

TESE DE DOUTORADO Nº 125

**NOVAS FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY E SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA  
ANÁLISE DE ESTABILIDADE E CONTROLE DE SISTEMAS VIA MODELAGEM  
TAKAGI-SUGENO: APROXIMANDO OS CONTROLES FUZZY E NÃO-LINEAR**

**Leonardo Amaral Mozelli**

DATA DA DEFESA: 15/04/2011

**Universidade Federal de Minas Gerais**

**Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

**NOVAS FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY E SOLUÇÕES  
NUMÉRICAS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE E CONTROLE  
DE SISTEMAS VIA MODELAGEM TAKAGI-SUGENO:  
APROXIMANDO OS CONTROLES FUZZY E NÃO-LINEAR**

**Leonardo Amaral Mozelli**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Reinaldo Martinez Palhares

Belo Horizonte - MG

Abril de 2011

M939n

Mozelli, Leonardo Amaral.

Novas funções de Lyapunov Fuzzi e soluções numéricas para análise de estabilidade e controle de sistemas via modelagem Takagi-Sugeno [manuscrito]: aproximando os controles fuzzi e não-linear / Leonardo Amaral Mozelli. - 2011.  
xv, 122 f., enc.: il.

Orientador: Reinaldo Martinez Palhares.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 111-122.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Sistemas não lineares - Teses. 3. Liapunov, Funções de - Teses. 4. Sistemas difusos - Teses. I. Palhares, Reinaldo Martinez. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

**"Novas Funções de Lyapunov Fuzzy e Soluções Numéricas  
para Análise de Estabilidade e Controle de Sistemas via  
Modelagem Takagi-Sugeno: Aproximando os Controles Fuzzy e  
Não-linear"**

**Leonardo Amaral Mozelli**

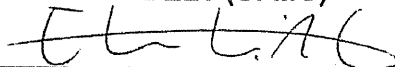
Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 15 de abril de 2011.

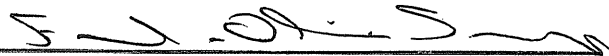
Por:



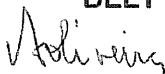
Prof. Reinaldo Martinez Palhares  
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Edvaldo Assunção  
DEE (UNESP - Ilha Solteira)



Prof. Dr. Fernando de Oliveira Souza  
DELT (UFMG)



Profa. Dra. Vilma Alves de Oliveira  
DEE (USP - São Carlos)



Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas  
DELT (UFMG)

*Ao melhor exemplo, Fátima; ao grande amigo, Paulo;  
àquela que sou fã incondicional, Débora; a quem faz tudo  
ser mais especial (inclusive este trabalho), Lê.*

## AGRADECIMENTOS

Mais do que uma formalidade exigida pela tradição, dedico esse espaço para prestar meu sincero reconhecimento a todas aquelas pessoas que contribuíram na feitura deste trabalho. Muitos deles sequer imaginam seu papel nessa co-autoria; seja por minha negligência, ou procrastinação, em agradecê-los; seja por serem tão humildes, na ilusão de que não fizeram tamanha diferença.

Minha carreira acadêmica contou com a orientação do Prof. Reinaldo Martinez Palhares. Gostaria de agradecê-lo pelo tempo investido, pela paciência e por compartilhar sua vasta experiência comigo (inclusive pelos conhecimentos que tentou transmitir mas temi em não aprender).

Agradeço também aos colegas que compartilharam esse orientador comigo: Cláudio, Fernando, Gustavo, Marcos Flávio e Rafael. Seja nas discussões, nas simulações, nos artigos e nos butecos, sempre deram suporte irrestrito.

Minha mais elevada estima ao corpo de funcionários do PPGEE, com destaque para as secretárias Anete Vieira e Arlete de Freitas, sempre desatando os entraves burocráticos.

Presto minha homenagem também ao corpo docente do PPGEE, em especial aos professores Eduardo Mazoni, Guilherme Pereira, Leonardo Tôres, Renato Mesquita e Rodney Saldanha por jamais fecharem as portas de suas salas quando fui importuná-los.

Um agradecimento especial aos membros das bancas examinadoras pelas contribuições, críticas e incentivo no processo de doutoramento e na elaboração do texto final: Profa. Vilma Alves de Oliveira, Prof. Edvaldo Assunção, Prof. Fernando de Oliveira Souza e Prof. Walmir Matos Caminhas.

Sou grato também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (e ao contribuinte brasileiro) pelo suporte financeiro: “Número do processo: 143314/2008-4”. Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais por viabilizar minha participação em congressos, permitindo apresentar e debater este trabalho.

Mãe e pai: obrigado pelo amor, zelo, carinho, preocupação, xingos e brigas. Serei eternamente grato aos esforços e aos sacrifícios que fizeram para me proporcionar uma educação de qualidade. Obrigado por sempre me guiarem por caminhos corretos, mesmo quando não foi possível trilhá-los comigo. *Sem vocês nada disso seria possível.*

A minha irmã favorita, Débora, pois somos mutuamente fãs. Embora não passasse de um anti-herói, sempre cismou em me convencer que, ao menos para ela, fosse o contrário. *Sem você tudo isso seria menos importante.*

A Letícia, sou grato pelo incentivo, confiança, carinho e amor. Mas, principalmente, por compreender a importância deste projeto para mim, mesmo sem entender muito quando eu falava sobre ele. Por compreender as ausências. *Sem você nada disso faria sentido.*

Aos meus amigos e familiares não há brindes suficientes. Muito obrigado pelo suporte, pelos momentos de conforto, descontração e, principalmente, pela paciência. Por invariavelmente me resgatarem do doutorado para a vida real.

Agradeço à minha família fora de casa: os amigos do GOPAC. Aqueles que mesmo sem querer querendo, me mostraram que fazer ciência é mais do que buscar metas, resultados e excelência; me mostraram que também é gostar daquilo que se faz, não se abater nos fins de semana perdidos e inclusive se divertir com a própria adversidade (e a alheia, por que não?). Às várias gerações com as quais tive o prazer de conviver: Adriano, Douglas, Leo, Lucpim, Parreira, Ricardo, Siri e Zezim; Bill, Chulispa, Dalmy Jr., Diogão, Marcelo, Miguelino e Mario Louco. Valeu moçada!

*I put my heart and my soul into my work, and have lost my mind in the  
process.*

—VINCENT VAN GOGH

*Who would have guessed reading and writing would pay off?*  
—HOMER J. SIMPSON (The Simpsons, Mr. Lisa Goes to Washington)



## RESUMO

Este trabalho estuda o conservadorismo na análise de estabilidade e no projeto de controladores fuzzy para sistemas dinâmicos do tipo Takagi-Sugeno. O enfoque foi direcionado para a formulação de novas funções de Lyapunov parametrizadas e também priorizando a busca e a proposição de soluções para descrever numericamente condições de análise e síntese no contexto de desigualdades matriciais lineares.

Tais modelos são de grande interesse pois uma grande classe de sistemas dinâmicos não-lineares pode ser modelada, aproximadamente ou com exatidão, sobre domínios compactos, por meio da combinação de modelos lineares, localmente válidos interpolados por meio de funções de pertinência. Dessa forma, sistemas não-lineares podem ser tratados com formalismo por meio do chamado controle por ganho escalonado, combinando diversas ferramentas numéricas disponíveis para sistemas lineares, permitindo soluções numéricas escaláveis e sistemáticas para o problema de controle. Isso representa uma grande vantagem em relação ao formalismo do controle não-linear direto, realizado por meio de técnicas como a linearização por realimentação ou *backstepping*, no qual as soluções são específicas para cada problema. O preço pago pela menor complexidade no projeto do controlador fuzzy é um maior conservadorismo, resultando em um desempenho inferior ou culminando em projetos não factíveis.

