & u_1^*(\Delta t)^{n-3} & \cdots & u_1^*\Delta t & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$b_\delta = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp(A_r(u_1^*)b_\delta d(\Delta t)) = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1^*(\Delta t)^2 \\ \vdots \\ u_1^{*(n-2)}(\Delta t)^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Considera-se neste trabalho uma forma aproximada do modelo. Seja o sistema não-linear com restrições não-holonômicas na forma encadeada:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_{i-1} &= x_i u_1, \quad i = 3, \dots, n, \\ \dot{x}_n &= u_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Considerando um sistema de terceira ordem, pode-se utilizar a aproximação de Euler na primeira e na última equação, e uma vez que  $u_1$  e  $u_2$  permanecem constantes e iguais a  $u_1(k-1)$  e  $u_2(k-1)$  durante o intervalo de amostragem,  $[(k-1)\Delta t, k\Delta t)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_1(k-1) + \Delta t u_1(k-1), \\ x_3(k) &= x_3(k-1) + \Delta t u_2(k-1). \end{aligned}$$

No instante de amostragem  $(k-1)$  tem-se  $x_2(k) = x_2(k-1) + x_3(k-1)u_1(k-1)\Delta t$ . Imediatamente antes do instante de amostragem  $k$ , tem-se  $x_2(k) = x_2(k-1) + [x_3(k-1) + \Delta t u_2(k-1)]u_1(k-1)\Delta t$ .

Como os sinais  $u_1$  e  $u_2$  estão limitados a  $u_{max} = 1$  e uma vez que  $\Delta t$  seja escolhido pequeno, pode-se desprezar os termos  $\Delta t^n$  onde  $n$  seja maior ou igual a 2. Isto leva ao seguinte sistema aproximado:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_1(k-1) + \Delta t u_1(k-1), \\ x_2(k) &= x_2(k-1) + \Delta t x_3(k-1)u_1(k-1), \\ x_3(k) &= x_3(k-1) + \Delta t u_2(k-1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Note que as equações 1 e 3 são lineares, apenas a segunda equação é bilinear e foi aproximada. Em simulações, valores de  $\Delta t \leq 100$  mili-segundos mostraram que esta representação é satisfatória.

O modelo usando a discretização no espaço de estados dado em Conticelli [39] e considerando o intervalo de amostragem,  $\Delta t$ , pequeno (de forma que pode-se desprezar  $\Delta t^2$ ),

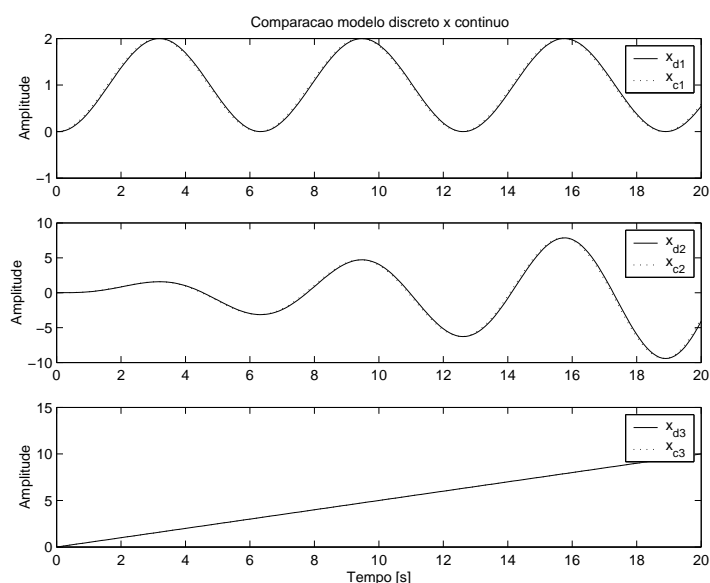


Figura 4.4: Comparação de modelos na forma encadeada contínua e discreta.

resulta num sistema na forma encadeada discreta como em (4.30).

O mesmo procedimento pode ser realizado para aproximar sistemas onde  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , uma vez que  $u_1$  e  $u_2$  permanecem constantes durante o intervalo de amostragem,  $\Delta t$ , e este seja pequeno. Isto resulta no seguinte modelo aproximado geral:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= x_1(k-1) + \Delta t u_1(k-1), \\ x_{i-1}(k) &= x_{i-1}(k-1) + \Delta t x_i(k-1) u_1(k-1), \\ x_n(k) &= x_n(k-1) + \Delta t u_2(k-1). \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde  $\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  é o vetor de estados,  $\vec{u} = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$  é o vetor de entradas,  $\Delta t$  o intervalo de amostragem,  $k$  o instante de amostragem, e  $i = 3, \dots, n$ .

O modelo discretizado foi simulado e os resultados obtidos foram comparados com o modelo na forma contínua. Os resultados obtidos mostram (Figura 4.4) que o modelo representa adequadamente o sistema para  $\Delta t \leq 0,1$  segundos.

O problema considerado aqui pode ser formulado como:

*Dado um sistema na forma encadeada discretizada aproximada em  $\mathbf{R}^n$ , derivar uma lei de controle por realimentação, globalmente estável, para regular a trajetória do sistema usando o controle preditivo generalizado.*

### 4.3.1 Proposta de lei de controle

Considere um modelo CARIMA do tipo

$$A\Delta y(k) = B_{y1}\Delta u_1(k-1) + B_{y2}\Delta u_2(k-1) + C\xi(k),$$

e a identidade

$$1 = E(j)A\Delta + q^{-j}F(j),$$

onde  $E(j)$  e  $F(j)$  são polinômios unicamente definidos por  $A$ ,  $C$  e pelo intervalo de predição  $j$ .

Multiplicando-se a equação do modelo CARIMA por  $E(j)\Delta q^j$ , e considerando  $C = 1$ , tem-se:

$$E(j)A\Delta y(k+1) = E(j)B_{y1}\Delta u_1(k+j-1) + E(j)B_{y2}\Delta u_2(k+j-1) + E(j)\xi(k+j).$$

Substituindo  $E(j)A\Delta$  dado pela equação Diofantina, obtém-se:

$$y(k+j) = E(j)B_{y1}\Delta u_1(k+j-1) + E(j)B_{y2}\Delta u_2(k+j-1) + F(j)y(k) + E(j)\xi(k+j).$$

O preditor ótimo (com dados obtidos até o tempo  $k$ ), fazendo  $E(j)B_{y1} = G_{y1}(j)$  e  $E(j)B_{y2} = G_{y2}(j)$ , é:

$$\hat{y}(k+j) = G_{y1}(j)\Delta u_1(k+j-1) + G_{y2}(j)\Delta u_2(k+j-1) + F(j)y(k). \quad (4.32)$$

Aplicando este resultado (4.32) ao modelo CARIMA de um sistema não-holonômico na forma encadeada:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \tilde{A}_{x_1}x_1(k-1) + B_{x_1}u_1(k-1) + C_{x_1}\xi_{x_1}(k-1), \\ x_{i-1}(k) &= \tilde{A}_{x_{i-1}}x_{i-1}(k-1) + B_{x_{i-1}}x_i(k-1)u_1(k-1) + C_{x_{i-1}}\xi_{x_{i-1}}(k-1), \\ x_n(k) &= \tilde{A}_{x_n}x_n(k-1) + B_{x_n}u_2(k-1) + C_{x_n}\xi_{x_n}(k-1), \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $C_{x_1} = C_{x_{i-1}} = C_{x_n} = 1$ , chega-se ao preditor ótimo:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+j) &= G_{x_1}(j)\Delta u_1(k+j-1) + F_{x_1}(j)x_1(k) + E_{x_1}(j)\xi_{x_1}(k+j), \\ \hat{x}_{i-1}(k+j) &= G_{x_{i-1}}(j)x_i(k+j-1)\Delta u_1(k+j-1) + F_{x_{i-1}}(j)x_{i-1}(k) + \\ &\quad + E_{x_{i-1}}(j)\xi_{x_{i-1}}(k+j), \\ \hat{x}_n(k+1) &= G_{x_n}(j)\Delta u_2(k+j-1) + F_{x_n}(j)x_n(k) + E_{x_n}(j)\xi_{x_n}(k+j). \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde  $k$  é a amostragem corrente,  $j$  indica o número de amostras a frente,  $\Delta$  é o operador diferença  $(1 - q^{-1})$ ,  $G_{x_1}(j) = E_{x_1}(j)B_{x_1}$ ,  $G_{x_{i-1}}(j) = E_{x_{i-1}}(j)B_{x_{i-1}}$ ,  $G_{x_n}(j) = E_{x_n}(j)B_{x_n}$ ,  $F_{x_1}(j) = q(1 - \tilde{A}_{x_1})$ ,  $F_{x_{i-1}}(j) = q(1 - \tilde{A}_{x_{i-1}})$ ,  $F_{x_n}(j) = q(1 - \tilde{A}_{x_n})$ , e  $\xi_i(k)$  é um distúrbio aleatório Gaussiano com média igual a zero e não correlacionado.

Estima-se os parâmetros do modelo dado pelas equações (4.33) considerando que as equações para  $x_1$  e  $x_n$  são lineares e assumindo que as demais equações são pseudo-linearizáveis [151, 150] (o sistema é linear nos parâmetros), utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo ("on line") com fatoração UD da matriz de covariância.

Neste último caso os parâmetros de  $\tilde{A}_{x_{i-1}}$  e  $B_{x_{i-1}}$  são estimados a partir dos sinais  $x(k-1), \Delta u_1(k-1)x_i(k-1)$ ; os demais parâmetros correspondem a modelos lineares e não há necessidade de se fazer a pseudo-linearização. Como os parâmetros de (4.33) são lineares os cálculos de  $G, F$  e  $E$  são realizados como descrito na seção anterior.

Para a derivação do algoritmo do CPG, assume-se a seguir  $\lambda(j)$  na função de custo, constante =  $\lambda$ ,  $N_1 = 1$ , e  $N_2 = N$ , assim:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1(k+1) &= G_{x_1}(1)\Delta u_1(k) + F_{x_1}(1)x_1(k) + E_{x_1}(1)\xi_{x_1}(k+1), \\ \hat{x}_1(k+2) &= G_{x_1}(2)\Delta u_1(k+1) + F_{x_1}(2)x_1(k) + E_{x_1}(2)\xi_{x_1}(k+2), \\ &\vdots \\ \hat{x}_1(k+N) &= G_{x_1}(N)\Delta u_1(k+N-1) + F_{x_1}(N)x_1(k) + E_{x_1}(N)\xi_{x_1}(k+N).\end{aligned}$$

O sinal  $\hat{x}_1(k+j)$  consiste de três termos: um dependente de ações de controle futuras a serem determinadas, um dependente de sinais de controle passados e saídas medidas, e o terceiro dependente de perturbações futuras.

Chamando de  $f_{x_1}(k+j)$  a componente de  $\hat{x}_1(k+j)$  composta de sinais conhecidos no instante  $k$ , tem-se:

$$\begin{aligned}f_{x_1}(k+1) &= (G_{x_1}(1) - g_{x_1}(1,0))\Delta u_1(k) + F_{x_1}(1)x_1(k), \\ f_{x_1}(k+2) &= (zG_{x_1}(2) - zg_{x_1}(2,0) - g_{x_1}(2,1))\Delta u_1(k) + F_{x_1}(2)x_1(k), \\ &\vdots\end{aligned}$$

Na forma matricial:

$$X_1 = \tilde{G}_{x_1}\tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_1} + \tilde{E}_{x_1}, \quad (4.35)$$

onde:

$$\begin{aligned}X_1 &= [\hat{x}_1(k+1), \hat{x}_1(k+2), \dots, \hat{x}_1(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_1 &= [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_{x_1} &= [f_{x_1}(k+1), f_{x_1}(k+2), \dots, f_{x_1}(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_{x_1} &= [E_{x_1}(1)\xi_{x_1}(k+1), E_{x_1}(2)\xi_{x_1}(k+2), \dots, E_{x_1}(N)\xi_{x_1}(k+N)]^T,\end{aligned}$$

e  $\tilde{G}_{x_1}$  é uma matriz triangular inferior:

$$\tilde{G}_{x_1} = \begin{bmatrix} g_{x_1}(1,0) & 0 & \dots & 0 \\ g_{x_1}(2,1) & g_{x_1}(2,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_1}(N,N-1) & g_{x_1}(N,N-2) & \dots & g_{x_1}(N,0) \end{bmatrix}.$$



Repetindo o mesmo procedimento para  $\hat{x}_{i-1}(k+j)$  e  $\hat{x}_n(k+j)$ , obtem-se:

$$X_{i-1} = \tilde{G}_{x_{i-1}} \tilde{M} \tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{i-1}} + \tilde{E}_{x_{i-1}}, \quad (4.36)$$

onde:

$$\begin{aligned} X_{i-1} &= [\hat{x}_{i-1}(k+1), \hat{x}_{i-1}(k+2), \dots, \hat{x}_{i-1}(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_1 &= [\Delta u_1(k), \Delta u_1(k+1), \dots, \Delta u_1(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_{x_{i-1}} &= [f_{x_{i-1}}(k+1), f_{x_{i-1}}(k+2), \dots, f_{x_{i-1}}(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_{x_{i-1}} &= [E_{x_{i-1}}(1)\xi_{x_{i-1}}(k+1), E_{x_{i-1}}(2)\xi_{x_{i-1}}(k+2), \dots, E_{x_{i-1}}(N)\xi_{x_{i-1}}(k+N)]^T, \end{aligned}$$

$\tilde{G}_{x_{i-1}}$  é uma matriz triangular inferior:

$$\tilde{G}_{x_{i-1}} = \begin{bmatrix} g_{x_{i-1}}(1,0) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{x_{i-1}}(2,1) & g_{x_{i-1}}(2,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_{i-1}}(N,N-1) & g_{x_{i-1}}(N,N-2) & \cdots & g_{x_{i-1}}(N,0) \end{bmatrix},$$

$\tilde{M}$  é uma matriz diagonal:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} x_{i-1}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{i-1}(k+1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{i-1}(k+N-1) \end{bmatrix},$$

e

$$X_n = \tilde{G}_{x_n} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_{x_n} + \tilde{E}_{x_n}, \quad (4.37)$$

onde:

$$\begin{aligned} X_n &= [\hat{x}_n(k+1), \hat{x}_n(k+2), \dots, \hat{x}_n(k+N)]^T, \\ \tilde{U}_2 &= [\Delta u_2(k), \Delta u_2(k+1), \dots, \Delta u_2(k+N-1)]^T, \\ \tilde{F}_{x_n} &= [f_{x_n}(k+1), f_{x_n}(k+2), \dots, f_{x_n}(k+N)]^T, \\ \tilde{E}_{x_n} &= [E_{x_n}(1)\xi_{x_n}(k+1), E_{x_n}(2)\xi_{x_n}(k+2), \dots, E_{x_n}(N)\xi_{x_n}(k+N)]^T, \end{aligned}$$

e  $\tilde{G}_{x_n}$  é uma matriz triangular inferior:

$$\tilde{G}_{x_n} = \begin{bmatrix} g_{x_n}(1,0) & 0 & \cdots & 0 \\ g_{x_n}(2,1) & g_{x_n}(2,0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{x_n}(N,N-1) & g_{x_n}(N,N-2) & \cdots & g_{x_n}(N,0) \end{bmatrix}.$$

A função do custo a ser minimizado para o CPG é da forma:

$$\begin{aligned}
 J = E\{ & \sum_{j=N_1}^{N_2} (x_1(t+j) - w_1(t+j))^T (x_1(t+j) - w_1(t+j)) + \dots + \\
 & + \sum_{j=N_1}^{N_2} (x_n(t+j) - w_n(t+j))^T (x_n(t+j) - w_n(t+j)) + \\
 & + \lambda (\sum_{j=1}^{NU} \Delta u_1^2(t+j-1) + \sum_{j=1}^{NU} \Delta u_2^2(t+j-1)), \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

onde

- $N_1$  é o horizonte de custo mínimo,
- $N_2$  é o horizonte de custo máximo,
- $NU$  é o horizonte de controle,
- $\lambda$  é o peso do sinal de controle,
- $x_i(t+j)$  é a previsão do valor do estado  $x_i$ ,
- $w_i(t+j)$  é a referência para o estado  $x_i$ .

sujeito a restrição que os incrementos no controle  $\Delta u_i(t+j)$  para  $j > NU$  são nulos.

