

A FORÇA PERPENDICULAR AO PLANO GALÁCTICO E
A DISTRIBUIÇÃO DE MASSA NA ZONA LOCAL

Domingos Sãvio de Lima Soares

*Tese apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito par-
cial para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Setembro 1982

ÍNDICE

| | pag. |
|--|------|
| RESUMO ----- | v |
| ABSTRACT ----- | vi |
| CAPÍTULO 1: Introdução ----- | 1 |
| CAPÍTULO 2: A Solução para o Problema da Dinâmica Galáctica ----- | 4 |
| 2.1 - Dinâmica Estelar Clássica ----- | 4 |
| 2.2 - A Equação de Boltzmann ----- | 6 |
| 2.3 - As Equações Hidrodinâmicas e a Dinâmica da Galáxia ----- | 9 |
| CAPÍTULO 3: A Componente z da Força Galáctica ----- | 13 |
| 3.1 - O Modelo do Disco Infinito ----- | 13 |
| 3.2 - Trabalhos Anteriores ----- | 17 |
| CAPÍTULO 4: Cálculo da Densidade de Massa Local ----- | 24 |
| 4.1 - Método ----- | 24 |
| 4.2 - Grupo Estelar Utilizado ----- | 28 |
| 4.3 - Densidade Local ----- | 30 |
| CAPÍTULO 5: Distribuição de Massa Local ----- | 35 |
| 5.1 - Componentes Observados da Densidade de Massa Local ----- | 35 |
| 5.2 - Componente Hidrodinâmico da Densidade na Vizinhança do Sol ----- | 36 |
| CAPÍTULO 6: Força K_z na Vizinhança do Sol ----- | 42 |
| 6.1 - Método ----- | 42 |
| 6.2 - Distribuição de Densidade para as Estrelas KM ----- | 44 |
| 6.3 - Força $K_z(z)$ ----- | 46 |

| | pag. |
|---|------|
| CAPÍTULO 7: <i>Discussão dos Resultados, Conclusões e</i> | |
| <i>Perspectivas</i> ----- | 51 |
| 7.1 - <i>Densidade Local</i> ----- | 51 |
| 7.2 - <i>Força $K_z(z)$</i> ----- | 53 |
| 7.3 - <i>Perspectivas</i> ----- | 55 |
| BIBLIOGRAFIA ----- | 57 |
| APÊNDICE A: <i>O Teorema de Liouville e a Dinâmica</i> | |
| <i>Estelar</i> ----- | 60 |
| APÊNDICE B: <i>Dedução das Equações Hidrodinâmicas</i> ----- | 63 |
| APÊNDICE C: <i>A Equação de Poisson</i> ----- | 72 |
| APÊNDICE D: <i>Solução da Equação para $\rho_E(z)$</i> ----- | 74 |

A componente do campo gravitacional galáctico perpendicular ao plano galáctico, na vizinhança do Sol, é obtida através da integração unidimensional da equação de Poisson. O resultado concorda com os limites calculados por Quiroga (1980) e não difere substancialmente de resultados clássicos (Woolley, 1957; Oort, 1960), apesar de indicar que o disco galáctico é um pouco mais estreito do que tem sido suposto.

A densidade de massa na zona local é calculada a partir de um método dinâmico similar ao introduzido por Oort (1932). Avalia-se um termo usualmente desprezado na equação hidrodinâmica e que revela-se como o provável responsável pela sobreestimação da densidade local. O resultado final de $0,11 - 0,12 M_{\odot}/\text{pc}^3$ concorda com o valor da densidade obtido pela observação direta.

A distribuição de densidade na direção perpendicular ao plano galáctico é postulada a partir de dados observacionais recentes de estrelas KM (Uppgren, 1978; Uppgren et al., 1981). Este grupo estelar é satisfatoriamente representativo no que se refere à massa total da Galáxia. Os resultados encontrados para a força e densidade podem ser melhorados se esta distribuição for determinada diretamente da observação; um programa observacional é proposto.

ABSTRACT

The component of the galactic gravitational field perpendicular to the galactic plane, in the neighbourhood of the Sun, is obtained through unidimensional integration of Poisson's equation. The result agrees with limits calculated by Quiroga (1980) and does not essentially differ from classic results (Woolley, 1957; Oort, 1960). Nevertheless it indicates that the galactic disk is somewhat narrower than has been supposed.

The mass density in the local zone is calculated with a dynamic method similar to that introduced by Oort (1932). A term usually neglected in the hydrodynamic equation is evaluated and probably such a term is responsible for the overestimated local density. The final result of $0,11 - 0,12 M_{\odot}/pc^3$ agrees with the density value obtained by direct observation.

The density distribution in the direction perpendicular to the galactic plane is postulated from recent observational data concerning KM stars (Uggren, 1978; Uggren et al., 1981). This stellar group is satisfactorily representative of the Galaxy as a whole in terms of mass population. The results for density and force can be improved if this distribution is determined directly from observations; an observational program is proposed.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas fundamentais da Astrofísica é o da determinação da densidade de massa na vizinhança do Sol. Medidas diretas desta massa só podem ser feitas em zonas perto do Sol ou em altas latitudes galácticas, no caso de distâncias maiores.

A maior parte da massa galáctica está concentrada perto do plano galáctico. Como esta zona contém uma alta quantidade de poeira interestelar, a visibilidade das estrelas fica restrita a uma faixa de distâncias, inferior a 1 ou 2 kpc, que depende do tipo espectral. Por exemplo, as estrelas OB podem ser observadas além desta faixa pois são muito brilhantes. Entretanto isto não resolve o problema já que a grande maioria da massa galáctica está composta por estrelas fracas F, G, K e M, ou seja, o material decisivo para a contagem está mais afetado pela absorção interestelar.

Outro método para se avaliar esta massa é baseado num estudo dinâmico do sistema galáctico. O cálculo dinâmico da densidade foi feito originalmente por Oort (1932) mas já haviam antecedentes em Kapteyn (1922). Estudos recentes têm sido feitos, com maior disponibilidade de dados observacionais e a introdução de vários aperfeiçoamentos (Quiroga, 1980; House e Kilkenny, 1980; Dessureau e Uppgren, 1975; Jones, 1972; Perry, 1969; Woolley e Stewart, 1967; Oort, 1960; Hill, 1960).

A componente mais significativa do campo local de forças é a perpendicular ao plano galáctico. Os métodos usuais para se avaliar esta componente e a densidade de massa são, respectivamente, a integração unidimensional da equação de Poisson e a solução simultânea do sistema formado pela equação de Poisson e pela equação hidrodinâmica simplificada. O primeiro caso requer um bom conhecimento da função densidade estelar, ao menos

para um dado tipo espectral e o segundo que a dispersão de velocidades es telares não dependa das coordenadas.

O tratamento completo do problema dinâmico da Galáxia é fei to através do sistema de equações hidrodinâmicas mais a equação de Poisson. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares cuja solução analítica é desconhecida. A solução para a componente perpendicu lar do campo local é obtida, portanto, por uma forma reduzida do sistema de equações mencionado acima no qual se consideram dois termos de energia: um, a energia "térmica" das estrelas, dada por seus movimentos aleatórios e de finida pelas dispersões de suas velocidades, e, outro, a energia "hidrodinâ mica", dada pelo movimento sistemático devido ao campo galáctico de forças.

No presente trabalho, utilizou-se na construção da função den sidade estelar um grupo estelar de maior peso quanto à contribuição para a massa galáctica; as estrelas KM utilizadas participam com cerca de 40% na massa total da Galáxia. Outro aspecto importante é a avaliação quantitati va do termo hidrodinâmico que possivelmente mais contribui na determinação sobreestimada da densidade de massa local. A componente hidrodinâmica per pendicular ao plano galáctico pode ser calculada em primeira aproximação com base em dados recentes (Quiroga e Schlosser, 1977; Franco, 1981; Brosche e Schwan, 1981).

Além da determinação da massa local, aborda-se com detalhes uma estimativa numérica da força perpendicular ao plano galáctico.

No Capítulo 2 apresenta-se com detalhe as equações hidrodi nâmicas e o sistema completo que deve-se resolver para se chegar à solução do problema da dinâmica galáctica.

Antes de se passar ao trabalho própriamente dito destaca-se, no Capítulo 3, o modelo do disco infinito e discute-se os resultados recen tes, no que diz respeito à componente z da força galáctica e à densidade de massa local.

O Capítulo 4 contém o cálculo da densidade local.

A discriminação dos componentes observados da densidade lo cal bem como o cálculo do termo hidrodinâmico, citado anteriormente, são apresentados no Capítulo 5.

No Capítulo 6 obtêm-se a componente do campo galáctico de forças na direção perpendicular ao plano.

Concluindo, o Capítulo 7 apresenta uma discussão crítica dos resultados obtidos e as perspectivas que se apresentam.

CAPÍTULO 2

A SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DA DINÂMICA GALÁCTICA

2.1 - Dinâmica estelar clássica

Na teoria para a dinâmica de um sistema estelar toma-se como suposição básica a validade da mecânica newtoniana. Em particular, postula-se a validade das leis da conservação da massa, do movimento e da gravitação universal.

É possível tratar-se um sistema estelar com a mecânica relativística. Convém ressaltar no entanto que mesmo com a teoria newtoniana, a dinâmica de um sistema estelar não foi ainda totalmente testada e desenvolvida. Os problemas principais são a grande dificuldade matemática e a escassez de dados observacionais.

Pode-se aplicar as suposições básicas mostradas acima a um sistema estelar das seguintes maneiras. O sistema estelar real é um conjunto de n partículas que interagem gravitacionalmente, e onde $n \gg 1$; este é o ponto de vista da mecânica celeste. O sistema é um contínuo de matéria que flui em um espaço de fase de seis dimensões; isto leva à dinâmica estelar. Finalmente, representa-se o sistema real por um modelo contínuo e discreto, isto é, definem-se distribuições de probabilidades contínuas para as posições e estados de movimento das partículas; esta é a mecânica estatística dos sistemas estelares.

Todas as três abordagens têm suas limitações. A primeira requer uma precisão que os problemas não justificam. Não se deseja saber a posição e a velocidade de cada estrela em particular mas sim o número total de estrelas e como é a sua distribuição entre os diferentes estados de movimento. A segunda despreza a interação entre pares de estrelas e considera que cada estrela está sujeita apenas à força gravitacional de todo o sistema. No caso de um intervalo de tempo limitado, que não seja maior que o tempo de relaxação do sistema, esta abordagem representa uma boa a

proximação. Quanto à mecânica estatística de sistemas estelares, parece não haver nenhuma objeção porém as dificuldades de formulação são enormes. A existência estável do sistema num volume definido do espaço é uma condição fundamental para a mecânica estatística, o que não é garantido pelas forças gravitacionais (Kurth, 1957).

O tratamento clássico, ou seja, a dinâmica estelar, será adotado em todo o presente trabalho. Dar-se-ã portanto mais alguns esclarecimentos sobre este ponto.

A dinâmica estelar clássica considera um contínuo de matéria fluindo no espaço de fase de seis dimensões. Poder-se-ia, à primeira vista, imaginar uma distribuição contínua de matéria no espaço real. Isto seria equivalente a uma hipótese hidrodinâmica, que levaria a uma péssima aproximação à realidade. A velocidade do material seria, em qualquer instante, uma função unívoca da posição (a função deveria ser também contínua para tornar a teoria praticável). Mas a observação mostra que podem haver diferenças drásticas nas velocidades de estrelas muito próximas umas das outras no espaço de coordenadas e que são portanto descritas por elementos de matéria vizinhos. A continuidade das funções de distribuição de velocidades ficaria comprometida. Por isto, o material deve ser considerado não somente no espaço tridimensional de coordenadas mas no espaço hexadimensional de posição e velocidade, o qual constituirá o espaço de fase do sistema estelar. Na seção 2.3 será novamente abordada a restrição à hipótese hidrodinâmica.

As forças que governam o movimento de cada estrela são essencialmente gravitacionais. Estas forças aparecem primeiro devido à massa de todo o sistema (forças regulares) e segundo devido a possíveis colisões entre as estrelas (forças irregulares). Na formulação da dinâmica estelar clássica estas colisões são desprezadas, o que é perfeitamente aceitável no caso da Galáxia. O tempo de relaxação para a Galáxia é da ordem de 10^{14} anos (Chandrasekhar, 1960); o período de rotação galáctica nas proximidades do Sol é de 2×10^8 anos. Uma estrela nas vizinhanças do Sol descreve pelo menos 100 revoluções antes que qualquer perturbação apreciável possa ocorrer em virtude de encontros estelares. Por outro lado, a validade da formulação também fica inalterada se a função densidade de fase de fase de fase terminada no espaço de fase do sistema estelar for invariante com respeito às

forças que aparecem num encontro estelar. Isto quer dizer, em outras palavras, que o número de pontos que saem de um elemento de volume do espaço de fase como resultado de colisões é compensado por aqueles que entram no volume pela mesma razão.

Estas considerações, como será visto, são relevantes na dedução da equação diferencial fundamental da dinâmica estelar (Ogorodnikov, 1965).

2.2 - A equação de Boltzmann

O movimento de qualquer estrela é governado pelo Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + m \phi(x, y, z, t). \quad (2.2.1)$$

A estrela de massa m , com coordenadas x, y, z e velocidades u, v, w no sistema de coordenadas galáctico, está sujeita no instante t ao potencial gravitacional galáctico ϕ . Tal Hamiltoniano é diferente para estrelas de massas diferentes. Contudo, podemos tratá-las do mesmo modo considerando o Hamiltoniano por unidade de massa H .

$$H = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \phi(x, y, z, t). \quad (2.2.2)$$

Assim, através de H as equações de movimento são as mesmas para todas as estrelas. As equações canônicas tomam a forma:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial u} ; \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial v} ; \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial w} ,$$

$$\dot{u} = - \frac{\partial H}{\partial x} ; \quad \dot{v} = - \frac{\partial H}{\partial y} ; \quad \dot{w} = - \frac{\partial H}{\partial z} . \quad (2.2.3)$$

Cada estrela é representada por um ponto no espaço de fase hexadimensional (x,y,z,u,v,w) . A função densidade de fase $f(x,y,z,u,v,w,t)$ define uma densidade contínua de pontos neste espaço, onde o movimento de cada ponto é governado pelo mesmo conjunto de equações canônicas. Estes pressupostos são os mesmos encontrados no tratamento clássico do teorema de Liouville. A equação diferencial fundamental da dinâmica estelar, desprezando-se colisões, é consequência direta do teorema de Liouville (Apêndice A). De acordo com a equação (A.10), temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0. \quad (2.2.4)$$

Ou mais explicitamente

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} = 0. \quad (2.2.5)$$

A equação (2.2.5) é chamada geralmente de equação da continuidade, apesar de ser distinta da equação macroscópica da continuidade (Apêndice B, equação (B.4)). É conhecida também como equação de Boltzmann.

Observa-se na Galáxia uma simetria cilíndrica na distribuição estelar (Capítulo 3). É, portanto, mais adequado que a equação de Boltzmann seja utilizada em coordenadas cilíndricas $(R,\theta,z,V_R,V_\theta,V_z)$, referidas ao centro galáctico e com o plano $R\theta$ sobre o disco galáctico. A equação (A.7), expressão final do teorema de Liouville, em coordenadas cilíndricas é

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} + \dot{V}_R \frac{\partial f}{\partial V_R} + \dot{V}_\theta \frac{\partial f}{\partial V_\theta} + \dot{V}_z \frac{\partial f}{\partial V_z} = 0. \quad (2.2.6)$$

Através das equações de movimento de Lagrange para uma partícula livre, e elimina-se \dot{V}_R , \dot{V}_θ e \dot{V}_z .

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial\phi}{\partial R},$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad (2.2.7)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Tem-se evidentemente

$$V_R = \frac{dR}{dt} = \dot{R},$$

$$V_\theta = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}, \quad (2.2.8)$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Das equações (2.2.7) e (2.2.8) obtêm-se finalmente

$$\dot{V}_R = -\frac{\partial\phi}{\partial R} + \frac{V_\theta^2}{R},$$

$$\dot{V}_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{V_\theta V_R}{R}, \quad (2.2.9)$$

$$\dot{V}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Substituindo-se (2.2.8) e (2.2.9) em (2.2.6) encontra-se a equação de Boltzmann na forma procurada.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + V_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{V_\theta^2}{R} - \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \frac{\partial f}{\partial V_R} - \left(\frac{V_R V_\theta}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial V_\theta} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial V_z} = 0. \quad (2.2.10)$$

2.3 - As equações hidrodinâmicas e a dinâmica da Galáxia.

A presente abordagem da dinâmica estelar considera as estrelas como componentes de um fluido que se move no espaço de fase hexadimensional, de coordenadas e velocidades.

Deve-se usar um tratamento estatístico pois as estrelas não serão tratadas individualmente. Muitos dos parâmetros físicos envolvidos são utilizados na forma de médias. Aqui aparece a importância fundamental do conceito de centróide na dinâmica estelar. O centróide é um ponto que está em repouso em relação ao elemento de volume macroscópico ao qual ele pertence, ou seja, é um ponto que se move com a velocidade média das estrelas incluídas no elemento de volume. Através do centróide, pode-se fazer a transição de um sistema estelar suposto discreto para um que é contínuo num certo volume do espaço. Sem o auxílio do centróide é impossível a interpretação de movimentos internos em sistemas estelares. Como um exemplo, considere-se a rotação em torno do eixo da Galáxia. A rotação circular é realizada pelo centróide, não pelas estrelas individualmente cujas órbitas podem ser muito complexas. Algumas estrelas podem estar se movendo em direção oposta à rotação do sistema como um todo. Isto acontece porque cada estrela, além de participar da rotação galáctica, possui um movimento intrínseco.

