Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

ICEX – Departamento de Matemática

A DESCOBERTA DO CÁLCULO SOB AS PERSPECTIVAS DE NEWTON E LEIBNIZ

Warley de Morais Silva

Monografia apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Costa Moreira

Belo Horizonte – MG

2015

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de resgatar as contribuições de Newton e Leibniz considerado os inventores do cálculo, por eles terem feito algo essencialmente diferente e mais do que seus predecessores. Por isso, Newton e Leibniz ocupam uma posição central na história do cálculo e na história da matemática em geral.

PALAVRAS CHAVE: Cálculo. Newton. Leibniz

ABSTRACT

This work aims to rescue the contributions of Newton and Leibniz considered the inventors of calculus, because they had done something essentially different and more than their predecessors. Therefore, Newton and Leibniz occupy a central position in the history of the calculus and the history of mathematics in general.

KEYWORDS: Calculus. Newton. Leibniz

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A maioria dos livros didáticos modernos de Cálculo apresenta inicialmente o conceito de limite de uma função, a seguir o tipo particular de limite que resulta na derivada e apenas posteriormente é introduzida a noção de integral (ver, por exemplo, STEWART, 2006, e LEITHOLD, 2004). Essa é a abordagem pedagogicamente mais eficiente. Porém, um fato notável é que historicamente a evolução desses conceitos seguiu um ordenamento oposto, com as ideias precursoras da integração introduzidas por Eudoxo e Arquimedes nos séculos IV e III a.C., com a diferenciação descoberta por Newton e Leibniz no século XVII e com o conceito de limite formalizado apenas no século XIX por Bolzano, Cauchy e Weierstrass (BOYER, 1974; EVES, 2004).

Focando particularmente na relação entre limites e derivadas, a questão que se apresenta é a seguinte. Se o limite foi descoberto depois, com que conceitos e métodos operacionais trabalhavam Newton e Leibniz quando introduziram a derivação de uma função? Como os cálculos eram feitos?

Iremos demonstrarmos neste trabalho a forma como Newton e Lebiniz desenvolveram o conceito de diferenciação sem se ter o conhecimento do conceito de limite. Após apresentar a forma feita por eles, iremos apresentar a forma que hoje é apresentada pelos livros de cálculo adotados nas grades curriculares das instituições de ensino superior. Com isso, iremos perceber que Leibniz e Newton apresentavam nada mais que um sistema funcional e coerente de métodos para resolver problemas sobre curvas, isto é, quadraturas, tangentes, etc, ainda que sem o nível de precisão conceitual que se tornou padrão na matemática moderna.

2. CÁLCULO - RESGATE HISTÓRICO

O século XVII foi muito importante no desenvolvimento da matemática. Foi próximo ao final desse século que tivemos a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral, com as participações fundamentais de Newton e Lebiniz. Mesmo fazendo um trabalho focado em Newton e Lebiniz, temos que lembrar as contribuições de outros pesquisadores nessa grande descoberta, entre eles René Descartes (1596-1650), Gilles Persone Roberval (1602-1675), Evangelista Toricelli (1608-1647), Pierre Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), etc.

O desenvolvimento do Cálculo seguiu um caminho longo e irregular que se estendeu das especulações filosóficas dos antigos gregos e das demonstrações clássicas de Arquimedes até o século XVII quando mudanças significativas ocorreram tanto na quantidade dos trabalhos realizados quanto na natureza dos métodos utilizados. O grande número de resultados bem sucedidos que tinham sido acumulados tornou possível perceber mais claramente o advento de um modelo padrão que, por sua vez, despertou o interesse para o estabelecimento de regras algorítmicas, graças às quais foi possível formular resultados e evitar várias passagens intermediárias desnecessárias.

A crescente extensão e variedade de material que ia se tornando disponível na literatura científica sugeria a necessidade do estabelecimento de uma estrutura unificada e organizada, por meio da qual primeiro pudessem ser apresentados teoremas gerais para, em um segundo momento, serem demonstrados resultados especiais dentro da teoria geral.

Por volta de 1670, Gregory e Barrow (BOYER, 1974) tentaram estabelecer esse quadro organizado. Porém seus esforços não foram reconhecidos em sua época, pois esses autores se reportavam a métodos da Geometria Euclidiana e à estrutura das demonstrações de Arquimedes, enquanto a preferência de seus contemporâneos favorecia os métodos algébricos não rigorosos.

Mesmo considerando que o Cálculo não tenha começado nem terminado com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, atribui-se a ambos papéis determinantes em sua descoberta, sendo Newton o líder da matemática inglesa e Leibniz uma referência essencial para boa parte da comunidade matemática europeia continental. No entanto, o processo foi cercado de polêmicas que repercutiram amargamente em ambos os lados, a ponto de criar um abismo que dificultou o crescimento integrado. O desenvolvimento da matemática Inglesa no século XVIII foi particularmente penalizado por esse isolamento.

Apesar de certo nível de sobreposição, que acabou sendo a fonte principal da rivalidade, havia um grau importante de complementaridade entre os trabalhos de Newton e Leibniz. O primeiro criou e estendeu vários processos de cálculo, enquanto o segundo os unificou e sistematizou por meio de uma eficaz notação e de novas regras operacionais. Embora se reconheça que os dois cientistas têm um débito para com seus antecessores, pesquisas recentes sugerem que a influência mútua direta era insignificante durante os períodos decisivos em que eles faziam suas próprias invenções originais.

3. ISAAC NEWTON (1642-1727)

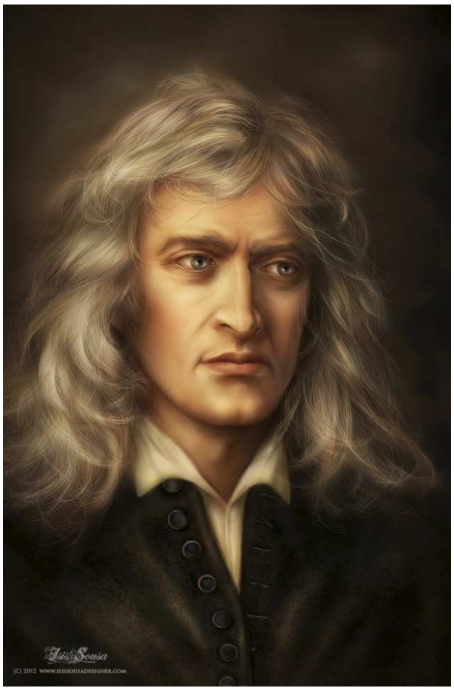


Figura 1: Representação recente de Isaac Newton.

As maiorias dos textos sobre Isaac Newton começam com o depoimento de que ele nasceu no dia de natal em 1642, mesmo ano em que faleceu Galileu. Politicamente esse era um período tempestuoso, com a Guerra Civil liderada por Oliver Cromwell (1599-1658) tendo começado na Inglaterra meses antes.

Intelectualmente ainda eram sentidos os efeitos da revolução científica cujo começo pode ser considerado coincidente com a publicação da obra de Copérnico "*De revolutionibus orbium coelestium*" em 1543, trabalho que foi amplamente desenvolvido nas obras dos astrônomos que se seguiram, dentre os quais se destacam Kepler e Galileu. Copérnico reintroduziu a ideia de que o sol estava no centro do universo, antes defendida por Aristarco de Samos no século III a.C. Essa ideia leva a uma sequência de implicações que foram tratadas por outros cientistas sob a perspectiva de uma investigação científica.

