
Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



Projeto de Controladores PID para
Sistemas de Segunda Ordem Sujeitos a
Retardo Variante no Tempo

Elder Pereira Fenili

Dissertação de mestrado submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Linha de Pesquisa: Controle, Automação e Robótica (CAR)
Área de Concentração: Sinais e Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza
Coorientador: Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli

Fevereiro de 2015

A minha esposa Lucia e meus filhos Izadora e Lorenzo.

Agradecimentos

- Agradeço sobretudo a Deus que me manteve firme e com saúde para enfrentar estes dois anos de muito trabalho.
- A minha esposa pelo apoio incondicional.
- Aos meus orientadores, Professores Fernando de Oliveira Souza e Leonardo Amaral Mozelli, pela enorme contribuição, compreensão e incentivo durante todo o período que estivemos juntos para elaboração desta dissertação.
- A todos os colegas do PPGEE pelo companherismo e ajuda (Diana, Fredy, Estevão, Cristiano, Lianny, Ernesto, Alcy, Douglas, Maria Victoria...), em especial, aos colegas Carlos Pereira e Heitor Savino pelas contribuições que ajudaram a construir este trabalho.
- Aos professores do PPGEE pelos ensinamentos.
- À Direção do Instituto Federal Fluminense (Campus Macaé-RJ) pela flexibilização do horário de trabalho, o que me permitiu frequentar o curso de mestrado.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma metodologia para sintonia de controladores PID (Proporcional, Integral e Derivativo) para sistemas de segunda ordem sujeitos a retardo variante no tempo. O método baseia-se na teoria de Lyapunov-Krasovskii. Tal teoria, a partir da escolha de um funcional apropriado, permite tratar problemas de estabilidade de sistemas sujeitos a retardo no tempo. Neste trabalho foi escolhido um funcional que possui termos exponenciais, assim uma taxa de convergência, pré-definida pelo projetista, pode ser imposta ao sistema controlado. O problema é formulado através de Desigualdades Matriciais Lineares ou LMIs (do inglês: *Linear Matrix Inequalities*), de modo que ferramentas computacionais podem ser utilizadas para encontrar os ganhos do controlador de forma bastante eficiente. Experimentos numéricos revelaram que o método é robusto à variação do retardo no tempo, assim como à variação do fator de amortecimento do sistema. Os resultados com os controladores obtidos a partir do método proposto foram comparados com outros métodos da literatura. Pôde-se observar a superioridade do novo método a partir da análise de figuras de mérito do sistema quando submetido a um degrau na referência e a um distúrbio na saída do sistema.

Palavras-chave: controlador PID, tempo morto, controle robusto, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

Abstract

This thesis presents a methodology for PID controllers tuning (Proportional, Integral and Derivative) for second order systems subject to time-varying delay. The method is based on the Lyapunov-Krasovskii theory. Such theory, takes into account the choice of an appropriate functional, which allows treating stability problems on systems subject to time-delay. In this work was chosen a functional which has exponential terms, so a convergence rate, pre-defined by the designer, can be imposed on the system. The problem is formulated by Linear Matrix Inequalities (LMIs), such that computational tools can be used to find the gains of the controller quite efficiently. Numerical experiments reveal that the method is robust to the variation in time-delay, and the variation of system damping factor. The results with the controller obtained from the proposed method were compared with other methods in the literature. It was observed the new method superiority from the integral of the error performance analysis and transient response of the system when subjected to a step in the reference and a disturbance in the system output.

Keywords: PID controller, time-delay, robust control, Lyapunov-Krasovskii, LMIs.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	ix
Acrônimos	x
Notações e Definições	xi
1 Introdução	1
1.1 Contexto histórico	1
1.2 Estado da Arte	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Organização do Texto	6
2 Conceitos Preliminares	8
2.1 Estabilidade de Sistemas com Retardo no Tempo	8
2.2 Desigualdades Matriciais Lineares	10
2.3 Matrizes de Livre Ponderação	11
2.4 Desigualdade de Jensen	14
2.5 Complemento de Shur	16
3 Formulação do Problema	18
4 Metodologia de Projeto	25
4.1 Análise de Estabilidade	27

4.2 Projeto do Controlador PID	37
5 Discussão dos Resultados	40
5.1 Procedimento Experimental	40
5.2 Exemplos Numéricos	44
6 Conclusão e Futuros Trabalhos	56
Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

3.1	Função de transferência de malha aberta.	19
3.2	Representação em espaço de estados da planta em malha fechada.	21
3.3	Representação em espaço de estados da planta em malha fechada com integrador.	22
3.4	Representação em espaço de estados da planta em malha fechada com controlador PID e retardo no tempo.	24
5.1	Retardo variante no tempo dado por uma função aleatória $d(t)$	42
5.2	Esquema de controle. Referência r ; saída y ; entrada de controle atrasada u ; distúrbio de saída d	43
5.3	Comportamento do parâmetro δ perante a variação do parâmetro α . Linha preta: $\tau = 0,10$ e $\mu = 0,05$; Linha vermelha: $\tau = 0,15$ e $\mu = 0,075$; Linha azul: $\tau = 0,20$ e $\mu = 0,10$; Linha verde: $\tau = 0,25$ e $\mu = 0,125$; Linha ciano: $\tau = 0,30$ e $\mu = 0,15$; Linha amarela: $\tau = 0,35$ e $\mu = 0,175$	44
5.4	Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_1(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).	46
5.5	Critérios de Desempenho para $G_1(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).	47
5.6	Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_2(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).	48

5.7	Critérios de Desempenho para $G_2(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).	49
5.8	Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_3(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).	50
5.9	Critérios de Desempenho para $G_3(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).	51
5.10	Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_4(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).	52
5.11	Critérios de Desempenho para $G_4(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control.	53
5.12	Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_5(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).	54
5.13	Critérios de Desempenho para $G_5(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control.	55

Lista de Tabelas

5.1	Funções de transferência estudadas.	41
5.2	Valores considerados para os parâmetros τ e μ	42
5.3	Parâmetros utilizados para simulação dos exemplos numéricos. . .	45

Acrônimos

FT	F unção de T ransferência
FLK	F uncional de L yapunov- K rasovskii
FWM	F ree W eighting M atrix
ISE	I ntegral S quare E rror
IAE	I ntegral A bsolute E rror
ITAE	I ntegral of T ime-weighted A bsolute E rror
IMC	I nternal M odel C ontrol
LQR	L inear Q uadratic R egulator
LMI	L inear M atrix I nequality
PI	P roportional I ntegral
PID	P roportional I ntegral D erivativo
RFDE	R etarded F unctional D ifferential E quation
SIMC	S kogestad I nternal M odel C ontrol

Notações e Definições

\mathbb{R}^n	Conjunto de vetores reais de dimensão n
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times n$
*	Termos matriciais simétricos nas LMIs
τ	Retardo no tempo nominal
μ	Limitante para o retardo no tempo
δ	Taxa de convergência exponencial
α	Fator de ponderação da matriz livre F
ς	Fator de amortecimento de uma função de transferência
τ_0	Período natural de oscilação de uma função de transferência
ϕ	Operador de avanço ou atraso de uma função trigonométrica
$\mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$	Família de funções contínuas no intervalo $[-h, 0]$ para o \mathbb{R}^n
$\ \phi\ _c$	Continuidade da norma de uma função $\phi \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$
\triangleq	Igual por definição
$\cos(\cdot)$	Função coseno
$\sin(\cdot)$	Função seno
$d(t)$	Função do retardo variante no tempo
$x(t)$	vetor de estado
$\dot{x}(t)$	Derivada do vetor de estado
x_t	Valor de $x(t)$ no intervalo $[t - (\tau + \mu), t]$
$V(x_t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii
$\dot{V}(x_t)$	Derivada do funcional de Lyapunov-Krasovskii
$M > 0$ ou $M \geq 0$	Matriz definida ou semi-definida positiva

$M < 0$ ou $M \leq 0$	Matriz definida ou semi-definida negativa
M^T	Matriz transposta
M^{-1} ou ϵ^{-1}	Inversa de uma matriz ou um escalar
$diag\{.\}$	Matriz diagonal
M_p	Máximo sobre-sinal
t_r	Tempo de subida
t_s	Tempo de estabilização ou acomodação

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo descreve de forma breve o contexto histórico sobre projeto e sintonia de controladores PID, as motivações para estudo de tal assunto, bem como o andamento atual das pesquisas nessa área. Ao final do capítulo são apresentados o objetivo principal, os objetivos específicos do trabalho e a organização do texto.

1.1 Contexto histórico

Em 1935, o controlador PID teve sua primeira aplicação prática registrada. Ralph Clarridge da Taylor Instrument Companies estudando um problema de oscilação em uma malha de controle de temperatura inseriu a ação de controle derivativo em um controlador PI de uma indústria de celulose. Este controlador foi aprimorado pelos engenheiros da empresa e em 1939 a Taylor Instrument Companies lançou comercialmente uma versão padrão chamada PID Fulscope [5]. Inicialmente, o novo controlador encontrou dificuldades para ser aplicado nos processos industriais, principalmente, porque na época não havia uma metodologia consolidada para ajuste dos três parâmetros do controlador [4]. Para resolver este inconveniente,

J. G. Ziegler e N. B. Nichols desenvolveram uma metodologia empírica baseada na dinâmica do processo. O trabalho de Ziegler & Nichols em [30] contribuiu de forma bastante relevante para que o controlador PID se tornasse um dos algoritmos mais utilizados no controle dos mais variados tipos de processos, estima-se que no ambiente industrial, mais de 95% das malhas de controle utilizam este tipo de controlador [2].

A notória popularidade faz com que o controlador PID continue recebendo grande atenção dos pesquisadores e diversos métodos de sintonia têm sido revisitados, aprimorados ou propostos. As abordagens clássicas adotam dois caminhos: projeto empírico ou analítico. No primeiro caso, a grande maioria dos métodos baseiam-se em variações das duas metodologias propostas por Ziegler-Nichols. Em uma os parâmetros do controlador são calculados através de uma tabela de equações que são função de parâmetros extraídos da curva de reação do processo em malha aberta, enquanto a outra baseia-se em parâmetros da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Como exemplo, pode-se citar os métodos propostos por: Chien, Hrones e Reswick (1952), Pagano (1989) e Aström e Hägglund (1995). Mais detalhes sobre essas abordagens podem ser encontrados em [2].

Sabe-se que sistemas físicos geralmente possuem dinâmicas não-lineares o que aumenta consideravelmente a complexidade dos projetos de controle. Neste caso, a estratégia comum consiste em aproximar a dinâmica do sistema através de um modelo linear em torno de um ponto de operação. Contudo, estas aproximações carregam intrinsecamente incertezas relacionadas com parâmetros da planta, dinâmicas não consideradas, não-linearidades e/ou perturbações desconhecidas [22]. A maioria dos processos podem ser representados por modelos de primeira ou segunda ordem mais retardo no tempo. Mesmo sistemas que não apresentam tempo morto podem ser aproximados por um modelo deste tipo, onde o tempo de atraso pode representar uma aproximação das dinâmicas de ordem

superior [15]. Particularmente em processos químicos a utilização de modelos de segunda ordem mostram-se mais eficientes que os de primeira ordem [18].

Neste contexto, os métodos analíticos levam em consideração o modelo matemático aproximado para projeto do controlador. A partir de parâmetros extraídos do modelo, calculam-se os ganhos do controlador utilizando fórmulas matemáticas. Como exemplo, vale registrar os métodos de Cohen-Coon (1953), Haalman (1965) e talvez o mais conhecido e utilizado, o projeto baseado no modelo interno do processo ou controle IMC, proposto por Rivera et. al. em [19]. Modificações foram propostas para o controle IMC, uma bastante popular é a proposta por Skogestad. Em [20] o trabalho de Skogestad propõe um conjunto de regras para cálculo dos parâmetros do controlador para processos com ou sem integradores, de primeira ou segunda ordem mais retardo no tempo e pólos reais negativos. Em [13] as regras derivadas em [20] são extendidas para processos com pólos complexos conjugados dominantes.

O trabalho de [21] descreve que a maior parte dos artigos publicados sobre regras para sintonia de PID tem como objetivo projetar um controlador com resposta rápida e robustez aceitável, ou seja, impõe-se um limite máximo para o ganho do controlador. Entretanto, no meio industrial, normalmente deseja-se um controlador com resposta suave e um bom desempenho em termos de rejeição de distúrbios. Assim, é proposto um método de sintonia para encontrar um limite mínimo para o ganho de controle de modo a atender a esta necessidade. Em estudo recente apresentado em [1], Ali e Majhi dando continuidade a ideia apresentada em [21], propõem um método para projeto dos parâmetros do PID de modo a se alcançar um determinado valor de sobre-sinal para uma resposta suave ou rápida em sistemas de primeira ou segunda ordem sujeitos a retardo no tempo. Outros esforços em termos de soluções analíticas consistem em utilizar o lugar das raízes, diagramas de Nyquist e projetos baseados em margens de ganho e fase. Detalhes sobre estas abordagens podem ser vistos, respectivamente, em [25], [26] e [27].

1.2 Estado da Arte

Recentemente, as abordagens que tratam o projeto do controlador PID como um problema de otimização vêm ganhando espaço. Em contraposição aos métodos analíticos ou empíricos, existe a possibilidade de otimização de diversos critérios de desempenho simultaneamente e, talvez a melhor vantagem, de forma bastante sistemática. Otimização multi-objetivo da norma H_2 e H_∞ é utilizada em [24] para projetar um PID robusto sujeito a distúrbios e incertezas paramétricas politópicas. Em [10] apresenta-se um procedimento para sintonia robusta de um controlador PID baseado em um problema de otimização não convexo das normas H_2 e H_∞ , bem como alocação regional robusta de pólos. Em [16] propõe-se um método de projeto de controladores com estrutura Preditor de Smith para sistemas com retardo no tempo incerto onde os parâmetros do controlador são encontrados a partir de um problema de minimização da norma H_∞ sujeita a um conjunto de restrições convexas no diagrama de Nyquist. Ademais este método também pode ser usado para projetar um controlador PID. O trabalho publicado por Bevrani et. al. em [6] implementa uma estratégia de controle robusta para síntese de PIDs aplicados em estabilizadores de sistemas de energia elétrica. O problema é formulado em espaço de estados adotando uma abordagem H_∞ baseada em controle por realimentação estática de saída e resolvido através de LMIs.

Sistemas fortemente não lineares ou nos quais o atraso de tempo é dominante representam desafios relevantes para a sintonia de controladores PID [3]. Assim, a abordagem baseada no uso das Desigualdades Matriciais Lineares se mostra muito vantajosa, pois permite o tratamento formal do atraso de tempo por meio da teoria de Lyapunov-Krasovskii. O trabalho de Ge et. al. em [9] utiliza a abordagem LQR-LMI para projeto de um controlador PID robusto em espaço de estados sujeito a incertezas nas matrizes do sistema de equações. O artigo publicado por Parada et. al. em [17] trata o problema de projeto de PIDs em

espaço de estados para sistemas com retardo invariante no tempo e incerteza paramétrica utilizando o teorema do pequeno ganho. A análise de estabilidade é realizada através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii adequado e o projeto do controlador é escrito por meio de LMIs considerando um limitante superior para a norma H_∞ . Em [14] aborda-se o projeto de um controlador PID em espaço de estados para sistemas de segunda ordem com retardo invariante ou variante no tempo. Para tanto é proposto um funcional de Lyapunov-Krasovskii apropriado para análise de estabilidade e considerado um limitante para a norma H_∞ , sendo o problema resolvido por meio de LMIs.