A grande diferença entre a dinâmica estelar e a dinâmica dos fluidos ordinários está no livre caminho médio das partículas constituintes de cada elemento de volume. Em fluidos comuns, densos, o livre caminho

médio é muito menor que o diâmetro do elemento de volume macroscópico, o que não ocorre em meios estelares que são extremamente rarefeitos. Na vizinhança do Sol, o livre caminho médio de uma estrela é da ordem de 10^8 pc, o que é 10.000 vezes maior que o raio da Galáxia e um milhão de vezes maior que um elemento de volume macroscópico típico (Ogorodnikov, 1965). Num fluido denso, portanto, o elemento de volume mantém as mesmas partículas enquanto se move, o que não ocorre num meio rarefeito onde ocorre uma difusão contínua através das fronteiras do elemento de volume.

A equação de Boltzmann é uma expressão geral da conservação da função densidade de fase. As equações hidrodinâmicas para o fluido estelar podem ser obtidas pela integração apropriada desta equação em todo o espaço de velocidades. Estas equações são, como será visto, nada mais que expressões da conservação da quantidade de movimento (equação da transferência de quantidade de movimento) e da conservação da massa (equação da continuidade).

Na equação (2.2.10) aparecem as componentes de velocidade V_R , V_θ e V_z , que podem ser expressas como:

$$V_R = V_{R0} + V'_R,$$

$$V_\theta = V_{\theta0} + V'_\theta, \tag{2.3.1}$$

$$V_z = V_{z0} + V'_z.$$

A velocidade da estrela \vec{V} é decomposta na velocidade do centróide \vec{V}_0 mais a velocidade residual \vec{V}' . Esta separação é fundamental no estudo de um sistema estelar, como já foi dito. As equações hidrodinâmicas devem conter a velocidade do centróide e a velocidade residual, para serem úteis.

O Apêndice B mostra a dedução das quatro equações hidrodinâmicas básicas, obtidas através do cálculo de médias da equação de Boltzmann no espaço de velocidades. Algumas simplificações podem ser feitas de imedia

to. Na sua forma completa as equações são as seguintes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (\rho V_{Ro}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta o}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{zo}) + \frac{1}{R} V_{Ro} = 0, \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} V_{Ro} + V_{Ro} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial R} + \frac{V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial \theta} + V_{zo} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial z} - \frac{V_{\theta o}^2}{R} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial R} p_{RR} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} p_{R\theta} + \frac{\partial}{\partial z} p_{Rz} - \frac{p_{\theta\theta}}{R} + \frac{p_{RR}}{R} \right] = - \frac{\partial \phi}{\partial R}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} V_{\theta o} + V_{Ro} \frac{\partial V_{\theta o}}{\partial R} + \frac{V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{\theta o}}{\partial \theta} + V_{zo} \frac{\partial V_{\theta o}}{\partial z} + \frac{1}{R} V_{Ro} V_{\theta o} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{R} p_{R\theta} \right] = - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_{zo}}{\partial t} + V_{Ro} \frac{\partial V_{zo}}{\partial R} + \frac{V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{zo}}{\partial \theta} + V_{zo} \frac{\partial V_{zo}}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p_{Rz}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{R} p_{Rz} \right] = - \frac{\partial \phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Os termos em p indicados com R , θ e z , de acordo com a convenção (B.9), constituem um tensor de pressão simétrico. A interpretação como pressão vem do fato destes termos serem originários das velocidades residuais das estrelas. Geralmente apenas os termos da diagonal são diferentes de zero (Mihalas e Routly, 1968).

O estado estacionário é de importância central na dinâmica estelar clássica. No estado estacionário a função densidade de fase, e portanto todos os parâmetros macroscópicos, não dependem explicitamente do tempo, isto é

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0 \quad (2.3.6)$$

Efetivamente, tal condição significa que o sistema estelar apresenta uma configuração espacial estável. As simplificações nas equações hidrodinâmicas neste caso são claras. Na realidade esta consideração é apenas aproximada em sistemas estelares, os quais podem estar no máximo num estado quase-estacionário (Ogorodnikov, 1965). As simetrias que porventura existam no sistema estelar estudado podem eliminar alguns termos nas equações. No presente trabalho, oportunamente serão tratadas tais simetrias.

O sistema de equações completo cuja solução resolve o problema dinâmico da Galáxia possui além das quatro anteriores a equação de Poisson (Apêndice C)

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (2.3.7)$$

A solução analítica deste sistema não é conhecida. Tentam-se soluções particulares (analíticas ou numéricas) partindo-se de hipóteses simplificadoras.

Neste trabalho utilizam-se as equações hidrodinâmicas e a equação de Poisson para um estudo dinâmico da vizinhança do Sol.

A COMPONENTE Z DA FORÇA GALÁCTICA

3.1 - O modelo do disco infinito

Em linhas gerais pode-se dizer que a Galáxia é um conjunto de estrelas e gas fortemente concentrados em uma região denominada plano galáctico.

No sistema de coordenadas cilíndricas adotado a direção z é perpendicular ao plano galáctico. As variações de densidade são muito mais acentuadas nesta direção do que no plano. Portanto, em primeira aproximação, pode-se descrever a Galáxia como um disco achatado, e infinito se se faz um estudo local. A evidência deste quadro surgiu em 1920 (Hill, 1960), quando Kapteyn e van Rhijn publicaram os resultados de uma pesquisa sobre a distribuição de estrelas na Galáxia. Apesar de terem sido usadas estrelas relativamente próximas, a função luminosidade obtida foi admitida como aplicável a todas as regiões da Galáxia. Concluiu-se que o sistema galáctico era achatado e que as superfícies de densidade constante tomavam a forma de esferóides oblatos. A densidade de estrelas decrescia a partir do centro galáctico que se supunha ser o Sol.

Um bom conhecimento da força galáctica (por unidade de massa) perpendicular ao plano, simbolizada por K_z , é importante por duas razões. Primeiro, pode-se obter uma avaliação da densidade de massa total na vizinhança do Sol e, segundo, ter uma estimativa da espessura do disco galáctico.

Qualitativamente, pode-se descrever o comportamento da força K_z através da equação de Poisson (2.3.7). Em coordenadas cartesianas, x e y colocados sobre o plano galáctico, obtêm-se

$$\frac{dK_z}{dz} = -4\pi G\rho(z). \quad (3.1.1)$$

Os termos $\frac{\partial K_x}{\partial x}$ e $\frac{\partial K_y}{\partial y}$ foram desprezados em virtude do modelo do disco in finito. A densidade $\rho(z)$ é a densidade total, abrangendo estrelas, gás, po eira, anãs brancas, buracos negros e todo material porventura invisível. O plano $z = 0$ é um plano de simetria da Galáxia, onde $\rho(z)$ alcança um valor máximo. Na vizinhança deste plano tem-se $\rho(z) = \rho_0 = \text{constante}$. A equação (3.1.1) pode ser integrada:

$$K_z = -4\pi G\rho_0 z. \quad (3.1.2)$$

A figura 1 mostra o comportamento qualitativo da força K_z .

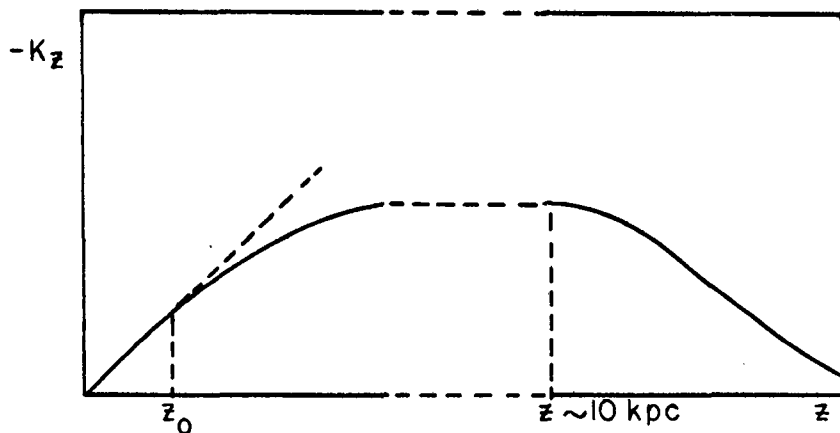


Fig. 1: Comportamento local da força K_z .

Até $z = z_0$ a aproximação $\rho(z) = \rho_0$ é boa; a partir daí $\rho(z)$ diminui e ocorre um achatamento da curva. Quando z é da ordem da distância do Sol ao cêntro galáctico (aproximadamente 10 Kpc) a aproximação do disco infinito deixa de valer e a equação (3.1.1) não se aplica mais. Note-se que a aplicação desta equação implicaria numa densidade $\rho(z) < 0$. A partir deste ponto tem-se um comportamento próximo ao fornecido pela lei da gravitação universal para massas pontuais.

O valor de z_0 dá uma estimativa da espessura do disco galáctico, e a inclinação da curva na parte linear fornece a densidade de massa local ρ_0 .

Os estudos da componente z do campo galáctico local são grandemente beneficiados por fatores observacionais. Há maior disponibilidade de observações de estrelas em altas latitudes galácticas, devido à baixa absorção interestelar. Para estas estrelas, V_z pode ser obtida aproximadamente das velocidades radiais (relativas ao Sol), que são até certo ponto fáceis de serem medidas. Além disso, a aproximação da Galáxia para um disco infinito, em regiões próximas do Sol ($z < 200$ pc), introduz simplificações bastante promissoras nas equações hidrodinâmicas e na equação de Poisson.

A estrutura básica lenticular da Galáxia é um indício claro da predominância da componente z do campo gravitacional galáctico sobre as outras componentes.

Uma visão geral do comportamento da força K_z na Galáxia, em função da altura sobre o plano galáctico, é dada pela figura 2. Estas funções foram obtidas numericamente por Rohlfs e Kreitschmann (1981), a partir de um modelo de massa para a Galáxia. Convém lembrar que a região local está a 8-9 Kpc do centro galáctico.

Clássicamente, o cálculo da densidade local através de um processo dinâmico, tal como será feito neste trabalho, foi introduzido por Oort em 1932. É fundamental a comparação destes resultados com os obtidos através da observação direta. A Galáxia é constituída predominantemente por estrelas da sequência principal do diagrama HR, que contribuem com a maior parcela da densidade total. Não são desprezíveis a contribuição de outros componentes como anãs brancas, gás e poeira interestelares.

Em 1922, Kapteyn já havia proposto uma primeira teoria para o estudo da distribuição de massa e velocidade na Galáxia. Ele obteve valores para K_z partindo de seu modelo para a Galáxia, que posteriormente revelou-se falso em alguns aspectos. O fato de que a variação de K_z com z pequeno fornece uma avaliação da densidade de massa local foi reconhecido por Kapteyn. Os seus resultados foram imperfeitos devido à presença elevada da absorção interestelar nos dados que utilizou. A absorção da luz pelo meio interestelar era desconhecida na sua época.

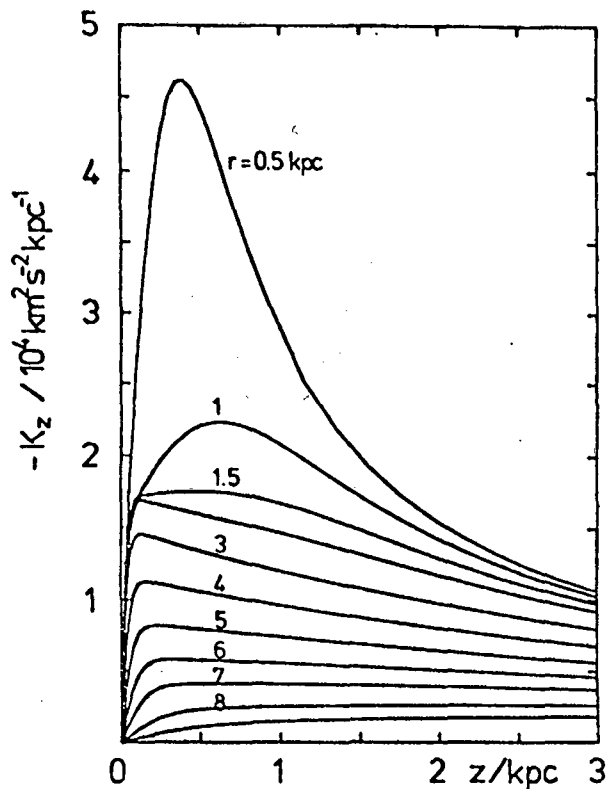


Fig. 2 : A força galáctica K_z para diferentes valores da distância ao centro galáctico (Rohlfis e Kreitschmann, 1981).

Posteriormente ao trabalho de Oort (1932) muitos autores se dedicaram e se dedicam ao estudo da componente K_z do campo galáctico de forças. Deve-se ressaltar que, além da importância do conhecimento da função $K_z(z)$ para z pequeno, o estudo de K_z para grandes distâncias ($z > 1$ Kpc ou mais) fornece informações gerais sobre as partes mais centrais da Galáxia; onde observações diretas são dificultadas pela absorção interestelar (Oort e van Woerkom, 1941 apud Hill, 1960; Rohlfis e Kreitschmann, 1981). Isto é feito construindo-se modelos da Galáxia que se adaptem aos dados fornecidos pelo estudo da força K_z .

No presente trabalho estuda-se em detalhes a componente K_z na região local, daí o modelo do disco infinito. A densidade de massa local

obtida será comparada com os dados da observação direta (função luminosidade) e, fato novo, aborda-se a influência de um termo hidrodinâmico no cálculo da densidade total.

3.2 - Trabalhos anteriores

A suposição básica de que a Galáxia está em estado estacionário é adotada em todos os trabalhos que serão descritos. Particularmente, Woolley (1957) admite um estado não estacionário para a distribuição de velocidades no plano galáctico, ao passo que esta distribuição para a componente perpendicular ao plano é estacionária: o número de estrelas cruzando, em média, cada plano paralelo ao plano galáctico é o mesmo, nos dois sentidos.

Sendo $\nu(V_z, \phi)$ a densidade, no espaço de fase, de estrelas com velocidade V_z num ponto onde o potencial é ϕ , o autor vale-se da forma unidimensional da relação de Jeans (1915)

$$\nu(V_z, \phi) = F(V_z^2 - 2\phi)$$

e postula uma exponencial negativa para a função F . Isto leva a uma distribuição gaussiana de velocidades na direção z . A partir do conhecimento observacional da distribuição de velocidades, Woolley constrói o potencial ϕ e sua derivada, a aceleração K_z . Ressalte-se que naturalmente existe o vínculo sobre ϕ imposto pela equação de Poisson.

Woolley utiliza estrelas A para obter as distribuições de densidade e velocidade. A figura 3 mostra a solução para K_z encontrada pelo autor e a de Oort (1932).

A densidade de massa local encontrada é de $0,18 M_\odot/\text{pc}^3$, que é alta em comparação com os valores dados por Oort (1932) situados na faixa $0,08 - 0,11 M_\odot/\text{pc}^3$.

O trabalho anterior é atualizado e modificado anos depois

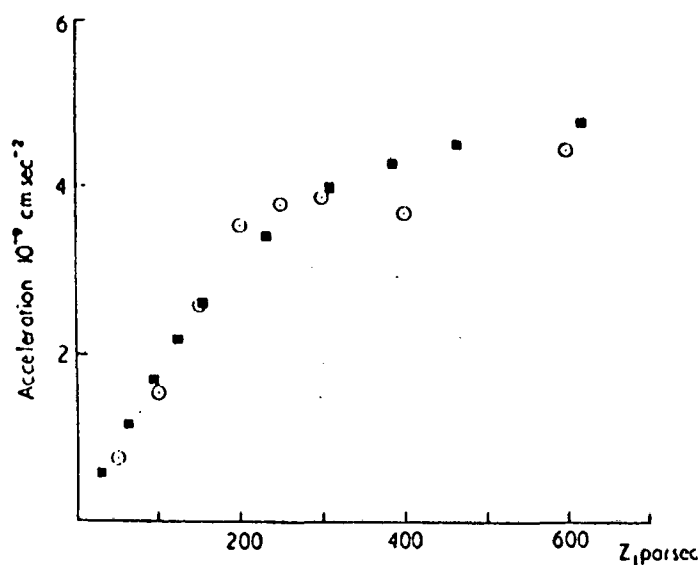


Fig. 3 : K_z obtida por Woolley e os valores de Oort (\odot) (Woolley, 1957).

(Woolley e Stewart, 1967). O modelo para a distribuição de velocidades não pode ser aproximado por uma simples gaussiana. Num mesmo tipo espectral en contram-se vários grupos distintos, disco, estrato e halo, cada qual com u ma dispersão de velocidades na direção z . Numa abordagem mais realista, a distribuição de velocidades deve refletir este fato. Woolley e Stewart ado tam uma distribuição gaussiana dupla para as velocidades. Esta modificação e novas observações de estrelas A feitas no período, modificam o valor de 1957 para $0,11 M_{\odot}/pc^3$, o que compõe o seguinte quadro (Woolley e Stewart, 1967):

| | |
|----------|------------------------|
| Estrelas | $0,057 M_{\odot}/pc^3$ |
| Gás | $0,018$ |
| Poeira | $0,006$ |
| Total | $0,081$ |

A diferença de aproximadamente $0,03 M_{\odot}/pc^3$ é considerada pelos autores den

tro das possibilidades de erro nas estimativas de densidade, que provêm de várias fontes.