A função custo pode também ser expressa na forma:

$$\begin{aligned}
 J = E\{ & (X_1 - \tilde{W}_{x_1})^T (X_1 - \tilde{W}_{x_1}) + (X_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}})^T (X_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}}) + \\
 & + (X_n - \tilde{W}_{x_n})^T (X_n - \tilde{W}_{x_n}) + \lambda \tilde{U}_1^T \tilde{U}_1 + \lambda \tilde{U}_2^T \tilde{U}_2 \},
 \end{aligned}$$

isto é, substituindo  $X_1, X_{i-1}$ , e  $X_n$  pelos valores dados nas equações 4.35, 4.36 e 4.37, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 J = E\{ & (\tilde{G}_{x_1} \tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_1} + \tilde{E}_{x_1} - \tilde{W}_{x_1})^T (\tilde{G}_{x_1} \tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_1} + \tilde{E}_{x_1} - \tilde{W}_{x_1}) + \\
 & + (\tilde{G}_{x_{i-1}} \tilde{M} \tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{i-1}} + \tilde{E}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}})^T (\tilde{G}_{x_{i-1}} \tilde{M} \tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{i-1}} + \tilde{E}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}}) + \\
 & + (\tilde{G}_{x_n} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_{x_n} + \tilde{E}_{x_n} - \tilde{W}_{x_n})^T (\tilde{G}_{x_n} \tilde{U}_2 + \tilde{F}_{x_n} + \tilde{E}_{x_n} - \tilde{W}_{x_n}) + \\
 & + \lambda \tilde{U}_1^T \tilde{U}_1 + \lambda \tilde{U}_2^T \tilde{U}_2 \}, \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \tilde{W}_{x_1} &= [w_{x_1}(k+1), w_{x_1}(k+2), \dots, w_{x_1}(k+N)]^T, \\
 \tilde{W}_{x_{i-1}} &= [w_{x_{i-1}}(k+1), w_{x_{i-1}}(k+2), \dots, w_{x_{i-1}}(k+N)]^T, \\
 \tilde{W}_{x_n} &= [w_{x_n}(k+1), w_{x_n}(k+2), \dots, w_{x_n}(k+N)]^T.
 \end{aligned}$$

Na função de custo assume-se que  $E\{\tilde{E}_{x_1}^T \tilde{U}_1\} = E\{\tilde{E}_{x_{i-1}}^T \tilde{U}_1\} = E\{\tilde{E}_{x_n}^T \tilde{U}_2\} = 0$  (não há correlação entre o ruído e o sinal de controle),  $E\{\tilde{E}_{x_1}\} = E\{\tilde{E}_{x_{i-1}}\} = E\{\tilde{E}_{x_n}\} = 0$  e  $E\{\tilde{E}_{x_1}^T \tilde{E}_{x_1}\}$ ,  $E\{\tilde{E}_{x_{i-1}}^T \tilde{E}_{x_{i-1}}\}$ , e  $E\{\tilde{E}_{x_n}^T \tilde{E}_{x_n}\}$  não são afetadas por  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2$ .

A solução para  $J_{min}$ , de (4.39) assumindo que  $E\{\xi_{x_1} \Delta u_1\} = E\{\xi_{x_{i-1}} \Delta u_1\} = E\{\xi_{x_n} \Delta u_2\} = 0$  (não há correlação entre o ruído e o sinal de controle), para o controle ótimo pode ser

obtida diferenciando a função de custo em relação a cada entrada. Caso  $E\{\xi_{x_1}\Delta u_1\} = E\{\xi_{x_{i-1}}\Delta u_1\} = E\{\xi_{x_n}\Delta u_2\} \neq 0$ , e uma vez que  $u_1$  e  $u_2$  permanecem constantes durante o período de amostragem, o modelo do sistema deve ser alterado, ou seja, a ordem do polinômio  $B$  deve ser aumentada de forma a acomodar dinâmicas não modeladas relacionadas a  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$ .

Diferenciando a função de custo (4.39) em relação a  $\tilde{U}_1$ , a solução para  $J_{min}$  é então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1} = & 2E\{\tilde{G}_{x_1}^T(\tilde{G}_{x_1}\tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_1} + \tilde{E}_{x_1} - \tilde{W}_{x_1}) + \\ & + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M})^T(\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{i-1}} + \tilde{E}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}}) + \\ & + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{N}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{i-1}} + \tilde{E}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}}) + \lambda I\tilde{U}_1\}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde  $\tilde{N}$  é uma matriz que contém a derivada de  $x_{i-1}(k+j-1)$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_1$ , e tem a forma:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k) & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k+1) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k) & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k+1) & \cdots & B_{x_{i-1}}x_{i-1}(k+N-2) & 0 \end{bmatrix},$$

o polinômio  $B_{x_{i-1}}$  possui apenas um termo ( $x_{i-1}$  depende apenas de  $\Delta u_1$  e  $\Delta u_2$  anterior).

Considerando  $NU = 1$  (controlador *dead-beat*), então  $\Delta u_1(k+1) = \Delta u_1(k+2) = \cdots = \Delta u_1(k+N-1) = 0$ . Logo, o termo envolvendo  $\tilde{N}$  não terá nenhuma influência no cálculo da lei de controle e pode ser desprezado. Tem-se então a equação simplificada para  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_1} = & 2[(\tilde{G}_{x_1}^T\tilde{G}_{x_1} + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M})^T\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M} + \lambda I)\tilde{U}_1 + \\ & + \tilde{G}_{x_1}^T(\tilde{F}_{x_1} - \tilde{W}_{x_1}) + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M})^T(\tilde{F}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}})] = 0. \end{aligned}$$

fazendo

$$\begin{aligned} p_{11} &= \tilde{G}_{x_1}^T\tilde{G}_{x_1} + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M})^T\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M} + \lambda I, \\ p_{12} &= 0, \\ -r_1 &= \tilde{G}_{x_1}^T(\tilde{F}_{x_1} - \tilde{W}_{x_1}) + (\tilde{G}_{x_{i-1}}\tilde{M})^T(\tilde{F}_{x_{i-1}} - \tilde{W}_{x_{i-1}}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

tem-se

$$p_{11}\tilde{U}_1 + p_{12}\tilde{U}_2 = r_1. \quad (4.42)$$

Diferenciando a função de custo (4.39) em relação a  $\tilde{U}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2} = & 2E\{\tilde{G}_{x_n}^T(\tilde{G}_{x_n}\tilde{U}_2 + \tilde{F}_{x_n} + \tilde{E}_{x_n} - \tilde{W}_{x_n}) + \\ & + (\tilde{G}_{x_{n-1}}\tilde{P}\tilde{U}_1)^T(\tilde{G}_{x_{n-1}}\tilde{M}\tilde{U}_1 + \tilde{F}_{x_{n-1}} + \tilde{E}_{x_{n-1}} - \tilde{W}_{x_{n-1}}) + \lambda I\tilde{U}_2\}, \end{aligned}$$

onde  $\tilde{P}$  é uma matriz que contém a derivada de  $x_n(k+j-1)$  em relação ao vetor  $\tilde{U}_2$ , e tem a forma:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{x_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_{x_n} & B_{x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & B_{x_n} & B_{x_n} & \cdots & B_{x_n} & 0 \end{bmatrix},$$

o polinômio  $B_{x_n}$  possui apenas um termo ( $x_n$  depende apenas de  $\Delta u_2$  anterior).

Considerando  $NU = 1$  (controlador *dead-beat*), então  $\Delta u_1(k+1) = \Delta u_1(k+2) = \cdots = \Delta u_1(k+N-1) = 0$ . Logo, o termo envolvendo  $\tilde{P}$  não terá nenhuma influencia no cálculo da lei de controle e pode ser desprezado. Tem-se então a equação simplificada para  $\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2}$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{U}_2} = 2[(\tilde{G}_{x_n}^T \tilde{G}_{x_n} + \lambda I)\tilde{U}_2 + \tilde{G}_{x_n}^T (\tilde{F}_{x_n} - \tilde{W}_{x_n})] = 0.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} p_{21} &= 0, \\ p_{22} &= \tilde{G}_{x_n}^T \tilde{G}_{x_n} + \lambda I, \\ -r_2 &= \tilde{G}_{x_n}^T (\tilde{F}_{x_n} - \tilde{W}_{x_n}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

tem-se

$$p_{21}\tilde{U}_1 + p_{22}\tilde{U}_2 = r_2. \quad (4.44)$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_1 \\ \tilde{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Para solução da equação (4.45) é necessário o conhecimento do valor de  $x_i$  atual e de seus valores futuros (incorporado a  $\tilde{G}_{x_{i-1}}$ ). Considerando que o CPG funciona como um controlador *dead-beat* quando  $\lambda = 0$  e  $NU = 1$  (o controlador atraca no segundo instante de amostragem [27]), usa-se o valor atual de  $x_i$  quando  $j = 1$  e para os demais valores de  $j$  utiliza-se os valores de referência  $w_{x_i}(k+j-1)$ .

Os resultados apresentados até aqui podem ser sintetizados na seguinte conjectura:

**Conjectura 2.** *Considere o sistema não-linear com restrições não-holonômicas na forma encadeada ou que possa ser transformado para a forma encadeada, o modelo CARIMA derivado na forma encadeada discretizada (4.34) e a lei de controle definida sobre  $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n\}$  obtida usando o Controle Preditivo Generalizado (CPG) como mostrado na equação (4.45) e função de custo definida como (4.38) com*

1.  $N_1 = 1$ ;

2.  $N_2$  um múltiplo de  $\Delta t$  (tempo de amostragem), cujo produto  $N_2\Delta t$  seja no mínimo

ao tempo de subida da planta;

3.  $NU = 1$ ;

4.  $\lambda_i = 0$  ou  $\lambda_i = \epsilon$  caso seja necessário melhorar a robustez numérica;

5. e sendo o modelo do sistema estabilizável e detectável;

então, todos os erros de estado do sistema em malha fechada são limitados e tendem assintoticamente a zero quando  $t$  tende ao infinito.

### 4.3.2 Simulações Numéricas

Nesta seção, uma simulação em computador é apresentada para demonstrar o desempenho do controlador e para validar a metodologia construtiva.

Considere o simples exemplo de um sistema de controle não-holonômico, especificamente o robô móvel com acionamento diferencial. Equações na forma encadeada não-holonômica discretizada para este robô móvel podem ser escritas como em (4.34) e a função de custo a ser minimizada como em (4.39). As trajetórias referências foram geradas usando o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}x_{r1}(k+1) &= x_{r1}(k) + 0,1u_1(k), \\x_{r2}(k+1) &= x_{r2}(k) + 0,1u_1(k)x_{r3}(k), \\x_{r3}(k+1) &= x_{r3}(k) + 0,1u_2(k),\end{aligned}\tag{4.46}$$

com

- se  $k < 25$  então  $u_1 = -0.5$ , e  $u_2 = 1$ ,
- se  $25 \leq k < 50$  então  $u_1 = -0.7$ , e  $u_2 = 0.8$ ,
- se  $50 \leq k < 75$  então  $u_1 = -0.2$ , e  $u_2 = 0.3$ ,
- se  $k \geq 75$  então  $u_1 = 0.7$ , e  $u_2 = -0.50$ .

A Figura 4.5 apresenta o resultado da simulação do sistema sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como  $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 0, \pi/2)^T$ , e  $\lambda = 0.01$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 5$ ,  $NU = 1$ , o modelo CARIMA usa  $n_a = n_b = n_c = 1$ , e  $u_1$  e  $u_2$  estão limitados a  $\pm 1.0$ . Pode ser observada a convergência de todos os estados.

A Figura 4.6 mostra a evolução dos parâmetros estimados. Nota-se que o controlador apresenta erro inicialmente até os valores estimados convergirem. Após isto ocorrer, o erro

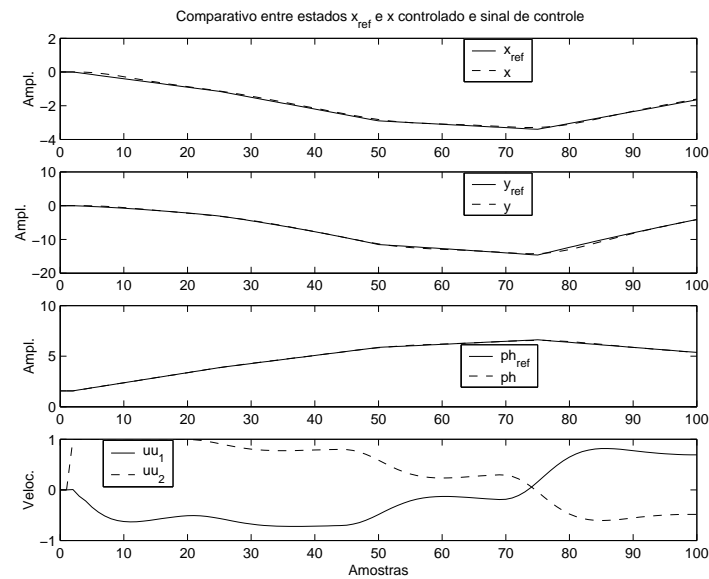


Figura 4.5: Evolução das trajetórias referência e real usando o CPG para controle de robô móvel na forma encadeada.

inicial de estado é eliminado. Os parâmetros estimados na primeira vez que o algoritmo é executado são usados para partir o controlador CPG e fazer o robô móvel seguir outras trajetórias minimizando o erro inicial.

## 4.4 Conclusão

O trabalho apresenta controladores preditivo generalizado para seguimento (rastreamento) de trajetória. Eles são especialmente adequados para aplicações em sistemas com restrições não-holonômicas nas formas cartesiana e encadeada discreta não-holonômica com duas entradas. O método permite ajustar valores que estabilizam de uma forma fácil o sistema. O algoritmo base é o do conhecido Controle Preditivo Generalizado (CPG) que é revisto e adaptado para o modelo não-linear. Os resultados obtidos são significativos para associar o controle preditivo com horizonte estendido e as ferramentas do controle geométrico com uma classe de sistemas não-lineares. Baseado na teoria do CPG, o controlador é formulado como controle ótimo, discreto no tempo, para seguimento de trajetória.

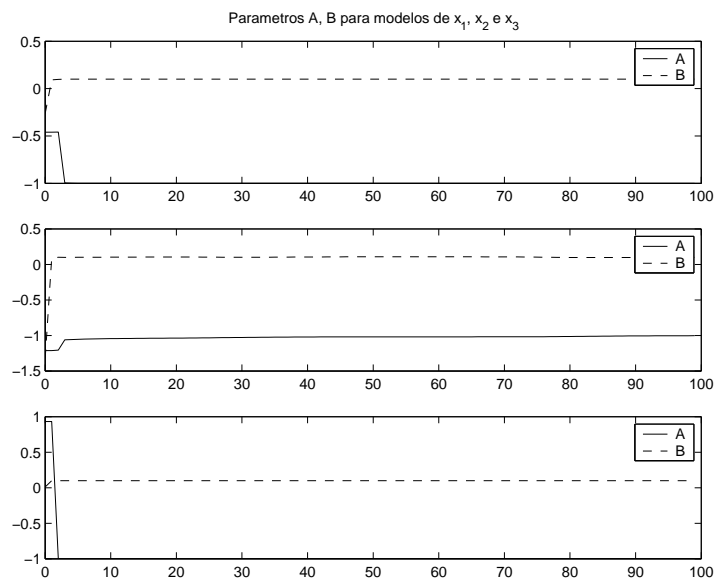


Figura 4.6: Estimação de parâmetros do robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada.





# Capítulo 5

## Estudo comparativo entre as técnicas de rastreamento propostas

Este capítulo dedica-se ao estudo comparativo entre as três técnicas de rastreamento propostas. Para unificar a base de comparação, foi escolhido o controle do robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana. A primeira utiliza a realimentação não-linear (Capítulo 3), a segunda usa diretamente o modelo na forma cartesiana do CPG, e a terceira o CPG para a forma encadeada (Capítulo 4). Portanto, é necessário utilizar uma transformação de estados para utilizar a primeira e a terceira técnica.

Repete-se aqui o modelo do robô móvel com acionamento diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= w,\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde  $[v, w]$  são as entradas na forma de velocidade linear e angular, e  $[x, y, \theta]$  são as coordenadas de postura do robô móvel.