Portanto, considerando toda a pesquisa realizado até o momento resolve-se investigar o problema de projeto de controladores PID para sistemas de segunda com atraso variante no tempo. Os principais objetivos desta dissertação são expostos na próxima seção.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma metodologia de projeto de controladores PID para sistemas de segunda ordem sujeitos a retardo variante no tempo que garanta uma taxa de convergência exponencial pré-estabelecida utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii e formulada por meio de LMIs.

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Transformar o problema de projeto de PID, normalmente formulado com realimentação da saída no domínio da frequência, em projeto por realimentação de estados;

- encontrar um funcional de Lyapunov-Krasovskii apropriado para análise de estabilidade de sistemas de segunda ordem com atraso variante no tempo e taxa de decaimento exponencial pré-determinada;
- desenvolver condições LMIs apropriadas para projeto de controladores PID para sistemas precisamente conhecidos e sujeitos a retardo variante no tempo;
- fazer uma análise de desempenho do método proposto; e
- comparar o novo método com outros similares encontrados na literatura.

1.4 Organização do Texto

O texto está organizado da seguinte forma:

- O capítulo 2 faz uma revisão da literatura sobre os principais conceitos necessários ao bom entendimento da formulação e resolução do problema em estudo;
- O capítulo 3 apresenta, em espaço de estados, a formulação do problema de projeto de controladores PID para sistemas de segunda ordem com retardo no tempo;
- O capítulo 4 descreve a análise de estabilidade e o projeto do controlador PID utilizando a teoria de Lyapunov-Krasovskii e a formulação das condições LMIs;
- O capítulo 5 traz exemplos numéricos para ilustrar a eficácia do método, além de fazer uma análise comparativa de critérios de desempenho com métodos encontrados na literatura;

- O capítulo 6 conclui sobre os principais resultados e apresenta algumas sugestões para aprimoramento do método proposto nesta dissertação.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados assuntos relevantes para o desenvolvimento desta dissertação. Inicialmente, aborda-se a questão de estabilidade em sistemas com retardo no tempo, onde se relata de forma breve os métodos clássicos da literatura, além de explicar de forma mais detalhada a teoria de Lyapunov-Krasovskii, método utilizado neste trabalho para gerar as condições de estabilidade. Também é descrito, de modo rápido e conciso, o uso das desigualdades matriciais lineares, da desigualdade de Jensen, do complemento de Schur, das matrizes de livre ponderação e do termo nulo. Na medida do possível são introduzidos exemplos que facilitam o entendimento dessas ferramentas matemáticas de grande importância para solução de problemas de estabilidade.

2.1 Estabilidade de Sistemas com Retardo no Tempo

Retardo no tempo pode ser definido de forma concisa como o tempo necessário para que a mudança em uma variável controlada possa ser percebida. Durante este período o sistema de controle não atua sobre a planta o que pode afetar de forma

decisiva o desempenho do controlador. Este atraso pode ser causado por vários motivos, dentre os quais, pode-se destacar o tempo de transporte de materiais em correias ou tubulações industriais, o tempo para transferência de calor em sistemas térmicos e o tempo para envio de sinais em redes de múltiplos agentes. É fato que atrasos afetam de forma importante o comportamento dinâmico do sistema a ser controlado. Portanto, estes atrasos devem ser considerados para que o sistema de controle funcione adequadamente. Uma maneira de considerar o retardo no tempo é fazer o uso da aproximação de Padé, porém nem sempre o uso dessa metodologia resulta em uma boa representação da dinâmica do processo, principalmente nos casos em que o retardo é variante no tempo. Outra forma de tratar o atraso é utilizar um esquema de controle do tipo Preditor de Smith em que o retardo no tempo é cancelado pelo controlador. O inconveniente, em ambos os casos, é que o atraso deve ser constante e precisamente conhecido, o que dificulta o uso em sistemas com retardo variante no tempo ou onde o retardo é constante, mas não se conhece seu valor exato.

Os mecanismos de aproximação ou cancelamento são utilizados porque o retardo não pode ser modelado no domínio do tempo por equações diferenciais ordinárias. Assim, uma maneira eficiente de descrever de forma exata um sistema retardado é utilizar o que se chama de equações diferenciais funcionais ou mais especificamente RFDE [28]. De modo geral, considere um valor de atraso máximo h , neste caso, o interesse reside em funções contínuas que mapeiam o intervalo $[-h, 0]$ para \mathbb{R}^n , denotadas por $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Para qualquer função contínua no tempo $\chi \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$, com $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ e $\forall a > 0$, $\chi_t \in \mathcal{C}$ será um segmento de χ dado por $\chi_t(\theta) = \chi(t + \theta)$, com $-h \leq \theta \leq 0$ [28].

O segundo método de Lyapunov também pode ser utilizado para garantir a estabilidade de sistemas com atraso no tempo. A diferença é que para sistemas sujeitos a retardo, há a necessidade de se conhecer como o sistema se comporta no intervalo $[t - h, t]$, ou seja, é preciso conhecer o valor de $x(t)$ no instante inicial (x_t) para determinar a evolução dinâmica do processo. Naturalmente a função

de Lyapunov torna-se um funcional do tipo $V(t, x_t)$, denominado de funcional de Lyapunov-Krasovskii. Este funcional consiste numa extensão do segundo método de Lyapunov para sistemas com retardo no tempo [28]. Esta ideia é mais precisamente descrita pelo teorema 2.1 enunciado logo a seguir.

Teorema 2.1. [11] (*Teorema da estabilidade de Lyapunov-Krasovskii*) *Seja $\phi(0) = x_{t_0}$. Suponha que $f(t, x_t): \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mapeia $\mathbb{R} \times (\text{conjuntos delimitados em } \mathcal{C})$ em conjuntos delimitados no \mathbb{R}^n , e que $u, v, w: \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ são funções não-decrescentes contínuas, onde $u(\tau)$ e $v(\tau)$ são positivas para $\tau > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$.*

- *Se existe um funcional diferenciável contínuo $V: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c)$$

e

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|),$$

então a solução de $f(t, x_t)$ é uniformemente estável.

- *Se a solução trivial de $f(t, x_t)$ é uniformemente estável, e $w(\tau) > 0$ para $\tau > 0$, então, a solução trivial de $f(t, x_t)$ é uniformemente assintoticamente estável.*
- *Se a solução trivial de $f(t, x_t)$ é uniformemente assintoticamente estável e se $\lim_{\tau \rightarrow \infty} u(\tau) = \infty$, então, a solução trivial de $f(t, x_t)$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma desigualdade matricial linear ou LMI é definida como

$$G(x) \triangleq G_0(x) + \sum_{i=1}^n x_i G_i > 0 \quad (2.1)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ as variáveis a serem determinadas e as matrizes simétricas $G_i = G_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ conhecidas [7]. Com o propósito de ilustração, considere $x = [x_1 \ x_2]^T$. Se a LMI $G(x)$ for definida positiva, o conjunto de soluções é convexo, ou seja

$$G[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = [\alpha G(x_1) + (1 - \alpha)G(x_2)] > 0, \quad (2.2)$$

com $\alpha > 0$ e $(1 - \alpha) > 0$. Portanto, a LMI é dita ser viável ou factível [29].

A inequação (2.1) pode representar restrições convexas em x , como por exemplo, desigualdades lineares, quadráticas, de norma matricial e restrições presentes em sistemas de controle, como um limitante para a norma H_∞ [7].

2.3 Matrizes de Livre Ponderação

Para se obter as condições de estabilidade utilizando LMIs, há duas soluções viáveis [28]:

1. Substituir o termo $\dot{x}(t)$, presente na derivada do FLK, pela dinâmica do sistema;
2. Manter o termo $\dot{x}(t)$ na derivada do FLK e usar matrizes de livre ponderação (FWMs, do inglês) para expressar a relação entre os termos da dinâmica do sistema.

O primeiro método impõe serias dificuldades à formulação, por meio de LMIs, das condições de estabilidade utilizando funcionais de Lyapunov-Krasovskii. Quando se faz a substituição mencionada acima, a LMI resultante traz o acoplamento entre as matrizes do sistema e as matrizes de Lyapunov presentes na derivada

do funcional. Este produto de variáveis de otimização pode tornar o problema não-linear inviabilizando o uso de LMIs. Para elucidar esta dificuldade, a seguir, serão derivadas as condições de estabilidade por ambos os métodos.

Considere que a dinâmica de um sistema é representada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d(t - \tau), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Agora, considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Qx(s)ds,\tag{2.4}$$

onde P e Q são matrizes a serem determinadas. A partir da substituição de $\dot{x}(t)$, dado pelo sistema (2.3), na derivada do funcional (2.4), pode-se enunciar os seguintes teoremas.

Teorema 2.2. [28] *Considere o sistema dado por (2.3). Seja $\tau > 0$ representando um retardo constante no tempo. Então, o sistema em (2.3) é assintoticamente estável se existirem matrizes $P > 0$, $Q > 0$, e se a LMI a seguir for satisfeita*

$$\Xi = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_d \\ * & -Q \end{bmatrix} < 0.\tag{2.5}$$

Demonstração: Derivando o funcional (2.4) ao longo de suas trajetórias e substituindo $\dot{x}(t)$ pela dinâmica do sistema (2.3) obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= x^T(t)[PA + A^T P]x(t) + 2x^T PA_d x(t - \tau) \\ &\quad + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ \dot{V}(x_t) &= \lambda^T \Xi \lambda,\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $\lambda^T = [x^T(t) \ x^T(t - \tau)]$ e Ξ é dado pela LMI (2.5). □

O teorema apresentado a seguir é obtido sem fazer a substituição do termo $\dot{x}(t)$ pela dinâmica do sistema. Ao invés de substituir este termo, será adicionado a $\dot{V}(x_t)$, o seguinte termo nulo:

$$2[x^T(t)X_1 + \dot{x}^T(t)X_2][\dot{x}(t) - Ax(t) - A_d(x - \tau)] = 0. \quad (2.7)$$

Este procedimento adiciona a informação da dinâmica do sistema a derivada do funcional. Agora pode-se enunciar o teorema para as condições de estabilidade do sistema (2.3).

Teorema 2.3. [28] *Considere o sistema dado por (2.3). Seja $\tau > 0$ representando um retardo constante no tempo. Então, o sistema em (2.3) é assintoticamente estável se existirem matrizes $P > 0$, $Q > 0$, quaisquer matrizes de dimensões apropriadas X_1 , X_2 e se a LMI a seguir for satisfeita*

$$\Xi_n = \begin{bmatrix} Q - X_1A - A^T X_1^T & P + X_1 - A^T X_2^T & -X_1A_d \\ * & X_2 + X_2^T & -X_2A_d \\ * & * & -Q \end{bmatrix} < 0, \quad (2.8)$$

Demonstração: Derivando o funcional (2.4) ao longo de suas trajetórias e adicionando a $\dot{V}(x_t)$ o termo nulo dado em (2.7) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ &+ 2[x^T(t)X_1 + \dot{x}^T(t)X_2][\dot{x}(t) - Ax(t) - A_d(x - \tau)] \\ &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ &+ 2x^T(t)X_1\dot{x}(t) - 2x^T(t)X_1Ax(t) - 2x^T(t)X_1A_dx(t - \tau) \\ &+ 2\dot{x}^T(t)X_2\dot{x}(t) - 2\dot{x}^T(t)X_2Ax(t) - 2\dot{x}^T X_2A_dx(t - \tau) \\ \dot{V}(x_t) &= \lambda^T \Xi_n \lambda, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $\lambda^T = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t) \ x^T(t - \tau)]$ e Ξ_n é dado pela LMI (2.8). \square

As condições obtidas usando FWMs expressam as relações entre os termos das equações de estado do sistema separadas das matrizes de Lyapunov. Isto permite uma maior flexibilidade para o algoritmo na busca de uma solução viável, visto que a variável matricial P não está mais associada as matrizes A e A_d que representam a dinâmica do sistema.

Esta vantagem se torna maior no caso de síntese de controlador, pois neste caso ao menos uma matriz do sistema em malha fechada é desconhecida. Assim o produto entre a variável P e a matriz do sistema que depende da matriz de ganhos do controlador, também uma variável do problema de otimização, pode tornar o problema não-linear, impossibilitando o uso direto da formulação LMI. Ademais, vale mencionar que os teoremas apresentados acima consideram um FLK simples com apenas duas variáveis matriciais P e Q . Portanto, o problema de acoplamento entre as matrizes do FLK e do sistema aumenta a medida que o FLK contém mais variáveis matriciais.

2.4 Desigualdade de Jensen

A Desigualdade de Jensen, dada pelo Lema 2.1, é uma ferramenta matemática utilizada no contexto de análise de estabilidade de sistemas que utilizam funcionais de Lyapunov-Krasovskii escritos na forma de LMIs. Esta inequação é uma ferramenta matemática muito viável para escrever as condições de estabilidade no formato de LMI. Para facilitar o entendimento da aplicação desta técnica serão derivadas as condições de estabilidade utilizando a referida desigualdade no sistema dado em (2.3).

Lema 2.1. [11] *Para qualquer matriz $M = M^T > 0$ constante e um escalar $\tau > 0$ a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\int_{t-\tau}^t x^T(\xi) M x(\xi) d\xi \geq \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi \frac{1}{\tau} M \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi.$$

Considere o sistema dado em (2.3) e o FLK candidato

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(s)ds + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Sx(s)ds, \quad (2.10)$$

onde P , Q e S são matrizes a serem determinadas. O teorema de estabilidade para este funcional, o qual pode ser visto como um caso particular do teorema 2 apresentado em [14], é enunciado a seguir.

Teorema 2.4. *Considere o sistema dado por (2.3). Seja $\tau > 0$ representando um retardo constante no tempo. Então, o sistema em (2.3) é assintoticamente estável se existirem matrizes $P = P^T$, Q , $S = S^T$, X_1 e X_2 tais que as LMIs, a seguir, sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} > 0, \quad (2.11)$$

$$\Xi_j = \begin{bmatrix} \Theta & P + X_1 - A^T X_2^T & -X_1 A_d - Q \\ * & X_2 + X_2^T & -X_2 A_d \\ * & * & -S \end{bmatrix} < 0, \quad (2.12)$$

com $\Theta = Q + Q^T - X_1 A - A^T X_1^T + S$.

Demonstração: Aplicando a desigualdade de Jensen no último termo em (2.10) obtem-se

$$\begin{aligned} V(x_t) &\geq x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(s)ds \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t x^T(s)ds S \int_{t-\tau}^t x(s)ds \\ &\geq \sigma^T \begin{bmatrix} P & Q \\ * & \frac{1}{\tau}S \end{bmatrix} \sigma \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\sigma^T = [x^T(t) \int_{t-\tau}^t x^T(s)ds]$.

Agora, derivando o funcional (2.10) ao longo de suas trajetórias e adicionando o termo nulo (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= \lambda^T \Xi_n \lambda + x^T(t) Q x(t) + x^T(t - \tau) Q x(t - \tau) \\ &\quad - x^T(t) Q x(t - \tau) - x^T(t - \tau) Q^T x(t) \\ &\quad + x^T(t) S x(t) - x^T(t - \tau) S x(t - \tau) \\ \dot{V}(x_t) &= \lambda^T \Xi_j \lambda,\end{aligned}\tag{2.14}$$

onde $\lambda^T = [x^T(t) \dot{x}^T(t) x^T(t - \tau)]$, Ξ_n é dado em (2.8) e Ξ_j é dado pela LMI (2.12). \square

2.5 Complemento de Shur

O complemento de Schur, descrito pelo lema 2.2, é frequentemente utilizado em análise de estabilidade de sistemas de controle que fazem uso de desigualdades matriciais. Isto acontece, porque em muitos casos as condições de estabilidade apresentam inequações matriciais quadráticas. Uma possível e simples maneira de transformá-las em LMIs é utilizar o complemento de Schur.