Durante o século XVII, dois conceitos importantes e relacionados ganhavam crescente apoio: a ideia de que os corpos celestes pudessem estar sujeitos às mesmas leis dos corpos terrestres e a ideia de que essas leis pudessem ser melhor compreendidas mediante a matemática. No contexto das perseguições religiosas da época, era mais fácil aplicar e desenvolver essas ideias em um país protestante. Assim, a data e lugar de nascimento de Newton foram fatores em certa medida facilitadores para sua obra.

Os fundamentos do pensamento intelectual de um período, as ideias que um homem encontra durante seus primeiros anos de estudo, os problemas que ele descobre através da leitura e de seu contato com outros que trabalham no mesmo campo, influi no sentido e no desenvolvimento de suas próprias pesquisas (BOYER, 1974). Newton viveu uma vida longa e árdua e, mesmo antes de morrer, já havia adquirido um papel preponderante no pensamento intelectual de sua época. Quando uma pessoa se torna lendária ainda viva, torna-se difícil discernir entre fato e ficção ao reconstruir os detalhes de sua formação. Assim ocorreu com Newton.

O impacto dos trabalhos de Newton no campo da Matemática e das Ciências Físicas em geral foi inigualável. Sua maior obra foi a magistral "*Philosophiae Naturalis, Principia Mathematica"*, publicada em 1687 e entendida por muitos como o trabalho científico mais importante de todos os tempos. A essa obra se somam várias outras contribuições para inúmeras áreas científicas.

Na obra *"Opticks"*, publicada 1704, Newton analisou a luz que atravessava um prisma e se separava em várias cores. A partir daí, concluiu que a luz branca não era uma entidade simples, como acreditavam todos desde Aristóteles, mas uma mistura de raios de cores diferentes, refratadas em ângulos diferentes.

Em 1699, Newton construiu um telescópio refletor usando espelhos, instrumento altamente eficaz e de tamanho surpreendentemente pequeno. Era capaz de gerar imagens 9 vezes maiores do que os telescópios refratores da época, mesmo com um comprimento 4 vezes menor.

Um aspecto surpreendente e não muito divulgado da história de Isaac Newton é que durante muitos anos ele se ocupou de uma série de questões ligadas à religião, misticismo e Alquimia, particularmente propostas para transformar metais comuns em ouro.

Retornando às questões das quais se ocupa esta pesquisa, é preciso observar que a matemática foi um dos primeiros interesses de Newton, que o ocupava seriamente desde pelo menos 1663.

Embora a Universidade de Cambridge seja hoje um centro de excelência matemática, nos tempos de Newton cursos de matemática não eram oferecidos para os alunos de graduação, eram dadas conferências eventuais, e o aprendizado corria mais com estudo solitário e discussões. Um professor que incentivou Newton nesse caminho e com quem manteve um nível de colaboração foi Isaac Barrow. Entre 1664 e 1665 Barrow deu um ciclo de aulas de temas filosóficos, frequentadas por Newton, que abordavam problemas sobre espaço, tempo e movimento.

Apesar de existirem poucos livros dirigidos a alunos naquela época, Newton era capaz de compreender a literatura matemática disponível, fazendo anotações e experimentando ideias que o interessavam. Tinha uma inclinação sobretudo para o autodidatismo. Assim, se familiarizou com as melhores obras de matemática daquela época, o que evidenciam seus trabalhos publicados na biblioteca da Universidade de Cambridge. Eles demonstram o cuidado e atenção dedicados à obra *"Arithmetica"* de Vallis e à *"Geometria"* de Descartes, editada por Shooten em 1659.

No entanto, o fundamento das pesquisas significativas da primeira fase da carreira de Newton foi lançado exatamente no período do final do verão de 1665 até o final do verão de 1667, no qual a Universidade de Cambridge fechou suas portas devido a um surto de peste bubônica, enviando seus alunos para casa.

Embora em pesquisas anteriores Newton tivesse traçado o esboço de uma demonstração geométrica do Teorema Fundamental do Cálculo, na linha de demonstrações que foram posteriormente apresentadas por Barrow e Gregory, parece que ele acabou preferindo referir-se à reversibilidade das operações, de modo que a diferenciação e a integração são essencialmente consideradas mutuamente inversas.

3.1 AS FLUXÕES E OS FLUENTES

Antes de escrever sua grande obra conhecida como *“De analysi per aequationes numero terminorum infinitas”,* de 1699, Newton fez vários experimentos com diversas notações e demonstrações. Em um pequeno tratado escrito em 1666 ele desenvolveu um levantamento bastante compreensivo de uma variedade de problemas baseados na geração de curvas por movimentos, que pode ser reduzido simplesmente ao espaço percorrido por qualquer movimento com aceleração ou retardo, ou seja, “determinação do movimento” e “velocidade”. Então a partir dessas idéias e estudos ele fundamentou o que denominava o “método das fluxões”.

Newton comunicou essas ideias geniais a Barrow em 1669 e no ano de 1671 desenvolve completamente o método, que só foi publicado postumamente no ano de 1736 na obra *“Method of Fluxions”*. Parte desses estudos sobre o método das fluxões se origina em abordagens desenvolvidas por Galileu, Torriceli e Barrow ainda com um enfoque essencialmente medieval, o que dificulta acompanhar o seu raciocínio.


LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.
A PARIS,
M. DCC. XL.

Figura 2: Reprodução de capa de uma tradução para o francês de *“Method of Fluxions”*, datada de 1740.

No inicio dos seus estudos sobre o método das fluxões, Newton tratava x e y como grandezas independentes, considerando os movimentos unidimensionais de dois corpos, e não como coordenadas de um movimento bidimensional. Com isso, seus problemas iniciais eram resolvidos de uma forma abstrata, como podemos ver através da **Figura 3**. Apesar disso, Newton também tinha em mente a possibilidade dessas grandezas serem as coordenadas de um movimento geométrico bidimensional. Tudo isso era feito porque o método de Newton consistia em reduzir problemas geométricos sobre as curvas a problemas referentes a movimentos de corpos. Com isso, muitos leitores ao lerem os seus textos podem ficar confusos. Efetivamente, não é tão fácil acompanhar o raciocínio de Newton e alguns textos podem parecer ambíguos.