Pode-se mostrar que as velocidades linear ( $v$ ) e angular ( $w$ ) do robô estão relacionadas com os sinais de controle (velocidade) para cada motor do robô móvel  $[v_1, v_2]$  por

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad e \quad w = \frac{v_1 - v_2}{L},\tag{5.2}$$

onde  $L$  é a distância entre os centros das rodas.

Com a seguinte mudança de coordenadas é possível converter (5.1) para a forma encadeada [38]  $z = \phi(x)$ :

$$\begin{aligned}z_1 &= -\theta, \\ z_2 &= y \cos(\theta) - y \sin(\theta), \\ z_3 &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta),\end{aligned}\tag{5.3}$$

e as entradas são transformadas usando  $u = \psi(x, v)$ , ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= -w, \\ u_2 &= v + (y\cos(\theta) - x\sen(\theta))w = v + z_2w, \end{aligned} \quad (5.4)$$

de forma a obter o sistema na forma encadeada, como segue:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3u_1, \\ \dot{z}_3 &= u_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

As novas coordenadas definidas pelas equações (5.3) têm uma interpretação interessante. De fato,  $z_2$  e  $z_3$  são as coordenadas cartesianas do robô em uma base de referência móvel, com a mesma origem da base original, mas rotacionada de forma a alinhar o eixo  $z_3$  com a orientação do veículo  $\theta = -z_1$ . Esta nova base evita problemas de singularidade nos sinais de referência durante a conversão da forma cartesiana para a forma encadeada e vice-versa.

As figuras a seguir mostram como o robô móvel com acionamento diferencial pode ser visto pelo sistema de controle como um sistema na forma encadeada. A Figura 5.1(a) mostra o sistema completo, a conversão dos sinais de entrada (Figura 5.1(b)), o modelo na forma cartesiana (Figura 5.1(c)), e a transformação de estados para a forma encadeada (Figura 5.1(d)).

Para efeito de comparação foram selecionadas duas trajetórias: uma circular e outra em zig-zag, iguais às utilizadas no Capítulo 3.

## 5.1 Controle com realimentação não-linear para rastreamento

O Controlador para rastreamento de trajetórias desenvolvido no Capítulo 3 foi utilizado para seguimento de trajetórias em zig-zag e circular. O robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana foi transformado para a forma encadeada. Deste modo, o controlador efetivamente estava controlando um sistema na forma encadeada, porém, indiretamente o robô móvel na forma cartesiana.

O modelo do erro é representado por:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{e1} &= u_1 - u_{r1}, \\ \dot{z}_{e2} &= z_{e3}u_1 + z_{r3}(u_1 - u_{r1}), \\ \dot{z}_{e3} &= u_2 - u_{r2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

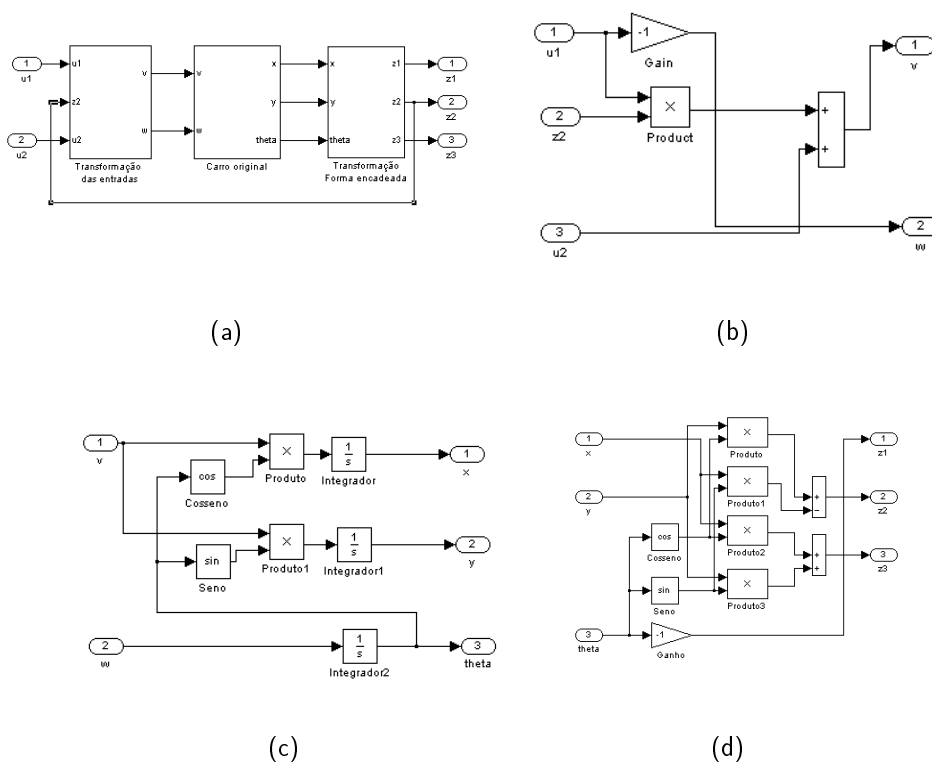


Figura 5.1: (a) Transformação da forma cartesiana para a encadeada; (b) Conversão dos sinais de entrada; (c) Robô móvel na forma cartesiana; (d) Transformação para a forma encadeada.

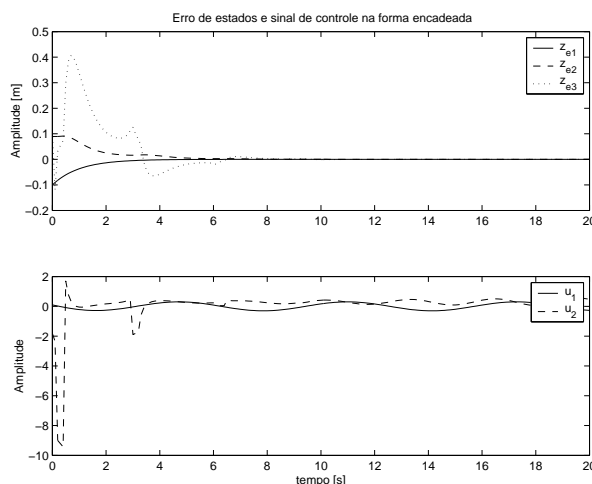


Figura 5.2: Erro de estado na forma encadeada.

As ações de controle implementadas foram:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{r1} - \lambda_1 z_{e1}, \\ u_2 &= u_{r2} + \frac{z_{r3}(u_{r1} - u_1) - \lambda_2 z_{e2}}{u_1} - \lambda_3 z_{e3}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

lembrando que foi adicionado um pequeno sinal na forma de onda quadrada com média zero, ao sinal  $u_1$  no denominador de uma das parcelas de  $u_2$ .

### Trajetoária zig-zag:

Foi considerado o robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana juntamente com a transformação de estado apresentada na seção 5.1, sob as seguintes condições: a posição inicial do robô móvel foi escolhida como sendo  $(x, y, \theta)^T = (0.1, 0.1, 0.1)^T$  e  $(x_r, y_r, \theta_r)^T = (0, 0, 0)^T$ , e  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ . Com  $v = 0.3$  e  $w$  igual a uma onda senoidal com amplitude de 0,3 e frequência de 1 rad/s, obteve-se uma trajetória em zig-zag.

A Figura 5.2 mostra a evolução do erro de estados para o sistema na forma encadeada, para o acompanhamento da trajetória em zig-zag.

A Figura 5.3 mostra as trajetórias de referência e real para o sistema na forma encadeada.

Para a forma cartesiana (controle indireto) pode-se ver a evolução dos erros na Figura 5.10(d) e as trajetórias na Figura 5.10(a).

Os mesmos testes foram repetidos para uma trajetória circular com  $w = 0.6$  e  $v = 0.3$ , e os resultados são apresentados nas Figuras 5.4, 5.5, 5.11(d) e 5.11(a).

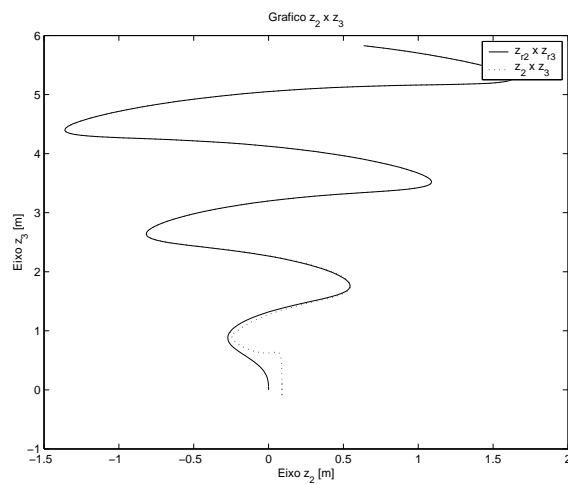


Figura 5.3: Trajetórias dos estados na forma encadeada.

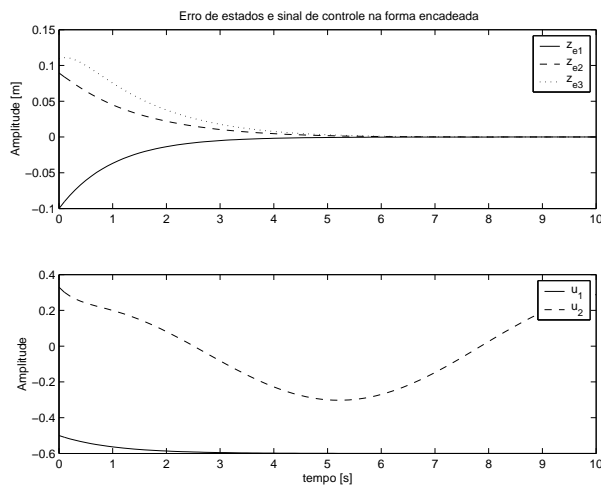


Figura 5.4: Erro de estado na forma encadeada - trajetória circular.

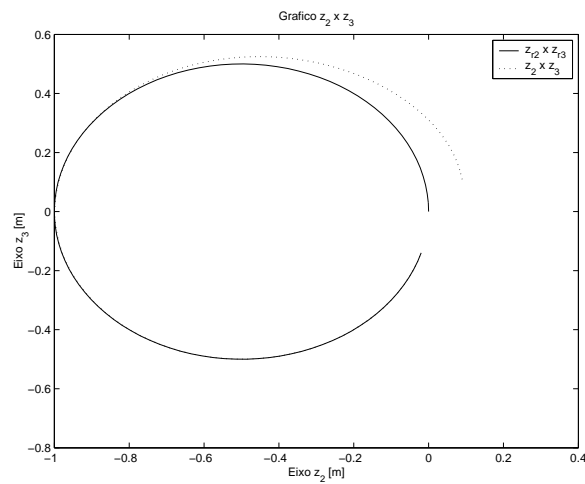


Figura 5.5: Trajetória de estado na forma encadeada - trajetória circular.

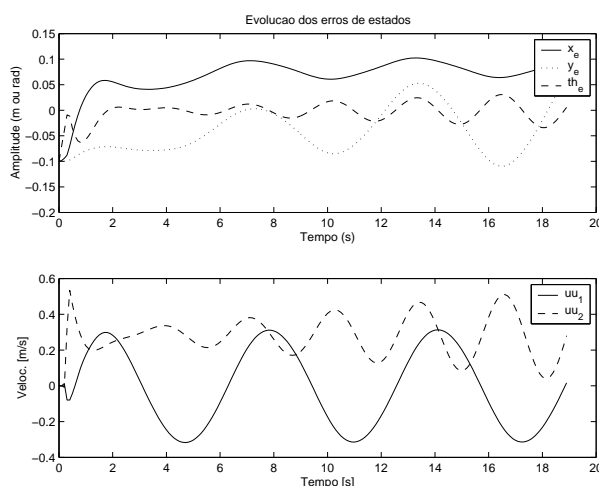


Figura 5.6: Erro de estados para o CPG indireto.

## 5.2 Controle CPG direto para forma cartesiana

A mesma situação anterior foi simulada para o controlador CPG usando o modelo do robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana. As Figuras 5.10(e) e 5.10(b) apresentam a evolução do erro e um comparativo entre as trajetórias referência e real.

As Figuras 5.11(e) e 5.11(b) repetem a simulação para a trajetória circular.

## 5.3 Controle CPG indireto usando forma encadeada

Os testes foram repetidos para o controlador empregando um modelo na forma encadeada. Os resultados para a forma cartesiana são obtidos através das transformações de estado e de entrada apresentadas na introdução.

As Figuras 5.10(f) e 5.10(c) apresentam os erros de estado e as trajetórias de referência e real quando foi utilizada a referência em zig-zag, com estas já transformadas para a forma cartesiana. As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam os erros de estado e as trajetórias de referência e real quando foi utilizada a referência em zig-zag na forma encadeada.

As Figuras 5.11(f) e 5.11(c) repetem a simulação para a trajetória circular do sistema já transformado para a forma cartesiana. As Figuras 5.8 e 5.9 repetem a simulação para a trajetória circular do sistema na forma encadeada.

## 5.4 Conclusões

O Controlador, empregando realimentação não-linear, apresenta um bom desempenho, podendo ser melhorado através do ajuste dos ganhos  $\lambda_i$ . As principais restrições são a necessidade do conhecimento do modelo exato do sistema, e a necessidade de usar uma transformação de estado não-linear. Quando o modelo do sistema é conhecido e não há

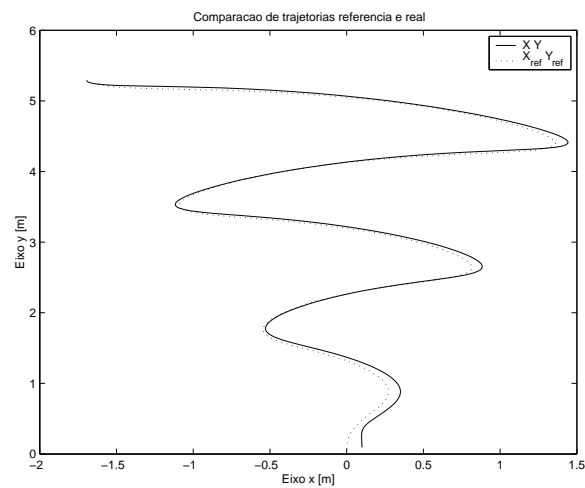


Figura 5.7: Trajetória de estado na forma encadeada usando CPG indireto.

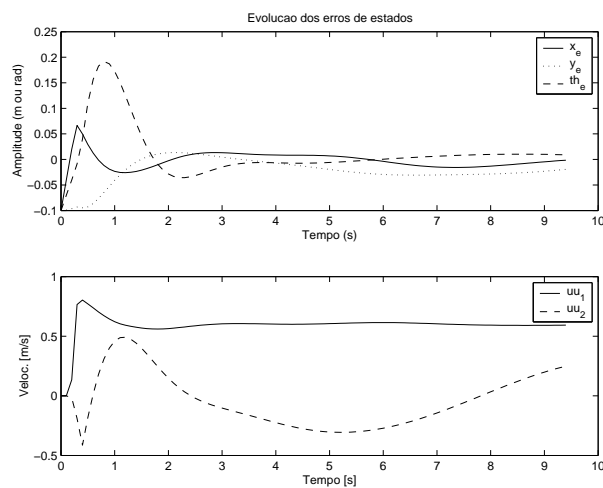


Figura 5.8: Evolução do erro de estados para o CPG indireto - trajetória circular.

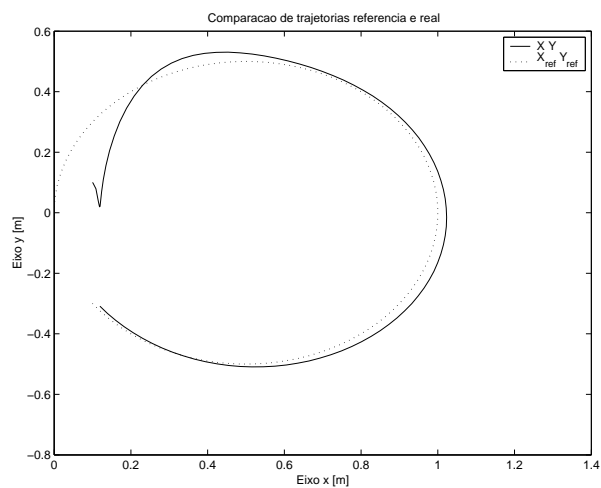


Figura 5.9: Trajetória de estado na forma cartesiana usando CPG indireto - trajetória circular.