Em 1960, Hill publica um trabalho cujo principal objetivo é obter a função $K_z(z)$, baseado em novos dados sobre a distribuição de gigantes K acima e abaixo do plano galáctico. O resultado é considerado confiável para a faixa até $z = 500$ pc. Além desta distância, há discordância com a equação de Poisson, fato que é explicado pelo autor como devido à imprecisão no número de estrelas K de magnitudes fotográficas mais fracas. A densidade local encontrada é de $0,13 M_\odot/\text{pc}^3$.

Como Hill, Oort (1960) considera que a distribuição da densidade estelar total em z é a mesma das gigantes K. Leva em conta que a força é devida tanto a estrelas quanto a matéria interestelar. É procurada uma solução para K_z de tal forma que satisfaça a equação de Poisson e ao mesmo tempo dê uma concordância razoável com os dados observados nas gigantes K. Oort obtém uma densidade de $0,15 M_\odot/\text{pc}^3$. A principal incerteza que permanece, e é básica para o trabalho, liga-se à suposição de que a densidade estelar total varia com z da mesma maneira que a densidade das gigantes K. Contudo, o autor estima que a incerteza, resultante desta suposição, no cálculo da densidade e na avaliação de K_z , não deve ultrapassar 10%.

Num trabalho publicado em 1969, Perry utiliza observações próprias de estrelas A0-A2. Obtém distribuições de densidade e de velocidade. Adota dois métodos para a determinação de K_z . No primeiro, análogo ao de Oort (1932), as dispersões de velocidades V_z são independentes de z ; as distribuições de densidade e velocidade são simétricas em relação ao plano galáctico e as estrelas consideradas já estão relaxadas, isto é, não há componentes sistemáticos no movimento na direção z . O segundo método pressupõe a variação das dispersões com z e emprega a equação de Boltzmann simplificada. Os dois métodos levam a resultados que não concordam com a realidade. Com relação ao primeiro, a força atinge um máximo em aproximadamente 200 pc e em seguida decresce. O decrescimento com o inverso do quadrado da distância, devido à influência do núcleo galáctico, só se torna efetivo em alturas muito maiores. Perry questiona, na tentativa de explicar as discordâncias, os pressupostos básicos de Oort; se as estrelas utilizadas não estão relaxadas, todos os dois métodos não são válidos. Através da curva de densidade, o autor sugere que possivelmente as estrelas

A possam ser divididas em dois subgrupos. Com os dados cinemáticos que tem não é possível se obter estes subgrupos e em consequência uma distribuição de velocidade mais adequada. As estrelas de Perry foram observadas num co ne cujo eixo é perpendicular ao plano galáctico, com o vértice colocado so bre o Sol. O cone abrange uma região de 15° a partir do Polo Norte Galáctico. A fim de se garantir um número suficiente de estrelas perto do pla no, foram adicionadas observações de estrelas dentro de uma esfera de 50 pc a partir do Sol. A figura 4 mostra a distribuição da densidade com a distância acima do plano galáctico. As estrelas da esfera estão assinaladas. As linhas tracejadas sugerem a divisão das estrelas do cone em dois grupos estelares, como foi dito anteriormente. O autor conclui afirmando

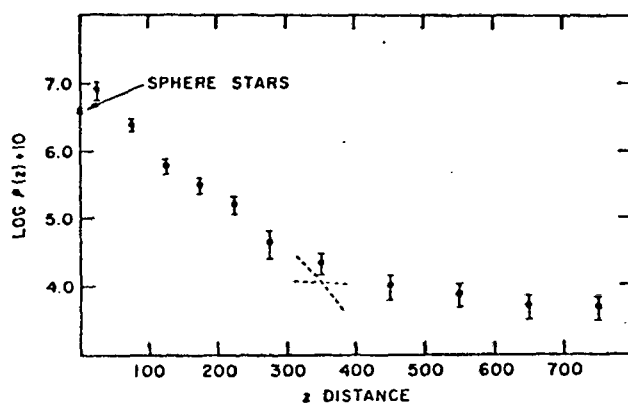


Fig. 4 : Distribuição da densidade com a distância acima do plano galáctico (Perry, 1969).

que uma solução para K_z com estrelas A permanece indeterminada. Sugere no entanto que o estudo realizado por ele deve ser estendido a outros tipos espectrais.

Jones, num trabalho (1972) em que utiliza estrelas MIII, consegue distinguir dois grupos distintos. Tais grupos, 72% de sua amostra com dispersão de 7 Km/s em V_z e 28% com dispersão de 28 Km/s, permitem um melhor ajuste teórico às curvas observadas de densidade e velocidade. O

método utilizado é o mesmo de Woolley e Stewart e Jones encontra uma densidade local de $0,21 M_{\odot}/pc^3$.

O trabalho de Dessureau e Upgren (1975) não trata especificamente do que se pretende estudar aqui. Aborda o problema estabelecido por Oort (1932) no sentido inverso, isto é, utiliza a solução para K_z (Oort, 1960) e dados observacionais de distribuição de densidade obtidos posteriormente para determinar as componentes gaussianas da distribuição de velocidade. Os três termos gaussianos encontrados diferem daqueles adotados por Oort. As críticas feitas dirigem-se à distribuição de densidade utilizada por Oort. A importância do trabalho de Dessureau e Upgren está na tentativa de elucidação da questão, que ainda permanece, de que os resultados para a densidade de massa local obtidos por observação direta têm repetidamente caído abaixo dos preditos por estudos dinâmicos.

House e Kilkenny (1980) obtêm uma forma analítica para K_z , válida para z menor que 1 Kpc. Esta solução é encontrada a partir da equação de Poisson, da conservação da energia e de um modelo para a distribuição de massa; a Galáxia é dividida em anéis concêntricos a partir do centro galáctico, cada um deles com 1 Kpc de largura. Os autores consideram que todas as estrelas num anel estão à mesma distância do centro galáctico. O Sol está colocado a 10 Kpc do centro. A partir de velocidades radiais observadas em estrelas OB os autores calculam os parâmetros da forma analítica de K_z . Encontram uma densidade local de $0,13 \pm 0,03 M_{\odot}/pc^3$. O cálculo de House e Kilkenny não é feito diretamente das distribuições de densidade e velocidade das estrelas da amostra, como nos trabalhos anteriores. Isto porque o número de estrelas na direção dos pólos galácticos é muito pequeno; como já foi afirmado, as velocidades radiais em altas latitudes galácticas podem ser aproximadas para V_z .

O trabalho de Quiroga (1980) elucida bastante as questões apresentadas nos trabalhos descritos anteriormente, com a introdução de conceitos novos e fundamentais. Observa que o tipo estelar utilizado para se caracterizar a hierarquia disco, estrato e halo na Galáxia leva necessariamente a resultados que diferem do acordo com o grupo utilizado. O estrato obtido com as gigantes M (Jones, 1972) é consideravelmente mais largo que o fornecido pelas estrelas A (Woolley e Stewart, 1967). Tem-se 500-700 pc contra 300 pc. O problema se reduz a encontrar um grupo estelar realmen

te representativo na distribuição estelar galáctica. O autor obtém a força K_z a partir de dados de gás interestelar. Utiliza observações cinemáticas que são corrigidas para fornecerem as dispersões totais no meio interestelar (a energia total deve incluir além da parcela observável, energia térmica e turbulenta, termos referentes às pressões magnéticas e dos raios cósmicos). O fator de correção é encontrado graficamente. As distribuições de densidade do gás interestelar são postuladas a partir de dados observacionais. Através de uma forma reduzida da equação de Boltzmann, obtém a solução para K_z e conseqüentemente a densidade local. O resultado para a densidade de massa no plano galáctico é $0,20 \pm 0,05 M_\odot/\text{pc}^3$. Também é apresentada uma avaliação de K_z a partir de dados estelares. As distribuições de densidade das estrelas MIII (Jones, 1972) e das estrelas A (Woolley e Stewart, 1967) são tomadas como padrões para todo o material galáctico. A solução numérica da equação de Poisson considerando-se as duas distribuições leva a estimativas distintas de K_z . Quiroga questiona seus próprios resultados para K_z , baseando-se no fato de que os parâmetros utilizados, dispersões de velocidades e densidades de estrelas MIII, estrelas A e gás interestelar, não são conhecidos para anãs F, G, K e M que representam mais de 80% da massa galáctica. Esta observação é fundamental para o presente trabalho. Utilizam-se aqui dados estelares de anãs KM recém observadas (Capítulo 4). As anãs KM contribuem com cerca de 40% da massa galáctica sendo, portanto, mais representativas. Quiroga conclui de sua função K_z que o disco, contendo a maior parte da massa da Galáxia, deve ser um pouco mais estreito do que tem sido suposto. Encontra que aproximadamente 70% da massa total está concentrada numa altura de menos de 100 pc. O padrão ondulatório observado no disco galáctico é analisado qualitativamente com relação à força K_z . A figura 5 ilustra esta análise. Quiroga avalia quantitativamente os efeitos da oscilação hidrodinâmica do disco galáctico sobre a força K_z . Encontra um limite superior para o efeito. Considerações semelhantes serão feitas no Capítulo 5 deste trabalho com respeito à contribuição para a densidade local. Deve-se ressaltar que as contribuições hidrodinâmicas, tanto para a força K_z como para a densidade, dependem da posição do Sol em relação à onda hidrodinâmica de matéria. Obtém-se portanto, num e noutro caso, estimativas médias que devem ser vistas com cautela.

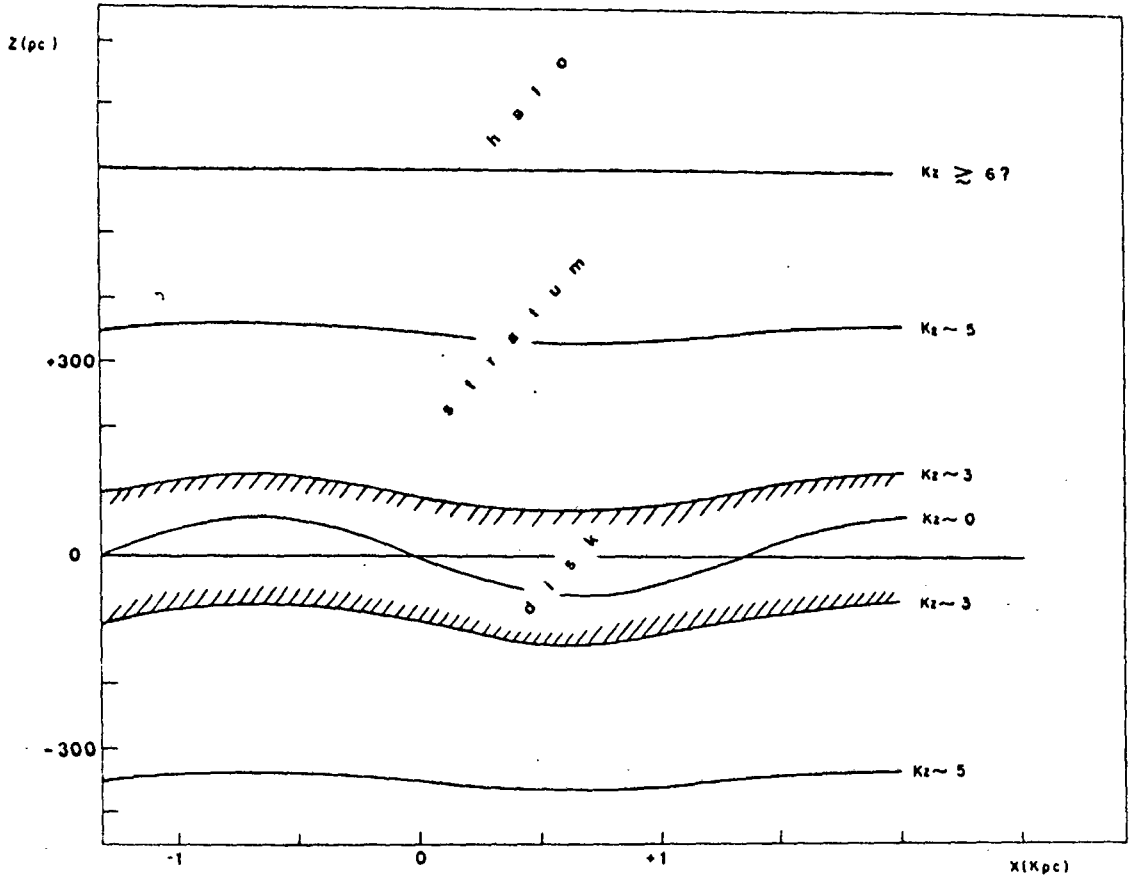


Fig. 5 : A força K_z correspondente à distribuição ondulatória de massa na coordenada z . As unidades da força são 10^{-9} cm/s^2 (Quiroga, 1980).

CAPÍTULO 4

CÁLCULO DA DENSIDADE DE MASSA LOCAL

4.1 - Método

O método dinâmico para o cálculo da densidade de massa local consiste na solução simultânea do sistema formado pelas equações de Poisson e hidrodinâmica para a componente z . Esta solução é possível devido às simplificações das equações, primeiro, em virtude da própria configuração espacial da Galáxia que permite tratar a região local ($z < 100$ pc) como parte de um disco infinito (plano galáctico) e, segundo, pelo hipótese do estado estacionário.

Como foi afirmado no Capítulo 2, a solução analítica do sistema completo de equações hidrodinâmicas e de Poisson não é conhecida. A hipótese do estado estacionário justifica-se como hipótese inicial de trabalho que será abandonada, corrigida ou mantida dependendo da comparação dos resultados com os dados observacionais. O modelo do disco infinito e a consequente simetria cilíndrica introduz simplificações nas equações utilizadas. Se se considera a estrutura espiral da Galáxia, evidencia-se a falha de ambas as hipóteses: não há simetria axial e a Galáxia não atingiu o estado estacionário. No entanto, os constituintes principais da estrutura espiral, gás interestelar e estrelas jovens e brilhantes, representam uma pequena fração da massa total do sistema (Oort, 1965). As estrelas mais velhas, que contribuem de forma predominante para a massa galáctica, podem ser tratadas a partir das hipóteses anteriores.

As consequências da hipótese do estado estacionário e do modelo do disco infinito sobre as equações serão mostradas a seguir.

A equação de Poisson (C.5) escrita em coordenadas cilíndricas, no sistema de referência galactocêntrico, é

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R K_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = -4\pi G\rho. \quad (4.1.1)$$

A densidade ρ é uma função das coordenadas (R, θ, z) mas na aproximação do disco infinito as variações substanciais e observadas ocorrerão na coordenada z (Capítulo 3). Os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação (4.1.1) podem ser desprezados considerando-se a simetria cilíndrica do sistema e o fato de que há pouca variação em R na região local (a distância do Sol ao centro galáctico é da ordem de 10 Kpc, Mihalas, 1967, e a região local abrange $z < 100$ pc). Além disso, deve-se considerar que a própria geometria da Galáxia impõe a preponderância do termo em K_z sobre os demais.

A equação de Poisson se reduz a

$$\frac{dK_z}{dz} = -4\pi G\rho(z). \quad (4.1.2)$$

Por outro lado, $\rho(z)$ total na região local pode ser considerada como aproximadamente constante e igual a ρ_0 , densidade total de massa local. Tem-se portanto

$$\frac{dK_z}{dz} = -4\pi G\rho_0 \quad (4.1.3)$$

na vizinhança do Sol.

A equação hidrodinâmica (B.12) de transferência de momentum para a componente z , na sua forma completa, é

$$\frac{\partial V_{z0}}{\partial t} + V_{R0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial R} + \frac{V_{\theta 0}}{R} \frac{\partial V_{z0}}{\partial \theta} + V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z} +$$

Pode-se, também, adotar o enfoque de Quiroga (1980) que utiliza a hipótese do estado estacionário para afirmar que

$$\left\langle \frac{\partial V_{z0}}{\partial t} + V_{R0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial R} + \frac{V_{\theta 0}}{R} \frac{\partial V_{z0}}{\partial \theta} + V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial t} \right\rangle_t = 0. \quad (4.1.8)$$

Ou seja, aceita-se que a média temporal dos termos essencialmente hidrodinâmicos seja nula, o que justifica-se, como já foi afirmado, apenas como hipótese inicial de trabalho.

As considerações acima aproximam a equação (4.1.4) para

$$K_z = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} (\rho(z) \sigma_z^2). \quad (4.1.9)$$

As equações simplificadas (4.1.3) e (4.1.9) constituem o sistema utilizado para o cálculo da densidade local. Necessita-se conhecer a distribuição de densidade $\rho(z)$ e a dispersão de velocidades σ_z .

Não há interação entre os diversos materiais que formam a Galáxia (Apêndice A). O tratamento para a solução do sistema de equações anterior consiste em selecionar determinado tipo de material, estudar o seu comportamento tanto em distribuição de massa como em velocidades e considerar todo o sistema descrito por este comportamento. Isto é justificado pela interação desprezível entre os diversos constituintes do sistema estelar. A equação (4.1.9) será aplicada em um grupo estelar determinado. Não se deve esquecer, no entanto, que todo o material da Galáxia contribui para o campo gravitacional galáctico e conseqüentemente ρ_0 na aproximação (4.1.3) é a densidade de todo o material.