Lema 2.2. [8] *Seja X uma matriz bloco simétrica dada por*

$$X = \begin{bmatrix} C & D \\ D^T & E \end{bmatrix},\tag{2.15}$$

1. *Se E é inversível, então $X < 0$ se e somente se $E < 0$ e $C - DE^{-1}D^T < 0$;*
2. *Se C é inversível, então $X < 0$ se e somente se $C < 0$ e $E - D^T C^{-1} D < 0$.*

Para ilustrar o uso do complemento de Schur, considere o problema de controle ótimo LQR e a conhecida inequação de Riccati

$$A^T P + PA + Q + PBR^{-1}B^T P < 0,\tag{2.16}$$

onde $P > 0$, Q e $R > 0$ são matrizes a serem determinadas.

Note que o termo $PBR^{-1}B^T P$ é quadrático, pois a variável matricial P aparece duas vezes. Considere $C = A^T P + PA + Q$, $D = PB$ e $E = -R$. Agora, aplicando o complemento de Schur em (2.16), de acordo com o item (1), obtem-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ * & -R \end{bmatrix} < 0. \quad (2.17)$$

Capítulo 3

Formulação do Problema

Este capítulo apresenta a modelagem matemática do problema que será tratado no decorrer da dissertação. O problema consiste em projetar controladores PID para sistemas de segunda ordem sujeitos a retardo variante no tempo. O ponto de partida é reescrever na forma de espaço de estados a função de transferência do sistema. Isto permite a utilização do formalismo de Lyapunov-Krasovskii, bem como criar condições de análise de estabilidade via LMIs. Resumidamente, pode-se dividir a formulação do problema em três passos:

1. Definição das funções de transferências do controlador e do processo no domínio da frequência;
2. Reescrever o problema na forma de espaço de estados;
3. Encontrar o modelo matemático em espaço de estados que representa o comportamento em malha fechada do sistema.

O primeiro passo consiste em definir a estrutura de controle e a função de transferência que representa o processo a ser controlado. Como o objetivo é controlar

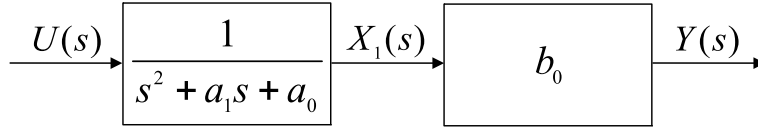


Figura 3.1: Função de transferência de malha aberta.

sistemas de segunda ordem, serão consideradas funções de transferência estritamente próprias escritas da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-\tau s}. \quad (3.1)$$

A princípio não será considerado o retardo no tempo na formulação do problema. Este será inserido ao final do desenvolvimento como um atraso na entrada de controle $u(t)$. A equação (3.1) sem o retardo no tempo pode ser decomposta em duas funções de transferência em cascata, assim como é mostrado na figura 3.1.

A primeira equação relaciona a entrada $U(s)$ com a variável de estado $X_1(s)$ e algebricamente é escrita como

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (3.2)$$

A segunda equação relaciona a variável de estado $X_1(s)$ com a saída do sistema $Y(s)$ e é escrita como

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = b_0. \quad (3.3)$$

Como se pretende realizar o projeto do controlador computacionalmente, de forma a tratar o problema utilizando LMIs, é necessário escrever o problema na forma de espaço de estados. Reescrevendo a equação (3.2) como

$$s^2 X_1(s) = (-a_1 s - a_0) X_1(s) + U(s) \quad (3.4)$$

e passando (3.4) para o domínio do tempo, obtem-se a seguinte equação diferencial

$$\ddot{x}_1(t) = -a_1\dot{x}_1(t) - a_0x_1(t) + u(t). \quad (3.5)$$

Fazendo o mesmo para (3.3), obtem-se a seguinte equação para a saída do sistema

$$y(t) = b_0x_1(t). \quad (3.6)$$

Para escrever o conjunto de equações diferenciais que representam o sistema na forma de espaço de estados, define-se as variáveis de estado como: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ e $\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$. Substituindo-as nas equações (3.5) e (3.6), determina-se as equações de estado como

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x_2(t) - a_0x_1(t) + u(t), \quad (3.8)$$

$$y(t) = b_0x_1(t). \quad (3.9)$$

As equações (3.7), (3.8) e (3.9) são escritas na forma matricial para representar o sistema em malha aberta na forma de espaço de estados como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.10)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

ou ainda, na forma compacta como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

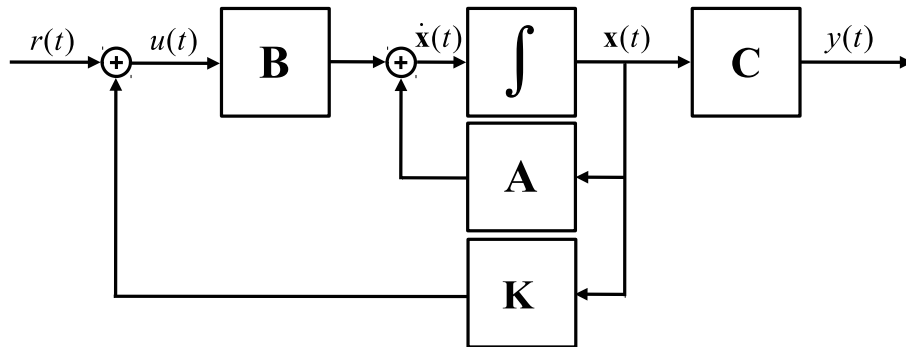


Figura 3.2: Representação em espaço de estados da planta em malha fechada.

O projeto de controladores típicos em espaço de estados é realizado pela realimentação dos estados, de modo que para cada estado realimentado existe um ganho K_j regulável, ajustado para que o sistema em malha fechada seja estável, como é mostrado na figura 3.2.

No entanto, o esquema de controle da figura 3.2 tem o inconveniente de apresentar erro de estado estacionário. Como alternativa para solução deste problema, faz-se a realimentação da saída para a referência. Um controlador PID é inserido no caminho direto entre a referência $r(t)$ e a entrada da planta $u(t)$, conforme ilustrado na figura 3.3. A inserção do PID faz a ordem do sistema aumentar e permite reduzir o erro de estado estacionário a zero para entrada de referência constante, devido à presença do integrador. Assim, por inspeção da figura 3.3 pode-se reescrever as equações de estado como

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\
 \dot{x}_3(t) &= r(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\
 y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

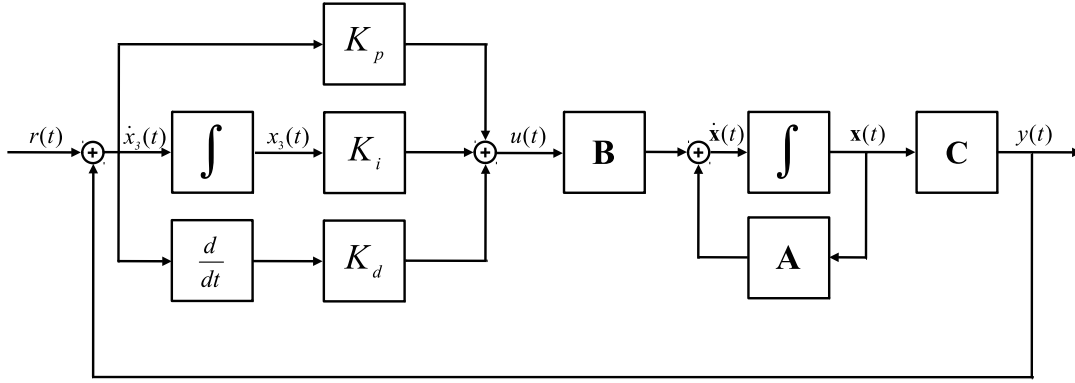


Figura 3.3: Representação em espaço de estados da planta em malha fechada com integrador.

Considerando o sistema de equações (3.13) e $r(t) = 0$, pode-se reescrever as equações de estado na forma matricial aumentada como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (3.14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Neste caso a entrada de controle $u(t)$ é dada por

$$u(t) = K_p y(t) + K_i \int y(t) dt + K_d \dot{y}(t). \quad (3.16)$$

Expandindo o sistema de equações dado por (3.14) e (3.15), obtem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.17)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

onde $x_3(t) = \int y(t)dt$. A lei de controle (3.16) pode ser reescrita em função das variáveis de estado. Para tanto, é necessário fazer as devidas substituições como segue abaixo:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p b_0 x_1(t) + K_i x_3(t) + K_d b_0 \dot{x}_1(t) \\ &= K_p b_0 x_1(t) + K_i x_3(t) + K_d b_0 x_2(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Considerando realimentação positiva, pode-se reescrever a equação (3.19) na forma matricial como

$$u(t) = \mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{x}(t), \quad (3.20)$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_p & K_d & K_i \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

e

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

A partir deste ponto, pode-se escrever a representação em espaço de estados, ilustrada na figura 3.4, do sistema de segunda ordem com retardo no tempo. Basta substituir (3.20) no sistema de equações (3.12) na forma aumentada para obter

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d x(t-d(t)) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

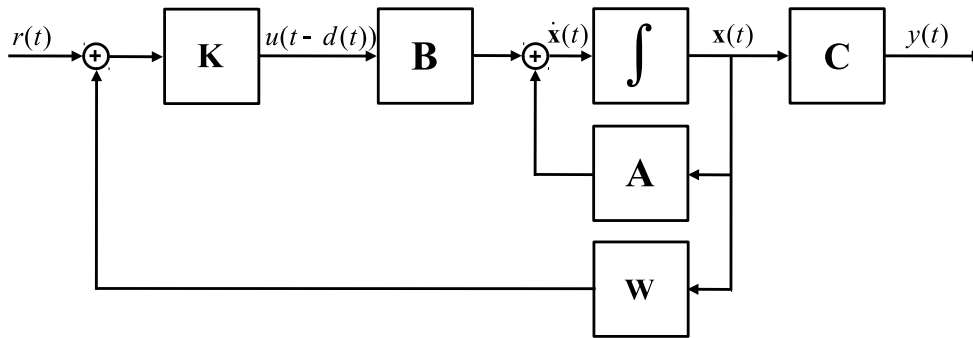


Figura 3.4: Representação em espaço de estados da planta em malha fechada com controlador PID e retardo no tempo.

onde $A_d = \mathbf{BKW}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

O atraso presente no ganho de malha da função de transferência (3.1) é considerado por meio do sinal de controle $u(t - d(t))$. O atraso é modelado como sendo $d(t) = \tau + \mu(t)$, representando um retardo variante no tempo, sendo τ o valor nominal do retardo e $\mu(t)$ uma função escalar variante no tempo satisfazendo: $\mu(t) \leq |\mu(t)| \leq \tau$. Vale ressaltar que o retardo variante no tempo $d(t)$ não tem nenhuma restrição quanto a sua forma, podendo ser até uma função não-diferenciável no tempo.

Capítulo 4

Metodologia de Projeto

Inicialmente são apresentadas as condições de análise de estabilidade do sistema (3.23) com taxa de convergência exponencial garantida. Em seguida estas condições serão utilizadas como ponto de partida para o desenvolvimento de um novo método para síntese de controladores PID para sistemas de segunda ordem sujeitos a retardo no tempo como em (3.1). Considerando a necessidade de garantir a estabilidade do sistema (3.23) para uma determinada taxa de decaimento exponencial, propõem-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii que apresenta termos exponenciais. Assim, torna-se possível obter um método capaz de impor uma taxa de convergência exponencial, intimamente associada ao tempo de acomodação do sistema controlado. O FLK candidato a solução do problema de estabilidade é dado por:

$$V(x_t) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5, \quad (4.1)$$

onde

$$V_1(x_t) = e^{2\delta t} x^T(t) P x(t), \quad (4.2)$$

$$V_2(x_t) = 2e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Q x(\xi) d\xi, \quad (4.3)$$

$$V_3(x_t) = \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+\xi)} x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi, \quad (4.4)$$

$$V_4(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds, \text{ e} \quad (4.5)$$

$$V_5(x_t) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds. \quad (4.6)$$

no qual x_t corresponde ao valor de $x(s)$ com $s \in [t - \tau - \mu, t]$, δ é um escalar que corresponde a taxa de convergência exponencial, $\hat{x}^T(\xi) = \begin{bmatrix} x^T(\xi) & \dot{x}^T(\xi) \end{bmatrix}$, $P = P^T$, $S = S^T$, Q , $R_1 = R_1^T$, R_2 , $R_3 = R_3^T$, $Z = Z^T$ são matrizes de dimensão $n \times n$ e

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix},$$

uma matriz $2n \times 2n$. Ressalta-se que o funcional em (4.1) é uma extensão do funcional apresentado em [14] devido a adição dos termos exponenciais. Portanto o resultado a ser desenvolvido neste trabalho é uma generalização do método apresentado em [14] por apresentar um parâmetro ajustável que insere um índice de desempenho ao projeto do controlador.

A partir deste funcional pode-se escrever condições LMIs que garantem a estabilidade do sistema representado em (3.23). O teorema de Lyapunov-Krasovskii determina que para um sistema ser estável é necessário que um FLK quadrático respeite as seguintes condições:

$$V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|^2, \quad (4.7)$$

e

$$\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|^2, \quad (4.8)$$

sendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

A definição de taxa de convergência exponencial utilizada nesta dissertação é exposta a seguir.

Definição 4.1. *O sistema em (3.23) converge com taxa de decaimento exponencial δ se*

$$\|x(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.9)$$

sendo $x(t)$ dado em (3.23) e κ um escalar positivo com valor apropriado.

Na próxima seção são propostas condições LMIs que verificam de forma suficiente se as condições em (4.7), (4.8) e (4.9) são satisfeitas.

4.1 Análise de Estabilidade

O teorema 4.1 mostrado a seguir é proposto para verificar de forma suficiente a condição (4.7) e (4.8).

Teorema 4.1. *Considere o sistema em (3.23). Sejam dados $\tau > 0$ e $0 \leq \mu \leq \tau$, tal que $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, e $\delta > 0$, a taxa de convergência exponencial. Então, o sistema em (3.23) com $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$ é exponencialmente estável, com taxa de convergência exponencial δ , se existirem matrizes de dimensões apropriadas: $F, G, P = P^T, S = S^T, Q, R_1 = R_1^T, R_2, R_3 = R_3^T$ e $Z = Z^T$, tais que as LMIs abaixo sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} P & * \\ Q^T & \varepsilon_1 S \end{bmatrix} > 0, \quad (4.10)$$

sendo $\varepsilon_1 = e^{-2\delta\tau}/\tau$,

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} R_1 & * \\ R_2 & R_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.11)$$

e

$$\left[\begin{array}{c|c} \Xi & * \\ \Gamma^T & -\varepsilon_2^{-1} \mu Z \end{array} \right] < 0, \quad (4.12)$$

com $\varepsilon_2 = e^{2\delta(\tau+\mu)}$, $\Gamma^T = \mu[A_d^T F^T \quad A_d^T G^T \quad 0 \quad 0]$, Ξ dado logo a seguir por (4.13), onde $\mathcal{F} = 2\delta P + Q + Q^T + \tau R_1 - \varepsilon_1 R_3 + S + \varepsilon_2(FA + A^T F^T)$ e $\mathcal{G} = \tau R_3 + 2\mu Z -$

$\varepsilon_2(G + G^T)$.