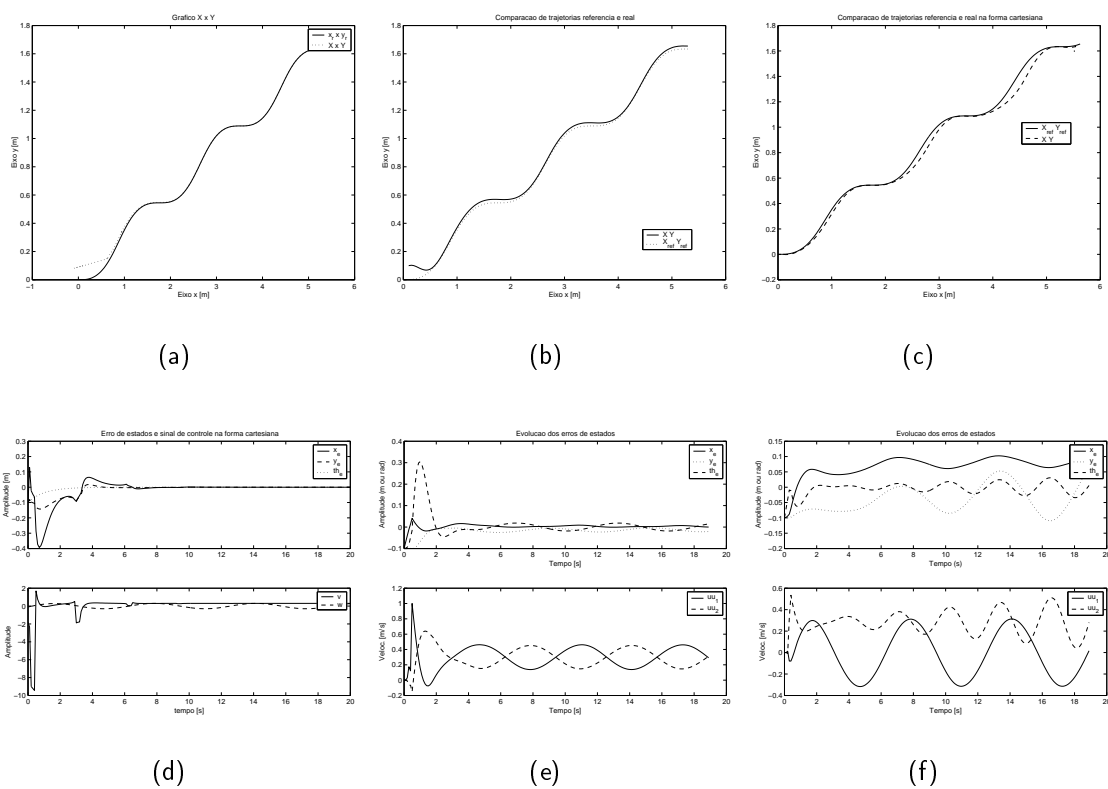


Figura 5.10: Trajetória, evolução de estados e sinal de controle na forma cartesiana para trajetória zig-zag; coluna 1 : Controlador com realimentação não-linear, coluna 2 : CPG direto, coluna 3 : CPG indireto.



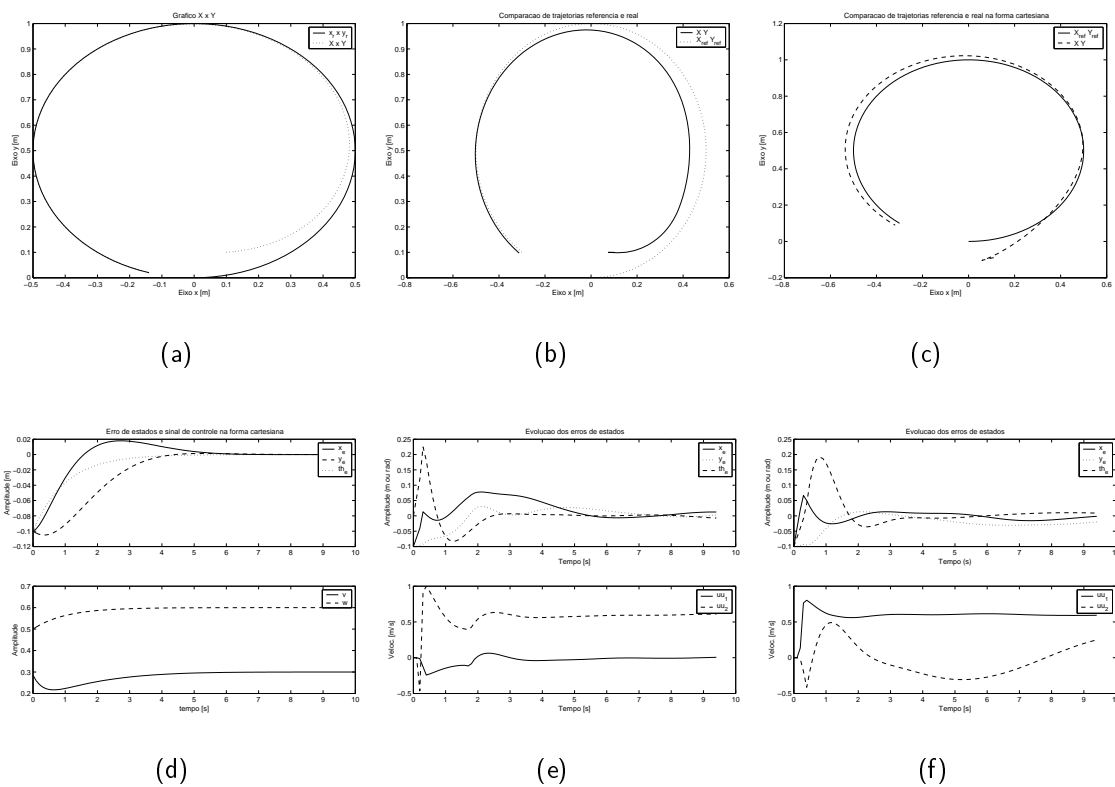


Figura 5.11: Trajetória, evolução de estados e sinal de controle na forma cartesiana para trajetória circular; coluna 1 : Controlador com realimentação não-linear, coluna 2 : CPG direto, coluna 3 : CPG indireto.

mudanças significativas neste durante a operação do sistema, este método de controle pode ser utilizado.

O Controlador CPG direto não apresenta as restrições indicadas anteriormente, pelo fato do mesmo estimar os parâmetros da planta durante o controle e de utilizar o modelo direto na forma cartesiana. O uso do estimador confere maior robustez ao controlador, além disto, o CPG absorve melhor variação no atraso de transporte que porventura ocorra no processo. O Controlador CPG direto se restringe ao controle de robôs móveis com acionamento diferencial.

O Controlador CPG indireto possui algumas das vantagens do CPG direto, porém, necessita de uma transformação de coordenadas. Seu uso se justifica na generalização do controlador para emprego em sistemas não-lineares na forma encadeada. Além disto, a estimação de parâmetros e a implementação do algoritmo de controle é mais direta. Em comparação com os outros controladores, ele apresenta algumas flutuações típicas do CPG, que tendem a ser minimizadas quando os parâmetros atingem maior estabilidade. O tempo de acomodação tende a ser otimizado pela própria característica do controlador.

Pela robustez a variações nos parâmetros do sistema (característica que diferencia o CPG dos demais controladores adaptativos), o CPG indireto deve ser utilizado para controle de outros tipos de sistemas não-holonômicos, incluindo o robô móvel com acionamento diferencial. O controlador empregando realimentação não-linear pode ser utilizado para controlar um sistema não-holonômico inicialmente, até que os parâmetros do CPG tenham convergido (parâmetros identificados *on line*). E a partir deste ponto o CPG indireto deve ser utilizado.

# Capítulo 6

## Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho foram propostas e desenvolvidas formas de controlar sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas. O foco das aplicações abrangeu:

1. robôs móveis com acionamento diferencial com restrições não-holonômicas representados nas formas de integrador não-holonômico (integrador de Brockett), forma cartesiana e forma encadeada;
2. sistemas não-lineares mais gerais que podem ser convertidos para a forma encadeada com  $n$  estados e duas entradas ou controles;
3. sistemas não-lineares na forma encadeada discretizados.

A complexidade dos problemas pode ser mais bem entendida lembrando que sistemas não-holonômicos não podem ser estabilizados através da utilização de leis de controle por realimentação suave e invariantes no tempo conforme o teorema de Brockett. Por outro lado, esta classe de sistemas permite a utilização de ferramentas modernas do controle geométrico para verificação das propriedades de linearização, transformações de similaridade, controlabilidade e observabilidade para sistemas não-lineares. As técnicas de controle hoje utilizadas se baseiam em controladores não-lineares não-contínuos, ou variantes no tempo, ou híbridos para a estabilização dos sistemas num ponto de equilíbrio, regulação no seguimento (rastreamento) de trajetórias, e planejamento de trajetórias. Provas formais da convergência dos algoritmos de controle propostos foram apresentadas, bem como foram apresentados e discutidos os resultados envolvendo simulações dos mesmos.

Sistemas não-holonômicos constituem uma classe de sistemas com características especiais, impondo desafios ao desenvolvimento da teoria de controle. Nota-se que na fase de análise são utilizadas ferramentas da geometria diferencial. Isto fica transparente no projeto de controladores quando se empregam formas canônicas com propriedades de controlabilidade e atingibilidade já verificadas.

O projeto de leis de controle para malha fechada utiliza principalmente funções de Lyapunov. No início dos anos 90, os controladores sintetizados eram estáveis e assintoti-

camente estáveis, porém, o tempo para a convergência poderia ser estendido indefinidamente. A partir de 1995, foram desenvolvidas técnicas para a estabilização exponencial. Todas as técnicas propostas neste trabalho apresentam convergência exponencial.

A modelagem proposta no Capítulo 4 utiliza estruturas determinadas a partir de considerações físicas do sistema (robô móvel com acionamento diferencial), mas a determinação dos parâmetros do modelo é feita pelo CPG a partir de dados reais do processo, o que aumenta a robustez do sistema, ou seja, erros devido a deslizamentos em superfícies diferentes, que necessitariam de modelos distintos, são acomodados pelo identificador do CPG num único modelo. Por utilizar um horizonte de previsão, o comportamento futuro do sistema pode ser previsto e eventuais tempos de atraso de transporte podem ser compensados.

Quanto à estabilização num ponto de equilíbrio, o emprego da realimentação suave variante no tempo gera sistemas estáveis, mas sua trajetória tende a ser oscilatória [46]. A realimentação não contínua tende a gerar trajetórias mais naturais. O controle híbrido ainda apresenta problemas para síntese de leis de controle exponencialmente estáveis e tem sido objeto de inúmeras contribuições nos últimos anos.

## 6.1 Resultados apresentados

Os Capítulos 1 e 2 foram dedicados a estabelecer uma base para o principal objetivo desta tese: controle do movimento de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas a duas entradas. O Capítulo 1 apresenta a motivação para o desenvolvimento deste trabalho e uma revisão bibliográfica sobre o tema. O Capítulo termina com um resumo das principais contribuições desta tese. No Capítulo 2, são apresentados os fundamentos de sistemas com restrições não-holonômicas, principais teoremas e base matemática do controle geométrico não-linear, bem como os diversos exemplos de sistemas não-holonômicos que são utilizados na tese para ilustrar os resultados teóricos e o desempenho dos controladores.

As principais contribuições deste trabalho são apresentadas nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 3, uma lei de controle descontínua é derivada para estabilizar sistemas na forma de integrador não-holonômico. Na segunda parte deste Capítulo, o resultado é estendido para a regulação no seguimento (rastreamento) de trajetórias para sistemas  $n$ -dimensionais na forma encadeada. Este tipo de controle permite que sistemas não-lineares completamente não-holonômicos possam ser transformados para a forma encadeada e assim pode-se utilizar a metodologia de projeto proposta.

O Capítulo 4 é devotado ao problema da regulação no seguimento de trajetórias utilizando o controle preditivo generalizado. A utilização do CPG permite que sejam usadas no controle informações reais do processo. A adaptação do modelo às novas condições proporciona maior robustez ao sistema de controle. Assume-se que um planejador ótimo

foi utilizado para gerar as trajetórias e que as mesmas são compatíveis com as restrições não-holonômicas. Inicialmente é proposto um controlador CPG para um robô móvel com acionamento diferencial na forma cartesiana discreta e posteriormente o CPG é estendido para o robô móvel com acionamento diferencial na forma encadeada discreta. Os resultados obtidos nesta última etapa são válidos para sistemas não-lineares com restrição não-holonômica na forma encadeada discreta ou que podem ser transformados para esta forma com  $n$  estados e duas entradas ou controles. Sistemas não-lineares na forma encadeada quando discretizados apresentam um comportamento linear e invariante no tempo. Desta forma, os principais teoremas utilizados para demonstrar a convergência do CPG na forma linear podem ser ainda aplicados. O modelo discretizado mantém as mesmas propriedades do modelo contínuo. Simulações com o robô móvel com acionamento diferencial confirmam os resultados teóricos.

## 6.2 Trabalhos Futuros

A área de controle do movimento de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas ou sub-atuados é vasta e vários exemplos interessantes podem ser ainda formulados e resolvidos. Como temas ainda em desenvolvimento e que requerem mais pesquisas, pode-se citar:

- **Projeto de sistemas robustos que considerem incertezas no modelo, sensores e na própria condição de não-holonomicidade.** Um problema promissor e desafiador, que garante futuros esforços em pesquisa, é o da análise e projeto de sistemas de controle para sistemas não-holonômicos na presença de sinais externos, restrições de saturação nos atuadores, e incerteza paramétrica. O problema de controle sob a medição incompleta de estados também é de grande interesse para a teoria de controle não-linear pela inclusão da dinâmica de observadores nas malhas de controle. Nesta tese, o problema do controle robusto foi parcialmente endereçado com a utilização do controle preditivo generalizado. É necessário aprofundar os estudos através da introdução de incertezas na estrutura do modelo, incertezas na medição e na violação da restrição não-holonômica. Estas contribuições constituem pequenos passos na direção do desenvolvimento de ferramentas eficientes de projeto de sistemas de controle.
- **Desenvolvimento de novas técnicas de projeto de sistemas de controle híbrido que gerem sistemas exponencialmente estáveis.** Por um sistema chaveado, entende-se um sistema híbrido dinâmico consistindo de uma família de subsistemas contínuos no tempo e uma regra que controla o chaveamento entre os mesmos [85]. Sistemas híbridos são sistemas dinâmicos, onde o comportamento de

interesse é determinado pela interação de dinâmicas contínuas e discretas. Estes sistemas tipicamente contém variáveis ou sinais num conjunto contínuo (ex. conjunto dos números reais), e também variáveis discretas num conjunto finito [12].

Muitos sistemas encontrados na prática exibem chaveamentos entre diversos subsistemas que depende de vários fatores ambientais. Outra força de motivação para se estudar sistemas chaveados vem do rápido desenvolvimento da área. A técnica de controle, baseada no chaveamento entre diferentes controladores, tem sido aplicada extensivamente, particularmente no contexto adaptativo, possibilitando atingir a estabilidade e melhorar a resposta transitória dos sistemas. A importância de tais métodos de controle vem, em parte também, da existência de sistemas que não podem ser assintoticamente estabilizados através de uma única lei de controle contínuo.