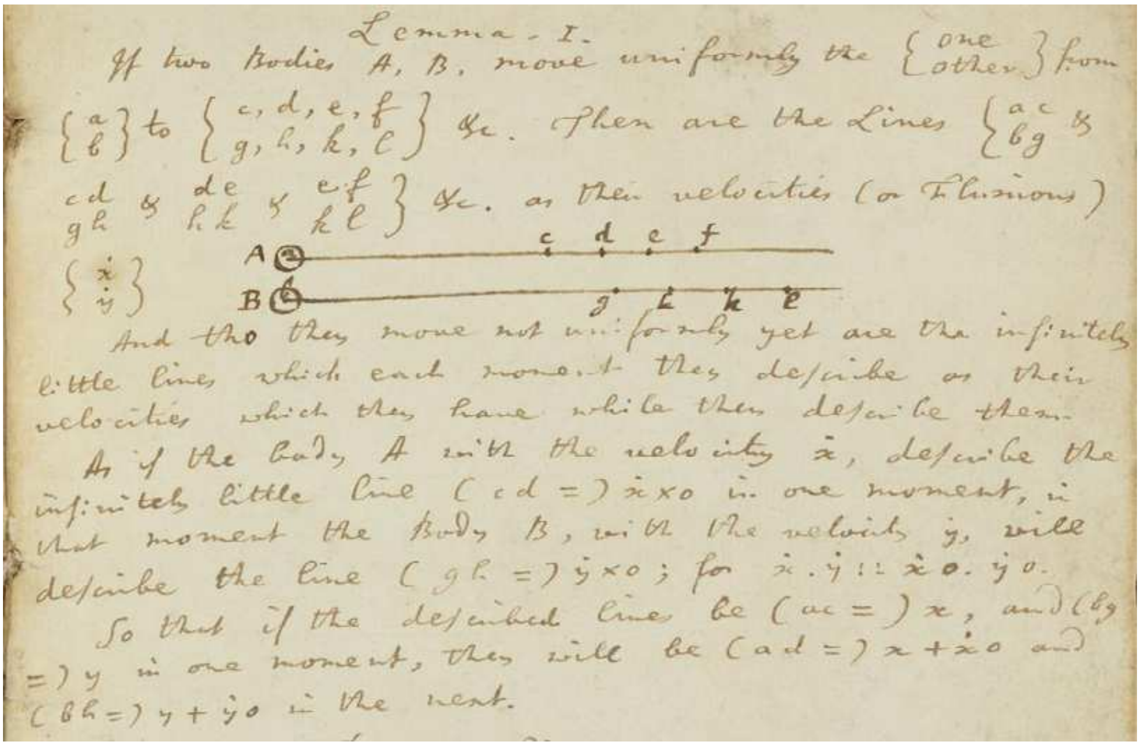

Lemma. I.
If two Bodies A, B, move uniformly the $\left\{\begin{matrix} \text{one} \\ \text{other} \end{matrix}\right\}$ from $\left\{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ to $\left\{\begin{matrix} c, d, e, f \\ g, h, k, l \end{matrix}\right\}$ &c. Then are the Lines $\left\{\begin{matrix} ac \\ bg \end{matrix}\right.$ & $\begin{matrix} cd \\ gh \end{matrix}$ & $\begin{matrix} de \\ hk \end{matrix}$ & $\left.\begin{matrix} ef \\ kl \end{matrix}\right\}$ &c. as their velocities (or Fluxions) $\left\{\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix}\right\}$
A c d e f
B g h k l
And tho they move not uniformly yet are the infinitely little lines which each moment they describe as their velocities which they have while they describe them.
As if the Body A with the velocity $\dot{x}$, describe the infinitely little line $(cd =)\ \dot{x} \times o$ in one moment, in that moment the Body B, with the velocity $\dot{y}$, will describe the line $(gh =)\ \dot{y} \times o$; for $\dot{x} . \dot{y} :: \dot{x}o . \dot{y}o$.
So that if the described lines be $(ac =)\ x$, and $(bg =)\ y$ in one moment, they will be $(ad =)\ x + \dot{x}o$ and $(bh =)\ y + \dot{y}o$ in the next.

Figura 3: Manuscrito original de Newton propondo o estudo do movimento de dois corpos A e B que se moveriam ao longo das linhas desenhadas.

Em seu método Newton afirmava que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto no tempo. A uma grandeza variável ele dava o nome de *fluente* (quantidade que flui), representado por y, e à sua taxa de variação ele dava o nome de *fluxão do fluente*[1], representado por $\dot{y}$, que também recebia o nome de *velocidade*, de inspiração na mecânica. Analogamente, eram usadas as notações[2] x e $\dot{x}$, z e $\dot{z}$. Newton não deixa bem definido a partir de conceitos prévios o que seria a fluxão do fluente (velocidade), simplesmente representa como fosse um conceito intuitivo assumido tacitamente.

Em seu método, Newton parte de uma relação entre os fluentes e a partir daí obtém uma relação entre as fluxões dessas quantidades. Para isso era necessário introduzir o conceito de *momento de um fluente*, que se tratava do incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente x em um intervalo de tempo infinitamente pequeno, representado[3] como o. É importante evitar a confusão de o com o número 0 (zero). Newton propõe que o momento do fluente x seja $\dot{x}o$, produto do *fluxão do fluente* $\dot{x}$ pelo incremento infinitamente pequeno o. Na verdade, essa é uma hipótese muito forte e até mesmo incompatível com a visão atual do que é uma derivada ou uma velocidade. Uma derivada seria o limite do quociente entre o incremento da grandeza e o incremento temporal quanto o incremento temporal tende a zero. Portanto, supor que o incremento da grandeza seja igual ao produto da derivada pelo incremento temporal deixa lacunas que apenas o conceito de limite viria a preencher.

Assim, Newton trabalha com as seguintes grandezas:

$x =$ *fluente;*

---

[1] Essa nomenclatura parte de uma simples analogia com conceitos ligados ao movimento de fluidos, nos quais o fluente poderia representar o volume de água em um açude enquanto a fluxão representa fisicamente a vazão de um córrego que sai de um açude. Na nomenclatura matemática moderna o fluente seria denominado de função y e a fluxão do fluente correspondente seria a derivada da função dy/dt, com t representando o tempo.

[2] Atualmente a convenção de representar a derivada por meio de um ponto ainda é adotada, sobretudo em Física, especificamente para as derivadas com respeito ao tempo.

[3] Na nomenclatura moderna representamos um incremento pequeno, mas finito, como Δt, e apenas em uma etapa posterior consideramos o processo de fazer esse incremento tender a zero, representado graficamente pelo símbolo dt. Essa distinção não era feita por Newton.

$\dot{x} =$ *fluxão do fluente (velocidade);*
$o =$ *incremento infinitesimal do tempo;*
$\dot{x}o =$ *momento (incremento infinitesimal) do fluente;*

Para mostrar a abordagem usada por Newton em um exemplo na linha daqueles tratados em sua época, consideremos que seja dada a seguinte relação entre os fluentes x *e* y:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Onde x e y podem ser vistos como as coordenadas de dois corpos A e B que se movem em uma dimensão, tal como ilustrado na **Figura 3**, mas também podem ser pensados como as coordenadas cartesianas de um único corpo que descreve uma curva cúbica no plano.

Buscamos obter a relação entre os fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ desses fluentes, tendo em vista que as quantidades x *e* y*,* depois do intervalo infinitamente pequeno o, passam a ser $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$, ainda satisfazendo a mesma relação proposta mais acima. Obtemos

$$\begin{aligned} &x^3 + 3x^2\left(\dot{x}o\right) + 3x\left(\dot{x}o\right)^2 + \left(\dot{x}o\right)^3 - ax^2 - 2ax\left(\dot{x}o\right) - a\left(\dot{x}o\right)^2 \\ &+ axy + ay\left(\dot{x}o\right) + a\left(\dot{x}o\right)\left(\dot{y}o\right) + ax\left(\dot{y}o\right) \\ &- y^3 - 3y^2\left(\dot{y}o\right) - 3y\left(\dot{y}o\right)^2 - \left(\dot{y}o\right)^3 = 0 \end{aligned}$$

Para ficar mais claro, reagrupamos os termos:

$$\begin{aligned} &\left(x^3 - ax^2 + axy - y^3\right) + 3x^2\left(\dot{x}o\right) + 3x\left(\dot{x}o\right)^2 + \left(\dot{x}o\right)^3 - 2ax\left(\dot{x}o\right) - a\left(\dot{x}o\right)^2 \\ &+ ay\left(\dot{x}o\right) + a\left(\dot{x}o\right)\left(\dot{y}o\right) + ax\left(\dot{y}o\right) - 3y^2\left(\dot{y}o\right) - 3y\left(\dot{y}o\right)^2 - \left(\dot{y}o\right)^3 = 0 \end{aligned}$$