Progressivamente, sistemas Takagi-Sugeno deixaram de ser vistos apenas como sistemas multi-modelos com forte característica politópica, sendo relevante, atualmente, a caracterização de seu comportamento não-linear. Esta tese contribui ao propor novas funções de Lyapunov, parametrizadas pelas funções de pertinência, visando caracterizar melhor o comportamento variante dos sistemas TS. Outra contribuição é a proposta e a investigação de soluções numéricas que estabeleçam um compromisso entre redução do conservadorismo e eficiência computacional no que tange a tradução das condições de análise e de síntese teóricas para o contexto das ferramentas numéricas que tratam Desigualdades Matriciais Lineares. Em suma, esta tese busca aproximar os contextos não-linear e fuzzy, ao propor metodologias que sejam menos conservadoras.

**Palavras-chave:** Desigualdades matriciais lineares; sistemas fuzzy Takagi-Sugeno; controle fuzzy; sistemas não-lineares; estabilidade no sentido de Lyapunov

## ABSTRACT

This addresses conservativeness in stability analysis and fuzzy control design of dynamic systems in Takagi-Sugeno form. The emphasis is on new parameterized Lyapunov functions and in the search and development of solutions to recast the analysis and synthesis conditions into the framework of Linear Matrix Inequalities.

Such systems are of great interest because a large family of nonlinear dynamics can be modelled, approximately or exactly, in compact domains, by means of a combination of linear models locally valid interpolated with membership functions. In this way nonlinear systems can be treated with the formalism of gain-scheduling control, combining several numerical tools dedicated for linear systems, allowing numerical solutions for the control problem that are scalable and systematic. This is a great advantage in comparison with the formalism present in direct nonlinear control, by means of techniques such as feedback linearization and backstepping, in which the solutions are customized for each control problem. The price paid for the less complex design procedure is more conservativeness, resulting in worst performances or even unfeasibility.

Progressively, Takagi-Sugeno systems have been seen less and less as simply multi-model systems with strong polytopic characteristic being relevant nowadays take into account they time-varying and nonlinear features. This work intends to contribute in this sense by proposing new Lyapunov functions that are able to better characterize these relevant properties of fuzzy systems. Another contribution is propose and investigate numerical solutions that reduce conservativeness as the the computational demand is kept low when the task is to recast the analysis and synthesis conditions into the framework of Linear Matrix Inequalities. In short, this thesis tries to bring together the nonlinear and fuzzy fields by means of less conservative methodologies.

**Keywords:** Linear Matrix Inequalities; Takagi-Sugeno fuzzy systems; fuzzy control; nonlinear systems; stability in Lyapunov sense

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1—Introdução</b>	1
1.1 Controle Fuzzy Baseado em Modelos TS . . . . .	3
1.2 Conceitos Preliminares . . . . .	4
1.3 Fontes de Conservadorismo e Desafios . . . . .	6
1.4 Objetivos e Organização do Texto . . . . .	8
<b>Capítulo 2—Análise de Estabilidade</b>	10
2.1 Análise de Estabilidade com Funções Quadráticas . . . . .	10
2.2 Análise de Estabilidade com Funções Fuzzy . . . . .	15
2.3 Aprimorando a Análise de Estabilidade com Funções Fuzzy . . . . .	20
2.3.1 Análise de Complexidade e Comparações Numéricas . . . . .	24
2.4 Sobre a Derivada Temporal das Funções de Pertinência . . . . .	31
2.5 Soluções Numéricas . . . . .	41
2.5.1 Termo Nulo . . . . .	43
2.5.2 Equivalência com Finsler . . . . .	45
2.5.3 Sistemas Descritores: formulação particular . . . . .	47
2.5.4 Comparações Numéricas . . . . .	49
2.6 Novas Funções de Lyapunov para Sistemas TS . . . . .	51
2.6.1 Função de Lyapunov Parametrizada pelas Funções de Pertinência e por Vetor de Estados Aumentado . . . . .	52
2.6.1.1 Comparações Numéricas . . . . .	54
2.6.2 Função de Lyapunov Parametrizada pelas Funções de Pertinência e suas Primeiras Derivadas Temporais . . . . .	55
2.6.2.1 Comparações Numéricas . . . . .	63
2.6.2.2 Outra comparação numérica . . . . .	68
<b>Capítulo 3—Projeto de Controlador</b>	73
3.1 Controle Baseado na Estabilidade Quadrática . . . . .	73
3.2 Controle Baseado em Funções de Lyapunov Fuzzy: Desafios . . . . .	75
3.2.1 Funções no Formato Integral: Outros Desafios . . . . .	76
3.3 Soluções Numéricas para Síntese de Controle . . . . .	78
3.3.1 Controle PDC . . . . .	79
3.3.2 Comparações Numéricas . . . . .	85
3.3.3 Exemplos de Simulação . . . . .	91
3.3.3.1 Sistema Mecânico Simples . . . . .	91

3.3.3.2	Veículo Aéreo Não-Tripulado: Helimodelo em Escala Reduzida . . . . .	94
3.3.3.3	Outro Sistema Mecânico . . . . .	100
<b>Capítulo 4—Conclusão</b>		<b>107</b>
4.1	Produção Científica . . . . .	108
4.2	Propostas de Continuidade . . . . .	110

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Análise de estabilidade: comparação entre Lema 2.1 e Lema 2.3 . . . . .	17
2.2	Análise de estabilidade: comparação entre Lema 2.3 e Lema 2.4 . . . . .	18
2.3	Análise de estabilidade: comparação entre Lema 2.1 e Lema 2.4 . . . . .	18
2.4	Análise de estabilidade: Lema 2.4 e Teorema 2.1 com $l = 1$ . . . . .	21
2.5	Análise de estabilidade: Lema 2.4 e Teorema 2.1 com $l = 2$ . . . . .	21
2.6	Análise de estabilidade: Lema 2.4 e Teorema 2.1 com $l = 3$ . . . . .	21
2.7	Relação de conservadorismo nos resultados apresentados. . . . .	24
2.8	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 e estabilidade quadrática . . . . .	26
2.9	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 e Lema 2.3 . . . . .	26
2.10	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 e Lema 2.4 . . . . .	27
2.11	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 e Lema 2.1 ( $l = 3$ ) . . . . .	27
2.12	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 com $\phi_i = 0,85$ e Teorema 3 em [RW06]	28
2.13	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 com $\phi_i = 0,85$ e Teorema 3 em [RW06]	29
2.14	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 com $\phi_i = 12,3$ e estabilidade quadrática	29
2.15	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 com $\phi_i = 12,3$ e Teorema 3 em [RW06]	30
2.16	Análise de estabilidade: varredura nos parâmetros $\phi_i$ . . . . .	31
2.17	Valores das derivadas das funções de pertinência. . . . .	33
2.18	Análise de estabilidade: Lema 2.5 . . . . .	34
2.19	Valores admissíveis das derivadas das funções de pertinência. . . . .	34
2.20	Valores admissíveis das derivadas das funções de pertinência. . . . .	35
2.21	Retrato de fases do sistema do Exemplo 2.3 . . . . .	40
2.22	Evolução temporal das funções quadráticas isoladas. . . . .	41
2.23	Evolução temporal das funções quadráticas combinadas. . . . .	41
2.24	Curvas de nível para a função quadrática isolada. . . . .	42
2.25	Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. . . . .	42
2.26	Análise de estabilidade: Teorema 2.2 e Teorema 2.3 . . . . .	43
2.27	Análise de estabilidade: comparação entre Teorema 2.2 e Teorema 2.4 . . .	50
2.28	Análise de estabilidade: comparação entre Teorema 2.3 e Teorema 2.5 . . .	50
2.29	Análise de estabilidade: comparação de várias funções para sistemas TS . .	56
2.30	Análise de estabilidade: Teorema 2.7 . . . . .	64
2.31	Análise de estabilidade: Teorema 2.8 . . . . .	65
2.32	Análise de estabilidade: Teorema 2.9 . . . . .	66
2.33	Análise de estabilidade: Teorema 2.10 . . . . .	66
2.34	Análise de estabilidade: condições dependentes da segunda derivada . . .	67
2.35	Evolução temporal das funções quadráticas isoladas. . . . .	69
2.36	Evolução temporal das funções quadráticas isoladas. . . . .	69