A escolha de um grupo específico de material garante a homogeneidade da amostra restringindo as variáveis que influem aleatoriamente em seu comportamento.

A característica mais importante do material é a representatividade quanto à Galáxia como um todo. Deve, portanto, ser parcela considerável na massa total do sistema estelar.

A pressão que aparece na equação (4.1.9) pode ser considerada, então, como a pressão da classe de objetos escolhida, e $\rho(z)$ será a densidade desta classe.

Resumindo, o conhecimento da forma funcional de $\rho(z)$ e da dispersão σ_z , de um subgrupo galáctico, para a região local, e a consequente solução do sistema formado pelas equações (4.1.3) e (4.1.9) resultam na determinação dinâmica da densidade de massa local.

4.2 - Grupo estelar utilizado

O material empregado na determinação dos parâmetros necessários ao cálculo da densidade foi o grupo estelar constituído por estrelas anãs de tipos espectrais na faixa K2-M2. Estudos recentes (Uppgren, 1978 e Uppgren et al., 1981) forneceram os dados observacionais necessários. Este grupo constitui 41% da massa total da Galáxia, o que pode ser verificado através de uma curva de função luminosidade. A figura 6 mostra a função luminosidade utilizada por Chiu (1980), modificada de forma a se ter no eixo horizontal uma escala de massas solares. Como as estrelas KM participam de forma expressiva na massa galáctica, deve-se esperar que elas sejam fundamentais na formação do padrão dinâmico da Galáxia.

Em trabalhos anteriores (Capítulo 3), as dificuldades na obtenção de dados observacionais levaram os autores a utilizarem estrelas brilhantes (gigantes K, gigantes M, estrelas A) que facilitavam a coleta de dados mas que não eram representativas do sistema estelar como um todo. Por exemplo, as MIII de Jones (1972) levaram a uma sobreestimação da massa no disco galáctico. O autor encontra que 72% das MIII se encontram no disco, fato que não pode ser extrapolado para toda a Galáxia pois aquele grupo constitui uma fração muito pequena da massa galáctica. Crítica semelhante pode ser estendida aos outros casos.

As estrelas KM estudadas por Uppgren estão distribuídas na Galáxia de acordo com o Quadro 1 (Uppgren et al., 1981).

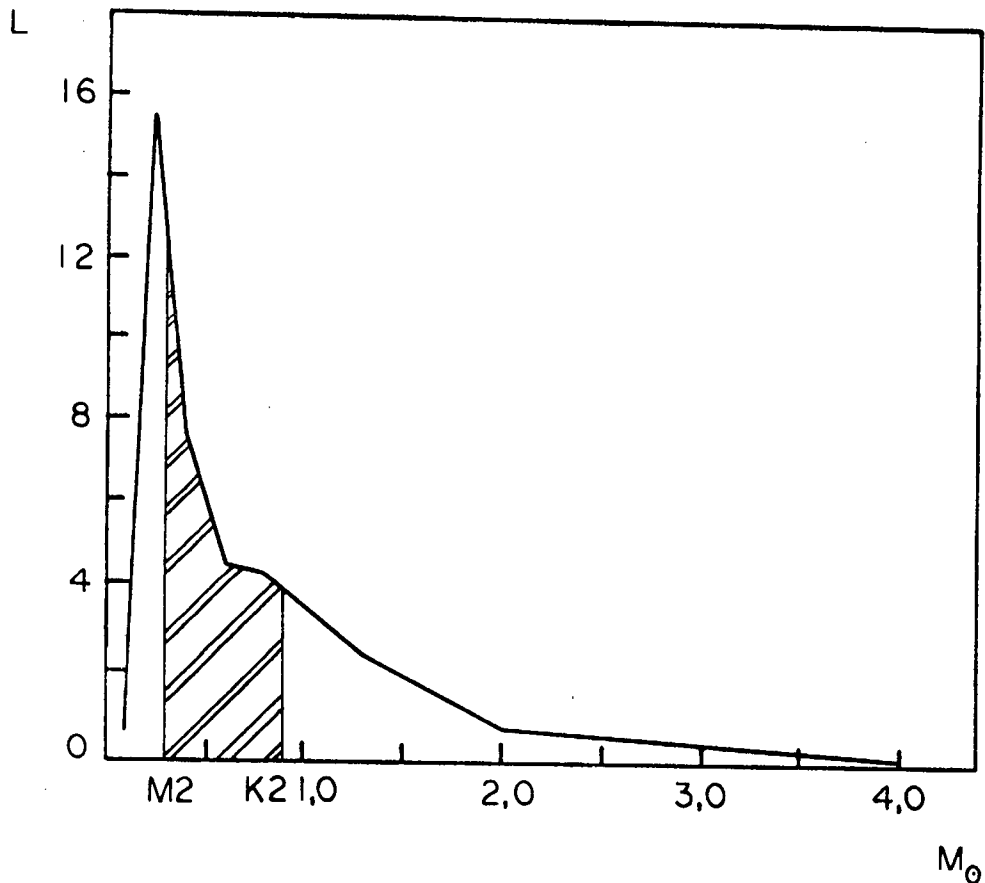


Fig. 6 : Função luminosidade (Chiu, 1980) com o eixo horizontal em massas solares. A unidade de L é o número total de estrelas por unidade de magnitude absoluta, por 1000 pc^3 . A área assinalada representa 41% da área total.

Uppgren (1978) obtém resultados cinemáticos para as estrelas KM utilizando três métodos estatísticos diferentes. O método considerado mais rigoroso pelo próprio autor será adotado neste trabalho e leva a uma dispersão σ_z de 7,2 Km/s para as estrelas do disco e de 23,2 Km/s para o grupo do estrato.

O Quadro 1 e as dispersões de velocidades na direção z mostradas acima serão utilizados na construção da função densidade de massa para a Galáxia.

Quadro 1 - Distribuição das estrelas KM

| População | % do total |
|-----------|------------|
| Disco | 60,9 |
| Estrato | 37,9 |
| Halo | 1,2 |

4.3 - Densidade local

Existe uma relação funcional entre as dispersões de velocidade σ_z dos diversos materiais que formam a Galáxia (estrelas da sequência principal, anãs brancas, aglomerados, gás interestelar, etc) e a coordenada z . No entanto, cada material se distribui em regiões caracterizadas por σ_z constante. Os dados observacionais atuais permitem a estratificação das estrelas KM de acordo com o Quadro 1. A componente do disco abrange a região local aqui considerada. A suposição de que σ_z é constante é endossada pela hipótese do estado estacionário.

Com a consideração feita acima a equação (4.1.9) transforma-se em

$$K_z = \frac{\sigma_z^2}{\rho_{KM}(z)} \frac{d\rho_{KM}(z)}{dz} \quad (4.3.1)$$

onde σ_z refere-se às estrelas KM pertencentes ao disco. A densidade $\rho_{KM}(z)$ corresponde ao grupo estelar escolhido (seção 4.1).

A função $\rho_{KM}(z)$ que torna compatível a equação (4.3.1) com a equação de Poisson (4.1.3) assume a forma

$$\rho_{KM}(z) = \rho_{0KM} e^{-\frac{z^2}{z_0^2}}, \quad (4.3.2)$$

em que z_0 é a altura de escala característica do disco, para as estrelas KM. O último passo para se calcular a densidade local é a determinação da altura de escala z_0 , que não pode ser feita a partir das estrelas catalogadas por Uppgren. Constituem uma amostra pequena (145 estrelas) e além disso são estrelas que pertencem a grupos cinemáticos distintos. Pode-se utilizar a função $\sigma_z(z)$, referida anteriormente, já que se conhece a dispersão das KM característica do disco. Torna-se necessário então a construção da curva σ_z em função de z . O Quadro 2 apresenta os pontos utilizados com as respectivas referências. Os dados cujas referências estão assinaladas com um asterisco foram calculados a partir de publicações recentes, o que será descrito a seguir. A altura de escala adotada neste trabalho é definida como aquela em que há uma queda por um fator e^{-1} da densidade em $z = 0$, para o material considerado. As dispersões foram calculadas utilizando-se a relação (4.1.7) e as alturas de escala foram obtidas a partir da construção de histogramas, com a contagem de estrelas nas diversas faixas Δz . Os erros em σ_z foram calculados a partir de

$$\Delta\sigma_z = \left(\frac{\sigma_z^2}{2N}\right)^{1/2}, \quad (4.3.3)$$

onde N é o número de estrelas usadas no cálculo da dispersão. Não são apontados os erros em z , já que em princípio existe uma indeterminação em $z = 0$ (posição do Sol em relação ao plano galáctico) de ± 10 pc, ou mais (Woolley, 1957; Woolley e Stewart, 1967; Hill, 1960). Os dados das estrelas B(*) foram calculados a partir de resultados observacionais publicados por Eggen (1975) e os dados das gigantes GK (*) a partir do trabalho de Yoss et al. (1981).

Quadro 2 - Dispersões e alturas de escala

| Material | $\sigma_z \pm \Delta\sigma_z$ (Km/s) | z(pc) | Referência (*: ver o texto) |
|-----------------------------------|--------------------------------------|-------|--------------------------------|
| Estrelas OB | $3,4 \pm 0,4$ | 25 | Quiroga e Tarsia (1981) |
| Estrelas A | $4,9 \pm 0,3$ | 33 | Perry (1969) |
| Variáveis cefeidas | $5,0 \pm 0,4$ | 45 | Allen (1973) |
| Estrelas O | $5,0 \pm 0,4$ | 50 | Allen (1973) |
| Estrelas B | $5,4 \pm 0,8$ | 57 | * |
| Estrelas A | $4,1 \pm 2,0$ | 66 | Rudnicki (1969) |
| Estrelas B | $5,0 \pm 0,5$ | 68 | * |
| Aglomerados abertos | $6,0 \pm 0,5$ | 80 | Allen (1973) |
| Estrelas MIII | $7,0 \pm 0,7$ | 87 | Jones (1972) |
| Estrelas B | $7,2 \pm 0,4$ | 96 | * |
| Estrelas Ao | $7,5 \pm 0,5$ | 108 | Woolley e Stewart (1967) |
| Estrelas A | $8,0 \pm 0,6$ | 115 | Allen (1973) |
| Estrelas gK | 15 | 270 | Allen (1973) |
| Estrelas A | $12,5 \pm 1,9$ | 296 | Rudnicki (1969) |
| Estrelas Ao | 18 ± 3 | 384 | Woolley e Stewart (1967) |
| Estrelas GK | 20 ± 1 | 400 | * |
| Estrelas A | $18,4 \pm 3,5$ | 465 | Rudnicki (1969) |
| Anãs Brancas | 20 | 500 | Allen (1973) |
| Estrelas MIII | $28 \pm 2,8$ | 686 | Jones (1972) |
| Var. Longo Período (M5e - M8e) | 30 | 700 | Allen (1973) |
| Estrelas GK | $30 \pm 4,4$ | 700 | * |
| RR Lyrae (P < 0,5 d) | 35 | 900 | Allen (1973) |

cont. Quadro 2

| Material | $\sigma_z \pm \Delta\sigma_z$ (Km/s) | z(pc) | Referência (*: ver o texto) |
|------------------------------------|--------------------------------------|-------|--------------------------------|
| Var. Londo Perio do (Moe - M4e) | 36 | 1000 | Allen (1973) |
| RR Lyrae (P > 0,5d) | 60 | 2000 | Allen (1973) |
| Aglomerados Glo bulares | 70 | 3000 | Allen (1973) |

A figura 7 mostra a parte relevante da função $\sigma_z(z)$ para a determinação de z_0 . Os pontos admitem uma aproximação linear, cujos parâmetros foram calculados levando-se em consideração os erros das medidas (Picot, 1980). A altura de escala obtida para a componente do disco das estrelas KM é de 100 pc.

A distribuição de densidade adotada será então

$$\rho_{KM}(z) = \rho_{oKM} e^{-\frac{z^2}{(100)^2}} \quad (4.3.4)$$

A solução do sistema formado pelas equações (4.1.3) e (4.3.1) fornece

$$\rho_o = 0,19 \pm 0,06 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 \text{ ,}$$

onde adotou-se um erro $\Delta z_0 = \pm 10$ pc e de acordo com Uggren (1978) um erro $\Delta\sigma_z = 0,5$ Km/s.

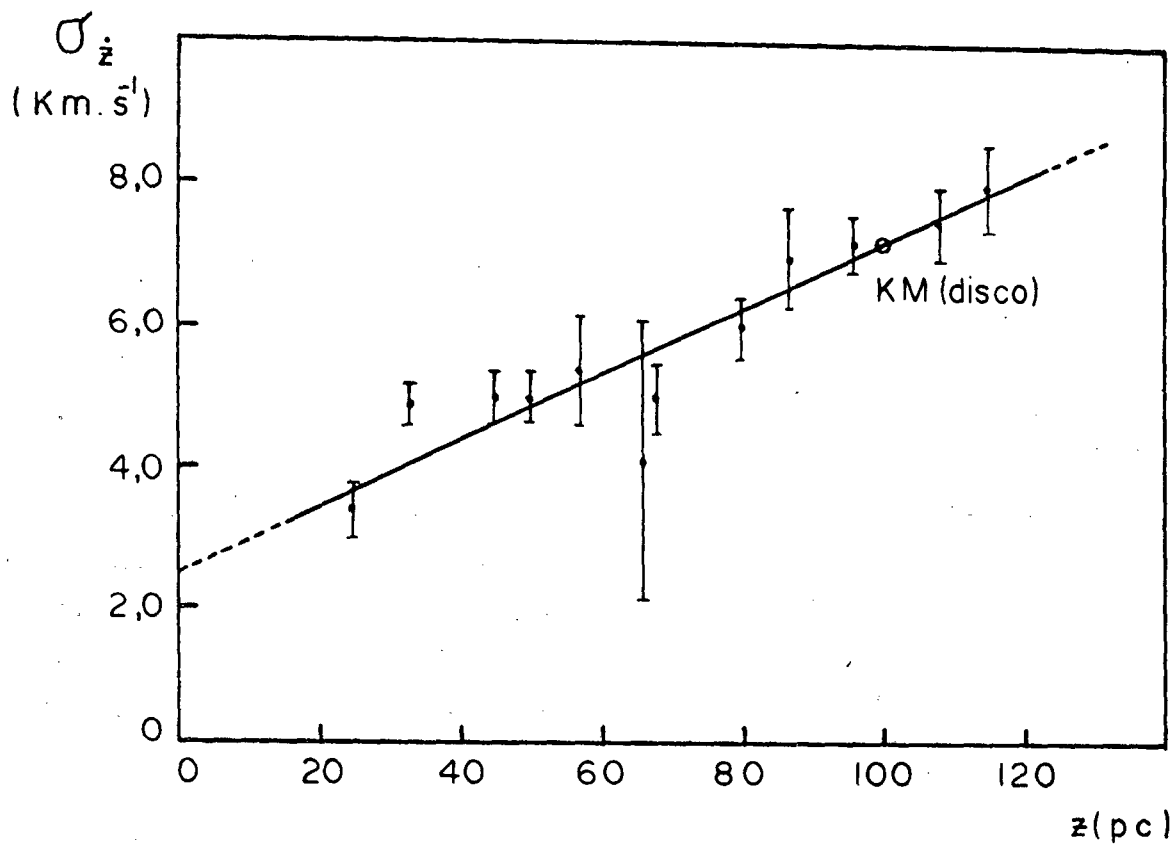


Fig. 7 : Parte linear da curva de dispersão para diferentes materiais na Galáxia. O ponto correspondente às estrelas KM (disco) está assinalado (o).

CAPÍTULO 5

DISTRIBUIÇÃO DE MASSA LOCAL

5.1 - Componentes observados da densidade de massa local

O valor de ρ_0 obtido no Capítulo anterior é a densidade total de massa, incluindo estrelas da sequência principal, matéria interestelar, anãs brancas e todo material que não é observado (Capítulo 3). É interessante comparar este resultado, obtido por um processo dinâmico, com os valores conhecidos da observação. Para esta comparação será utilizada a função luminosidade obtida por Weistrop (1972). Deste trabalho obtêm-se para a densidade de estrelas da população do disco o valor

$$\rho_1 = 0,067 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 .$$

A densidade local de anãs brancas de $0,01 - 0,03 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3$ calculada por Weidemann (Weidemann, 1969 apud Weistrop, 1972) concorda com o valor obtido por Chiu (1980):

$$\rho_2 = 0,013 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 ,$$

que será adotado neste trabalho. O valor obtido por Quiroga (1980) para a matéria interestelar é

$$\rho_3 = 0,03 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 .$$

A densidade de massa local vista é a soma desses componentes, ou seja, é igual a

$$\rho_T = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0,11 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3.$$

A diferença expressiva entre este resultado e o valor obtido dinamicamente pode, no entanto, ser interpretada e em princípio justificada. Como foi afirmado no Capítulo 4, deve-se considerar a influência do termo $V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z}$, essencialmente hidrodinâmico, da equação (4.1.4). A partir de resultados observacionais recentes pode-se avaliar este termo.