Usando que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ na equação, teremos

$$3x^2\left(\dot{x}o\right)+3x\left(\dot{x}o\right)^2+\left(\dot{x}o\right)^3-2ax\left(\dot{x}o\right)-a\left(\dot{x}o\right)^2$$
$$+ay\left(\dot{x}o\right)+a\left(\dot{x}o\right)\left(\dot{y}o\right)+ax\left(\dot{y}o\right)-3y^2\left(\dot{y}o\right)-3y\left(\dot{y}o\right)^2-\left(\dot{y}o\right)^3=0$$

Newton postulou que podemos, em qualquer problema, desprezar os termos que aparecem multiplicados por potências de o maiores ou iguais a 2 e obter assim uma equação envolvendo as coordenadas x e y do ponto gerador da curva e seus fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Ele despreza os termos sem nenhuma justificativa, simplesmente porque sabe intuitivamente que são termos infinitamente pequenos, ainda menores que os outros. Fazendo isso no exemplo tratado, ficamos com

$$3x^2\left(\dot{x}o\right)-2ax\left(\dot{x}o\right)+ay\left(\dot{x}o\right)+ax\left(\dot{y}o\right)-3y^2\left(\dot{y}o\right)=0$$

Então, dividindo por o, obtemos

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0$$

A relação também pode ser escrita como

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-2ax+ay+ay}{3y^2-ax}$$

Se verificarmos de maneira atual o que Newton fez em seu método dos fluentes, veremos que é a mesma coisa que fazer a derivação implícita de uma função $y(x)$ obtida como curva de nível da superfície $z=f(x,y)$ em $z=0$.

No exemplo já tratado, tome

$$f(x,y)=x^3-ax^2+axy-y^3=0$$

f é uma função diferenciável com derivadas parciais

$$f_x=3x^2-2ax+ay$$

$$f_y=ax-3y^2$$

Derivando implicitamente $f(x, y(x))$ com respeito a x, obtemos

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

Portanto

$$-f_x \Big/ f_y = \frac{3x^2 - 2ax + ay + ay}{3y^2 - ax} = \frac{dy}{dx}$$

Imaginamos agora que a curva tratada seja uma trajetória temporal $r(t) = (x(t), y(t))$ de um objeto no plano com velocidade $v(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Queremos obter uma relação entre as componentes da velocidade a partir da derivada da curva $y(x)$ já obtida. Fazemos

$$\frac{d}{dt} y(x(t)) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

E portanto,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2ax + ay + ay}{3y^2 - ax}$$

Retornamos assim à relação entre os fluxões (velocidades) obtida por Newton.

Para termos também uma visualização gráfica, consideraremos o **Gráfico 1**, que representa o movimento bidimensional de uma partícula. Supomos que os pontos $P(x, y)$ e $P'\left(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o\right)$ são as posições da partícula no tempo inicial e no tempo inicial mais o incremento o. A reta PP' não é a tangente à curva no ponto P, mas dela se aproxima a medida que o incremento o vai ficando pequeno. Em linguagem moderna, a reta PP' coincidirá com a tangente quando $o \to 0$, com sua inclinação $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ coincidindo com a derivada $\frac{dy}{dx}$.

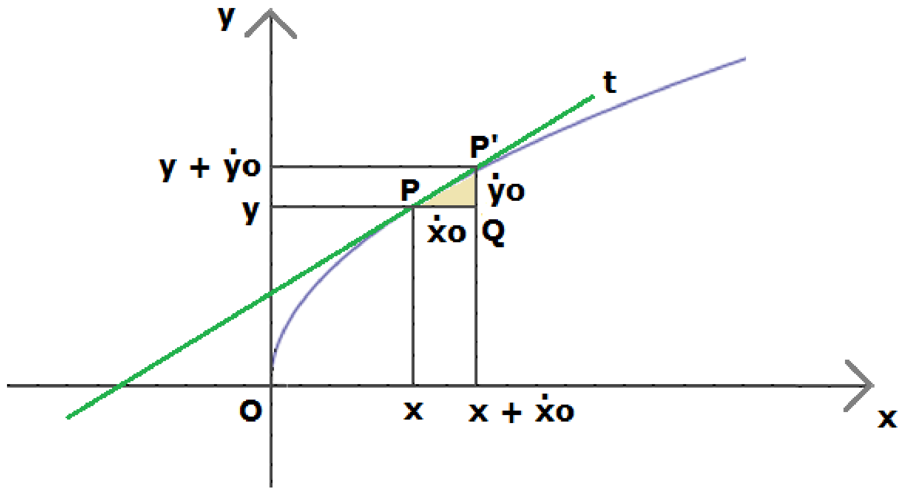


Gráfico 1: Representação de um objeto qualquer.

Não é fácil entender as operações realizadas por Newton, em parte pela falta de um conceito preliminar de limite e em parte pelo contexto matemático sofisticado em que são construídas.

Nos cursos introdutórios de Cálculo (veja, por exemplo, STEWART 2006), a noção de derivada é introduzida para funções de uma variável $y(x)$, considerando-se variações infinitesimais da variável independente x. Por outro lado, Newton introduziu suas noções em um contexto (na visão moderna) de trajetórias em duas dimensões, que modernamente só são estudadas em um segundo curso de Cálculo.

A falta de um conceito adequado de limite também pesa contra a compreensibilidade da argumentação de Newton. São desprezados termos de ordens maiores ou iguais a dois no incremento o sem uma justificativa convincente, ainda que em retrospectiva esses passos possam ser justificados com o conceito de limite. Outro aspecto relacionado a esse é que Newton considera que os momentos (incrementos infinitesimais) em x e y são $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$. Como os fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ estão sendo definidos nesse momento, isso é perfeitamente possível. Assim, $\dot{x}$ é definido como o quociente entre o incremento infinitesimal em x e o incremento infinitesimal temporal o. Porém, Newton também pretende atribuir a $\dot{x}$ a noção de "velocidade", sem justificar adequadamente a identificação dessa grandeza matemática nova com um conceito físico preliminar.

A questão do infinitésimo usado por Newton no método das fluxões não era algo exclusivo dele. Seus predecessores e contemporâneos já haviam abordado a questão com argumentos análogos.

Podemos ver isso claramente no trabalho de Pierre de Fermat (1601-1665) para determinar os máximos e mínimos de uma curva. A ideia era que na vizinhança de um máximo ou mínimo, uma função permaneceria invariante sob deslocamentos infinitesimais de seu argumento. Essa é exatamente a mesma ideia usada na matemática moderna, quando se busca identificar os pontos extremos a partir dos valores do argumento para os quais a derivada se anula. No caso do método de Fermat, já havia uma significativa perda de clareza devido à falta de um conceito bem estruturado de limite.

O raciocínio de Fermat era que se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo em x e se E é um número pequeno, então o valor de $f(x-E)$ é quase igual ao de $f(x)$. Para identificar o ponto de extremo faz-se $f(x) = f(x-E)$, daí obtém-se x em termos de E e, para tornar a igualdade correta, toma-se $E = 0$. Porém, em geral a obtenção desse x envolvia uma divisão por E, o que tornava o passo seguinte extremamente questionável.