2.37	Evolução temporal das funções quadráticas isoladas. . . . .	70
2.38	Evolução temporal das funções quadráticas isoladas. . . . .	70
2.39	Evolução temporal das funções quadráticas combinadas. . . . .	70
2.40	Evolução temporal das funções quadráticas combinadas. . . . .	70
2.41	Interpretação geométrica para estabilidade no sentido de Lyapunov. . . . .	71
2.42	Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. . . . .	72
2.43	Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. . . . .	72
3.1	Controladores factíveis com Teoremas 3.1 e 3.2: $\phi = 1$ e $\alpha = 0,035$ . . . . .	88
3.2	Controladores factíveis com Teoremas 3.1 e 3.2 com $\phi = 10$ e $\alpha = 0,01$ . . . . .	88
3.3	Controladores factíveis com Teoremas 3.3 e 3.4 com $\phi = 1$ e $\alpha = 10$ . . . . .	89
3.4	Controladores factíveis com Teoremas 3.3 e 3.4 com $\phi = 1$ e $\alpha = 50$ . . . . .	89
3.5	Controladores factíveis com Teoremas 3.3 e 3.4 com $\phi = 10$ e $\alpha = 50$ . . . . .	90
3.6	Controladores factíveis com Teorema 3.5: $\alpha = 0,01$ . . . . .	90
3.7	Sistema mecânico não-linear: pêndulo invertido . . . . .	92
3.8	Controle do pêndulo invertido: posição . . . . .	94
3.9	Controle do pêndulo invertido: velocidade angular . . . . .	94
3.10	Controle do pêndulo invertido: corrente . . . . .	95
3.11	Controle do VANT: coordenada $x$ . . . . .	98
3.12	Controle do VANT: coordenada $y$ . . . . .	98
3.13	Controle do VANT: coordenada $z$ . . . . .	98
3.14	Trajectoria descrita pelo helimodelo. . . . .	99
3.15	Diagrama esquemático do TORA . . . . .	100
3.16	Simulação de controle: controlador projetado com o Teorema 3.1 . . . . .	103
3.17	Simulação de controle: controlador projetado com o Teorema 3.2 . . . . .	103
3.18	Simulação de controle: controlador projetado com o Teorema 3.3 . . . . .	104
3.19	Simulação de controle: controlador projetado com o Teorema 3.6 . . . . .	105
3.20	Simulação de controle: controlador projetado com o Teorema 3.6 . . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

2.1	Análise de complexidade das condições LMI . . . . .	25
2.2	Quantidade de vértices $m$ de acordo com a dimensão $r$ . . . . .	37
2.3	Valor máximo para a derivada da função de pertinência no Exemplo 2.3 .	40
2.4	Complexidade computacional das condições LMI . . . . .	51
2.5	Valores máximos do parâmetro $k$ para diferentes limitantes $\phi_i$ . . . . .	56
2.6	Complexidade computacional: dependência com a segunda derivada . . .	67
2.7	Valor máximo para a primeira derivada da função de pertinência no Exem- plo 2.3 . . . . .	69
3.1	Quantidade de testes bem sucedidos para cada metodologia de projeto. .	87
3.2	Parâmetros do pêndulo invertido controlado por motor DC. . . . .	91
3.3	Ganhos projetados para controle do pêndulo invertido . . . . .	93
3.4	Ganhos projetados para controle do helimodelo . . . . .	97
3.5	Referência para o voo do helimodelo . . . . .	97
3.6	Ganhos projetados segundo as metodologias propostas . . . . .	102
3.7	Ganhos projetados para controle do TORA . . . . .	106

## LISTA DE SÍMBOLOS

$:=$	igual por definição
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}^n$	espaço vetorial linear de dimensão $n$
$[\cdot]_+^0$	conjunto formado pelos elementos não negativos do argumento
$[\cdot]_+$	conjunto formado pelos elementos estritamente positivos do argumento
$\mathcal{R}$	conjunto formado por $\{1, 2, \dots, r\} \subset \mathbb{Z}_+$
$\mathcal{S}$	conjunto formado por $\{1, 2, \dots, s\} \subset \mathbb{Z}_+$
$\mathcal{M}$	conjunto formado por $\{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{Z}_+$
$[\cdot]^{-1}$	operação de inversão em matrizes
$[\cdot]^T$	operação de transposição em matrizes e em vetores
$[\cdot]^{-T}$	operação de transposição em matrizes inversas
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produtos interno de vetores
$\lambda(\cdot)$	espectro de uma matriz; conjunto dos autovalores de uma matriz
$\sigma(\cdot)$	conjunto dos valores singulares de uma matriz
$[\cdot] < 0$	indica que o argumento é definido negativo; $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}_-$
$[\cdot] \leq 0$	indica que o argumento é semidefinido negativo; $\lambda(\cdot) \in \mathbb{C}_-^0$
$\ \cdot\ $	norma euclidiana do argumento
$I, I_n$	matriz identidade, matriz identidade de ordem $n \times n$
$t$	variável tempo contínuo; $t \in \mathbb{R}$
$\text{diag}\{\cdot\}$	matriz bloco diagonal, cujos blocos são dados pelo argumento
$\text{co}\{\cdot\}$	envelope ou casca convexa do argumento
$\bullet$	termos transpostos em matrizes simétricas
$\sum_{i < j}^r \alpha_i \alpha_j$	$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \alpha_i \alpha_j$



## LISTA DE SIGLAS E ABREVIACOES

BMI	Desigualdade Matricial Bilinear, <i>Bilinear Matrix Inequality</i>
LMI	Desigualdade Matricial Linear, <i>Linear Matrix Inequality</i>
LPV	Linear com Parâmetros Variantes, <i>Linear Parameter Varying</i>
MIMO	Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas, <i>Multiple Input Multiple Output</i>
PDC	Compensação Paralela Distribuída, <i>Parallel Distributed Compensation</i>
SDP	Programação Semidefinida, <i>SemiDefinite Programming</i>
SISO	Uma Entrada, Uma Saída, <i>Single Input Single Output</i>
SOS	<i>Sum-Of-Squares</i>
TS	Takagi-Sugeno

## INTRODUÇÃO

*All models are wrong, some models are useful.*<sup>1</sup>

—GEORGE E. P. BOX

Notoriamente, o conceito de realimentação exerce um papel central na teoria de controle. O controle por realimentação é capaz de estabilizar sistemas dinâmicos instáveis; reduzir sua sensibilidade tanto frente a distúrbios, quanto frente a variações paramétricas; além de acelerar sua resposta transitória [Oga02]. Todavia, no tecido tramado pela história da tecnologia, desde de tempos remotos [Mic96], o controle por realimentação é um fio muitas vezes despercebido [Ber02]. Embora seja relevante em diversos campos da engenharia, seu impacto geralmente só é percebido pelas inovações tecnológicas que impulsiona. Um breve histórico do impacto causado pelo controle por realimentação no século passado, traduzido por meio de inventos, é muito bem apresentado em [Ber02]. Não obstante sua relevância para engenharia, o controle por realimentação está presente na natureza desde uma escala molecular, nos mecanismos de homeostase que regulam nossa temperatura ou glicemia; passando pelos processos que regulam cadeias alimentares em diversos ecossistemas; chegando a uma escala global, na dinâmica do clima, regulada pelas interações entre atmosfera, oceanos e continentes [AM06].

Apesar dos sistemas em malha-fechada oferecerem diversas vantagens com relação ao funcionamento em malha-aberta, o controle por realimentação pode desestabilizar dinâmicas estáveis. Além disso, ruídos indesejáveis de sensores podem ser introduzidos no sistema caso não sejam adequadamente tratados. Dessa forma, o conceito de estabilidade possui uma papel fundamental no controle por realimentação [Mic96, Ste03]. Geralmente, um projeto de sistema de controle possui três etapas: inicia-se com a seleção, por parte do projetista, de um modelo matemático capaz de descrever adequadamente o sistema de interesse; a partir daí começa o projeto do controlador, propriamente dito, que deverá garantir estabilidade e desempenho mensurados segundo algum critério; finalmente, o compensador projetado é testado, antes de sua implementação, em simulações numéricas ou por meio de ensaios em protótipos, plantas piloto, cabeças de série [Lan99].