5.2 - Componente hidrodinâmico da densidade na vizinhança do Sol

Com a inclusão do termo hidrodinâmico $V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z}$, a equação (4.3.1) passa a ser

$$K_z = \frac{\sigma_z^2}{\rho_{KM}(z)} \frac{d\rho_{KM}(z)}{dz} + V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z}, \quad (5.2.1)$$

onde se consideram apenas variações na coordenada z . Através da equação de Poisson (4.1.3), encontra-se

$$\rho'_0 = \rho_0 - \frac{1}{4\pi G} \frac{d}{dz} \left(V_{z0} \frac{dV_{z0}}{dz} \right). \quad (5.2.2)$$

Para se avaliar a correção no valor de ρ_0 calculado na seção 4.3, deve-se calcular

$$\Delta\rho = \frac{1}{4\pi G} \left[\left(\frac{dV_{z0}}{dz} \right)^2 + V_{z0} \frac{d^2V_{z0}}{dz^2} \right]. \quad (5.2.3)$$

É necessário para este cálculo um conhecimento perfeito do campo de velocidades $V_{z0}(z)$, bem como da posição real do Sol com respeito a este campo. Estas informações não existem de forma completa. Pode-se, no entanto, utilizar os dados disponíveis para uma avaliação mesmo que grosseira do termo (5.2.3). A figura 8, extraída do trabalho de Franco (1981), mostra a configuração do movimento hidrodinâmico na direção z em relação à coordenada r (distância do material até o Sol), ao longo do braço espiral local.

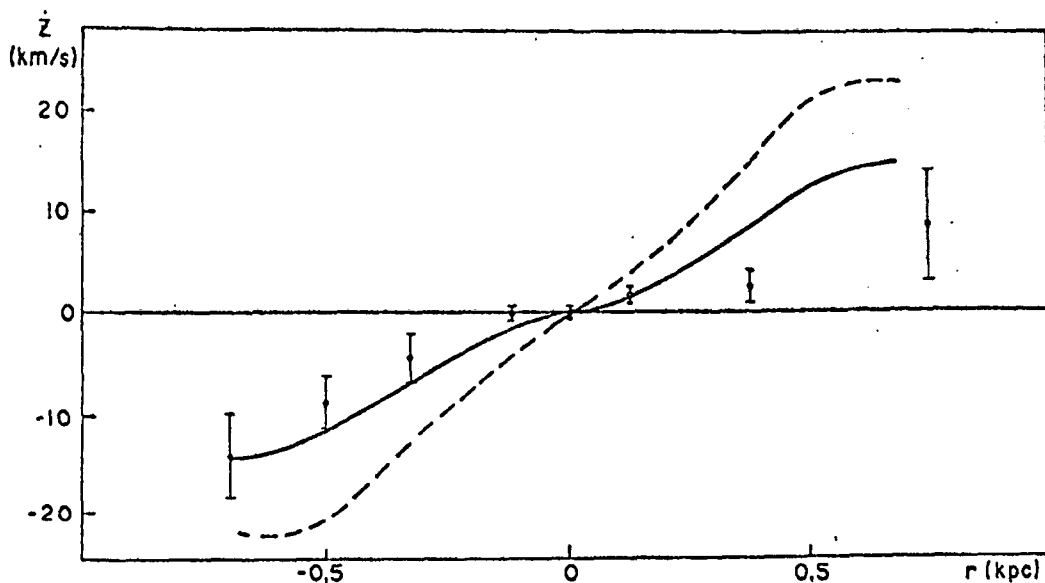


Fig. 8 - Configuração local do movimento hidrodinâmico na direção z (Franco, 1981).

Nesta figura, a linha cheia representa o resultado obtido por Quiroga e Tarsia (1981) a partir de dados observacionais e a linha tracejada representa resultado teórico (Nelson e Matsuda, 1980 apud Quiroga e Tarsia, 1981) discutido por estes autores. Os pontos que aparecem na figura são o resultado de um estudo da cinemática de estrelas OB realizado por Franco e que será

utilizado. As duas curvas da figura foram obtidas por métodos indiretos en quanto que os pontos de Franco são provenientes de velocidades observadas. Tem-se para $V_{z0} = \dot{z}$ um valor máximo médio de aproximadamente 12 Km/s.

Por outro lado, encontra-se, a partir do estudo da estrutura fina do braço espiral local feito por Quiroga e Schlosser (1977), que a cor rugação do braço na direção z atinge uma altura máxima em torno de 143 pc. A figura 9 mostra a corrugação do braço local no plano perpendicular ao dis co galáctico. Este estudo foi feito com dados de gás interestelar cujo com

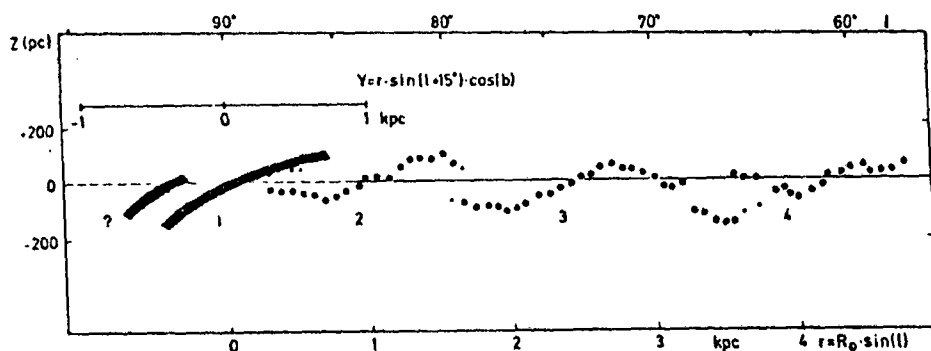


Fig. 9 - Corrugação do braço espiral local. O fragmento 1 caracteriza a zo na local (Quiroga e Schlosser, 1977).

portamento cinemático é similar às jovens estrelas OB presentes nos braços espirais.

Dessas considerações, pode-se avaliar $\Delta\rho$. Ressalte-se que esta avaliação será feita no sentido de uma primeira observação na grandeza de $\Delta\rho$, sem se atentar para o rigor do resultado, mesmo porque o rigor é impedido pela carência de dados observacionais e informações precisas sobre $V_{z0}(z)$. A título de ilustração, serão postuladas duas formas funcionais para $V_{z0}(z)$:

$$V_{z0}(z) = v_{z0} \cos(\omega t - kz) \quad e$$

$$V_{z0}(z) = \text{constante } z. \quad (5.2.4)$$

A equação (5.2.3) fornece, respectivamente, a partir de (5.2.4):

$$\Delta\rho = \frac{1}{4\pi G} k^2 v_{z0}^2 [\text{sen}^2(\omega t - kz) - \text{cos}^2(\omega t - kz)] \quad e \quad (5.2.5)$$

$$\Delta\rho = \frac{1}{4\pi G} (\text{constante})^2 = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{v_{z0}}{\Delta z} \right)^2 .$$

Com os valores de v_{z0} e Δz , iguais a 12 Km/s e 143 pc, e com $\lambda = 2\pi/k = 4\Delta z$, encontra-se

$$\Delta\rho = 0,32 \quad M_{\odot}/\text{pc}^3 \quad e \quad (5.2.6)$$

$$\Delta\rho = 0,13 \quad M_{\odot}/\text{pc}^3 ,$$

onde o primeiro valor não inclui o termo em seno e cosseno. Apesar das hipóteses e simplificações feitas, estas estimativas informam pelo menos que a parcela $\Delta\rho$ corresponde a efeitos puramente hidrodinâmicos deve ser considerada. Este cálculo pode ser feito também por um processo similar ao adotado por Quiroga (1980) na avaliação da força K_z causada por efeitos hidrodinâmicos. O método será mostrado a seguir. A parte hidrodinâmica em K_z , observando-se a equação (5.2.1), é

$$K_z = v_{z0} \frac{dv_{z0}}{dz} , \quad (5.2.7)$$

Que pode ser escrita como

$$K_z = \frac{1}{2} \frac{d(V_{z0}^2)}{dz} \cong \frac{1}{2} \frac{v_{z0}^2}{\Delta z} = 1,6 \times 10^{-9} \text{ cm/s}^2 . \quad (5.2.8)$$

Escrevendo-se

$$K_z = 4\pi G \Delta\rho \Delta z, \quad (5.2.9)$$

por intermédio da equação de Poisson, obtém-se

$$\Delta\rho = 0,07 \text{ } M_\odot/\text{pc}^3 . \quad (5.2.10)$$

O valor real de $\Delta\rho$ na região local deve estar em torno deste resultado. ρ_0 pode ser menor se se considerar a sobreestimação do gradiente $\frac{d(V_{z0}^2)}{dz}$ mas pode ser maior dependendo da posição real do Sol em relação a $z = 0$.

Os valores de $\Delta\rho$ podem ser novamente calculados utilizando-se dados de outra fonte. A investigação de Brosche e Schwan (1981) acerca dos movimentos sistemáticos de estrelas do disco galáctico, incluindo estrelas da população do braço espiral, fornece dados estatísticos de movimento próprio e de velocidade radial. Os autores utilizam estrelas, dos catálogos FK4 e FK4 sup, de vários tipos espectrais (tabela 1 b do referido trabalho). Os valores médios aproximados

$$v_{z0} = 8,2 \text{ Km/s} \quad e$$

$$(5.2.11)$$

$$\Delta z = 88 \text{ pc}$$

podem ser obtidos a partir das figuras 1 e 2 e da tabela 3 daquele trabalho. A diferença entre estes valores e os anteriores justifica-se pois aqueles são característicos de estrelas OB e estes se referem a uma mistura de estrelas de vários tipos espectrais. Cada grupo estelar possui regiões preferidas na distribuição espacial bem como características cinemáticas diferentes. Deve-se ressaltar todavia que os cálculos tanto da força K_z como da densidade ρ_0 não podem depender do tipo de material utilizado.

Levando-se em conta a observação anterior, os três processos utilizados para o cálculo de $\Delta\rho$ fornecem respectivamente:

$$\Delta\rho = 0,40 \quad M_\odot/\text{pc}^3 \quad ,$$

$$\Delta\rho = 0,16 \quad M_\odot/\text{pc}^3 \quad \text{e} \quad (5.2.12)$$

$$\Delta\rho = 0,08 \quad M_\odot/\text{pc}^3 \quad .$$

Considerando-se o valor obtido ρ_0 , vê-se que ρ'_0 aproxima-se bastante da densidade vista ρ_T , quando se leva em conta $\Delta\rho = 0,07-0,08 M_\odot/\text{pc}^3$.

FORÇA K_z NA VIZINHANÇA DO SOL

6.1 - Método

Obtém-se a força K_z na zona local através da integração da equação de Poisson (4.1.2). Para isto, será adotado

$$\rho(z) \propto \rho(z) \text{ (estrelas KM)}, \quad (6.1.1)$$

com o fator de escala dado por

$$\frac{1}{4\pi G} \frac{dK_z}{dz} (z=0) = 0,11 \text{ } M_{\odot}/\text{pc}^3 \quad (6.1.2)$$

que é a densidade local de massa vista, conforme a seção 5.1. Este procedimento é justificado por argumentos da seção 4.2.

Deve-se agregar a este resultado para K_z a contribuição da força radial responsável pela rotação galáctica. A equação de Poisson (4.1.1), excluindo-se apenas o termo da variação com θ (simetria axial), é

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RK_R)}{\partial R} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = 4\pi G\rho. \quad (6.1.3)$$

Para se avaliar os termos em R deve-se conhecer a distribuição de massa fora da zona local e a rotação galáctica fora do disco. Como não existem es

tes dados, podem-se utilizar apenas dados observacionais locais para se ter uma idéia quantitativa da contribuição de K_R para a força K_z . Em baixas alturas z , com z máximo dado pela altura em que a força $K_z(z)$ deixa de ser linear (figura 1), a projeção da força galactocêntrica sobre a direção z , ou seja, o termo $K_z(z)$ (radial), toma a forma:

$$\int_0^{z_0} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial (RK_R)}{\partial R} \right] dz = \frac{\theta_c^2}{R_0^2} z \Big|_0^{z_0} . \quad (6.1.4)$$

Nesta expressão, z_0 é a altura máxima; $\theta_c = 250$ Km/s e $R_0 = 8,7$ Kpc são respectivamente a velocidade de rotação e a distância galactocêntrica do centróide local (Quiroga, 1980).

Para $z > z_0$, postula-se

$$K_z(z) \text{ (radial)} \propto K_z(z) \text{ (equação 4.1.2)}. \quad (6.1.5)$$

O fator de proporcionalidade é definido a partir da equação (6.1.4). A suposição (6.1.5) pode resultar em valores de $K_z(z)$ (radial) menores que os reais mas mantém coerência com a distribuição de massa na Galáxia. Admitir $K_z(z)$ (radial) $>$ $K_z(z)$ (equação 4.1.2) implica em negar a estrutura achatada e lenticular da Galáxia. Por outro lado, sabe-se que a velocidade de rotação galáctica diminui com o aumento de z . Por exemplo, os subsistemas de aglomerados globulares, subanãs e estrelas de alta velocidade apresentam uma velocidade de rotação de aproximadamente 70 Km/s, a uma altura $z = 2 - 3$ Kpc (Quiroga, 1980), o que é mais um indício da validade de (6.1.5).

As considerações acima descrevem o método para a obtenção de $K_z(z)$ a partir da equação de Poisson. O passo seguinte consiste em se determinar a função $\rho(z)$ (estrelas KM).

6.2 - Distribuição de densidade para as estrelas KM

De acordo com o Quadro 1, seção 4.2, as estrelas KM se distribuem em dois grupos preponderantes: o grupo do disco com 60,9% do total e uma dispersão $\sigma_z = 7,2$ km/s e o grupo do estrato com 37,9% do total e uma dispersão $\sigma_z = 23,3$ km/s. O grupo do halo pode ser desprezado na computação da força K_z . Para se obter a função completa $\rho(z)$ para as estrelas KM admite-se

$$\rho(z) = \rho_D(z) + \rho_E(z) ,$$

em que $\rho_D(z)$ se refere ao subgrupo do disco e $\rho_E(z)$ ao subgrupo do estrato. A função $\rho_E(z)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\sigma_z^2}{\rho_E(z)} \frac{d\rho_E(z)}{dz} \right] = -4\pi G \rho_E(z) , \quad (6.2.1)$$

resultante das equações (4.1.2) e (4.1.9), onde σ_z é constante e se refere ao subgrupo do estrato. Encontra-se (Apêndice D):

$$\rho_E(z) = \rho_{0E} \operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_e} , \quad (6.2.2)$$

onde z_e deve ser tal que para $z = z_E$ (altura de escala para o subgrupo do estrato) obtêm-se $\rho_E(z_E) = e^{-1} \rho_{0E}$, conforme se convencionou na seção 4.3. A altura z_E de acordo com a figura 10 vale 538 pc, resultando em $z_e = 496$ pc. Para a componente do disco adota-se a solução (6.2.2) para z pequeno, que se reduz a (Apêndice D)

$$\rho_D = \rho_{0D} e^{-\frac{z^2}{z_D^2}} . \quad (6.2.3)$$

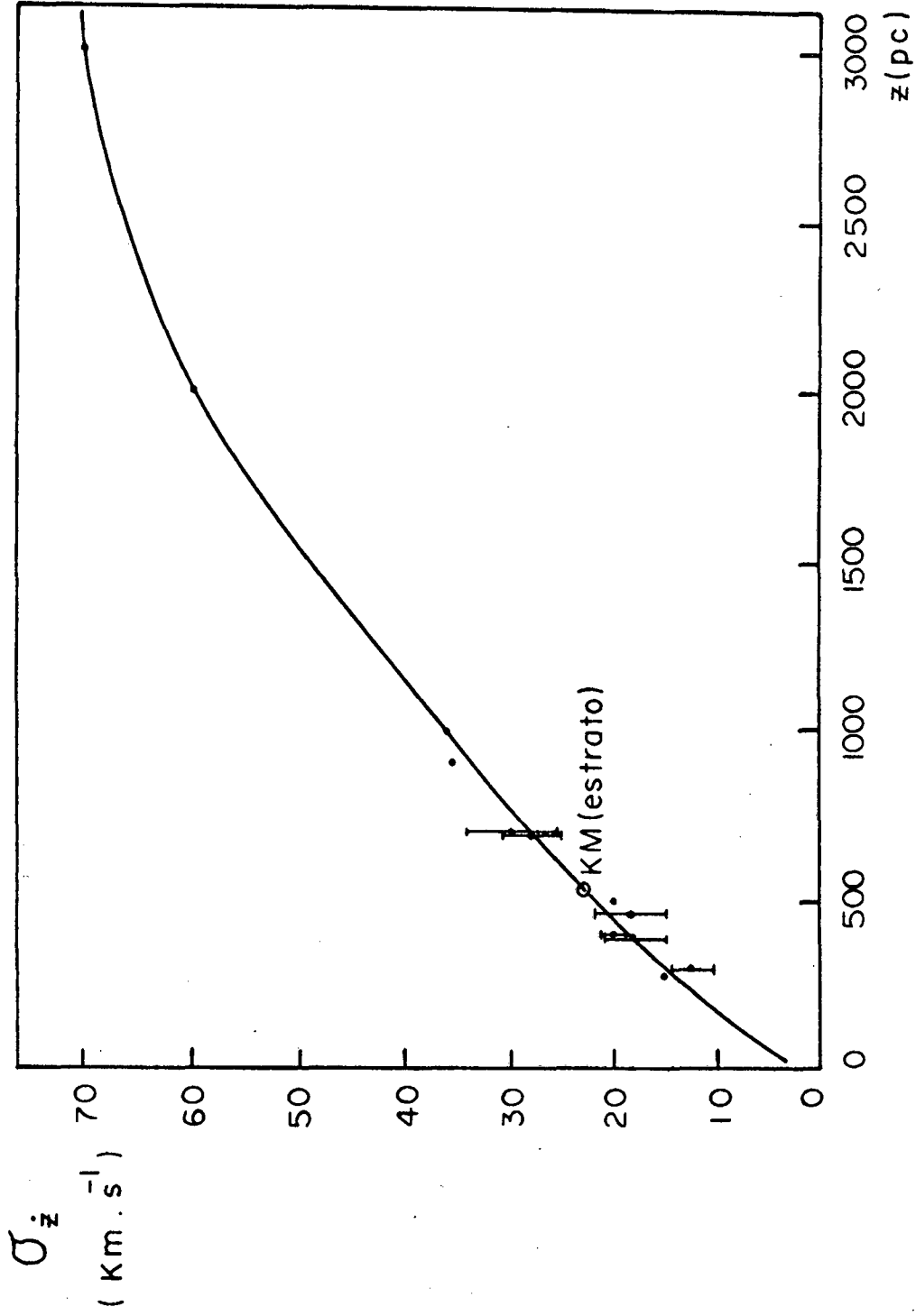


Fig. 10: Diagrama completo de dispersões, segundo o Quadro 2 (seção 4.3). A parte linear (25-115 pc) foi detalhada na figura 7. O ponto correspondente às estrelas KM (estrato) está assinalado (o).