Por exemplo, considere o problema de dividir uma quantidade Q em duas partes, $Q = x + (Q - x)$, tais que seu produto $f(x) = x.(Q-x)$ seja máximo. Em primeiro lugar, fazemos $f(x) = f(x-E)$:

$$
\begin{aligned}
&x.(Q-x) = (x-E).[Q-(x-E)] \\
&0 = 2xE - E^2 - EQ \\
&0 = 2x - E - Q \\
&x = \frac{E+Q}{2}
\end{aligned}
$$

Tomando $E=0$, segue $x=\frac{Q}{2}$, mesma solução obtida pelos métodos modernos de otimização. Embora a lógica de Fermat deixasse a desejar, é clara a analogia com o processo de derivação usual, seguido da obtenção das raízes da derivada. Os questionamentos que se colocaria sobre o incremento E que mais tarde era tomado valendo zero são os mesmos que se faria a respeito do incremento infinitesimal o proposto por Newton, pertencente a uma geração posterior de matemáticos.

Apesar das críticas que se pode fazer ao rigor matemático dos trabalhos originais de Newton, ele próprio era bastante meticuloso e autocrítico de seus resultados. Suas resoluções eram plenamente satisfatórias para a época e sua contribuição para a Matemática em geral e principalmente para o Cálculo foram excepcionais.

4. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Figura 4: Representação de Leibniz.

Os temas que interessavam a Leibniz em sua juventude eram o Direito e a Filosofia, formações que obteve na Universidade de Leipzig, cidade alemã onde nasceu. Em 1666 recebeu o grau de doutor em Direito pela Universidade de Altdorf, pois a burocracia universitária de Leipzig o considerava muito jovem para essa honraria aos 20 anos de idade.

Em 1668 Leibniz se tornou servidor público dos estados alemães e quatro anos depois foi para Paris cumprindo missão diplomática. A missão lhe deu oportunidade para satisfazer seus vários interesses em todos os campos, de erudição e artes. Seus conhecimentos acerca da matemática na época ainda eram superficiais, mesmo considerando que já escrevera um pequeno tratado sobre Análise Combinatória, assunto motivado por seus estudos de Lógica.

Com toda essa diversidade de interesses e contribuições, que incluíam história, religião, política, história natural, geologia, física, mecânica, matemática, tecnologia e filosofia, Leibniz muitas vezes tem sido considerado um erudito universal. Em geral, Leibniz partia de ideias universais e as aplicava em campos específicos.

Leibniz era um grande otimista e idealista. Ele acreditava no poder de reunir as correntes religiosas conflitantes de seu tempo numa única igreja cristã universal. Acreditava também que poderia encontrar um caminho para a cristianização da China através do que entendia ser a imagem da criação na aritmética binária, também convém lembrar que Leibniz identificou em traduções de manuscritos chineses que eles aparentemente conheciam a representação binária de números (o famoso I Ching), daí a inferência do um – divindade, entre outros. Leibniz identificava Deus com a unidade e o nada com o zero. Imaginava que, assim como na aritmética binária todos os números se expressam por meio da unidade e do zero, tudo o mais tivesse sido criado a partir da ação de Deus e sua negação. Essa idéia agradava tanto a Leibniz que a comunicou ao jesuíta Grimaldi, presidente do conselho de Matemática da China, na esperança de que ele pudesse converter o imperador chinês, que era muito ligado à ciência, ao cristianismo.

Outro exemplo das associações teológicas de Leibniz está na identificação dos números imaginários com os espíritos sagrados das Escrituras Cristãs, entre as coisas que são e não são.

Leibniz também foi ativo em outros campos da matemática: projetou e construiu uma máquina calculadora que executava a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão; estudou e explorou a teoria dos determinantes, na qual o moderno uso dos índices duplos tornou-se muito útil. Também se dedicou aos estudos dos números algébricos.

Leibniz usou o método dos coeficientes indeterminados para a determinação da expansão em série de $\log(1+x)$, trabalho que foi publicado em 1693, já com algumas adaptações notacionais. Assim ele deduziu expansões em séries para a função logarítmica, a função exponencial, o seno e o coseno.

Comumente atribui-se a Leibniz a criação da teoria dos determinantes em 1693, visando o estudo de sistemas de equações lineares, embora considerações semelhantes já tivessem sido feitas antes no Japão por Seki Kowa (1642-1708).

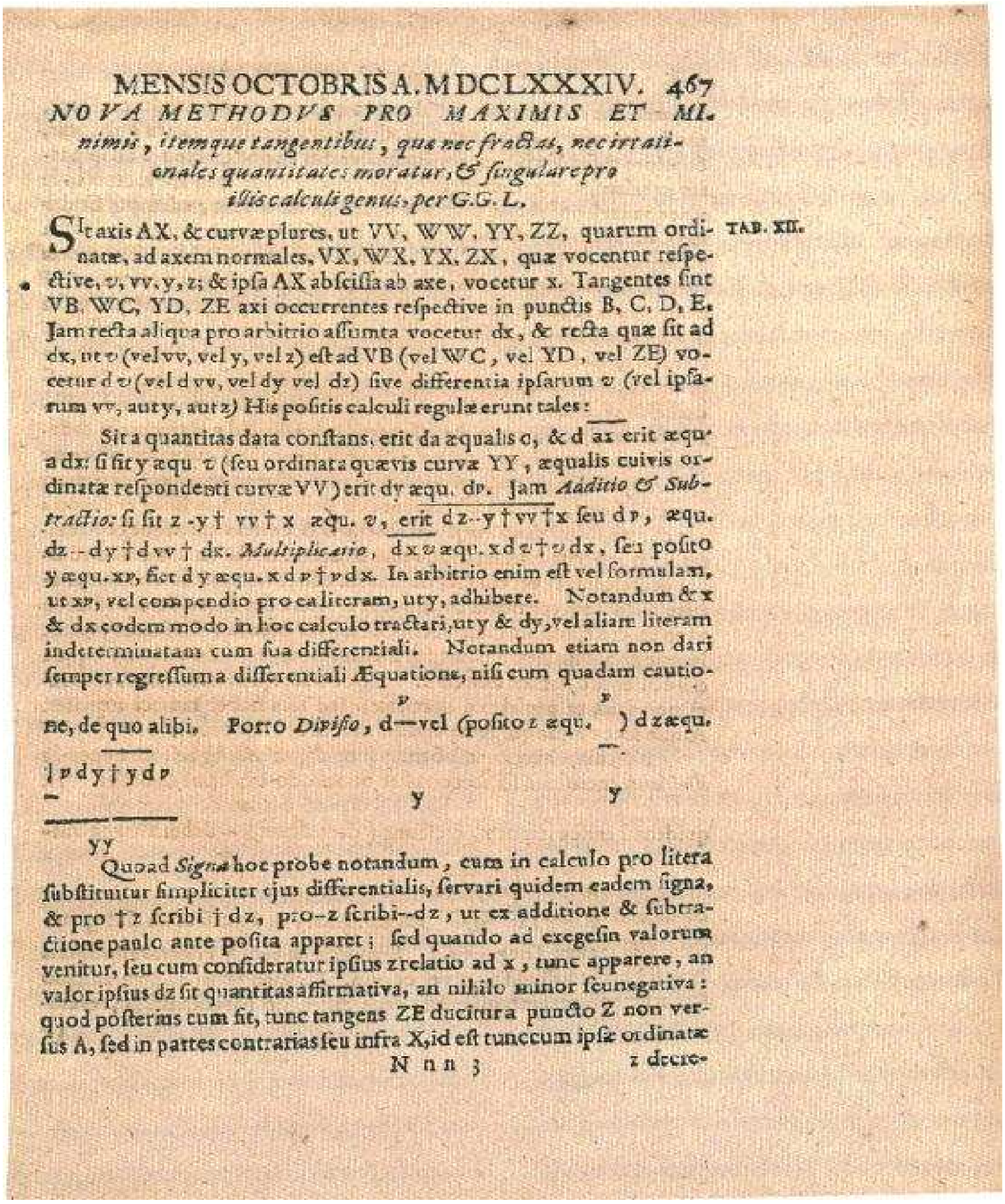
Leibniz também contribuiu muito para lançar os fundamentos da teoria das envoltórias e definiu círculo osculador, mostrando sua importância no estudo das curvas.