Modelos, por natureza, buscam descrever de forma aproximada os sistemas que representam, enfatizando determinadas características em detrimento de outras [Agu07]. Não-linearidade é uma característica quase ubíqua aos fenômenos tratados em engenharia mas, normalmente, é preterida em favor de modelos lineares mais simples, com validade local. A razão para isso pode ser atribuída à segunda etapa do projeto, afinal nota-se um descompasso entre os controles linear e não-linear. Embora um vasto formalismo

---

<sup>1</sup>Todos os modelos estão errados, alguns modelos são úteis

matemático e diversas abordagens existam para sistemas não-lineares [Kha01, SL91], ferramentas numéricas são escassas. Ao contrário, para sistemas lineares há um grande arsenal computacional, capaz de auxiliar a tarefa do projetista de controle até mesmo para sistemas de larga escala [Ben04].

Nesse contexto, os sistemas fuzzy do tipo Takagi-Sugeno (TS) [TS85] representam uma alternativa interessante. Em um modelo TS, a dinâmica não-linear é representada como a combinação fuzzy de modelos lineares, localmente válidos. O modelo resultante representa a dinâmica original, no espaço de estados, como uma combinação convexa de matrizes lineares, invariantes no tempo, ponderadas por funções de pertinência não-lineares, variantes no tempo [TW01].

Do ponto de vista da capacidade de modelagem, foi estabelecido teoricamente que sistemas TS são aproximadores universais [Wan92]. Além disso, existem diversas ferramentas numéricas para determinar modelos TS a partir de dados armazenados, veja por exemplo [JSMS00, YSL10] e referências. Atualmente, uma nova tendência são modelos fuzzy altamente adaptativos, obtidos em tempo de execução, a partir de fluxos de dados [LCG11]. Modelos com exatidão total também podem ser obtidos analiticamente com a técnica da não-linearidade setorial [OTW01, TW01, TTOW01]. Já do ponto de vista de controle, é possível tratar esse problema não-linear de forma rigorosa, com o formalismo do caso não-linear direto. Todavia, a grande vantagem em se considerar uma dinâmica não-linear no formato de um modelo dinâmico TS é a possibilidade de se empregar ferramentas numéricas e técnicas adotadas no contexto de sistemas lineares incertos ou até mesmo variantes no tempo [TW01, Sal09].

Contudo, quando o controle fuzzy foi introduzido a perspectiva era diferente. O controle fuzzy começou na década de 70 [MA75]<sup>2</sup>, sendo um dos primeiros desdobramentos práticos da teoria de conjuntos e lógica fuzzy, que fora proposta na década anterior com o trabalho seminal de Zadeh [Zad65]. Inicialmente, o controle fuzzy surgiu como uma estratégia de controle livre de modelos, buscando mimetizar matematicamente o conhecimento e raciocínio de um operador humano atuando sobre a planta [SGB05].

Embora representasse avanços na época e tenha sido amplamente adotado em diversas aplicações industriais, principalmente no Japão [Mam93], a ausência de mecanismos para avaliar tais controladores com relação à robustez e à estabilidade foram grandes críticas a essa metodologia. O controle fuzzy baseado em codificação de regras enfrentou grande resistência, assim como a teoria de sistemas fuzzy em geral, veja relatos do próprio Zadeh em [Zad08]. Todavia, foi um novo paradigma, que lançou um novo olhar sobre a teoria de controle e abriu novas fronteiras, conquistando seu lugar [Mam93].

Isso é reafirmado pelo fato do controle fuzzy ser uma especialidade da teoria de controle que possui, por sua vez, diversas sub-áreas [Fen06]: controle fuzzy pela codificação de regras; controle neuro-fuzzy; controle fuzzy adaptativo; controle fuzzy por modos deslizantes; e finalmente, o chamado controle fuzzy baseado em modelos TS, assunto estudado neste trabalho, que vem sendo intensamente pesquisado desde a década de 90 [TS92].

---

<sup>2</sup>O leitor pode encontrar uma versão republicada na íntegra em [MA99].

## 1.1 CONTROLE FUZZY BASEADO EM MODELOS TS

No controle fuzzy baseado em modelos TS, a metodologia de projeto segue um padrão similar àquelas dos controles clássico e moderno. Primeiramente, um modelo é obtido mas, ao contrário da abordagem convencional, as não-linearidades são essenciais e não somente condições de contorno. Em seguida, busca-se determinar o controlador estabilizante que atenda às restrições de projeto.

Nos estágios iniciais das pesquisas acerca do controle fuzzy baseados em modelos TS as metodologias de projeto do controlador não eram construtivas [Fen06]. Controladores eram projetados com a finalidade única de estabilizar os sub-modelos locais, usando técnicas típicas de sistemas lineares como alocação de pólos [Oga02]. Em seguida, era verificado se a combinação fuzzy desses sub-sistemas estáveis resultara em um sistema globalmente estável. Isso nem sempre é verdade, sendo necessárias novas rodadas de projeto/verificação em caso de falhas.

Com o advento de ferramentas numéricas eficientes para lidar com problemas de programação semidefinida (SDP), o panorama foi modificado drasticamente, tornando o projeto de controlador bem mais sistemático. O desenvolvimento de metodologias baseadas no conceito de estabilidade no sentido de Lyapunov para sistemas não-lineares, incertos ou multi-modelos teve forte correlação com o aprimoramento de tais ferramentas numéricas. De fato, certos problemas no formato SDP admitiam soluções analíticas, como por exemplo o controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  [DGKF89], através da solução de equações de Riccati. Contudo, o grande impulso pra a solução de casos mais abrangentes veio com o desenvolvimento de algoritmos eficientes e pacotes computacionais amplamente disponíveis [PG07].

Basicamente, uma vez obtido o modelo TS e definindo-se uma função de Lyapunov candidata, as condições de análise e de síntese são descritas por meio de restrições (desigualdades de Lyapunov) que devem ser atendidas para todo o universo de discurso do modelo. Esse problema tem dimensão infinita, mas devido a característica convexa dos modelos TS caso as desigualdades sejam satisfeitas, simultaneamente, em todos os vértices do modelo, para a mesma função candidata, garante-se a solução do problema para quaisquer combinações. Em outras palavras, um conjunto de desigualdades de Lyapunov acopladas dever ser resolvido [VB97].

Portanto, a tarefa de projetar um controlador é traduzida como a resolução de um problema de programação semidefinida, cujas variáveis de decisão são os parâmetros da função de Lyapunov candidata e do compensador que garantem estabilidade. Em um problema de programação semidefinida [VB96], busca-se minimizar uma função linear sujeita a restrições nas quais a combinação afim de matrizes simétricas deve ser semidefinida (definida) positiva. Quando as restrições são desigualdades lineares nas variáveis matriciais tem-se um problema na forma de LMIs [VB00, BEGFB94]. No caso de controladores estabilizantes o problema deverá ser factível. Quando o objetivo vai além de simplesmente garantir estabilidade em malha-fechada, os critério de desempenho são expressos na forma de funções de custo a serem otimizadas. Um breve resumo dos conceitos relacionados a LMIs pode ser visto em [Moz08, Capítulo 3].

## 1.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Uma introdução resumida aos conceitos de conjuntos, lógica e sistemas de inferência fuzzy pode ser vista em [Moz08, Capítulo 2]. Para uma leitura mais aprofundada recomenda-se [JSM97, CP00, Ros04]. O modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) consiste em um sistema de inferência capaz de descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não-lineares por meio de um conjunto de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma convexa. Embora originalmente proposto por [TS85], o modelo TS também é conhecido na literatura como modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Isto se deve aos trabalhos subsequentes [SK88] relacionados a metodologias desenvolvidas para identificação desse tipo de modelo. Pela primazia histórica, adotar-se-á neste trabalho a nomenclatura modelo TS.

Considere um sistema dinâmico não-linear e afim, em tempo contínuo, descrito pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u \\ y(t) &= h(x(t))x(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entradas;  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída medida.