O parâmetro z_e na equação (0.8) coincide com a altura de escala z_D , definida na seção 4.3, e vale 100 pc (figura 7).

Com os dados disponíveis, a função $\rho(z)$ torna-se:

$$\rho(z) = 0,6 \rho_0 e^{-\left(\frac{z^2}{1,00 \times 10^4}\right)} + 0,4 \rho_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{496}\right). \quad (6.2.4)$$

Adotando-se para ρ_0 o valor apresentado na seção 5.1, tem-se finalmente:

$$\rho(z) = 0,066 e^{-\left(\frac{z^2}{1,00 \times 10^4}\right)} + 0,044 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{496}\right). \quad (6.2.5)$$

O diagrama $\rho(z) \times z$ está mostrado na figura 11.

6.3 - Força $K_z(z)$

A equação de Poisson (4.1.2) e a equação (6.2.5) fornecem

$$K_z(z) = -4\pi G \int_0^z \left[0,066 e^{-\left(\frac{z^2}{1,00 \times 10^4}\right)} + 0,044 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{496}\right) \right] dz. \quad (6.3.1)$$

Optou-se por uma integração numérica; o Quadro 3 mostra os valores de $K_z(z)$.

A força $K_z(z)$ (radial) pode agora ser calculada pois do Quadro 3 encontra-se $z_0 = 70$ pc. Este valor foi obtido com uma regressão linear (Spiegel, 1979) utilizando-se os valores iniciais de z . Admitiu-se uma variação de até 5% na inclinação da reta. O coeficiente de correlação manteve-se igual a 1,00. Com o valor de z_0 determinado, as equações (6.1.4) e

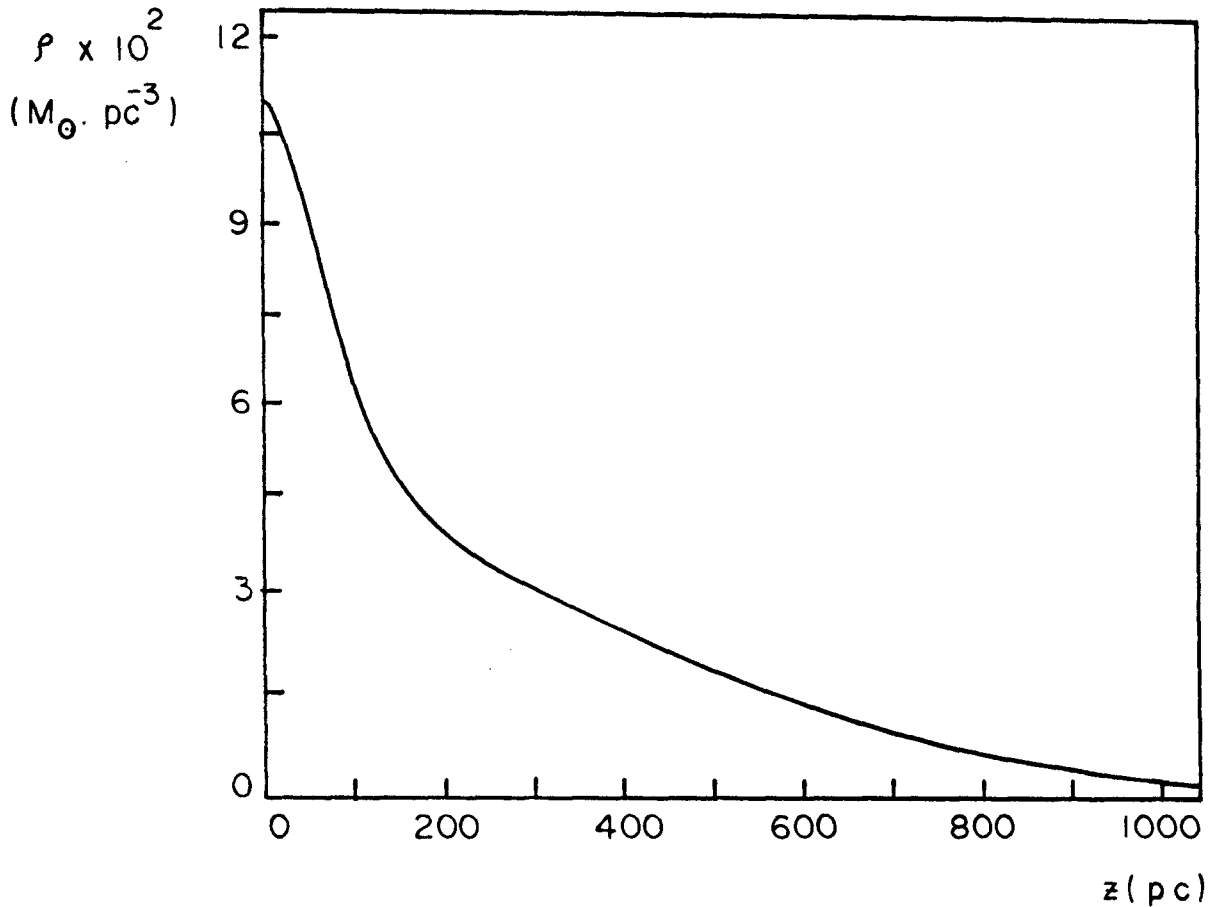


Fig. 11 - Distribuição de densidade semi-teórica obtida com dados observacionais das estrelas KM (equação (6.2.5)).

(6.1.5) fornecem os dados do Quadro 4.

A figura 12 mostra as curvas correspondentes aos Quadros 3 e 4. A força $\kappa_z(z)$ (total) é a soma das curvas I e II.

Admitindo condições extremas para a distribuição de densidade $\rho(z)$, Quiroga (1980) calcula limites máximos e mínimos para a força $\kappa_z(z)$. A força $\kappa_z(z)$ (total) aqui encontrada está na figura 13 junto aos resultados obtidos por Quiroga.

Quadro 3 - Força K_z obtida através da equação de Poisson

| $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) | $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) | $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) | $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) |
|---|----------|---|----------|---|----------|---|----------|
| 0 | 0 | 0,92 | 50 | 1,6 | 100 | 4,2 | 600 |
| 0,19 | 10 | 1,1 | 60 | 2,5 | 200 | 4,4 | 700 |
| 0,38 | 20 | 1,3 | 70 | 3,1 | 300 | 4,5 | 800 |
| 0,57 | 30 | 1,4 | 80 | 3,5 | 400 | 4,6 | 900 |
| 0,75 | 40 | 1,5 | 90 | 3,9 | 500 | 4,7 | 1000 |

Quadro 4 - Força $K_z(z)$ (radial)

| $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) | $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) | $K_z \times 10^9$ (cm/s ²) | z (pc) |
|---|----------|---|----------|---|----------|
| 0 | 0 | 0,24 | 100 | 0,63 | 600 |
| 0,027 | 10 | 0,37 | 200 | 0,66 | 700 |
| 0,080 | 30 | 0,46 | 300 | 0,68 | 800 |
| 0,13 | 50 | 0,53 | 400 | 0,69 | 900 |
| 0,19 | 70 | 0,59 | 500 | 0,70 | 1000 |

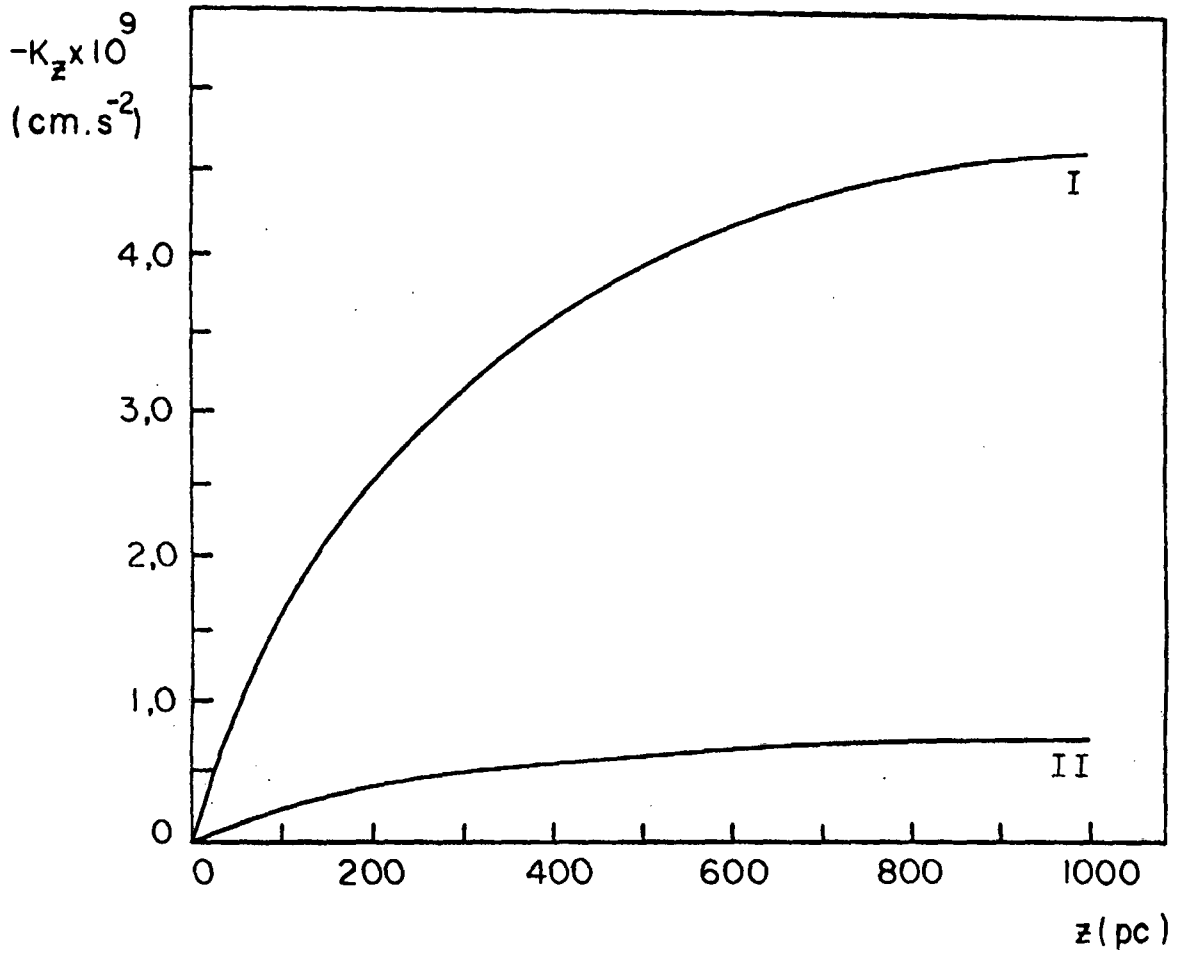


Fig. 12: Força $K_z(z)$ (equação 4.1.2) (I) e força $K_z(z)$ (radial) (II).

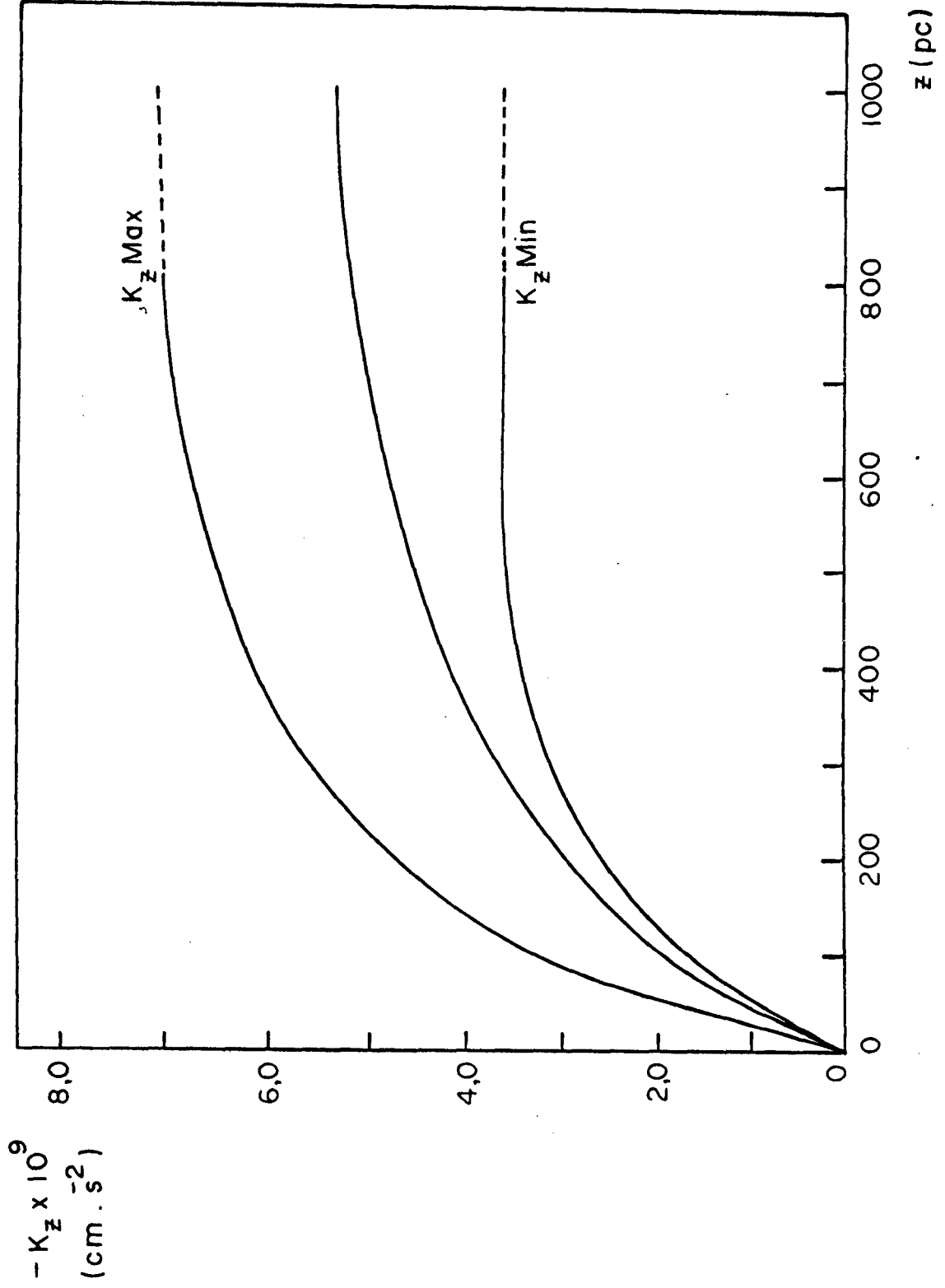


Fig. 13: Força $K_z(z)$ (total) comparada com os limites de Quiraga (1980).

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS, CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

7.1 - Densidade local

Na seção 5.2 verificou-se que o termo hidrodinâmico $V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z}$, desprezado a princípio, pode ser grande. Considere-se a equação (5.2.2) escrita na forma

$$\rho_0' = \rho_0 - \Delta\rho. \quad (7.1.1)$$

Viu-se que, se tomarmos o cálculo aproximado de $\Delta\rho$ feito com as equações (5.2.8) e (5.2.9), há uma boa concordância entre a densidade de massa observada na zona local ($0,11 M_\odot/\text{pc}^3$, conforme a seção 5.1) e o valor de ρ_0' . A determinação de ρ_0 por processos semelhantes ao adotado aqui tem levado a resultados cada vez maiores, à medida que se tem acesso a mais informações estelares. O Quadro 5 exemplifica esta afirmação.

Quadro 5 - Densidade local calculada em trabalhos anteriores

| Autor | $\rho_0 (M_\odot/\text{pc}^3)$ |
|----------------|--------------------------------|
| Oort (1932) | 0,08 - 0,11 |
| Hill (1960) | 0,13 |
| Oort (1960) | 0,15 |
| Jones (1972) | 0,21 |
| Quiroga (1980) | 0,20 |

Nestes trabalhos não se trata especificamente da influência da componente hidrodinâmica na densidade. Por outro lado, a densidade de massa local observada também tem aumentado mas sempre com resultados inferiores àqueles preditos por estudos dinâmicos (Dessureau e Uppgren, 1975). Estes fatos justificam a tentativa feita de se encontrar em termos quantitativos a influência do termo hidrodinâmico $V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z}$ (equação (5.2.2)). Conclui-se portanto que a concordância observada em (7.1.1), quando se adota o terceiro método utilizado na seção 5.2, não pode ser considerada casual.