Leibniz em 1676 chegou à mesma conclusão que havia chegado Newton alguns anos antes sobre o Cálculo Diferencial. Para qualquer função, as operações para encontrar "somas" (integrais) ou "diferenças" (diferenciais) poderiam ser sempre aplicadas[4]. O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar notações apropriadas para essas operações. Um incremento diferencial para Leibniz era uma diferença entre dois valores infinitamente próximos de uma variável. Preocupado com as simbologias, fórmulas e regras, Leibniz acabou optando pela notação dx e dy para representar as diferenciais de x e y, respectivamente.

A grande descoberta do Cálculo por Leibniz não foi publicada imediatamente, mas somente em 1684. Ele teria esperado ainda mais, se alguns artigos prévios de E. W. Von Tschirnhaus (1651-1708) não o tivessem incitado a isso. Os artigos de Leibniz foram publicados nas *Acta Eruditorum Lipsiensium*[5] (Atas dos Eruditos de Leipzig), primeiro periódico da Alemanha, fundado em 1682. O primeiro artigo sobre o Cálculo Diferencial de Leibniz, publicado em 1684, apresentava um novo método para a obtenção de máximos, mínimos e tangentes, conforme ilustrado na **Figura 5**.

[4] Hoje sabemos que nem todas as funções são deriváveis em todos os pontos, ou mesmo integráveis em todos os intervalos. Mas o processo de derivação ou integração, caso seja factível, é independente da função.

[5] *Acta Eruditorum Lipsiensium* foi a primeira revista científica alemã, inspirada no *Journal dês Savants* francês e publicada mensalmente entre 1682 e 1782. Fundada em Leipzig por Otto Mencke, seu primeiro editor, e por Gottfried Wilhelm Leibniz.



MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G. L.

TAB. XII.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d v (vel d vv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio:* si sit z - y † vv † x æqu. v, erit d z - y † vv † x seu d v, æqu. dz - dy † d vv † dx. *Multiplicatio*, d x v æqu. x d v † v dx, seu posito y æqu. xv, fiet d y æqu. x d v † v d x. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) d z æqu. $\frac{\mp v dy \pm y dv}{yy}$

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro † z scribi † d z, pro - z scribi - d z, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitura puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

Nnn 3 z decre-

Figura 5: Artigo de Leibniz com um novo método para determinação de máximos e mínimos, publicado em *Acta Eruditorum Lipsiensium*.

Depois da descoberta do cálculo, Leibniz contribuiu com o desenvolvimento de técnicas, tais como o uso dos coeficientes indeterminados, o uso de determinação dos contornos, e a integração das funções racionais mediante frações parciais e a denominada Regra de Leibniz para produtos.

Em 1700, Leibniz participou da fundação da Academia de Ciências de Berlim e posteriormente se empenhou em criar academias semelhantes em Dresden, Viena e São Petersburgo.

As pesquisas de Leibniz em torno de sua *Characterística Generalis* levaram-no a conceber planos de uma teoria de lógica matemática, estruturada em regras formais, que obviaria as necessidades do raciocínio. Nessa direção, Leibniz conseguiu, em terminologia corrente, formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão de classes e a implicação de proposições.

Os últimos sete anos da vida de Leibniz foram amargurados pela polêmica com Newton e seus partidários, acerca da primazia da criação do Cálculo Diferencial. Conta-se que quando faleceu, em 1716, apenas seu fiel secretário compareceu ao funeral.

4.1 OS CONCEITOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL DE LEIBNIZ

Segundo BARON e BOS, 1985:

A diferencial de uma variável y *é a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de* y. *Para uma curva traçada em relação a um eixo-*x *e a um eixo-*y *(ver figura) Leibniz considera a sequência das ordenadas* y *e a sequência correspondente das abcissas* x. *As ordenadas estão situadas infinitamente próximas;* dy *é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas* y *consecutivas e* dx *é a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas* x.

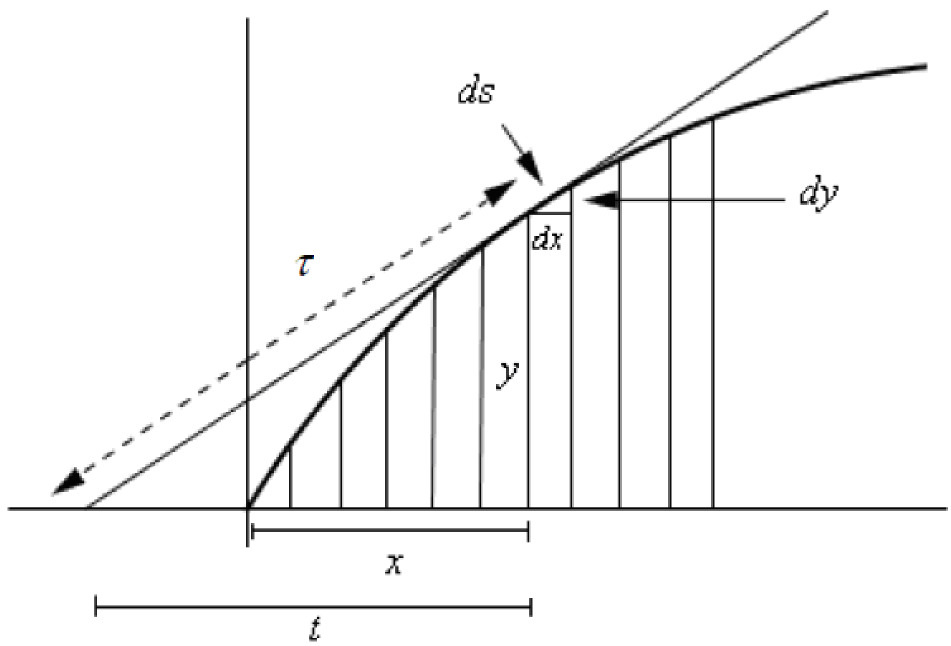


Gráfico 2: Representação gráfica de dy e dx infinitamente pequena, retirada de BARON e BOS, 1985.

Para um leitor moderno não fica claro qual característica tornaria duas ordenadas ou duas abscissas infinitamente próximas. Porém, a visão de Leibniz estava bem encaixada dentro do contexto da época. Acima de tudo, ela é seguida de regras operacionais importantes para viabilizar cálculos posteriores. Então Leibniz considerava a diferencial sendo a diferença entre dois valores infinitamente próximos de variável dada. Para que o Cálculo ficasse mais bem descrito, ele criou as notações dy e dx para representar as diferenciais de y e x.