A teoria de sistemas de controle híbridos tem recebido significativas contribuições nos últimos anos. Apesar disto, inúmeras questões ainda permanecem em aberto [94], como por exemplo:

1. Métodos genéricos para definição de famílias adequadas de funções para realimentação;
  2. Métodos genéricos para definição de condições de chaveamento baseadas em lógica;
  3. Robustez a incertezas no chaveamento;
  4. Identificação de limitações de desempenho quando se utilizam controladores híbridos.
- **Estabilização num ponto de equilíbrio usando o CPG.** O algoritmo do CPG para rastreamento de trajetórias de sistemas não-holonômicos na forma encadeada, desenvolvido no Capítulo 4, foi utilizado para estabilização num ponto de equilíbrio. Foi considerado um sistema com três estados e duas entradas do tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3 u_1, \\ \dot{x}_3 &= u_2.\end{aligned}$$

Para tal, considerou-se um estado inicial fora da origem e uma trajetória de referência onde todos os estados tinham valor nulo. Utilizando a função de custo original, notou-se que os estados diretamente controlados ( $x_1, x_3$ ) convergiram e o estado controlado indiretamente apresentou um desvio constante (Figura 6.1). Este fato ocorreu porque ao fazer o estado  $x_1$  convergir, o CPG anulou o sinal de controle que atuava sobre  $x_2$ . A função de custo foi alterada, permitindo que o custo associado

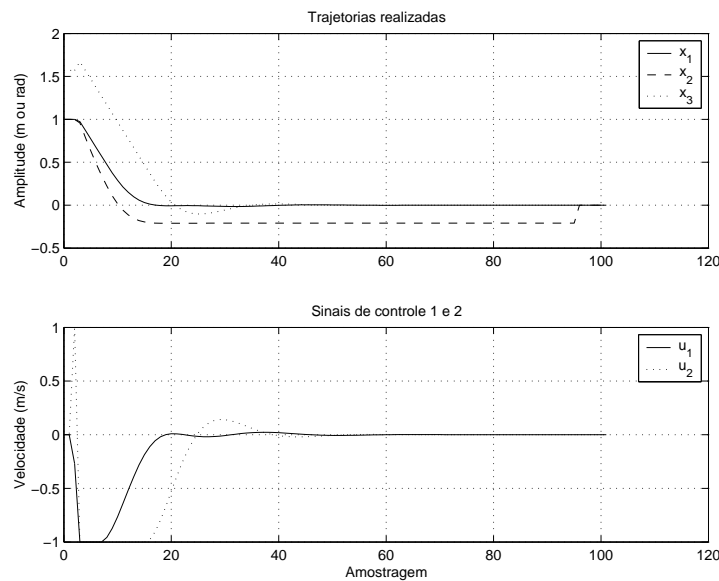


Figura 6.1: Estabilização com o CPG e função de custo original.

ao estado  $x_2$  tivesse um peso maior (10 vezes). Com isto foi possível estabilizar o sistema para determinadas condições iniciais (ver Figura 6.2). Infelizmente, dependendo da condição inicial, o CPG não consegue convergir, ou seja, achar uma trajetória realizável para a estabilização. O experimento, entretanto, mostra que, alterando a função de custo adequadamente, pode ser possível achar trajetórias que estabilizam um sistema num ponto de equilíbrio. Este tópico promissor deve ser explorado em trabalhos futuros.

- Método unificado para estabilização num ponto, regulação no seguimento (rastreamento) de trajetória, e geração de trajetórias.** A tarefa de projetar controladores que efetuem a estabilização num ponto, regulação no rastreamento de trajetória e geração de trajetórias tem recebido crescente atenção nos últimos anos. Foram observados avanços significativos no controle para estabilização e rastreamento isoladamente, bem como na geração de trajetórias em ambientes com e sem obstáculos, mas ainda não se dispõe de um sistema verdadeiramente integrado. Pesquisadores do CALTECH desenvolveram recentemente um planejador de trajetórias para sistemas não-lineares utilizando SP-Line. Tal planejador de trajetória evita obstáculos e gera trajetórias suaves compatíveis com as restrições não-holonômicas. Para o seguimento da trajetória os mesmos utilizam um controlador adaptativo baseado em modelo de referência (MRAC). Este avanço ainda não é o suficiente para vencer os desafios da robótica móvel. Isto pode ser observado pelo projeto "Grande Desafio" lançado pelas forças armadas dos Estados Unidos, que visa o desenvolvimento de um veículo móvel totalmente autônomo, capaz de gerar e seguir trajetórias utilizando sensores embarcados e evitando qualquer tipo de obstáculo no caminho. O prêmio de um milhão de dólares corre o risco de não ser recebido por nenhum

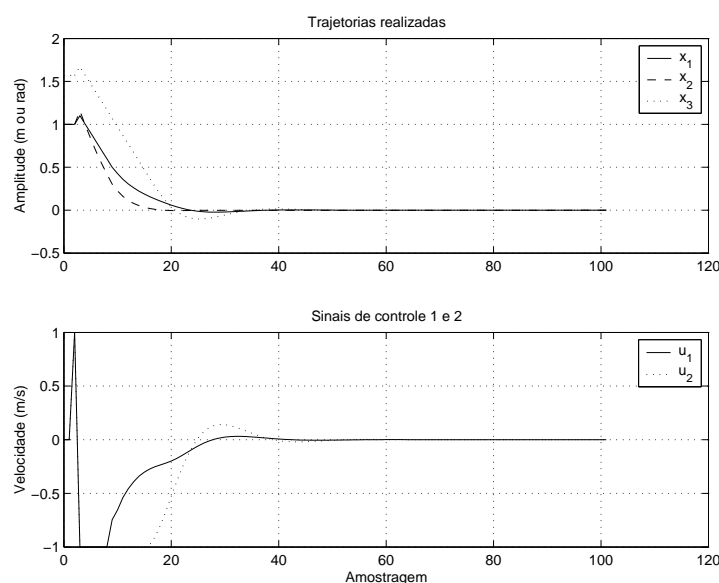


Figura 6.2: Estabilização com o CPG e função de custo modificada.

participante. Portanto, apesar dos recentes resultados, um método unificado mesmo para robôs móveis permanece pouco explorado.

- **Emprego da teoria de sistemas com restrições não-holonômicas na análise, projeto e controle de sistemas tolerantes a falhas.** A tolerância a falhas significa que um sistema deve continuar em funcionamento mesmo em condição degradada. Um caso típico, e várias vezes referenciado no contexto de controle de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas, é o de um satélite sub-atuado, ou seja, um satélite com dois motores para manter sua atitude. Observa-se que o controle do sistema é possível através da combinação do movimento dos dois motores através do colchete de Lie. O mesmo raciocínio se aplica a um barco com apenas um remo. Através de movimentos coordenados é possível efetuar todo tipo de manobra. As bases teóricas de sistemas com restrições não-holonômicas podem ser utilizadas para verificação da condição de controle de sistemas que podem perder algum atuador durante seu funcionamento. Neste caso, é possível verificar sob quais condições de degradação é possível ainda manter o controle do sistema. Este assunto merece uma atenção especial e constitui um campo fértil para novos desenvolvimentos.
- **Necessidade de novos avanços na teoria do controle geométrico e em ferramentas da geometria diferencial, facilitando a análise e projeto de sistemas de controle.** O controle geométrico não-linear tem experimentado um significativo avanço nos últimos anos. Graças a este desenvolvimento já é possível determinar a controlabilidade, observabilidade e possibilidade de linearização por realimentação. Para o projeto de controladores pode-se utilizar os métodos direto e



inverso de Lyapunov, o integrador de um passo atrás, a passividade, dentre outros. As técnicas de controle podem envolver sinais não-contínuos, contínuos por parte, variantes e invariantes no tempo. Sistemas não-lineares, por poderem apresentar inúmeras soluções, necessitam, em geral, de métodos de controle ótimo. Grandes desenvolvimentos já foram obtidos nessa área, mas há ainda a necessidade de métodos mais fáceis de se empregar.

- **Desenvolvimento de sistemas de pilotagem automática que considerem as restrições não-holonômicas, melhorando a confiabilidade e estendendo o grau de automatismo de veículos terrestres, aquáticos e aeroespaciais.** Exemplos de sistemas que empregam a teoria de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas já são encontrados no sistema de freios com sistema contra bloqueamento (ABS) e como piloto assistente virtual (DAS). Inúmeras outras aplicações podem surgir utilizando os conceitos de controle de sistemas não-lineares com restrições não-holonômicas, ou melhorando as duas mencionadas anteriormente.
- **Extensão dos conceitos a sistemas não-diferenciais.** Considere um modelo cinemático simples para um automóvel com rodas na frente e atrás [108]. As rodas traseiras estão alinhadas com o carro enquanto as rodas dianteiras podem girar sobre o eixo vertical. Para simplificar a obtenção das equações, modelam-se os pares de roda da frente e de trás como se fosse apenas uma roda no centro dos eixos. A restrição sobre o sistema aparece quando se permite às rodas rodar e girar, mas não deslizar.

Sejam  $(x, u, \phi, \theta)$  as variáveis que configuram o carro, parametrizadas pela localização das rodas traseiras, o ângulo do corpo do carro com relação a horizontal ( $\theta$ ), e o ângulo de giro com relação ao corpo do carro ( $\phi$ ). As restrições para as rodas dianteiras e traseiras são formadas escrevendo-se as velocidades laterais das rodas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x + l.\cos\theta).\text{sen}(\theta + \phi) - \frac{d}{dt}(y + l.\text{sen}\theta).\cos(\theta + \phi) &= 0 \\ \dot{x}.\text{sen}\theta - \dot{y}.\cos\theta &= 0. \end{aligned}$$

Escritas como uma-forma tem-se:

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{sen}(\theta + \phi)dx - \cos(\theta + \phi)dy - l.\cos\phi d\theta \\ w_2 &= \text{sen}\theta dx - \cos\theta dy. \end{aligned}$$

Convertendo para um sistema de controle

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos\theta u_1 \\ \dot{y} &= \sin\theta u_1 \\ \dot{\phi} &= u_2 \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{l} \tan\phi u_1.\end{aligned}$$

Para esta escolha de campos vetoriais,  $u_1$  corresponde a velocidade para frente das rodas traseiras do carro e  $u_2$  corresponde a velocidade de giro (para virar o carro) das rodas.

Para calcular o vetor de crescimento, aplica-se o colchete de Lie:

$$\begin{aligned}g_1 &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{l} \tan\phi \frac{\partial}{\partial \theta} \\ g_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \\ g_3 &= [g_1, g_2] = \frac{-1}{l \cos^2\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ g_4 &= [g_1, [g_1, g_2]] = \frac{-\sin\theta}{l \cos^2\phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos\theta}{l \cos^2\phi} \frac{\partial}{\partial y} \\ g_5 &= [g_2, [g_1, g_2]] = \frac{-2 \tan\phi}{l \cos^2\phi} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}$$

$\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  são linearmente independentes quando  $\phi \neq \pm\pi/2$ . Assim, o sistema tem grau de não-holonomicidade igual a 3 com o vetor de crescimento  $r = (2, 3, 4)$  e vetor de crescimento relativo  $\sigma = (2, 1, 1)$ . O sistema é regular fora de  $\phi \neq \pm\pi/2$ , onde  $g_1$  é indefinido. O sistema é controlável e pode-se usar os controladores desenvolvidos neste trabalho para estabilizar e rastrear o automóvel.

- **Aplicações práticas dos métodos existentes.** Uma série de outras questões aparecem quando se tenta aplicar na prática os resultados teóricos obtidos. Apesar do grande esforço no campo de controle de sistemas não-lineares, não há ainda aplicações práticas significativas que ilustrem como os métodos teóricos podem ser incorporados no controle de sistemas como robôs móveis, veículos terrestres, marinhos e aeroespaciais. As simulações indicam que as estratégias de controle desenvolvidas são boas candidatas a aplicações práticas. Entretanto, outros trabalhos são necessários para efetuar a transição da teoria para a prática e realmente implementar as estratégias desenvolvidas em veículos reais. Uma linha de pesquisa emergente é a de utilização do controle baseado em sensores para sistemas não-lineares, isto é, o controle usando visão e outros sensores não convencionais como, por exemplo, o sonar.

Nesta tese, o problema da estabilização de um sistema na forma de integrador não-holonômico ou na forma encadeada n-dimensional com duas entradas foi resolvido (Capítulo 3) utilizando o controle não-contínuo, ou realimentação não-linear de estados, e

esses resultados foram estendidos para o rastreamento de trajetórias. O problema do rastreamento de sistemas não-lineares com restrição não-holonômicas na forma encadeada n-dimensional com duas entradas ou controle foi resolvido empregando-se o controle preditivo generalizado (Capítulo 4). Espera-se assim estar contribuindo em direção ao desenvolvimento de ferramentas eficientes de projeto de controladores para sistemas não-holonômicos.



# Referências Bibliográficas

- [1] A. A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-Algebraic Stability Criteria for Switched Systems. *SIAM J. Control Optim.*, 40(1):253–269, June 2001.
- [2] A. Aguiar and A. Pascoal. Stabilization of Autonomous Vehicles with Nonholonomic Constraints: Open Problems and Future Directions. *Proc. Workshop Future Directions in Systems and Control Theory - Cascais, Portugal*, June 1999.
- [3] A. P. Aguiar, A. N. Atassi, and A. M. Pascoal. Regulation of a Nonholonomic Dynamic Wheeled Mobile Robot with Parametric Modeling Uncertainty using Lyapunov Functions. *Proc. of CDC 2000 - 39th IEEE Conference on Decision and Control - Sydney - Australia*, December 2000.
- [4] A. P. Aguiar and J. P. Hespanha. Logic-Based Switching Control for Trajectory-Tracking and Path-Following of Underactuated Autonomous Vehicles with Parametric Modeling Uncertainty. *Proceedings of American Control Conference*, pages 1–7, June 2004. To appear.
- [5] A. P. Aguiar and A. M. Pascoal. Regulation of a Nonholonomic Autonomous Underwater Vehicle with Parametric Modeling Uncertainty using Lyapunov Functions. *Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1–6, December 2001.
- [6] M. Aicardi, G. Cannata, G. Casalino, and G. Indiveri. Guidance of 3D Underwater Nonholonomic Vehicle Via Projection on Holonomic Solutions. *Symposium on Underwater Robotic Technology, Hawaii, USA*, June 2000.
- [7] M. Aicardi, G. Cannata, G. Casalino, and G. Indiveri. On The Stabilization of The Unicycle Model Projecting a Holonomic Solution. *8th Int. Symposium on Robotics with Applications ISORA 2000, Hawaii, USA*, June 2000.
- [8] M. Aicardi, G. Casalino, A. Bicchi, and A. Balestrino. Closed Loop Steering of Unicycle-like Vehicles via Lyapunov Techniques. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, pages 27–35, March 1995.

- [9] M. Aicardi, G. Casalino, and G. Indiveri. On a Closed Loop Time Invariant Position Control Solution For an Underactuated 3D Underwater Vehicle: implementation, Stability and Robustness Considerations. *Underwater Technology 2000, Tokio, Japan*, May 2000.
- [10] M. Aicardi, G. Casalino, and G. Indiveri. New Techniques for the Guidance of Underactuated Marine Vehicles. *2001 IARP Workshop - Underwater Robotic for Sea Exploitation and Environmental Monitoring, Rio de Janeiro, Brazil*, October 2001.
- [11] M. Aicardi, G. Casalino, G. Indiveri, A. A., P. Encarnação, and A. Pascoal. A Planar Path Following Controller for Underactuated Marine Vehicles. *Proc. of MED 2001 - 9th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Dubrovnik, Croatia*, June 2001.
- [12] P. Antsaklis, X. Koutsoukos, and J. Zaytoon. On Hybrid Control of Complex Systems: a Survey. Work supported by US National Science Foundation, US Army Research Office and French Ministry of Research and Technology., April 1999.
- [13] H. Arai. Motion Planning of Discrete-Time Nonholonomic Systems. *Proc. of 9th International Conference on Advanced Robotics*, pages 577–583, 1999.
- [14] V. I. Arnol'd and S. P. Novikov (Eds.). *Dynamical Systems VII - Integrable Systems, Nonholonomic Dynamical Systems.*, volume 16 - No.VII of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, translated from the russian edition, 1994.
- [15] A. Astolfi. Discontinuous Control of Nonholonomic Systems. *Systems and Control Letters*, 27:37–45, 1996.
- [16] A. Astolfi. Exponential Stabilization of a Wheeled Mobile Robot Via Discontinuous Control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 121:121–126, March 1999.
- [17] A. Astolfi, P. Bolzern, and A. Locatelli. Path-Tracking of a Tractor-Trailer Vehicle Along Rectilinear and Circular Paths: A Lyapunov-Based Approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(1):154, February 2004.
- [18] S. Baluja. Evolution of an Artificial Neural Network Based Autonomous Land Vehicle Controller. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 26(3):450–463, June 1996.
- [19] A. Bloch, S. Drakunov, and M. Kinyon. Stabilization of Nonholonomic Systems using Isospectral Flows. *Research Report - University of Michigan*, 2000.