Outro aspecto a se considerar refere-se à posição do Sol, em relação ao plano galáctico. Como já foi dito, há uma indeterminação nesta posição (Allen, 1973, registra 8 ± 12 pc em direção ao norte galáctico). Logo qualquer suposição de dependência oscilatória de V_{z0} com z encontra a barreira fundamental de não se saber onde está o Sol em relação à onda, tenha ela a forma que tiver. Isto pode ser uma justificativa dos valores absurdos obtidos para $\Delta\rho$ através das equações (5.2.5). A figura 5 do Capítulo 3 ilustra de maneira qualitativa a questão referente à posição do Sol: onde está o Sol em relação àquele padrão ondulatório?

Admitindo-se o caráter oscilatório para $V_{z0}(z)$, pode-se interpretar $\Delta\rho$ como uma parcela, incluída no cálculo de ρ_0 , falsamente considerada resultante de interação gravitacional quando na realidade origina-se da oscilação hidrodinâmica de V_{z0} . A causa dos padrões ondulatórios observados na Galáxia é desconhecida (Lin et al, 1969) mas certamente não é um fenômeno local.

A separação das estrelas KM em dois subgrupos cinemáticos distintos é artificial, embora constitua um melhor conhecimento daquele grupo estelar. Na realidade, tem-se não uma divisão estratificada em subgrupos cinemáticos mas uma função contínua $\sigma_z(z)$. Para se ter esta função para as estrelas anãs KM, por exemplo, as observações de 145 estrelas (que constituem a amostra de Uppgren, 1978) não seriam suficientes, pela impossibilidade de se fazer um estudo estatístico confiável. É importante salientar que tais grupos cinemáticos correspondem a grupos etários diferentes. Um dos critérios utilizados por Uppgren (1978) na separação das anãs KM baseia-se no conteúdo metálico observado. As estrelas do disco têm alta metalicidade (estrelas jovens) e as do estrato e halo têm baixa metalicidade. Isto indica que o termo $\frac{\partial V_{z0}}{\partial t}$, desprezado na equação hidrodinâmica, poderá ser

avaliado futuramente, e que certamente não é nulo. Observações recentes mostram que também os aglomerados globulares podem ser separados em grupos etários e cinemáticos diferentes (Castellani e Melchiorri, 1981; Straizys, 1982), o que significa que o ponto correspondente no gráfico $\sigma_z(z)$ (figura 10) está mal avaliado.

A extrapolação do gráfico mostrado na figura 7 fornece para $z = 0$ uma dispersão $\sigma_z = 2,5$ km/s. Este valor pode ser considerado como característico de gás interestelar, concordando com resultados do trabalho de Quiroga (1982) sobre turbulência neste material.

7.2 - Força $K_z(z)$

Os resultados quantitativos obtidos para a força $K_z(z)$ (Quadros 3 e 4) podem ser questionados se se consideram com rigor os seguintes fatos:

- i) a indeterminação de $z = 0$,
- ii) a estrutura espiral da Galáxia,
- iii) a corrugação do braço espiral local,
- iv) a validade do modelo do disco infinito,
- v) a influência do núcleo galáctico,
- vi) o conhecimento incompleto da rotação galáctica e
- vii) a representatividade da distribuição $\rho(z)$.

A força $K_z(z)$ (total) representada na figura 13 é apenas uma estimativa média. Não se pode garantir que a curva contenha a origem do sistema de coordenadas nem que o seu aspecto real seja aquele; a curva deve apresentar deformações em virtude da estrutura fina observada no braço espiral local. Para alturas maiores que 100 pc a influência do núcleo galáctico bem como a determinação precisa da rotação galáctica podem introduzir modificações na avaliação de $K_z(z)$, sobretudo em $K_z(z)$ (radial).

Quiroga (1980) obteve os limites mostrados na figura 13 utilizando diferentes grupos estelares como paradigma de todo o material da Galáxia. Na obtenção de K_z Max utilizou a distribuição de estrelas MIII que, em relação à distribuição de estrelas A utilizadas no cálculo de K_z Min, pressupõe um maior número de estrelas fora do disco galáctico; a integração de

$\rho(z)$ através da equação de Poisson (4.1.2) conseqüentemente levaria a valores maiores de K_z com a distribuição das MIII do que com as estrelas A. Além disso, o fator de escala

$$\frac{1}{4\pi G} \frac{dK_z}{dz} (z = 0)$$

utilizado por Quiroga para K_z Min refere-se à densidade vista (função luminosidade) enquanto que para K_z Max adota o valor obtido dinamicamente por ele através de dados de gás interestelar. Como já foi dito, os valores de densidade local encontrados por processos dinâmicos são superiores aos valores observados. As condições extremas adotadas por Quiroga resultaram nas estimativas superiores e inferiores de $K_z(z)$. O fato de $K_z(z)$ (total) ter se situado entre tais limites tem grande significação pois o grupo estelar utilizado (estrelas KM) é representativo na distribuição estelar galáctica. Ao mesmo tempo que confirma os limites de Quiroga, $K_z(z)$ (total) dá uma estimativa dos valores reais de $K_z(z)$.

Em trabalhos anteriores os grupos estelares utilizados, apesar da facilidade observacional, representam parcelas ínfimas da massa total da Galáxia. O Quadro 6 mostra o grupo estelar utilizado por vários autores no cálculo da força $K_z(z)$.

Quadro 6 - Grupo estelar adotado para o cálculo de $K_z(z)$ em trabalhos anteriores

| Autor | Grupo Estelar |
|--------------------------|----------------|
| Woolley (1957) | Estrelas A |
| Hill (1960) | Gigantes K |
| Oort (1960) | Gigantes K |
| Woolley e Stewart (1967) | Estrelas A |
| Perry (1969) | Estrelas Ao-A2 |
| Jones (1972) | Gigantes M |

As estrelas KM representam cerca de 40% da massa total vista e portanto são confiáveis no que se refere à distribuição $\rho(z)$.

Os resultados da seção 6.3 indicam que o disco galáctico possui uma espessura de aproximadamente 140 pc, na região local. Isto é confirmado pelo trabalho de Quiroga (1980) em que ele encontra resultado análogo. Oort (1932) registra 400 pc, Hill (1960) obtém 400 pc e Oort (1960) corrige o valor antigo calculando cerca de 250 pc para a espessura do disco. Estes números sugerem que a Galáxia deve ter menos massa do que se supõe, já que não há alterações substanciais nos valores da densidade de massa local e a espessura do disco aqui encontrada é consideravelmente menor.

7.3 - Perspectivas

Os trabalhos citados no Quadro 6 utilizam grupos estelares pouco representativos da Galáxia como um todo. No entanto, as curvas $\rho(z)$ correspondentes àqueles grupos são construídas a partir exclusivamente de dados observacionais. Neste trabalho utilizou-se um grupo estelar representativo mas com uma distribuição $\rho(z)$ semi-teórica. A dificuldade de se observar estrelas dos tipos espectrais F, G, K e M (classe de luminosidade V), que representam a maior parte da massa galáctica, em alturas maiores que 500 pc, impede a obtenção observacional da curva $\rho(z)$ correspondente. Um programa observacional limitado a estrelas F pode ser possível. A observação ficaria limitada à altura máxima de 700-800 pc, o que implicaria em estrelas de magnitudes aparentes máximas de 11-12. Tal programa é possível no Observatório Astronômico da Piedade (UFMG). Ele se constituiria da contagem de estrelas F em diferentes alturas, na direção do Pólo Sul Galáctico, bem como da obtenção de velocidades radiais através do Espectrógrafo Universal de Rede (Carl Zeiss Jena) do Observatório. Se se adota um procedimento análogo ao de Jones (1972) na observação de estrelas MIII, as velocidades radiais podem ser aproximadas às velocidades V_z . Jones tomou um cone a partir do Sol até uma região de raio $17^{\circ},5$, centrada no Pólo Sul Galáctico. Na região local tomou-se uma esfera de 150 pc centrada no Sol para se garantir o número de estrelas suficiente à estatística. O cone é truncado em várias alturas determinando-se as regiões para as observações. Método semelhante

foi utilizado por Perry (1969) na observação de estrelas A; o cone de Perry abrangia 15° a partir do Pólo Norte Galáctico e havia uma esfera de 50 pc de raio. A distribuição $\rho(z)$ resultante deste programa pode ser aplicada nas determinações de $K_z(z)$ e ρ_0 , como foi feito neste trabalho; o resultado deve ser mais realista.

Além disso, o conhecimento da função $V_z(z)$ juntamente com $\rho(z)$ fornece meios de se resolver numericamente a equação de Boltzmann (4.1.9),

$$K_z(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d}{dz} (\rho(z) \sigma_z^2) + V_{z0} \frac{dV_{z0}}{dz} ,$$

acrescida do termo hidrodinâmico em V_{z0} e onde não mais se considera σ_z constante.

BIBLIOGRAFIA

C.W. Allen, "Astrophysical Quantities" (3ª edição), The Athlone Press, London, 1973.

P. Brosche e H. Schwan, *Astron. Astrophys.*, 99, 311 (1981).

V. Castellani e M. Melchiorri, *Astrophys. Space Sci.*, 80, 289 (1981).

S.Chandrasekhar, "Principles of Stellar Dynamics", Dover Publications, Inc., New York, 1960.

L.-T.G. Chiu, *Astron. J.*, 85, 812 (1980).

R.L. Dessureau e A.R. Upgren, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, 87, 737 (1975).

O.J. Eggen, *Publ. Astron. Soc. Pacific*, 87, 37 (1975).

G.A.P. Franco, "Cinemática Local das Estrelas OB" (Tese de Mestrado), UFMG, Belo Horizonte, 1981.

E.R. Hill, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 15, 1 (1960).

F. Hóuse e D. Kilkeny, *Astron. Astrophys.*, 81, 251 (1980).

J.H. Jeans, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 76, 78 (1915).

J.H. Jeans, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 82, 122 (1922).

D.H.P. Jones, *Astrophys. J.*, 178, 467 (1972).

J.C. Kapteyn, *Astrophys. J.*, 55, 302 (1922).

R. Kurth, "Introduction to the Mechanics of Stellar Systems", Pergamon Press, London, 1957.

C.C. Lin, C. Yuan e F.H. Shu, *Astrophys. J.*, 155, 721 (1969)².

- D. Mihalas e P.M. Routly, "Galactic Astronomy", W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1968.
- K.F. Ogorodnikov, "Dynamics of Stellar Systems", Pergamon Press, Oxford, 1965.
- J.H. Oort, Bull. Astron. Inst. Netherlands, 6, 249 (1932).
- J.H. Oort, Bull. Astron. Inst. Netherlands, 15, 45 (1960).
- J.H. Oort, "Stars and Stellar Systems" (v. V, p. 455), University of Chicago Press, Chicago, 1965 .
- C.L. Perry, Astron. J., 74, 139 (1969).
- A. Picot, Am. J. Phys., 48, 302 (1980).
- R.J. Quiroga, Astrophys. Space Sci., 68, 393 (1980).
- R.J. Quiroga, (1982), em preparação.
- R.J. Quiroga e W. Schlosser, Astron. Astrophys., 57, 455 (1977).
- R.J. Quiroga e R. Tarsia, Astron. Astrophys., (1981), aceito para publicação.
- K. Rohlfs, "Lecture Notes in Physics" (v.69), Springer, Berlin, 1977.
- K. Rohlfs e J. Kreitschmann, Astrophys. Space Sci., 79, 289 (1981).
- M.R. Spiegel, "Probabilidade e Estatística", Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda., São Paulo, 1979.
- V. Straizys, Astrophys. Space Sci., 81, 179 (1982).
- A.R. Upgren, Astron. J., 83, 626 (1978).
- A.R. Upgren, D.W. Dawson e P.K. Lü, Astrophys. J., 251, 557 (1981).
- D. Weistrop, Astron. J., 77, 849 (1972).

R. v.d. R. Woolley, Mon. Not. R. Astron. Soc., 117, 198 (1957).

R. Woolley e J.M. Stewart, Mon. Not. R. Astron. Soc., 136, 329 (1967).

K.M. Yoss, R.A. Karman e W.I. Hartkopf, Astron. J., 86, 36 (1981).

APÊNDICE A

O TEOREMA DE LIOUVILLE E A DINÂMICA ESTELAR

O estado de um sistema dinâmico conservativo, com n graus de liberdade, é completamente definido especificando-se as coordenadas (q_1, q_2, \dots, q_n) e seus momenta, conjugados (p_1, p_2, \dots, p_n) . Este estado pode ser representado num espaço de $2n$ dimensões (o espaço de fase do sistema) cujas coordenadas cartesianas retangulares são os n pp e os n qq. Se o Hamiltoniano do sistema é H , as equações do movimento são:

$$\dot{p}_s = - \frac{\partial H}{\partial q_s} \quad ; \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad (s = 1, \dots, n). \quad (\text{A.1})$$

Através de cada ponto do espaço de fase passa uma trajetória definida que satisfaz as equações do movimento. Um elemento de volume no espaço de fase limitado por $q_1, q_1 + dq_1, \dots, q_n, q_n + dq_n, p_1, p_1 + dp_1, \dots, p_n + dp_n$ tem módulo $d\Omega = dq_1 \dots dp_n$. Os pontos do sistema que cruzam a face p_s de área $dS = dq_1 \dots dp_{s-1} dp_{s+1} \dots dp_n$ têm uma componente p_s normal àquela face. O número destes pontos é igual a $(dN)_{p_s}$.

$$(dN)_{p_s} = (f d\Omega)_{p_s} = (f dp_s dS)_{p_s} \quad (\text{A.2})$$

onde f é a função densidade de pontos representativos do sistema em qualquer elemento de volume do espaço de fase. O acréscimo por unidade de tempo no número total de pontos dN , do elemento de volume, devido ao movimento através dessa face é

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{p_s} = (f \dot{p}_s dS)_{p_s} \quad (\text{A.3})$$

Hã uma perda equivalente na face oposta

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{p_s+dp_s} = (f \dot{p}_s dS)_{p_s+dp_s} . \quad (\text{A.4})$$

Consequentemente, o movimento através destas duas faces diminui o número de pontos no volume $d\Omega$ de

$$\dot{p}_s [f(p_s+dp_s) - f p_s] dS = \dot{p}_s \frac{\partial f}{\partial p_s} dp_s dS = \dot{p}_s \frac{\partial f}{\partial p_s} d\Omega , \quad (\text{A.5})$$

onde desprezaram-se termos de ordem superior.

Somando-se sobre todas as $2n$ pares de faces, o decrêscimo líquido em $f d\Omega$ devido a todo o movimento será

$$\sum_{s=1}^n \left(\dot{p}_s \frac{\partial f}{\partial p_s} + \dot{q}_s \frac{\partial f}{\partial q_s} \right) d\Omega . \quad (\text{A.6})$$

Esta perda é o mesmo que $-\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) d\Omega$, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left(\dot{p}_s \frac{\partial f}{\partial p_s} + \dot{q}_s \frac{\partial f}{\partial q_s} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

que com as equações (A.1), torna-se

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

A equação (A.8) é a expressão do teorema de Liouville. Este afirma que o incremento total em f , devido ao movimento do sistema no espa

ço de fase, no intervalo dt , é igual a zero; o que é equivalente à afirmação de que a função densidade de fase permanece constante enquanto o sistema se movimento de acordo com as equações canônicas (A.1).

A relação com a dinâmica estelar pode agora ser feita. Sob as condições já afirmadas de que os encontros estelares (interações gravitacionais) podem ser desprezados, cada estrela será idealizada como um sistema dinâmico conservativo independente, cujo movimento é governado pelo Hamiltoniano (2.2.2)

$$H = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \phi(x, y, z, t). \quad (\text{A.9})$$

Pode-se aplicar diretamente o teorema de Liouville a este caso já que, no modelo considerado pela dinâmica estelar clássica, as estrelas representam pontos no espaço de fase hexadimensional (x, y, z, u, v, w) .

Teremos, portanto

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

No caso mais geral haverá uma perda em $f d\Omega$ devido à ação das chamadas forças irregulares, isto é, em virtude da ocorrência de encontros estelares. A equação (A.10) transforma-se então em

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i. \quad (\text{A.11})$$

O termo $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i$ é a taxa de decréscimo de pontos no elemento de volume do espaço de fase referente às forças irregulares. Para se determinar a sua forma explícita deve-se conhecer o processo real de interação das estrelas nos encontros. É um termo em geral muito complexo.

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES HIDRODINÂMICAS

As equações hidrodinâmicas do movimento de um centróide po dem ser obtidas integrando-se a equação de Boltzmann sobre todo o espaço de velocidades. Como é do interesse específico deste trabalho serão adotadas coordenadas cilíndricas.