Em suas operações de Cálculo, Leibniz considerava que as diferenças eram infinitamente pequenas, com graus de pequeneza que poderiam ser comparados, permitindo o abandono de termos de grau superior.Ele dizia que a razão $dy : dx$ era finita, o que significava que dy e dx eram infinitésimos de mesmo grau. Por outro lado, esses infinitésimos poderiam ser desprezados quando confrontados com grandezas que não eram infinitesimais. Assim, ele poderia dizer que

$$x + dx = x$$

Afirmação essa que hoje seria melhor explicado usando o recurso do conceito de limite.

Esse artifício se refletia em resultados semelhantes para a comparação de grandezas infinitesimais de ordem superior. Por exemplo, uma vez que $a + dy = a$, podemos fazer

$$a.dx + dy.dx = (a + dy)dx = a.dx\,,$$

o que significava que o produto de diferenciais poderia ser desprezado quando confrontado com termos do mesmo grau das próprias diferenciais.

Com o objetivo de construir um método prático para calcular a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto (x, y) considerando variações até um segundo ponto $(x + dx, y + dy)$, que hoje chamaríamos de derivação da curva no ponto, Leibniz devia ter em mente que as diferenciais dy e dx podiam ter diferentes tamanhos, conforme a escolha do segundo ponto sobre a curva.

Porém, o quociente dy/dx ficaria bem definido à medida que as diferenciais se tornassem efetivamente infinitésimos e coincidiria com a inclinação y/t do triângulo ilustrado no **Gráfico 2**. Ou seja, coincidiria com a inclinação da tangente à curva no ponto. Mas sem um processo de limite, como fazer as diferenciais se tornarem efetivamente infinitésimos? A resposta operacional vinha exatamente da instauração de um regime de abandono das diferenciais de ordem superior quando confrontadas com diferenciais de ordem mais baixa.

Para que isso fosse feito de maneira mais direta, Leibniz introduziu regras de cálculo às quais recorremos até hoje:

$da = 0$ se a é constante

$d(u+v) = du + dv$

$d(u.v) = udv + vdu$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$d(u^n) = nu^{n-1}du$ (também válido para n racional ou negativo)

As regras de Leibniz seguem do abandono de diferenciais de ordens superiores. Por exemplo, para o produto,

$$\begin{aligned} d(u.v) &= (u+du).(v+dv) - uv \\ &= uv + udv + vdu + dudv - uv \\ &= udv + vdu + dudv \\ &= (u+du)dv + vdu \\ &= udv + vdu \end{aligned}$$

onde a última identidade segue da identificação de $u + du$ com u.

É importante lembrar que quantidades infinitamente pequenas não foram propriamente definidas e não foi provado que poderiam ser desprezadas com respeito às quantidades finitas. Leibniz fazia isso de forma intuitiva.

5. CONFLITOS ENTRE NEWTON E LEIBNIZ

Não podemos deixar de falar que as descobertas feitas por Newton e Leibniz foram de grande importância para o Cálculo Diferencial, mas junto com elas vieram muitos conflitos entre esses dois pensadores, provocando um enorme atraso no desenvolvimento matemática.

Nos anos 1670 Leibniz era uma figura se destacando cada vez mais na matemática européia, sobretudo após seu estabelecimento em Paris. Em 1673, aproveitando uma missão diplomática, Leibniz esteve pela primeira vez em Londres. Não consta que tenha se encontrado com Newton, mas sabe-se que travou conhecimento com vários matemáticos ingleses conhecedores de Newton e de seu trabalho, particularmente Henry Oldenburg e John Collins.

Na visita a Londres de 1673, um dos assuntos principais dos encontros científicos de Leibniz era o desenho da máquina de cálculo na qual trabalhava desde 1671 e que seria uma evolução da máquina desenvolvida anteriormente por Pascal, agora com a capacidade de fazer multiplicações. Leibniz naquele momento também tinha grande interesse na teoria de séries infinitas. Em Londres Leibniz adquiriu um exemplar do *Geometrical Lectures* de Isaac Barrow, predecessor de Newton na cátedra Lucasiana de matemática da Universidade de Cambridge.

Essa primeira visita a Londres e o contato com os matemáticos da época acabou convencendo Leibniz de que precisava investir mais em seus próprios estudos de matemática. Em 21 de novembro de 1675 Leibniz escreveu um manuscrito em que empregou pela primeira vez a notação

$$\int f(x)dx$$

Nesse mesmo manuscrito a regra de derivação do produto foi enunciada. Naquele momento nada do método dos fluxões de Newton havia sido publicado. É possível que Leibniz tivesse tido contato com uma parte dessa teoria através de conversas com outros matemáticos e de anotações esparsas que corriam. Mas mesmo que isso tenha acontecido, é até mesmo questionável se Leibniz teria reconhecido a conexão com seus próprios estudos, pois os métodos de Newton seguiam um viés geométrico que lhe pareceria estranho.

Os contatos diretos entre Newton e Leibniz começaram em 1676. Em junho daquele ano Newton escreveu uma carta para Oldenburg, que eventualmente chegou às mãos de Leibniz. Nessa carta Newton tratava do teorema binomial e de séries infinitas. Ele mencionava que todas as curvas mecânicas podiam ser reduzidas a series infinitas e ainda que as áreas e comprimentos de curvas e os volumes e áreas superficiais de sólidos podiam ser computados por meio dessas séries. Newton não discute seus fluxões nessa carta.

Essa primeira carta levou cerca de seis semanas para chegar às mãos de Leibniz. Assim, apesar da resposta de Leibniz para Newton ter sido escrita imediatamente, talvez tenha parecido ao inglês que a demora significava que o alemão estava relatando resultados obtidos já sob a influência de suas idéias. Em sua resposta Leibniz descrevia seu próprio trabalho sobre séries e pedia explicações sobre os argumentos expostos na primeira carta.

Newton escreveu uma segunda carta, agora dirigida diretamente a Leibniz, em 24 de outubro de 1676, mas que só chegou às mãos do destinatário em junho de 1677, pois Leibniz estava em Hanover naquele momento. Alguns autores acreditam que Newton já tinha desconfianças a respeito de Leibniz estar roubando suas idéias no momento em que escreveu essa carta. Ele menciona que tinha obtido um método geral para o traçado de tangentes, a determinação de máximos e mínimos e outros tópicos. Newton ainda não mencionava seus fluxões e fluentes, mas provavelmente dava a entender a Leibniz que tinha uma teoria similar àquela que ele estava desenvolvendo.

Em sua resposta à segunda carta de Newton, enviada em 1677, Leibniz fez uma descrição completa de seus métodos de cálculo diferencial e integral, incluindo a regra para a diferenciação de funções compostas.

Em 1684 Leibniz publicou o seu método do Cálculo Diferencial no artigo *Acta Eruditorum Lipsiensium* e em 1686 publicou outro artigo falando do Cálculo Integral. Por outro lado, o Método dos Fluxões de Newton só foi publicado em 1736.

O atraso na publicação dos resultados de Newton já era um fator complicador, ao qual se somou o atraso também na publicação dos resultados de Leibniz. Se ele tivesse publicado nove anos antes o artigo que só apareceria em 1684, grande parte da controvérsia seria desfeita, com o devido reconhecimento dos méritos de parte a parte. Porém, os atrasos combinados conspiraram para a formação de uma situação desconfortável na qual tanto Newton quanto Leibniz tinham argumentos a favor de suas primazias no desenvolvimento do Cálculo.