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathcal{F} & * & * & * \\ P + \tau R_2 - \varepsilon_2(F^T - GA) & \mathcal{G} & * & * \\ \varepsilon_1 R_3^T - Q^T + \varepsilon_2 A_d^T F^T & \varepsilon_2 A_d^T G^T & -\varepsilon_1(R_3 + \tau S) & * \\ 2\delta Q^T - \varepsilon_1 R_2^T & Q^T & \varepsilon_1 R_2^T & -\varepsilon_1 R_1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Demonstração: Primeiramente, é demonstrado que o funcional em (4.1) satisfaz

a condição $V(x_t) \geq \varepsilon \|x(t)\|$, $\forall \varepsilon > 0$.

Assumindo que $S > 0$, implícito em (4.10), e aplicando a desigualdade de Jensen,

tem-se:

$$\begin{aligned} V(x_t) &\geq e^{2\delta t} x^T(t) P x(t) \\ &\quad + 2e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Q x(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{e^{2\delta(t-\tau)}}{\tau} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi S \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds \\ &\geq e^{\delta t} x^T(t) P e^{\delta t} x(t) \\ &\quad + e^{\delta t} x^T(t) Q e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi \\ &\quad + e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi Q^T e^{\delta t} x(t) \\ &\quad + e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi \left(\frac{e^{-2\delta\tau}}{\tau}\right) S e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t+\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\ &\quad + \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \eta^T \begin{bmatrix} P & * \\ Q^T & \varepsilon_1 S \end{bmatrix} \eta \\
&+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\
&+ \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sendo $\eta^T = \left[e^{\delta t} x^T(t) \quad e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t+\xi) d\xi \right]$.

Na LMI (4.12) a matriz Z aparece na diagonal principal com sinal negativo, assim (4.12) < 0 se e somente se $Z > 0$. Note que, as LMIs (4.10), (4.11) e (4.12) garantem, respectivamente, que os três termos do lado direito da desigualdade (4.14) sejam positivos. Portanto, se as LMIs em (4.10), (4.11) e (4.12) forem satisfeitas tem-se que $V(x_t) \geq \epsilon \|x(t)\|$ ($\epsilon > 0$).

Para completar a prova, será demonstrado também que o funcional satisfaz a condição: $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|$ ($\epsilon > 0$) se as LMIs em (4.11) e (4.12) forem asseguradas.

Derivando o funcional (4.1) ao longo de suas trajetórias, encontra-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x_t) &= \frac{d}{dt} [\delta e^{2\delta t}] x^T(t) P x(t) + e^{2\delta t} \frac{d}{dt} [x^T(t) P x(t)] \\
&= 2\delta e^{2\delta t} x^T(t) P x(t) + e^{2\delta t} [\dot{x}^T(t) P x(t) + x(t)^T(t) P \dot{x}(t)] \\
&= 2\delta e^{2\delta t} x^T(t) P x(t) + e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) P x(t) + e^{2\delta t} x(t)^T(t) P \dot{x}(t) \\
&= e^{\delta t} x^T(t) 2\delta P e^{\delta t} x(t) + e^{\delta t} \dot{x}^T(t) P e^{\delta t} x(t) + e^{\delta t} x(t)^T(t) P^T e^{\delta t} \dot{x}(t) \\
&= \zeta^T \begin{bmatrix} 2\delta P & * & * & * \\ P & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x_t) &= \frac{d}{dt}[2e^{2\delta t}]x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi + 2e^{2\delta t} \frac{d}{dt}[x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi] \\
&= 4\delta e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi + 2e^{2\delta t} [\dot{x}^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t) \frac{d}{dt} \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi] \\
&= 4\delta e^{2\delta t} x^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi + 2e^{2\delta t} [\dot{x}^T(t) \int_{t-\tau}^t Qx(\xi)d\xi \\
&\quad + x^T(t)(Qx(t) - Qx(t - \tau))] \\
&= 4\delta e^{2\delta t} x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t + \xi)d\xi + 2e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t + \xi)d\xi \\
&\quad + 2e^{2\delta t} x^T(t)Qx(t) - 2e^{2\delta t} x^T(t)Qx(t - \tau) \\
&= e^{\delta t} x^T(t) 2\delta Q e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi)d\xi + e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi)d\xi 2\delta Q^T e^{\delta t} x(t) \\
&\quad + e^{\delta t} \dot{x}^T(t) Q e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi)d\xi + e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi)d\xi Q^T e^{\delta t} \dot{x}(t) \\
&\quad + e^{\delta t} x^T(t) Q e^{\delta t} x(t) + e^{\delta t} x^T(t) Q^T e^{\delta t} x(t) - e^{\delta t} x^T(t) Q e^{\delta t} x(t - \tau) \\
&\quad - e^{\delta t} x^T(t - \tau) Q^T e^{\delta t} x(t) \\
&= \zeta^T \begin{bmatrix} Q + Q^T & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ -Q^T & 0 & 0 & * \\ 2\delta Q^T & Q^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3(x_t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta(t+\xi)} x^T(t+\xi) S x(t+\xi) d\xi \\
&= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 f(t+\xi) d\xi \\
&= \frac{d}{dt} [F(t+\xi)]_{-\tau}^0 \\
&= f(t) - f(t-\tau) \\
&= e^{2\delta t} x^T(t) S x(t) - e^{2\delta(t-\tau)} x^T(t-\tau) S x(t-\tau) \\
&= e^{\delta t} x^T(t) S e^{\delta t} x(t) + e^{\delta t} x^T(t-\tau) (-e^{-2\delta\tau}) S e^{\delta t} x(t-\tau) \\
&= \zeta^T \begin{bmatrix} S & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & -\varepsilon_1 \tau S & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta, e
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}_4(x_t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi ds \\
&= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t f(\xi) d\xi ds \\
&= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 F(t) - F(t+s) ds \\
&= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 F(t) ds - \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 F(t+s) ds \\
&= \frac{d}{dt} (F(t)[s]_{-\tau}^0) - \int_{-\tau}^0 \frac{d}{dt} F(t+s) ds \\
&= \tau f(t) - \int_{-\tau}^0 f(t+s) ds \\
&= \tau e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \hat{R} \hat{x}(t) - \int_{t-\tau}^t f(\xi) d\xi \\
&= \tau e^{2\delta t} \hat{x}^T(t) \hat{R} \hat{x}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \hat{x}^T(\xi) \hat{R} \hat{x}(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

com

$$\zeta^T = e^{\delta t} \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) & x^T(t - \tau) & \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) ds \end{bmatrix}.$$

Aplicando o lema 2.1 em (4.18) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(x_t) &\leq \tau e^{\delta t} \hat{x}^T(t) \hat{R} e^{\delta t} \hat{x}(t) - e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 \hat{x}^T(t + \xi) d\xi \left(\frac{e^{-2\delta\tau}}{\tau} \right) \hat{R} e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 \hat{x}(t + \xi) d\xi \\ &\leq e^{\delta t} \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau R_1 & * \\ \tau R_2 & \tau R_3 \end{bmatrix} e^{\delta t} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) d\xi \varepsilon_2 R_1 e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi) d\xi \\ &\quad - e^{\delta t} x^T(t) \varepsilon_2 R_2^T e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi) d\xi + e^{\delta t} x^T(t - \tau) \varepsilon_2 R_2^T e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi) d\xi \\ &\quad - e^{\delta t} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) d\xi \varepsilon_2 R_2 e^{\delta t} [x(t) - x(t - \tau)] \\ &\quad - e^{\delta t} [x^T(t) - x^T(t - \tau)] \varepsilon_2 R_3 e^{\delta t} [x(t) - x(t - \tau)] \\ &\leq e^{\delta t} \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau R_1 & * \\ \tau R_2 & \tau R_3 \end{bmatrix} e^{\delta t} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad - e^{\delta t} \begin{bmatrix} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \xi) d\xi \\ (x^T(t) - x^T(t - \tau)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_2 R_1 & * \\ \varepsilon_2 R_2 & \varepsilon_2 R_3 \end{bmatrix} e^{\delta t} \begin{bmatrix} \int_{-\tau}^0 x(t + \xi) d\xi \\ (x(t) - x(t - \tau)) \end{bmatrix} \\ &\leq \lambda^T \begin{bmatrix} \tau R_1 & * \\ \tau R_2 & \tau R_3 \end{bmatrix} \lambda + \zeta^T \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 R_3 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 R_3 & * \\ -\varepsilon_2 R_2^T & 0 & \varepsilon_2 R_2^T & -\varepsilon_2 R_1 \end{bmatrix} \zeta \\ &\leq \zeta^T \begin{bmatrix} \tau R_1 - \varepsilon_2 R_3 & * & * & * \\ \tau R_2 & \tau R_3 & * & * \\ \varepsilon_2 R_3^T & 0 & -\varepsilon_2 R_3 & * \\ -\varepsilon_2 R_2^T & 0 & \varepsilon_2 R_2^T & -\varepsilon_2 R_1 \end{bmatrix} \zeta, \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $\lambda^T = e^{\delta t} \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}$.

Deriva-se o último termo do funcional para obter

$$\dot{V}_5(x_t) = \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds.$$

Para simplificar a notação, considere:

$$\dot{f}(\xi) = e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds,$$

assim, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \dot{V}_5(x_t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t \dot{f}(\xi) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} f(t) - f(t+s-\tau) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} f(t) ds - \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} f(t+s-\tau) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-\mu}^{\mu} f(t) ds - \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d}{dt} f(t+s-\tau) ds \\ &= \dot{f}(t)[s]_{-\mu}^{\mu} - \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d}{dt} f(t+s-\tau) ds \\ &= \dot{f}(t)[\mu - (-\mu)] - \int_{-\mu}^{\mu} \frac{d}{dt} f(t+s-\tau) ds \\ &= 2\mu \dot{f}(t) - \int_{-\mu}^{\mu} \dot{f}(t+s-\tau) ds \\ &= 2\mu e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{-\mu}^{\mu} \dot{f}(t+s-\tau) ds \\ &= 2\mu e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{f}(s) ds \end{aligned}$$

Finalmente, considerando a definição de $\dot{f}(\xi)$, temos:

$$\dot{V}_5(x_t) = 2\mu e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} e^{2\delta s} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds. \quad (4.20)$$

Agora para inserir a dinâmica do sistema (3.23) no problema de estabilidade, ao invés de substituir a variável $\dot{x}(t)$ do funcional, adiciona-se o termo nulo (4.21) a derivada do funcional (4.1). O termo nulo é expresso como

$$\begin{aligned}
0 &= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)}[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \times [-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-d(t))] \\
&= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)}[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \times \left[-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d \left(x(t-\tau) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{-d(t)}^{-\tau} \dot{x}(t+\xi)d\xi \right) \right] \\
&= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)}[x^T(t)F + \dot{x}^T(t)G] \times [-\dot{x}(t) + Ax(t) + A_d x(t-\tau)] + v(t) \\
&= 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)}[-x^T(t)F\dot{x}(t) + x^T(t)FAx(t) + x^T(t)FA_d x(t-\tau) \\
&\quad - \dot{x}^T(t)G\dot{x}(t) + \dot{x}^T(t)GAx(t) + \dot{x}^T(t)GA_d x(t-\tau)] + v(t), \tag{4.21}
\end{aligned}$$

onde

$$v(t) = -2\Lambda A_d \int_{-d(t)}^{-\tau} e^{\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}(t+\xi) d\xi \tag{4.22}$$

com

$$\Lambda = e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \begin{bmatrix} x^T(t)F & \dot{x}^T(t)G \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Portanto, pode-se reescrever $\dot{V}(x_t)$ como

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &\leq \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) + \dot{V}_4(x_t) + \dot{V}_5(x_t) \\
&\leq \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) + \dot{V}_4(x_t) + e^{\delta t} \dot{x}^T(t) 2\mu Z e^{\delta t} \dot{x}(t) \\
&\quad - \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} e^{2\delta s} \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds + 2e^{2\delta(t-\tau-\mu)} [-x^T(t)F\dot{x}(t) \\
&\quad + x^T(t)FAx(t) + x^T(t)FA_d x(t-\tau) - \dot{x}^T(t)G\dot{x}(t) \\
&\quad + \dot{x}^T(t)GAx(t) + \dot{x}^T(t)GA_d x(t-\tau)] + v(t) \\
&\leq \dot{V}_1(x_t) + \dot{V}_2(x_t) + \dot{V}_3(x_t) + \dot{V}_4(x_t) + v(t) \\
&\quad + \zeta^T \begin{bmatrix} \varepsilon_2(F A + A^T F^T) & * & * & * \\ \varepsilon_2(-F^T + GA) & 2\mu Z - \varepsilon_2(G + G^T) & * & * \\ \varepsilon_2 A_d^T F^T & \varepsilon_2 A_d^T G^T & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \zeta. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Aplicando em (4.22) a desigualdade

$$2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b \quad (4.25)$$

com $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \int_{-d(t)}^{-\tau} (\Lambda A_d) Z^{-1} (\Lambda A_d)^T d\xi \\ &+ \int_{-\tau(t)}^{-\tau} e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \dot{x}^T(t+\xi) Z \dot{x}(t+\xi) d\xi \\ &\leq \mu (\Lambda A_d) Z^{-1} (\Lambda A_d)^T \\ &+ e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(t+\xi) Z \dot{x}(t+\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.24), temos o seguinte limitante superior para $\dot{V}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \zeta^T \Xi \zeta + \mu (\Lambda A_d) Z^{-1} (\Lambda A_d)^T \\ &\leq \zeta^T \left(\Xi + \Gamma (\mu e^{2\delta(\tau+\mu)} Z)^{-1} \Gamma^T \right) \zeta \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo Ξ dado em (4.13), Λ conforme (4.23) e $\Gamma^T = \mu [A_d^T F^T \quad A_d^T G^T \quad 0 \quad 0]$.

Assim, para garantir que $\dot{V}(x_t) < 0$ para qualquer $\zeta \neq 0$ é suficiente impor que o lado direito da desigualdade em (4.27) seja negativo, ou seja,

$$\Xi + \Gamma (\mu e^{2\delta(\tau+\mu)} Z)^{-1} \Gamma^T < 0.$$

Portanto, pelo complemento de Schur, satisfazer a desigualdade anterior e $Z > 0$ equivalente a satisfazer a desigualdade

$$\left[\begin{array}{c|c} \Xi & * \\ \hline \Gamma^T & -(e^{2\delta(\tau+\mu)})^{-1} \mu Z \end{array} \right] < 0. \quad (4.28)$$

Então se a desigualdade (4.28) for satisfeita a condição: $\dot{V}(x_t) \leq -\epsilon \|x(t)\|$ ($\epsilon > 0$) também será satisfeita.

Finalmente, resta demonstrar que a condição em (4.9) também será satisfeita se as condições do teorema 4.1 forem satisfeitas. Portanto, será mostrado que se as LMIs em (4.10), (4.11) e (4.12) forem satisfeitas, o sistema em (3.23) é exponencialmente estável com taxa de convergência δ .