O modelo TS é dado por um conjunto de  $r$  regras Se-Então:

$$R_i : \begin{cases} \text{SE} & q^1(t) \text{ É } \Phi_1^i \text{ E } q^2(t) \text{ É } \Phi_2^i \text{ E } \cdots \text{ E } q^s(t) \text{ É } \Phi_s^i \\ \text{ENTÃO} & \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) &= C_i x(t) \end{aligned} \end{cases}\tag{1.2}$$

tal que  $R_i$ ,  $i \in \mathcal{R}$ , denota a  $i$ -ésima regra fuzzy. Na regra  $R_i$  as variáveis linguísticas são representadas por  $\Phi_j^i$ ,  $j \in \mathcal{S}$ ;  $q^j(t) \in Q_j$ , denotam as variáveis premissas avaliadas no instante  $t$ ;  $Q_j$  representa o intervalo de validade de cada variável premissa, sendo que  $Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$  é o universo de discurso;  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são matrizes constantes, reais e de dimensões apropriadas, representando o modelo local da regra  $R_i$ .

As variáveis premissas podem ser funções dos estados, distúrbios externos, condições de operação e até mesmo a variável tempo. Em geral, as variáveis premissas não são funções do vetor de entradas para evitar um processo complicado para defuzzificação de controladores fuzzy [TW01]. Para simplificar a notação, as variáveis premissas são agrupadas no vetor

$$q(t) := [q^1(t) \quad q^2(t) \quad \cdots \quad q^s(t)].\tag{1.3}$$

No antecedente das regras avalia-se o grau de compatibilidade de  $q^j(t)$  aos respectivos conjuntos fuzzy das variáveis linguísticas  $\Phi_j^i$ , obtendo-se graus de pertinência  $\mu_j^i(q^j(t))$ .

O grau de ativação do antecedente da regra  $R_i$  é dado por

$$w_i[q(t)] := \prod_{j=1}^s \mu_j^i(q^j(t)).\tag{1.4}$$

Portanto, a norma-t adotada para determinar o grau de ativação do antecedente é o produto algébrico dos graus de pertinência. Vale ressaltar que é necessário que ao menos uma regra do modelo esteja ativa, ou seja, pelos menos um grau de ativação é estritamente positivo, garantindo as seguintes propriedades

$$w_i[q(t)] \geq 0, \forall i \in \mathcal{R}, \quad \sum_{i=1}^r w_i[q(t)] > 0. \quad (1.5)$$

O consequente induzido por cada regra  $R_i$  é uma ponderação do modelo local

$$\text{consequente induzido } i : \begin{cases} w_i[q(t)] [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ w_i[q(t)] C_i x(t) \end{cases} \quad (1.6)$$

A etapa de agregação é dada simplesmente pela média ponderada das regras. Assim, o modelo TS final é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i[q(t)] [A_i x(t) + B_i u(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i[q(t)] C_i x(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

sendo que a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i[q(t)] = \frac{w_i[q(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i[q(t)]}, \quad (1.8)$$

que satisfaz a propriedade do simplexo unitário

$$\sum_{i=1}^r h_i[q(t)] = 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{h}_i[q(t)] = 0, \quad h_i[q(t)] \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{R}. \quad (1.9)$$

A propriedade da derivada temporal das funções de pertinência pode ser facilmente verificada como a seguir:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^r h_i[q(t)] \right) = \frac{d}{dt} (1) \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{d}{dt} (h_i[q(t)]) = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i[q(t)] = 0. \quad (1.11)$$

Quando o sistema encontra-se em malha-aberta, também chamado sistema não forçado, tem-se a descrição

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(h)x(t) = \sum_{i=1}^r h_i[q(t)]A_i x(t) \\ y(t) &= C(h)x(t) = \sum_{i=1}^r h_i[q(t)]C_i x(t).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Portanto, o modelo TS busca modelar a dinâmica não-linear em (1.1) por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares. Para não carregar a notação<sup>3</sup>, deste ponto em diante, a dependência das funções de pertinência  $h_i[q(t)]$  com relação às variáveis premissas e ao tempo será considerada implícita, sendo que serão indicadas apenas por  $h_i$ . O mesmo irá ocorrer para o vetor de estados, para os sinais de controle e saída, sendo denotados apenas por  $x$ ,  $u$  e  $y$ , respectivamente. O conjunto das funções de pertinência também será indicado pelo vetor

$$h := [h_1 \quad h_2 \quad \cdots \quad h_r].\tag{1.13}$$

O chamado controle PDC é dado pela combinação fuzzy, usando as mesmas funções de pertinência, de controladores lineares do tipo realimentação completa de estados

$$u = K(h) = \sum_{i=1}^r h_i K_i x,\tag{1.14}$$

sendo  $K_i$  matrizes constantes, reais e de dimensões apropriadas, que representam os ganhos de realimentação de estados. Como o sistema TS é não-linear o controlador PDC também o será. Além do controle PDC [TW01] há outra configuração chamada não-PDC, veja por exemplo [TOW07]. O controle PDC resulta no sistema em malha-fechada a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(h)x + B(h)K(h)x = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_i + B_i K_j] x \\ y &= C(h)x = \sum_{i=1}^r h_i C_i x.\end{aligned}\tag{1.15}$$

### 1.3 FONTES DE CONSERVADORISMO E DESAFIOS

Embora o controle fuzzy baseado em modelos TS seja uma sólida ponte que une os contextos não-linear e linear em uma única esfera de ação, combinando formalismo matemático com ferramentas numéricas, a distância dessa travessia ainda é grande, podendo ser encurtada. A distância que os separa é medida pelo conservadorismo da abordagem TS. Neste trabalho, entende-se por conservadorismo a imposição de restrições mais exigentes,

---

<sup>3</sup>E também para simplificar o trabalho do autor

durante análise de estabilidade ou projeto de controlador para um certo sistema, do que o conjunto necessário e suficiente que assegura uma determinada condição de projeto.

Uma das fontes de conservadorismo deve-se ao carácter suficiente do método direto de Lyapunov, também conhecido como segundo método de Lyapunov [Lya92]. Caso um teste de análise de estabilidade, baseado em uma condição necessária e suficiente, falhe para uma determinada função candidata nada pode ser concluído com relação à instabilidade, pois outra função de Lyapunov não testada pode existir, fornecendo o certificado de estabilidade. Dessa forma, a proposta de novas funções de Lyapunov, mais complexas, que resultem em maior capacidade de análise e de síntese e, simultaneamente, envolvam outras funções como casos particulares, é uma maneira de encurtar tal distância. Vale enfatizar que essa dificuldade também está presente no controle não-linear, contudo nele há uma coleção maior de funções à disposição, bem como de métodos para obtê-las.

No contexto de sistemas fuzzy as escolhas são mais restritas pela necessidade de tratá-las no contexto de LMIs: função de Lyapunov quadrática [CTU00, TANY01, TW01, AN06, MCP<sup>+</sup>07, APA<sup>+</sup>08]; função de Lyapunov linear por partes [CRF97, JRA99, Fen03, FCSZ05, TO10]; função de Lyapunov fuzzy [Jad99, THW03, BGM10]; função de Lyapunov fuzzy no formato integral [RW06]; função de Lyapunov baseada na variação de  $k$  passos [KWG08]; e, mais recentemente, funções de Lyapunov polinomiais nos estados [TYOW09, TOW09]. Nota-se que a medida que as funções adotadas são mais complexas, maiores dificuldades se apresentam na formulação de condições LMI. Haja vista que a função proposta em [TYOW09] não pode ser tratada via LMIs, sendo necessário usar ferramentas numéricas de SDP para resolução de problemas SOS.

Outro fator está relacionado ao conservadorismo das condições de estabilidade e a capacidade computacional para verificá-las. Os métodos disponíveis para solução de LMIs são muito eficientes, sendo capazes de resolver um conjunto de restrições acopladas em um tempo não muito superior ao gasto para verificar a mesma quantidade de restrições isoladamente [VB97]. Contudo, mostra-se em alguns problemas que existe uma parametrização para a função de Lyapunov candidata que assegura estabilidade mas, mesmo assim, a verificação computacional falha, sem que uma das possíveis soluções seja encontrada [TW01]. Nesse caso, o que se observa é um grau de conservadorismo nas condições de estabilidade. Para um pequeno número de regras, é possível que tais condições de estabilidade sejam bem sucedidas, mas a medida em que um modelo com mais regras é testado, aumenta-se o acoplamento entre as várias restrições, não havendo êxito na busca de uma solução factível. Portanto, não se requer, necessariamente, a troca da função candidata, mas apenas que as condições de estabilidade sejam mais brandas<sup>4</sup>.