- [20] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, first edition, 2003.
- [21] M. S. Branicky. Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475–482, April 1998.
- [22] W. Brockett. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. *in book: Differential geometric control theory - R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J.Sussmann*, pages 181–191, 1983.
- [23] L. G. Bushnell, D. Tilbury, and S. S. Sastry. Extended Goursat Normal Forms with Applications to Nonholonomic Motion Planning. Technical report, Electronics Research Laboratory, University of California at Berkeley, 1994.
- [24] Y.C. Chang and B.S. Chen. Adaptive Tracking Control Design of Nonholonomic Mechanical Systems. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pages 4739–4744, December 1996.
- [25] Y.C. Chang and B.S. Chen. Robust Tracking Designs for Both Holonomic and Nonholonomic Constrained Mechanical Systems: Adaptive Fuzzy Approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(1):46–66, February 2000.
- [26] D. K. Chwa, J. H. Seo, P. Kim, and J. Y. Choi. Sliding Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3991–3996, May 2002.
- [27] D.W. Clarke and C. Mohtadi. Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica*, 25(6):859–875, 1989.
- [28] D.W. Clarke, C. Mohtadi, and P.S. Tuffs. Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm. *Automatica*, 23(2):137–148, 1987.
- [29] R. Colbaugh, E. Barany, and K. Glass. Adaptive Control of Nonholonomic Robotic Systems. *Journal of Robotic Systems*, 15(7):365–393, 1998.
- [30] B. D’Andréa-Novel, G. Campion, and G. Bastin. Control of Wheeled Mobile Robots not satisfying ideal velocity constraints: A singular perturbation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5:243–267, 1995.
- [31] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems. *Proceedings of the IEEE*, 99(7):1069–1082, July 2000.

- [32] A. W. Divelbiss and J. T. Wen. A Path Space Approach to Nonholonomic Motion Planning in the Presence of Obstacles. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 13(3):443–451, June 1997.
- [33] W. E. Dixon, M. S. Queiroz, D. M. Dawson, and T. J. Flynn. Adaptive Tracking and Regulation of a Wheeled Mobile Robot With Controller/Update Law Modularity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(1):138–147, January 2004.
- [34] K. D. Do and J. Pan. Adaptive Global Stabilization of Nonholonomic Systems with Strong Nonlinear Drifts. *Systems & Control Letters*, 46:195–205, 2002.
- [35] W. Dong and W. L. Xu. Adaptive Tracking Control of Uncertain Nonholonomic Dynamic System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):450–454, March 2001.
- [36] W. Dong, Y. Xu, and W. Huo. On Stabilization of Uncertain Dynamic Nonholonomic Systems. *International Journal of Control*, 73(4):349–359, 2000.
- [37] B.A. Dubrovin, A.T.Fomenko, and S.P.Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications*, volume 1 of *Springer Series in Soviet Mathematics*. Springer-Verlag, New York, first edition, 1984.
- [38] E. Fabrizi and G. Oriolo. A KF-based Localization Algorithm for Nonholonomic Mobile Robots. *Proc. 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, 1998.
- [39] F.Conticelli and L.Palopoli. Discrete-Time Multirate Stabilization of Chained Form Systems: Convergence, Robustness, and Performance. *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1463–1468, May 2001.
- [40] L. C. Figueiredo. Modelagem Matemática de Sistemas de Rastreamento de Veículos. *Revista DOXA*, (07):17–28, Janeiro-Julho 2002.
- [41] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Fundamentos de Sistemas Não-holonômicos. Projeto de Tese I, CPDEE - Universidade Federal de Minas Gerais, Junho 2000.
- [42] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Introdução ao Planejamento de Trajetórias na Presença de Obstáculos e ao Controle Robusto Aplicado a Sistemas Não-holonômicos. Projeto de Tese II, CPDEE - Universidade Federal de Minas Gerais, Dezembro 2000.
- [43] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. A Nonlinear State Feedback Controller for Stabilization of Nonholonomic Systems. *CBA2002 - XIV Congresso Brasileiro de Automação*, pages 2896–2901, September 2002.



- [44] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Stabilization and Trajectory Tracking of Nonholonomic Systems: New Strategies using Feedback Control. *Proceedings on First International ICSC Congress on Autonomous Intelligent Systems*, ISBN-3.906454-30-4(1):119 (6), Feb 2002.
- [45] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. A switching time-varying and time invariant controller to stabilize nonholonomic systems. *CBA2002 - XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2902–2907, September 2002.
- [46] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Introdução ao Controle de Sistemas Não-Holonômicos. *Revista SBA Controle e Automação*, Aceito para publicação, 2004.
- [47] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Nonholonomic Systems Tracking Control Design using Discontinuous Control. *Systems and Control Letters*, Submitted, 2004.
- [48] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Nonholonomic Systems Tracking Design using Generalized Predictive Control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, Submitted, 2004.
- [49] L. C. Figueiredo and F. G. Jota. Tracking of Nonholonomic Systems in Chained Form using Generalized Predictive Control. *Robotics and Autonomous Systems*, Submitted, 2004.
- [50] L. C. Figueiredo and M. J. C. Justino. Robustez em Medição: Filtro de Kalman Aplicado a Veículos Autônomos. *Revista DOXA - ISSN - 1518-1197*, (6):75–88, Julho-Dezembro 2001.
- [51] F. A. C. C. Fontes. Stabilizing Nonholonomic Systems by Model Predictive Control. *Officina Mathematica - Controlo 2002 - Universidade do Minho*, pages 1–7, 2002.
- [52] J. H. Frommer, S. R. Kulkarni, and P. J. Ramadge. Controller Switching Based on Output Prediction Errors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(5):596–607, May 1998.
- [53] T. Fucão, H. Nakagawa, and N. Adachi. Adaptive Tracking Control Of a Nonholonomic Mobile Robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(5):609–615, October 2000.
- [54] K. Fujimoto and T. Sugie. Stabilization of Hamiltonian systems with nonholonomic constraints based on time-varying generalized canonical transformations. *Systems & Control Letters*, 44:309–319, 2001.
- [55] S. S. Ge, Z. Sun, T. H. Lee, and M. W. Spong. Feedback Linearization and Discontinuous Control of Second-Order Nonholonomic Chained Systems. *Proceedings of*

- the 2001 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 990–995, September 2001.
- [56] S.S. Ge, Z. Wang, and T. H. Lee. Adaptive Stabilization of Uncertain Nonholonomic Systems by State and Output Feedback. *Automatica*, 39:1451–1460, 2003.
- [57] K. Glass and R. Colbaugh. Adaptive Control of Nonholonomic Robotic Systems for Waste Management Applications. Technical Completion Report WERC-1-2-20575, New Mexico Waste-management Education and Research Consortium, Department of Mathematical Sciences - New Mexico State University, November 1997.
- [58] M. B. Gonçalves and D. M. Fleming. *Cálculo B - Funções de Várias Variáveis, Integrais Duplas e Triplas*. Makron Books do Brasil Editora Ltda, São Paulo, 1999.
- [59] J. P. Hespanha. Tutorial on Supervisory Control. *40th Conference on Decision and Control - Orlando, Florida*, Lecture Notes in Control using Logic and Switching:1–46, April 2001.
- [60] J. P. Hespanha. *UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems*, chapter Stabilization Through Hybrid Control, page To appear. UNESCO, 2001.
- [61] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Logic-based switching control of a nonholonomic system with parametric modeling uncertainty. *Systems and Control Letters - Special Issue on Hybrid Systems*, 38:167–177, November 1999.
- [62] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Hysteresis-based supervisory control of uncertain linear systems. Internet file, January 2001.
- [63] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Hysteresis-based Switching Algorithms for Supervisory Control of Uncertain Systems. *Submitted for publication in Automatica*, January 2002.
- [64] J. P. Hespanha and A. S. Morse. Stabilization of Nonholonomic Integrators via Logic-Based Switching. *Automatica - Special Issue on Hybrid Systems*, 35:385–393, 1999.
- [65] S. Horiuchi and K. Sunada. Synthesis of Driver Assistance System for Lane-Following Using Generalized Predictive Control. *Proceedings of AVEC 98*, pages 467–472, 1998.
- [66] H. Hu, D. Gu, and M. Brady. Navigation and Guidance of An Intelligent Mobile Robot. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 8/97:104–111, 1997.
- [67] K. J. Hunt, R. Haas, and J. C. Kalkkuhl. Local Controller Network for Autonomous Vehicle Steering. *Control Eng. Practice*, 4(8):1045–1051, 1996.

- [68] G. Indiveri, M. Aicardi, and G. Casalino. Nonlinear Time-Invariant Feedback Control of an Underactuated Marine Vehicle Along a Straight Course. *Proc. of the IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft, Aalborg, Denmark, August 2000*.
- [69] J. A. Janet, R. Gutierrez, T. A. Chase, M. W. White, and J. C. Sutton. Autonomous Mobile Robot Global Self-Localization Using Kohonen and Region-Feature Neural Networks. *Journal of Robotic Systems*, 14(4):263–282, 1997.
- [70] Z.P. Jiang. Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica*, 36:189–209, 2000.
- [71] Z.P. Jiang. Global tracking control of underactuated ships by Lyapunov’s direct method. *Automatica*, 38:301–309, 2002.
- [72] Z.P. Jiang, E. Lefeber, and H. Nijmeijer. Saturated Stabilization and Tracking of a Nonholonomic Mobile Robot. *Systems and Control Letters*, 42:327–332, 2001.
- [73] Z.P. Jiang and H. Nijmeijer. Tracking Control of Mobile Robots: A case study in Backstepping. *Automatica*, 33(7):1393–1399, July 1997.
- [74] Z.P. Jiang and H. Nijmeijer. A Recursive Technique for Tracking Control of Nonholonomic Systems in Chained Form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2), February 1999.
- [75] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, second edition, December 1996.
- [76] B. Kim and P. Tsiotras. Controllers for Unicycle-Type Wheeled Robots: Theoretical Results and Experimental Validation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(3):294–307, June 2002.
- [77] K.S. Kim and Youdan Kim. Robust Backstepping Control for Slew Maneuver Using Nonlinear Tracking Function. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(6):822–829, November 2003.
- [78] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch. Developments in Nonholonomic Control Problems. *IEEE Trans. On Control Systems*, pages 20–36, December 1995.
- [79] E. Kreyszig. *Differential Geometry*. Dover Publications Inc., New York, reprint edition, 1991.
- [80] G. Lafferriere and H. J. Sussmann. Motion Planning for Controllable Systems Without Drift. *Proc. Int. Conf. Robotics and Automation - Sacramento, CA.*, pages 1148–1153, April 1991.

- [81] J. C. Latombe. *Robot Motion Planning*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- [82] J.P. Laumond, editor. *Robot Motion Planning and Control*, chapter Guidelines in Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots, pages 1–53. Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes - Centre National de la Recherche Scientifique - LAAS, 1998.
- [83] J.P. Laumond, P. E.D. Jacobs, and R. M. Murray. A Motion Planner for Nonholonomic Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 10(5), October 1994.
- [84] E. Lefeber and H. Nijmeijer. Adaptive Tracking Control of Nonholonomic Systems: an Example. *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pages 2094–2099, 1999.
- [85] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic Problems in Stability and Design of Switched Systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19:59–70, October 1999.
- [86] W. Lin, R. Pongvuthithum, and C. Qian. Control of High-Order Nonholonomic Systems in Power Chained Form Using Discontinuous Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(1):108–115, January 2002.
- [87] F. Lizarralde and J. T. Wen. Feedback Stabilization of Nonholonomic Systems in Presence of Obstacles. *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation - Minneapolis - MN*, pages 2682–2687, 1996.
- [88] F. Lizarralde, J. T. Wen, and L. Hsu. A New Model Predictive Control Strategy for Affine Nonlinear Control Systems. *American Control Conference - San Diego - CA*, 1999.
- [89] J. Luo and P. Tsiotras. Exponentially Convergent Controllers for n-Dimensional Nonholonomic Systems in Power Form. *American Control Conference Albuquerque, NM*, June 1997.
- [90] J. Luo and P. Tsiotras. Control Design for Systems in Chained Form with Bounded Inputs. *American Control Conference - Philadelphia*, June 1998.
- [91] J. Lygeros, D. N. Godbole, and S. Sastry. A Verified Hybrid Controller for Automated Vehicles. Research supported by the PATH program, Institute of Transportation Studies, U.C. Berkeley, December 1996.
- [92] A. D. Mahindrakar, R. N. Banavar, and M. Reyhanoglu. Discontinuous Feedback Control of a 3 Link Planar PPR Underactuated Manipulator. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2424–2429, December 2001.

- [93] N. Marchand and M. Alamir. Discontinuous Exponential Stabilization of Chained Form Systems. *Automatica*, 39:343–348, 2003.
- [94] N. H. McClamroch and I. Kolmanovsky. Performance Benefits of Hybrid Control Design for Linear and Nonlinear Systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1083–1096, July 2000.
- [95] N. H. McClamroch, C. Rui, and I. Kolmanovsky. Hybrid Closed Loop Systems: A Nonlinear Control Perspective. *Proceedures of the 36th IEEE CDC - San Diego, CA.*, pages 114–119, December 1997.
- [96] R. T. M’Closkey and R. M. Murray. Exponential Stabilization of Driftless Nonlinear Control Systems Using Homogeneous Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5):614–628, May 1997.
- [97] B. Mirtich and J. Canny. Using skeletons for nonholonomic path planning among obstacles. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2533–2540, 1992.
- [98] P. Morin, J.B. Pomet, and C. Samson. Design of Homogeneous Time-Varying Stabilizing Control Laws for Driftless Controllable Systems via Oscillatory Approximation of Lie Brackets in Closed Loop. *Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM - Control Optim.*, 38(1):22–49, 1999.
- [99] P. Morin and C. Samson. Time-varying Exponential Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with two Controls. Rapport de recherche 2493, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia-Antipolis, Février 1995.
- [100] P. Morin and C. Samson. Application of Backstepping Techniques to the Time-varying Exponential Stabilization os Chained Form Systems. Rapport de recherche 2792, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia-Antipolis, Février 1996.
- [101] P. Morin and C. Samson. Application of Backstepping Techniques to the Time-Varying Exponential Stabilisation of Chained Form Systems. *European Journal of Control*, 3:15–36, 1997.
- [102] P. Morin and C. Samson. Exponential stabilization fo nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics. Rapport de recherche 3477, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique - INRIA, Sophia Antipolis - France, Août 1998.
- [103] P. Morin and C. Samson. A characterization of the Lie Algebra Rank Condition by transverse periodic functions. *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, 2000.

- [104] P. Morin and C. Samson. Control of Nonlinear Chained Systems: From the Routh-Hurwitz Stability Criterion to Time-Varying Exponential Stabilizers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1):141–146, January 2000.
- [105] P. Morin, C. Samson, J.B. Pomet, and Z.P. Jiang. Time-varying Feedback Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with two controls. Rapport de recherche 2275, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Sophia-Antipolis, Mai 1994.
- [106] P. Morin, C. Samson, J.B. Pomet, and Z.P. Jiang. Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Systems and Control Letters*, 25:375–385, 1995.
- [107] R. M. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press LLC, 1st edition, 1994.
- [108] R. M. Murray and S. S. Sastry. Nonholonomic Motion Planning: Steering Using Sinusoids. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 38(5):700–716, May 1993.
- [109] M. Norrlof. An Adaptive Iterative Learning Control Algorithm With Experiments on an Industrial Robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2):245–251, April 2002.
- [110] K. Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice Hall do Brasil, São Paulo, 2th edition, 1993.
- [111] G. A. S. Pereira, M. F. M. Campos, and L. A. Aguirre. Data Based Dynamical Modeling of Vision Observed Small Robots. Technical report, CPDEE - UFMG, Belo Horizonte - MG, Dezembro 1999.
- [112] S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and Robustness for Hybrid Systems. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1202–1207, 1996.
- [113] B. Piccoli, F. M. Pait, and A. Bittar. A Hybrid Controller for a Nonholonomic System. *SBA Controle e Automação*, 9(2), Maio, Jun., Jul. e Agosto 1998.
- [114] J. B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control law for a class of controllable systems without drift. *Systems and Control Letters*, 18:147–158, 1992.
- [115] F. Pourboghrat. Exponential stabilization of nonholonomic mobile robots. *Computers and Electrical Engineering*, 28:349–359, 2002.