Usando a desigualdade (4.25) segue que

$$2e^{\delta t} x^T(t) \int_{-\tau}^0 Qx(t+\xi) d\xi \leq \int_{-\tau}^0 x^T(t) e^{\delta t} QIQ^T e^{\delta t} x(t) d\xi + \int_{-\tau}^0 x^T(\xi) e^{\delta t} I e^{\delta t} x(\xi) d\xi \quad (4.29)$$

Assim, o FLK (4.1) tem o seguinte limitante superior

$$\begin{aligned} V(x_t) &\leq e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{P\} \|x(t)\|^2 + \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \|x(\xi)\|^2 d\xi \\ &+ \tau \lambda_{\max}\{QQ^T\} e^{2\delta t} \|x(t)\|^2 \\ &+ \tau \lambda_{\max}\{\hat{R}\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \|\hat{x}(\xi)\|^2 d\xi \\ &+ \lambda_{\max}\{S\} \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \|x(\xi)\|^2 d\xi \\ &+ (\tau + \mu) \lambda_{\max}\{\hat{Z}\} \int_{t-\tau-\mu}^t e^{2\delta\xi} \|\dot{x}(\xi)\|^2 d\xi \\ &= \bar{V}(x_t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

sendo $\lambda_{\max}\{\cdot\}$ o maior autovalor de uma matriz. Assumindo que as LMIs (4.10), (4.11) e (4.12) são satisfeitas, então $V(x_t) > 0$ e $\dot{V}(x_t) < 0$. Assim, tem-se que

$$0 \leq V(x_t) \leq V(x(0)) \leq \bar{V}(x_t)|_{t=0}. \quad (4.31)$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\bar{V}(x_0) &\leq \left\{ \lambda_{\max}\{P\} + \tau \lambda_{\max}\{QQ^T\} + \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{\max}\{S\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|x(\theta)\|\} \\
&\quad + \left\{ \tau \lambda_{\max}\{\hat{R}\} \int_{-\tau}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|\hat{x}(\theta)\|\} \\
&\quad + \left\{ (\tau + \mu) \lambda_{\max}\{Z\} \int_{-\tau-\mu}^0 e^{2\delta s} ds \right\} \\
&\quad \quad \times \sup_{-(\tau+\mu) \leq \theta \leq 0} \{\|\dot{x}(\theta)\|\} \\
&= \rho(\delta).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Por outro lado, tem-se

$$e^{2\delta t} \lambda_{\min} P \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \rho(\delta), \tag{4.33}$$

sendo $\lambda_{\min} P$ o menor autovalor da matriz P . Assim, a partir de (4.31), (4.32) e (4.33) tem-se

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\rho(\delta)}{\lambda_{\min} P}} e^{-\delta t} \triangleq \kappa e^{-\delta t}. \tag{4.34}$$

Portanto, o sistema em (2.3) é exponencialmente estável com taxa de convergência exponencial δ de acordo com a Definição 4.1, concluindo a demonstração. \square

4.2 Projeto do Controlador PID

Nesta seção o teorema apresentado na seção anterior é utilizado como base para obter o método de projeto de controladores PID que garantem uma taxa de convergência exponencial pré-especificada.

Teorema 4.2. *Sejam dados, $\tau > 0$, $\tau \geq \mu \geq 0$, tal que $d(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, $\delta > 0$ e $\alpha \neq 0$ um parâmetro de ajuste escalar. Então, o sistema com função de transferência em (3.1), é exponencialmente estabilizável com taxa de convergência exponencial δ pelo controlador PID com ganhos dados pela matriz $K = X\bar{F}^{-T}W^{-1}$ descrita em (3.21), se existirem matrizes de dimensões apropriadas: \bar{F} , $\bar{P} = \bar{P}^T$, $\bar{S} = \bar{S}^T$, \bar{Q} , $\bar{R}_1 = \bar{R}_1^T$, \bar{R}_2 , $\bar{R}_3 = \bar{R}_3^T$, $\bar{Z} = \bar{Z}^T$ e X , tais que as LMIs a seguir sejam satisfeitas*

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \bar{Q} \\ * & \varepsilon_1 \bar{S} \end{bmatrix} > 0, \quad (4.35)$$

sendo, $\varepsilon_1 = e^{-2\delta\tau}/\tau$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & * \\ \bar{R}_2 & \bar{R}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (4.36)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \bar{\Xi} & * \\ \hline \bar{\Gamma}^T & -\varepsilon_2^{-1}\mu\bar{Z} \end{array} \right] < 0, \quad (4.37)$$

com $\varepsilon_2 = e^{2\delta(\tau+\mu)}$, $\bar{\Gamma}^T = \mu[X^T B^T \ \alpha X^T B^T \ 0 \ 0]$, $\bar{\Xi}$ dado logo a seguir por (4.38), onde $\bar{\mathcal{F}} = 2\delta\bar{P} + \bar{Q} + \bar{Q}^T + \tau\bar{R}_1 - \varepsilon_1\bar{R}_3 + \bar{S} + \varepsilon_2(A\bar{F}^T + \bar{F}A^T)$ e $\bar{\mathcal{G}} = \tau\bar{R}_3 + 2\mu\bar{Z} - \varepsilon_2\alpha(\bar{F} + \bar{F}^T)$.

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{F}} & * & * & * \\ \bar{P} + \tau\bar{R}_2 - \varepsilon_2(\bar{F} - \alpha A\bar{F}^T) & \bar{\mathcal{G}} & * & * \\ \varepsilon_1\bar{R}_3^T - \bar{Q}^T + \varepsilon_2 X^T B^T & \varepsilon_2\alpha X^T B^T & -\varepsilon_1(\bar{R}_3 + \tau\bar{S}) & * \\ 2\delta\bar{Q}^T - \varepsilon_1\bar{R}_2^T & \bar{Q}^T & \varepsilon_1\bar{R}_2^T & -\varepsilon_1\bar{R}_1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Demonstração: Esta demonstração segue diretamente do Teorema 4.1, pois o sistema em (3.23) representa a dinâmica em malha fechada de um sistema com função de transferência em (3.1) controlado pelo PID dado por $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$.

Inicialmente, define-se as variáveis: $\bar{F} \triangleq F^{-1}$ e

$$[\bar{P} \quad \bar{Q} \quad \bar{S} \quad \bar{R}_1 \quad \bar{R}_2 \quad \bar{R}_3 \quad \bar{Z}] \triangleq \bar{F}[P \quad Q \quad S \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad Z]\bar{F}^T$$

Desta maneira, a LMI em (4.35) é obtida pré e pós multiplicando a LMI em (4.10) por $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$ e $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$, respectivamente; similarmente a LMI em (4.36) é obtida pré e pós multiplicando a LMI em (4.11) por $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$ e $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$, respectivamente.

Além disso, a LMI em (4.37) é obtida por meio da LMI em (4.12). Inicialmente, são feitas as substituições: $A_d = BKW$ e $G = \alpha F$ em (4.37) e, em seguida, pré e pós multiplicando (4.37) por $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}$ e $\text{diag}\{\bar{F}, \dots, \bar{F}\}^T$, respectivamente. Finalmente, considerando a nova variável linearizante $X = KW\bar{F}^T$ a LMI em (4.37) é obtida. Ademais, para determinar a matriz K composta pelos ganhos do controlador PID como descrita em (3.21) basta usar a definição de X para chegar em $K = X\bar{F}^{-T}W^{-1}$ com W dado em (3.22).

Portanto, se as LMIs em (4.35), (4.36) e (4.37) forem satisfeitas o sistema com função de transferência em (3.1) é exponencialmente estabilizável em malha fechada, com taxa de convergência exponencial δ de acordo com a Definição 4.1, pelo controlador PID com seus ganhos dados em K , definidos em (3.21) e determinados por $K = X\bar{F}^{-T}W^{-1}$. Isto completa a demonstração. \square

Note que as condições propostas pelo Teorema 2 em [14] podem ser recuperadas a partir do Teorema 4.2 fazendo $\delta = 0$. Desta forma, a metodologia proposta irá sempre resultar em controladores PID que garantem uma taxa de convergência maior, ou no pior caso igual, aos controladores propostos em [14].

Capítulo 5

Discussão dos Resultados

Neste capítulo serão apresentados experimentos numéricos para ilustrar a eficácia dos principais resultados obtidos com a pesquisa desenvolvida. Inicialmente, descreve-se a metodologia adotada para execução dos experimentos de simulação. Em seguida apresenta-se os resultados para cinco exemplos numéricos realizados. Ademais, é realizada uma análise comparativa entre os controladores projetados pelo método proposto e os projetados por outros métodos da literatura.

5.1 Procedimento Experimental

Neste trabalho foram realizados experimentos no ambiente de simulação do Matlab 2012a, o *parser* e o *solver* de LMIs utilizados foram Yalmip [12], versão R14SP3, e Sedumi [23], versão 1.3. O principal objetivo é verificar o comportamento do método proposto quando aplicado a diferentes funções de transferência. As FTs consideradas são descritas por

$$G(s) = \frac{b_0}{\tau_0^2 s^2 + 2\zeta\tau_0 s + a_0} e^{-d(t)s}, \quad (5.1)$$

onde ζ é o fator de amortecimento do sistema de segunda ordem e τ_0 o seu período de oscilação natural. Para retomar o modelo original descrito no capítulo 2, basta fazer $\tau_0^2 = 1$ e $a_1 = 2\zeta\tau_0$, assim, a equação (5.1) se transforma na equação (3.1). Nos experimentos realizados, as FTs diferem apenas pelo fator de amortecimento. Este foi incrementado para que fosse possível verificar o comportamento do método em dois cenários:

- Sistemas com apenas pólos reais negativos;
- Sistemas com pólos complexos conjugados com parte real negativa.

Todas as FTs utilizadas nos experimentos estão apresentadas na tabela 5.1, sendo $a_0 = b_0 = 1$. As FTs de $G_1(s)$ a $G_3(s)$ possuem apenas pólos reais negativos, enquanto $G_4(s)$ e $G_5(s)$ pólos complexos conjugados com parte real negativa.

Tabela 5.1: Funções de transferência estudadas.

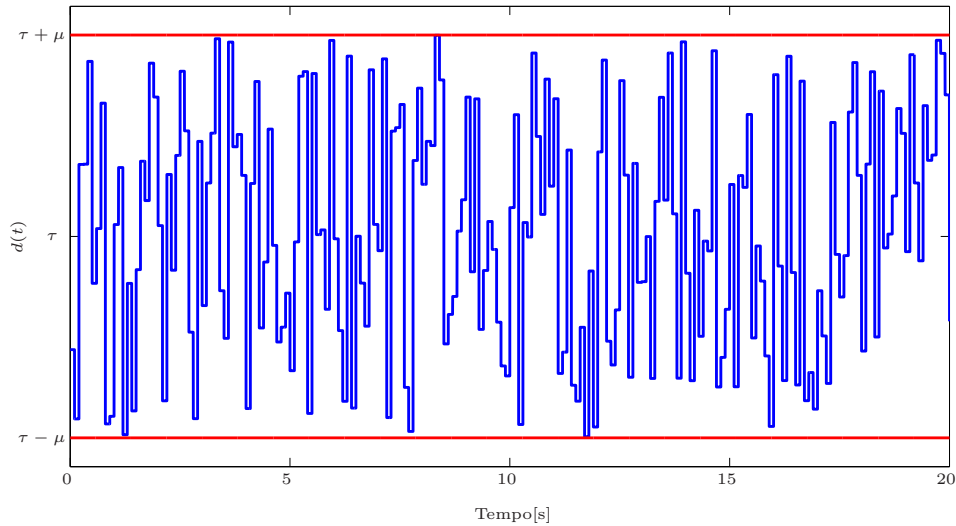
$G_i(s)$	FT	ζ
$G_1(s)$	$\frac{1}{s^2+0,2s+1}e^{-d(t)s}$	0,1
$G_2(s)$	$\frac{1}{s^2+0,4s+1}e^{-d(t)s}$	0,2
$G_3(s)$	$\frac{1}{s^2+1,2s+1}e^{-d(t)s}$	0,6
$G_4(s)$	$\frac{1}{s^2+2,4s+1}e^{-d(t)s}$	1,2
$G_5(s)$	$\frac{1}{s^2+3s+1}e^{-d(t)s}$	1,5

Em todos os estudos de caso foi considerado um retardo variante no tempo que é expresso na equação (5.1) por $d(t)$. Este termo é uma função variante no tempo dentro do intervalo $[\tau - \mu, \tau + \mu]$, onde τ é o valor nominal do retardo e μ um limite inferior e superior imposto a variação do atraso. Três funções para $d(t)$ foram consideradas, a saber: $d(t) = \tau + \mu \cos(\omega t + \phi)$, $d(t) = \tau + \mu \sin(\omega t + \phi)$ e $d(t)$ igual a uma função aleatória como a ilustrada na figura 5.1.

Tabela 5.2: Valores considerados para os parâmetros τ e μ .

τ	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
μ	0,05	0,075	0,10	0,125	0,15	0,175

Para os estudos de caso elencados na tabela 5.1 foram considerados diferentes valores para o retardo τ , com $\mu = 0,5\tau$, ou seja, uma variação de 50% no valor do retardo. A tabela 5.2 ilustra a faixa de variação considerada para o atraso. Em testes preliminares foi verificado que o tipo de função definida para $d(t)$ não apresenta influencia relevante nos resultados obtidos para a resposta ao degrau. Portanto, por questão de minoramento da seção serão apresentados apenas os resultados obtidos para a função aleatória.

Figura 5.1: Retardo variante no tempo dado por uma função aleatória $d(t)$.

Um esquema de controle foi elaborado para realização dos testes. Este esquema é ilustrado no diagrama de blocos da figura 5.2. O bloco G representa a função de transferência do sistema que será substituído pelas FTs mostradas na tabela 5.1, o bloco K representa a lei de controle, que é dada por um PID clássico paralelo como definido em (3.16), G_d é a função de transferência do distúrbio na saída do processo, que por simplicidade foi definida como $G_d = 1$, r é a entrada de

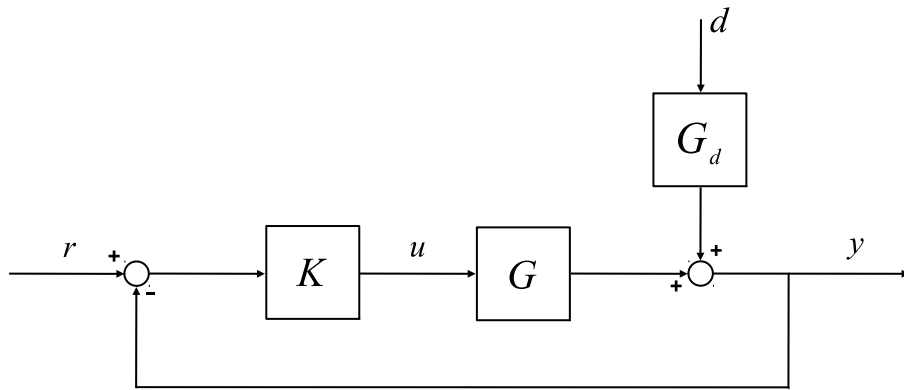


Figura 5.2: Esquema de controle. Referência r ; saída y ; entrada de controle atrasada u ; distúrbio de saída d .

referência dado por um degrau unitário e d um distúrbio em degrau de amplitude igual a $-0,5r$.