Para lidar com esse aspecto numérico, uma estratégia amplamente estudada [TIW98, KL00, TPA00, TAA01, TAA03, XQ03, FLK<sup>+</sup>06, MCP<sup>+</sup>07, MOP07, SA07, MOP09, MOP10] é o uso de variáveis matriciais livres, os chamados termos de relaxação do lado direito em [MOP09]. Formas de incorporar tais termos e relaxar o projeto de controlador ocuparam bastante espaço na última década nos meios de comunicação da comunidade de controle fuzzy. No caso da função de Lyapunov quadrática, uma solução aparentemente definitiva foi proposta em [MOP09] na forma de sequências de LMIs com certificado

---

<sup>4</sup>Ditas também mais relaxadas ou ainda menos conservadoras.



de convergência. A medida em que um parâmetro cresce é possível convergir assintoticamente para condições necessárias e suficientes. Todavia essas conclusões são válidas apenas para funções quadráticas.

Ainda assim a verificação numérica é motivo de atenção. Mesmo com a disponibilidade de cada vez mais recursos computacionais, soluções que teoricamente reduzem o conservadorismo podem ser numericamente intratáveis. É importante ter como objetivo a redução no conservadorismo, sem comprometer demasiadamente a complexidade numérica, tendo em vista a quantidade de regras e ordem do modelo investigado.

Uma questão pertinente, que diz respeito à validade da abordagem TS para dinâmicas não-lineares, é o fato de que modelos TS muitas vezes aproximam a dinâmica não-linear original em regiões compactas, não possuindo validade global. Dessa forma, o que vale como estabilidade global para o sistema TS tem caráter apenas local para o sistema não-linear original [Sal09].

Uma outra fonte de conservadorismo, investigada somente recentemente, consiste no uso parcial da informação relativa às funções de pertinência [Sal09]. Grande parte dos trabalhos trata os sistemas TS enfatizando sua característica politópica, preterindo sua natureza variante no tempo. Considere um sistema não-linear, identificado por  $\Xi_{NL}$ . Tal sistema pode ser representado, exatamente, por um modelo TS denotado por  $\Xi_{TS}$ , cujos vértices são dados por pares  $(A_i^f, B_i^f)$ . Há um conjunto único de funções de pertinência, indicado por  $h_{TS-NL}$ , capaz de combinar as matrizes locais  $(A_i^f, B_i^f)$  para estabelecer a equivalência unívoca entre  $\Xi_{TS}$  e  $\Xi_{NL}$ .

Todavia, quando as condições de estabilidade não levam em conta informações adicionais das funções de pertinência, considerando apenas sua característica convexa, como ocorre com a estabilidade quadrática, a noção de estabilidade serve não somente para  $\Xi_{TS}$ , como também se estende para a família de modelos

$$\Xi_{TS}^f := \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i \left( A_i^f x + B_i^f u \right),$$

composta por modelos TS que possuem os mesmos vértices de  $\Xi_{TS}$  e um conjunto qualquer de funções de pertinência, as quais satisfazem (1.9).

Embora isso seja vantajoso do ponto de vista da formulação das LMIs e forneça certa robustez com relação a  $h_{TS-NL}$ , a abordagem torna-se conservadora, pois inclui-se na análise outros sistemas não-lineares além de  $\Xi_{NL}$ . Pode haver uma função de Lyapunov candidata que assegure estabilidade apenas para  $\Xi_{TS}$ , mas não para toda a família  $\Xi_{TS}^f$ . No contexto direto de sistemas não-lineares a abordagem é menos conservadora pois é aplicada com maior especificidade para o sistema em questão. i.e., a contraposição entre uma solução “artesanal” (controle não-linear) contra outra “industrializada” (controle fuzzy).

## 1.4 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O objetivo principal deste trabalho é a proposta de novas condições LMI para: i) análise de estabilidade de sistemas TS; ii) projeto de compensadores fuzzy estabilizantes PDC. Em ambos os casos, busca-se que as condições propostas sejam menos conservadoras.

Atuando principalmente nas funções de Lyapunov candidatas e explorando a informação relativa às funções de pertinência busca-se aproximar os contextos não-linear e fuzzy. Para reduzir o custo computacional, ou mesmo para tratar novas dificuldades, geradas pelas novas condições de análise e síntese, soluções numéricas são propostas para traduzir tais condições no contexto de LMIs.

São fornecidos conjuntos de condições que se encontram entre dois extremos, sempre com o enfoque na redução de conservadorismo. Em um extremo, encontram-se condições que visam reduzir o conservadorismo ao máximo, sem preocupação com o preço a ser pago. É feita uma análise de complexidade das condições, permitindo quantificar esse custo maior, i.e., qual o aumento de demanda computacional. No outro extremo são apresentadas condições mais competitivas, nas quais o custo computacional foi uma preocupação. Embora sejam mais conservadoras que as condições de alto custo propostas no outro extremo, são mais relaxadas quando comparadas à literatura recente. Ainda possuem como vantagem uma demanda por esforço computacional da mesma ordem de complexidade da literatura recente, sendo em alguns casos até mesmo inferior.

O texto divide-se em dois grandes blocos. No Capítulo 2 o enfoque é dado na análise de estabilidade de sistemas TS. A Seção 2.1 revisa os principais conceitos com relação a análise de estabilidade com funções quadráticas; essa revisão bibliográfica continua com as funções de Lyapunov fuzzy na Seção 2.2; na Seção 2.3 algumas lacunas existentes no contexto atual de funções de Lyapunov fuzzy são preenchidas, conduzindo às primeiras condições de estabilidade propostas; as soluções numéricas para aproximar sistemas TS e não-lineares com base nas informações existentes nas funções de pertinência são o assunto da Seção 2.4; a análise de complexidade é assunto para a Seção 2.5, na qual são apresentadas soluções numéricas capazes de, simultaneamente, reduzir conservadorismo e complexidade computacional; finalmente, ataca-se o conservadorismo na abordagem TS com a proposta de duas novas funções de Lyapunov na Seção 2.6.

No Capítulo 3 o tema é o projeto de compensadores fuzzy na forma PDC baseado em LMIs. As Seções 3.1 e 3.2 fazem uma revisão bibliográfica, abordando as vantagens e desvantagens do controle fuzzy baseado nas funções de Lyapunov quadrática e fuzzy. Um destaque é feito na Seção 3.2.1 para função de Lyapunov fuzzy na forma integral. Em seguida a Seção 3.3 apresenta soluções numéricas e propõe novas metodologias para síntese de controlador fuzzy baseado nas funções de Lyapunov fuzzy. Finalmente a Seção 3.3.2 traz comparações numéricas das condições propostas com relação às principais abordagens presentes na literatura. Em seguida, na Seção 3.3.3, três exemplos de simulação ilustram o desempenho das metodologias de projetos de controlador propostas para sistemas não-lineares. O Capítulo 4 traz as conclusões e perspectivas futuras.

# ANÁLISE DE ESTABILIDADE

*I know that many will call this useless work*<sup>1</sup>...

—LEONARDO DA VINCI (The Notebooks of Leonardo Da Vinci)

A análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS no sentido de Lyapunov será o enfoque deste capítulo. No método direto de Lyapunov, aplicado a sistemas TS, busca-se determinar os parâmetros de uma função de Lyapunov, pertencente a uma classe candidata particular, que garanta estabilidade do sistema investigado [TW01]. Essa busca pode ser feita de maneira sistemática, traduzindo as condições de estabilidade como um problema de programação semidefinida, que pode ser verificado computacionalmente através de métodos numéricos eficientes. Tal parametrização pode não existir para aquela classe específica, mesmo em se tratando de um sistema estável, sendo esta uma das principais fontes de conservadorismo da metodologia [Sal09, Cap. 4].