- [116] F. Pourboghrat and M. P. Karlsson. Adaptive control of dynamic mobile robots with nonholonomic constraints. *Computers and Electrical Engineering*, 28:241–253, 2002.
- [117] C. Prieur and A. Astolfi. Robust Stabilization of Chained Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10):1768–1772, October 2003.
- [118] W. Ren, J.S. Sun, R. W. Beard, and T. W. McLain. Experimental Nonlinear Tracking Control for Nonholonomic Mobile Robots with Input Constraints. *IEEE 2004 International Conference on Robotics and Automation*, pages 1–8, 2004. Submitted.
- [119] J. E. N. Rico, I. Alcalá, J. G. Ortega, and E. F. Camacho. Mobile Robot Path Tracking Using a Robust PID Controller. *Control Engineering Practice*, 9:1209–1214, April 2001.
- [120] C. Samson. Velocity and Torque Feedback Control of a Nonholonomic Cart. *Advanced Robot Control - Proceedings of the International Workshop on Nonlinear and Adaptive Control*, 162:125–151, November 1990.
- [121] C. Samson. Path Following and Time-varying Feedback Stabilization of a Wheeled mobile Robot. *Proceedings Conf. ICASRCV 92 - Singapore*, pages RO–13.1.1–RO–13.1.5, September 1992.
- [122] C. Samson. Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):64–77, January 1995.
- [123] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. Mobile Robot Control part 1: Feedback Control of a Nonholonomic Wheeled Cart in Cartesian Space. Programme 6 - Robotique, Image et Vision 1288, INRIA, Centre de Sophia-Antipolis, Sophia, Octobre 1990.
- [124] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. Feedback Stabilization of a Nonholonomic Wheeled Mobile Robot. *IEEE Int Workshop on Intelligent Robots and Systems - IROS 91 - Osaka, Japan*, 1991.
- [125] A. K. Sanyal, M. Chellappa, J. L. Valk, J. Ahmed, J. Shen, and D. S. Bernstein. Globally Convergent Adaptive Tracking of Angular Velocity with Inertia Identification and Adaptive Linearization. *Proceedings of 13th IFAC Symposium on System Identification*, pages 971–976, 2003.
- [126] S. Sekhavat and J.P. Laumond. Topological Property for Collision-Free Nonholonomic Motion Planning: The Case of Sinusoidal Inputs for Chained Form Systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(5):671–680, October 1998.

- [127] A. M. Shkel and V. J. Lumelsky. The Jogger's Problem: Control of Dynamics in Real-time Motion Planning. *Automatica*, 33(7):1219–1233, 1997.
- [128] J. J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1st edition, 1991.
- [129] O. J. Sordalen and O. Egeland. Exponential Stabilization of Nonholonomic Chained Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):35–49, January 1995.
- [130] D. Sun and K. A. Hoo. Dynamic Transition Control Structure for a Class of SISO Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(5):622–629, September 1999.
- [131] Z. Sun, S. S. Ge, W. Huo, and T. H. Lee. Stabilization of Nonholonomic Chained Systems Via Nonregular Feedback Linearization. *Systems and Control Letters*, 44:279–289, 2001.
- [132] H. Sussmann. A Continuation Method for Nonholonomic Path-finding Problems. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, held in San Antonio*, pages 2718–2723, December 1993.
- [133] H. J. Sussmann. Optimal Control and Almost Analytic Feedback for Some Nonholonomic Systems. Technical report, SYCON -Rutgers Center for Systems and Control, University of Rutgers, 1991.
- [134] H. J. Sussmann. New Differential Geometric Methods in Nonholonomic Path Finding. *Systems, Models, and Feedback, A. Isidori and T.J. Tarn Eds. Birkhäuser Boston, Inc.*, 1992.
- [135] H. J. Sussmann and W. Liu. Lie Bracket Extensions and Averaging: The Single-Bracket Case. Internal report, Department of Mathematics, Rutgers University, November 1997.
- [136] R. Syam, K. Watanabe, K. Izumi, and K. Kiguchi. Adaptive Actor-Critic Design Using Predictive Model and Its Application to Nonholonomic Mobile Robots. *Proc. of the Fifth Intl. Conf. on KES 2001*, pages 1319–1324, 2001.
- [137] R. Syam, K. Watanabe, K. Izumi, and K. Kiguchi. Control of Nonholonomic Mobile Robot by an Adaptive Actor-Critic Method with Simulated Experience Based Value-Functions. Technical report, Department of Advanced Systems Control Engineering - Saga University, Saga - Japan, 2002.
- [138] H. G. Tanner and K. J. Kyriakopoulos. Discontinuous Backstepping for Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots. *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pages 3948–3953, May 2002.



- [139] A. Tayebi and A. Rachid. Adaptive controller for nonholonomic mobile robots with matched uncertainties. *Advanced Robotics*, 14(2):105–118, 2000.
- [140] A. Tayebi, M. Tadjine, and A. Rachid. Invariant Manifold Approach for the Stabilization of Nonholonomic Chained Systems: Application to a Mobile Robot. *Nonlinear Dynamics*, 24:167–181, 2001.
- [141] Y.P. Tian and S. Li. Exponential Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems by Smooth Time-Varying Control. *Automatica*, 38:1139–1146, 2002.
- [142] D. Tilbury and A. Chelouah. Steering a Three-Input Nonholonomic System using Multi-rate Controls. *IEEE Proceedings of the European Control Conference, Groningen, The Netherlands*, June 1993.
- [143] D. Tilbury, O. Sordalen, L. Bushnell, and S. S. Sastry. A Multi-Steering Trailer System: Conversion into Chained Form Using Dynamic Feedback. Technical Report M93/55, Electronics Research Laboratory, University of California at Berkeley, 1993.
- [144] A. C. Victorino. Controle de Trajetória e Estabilização de Robôs Móveis Não-Holonômicos. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas - SP, Março 1998.
- [145] G. Walsh, D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray, and J. P. Laumond. Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 39:216–222, January 1994.
- [146] T. Y-Kuc, S. M. Baek, and K. Park. Adaptive Learning Controller for Autonomous Mobile Robots. *IEE Proceedings Control Theory Appl.*, 148(1):49–54, January 2000.
- [147] J.M. Yang and J.H. Kim. Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(3):578–587, June 1999.
- [148] J.M. Yang and J.H. Kim. Sliding Mode Motion Control of Nonholonomic Mobile Robots. *IEEE Control Systems*, 19(2), April 1999.
- [149] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou. Stability Theory for Hybrid Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):461–474, April 1998.
- [150] Q. M. Zhu and S. A. Billings. Recursive Parameter Estimation for Nonlinear Rational Models. *Journal of Systems Engineering*, 1:63–76, 1991.
- [151] Q. M. Zhu and S.A. Billings. Parameter Estimation for Stochastic Nonlinear Rational Models. *International Journal of Control*, 57(2):309–333, 1993.



# Apêndice A

## Glossário

**Álgebra de Lie.** Um espaço vetorial real munido da operação colchete de Lie  $([.,.])$  é denominado uma álgebra de Lie.

**Aplicação.** Seja  $M$  um conjunto qualquer de pontos no espaço. Diz-se que há uma aplicação  $f$  do conjunto  $M$  no espaço se a cada ponto  $X$  do conjunto  $M$  corresponde um ponto  $f(X)$  do espaço.

**Aplicação contínua.** Uma aplicação  $f$  de um conjunto  $M$  se chama *contínua* se quaisquer que sejam o ponto  $X$  e o número  $\varepsilon > 0$ , existe um número  $\delta > 0$  tal que para todo ponto  $Y$  de  $M$  a distância entre os pontos  $f(Y)$  e  $f(X)$  será menor que  $\varepsilon$  sempre que a distância entre  $Y$  e  $X$  seja menor que  $\delta$ .

**Aplicação injetora.** Uma aplicação  $f$  do conjunto  $M$  se chama *injetora* se as imagens de pontos distintos são diferentes.

**Aplicação inversa.** Seja  $f$  uma aplicação injetora. De modo natural fica definida então a aplicação  $f^{-1}$  do conjunto  $f(M)$  que associa ao ponto  $f(X)$  o ponto  $X$ . Esta aplicação se denomina *inversa* de  $f$ .

**Aplicação localmente topológica.** Uma aplicação  $f$  de um conjunto  $M$  no espaço se denomina *localmente topológica* se para todo ponto deste conjunto existe um entorno no qual a aplicação  $f$  é topológica.

**Aplicação topológica.** Seja  $f$  uma aplicação injetora e contínua de  $M$ . Se a aplicação  $f^{-1}$  do conjunto  $f(M)$  também for contínua, diz-se que  $f$  é uma aplicação topológica.

**Campo covetorial.** A transposta de um campo vetorial é dita ser um campo covetorial. Um campo covetorial é um vetor linha n-dimensional.

**Campo vetorial.** Um mapeamento  $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ , onde  $D \subset \mathbf{R}^n$  é um domínio, é dito ser um campo vetorial sobre  $D$ . Um campo vetorial é um vetor coluna n-dimensional.

**Codistribuição.** Codistribuições são objetos duais das distribuições. Elas são definidas usando campos covetoriais e possuem propriedades análogas as das distribuições.

**Colchete de Lie.** Seja  $f$  e  $g$  dois campos vetoriais sobre  $D \subset \mathbf{R}^n$ . A álgebra de Lie de  $f$  e  $g$ , escrita como  $[f, g]$ , é um terceiro campo vetorial definido por

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

onde  $[\partial g/\partial x]$  e  $[\partial f/\partial x]$  são matrizes Jacobianas. Esta operação se caracteriza por ser bilinear (linear nas duas entradas), antisimétrica ( $[A, B] = -[B, A]$ ), e atender a identidade de Jacobi.

**Conexo.** Um conjunto  $M$  de pontos do espaço se chama *conexo* se não existem dois conjuntos abertos  $G'$  e  $G''$  que dividem o conjunto  $M$  em duas partes  $M'$  e  $M''$  de modo que uma pertença só a  $G'$  e a outra, só a  $G''$ .

**Conjunto aberto.** Um conjunto  $G$  de pontos do espaço se chama *aberto* se para todo ponto  $X$  deste conjunto pode-se indicar um número  $\varepsilon > 0$  tal que todos os pontos do espaço a uma distância de  $X$  menor que  $\varepsilon$  também pertencem a  $G$ .

**Curva analítica.** Uma curva se chama *analítica* se admite uma parametrização analítica ( $f_1, f_2$  e  $f_3$  são funções analíticas) em um entorno suficientemente pequeno de cada um de seus pontos.

**Curva elementar.** Um conjunto de pontos  $\gamma$  de pontos do espaço se chamará *curva elementar* se for a imagem obtida no espaço por uma aplicação topológica de um segmento aberto da reta.

**Curva fechada.** Uma curva simples homeomorfa com uma circunferência se denomina *fechada*.

**Curva genérica.** Um conjunto  $\gamma$  de pontos do espaço se denominará *curva genérica* se este conjunto é a imagem obtida por uma aplicação localmente topológica de uma curva simples no espaço.

**Curva regular.** Uma curva  $\gamma$  se chamará *regular* ( $k$  vezes diferenciável) se para todo ponto desta curva existe um entorno que admite uma parametrização regular, ou seja, pode ser representado por equações na forma paramétrica

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

onde  $f_1, f_2$  e  $f_3$  são funções regulares ( $k$  vezes continuamente diferenciáveis).

**Curva simples.** Um conjunto  $\gamma$  de pontos do espaço se chamará *curva simples* se este conjunto é conexo e se para todo ponto  $X$  do mesmo existe um entorno tal que a parte de  $\gamma$  compreendida nele constitui uma curva elementar.

**Curva suave.** Diz-se que uma curva regular onde  $k = 1$  (uma vez diferenciável) se denomina *suave*.

**Derivada de Lie.** Seja  $h : D \rightarrow \mathbf{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ . A derivada de Lie de  $h$  com relação a  $f$  ou ao longo de  $f$ , escrita como  $L_f h(x)$ , é definida por

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

**Difeomorfismo.** Um mapeamento  $T : D \rightarrow \mathbf{R}^n$  é um difeomorfismo sobre  $D$  se ele for invertível sobre  $D$ ; isto é, existe uma função  $T^{-1}(x)$  tal que  $T^{-1}(T(x)) = x$  para todo  $x \in D$ , e  $T(x)$  e  $T^{-1}(x)$  são continuamente diferenciáveis.

**Diferencial.** Seja  $h : D \rightarrow \mathbf{R}$ . O diferencial de  $h$  é um campo covetorial, definido por

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$

**Distribuição.** Seja  $f_1, f_2, \dots, f_k$  campos vetoriais sobre  $D \subset \mathbf{R}^n$ . Em qualquer ponto fixo  $x \in D$ ,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  são vetores em  $\mathbf{R}^n$  e

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

é um subespaço de  $\mathbf{R}^n$ . Para cada ponto  $x \in \mathbf{R}^n$ , atribui-se um subespaço  $\Delta(x)$ , referenciado como

$$\Delta = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

que é chamado de distribuição. Em outras palavras,  $\Delta$  é uma coleção de todos os espaços vetoriais  $\Delta(x)$  para  $x \in D$ .

**Distribuição involutiva.** Uma distribuição  $\Delta$  é involutiva se

$$g_1 \in \Delta \text{ e } g_2 \in \Delta \implies [g_1, g_2] \in \Delta$$

**Entorno de um ponto.** Chama-se *entorno* de um ponto  $X$  do espaço, qualquer conjunto aberto que contém este ponto.

**Equações de uma curva.** Seja  $\gamma$  uma curva elementar e seja  $a < t < b$  o segmento de onde se obteve pela aplicação  $f$  a curva. Sejam  $f_1(t), f_2(t)$  e  $f_3(t)$  as coordenadas do

ponto da curva correspondente ao ponto  $t$  do segmento. Ao sistema de igualdades

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

se denomina *equações* da curva  $\gamma$  na forma paramétrica.

**Homeomorfo ou topologicamente eqüivalente.** Sendo  $f$  uma aplicação topológica, pode-se dizer que o conjunto  $M$  e sua imagem  $f(M)$  são *homeomorfos ou topologicamente equivalentes*.

**Imagem de um conjunto.** Ao conjunto de pontos  $f(X)$  formado pelas imagens de todos os pontos do conjunto  $M$  se denomina *imagem* do conjunto  $M$ .

**Imagem de um ponto.** O ponto  $f(X)$  do espaço se denomina *imagem* do ponto  $X$ .

**Integrabilidade completa.** Seja  $\Delta$  uma distribuição não singular sobre  $D$ , gerada por  $f_1, \dots, f_r$ . Então,  $\Delta$  é dita ser completamente integrável se para cada  $x_0 \in D$ , exista uma vizinhança  $N$  de  $x_0$  e  $n - r$  funções suaves de valores reais  $h_1(x), \dots, h_{n-r}(x)$  tal que  $h_1(x), \dots, h_{n-r}(x)$  satisfaça as equações diferenciais parciais

$$\frac{\partial h_j}{\partial x} f_i(x) = 0, \quad \forall \quad 1 \leq i \leq r \quad e \quad 1 \leq j \leq n - r$$

e os campos covetoriais  $dh_j(x)$  são linearmente independentes para todo  $x \in D$ . De modo equivalente,

$$\Delta^\perp = \text{span}\{dh_1, \dots, dh_{n-r}\}$$

**Ponto Regular.** Seja  $\gamma$  uma curva regular plana e seja  $P$  um ponto da mesma. O ponto  $P$  da curva  $\gamma$  se denomina *ponto regular* com relação ao grau de regularidade  $k$  dado, se num entorno deste ponto a curva admite uma parametrização  $k$  vezes diferenciável

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

que no ponto  $P$  satisfaz a condição  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ .

**Ponto Singular.** Seja  $\gamma$  uma curva regular plana e seja  $P$  um ponto da mesma. O ponto  $P$  da curva  $\gamma$  se denomina *ponto singular* com relação ao grau de regularidade  $k$  dado, se num entorno deste ponto a curva **não existe** uma parametrização  $k$  vezes diferenciável

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

que no ponto  $P$  satisfaz a condição  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ .

---

**Produto interno.** Se  $f$  e  $w$  são, respectivamente, um campo vetorial e um campo covetorial sobre  $D$ , então o produto interno  $\langle w, f \rangle$  é definido como

$$\langle w, f \rangle = w(x)f(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)f_i(x)$$

**Sistema Pfaffiano.** Um sistema Pfaffiano é um submódulo do módulo  $C^\infty(X)$  do espaço de 1-formas sobre  $X$ .

**Teorema de Frobenius.** Teorema que afirma que *uma distribuição não singular é completamente integrável se e somente se ela for involutiva.*

**Variedade.** Denominação equivalente a de uma hipersuperfície suave do espaço da configuração de um sistema.





# Apêndice B

## Prova do teorema para CPG

A seguir, é apresentada a prova do teorema referente ao controle utilizando CPG e a discretização de sistemas não-holonômicos na forma encadeada. A prova para o CPG é a do teorema 2 no artigo de Clarke [27], que por sua vez se baseia numa série de Lemas de conhecimento público. Apresenta-se aqui a representação do sistema na forma encadeada e repete-se a prova do teorema 2 de Clarke para melhor clareza do texto.