A LMI (4.37) apresenta dois parâmetros de ajuste que oferecem um menor conservadorismo aos resultados obtidos para o método proposto. O primeiro parâmetro é δ , representa a taxa de decaimento da resposta do sistema, o segundo parâmetro é α , representa um parâmetro de ajuste da matriz livre \bar{F} . Estes dois parâmetros foram submetidos a uma variação no intervalo de $[0; 1,50]$ com passo de 0,01 para δ e intervalo de $[0,1; 1,0]$ com passo de 0,1 para α . O objetivo da variação destes parâmetros é encontrar o valor de α cuja a LMI seja factível e que gere a máxima taxa de decaimento para o função de transferência em estudo. Em testes preliminares foi observado que para valores negativos de α as LMIs não eram factíveis e também que valores acima de 1 não proporcionam incremento na taxa de decaimento. Os resultados obtidos são apresentados na figura 5.3. Esta figura mostra o comportamento do parâmetro δ frente ao aumento do valor de α para cada uma das funções de transferência em estudo e para todos os valores de τ e μ definidos na tabela 5.2. Pode-se observar que a medida que se aumenta o valor de α o valor de δ também aumenta até atingir um valor máximo, a partir do qual há um declínio da taxa de decaimento. Assim, a partir dos resultados da figura 5.3

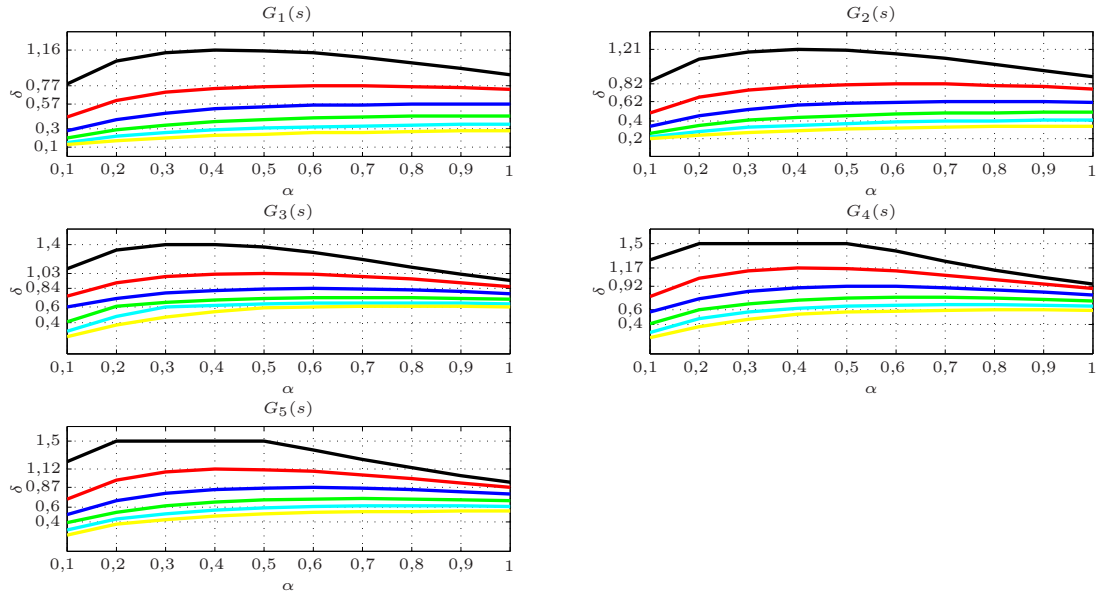


Figura 5.3: Comportamento do parâmetro δ perante a variação do parâmetro α . Linha preta: $\tau = 0,10$ e $\mu = 0,05$; Linha vermelha: $\tau = 0,15$ e $\mu = 0,075$; Linha azul: $\tau = 0,20$ e $\mu = 0,10$; Linha verde: $\tau = 0,25$ e $\mu = 0,125$; Linha ciano: $\tau = 0,30$ e $\mu = 0,15$; Linha amarela: $\tau = 0,35$ e $\mu = 0,175$.

foram inferidos os valores de α que fornecem a maior taxa de decaimento possível para cada FT e retardo.

Os valores de α , δ e τ foram agrupados na tabela 5.3 juntamente com os parâmetros do controlador PID, calculados por meio das equações $K = X\bar{F}^{-T}W^{-1}$ e (3.21). A partir deste ponto, torna-se possível fazer as simulações numéricas para todos os estudos de caso propostos e que serão analisados na próxima seção.

5.2 Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações dos exemplos numéricos propostos na tabela 5.1. Cada função de transferência foi submetida a uma entrada em degrau unitário na referência no instante inicial, bem como a um distúrbio em degrau de amplitude igual a $-0,5$ no tempo de $10s$. Para cada

FT foi realizada a simulação com os ganhos do controlador PID calculados pelo método proposto, bem como por outros métodos encontrados na literatura. Assim, é possível fazer uma análise qualitativa do método quando comparado aos resultados obtidos com métodos já bastante conhecidos, assim como por métodos propostos mais recentemente, como são os casos dos métodos de [14] e [1]. Vale

Tabela 5.3: Parâmetros utilizados para simulação dos exemplos numéricos.

Função de Transferência	Parâmetros					
	τ	α	δ	K_p	K_d	K_i
$G_1(s)$	0,10	0,4	1,16	8,6144	5,0869	6,3383
	0,15	0,7	0,77	3,5765	3,3898	2,1873
	0,20	1	0,57	1,7817	2,5443	1,0870
	0,25	1	0,44	0,9419	2,0406	0,6572
	0,30	1	0,35	0,4739	1,7039	0,4483
	0,35	1	0,28	0,1869	1,4597	0,3290
$G_2(s)$	0,10	0,4	1,21	9,1923	5,0574	6,8775
	0,15	0,7	0,82	3,9806	3,3565	2,4779
	0,20	0,9	0,62	2,1125	2,5111	1,2905
	0,25	1	0,50	1,2227	2,0102	0,8123
	0,30	1	0,41	0,7319	1,6717	0,5809
	0,35	1	0,34	0,4396	1,4250	0,4574
$G_3(s)$	0,10	0,4	1,40	11,5178	4,9216	9,0167
	0,15	0,5	1,03	5,6701	3,23656	3,6555
	0,20	0,6	0,84	3,4828	2,3879	2,1461
	0,25	0,8	0,72	2,4098	1,8632	1,5479
	0,30	0,9	0,65	1,8357	1,5201	1,2902
	0,35	0,9	0,61	1,5222	1,2835	1,1979
$G_4(s)$	0,10	0,5	1,50	14,5316	4,5065	11,4627
	0,15	0,4	1,17	9,0279	3,1522	5,8786
	0,20	0,6	0,92	6,2505	2,3359	3,5378
	0,25	0,5	0,76	4,7332	1,8448	2,4153
	0,30	0,6	0,66	3,7761	1,5135	1,7796
	0,35	0,6	0,58	3,1330	1,2805	1,3882
$G_5(s)$	0,10	0,5	1,50	17,8961	4,5834	15,4749
	0,15	0,4	1,12	11,2702	3,1775	7,7313
	0,20	0,6	0,87	7,9287	2,3605	4,5751
	0,25	0,4	0,67	6,07157	1,8687	3,0737
	0,30	0,5	0,50	4,9052	1,5457	2,2404
	0,35	0,6	0,53	4,1092	1,3163	1,7290

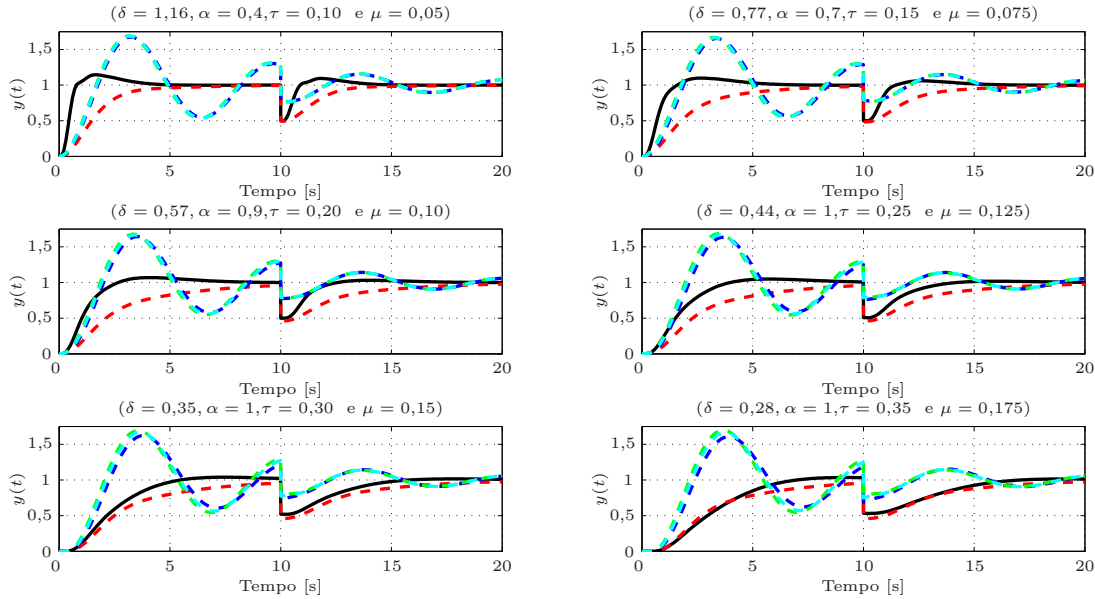


Figura 5.4: Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_1(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).

ressaltar que o método proposto nesta dissertação é uma generalização do Teorema 2 do método de [14], sendo possível chegar aos mesmos resultados deste teorema fazendo $\delta = 0$. A fim de medir o desempenho do método proposto frente a outros métodos, foram calculadas figuras de mérito (ISE, IAE, ITAE, M_p , t_r e t_s) que permitem de forma objetiva fazer uma análise de desempenho.

Analisando o comportamento da figura 5.4, pode-se observar que a resposta obtida com o PID projetado pelo teorema 4.2 para $G_1(s)$ apresenta melhor resultado que os demais métodos de projeto, pois para todos os valores de retardo no tempo considerados o mesmo apresenta uma taxa de convergência bem superior as dos demais. Comparando apenas com o método de [14], pode-se constatar uma grande vantagem para o projeto via teorema 4.2. Entretanto, a vantagem para o método proposto se deteriora a medida que se aumenta o retardo τ , visto que a máxima taxa de decaimento δ possível, se reduz com o aumento do valor do retardo no

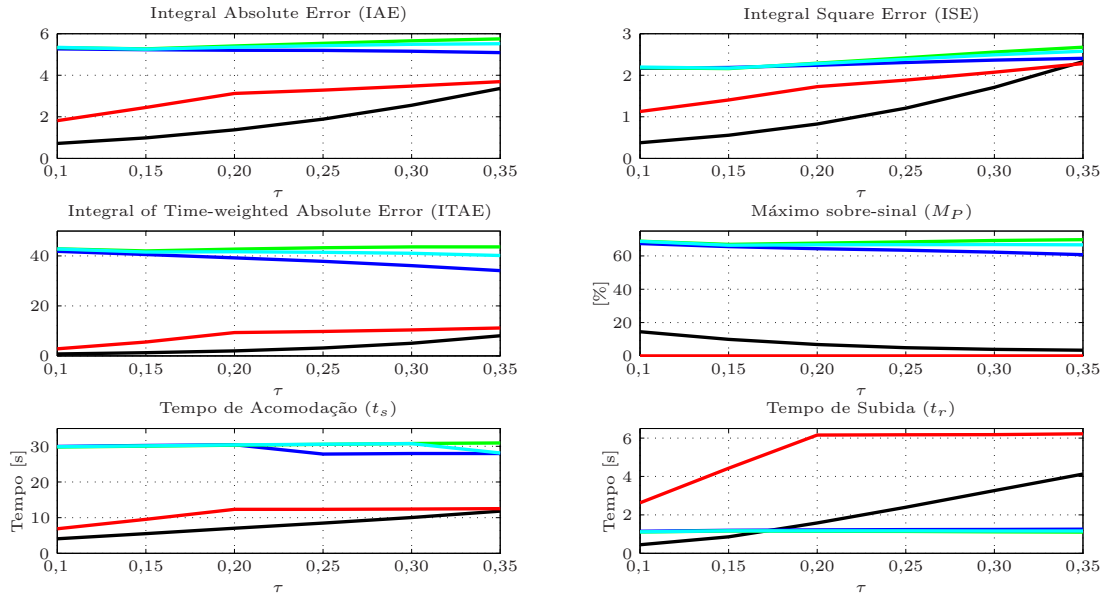


Figura 5.5: Critérios de Desempenho para $G_1(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).

tempo. Para $\tau = 0,35$ as duas linhas (preta contínua e vermelha tracejada) da figura 5.4 quase se sobrepõem, devido a taxa de decaimento para o método proposto ser de apenas $\delta = 0,28$.

A figura 5.5 mostra o comportamento dos critérios de desempenho de $G_1(s)$ para o PID projetado pelo teorema 4.2 em comparação com os demais métodos. Note que o método proposto apresenta valores menores para os três critérios de desempenho da integral do erro (IAE, ISE e ITAE) em comparação com todos os métodos e em toda a faixa de variação de τ . Apresenta também melhores resultados para o máximo sobre-sinal (M_p) e para o tempo de acomodação (t_s) para todos os valores de τ em comparação com todos os métodos, exceto no caso de M_p para o método de [14] que é zero para toda faixa de variação de τ . Isso já era esperado, visto que o custo do aumento da taxa de decaimento é a elevação do valor de M_p . Mesmo assim o valor máximo de sobre-sinal alcançado pelo projeto via teorema 4.2 não é muito elevado, basta olhar para os demais métodos analisados.

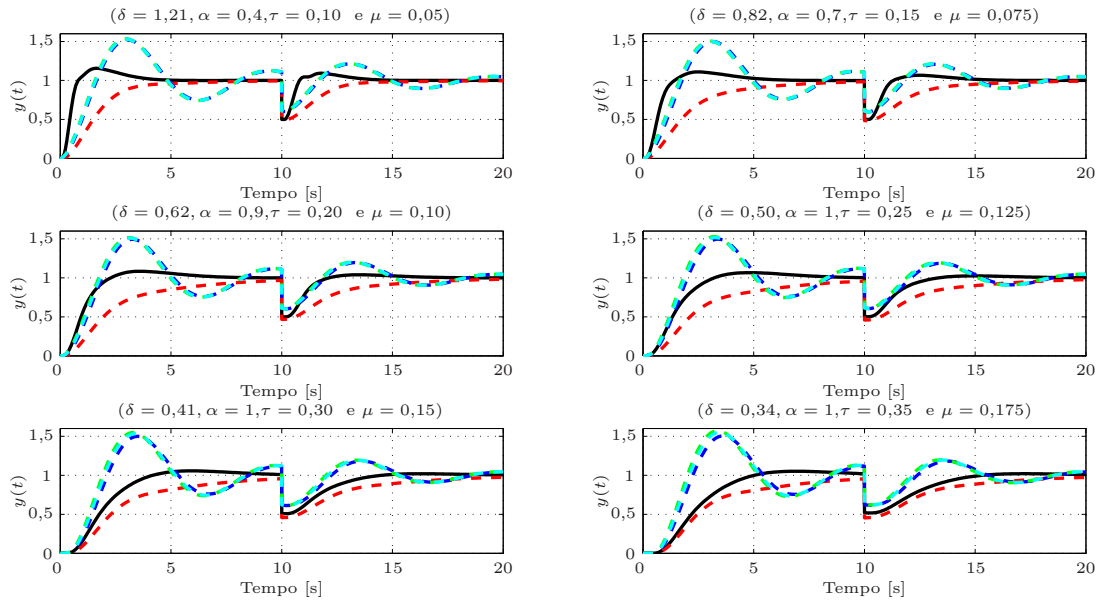


Figura 5.6: Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_2(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).