Em 1711 Newton publicou um artigo no *Transactions of the Royal Society of London* no qual acusava Leibniz de ter plagiado seu Método dos Fluxões. Leibniz responde dizendo que nunca teve acesso a esses resultados.

Com o passar do tempo a situação se complicava, pois cada dia mais pessoas eram envolvidas. De um lado Newton com seus aliados defendia ser o inventor do Cálculo. Do outro lado Leibniz não aceitava a falta de reconhecimento por suas descobertas. Com isso iniciava-se a disputa pela prioridade na invenção do Cálculo entre dois grandes matemáticos. Tudo isso fez com que surgissem grandes conflitos e acusação entre matemáticos da época pertencentes às facções que se opunham. Iniciava-se uma guerra de interesses.

Vários ataques foram feitos a Leibniz. Duillier (1664-1753) em 1699 falava que Newton havia sido o inventor do cálculo. Do mesmo modo, em 1708 John Keill (1671-1721) afirmava que Newton era o inventor do cálculo e que isso era comprovado pelas cartas publicadas por Wallis.

Esse acúmulo de ataques levou Leibniz a se queixar à Royal Society de Londres em um momento em que o próprio Isaac Newton era presidente dessa sociedade. A Royal Society instituiu um comitê para estudar o assunto, o qual concluiu em seu relatório que Newton havia sido efetivamente o inventor do

Cálculo. Porém, acredita-se que esse relatório foi escrito pelo próprio Newton, que conseguiu com sua influência a aprovação dos demais membros do comitê.

Toda polêmica e conflitos gerados para definir se era Newton ou Leibniz o inventor do cálculo foi muito prejudicial para a matemática da época. Estudiosos ocupavam grande parte de seu tempo e esforço somente reunindo argumentos para se posicionar.

Os partidários ingleses de Newton em geral acusavam Leibniz de plágio. E por esse motivo também relutavam em adotar o formalismo e as notações introduzidos por Leibniz, que eram mais eficientes. Tanto que são adotados universalmente hoje em dia. Ninguém se prestaria a fazer concessões ao lado “inimigo”. Tudo isso fez com que a o desenvolvimento do Cálculo na Inglaterra fosse retardado, ao contrário do que acontecia na Europa continental, onde partidários de Leibniz seguiam com um forte progresso em matemática e ciências exatas. O eixo principal de desenvolvimento da matemática foi se deslocando para a França e outros países do continente.

Na Suíça a família Bernoulli ao longo dos séculos XVII e XVIII inovava em vários campos da matemática, física e astronomia. Na França Rolle publicava seu *Méthodes pour résoudre les égalités* (1691), De Moivre estabelecia a relação entre funções trigonométricas e números complexos (1707) e La Hire calculava o comprimento da cardióide (1708). Na Itália Ceva publicava os primeiros tratados de economia matemática (1711) e Riccati fornecia as soluções de várias equações diferenciais (1724). Mais adiante Leonhard Euler (1707-1783), trabalhando na Suíça e na Rússia, se tornaria um dos cientistas mais importantes e produtivos de todos os tempos, com contribuições essenciais para vários ramos da matemática, física e várias outras ciências.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos no decorrer deste trabalho que as visões do Cálculo introduzidas por Newton e Leibniz diferiam em vários aspectos, apesar de ser possível sua unificação. O Cálculo de Newton era de natureza muito mais geométrica e mecânica, usando variáveis diretamente ligadas as curvas e o próprio conceito de velocidade. A visão de Leibniz era mais próxima da noção de função como entendemos hoje, tanto que sua formulação é a que prevalece nos livros didáticos publicados até hoje.

Porém, tanto a formulação de Newton quanto a de Leibniz padeciam de problemas graves na maneira com que as operações eram realizadas, particularmente o abandono de termos infinitesimais de ordem superior, que eram entendidos e justificados de forma sobretudo intuitiva, se a preocupação formal que hoje tem a matemática moderna. No Cálculo de hoje essas operações fundamentais são bem melhor explicadas com o conceito de limite bem definido. Mas não podemos esquecer que essas resoluções eram plenamente satisfatórias para a época.

Hoje a operação de diferenciação estabelece a relação entre uma função e sua função derivada. Ao contrário da visão do tempo de Newton, na qual calcular os fluxos de fluentes significava associar uma velocidade finita a um corpo que descreve uma trajetória. A visão de Leibniz era mais próxima da visão atual, apenas com algumas diferenças no tratamento e abandono dos termos de ordem superior, o que hoje é feito de forma rigorosa através de processos de limite. As regras de diferenciação estabelecidas por Leibniz são essencialmente as mesmas que adotamos hoje.

O mais interessante é que mesmo com essas maneiras diferente de se entender a derivada os resultados obtidos por Newton e Leibniz eram basicamente os mesmos e coincidem perfeitamente com o que obtemos na metodologia moderna.

O Cálculo introduzido por Newton e Leibniz foi extremamente produtivo para a matemática e as ciências exatas em geral, com a introdução de métodos concretos e gerais para o estudo e otimização de funções e para a determinação da evolução temporal de sistemas diversos.

Essa revolução também foi marcada pelas amargas disputas entre Newton e Leibniz e seus partidários a cerca da primazia na invenção do Cálculo, o que pode inclusive ter evitado uma evolução ainda mais rápida da matemática no século subsequente, sobretudo devido à relutância dos matemáticos da época em concordar sobre métodos e notações universais.

Apesar de tudo isso, Newton e Leibniz foram fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo, pois veio deles o pontapé inicial para os desenvolvimentos que levaram a Matemática ao ponto em que está hoje.

Pode-se assumir com boa dose se segurança que Newton desenvolveu o Cálculo primeiro em seu *Método dos Fluxões.* Mas também pode-se afirmar que poucos anos depois Leibniz já estava desenvolvendo seus conceitos de forma independente.

O fator que pode explicar essa aparente e surpreendente coincidência é que essas conquistas não devem ser vistas como eventos isolados. Pelo contrário, eram conquistas que a matemática da época exigia. Houve vários matemáticos precursores de tais ideias e que inclusive já haviam antecipado uma parte do formalismo, particularmente o francês Pierre Fermat, o inglês Isaac Barrow, entre outros.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Ed. Edgard Blücher, 1974.
- LEIBINIZ, G. W. **Nova methodus pro maximus et minimis.** In: Acta Eruditorum. Out 1684.
- NEWTON, Isaac. **Philosophie naturalis principia mathematica** (os princípios matemáticos da filosofia natural). Londres, 1687.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, São Paulo: UNICAMPO, 2004.
- STEWART, James. **Cálculo**. Volume 1/ James Stewart; Tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Gilli Martins. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- STEWART, James. **Cálculo**. Volume 2/ James Stewart; Tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Gilli Martins. – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-31662010000400002. Sci. stud. vol.8 no.4 São Paulo Dec. 2010
- http://phylos.net/matematica/hist-calculo/hc-cap2/
- BARON, Margaret E. e BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática – Origens e Desenvolvimento do Cálculo**, Ed. Universidade de Brasília 1985.
- **The MacTutor History of Mathematics Archive**, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html
- SASTRY, S. S. **The Newton-Leibniz controversy over the invention of the calculus**, http://pages.cs.wisc.edu/~sastry/hs323/calculus.pdf