Grande parte da sequência deste capítulo irá abordar as funções de Lyapunov candidatas, pois são o ponto de partida da metodologia e exercem grande influência em todo o procedimento de análise de estabilidade dos sistemas TS. As principais funções presentes na literatura recente serão analisadas, investigando suas propriedades e potencial inexplorado. Esse estudo conduzirá à proposta de uma nova metodologia para incorporar variáveis de relaxação nas condições de estabilidade, promovendo a unificação de alguns resultados relativos à função de Lyapunov fuzzy, uma das contribuições desta tese. Finalmente, duas novas funções de Lyapunov serão propostas, na tentativa de particularizar resultados anteriores e aprimorar ainda mais a capacidade de análise de estabilidade de sistemas TS pelo método direto de Lyapunov, outra contribuição.

Outra fonte de conservadorismo na análise de estabilidade é a maneira como a busca pelos parâmetros de uma dada função de Lyapunov é traduzida na forma de LMIs. Partindo da mesma função candidata é possível que uma formulação seja bem sucedida enquanto outra não alcance mesmo êxito. Outro ponto é como obter, a partir de desigualdades de dimensão infinita, um conjunto de LMIs finito suficiente, que pode ser verificado eficientemente do ponto de vista computacional. Essa será outra discussão que irá ocupar uma parcela significativa do capítulo.

## 2.1 ANÁLISE DE ESTABILIDADE COM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Normalmente, a terminologia análise de estabilidade é usada, indistintamente, para sistemas fuzzy TS não-forçados, ou em malha-aberta, conforme representado em (1.12), e também para sistemas de controle fuzzy TS em malha-fechada, para os quais a lei de

---

<sup>1</sup>Eu sei que muitos chamarão isto de trabalho inútil ...

controle já fora projetada previamente, como, por exemplo, na forma de controle PDC segundo (1.15). Ambos os sistemas são autônomos, pois no caso (1.15) a lei de controle dada por (1.14) é um caso especial de realimentação de estados. Ainda existem situações mistas. Por exemplo, pode ser feita uma realimentação local para cada modelo em malha-aberta, sem que este compensador local influencie os demais sub-sistemas. Ou seja, diferente do que ocorre na topologia PDC. Mas esse caso recai na primeira forma discutida, haja vista que se pode substituir  $A_i$  em (1.12) por um outro sub-sistema  $\bar{A}_i$ , a versão em malha-fechada local definida como  $\bar{A}_i := A_i + B_i K_i$ .

Em contraposição às aquelas situações, usa-se o termo projeto do controlador<sup>2</sup> quando se deseja determinar os ganhos que estabilizam o sistema em malha-fechada. Contudo, neste trabalho, irá ser adotada a nomenclatura análise de estabilidade apenas para o caso do sistema na forma (1.12). As razões para tal serão explicadas na sequência desta Seção.

Considere os problemas: i) verificar estabilidade de um sistema TS em malha-aberta; ii) verificar estabilidade de um sistema TS em malha-fechada com ganhos na forma PDC já projetados de alguma forma<sup>3</sup>. Essa análise poderá ser conduzida partindo de uma função candidata do tipo quadrática

$$V = x^T P x \quad (2.1)$$

e, em seguida, procedendo de acordo com o segundo método de Lyapunov [Lya92].

Portanto, a parametrização se dá na busca por uma única matriz  $P$ , definida positiva, que satisfaça, simultaneamente, um conjunto de restrições na forma de LMIs. Para o sistema em malha-aberta a derivada da função ao longo das trajetórias do sistema será

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} &= x^T A(h)^T P x + x^T P A(h) x \\ &= x^T [A(h)^T P + P A(h)] x \\ &= x^T \sum_{i=1}^r h_i [A_i^T P + P A_i] x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Uma vez que o conjunto  $h$  pertence a (1.9) é suficiente satisfazer o Lema a seguir, que apresenta um conjunto de desigualdades de Lyapunov acopladas, para garantir estabilidade no sentido de Lyapunov:

**Lema 2.1** (Capítulo 2, [TW01]). *O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso exista uma matriz definida positiva  $P$  que satisfaça*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i \in \mathcal{R}. \quad (2.3)$$

---

<sup>2</sup>Também se aplica projeto de regulador ou síntese de controle.

<sup>3</sup>Sendo que o segundo caso segue, por exemplo, os moldes da seção III.A em [TAA03], na qual os ganhos do controlador PDC são determinados usando a fórmula de Ackerman, por exemplo, visando que os sub-sistemas lineares sejam estáveis. Neste caso, o problema consiste em verificar se a combinação fuzzy desses controladores, estáveis apenas localmente, promoverá estabilidade global, o que nem sempre é verdade.

Já para o sistema em malha-fechada tem-se que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= x^T \{A(h) + B(h)K(h)\}^T P x + x^T P \{A(h) + B(h)K(h)\} x \\
&= x^T [\{K(h)^T B(h)^T + A(h)^T\} P + P \{A(h) + B(h)K(h)\}] x \\
&= x^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [\{K_j^T B_i^T + A_i^T\} P + P \{A_i + B_i K_j\}] x \\
&= x^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [G_{ij}^T P + P G_{ij}] x
\end{aligned} \tag{2.4}$$

sendo que  $G_{ij} := A_i + B_i K_j$ .

Uma forma amplamente difundida na literatura fuzzy para verificar tais condições consiste em separar os termos do somatório duplo nos quais as funções de pertinência ficam elevadas ao quadrado

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i^2 \{G_{ii}^T P + P G_{ii}\} + \sum_{i < j} h_i h_j \{G_{ij}^T P + P G_{ij} + G_{ji}^T P + P G_{ji}\} \right) x \\
&= x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i^2 Z_{ii} + \sum_{i < j} h_i h_j \{Z_{ij} + Z_{ji}\} \right) x
\end{aligned} \tag{2.5}$$

sendo que  $Z_{ij} := G_{ij}^T P + P G_{ij}$ .

Como  $h_i$  e  $h_j$  satisfazem as propriedades em (1.9), os produtos entre funções de pertinência serão sempre não negativos. Uma forma de validar essa expressão consiste, então, em garantir que os termos  $Z_{ii}$  e  $Z_{ij} + Z_{ji}$  sejam definidos negativos. Note que essas restrições são mais brandas do que exigir que cada termo  $Z_{ij}$  em (2.4) seja definido negativo. Essa simples reformulação das condições é capaz de promover uma condição menos conservadora [TS94].

Nesse ponto é possível destacar uma diferença crucial entre a análise de estabilidade para malha-aberta com relação a forma em malha-fechada. No caso de malha-aberta necessariamente todos os termos avaliados deveriam ser definidos negativos, vide Lema 2.1. No caso da análise em malha-fechada o termo  $Z_{ij}$  não necessariamente deve ser definido negativo para que a expressão (2.5) seja verdadeira. Isso não ocorre apenas nesse caso, mas sempre que há uma interação entre os sub-sistemas lineares que se manifesta na forma de somatórios múltiplos envolvendo multiplicação das funções de pertinência<sup>4</sup>.