Em qualquer sistema estelar real, as velocidades estelares estão limitadas pela velocidade de escape. A medida que $V \rightarrow \infty$, portanto, a função densidade de fase tende rapidamente a zero:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} f = 0, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} Vf = 0. \quad (\text{B.1})$$

Junto das condições (B.1), acrescenta-se a definição operacional da função densidade de fase f :

$$dN = f(R, \theta, z, V_R, V_\theta, V_z) dQ dP, \quad (\text{B.2})$$

onde dN é o número de estrelas contido no elemento de volume macroscópico do espaço de fase $dQ dP = dR d\theta dz dV_R dV_\theta dV_z$.

Como consequência, encontra-se a densidade de estrelas, ρ , e a componente genérica, V_o , da velocidade do centróide:

$$\rho = \iiint f dP \quad \text{e} \quad V_o = \bar{V} = \frac{1}{\rho} \iiint Vf dP. \quad (\text{B.3})$$

As componentes V_{Ro} , $V_{\theta o}$ e V_{zo} da velocidade do centróide são velocidades mé

dias das estrelas no elemento de volume macroscópico considerado.

A primeira equação é obtida com a equação (2.2.10) multiplicada pelo elemento de volume no espaço de velocidades e integrada em V_R , V_θ e V_z .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint f dP + \frac{\partial}{\partial R} \iiint V_R f dP + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint V_\theta f dP + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \iiint V_z f dP - \frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint \frac{\partial f}{\partial V_R} dP + \frac{1}{R} \iiint V_\theta^2 \frac{\partial f}{\partial V_R} dP - \\ & - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP - \frac{1}{R} \iiint V_R V_\theta \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP - \frac{\partial \phi}{\partial z} \iiint \frac{\partial f}{\partial V_z} dP = 0. \end{aligned}$$

Calculando-se termo por termo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint f dP = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \iiint V_R f dP = \frac{\partial}{\partial R} (\rho V_{R0}),$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint V_\theta f dP = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta 0}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \iiint V_z f dP = \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{z0}),$$

$$- \frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R dV_\theta dV_z = - \frac{\partial \phi}{\partial R} \iint dV_\theta dV_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R = - \frac{\partial \phi}{\partial R} \iint dV_\theta dV_z f \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

$$+ \frac{1}{R} \iiint V_{\theta}^2 \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R dV_{\theta} dV_z = \frac{1}{R} \iiint V_{\theta}^2 dV_{\theta} dV_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R = \frac{1}{R} \iiint V_{\theta}^2 dV_{\theta} dV_z f \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

$$- \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint \frac{\partial f}{\partial V_{\theta}} dV_R dV_{\theta} dV_z = - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint dV_R dV_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial V_{\theta}} dV_{\theta} =$$

$$= - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint dV_R dV_z f \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

$$- \frac{1}{R} \iiint V_R V_{\theta} \frac{\partial f}{\partial V_{\theta}} dV_R dV_{\theta} dV_z = - \frac{1}{R} \iiint V_R [\int V_{\theta} \frac{\partial f}{\partial V_{\theta}} dV_{\theta}] dV_R dV_z =$$

$$= - \frac{1}{R} \iiint V_R [V_{\theta} f \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f dV_{\theta}] dV_R dV_z = \frac{1}{R} \iiint V_R f dV_{\theta} dV_R dV_z = \frac{\rho V_{R0}}{R} .$$

Os termos calculados formam a equação macroscópica da continuidade, que é uma equação de transferência (de densidade):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} (\rho V_{R0}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta 0}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{z0}) + \frac{1}{R} V_{R0} = 0,$$

(B.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_0) = 0 .$$

As equações hidrodinâmicas são deduzidas multiplicando-se (2.2.10) sucessivamente por $V_R dP$, $V_{\theta} dP$ e $V_z dP$ e novamente integrando-se em todo o espaço de velocidades. Para a componente radial, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint V_R f dP + \frac{\partial}{\partial R} \iiint V_R^2 f dP + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint V_R V_{\theta} f dP +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \iiint V_R V_z f dP + \frac{1}{R} \iiint V_R V_{\theta}^2 \frac{\partial f}{\partial V_R} dP - \frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_R} dP -$$

$$-\frac{1}{R} \iiint V_R^2 V_\theta \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP - \frac{\partial \phi}{\partial z} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_z} dP = 0.$$

Termo por termo, obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint V_R f dP = \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{R0}),$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \iiint V_R^2 f dP = \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R^2}),$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \iiint V_R V_\theta f dP = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{V_R V_\theta}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \iiint V_R V_z f dP = \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V_R V_z}),$$

$$\frac{1}{R} \iiint V_R V_\theta^2 \frac{\partial f}{\partial V_R} dP = \frac{1}{R} \iiint V_\theta^2 [V_R \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R] dV_\theta dV_z =$$

$$= \frac{1}{R} \iiint V_\theta^2 [V_R f]_{-\infty}^{\infty} - \int f dV_R] dV_\theta dV_z = -\frac{1}{R} \iiint V_\theta^2 f dP =$$

$$= -\frac{1}{R} (\rho \overline{V_\theta^2}),$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_R} dP = -\frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint [V_R \frac{\partial f}{\partial V_R} dV_R] dV_\theta dV_z =$$

$$= -\frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint [V_R f]_{-\infty}^{\infty} - \int f dV_R] dV_\theta dV_z = \frac{\partial \phi}{\partial R} \iiint f dV_R dV_\theta dV_z =$$

$$= \rho \frac{\partial \phi}{\partial R},$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{R} \iiint V_R^2 V_\theta \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP &= -\frac{1}{R} \iint V_R^2 \left[\int V_\theta \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dV_\theta \right] dV_R dV_z = \\
 &= -\frac{1}{R} \iint V_R^2 \left[V_\theta f \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f dV_\theta \right] dV_R dV_z = \frac{1}{R} \iiint V_R^2 dP = \frac{\overline{\rho V_R^2}}{R},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dP &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iint V_R \left[\int \frac{\partial f}{\partial V_\theta} dV_\theta \right] dV_R dV_z = \\
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \iint V_R \left[f \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] dV_R dV_z = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \phi}{\partial z} \iiint V_R \frac{\partial f}{\partial V_z} dP &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \iint V_R \left[\int \frac{\partial f}{\partial V_z} dV_z \right] dV_R dV_\theta = \\
 &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \iint V_R \left[f \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] dV_R dV_\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos, encontra-se a equação de transferência (de momentum) para a componente R:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{R_0}) + \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R^2}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{V_R V_\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V_R V_z}) - \frac{\overline{\rho V_\theta^2}}{R} + \frac{\overline{\rho V_R^2}}{R} &= \\
 &= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial R}.
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Um procedimento inteiramente análogo conduz às outras duas equações:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{\theta_0}) + \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R V_\theta}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{V_\theta^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V_\theta V_z}) + \frac{2\rho \overline{V_R V_\theta}}{R} =$$

$$= - \frac{\rho}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} , \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{z0}) + \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R V_z}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{V_\theta V_z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{V_z^2}) + \frac{\rho \overline{V_R V_z}}{R} = \\ & = - \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Deve-se colocar tais equações em termos das componentes da velocidade do centróide e das velocidades residuais das estrelas. Como foi visto no Capítulo 2, a velocidade do centróide é a mesma para todas as estelas num dado elemento de volume e é uma função vetorial unívoca das coordenadas. Ela representa o movimento regular ou ordenado do sistema estelar. Por outro lado, a velocidade residual é diferente para cada estrela e é aleatória. Sendo \vec{V}' a velocidade residual, tem-se portanto que

$$\sum \vec{V}' = 0,$$

num dado elemento de volume. As componentes V_R , V_θ e V_z podem ser escritas em termos das componentes V_{R0} , $V_{\theta 0}$ e V_{z0} da velocidade do centróide e das componentes V'_R , V'_θ e V'_z da velocidade residual de cada estrela como

$$\begin{aligned} V_R &= V_{R0} + V'_R , \\ V_\theta &= V_{\theta 0} + V'_\theta , \\ V_z &= V_{z0} + V'_z . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

E pelo fato de que $\overline{V'_R} = \overline{V'_\theta} = \overline{V'_z} = 0$, tem-se

$$\overline{V_R^2} = V_{Ro}^2 + \overline{V_R'^2},$$

$$\overline{V_R V_\theta} = V_{Ro} V_{\theta o} + \overline{V_R' V_\theta'},$$

etc.

Sendo assim, e levando-se em conta a equação de continuidade (B.4), as equações (B.5), (B.6) e (B.7) adquirem a forma que se deseja. Utilizando-se a equação (B.5) como exemplo obtêm-se, termo a termo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_{Ro}) = V_{Ro} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_{Ro}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R^2}) = \frac{\partial}{\partial R} (\rho V_{Ro}^2 + \overline{\rho V_R'^2}) = \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{V_R'^2}) + V_{Ro} \frac{\partial}{\partial R} (\rho V_{Ro}) + \rho V_{Ro} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial R},$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{\rho V_R V_\theta}) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{Ro} V_{\theta o} + \overline{\rho V_R' V_\theta'}) = \frac{V_{Ro}}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta o}) + \frac{\rho V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{\rho V_R' V_\theta'}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_R V_z}) = \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{Ro} V_{zo} + \overline{\rho V_R' V_z'}) = V_{Ro} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{zo}) + \rho V_{zo} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_R' V_z'}),$$

$$- \frac{\overline{\rho V_\theta^2}}{R} = - \frac{\rho}{R} (V_{\theta o}^2 + \overline{V_\theta'^2}) = - \frac{\rho V_{\theta o}^2}{R} - \frac{\overline{\rho V_\theta'^2}}{R},$$

$$\frac{\overline{\rho V_R^2}}{R} = \frac{\rho}{R} (V_{Ro}^2 + \overline{V_R'^2}) = \frac{\rho V_{Ro}^2}{R} + \frac{\overline{\rho V_R'^2}}{R}.$$

Agrupando-se convenientemente os termos:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial V_{Ro}}{\partial t} + \rho V_{Ro} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial R} + \frac{\rho V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial \theta} + \rho V_{zo} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial z} - \frac{\rho V_{\theta o}^2}{R} + \\ & + \frac{\partial}{\partial R} (\overline{\rho V_R'^2}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{\rho V_R' V_\theta'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho V_R' V_z'}) - \frac{\overline{\rho V_\theta'^2}}{R} + \frac{\overline{\rho V_R'^2}}{R} + \\ & + V_{Ro} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_{Ro})}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta o}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_{zo}) + \frac{\rho V_{Ro}}{R} \right] = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial R} . \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes se anula em virtude da equação de continuidade. É usual (Ogorodnikov, 1965; Mihalas, 1968) a convenção:

$$p_{RR} = \overline{\rho V_R'^2} , \quad p_{R\theta} = p_{\theta R} = \overline{\rho V_R' V_\theta'} , \quad p_{Rz} = p_{zR} = \overline{\rho V_R' V_z'} ,$$

(B.9)

$$p_{\theta\theta} = \overline{\rho V_\theta'^2} , \quad p_{\theta z} = p_{z\theta} = \overline{\rho V_\theta' V_z'} , \quad p_{zz} = \overline{\rho V_z'^2} .$$

Tem-se finalmente a equação hidrodinâmica para a componente V_{Ro} , em termos adequados:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_{Ro}}{\partial t} + V_{Ro} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial R} + \frac{V_{\theta o}}{R} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial \theta} + V_{zo} \frac{\partial V_{Ro}}{\partial z} - \frac{V_{\theta o}^2}{R} + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{Rz}}{\partial z} - \frac{p_{\theta\theta}}{R} + \frac{p_{RR}}{R} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial R} . \end{aligned}$$

(B.10)

Para as outras componentes, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_{\theta 0}}{\partial t} + V_{R0} \frac{\partial V_{\theta 0}}{\partial R} + \frac{V_{\theta 0}}{R} \frac{\partial V_{\theta 0}}{\partial \theta} + V_{z0} \frac{\partial V_{\theta 0}}{\partial z} + \frac{V_{R0} V_{\theta 0}}{R} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{\theta R}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{\theta \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial p_{\theta R}}{R} \right) = - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} , \quad (B.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_{z0}}{\partial t} + V_{R0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial R} + \frac{V_{\theta 0}}{R} \frac{\partial V_{z0}}{\partial \theta} + V_{z0} \frac{\partial V_{z0}}{\partial z} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{zR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial p_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{p_{zR}}{R} \right) = - \frac{\partial \phi}{\partial z} . \quad (B.12)
\end{aligned}$$

As equações deste tipo foram, segundo Oort (1965), obtidas pela primeira vez por Jeans (1922).

A EQUAÇÃO DE POISSON

A equação de Poisson é uma equação diferencial parcial de segunda ordem para o potencial gravitacional, em termos da distribuição de densidade. Representa uma relação fundamental entre a distribuição de densidade e a força gravitacional.

É obtida a partir da lei da gravitação universal.

Considere-se uma esfera infinitesimal de raio s e densidade ρ . A massa total da esfera é

$$m = \int_V \rho dV. \quad (C.1)$$

Na superfície da esfera, a força gravitacional por unidade de massa é

$$\vec{K} = - \frac{G m}{s^2} \hat{s}. \quad (C.2)$$

Pelo teorema da divergência pode-se escrever

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{K} dV = \int_A - \frac{Gm}{s^2} \hat{s} \cdot d\vec{A}. \quad (C.3)$$

E $d\vec{A}$ vale:

$$d\vec{A} = s^2 d\omega \hat{s}, \quad (C.4)$$

onde $d\omega$ é o ângulo sólido subtendido pelo elemento de superfície $d\vec{A}$. Então

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{K} dV = - Gm \int_{4\pi} \hat{s} \cdot \hat{s} d\omega = -4\pi Gm = -4\pi G \int_V \rho dV$$

e, portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = -4\pi G\rho. \quad (C.5)$$

Esta equação em termos do potencial ϕ é a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (C.6)$$

em que,

$$\vec{K} = - \vec{\nabla} \phi. \quad (C.7)$$

A equação de Poisson se refere explicitamente a um instante t . Se a distribuição de densidade é conhecida em determinado instante, o potencial pode ser calculado a partir dela. Com o potencial e as equações do movimento pode-se calcular a posição das partículas no instante seguinte e conseqüentemente a distribuição de densidade. Desta maneira, pelo menos em princípio, pode-se seguir a evolução do sistema com o tempo. Na prática, as dificuldades são enormes sendo necessário a utilização de aproximações.

O estado estacionário, em que a distribuição de densidade no instante t é exatamente a mesma no instante $t + \Delta t$, simplifica bastante o problema.

APENDICE D

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO PARA $\rho_E(z)$

A equação diferencial que se deseja resolver é a equação (6.2.2):

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\sigma_z^2}{\rho_E(z)} \frac{d\rho_E(z)}{dz} \right] = -4\pi G \rho_E(z) . \quad (D.1)$$

A solução torna-se mais fácil com a introdução da variável auxiliar (Spitzer, 1942 e Ledoux, 1951 apud Rohlfs, 1977):

$$m = \int_0^z \rho_E(t) dt. \quad (D.2)$$

Tem-se

$$\frac{dm}{dz} = \rho_E ; \quad \frac{1}{\rho_E} \frac{d\rho_E}{dz} = \frac{d\rho_E}{dm} \quad e$$

$$\frac{d}{dz} = \rho_E \frac{d}{dm} . \quad (D.3)$$

Com (D.3) a equação (D.1) é

$$\rho_E \frac{d}{dm} \left(\sigma_z^2 \frac{d\rho_E}{dm} \right) = -4\pi G \rho_E \quad \text{ou}$$

$$\frac{d^2\rho_E}{dm^2} = - \frac{4\pi G}{\sigma_z^2} \quad (D.4)$$

A integração de (D.4) é simples pois

$$m(z = 0) = 0 ,$$

Conforme (D.2) e

$$\left(\frac{d\rho_E}{dm} \right) (z=0) = 0 ,$$

já que o plano galáctico $z = 0$ é um plano de simetria. Encontra-se

$$\rho_E = \frac{2\pi G}{\sigma_z^2} M^2 \left[1 - \left(\frac{m}{M} \right)^2 \right] = \rho_{OE} (1 - x^2), \quad (D.5)$$

em que $x = \frac{m}{M}$ e $\rho_{OE} = \frac{2\pi GM^2}{\sigma_z^2}$. A constante de integração M pode ser interpretada, de acordo com (D.2) e com a solução (D.5), como a massa total na coluna z .

Utilizando-se (D.3) em (D.5):

$$dz = \frac{1}{\rho_E} dm = \frac{dm}{\rho_{OE}(1-x^2)} = \frac{M}{\rho_{OE}} \frac{dx}{(1-x^2)},$$

$$z = \frac{M}{\rho_{OE}} \operatorname{arctg} h x,$$

$$m = M \operatorname{tgh} \frac{\rho_{OE} z}{M}$$

e finalmente

$$\rho_E(z) = \rho_{0E} \operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_e}, \quad (D.6)$$

$$\text{onde } z_e = \frac{M}{\rho_{0E}}.$$

A observação de

$$\operatorname{sech} \frac{z}{z_e} = \frac{2}{e^{\frac{z}{z_e}} + e^{-\frac{z}{z_e}}}$$

permite, em primeira aproximação, considerar-se

$$\operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_e} = 4 e^{-\frac{2z}{z_e}}, \quad \text{para } z \text{ grande e} \quad (D.7)$$

$$\operatorname{sech}^2 \frac{z}{z_e} = e^{-\frac{z^2}{z_e^2}}, \quad \text{para } z \text{ pequeno.} \quad (D.8)$$

A função gaussiana (D.8) está coerente com os resultados da seção 4.3.