Para o tempo de subida (t_r) há uma vantagem considerável para o método proposto em relação ao método de [14] e vantagem para os três outros métodos analisados a partir de $\tau = 0,2$.

A figura 5.6 mostra a resposta ao distúrbio na saída e ao degrau na referência para $G_2(s)$. Assim como no exemplo anterior, nota-se grande vantagem do método proposto em relação as demais métodos. Vale destacar que a vantagem do PID projetado pelo teorema 4.2 em relação ao método de [14] teve um acréscimo, devido ao aumenta na máxima taxa de convergência alcançada pelo método proposto. Um fato que retrata esta afirmação é um maior afastamento das duas curvas (preta contínua e vermelha tracejada) para $\tau = 0,35$. No exemplo anterior, as duas linhas estavam praticamente sobrepostas, agora nota-se claramente um afastamento.

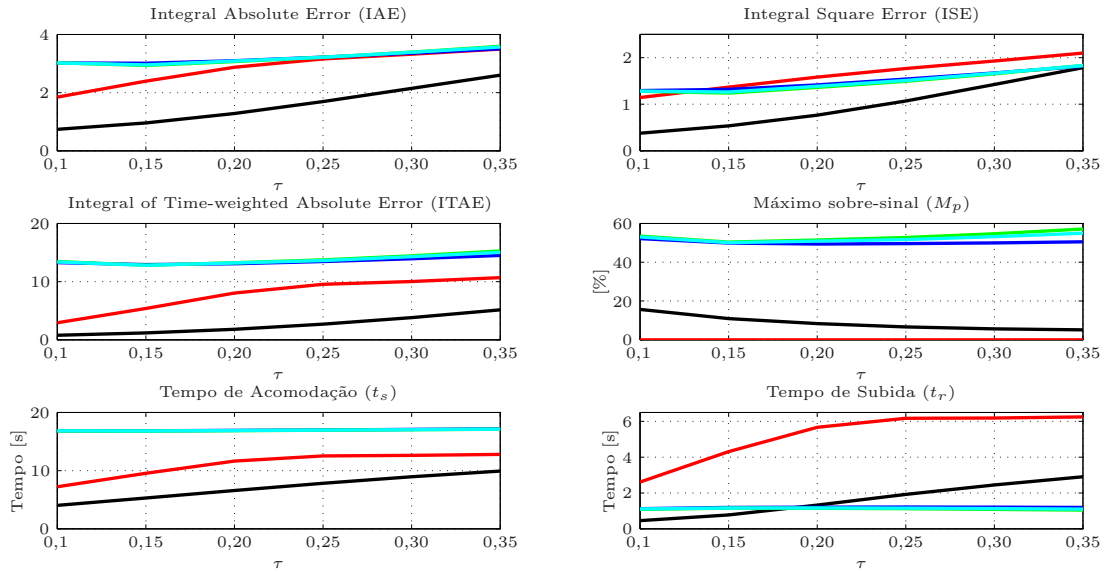


Figura 5.7: Critérios de Desempenho para $G_2(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).

Observando os gráficos da figura 5.7, pode-se ratificar o comportamento da resposta temporal do sistema, dado que o PID projetado pelo teorema 4.2 apresenta vantagem, ou seja, valores menores para os critérios de desempenho IAE, ISE, ITAE, M_p e t_s quando comparado com SIMC e os dois métodos de [1]. Além disso, ainda é superior a eles para t_r com τ abaixo de 0,2. Comparando apenas com o método de [14], o PID do teorema 4.2 continua tendo desempenho superior em todos os critérios, exceto para o máximo sobre-sinal.

A próxima função de transferência a ser analisada é $G_3(s)$. Para este exemplo, nota-se uma aproximação, em relação ao método proposto, da resposta temporal dos três métodos de projeto baseados no IMC, que por sinal possuem respostas muito parecidas. Em linhas gerais, os três métodos baseados no IMC levam uma pequena vantagem em relação ao PID projetado via teorema 4.2 para valores de τ a partir de 0,25. Comparando apenas com o método de [14], o método proposto

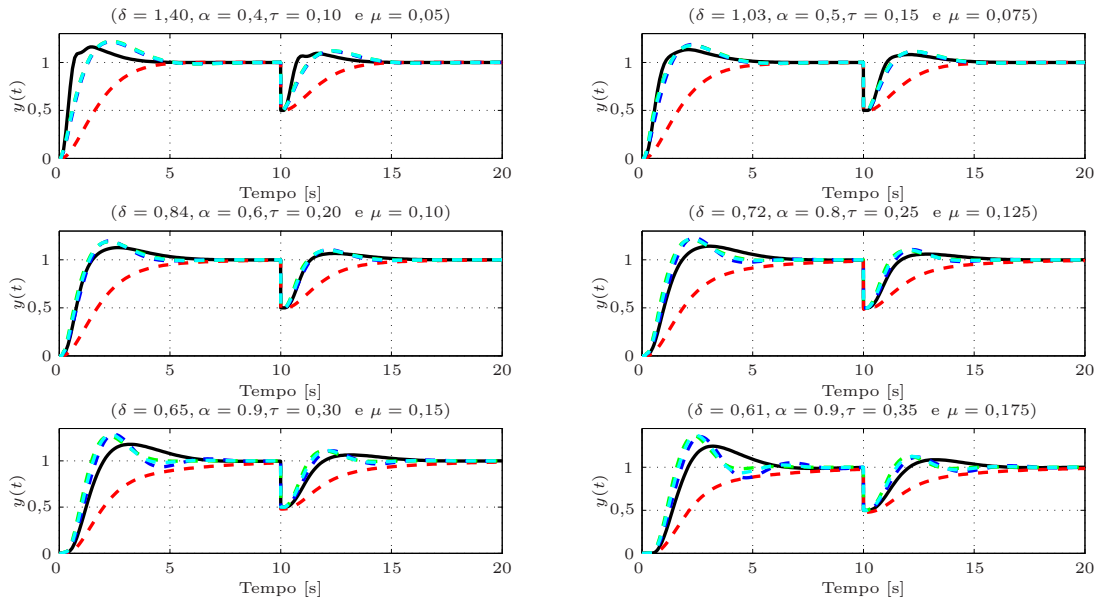


Figura 5.8: Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_3(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).

continua sendo bastante superior, com velocidade de convergência ainda mais pronunciada, basta verifica os valores ainda maiores de δ .

No que diz respeito aos critérios de desempenho, pode-se confirmar o comportamento temporal das respostas geradas pelos métodos de projeto analisados. Nos critérios de desempenho da integral do erro, nota-se uma sobreposição das curvas dos resultados encontrados pelo PID projetado via teorema 4.2 e os métodos baseados no IMC para IAE e ISE, já para ITAE, pode-se verificar resultados iguais ou melhores para o método proposto quando τ é menor que 0,25. No caso do sobre-sinal o método proposto tem melhores resultados que os métodos baseados no IMC em toda faixa de variação do retardo no tempo. O tempo de acomodação apresenta resultados um pouco melhores para os métodos baseados no IMC com uma tendência de queda de t_s com o PID do método proposto a partir de $\tau = 0,30$. O t_r apresenta valores menores para o método proposto para valores de τ abaixo

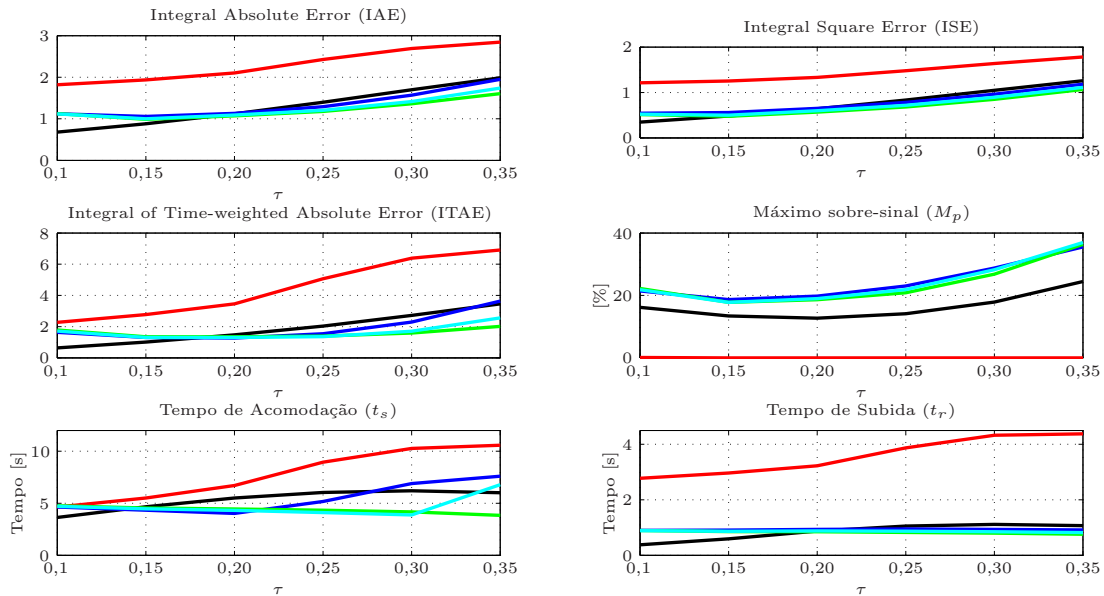


Figura 5.9: Critérios de Desempenho para $G_3(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control; Linha ciano: Skogestad (SIMC).

de 0,25, quando há uma sobreposição das curvas (linha preta contínua, linha tracejada azul, linha tracejada verde e linha tracejada ciano). Na comparação apenas com o método de [14] as taxas de decaimento são ainda mais acentuadas o que confirma e até melhora os resultados encontrados para os critérios de desempenho dos exemplos anteriores pelo método proposto.

Os resultados para a função de transferência $G_4(s)$ são apresentados na figura 5.10. Esta bastante claro que o PID SIMC apresenta problema de estabilização a medida que se aumenta o valor do retardo no tempo. O sistema apresenta uma resposta marginalmente estável quando τ é maior que 0,15. Com relação aos métodos propostos por [1] há um comportamento bastante próximo ao do PID projetado via teorema 4.2 para valores de τ abaixo de 0,25. No entanto, um comportamento interessante é que as repostas pelos métodos de [1] apresentam uma degeneração da resposta transitória com elevação da oscilação partir de $\tau = 0,25$, isto mostra uma tendência de instabilidade com o aumento do atraso.

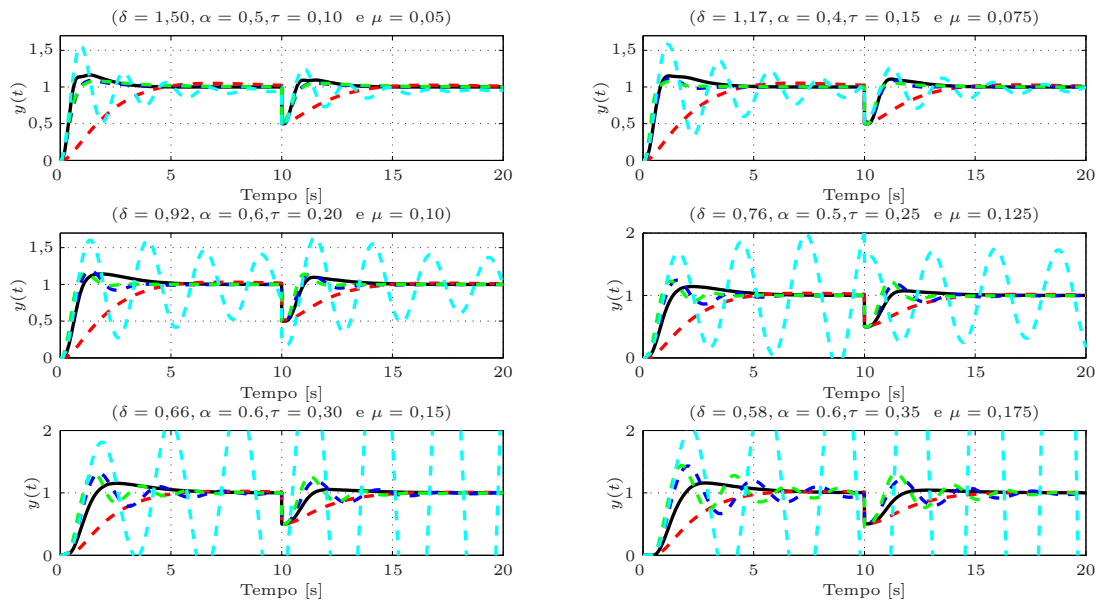


Figura 5.10: Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_4(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).

Por meio da análise dos gráficos dos critérios de desempenho ilustrados na figura 5.11, consegue-se verificar a tendência de instabilidade dos métodos de [1] que é mais pronunciada a partir de $\tau = 0,30$, basta observar a grande inclinação ascendente em cinco (IAE, ISE, ITAE, M_p e t_s) dos seis critérios de desempenho avaliados, destando que para $\tau = 0,35$ o método proposto é muito melhor. No que se refere ao método de [14] o método proposto apresenta o mesmo desempenho dos exemplos anteriores, ressaltando apenas que para $G_4(s)$ alcança-se a maior taxa de convergência dentre todos os experimentos realizados com $\delta = 1,5$ para $\tau = 0,1$. Os resultados para SIMC foram omitidos dado que seu desempenho é muito inferior e a inclusão deste nos gráficos dos critérios de desempenho aumentaria muito a escala do eixo vertical o que dificulta a visualização das diferenças entre os demais métodos e conseqüentemente a análise de desempenho.

Novamente o comportamento do controlador PID projetado pelo método de SIMC

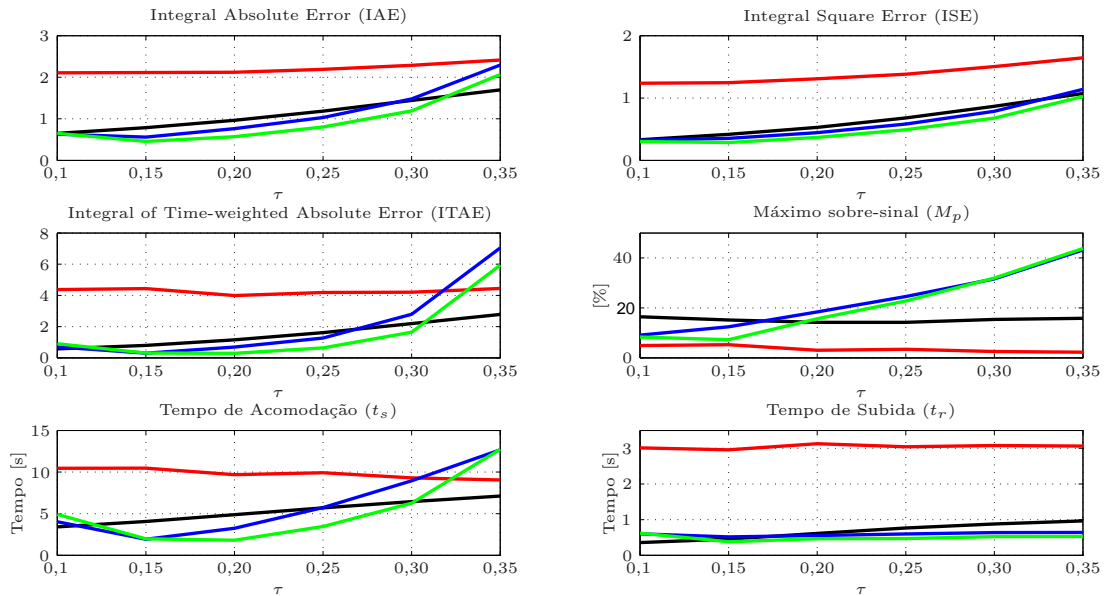


Figura 5.11: Critérios de Desempenho para $G_4(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control.

tende a instabilidade a partir de $\tau = 0,2$, conforme pode ser visto na figura 5.12 que representa a resposta dinâmica de $G_5(s)$ quando submetido a um distúrbio na saída e a um degrau na entrada de referência. Assim como em $G_4(s)$, os métodos de [1] apresentam degradação da resposta transitória com aumento da oscilação, porém, neste caso, isso ocorre com valores de τ ainda menores e para o mesmo valor do retardo em ambos os exemplos a oscilação em $G_5(s)$ é maior.