Considere o sistema não-holonômico na forma encadeada em  $(2, n)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1, \\ \dot{x}_2 &= u_2, \\ \dot{x}_i &= x_{i-1}u_1 \quad i = 3, \dots, n,\end{aligned}$$

onde  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  é o vetor de estados, e  $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$  é o vetor de entradas de controle. Escolhido um período de amostragem  $T > 0$ , e, uma vez que  $u_1(t)$  é constante durante este período de amostragem, o sub-sistema dado pela dinâmica das variáveis de estado  $x_r = [x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^{n-1}$  produz o seguinte sistema linear e invariante no tempo (LTI) no intervalo de tempo  $[kT, (k+1)T)$  [39]:

$$\dot{x}_r = A_r(u_1^*)x_r + b_r u_2(t),$$

onde  $A_r(u_1^*) \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  tem a seguinte expressão:

$$A_r(u_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & u_1^* & 0 \end{bmatrix},$$

e  $b_r = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^{n-1}$ . O sistema LTI acima é controlável se  $u_1^*$  não se anular.

Portanto, o sistema não-holonômico na forma encadeada pode ser dividido em dois subsistemas LTI discreto.

A seguir, repete-se o Teorema 2 de Clarke [27] e sua prova.

**Teorema 2:** *Uma malha fechada sob controle CPG em horizonte-finito será estável se:*

1. *O modelo de  $n$ -estados  $(A, b, c)$  é estabilizável e detectável, e se*
2.  *$NU = N_1 \geq n$ ,  $N_2 - N_1 \geq n - 1$  e  $\lambda = \epsilon \rightarrow 0$ .*

**Prova:** Este apêndice prova o resultado do Teorema 2 dependendo da escolha do horizonte no controle realimentado com horizonte finito. A prova se sustenta na interligação entre realimentação no espaço de estados e realimentação da saída usada no controle CPG. A estabilidade resultante é provada para uma classe especial de sistemas no espaço de estados (completamente controlável com uma matriz de transição não-singular) e estendido para o caso estabilizável por entrada/saída. Apenas plantas sem ruído são consideradas uma vez que os distúrbios não afetam a estabilidade da malha. A maioria dos resultados pode ser encontrada em vários locais, mas são incluídos aqui para completude.

O modelo no espaço de estados sob consideração é

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + b\Delta u(t), \\ y(t) &= c^T x(t). \end{aligned}$$

**Lema 1:** *Se o par  $(A, b)$  é completamente controlável e  $A$  é não-singular, então para qualquer  $N \geq n$  com:*

$$K_0^T = \frac{1}{\lambda} b^T (A^T)^N W_N^{-1} A^{N+1},$$

onde

$$W_N = \sum_{i=0}^N A^i \frac{bb^T}{\lambda} (A^T)^i,$$

a lei de realimentação dada por  $\Delta u(t) = -K_0^T x(t)$  é estabilizante.

**Prova:** Considere o sistema

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \phi^T x(t), \\ \phi &= A - A^{N+1} \frac{bb^T}{\lambda} (A^T)^N W_N^{-1}, \end{aligned}$$

e a função de Lyapunov  $x^T(t)W_N x(t)$ . Pode ser mostrado que

$$\phi W_N \phi^T = -\frac{bb^T}{\lambda} - \frac{A^{N+1}b}{\sqrt{\lambda}} \times \left[ 1 - \frac{b^T (A^T)^N W_N^{-1} A^N b}{\lambda} \right] \frac{b^T (A^T)^{N+1}}{\lambda}.$$

Da definição de  $W_N$  e do lema de inversão de matrizes, a grandeza  $\phi W_N \phi^T$  é semi-definida

negativa. Agora falta mostrar que não existe estado inicial tal que a função de Lyapunov seja zero durante todo o tempo, ou, por outro lado, que não existe estado  $x_0$  tal que  $x_0^T A^{N+1} b$  seja nulo para todo  $i$ . Da controlabilidade completa tem-se

$$x_0^T A^{N+1} [b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] \neq 0.$$

Lembrando que a controlabilidade completa do sistema em malha aberta (A,b) implica na controlabilidade completa do sistema em malha fechada. Isto por sua vez sugere que não existe estado  $x_0$  tal que a função de Lyapunov pode se anular durante todo o tempo. Portanto,  $\phi$  é uma matriz estritamente estável e uma transformação de similaridade usando a matriz  $A^{-N-1}$  completa a prova.

O próximo conjunto de Lemas remove as restrições de não-singularidade de  $A$  e de controlabilidade completa.

**Lema 2:** *Se o sistema  $(A, b)$  tem uma única entrada e é completamente controlável, então a lei de realimentação de estado do Lema 1 estabiliza o sistema independentemente da não-singularidade da matriz  $A$ .*

**Prova.** Pode-se obter de forma direta uma transformação de similaridade tal que:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

onde  $A_0$  é não-singular e  $A_1$  tem apenas autovalores iguais a zero. É então possível mostrar por substituição direta que a lei de controle do Lema 1 implica apenas em realimentação em torno dos estados associados com a parte não-singular, uma vez que  $A_1$  é nilpotente.

O próximo Lema estabelece a interligação entre o controlador de Kleinman e o controlador preditivo usando realimentação de estado, onde os ganhos são computados usando equações de Riccati apropriadas.

**Lema 3 -** *As leis de controle baseadas em iterações das equações de Riccati abaixo e no controlador de Kleinman são equivalentes se:  $NU = N_1 > n$  e  $N_2 - N_1 \geq n - 1$ ;  $Q(i) = cc^T$  para  $i \geq N_1$  e zero, caso contrário;  $\lambda(i) =$  muito grande, para  $i \geq NU = N_1$ , e extremamente pequeno ( $= \lambda = \epsilon$ ), caso contrário;*

$$P(t + N_2) = cc^T.$$

Para  $i = N_2 - 1$  até 1:

$$\begin{aligned} P^*(t + i) &= P(t + i + 1) - \frac{P(t+i+1)bb^T P(t+i+1)}{\lambda(i) + b^T P(t+i+1)b}, \\ P(t + i) &= Q(i) + A^T P^*(t + i)A, \\ K^T(t) &= (\lambda + b^T P(t + 1)b)^{-1} P(t + 1)A, \\ \Delta u(t) &= -K^T(t)x(t). \end{aligned}$$

**Prova:** Para as primeiras  $N_2 - N_1$  iterações do algoritmo acima o posto da matriz  $P$  aumenta progressivamente de 1 até  $n$ , seu posto máximo, se  $N_2 - N_1 \geq n - 1$ . Isto corresponde a faixa de pontos sobre a qual os erros futuros do sistema estão incluídos em  $J$ . Portanto  $P(t + N_1)$  tem posto pleno. Para o próximo conjunto de iterações  $i < NU$  pode-se escrever a atualização de Riccati como:

$$AP^{-1}(t+i)A^T = P^{-1}(t+i+1) + \frac{bb^T}{\lambda},$$

a qual pela iteração final fornece

$$A^{N_1-1}P(t+1)^{-1}(A^T)^{N_1-1} = P^{-1}(t+N_1) + \sum_{i=0}^{N_1-2} A^i \frac{bb^T}{\lambda} (A^T)^i.$$

Para  $\lambda$  extremamente pequeno:

$$AP^{-1}(t+i)A^T \approx \sum_{i=0}^{N_1-2} A^i \frac{bb^T}{\lambda} (A^T)^i = W_{N_1-2}.$$

Agora é necessário mostrar que isto leva a lei de Kleinman, na qual  $W_N$  pode ser escrita como

$$W_N^{-1} = \left( W_{N-1} + \frac{A^N bb^T (A^T)^N}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Aplicando o lema de inversão de matrizes e após alguma manipulação, o ganho de realimentação de Kleinman se torna

$$K_0^T = (\lambda + b^T (A^T)^N W_{N-1}^{-1} A^N b)^{-1} b^T (A^T)^N W_{N-1}^{i-1} A^{N+1}.$$

O qual pode ser escrito como:

$$K_0^T = (\lambda + b^T R^{-1} b)^{-1} b^T R^{-1} A,$$

onde  $W_{N-1} = A^N R^{-1} (A^T)^N$ . É fácil ver então que esta é a lei baseada na iteração de Riccati fazendo  $R = P(t+1)$  e  $N = N_1 - 1$ . Isto implica que uma condição suficiente para a estabilidade é que  $N_1 - 1 \geq n$  ou  $N_1 > n$ .

Agora, prova-se que, no caso sem ruído, existe um mapeamento direto entre o controlador por realimentação de estados e o equivalente controlador de entrada/saída.

**Lema 4** - *Os cálculos do controlador CPG de entrada/saída e a otimização usando equações de Riccati e realimentação de estados são equivalentes.*

**Prova:** Considere o cálculo do CPG para  $N_1 = N_2 = NU = 1$ . A realimentação é

dada por

$$\frac{g_1}{g_1^2 + \lambda}(-\hat{y}(t+1|t)),$$

a qual é equivalente a

$$-(\lambda + b^T c c^T b)^{-1} b^T c c^T A x(t),$$

por inspeção, uma vez que  $\hat{y}(t+1|t) = c^T A x(t)$ . Para a otimização em dois estágios tem-se para ( $N_1 = 1, N_2 = 2, NU = 2$ ):

$$\begin{bmatrix} g_1^2 + g_2^2 + \lambda & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_1^2 + \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) \\ \hat{y}(t+2|t) \end{bmatrix}.$$

Mostra-se de forma direta que

$$\Delta u(t+1) = -(\lambda + b^T c c^T A (A x(t) + b \Delta u(t))),$$

onde  $A x(t) + b \Delta u(t) = x(t+1)$  e que

$$\Delta u(t) = -(\lambda + b^T P b)^{-1} b^T P A x(t),$$

onde

$$P = c c^T + A^T c c^T A - A^T c c^T b (\lambda + b^T c c^T b)^{-1} b^T c c^T A.$$

Nota-se que as equações acima não são outras que as equações de Riccati para a otimização de dois estágios. É fácil mostrar que os próximos estágios são simplesmente repetições das equações acima e a indução completa a prova, embora não seja incluída aqui.

Pode também ser demonstrado que o mapeamento entre os ganhos de realimentação de estados e os coeficientes do controlador de entrada/saída são dados por (para qualquer representação de estados)

$$\Delta u(t) = -K^T \left( \sigma^{-1} \begin{bmatrix} y(t-n+1) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix} - \sigma^{-1} \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t-n) \\ \vdots \\ \Delta u(t-1) \end{bmatrix} \right) +$$

$$-K^T \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & \cdots & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t-n) \\ \vdots \\ \Delta u(t-1) \end{bmatrix},$$

onde  $\sigma$  é a matriz de observabilidade.

**Lema 5** - *As características de estabilidade do controle CPG não são afetadas pela presença de fatores comuns nos polinômios pólos/zeros do modelo do sistema.*

**Prova:** Considere o sistema

$$A(q^{-1})\Delta y(t) = B(q^{-1})\Delta u(t-1).$$

Se o modelo do sistema é dado por polinômios com fator comum  $\alpha(q^{-1})$  como:

$$A(q^{-1})\alpha(q^{-1})\Delta y(t) = B(q^{-1})\alpha(q^{-1})\Delta u(t-1),$$

então a equação Diofantina para o  $j$ -ésimo passo à frente do preditor se torna

$$1 = E_c A \alpha \Delta + q^{-j} F_c.$$

Comparando isto com a identidade Diofantina sem o fator comum  $\alpha$  tem-se:

$$\begin{aligned} 1 &= EA\Delta + q^{-1}F, \\ \alpha E_c &= E - q^{-1}r, \\ F_c &= rA\Delta + F, \end{aligned}$$

e a saída no instante  $t + j$  pode ser escrita como

$$y(t+j) = EB\Delta u(t+j-1) + Fy(t).$$

Nota-se que os termos na equação do preditor são os mesmos para o caso de fatores não-comuns e então os parâmetros  $g$  irão também permanecer os mesmos de antes. Isto, por sua vez, implica que não haverá singularidade nos cálculos do controle CPG na presença de fatores comuns, e que as características de estabilidade não são afetadas.

Os Lemas acima podem agora ser combinados para provar o Teorema 2 para o CPG. Primeiro a restrição sobre  $N_1$  do Lema 3 pode ser relaxada notando que o Teorema 1 requer  $N_1 = n$  e  $\lambda = 0$  para colocar os pólos na origem. Assim para uma planta completamente controlável e observável tem-se estabilidade quando  $NU = N_1 \geq n$ ,  $N_2 - N_1 \geq n - 1$  e  $\lambda$  for extremamente pequeno. Supondo que o modelo da planta esta sobreparametrizado, tendo um fator comum  $\alpha(q^{-1})$  cujo grau é  $\delta\alpha$ . Os Lemas 3 e 5 permite escolher  $NU = N_1 > n - b\alpha$ ,  $N_2 - N_1 \geq n - \delta\alpha - 1$  e  $\lambda = \epsilon$  se  $\delta\alpha$  for conhecido. Ele obviamente é pelo menos 1, levando a declaração final do Teorema 2.

# Apêndice C

## Recursão da Equação Diofantina para o CPG

Um meio de implementar a predição de horizonte estendido é ter um banco de preditores auto-reguláveis para cada horizonte  $j$ . Alternativamente, (4.2) pode ser resolvida numericamente por  $E(j)$  e  $F(j)$  para toda a faixa de  $j$  que esta sendo considerada. Ambos os métodos são computacionalmente caros. Ao invés, um esquema mais simples e mais efetivo é usar recursão da equação Diofantina até que os polinômios  $E(j+1)$  e  $F(j+1)$  sejam obtidos, dados os valores de  $E(j)$  e  $F(j)$ .

Para clarear a notação, faz-se  $E = E(j)$ ,  $R = E(j+1)$ ,  $F = F(j)$ ,  $S = F(j+1)$  e considere as duas equações diofantinas com  $\tilde{A}$  definido como  $A\Delta$ :

$$1 = E\tilde{A} + q^{-j}F, \quad (\text{C.1})$$

$$1 = R\tilde{A} + q^{-(j+1)}S. \quad (\text{C.2})$$

Subtraindo (C.1) de (C.2), obtem-se:

$$0 = \tilde{A}(R - E) + q^{-j}(q^{-1}S - F).$$

O polinômio  $R - E$  é de grau  $j$  e pode ser dividido em duas partes:

$$R - E = \tilde{R} + r(j)q^{-j}.$$

Assim:

$$\tilde{A}\tilde{R} + q^{-j}(q^{-1}S - F + \tilde{A}r(j)) = 0.$$

Claramente para esta equação ser verdadeira, então  $\tilde{R} = 0$  e, também,  $S$  é dado por  $Sq(F - \tilde{A}r(j))$ .

Como  $\tilde{A}$  tem um elemento principal unitário, tem-se:

$$\begin{aligned} r(j) &= f(0), \\ s(i) &= f(i+1) - \tilde{a}_{i+1}r(j). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Para  $i = 0$  até o grau de  $S(q^{-1})$ :

$$R(q^{-1}) = E(q^{-1}) + q^{-j}r(j), \quad (\text{C.4})$$

e

$$G(j+1) = B(q^{-1})R(q^{-1}). \quad (\text{C.5})$$

Conseqüentemente, dados os polinômios da planta  $A(q^{-1})$  e  $B(q^{-1})$  e uma solução  $E(j)(q^{-1})$  e  $F(j)(q^{-1})$ , então (C.3) pode ser usada para obter  $F(j+1)(q^{-1})$  e (C.4) para dar  $E(j+1)(q^{-1})$ , e assim por diante, com pequeno esforço computacional. Para inicializar a iteração, note que para  $j = 1$ :

$$1 = E(1)\tilde{A} + q^{-1}F(1),$$

e como o elemento principal de  $\tilde{A}$  é 1, então:

$$E(1) = 1, \quad F(1) = q(1 - \tilde{A}).$$

Os cálculos envolvidos, portanto, são diretos e mais simples que aqueles requeridos quando usando um preditor separado para cada um dos horizontes de saída.