A partir dos resultados apresentados na figura 5.13 fica evidente que o PID projetado pelo método proposto tem desempenho superior aos dos métodos de [1]. Pode-se chegar a esta conclusão considerando que em todos os critérios o método proposto possui valores menores ou aproximadamente iguais aos de [1], especial atenção a partir de $\tau = 0,3$ com uma diferença que chega a mais de 20s no tempo de acomodação. Pelo mesmo motivo do exemplo anterior os resultados dos critérios de desempenho para o PID SIMC foram omitidos. Comparando o método de [14] com o proposto nesta dissertação, ainda existe boa vantagem no

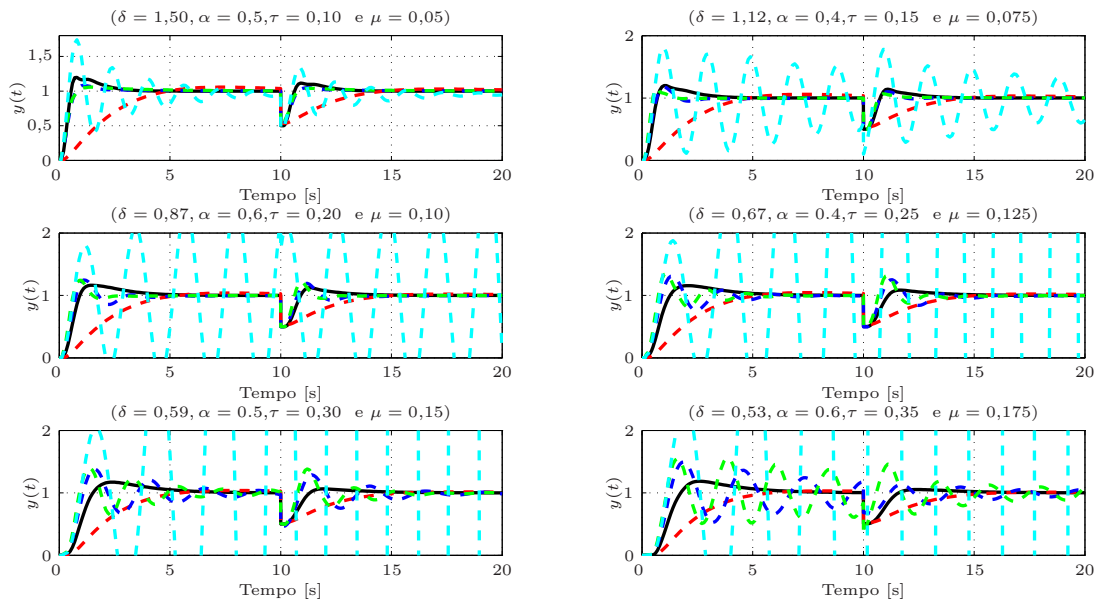


Figura 5.12: Resposta a um degrau na referência e a um distúrbio na saída de $G_5(s)$ submetida a um retardo variante no tempo. Linha contínua preta: Teorema 4.2; Linha tracejada vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha tracejada azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha tracejada verde: Ali e Majhi 2009 - Tight Control; Linha tracejada ciano: Skogestad (SIMC).

desempenho para o PID projetado pelo teorema 4.2.

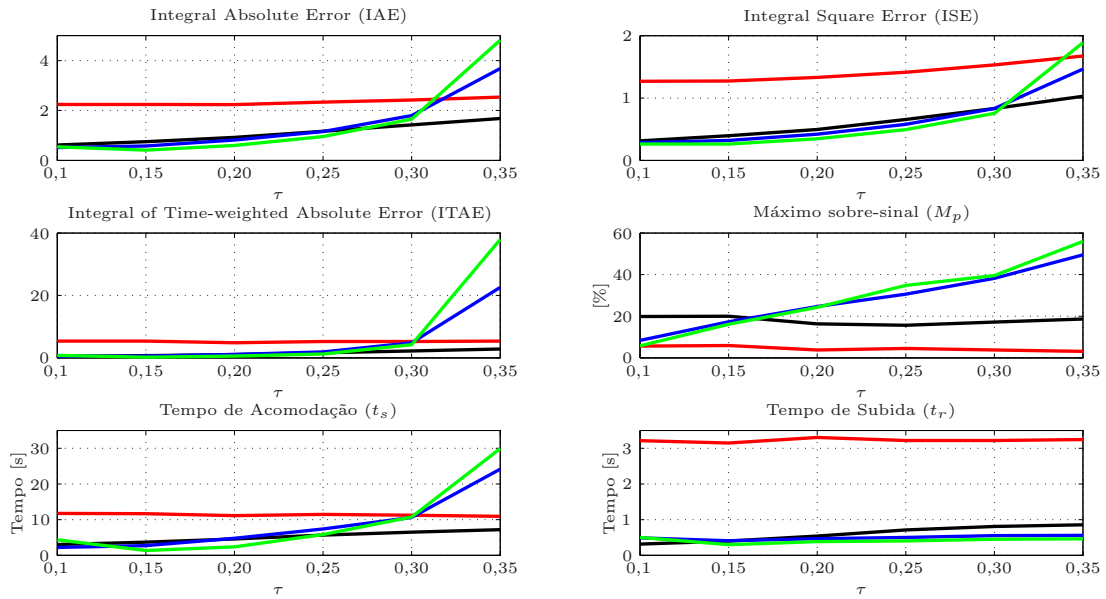


Figura 5.13: Critérios de Desempenho para $G_5(s)$. Linha preta: Teorema 4.2; Linha vermelha: Mozelli e Souza (2013); Linha azul: Ali e Majhi (2009) - Smooth Control; Linha verde: Ali e Majhi (2009) - Tight Control.

Capítulo 6

Conclusão e Futuros Trabalhos

Nesta dissertação foi proposto um método de sintonia de controladores PID formulado utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii e desigualdades matriciais lineares. O método garante uma taxa de decaimento exponencial pré-estabelecida para sistemas de segunda ordem sujeitos a retardo variante no tempo. Os resultados apresentados no capítulo 5 ratificam a eficácia do método, uma vez que os exemplos numéricos analisados indicam um desempenho superior quando comparado a métodos já bastante experimentados e conhecidos, como também em relação a métodos desenvolvidos nos últimos cinco anos pela comunidade científica. Um método recente que serviu de plano de fundo para o desenvolvimento desta pesquisa foi o método proposto por Mozelli e Souza (2013). Este método é um caso particular do apresentado neste trabalho, sendo possível alcançar os mesmos resultados do teorema 2 nele apresentando fazendo a taxa de decaimento exponencial (δ) do método proposto igual a zero. Durante as simulações realizadas foram analisados exemplos numéricos com funções de transferência que apresentavam somente pólos reais negativos e outras com pólos complexos conjugados com parte real negativa. Comparando o método proposto com o método de Mozelli e Souza (2013), verifica-se uma melhora substancial

da resposta dinâmica em todas as FTs consideradas. Esta constatação é confirmada pelos resultados da análise de desempenho, onde o método proposto foi melhor em cinco dos seis critérios apurados para toda faixa de variação do retardo. Traçando um paralelo entre os métodos de projeto apresentados em Ali e Majhi (2009) e o desta dissertação, conclui-se que o PID projetado pelo teorema 4.2 apresenta melhores resultados, uma vez que possui desempenho igual ou superior para $G_3(s)$ e melhor nos demais exemplos estudados. Além disso, o método de [1] apresenta tendência de instabilidade nas funções de transferência $G_4(s)$ e $G_5(s)$ para $\tau \geq 0,30$, isto dá ao método proposto uma vantagem adicional. Com relação ao método SIMC, o método proposto foi sempre superior em todos os exemplos estudados no capítulo anterior. Pode-se observar que o PID projetado pelo método SIMC apresenta grande oscilação em regime transitório para FTs com pólos complexos conjugados com parte real negativa e estabilidade marginal nas funções com apenas pólos reais negativos para $\tau \geq 0,25$, enquanto o método proposto fornece respostas que convergem rapidamente para o valor de referência.

O método proposto mostrou-se robusto à variação do fator de amortecimento (ς) do sistema, ou seja, a presença de pólos complexos conjugados com parte real negativa não afeta o desempenho do controlador. Isto é importante, pois possibilita a aplicação do método em uma boa variedade de funções de transferência.

Ademais, o método é robusto à variação do retardo no tempo. Vale ressaltar que o método suportou uma variação de 50% do valor de τ em uma faixa de 0,1 a 0,35 sem mudança relevante no desempenho do controlador. Esta pode ser considerada, junto com a imposição de tempo de convergência, como a maior vantagem do novo método desenvolvido.

Como possibilidade de continuidade do trabalho apresentado nesta dissertação, sugere-se como trabalhos futuros os seguintes tópicos:

- Estender o método proposto para funções de transferência que possuam zeros, tanto no semi-plano esquerdo como no semi-plano direito;

-
- Incluir um método de otimização do parâmetro δ a partir do parâmetro α ;
 - Estender o método para lidar com entradas de perturbação;
 - Estender o método para tratar problemas com incertezas paramétricas;
 - Utilizar diferentes estruturas do controlador PID e estender o método para controladores PI;
 - Incluir na modelagem do problema pólo na ação derivativa e saturação da lei de controle.

Referências Bibliográficas

- [1] Ali, A. and Majhi, S. [2009]. PI/PID controller design based on IMC and percentage overshoot specification to controller setpoint change., *ISA Transactions* **48**: 10–15.
- [2] Aström, K. J. and Hägglund, T. [1995]. *PID Controllers: Theory, Design, Tuning*, 2nd edn, ISA, Lund, Sweden.
- [3] Aström, K. J. and Hägglund, T. [2001]. The future of PID control, *Control Engineering Practice* **9**: 1163–1175.
- [4] Bennett, S. [1993]. Development of the PID Controller, *IEEE Control Systems* pp. 58–64.
- [5] Bennett, S. [2001]. The Past of PID Controllers, *Annual Reviews in Control* **25**: 43–53.
- [6] Bevrani, H., Hiyama, T. and Bevrani, H. [2011]. Robust PID based power system stabiliser: Design and real-time implementation, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* **33**(2): 179–188.
- [7] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. [1994]. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, 1 edn, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia.
- [8] Gallier, J. [2010]. *The Schur Complement and Symmetric Positive Semidefinite (and Definite) Matrices*, University of Pennsylvania, Philadelphia.

-
- [9] Ge, M., Chiu, M.-S. and Wang, Q.-G. [2002]. Robust PID controller design via LMI approach, *Journal of Process Control* **12**: 3–13.
- [10] Gonçalves, E. N., Palhares, R. M. and Takahashi, R. H. [2008]. A novel approach for H_2/H_∞ robust PID Synthesis for uncertain systems, *Journal of Process Control* **18**: 19–26.
- [11] Gu, K., Kharitonov, V. L. and Chen, J. [2003]. *Stability of Time-Delay Systems*, Birkhäuser, Boston.
- [12] Lofberg, J. [2004]. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284–289.
- [13] Manum, H. [2005]. Extensions of Skogestad’s SIMC tuning rules to oscillatory and unstable processes, *Technical report*, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.
- [14] Mozelli, L. A. and Souza, F. O. [2013]. PID tuning under uncertain conditions : robust LMI design for second-order plus time-delay transfer functions, *11th Workshop on Time-Delay Systems Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC*, Grenoble, France, pp. 120–125.
- [15] Ogunnaike, B. A. and Ray, W. H. [1994]. *Process Dynamics Modeling and Control*, Oxford University Press, Oxford, New York.
- [16] Oliveira, V. and Karimi, A. [2013]. Robust Smith Predictor Design for Time-Delay Systems with H_∞ Performance, *11th Workshop on Time-Delay Systems – Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC*, Grenoble, France, pp. 102–107.
- [17] Parada, M., Borges, R. A., Sbarbaro, D. and Peres, P. L. D. [2011]. Robust PID design for second-order processes with time-delay and structured uncertainties, *18th IFAC World Congress*, Vol. 1, Milano, Italy, pp. 4614–4619.

- [18] Rajapandiyam, C. and Chidambaram, M. [2012]. Closed-Loop Identification of Second-Order Plus Time Delay (SOPTD) Model of Multivariable Systems by Optimization Method, *Industrial & Engineering Chemistry Research* (51): 9620–9633.
- [19] Rivera, D., Morari, M. and Skogestad, S. [1986]. Internal Model Control: PID Controller Design, *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development* **25**: 252–265.
- [20] Skogestad, S. [2003]. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning, **13**: 291–309.
- [21] Skogestad, S. [2006]. Tuning for Smooth PID Control with Acceptable Disturbance Rejection, *Industrial & Engineering Chemistry Research* **45**: 7817–7822.
- [22] Souza, F. O. [2008]. *Estabilidade e Síntese de Controladores com Retardo no Tempo: Novas Fronteiras*, Tese, Universidade Federal de Minas Gerais.
- [23] Sturm, J. F. [1999]. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11**(1-4): 625–653.
- [24] Takahashi, R. H. C., Peres, P. L. D. and Ferreira, P. A. V. [1997]. Multiobjective H_2/H_∞ Guaranteed Cost PID Design, *IEEE Control Systems Magazine* **17**(5): 37–47.
- [25] Wang, Q.-G., Lee, T.-H., Fung, H.-W., Bi, Q. and Zhang, Y. [1999]. PID Tuning for Improved Performance, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7**(4): 457–465.
- [26] Wang, Q.-G., Zhang, Z., Aström, K. J. and Chek, L. S. [2009]. Guaranteed dominant pole placement with PID controllers, *Journal of Process Control* **19**(2): 349–352.

-
- [27] Wang, Y.-J. [2014]. Determination of all feasible robust PID controllers for open-loop unstable plus time delay processes with gain margin and phase margin specifications., *ISA transactions* **53**(2): 628–46.
- [28] Wu, M., Yong, H. and Jin-Hua, S. [2010]. *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, Beijing.
- [29] Xue, D. and Chen, Y. [2009]. *Solving Applied Mathematical Problems with MATLAB*, A Chapman & Hall book - CRC Press, Florida.
- [30] Ziegler, J. and Nichols, N. B. [1942]. Optimum Settings for Automatic Controllers, *Transactions of the ASME* **64**: 759–768.