Considere por exemplo variáveis adicionais  $X_{ij}$  tais que

---

<sup>4</sup>Também chamados de somatórios fuzzy em [AS07].

$$\dot{V} = x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i^2 Z_{ii} + \sum_{i<j}^r h_i h_j \{Z_{ij} + Z_{ji}\} \right) x \quad (2.6)$$

$$\leq -x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i^2 X_{ii} + \sum_{i<j}^r h_i h_j 2X_{ij} \right) x \quad (2.7)$$

$$= -x^T \begin{bmatrix} h_1 I \\ h_2 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1r} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1r} & X_{2r} & \cdots & X_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ h_2 I \\ \vdots \\ h_r I \end{bmatrix} x \quad (2.8)$$

$$= -x^T [h_1 I \ h_2 I \ \cdots \ h_r I] \bar{X} [h_1 I \ h_2 I \ \cdots \ h_r I]^T x \quad (2.9)$$

Esse resultado conduz ao seguinte Teorema proposto em [KL00]:

**Lema 2.2.** *O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso exista uma matriz definida positiva  $P$  e matrizes simétricas  $X_{ij}$  que satisfaçam*

$$Z_{ii} + X_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R} \quad (2.10)$$

$$Z_{ij} + Z_{ji} + 2X_{ij} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (2.11)$$

$$\bar{X} > 0 \quad (2.12)$$

Esse Lema não impõe que os termos  $Z_{ij}$  sejam definidos negativos mas considera um polinômio

$$X(h) := \sum_{i=1}^r h_i^2 X_{ii} + \sum_{i<j}^r h_i h_j 2X_{ij}$$

que serve como limitante para  $\dot{V}$ . Assim, a matriz  $\bar{X}$  deve ser definida positiva sem que os termos fora da diagonal principal,  $X_{ij}$   $i \neq j$ , o sejam. Esse é o ponto chave que permite redução no conservadorismo na análise de estabilidade para sistemas em malha-fechada baseada na função de Lyapunov quadrática. Polinômios desse tipo foram denominados relaxações do lado direito em [MOP09], sendo investigados intensivamente nas últimas duas décadas como forma de reduzir o conservadorismo [TIW98, KL00, TPA00, TAA01, TW01, TAA03, XQ03, FLK<sup>+</sup>06]. Um marco relevante nessa frente de pesquisa é o resultado obtido por [MOP07] e [SA07], de forma independente, que foi refinado em [MOP09] com a inclusão de outras técnicas de relaxação. A idéia advém do Teorema de Polya sobre positividade de formas homogêneas, resultando em sequências de LMIs nas quais o grau dos polinômios usados para relaxação do lado direito cresce progressivamente até que as condições obtidas, que são suficientes, converjam assintoticamente para necessidade. Contudo, note que esse resultado se aplica apenas para a função de Lyapunov quadrática, ou seja, o teste se torna necessário e suficiente apenas para essa escolha particular de função

de Lyapunov candidata. Em se falhando o teste, mostra-se apenas que não há função quadrática que garante estabilidade, mas nada pode ser afirmado sobre instabilidade.

Contudo, no caso da análise de estabilidade para sistemas em malha-aberta o procedimento de adotar termos do lado direito é inócuo. Considere por exemplo para o Lema 2.2 o caso em que as matrizes  $B_i$  são nulas. Dessa forma, o sistema em malha-fechada recai no caso de malha-aberta. As LMIs obtidas seriam:

$$A_i^T P + PA_i + X_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R} \quad (2.13)$$

$$A_i^T P + PA_i + A_j^T P + PA_j + 2X_{ij} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (2.14)$$

$$\bar{X} > 0 \quad (2.15)$$

Note que há uma certa redundância. Considerando o caso particular  $r = 2$  haveria um conjunto de 4 restrições

$$A_1^T P + PA_1 + X_{11} < 0, \quad A_2^T P + PA_2 + X_{22} < 0, \quad (2.16)$$

$$A_1^T P + PA_1 + A_2^T P + PA_2 + 2X_{12} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.17)$$

A última restrição pode ser rescrita, via complemento de Schur [BEGFB94, Cap. 2]:

$$X_{22} > 0, \quad X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{12} > 0. \quad (2.18)$$

Ora, se  $X_{22}$  é definida positiva então para a segunda restrição em (2.16) ser verdadeira obrigatoriamente tem-se  $A_2^T P + PA_2 < 0$ . Outra consequência devido a  $X_{22} > 0$  é a necessidade de  $X_{11} > 0$  na segunda restrição em (2.18), pois tem-se o termo  $-X_{12}X_{22}^{-1}X_{12} < 0$ . Consequentemente  $A_1^T P + PA_1 < 0$  em (2.16). Aí está a redundância. Na primeira restrição em (2.17) dois termos definidos negativos são somados e a eles se soma um terceiro termo,  $2X_{12}$ , para que essa soma permaneça negativa. Dessa forma o termo  $X_{12}$  não contribui como ocorria no caso de malha-fechada e o Lema 2.2 apenas repete o resultado do Lema 2.1.

Embora não se demonstre isso para outros resultados baseados na função de Lyapunov quadrática [TPA00, TAA01, TAA03, XQ03, FLK<sup>+</sup>06, MOP07, SA07, MOP09, MOP10] os experimentos numéricos corroboram com essa conjectura: termos de relaxação do lado direito não contribuem para redução do conservadorismo na análise de estabilidade de sistemas TS na forma (1.12).

Portanto, conclui-se que deve haver uma distinção quando se fala de análise de estabilidade para sistemas TS na forma (1.12) ou na forma (1.15). Neste trabalho, análise de estabilidade será usada apenas para o caso em malha-aberta. As LMIs para análise de estabilidade para sistemas em malha-fechada assemelham-se demais com as LMIs para projeto do controlador. A diferença, em geral, reside no fato dos ganhos serem variáveis de decisão quando se trata de projeto do controlador, enquanto na análise de estabilidade são valores já fornecidos.

## 2.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE COM FUNÇÕES FUZZY

A função de Lyapunov fuzzy (FLF), proposta originalmente em [Jad99], consiste em uma combinação fuzzy de funções quadráticas, segundo as mesmas regras usadas para o modelo cuja estabilidade deseja-se averiguar:

$$V = x^T P(h)x, \quad (2.19)$$

sendo  $P(h) := \sum_{i=1}^r h_i P_i$ .

Um ponto interessante, destacado em [THW03], é que as funções quadráticas, quando consideradas individualmente, não precisam ser funções de Lyapunov. Somente sua combinação fuzzy deverá ser. A função usada em [Jad99] e [THW03] se assemelha bastante com as funções parametrizadas usadas para sistemas lineares variantes no tempo (LPV) [MP03, FAG96, GAC96]. Enquanto para sistemas LPV a variação do parâmetro de incerteza é desconhecida, para sistemas TS a parametrização é feita com as funções de pertinência, cuja variação é conhecida de forma explícita, permitindo a obtenção de limitantes para suas taxas de variação temporal, como pode ser visto em [THW03, TOW07]. Para adotar tal tipo de função deve-se considerar

**Proposição 2.1.** *As funções de pertinência são tais que  $h_i \in \mathcal{C}^1$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ .*

Essa suposição é atendida para sistemas TS obtidos pela técnica da não-linearidade setorial [OTW01], uma abordagem analítica capaz de gerar modelos TS globais ou locais, que representam com exatidão sistemas não-lineares. Em casos de sistemas TS com funções de pertinência contínuas cuja primeira derivada é indefinida em certos pontos, por exemplo, funções de pertinência trapezoidais ou triangulares, as quais são setorialmente  $\mathcal{C}^1$ , é possível fazer uma interpolação polinomial, gerando novas funções de pertinência, que fornecem um modelo com precisão arbitrariamente grande e que satisfaz a Proposição 2.1.

Tal suposição se faz necessária pois considerando a derivada temporal da FLF ao longo das trajetórias do sistema TS (1.12):

$$\dot{V} = \dot{x}^T P(h)x + x^T P(h)\dot{x} + x^T \dot{P}(h)x \quad (2.20)$$

$$= x^T [A^T(h)P(h) + P(h)A(h)]x + x^T \sum_{k=1}^r \dot{h}_k P_k x \quad (2.21)$$

surge a taxa de variação das funções de pertinência, vide o termo mais à direita da equação (2.21).

Existem algumas maneiras de incorporar a derivada temporal das funções de pertinência na forma LMI. Primeiramente, será analisada a maneira proposta por [THW03] que considera, simultaneamente, o limite superior para cada uma das derivadas, conforme o Lema a seguir:

**Lema 2.3** (Teorema 1 em [THW03]). *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i$  que satisfaçam*



$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.22)$$

sendo  $P_\phi := \sum_{k=1}^r \phi_k P_k$  e  $\phi_k$  escalares positivos.

O resultado proposto por [THW03] apresenta muitas vantagens com relação a análise de estabilidade quadrática. Em primeiro lugar, a derivada temporal da FLF gera mais informações da dinâmica do sistema, através da taxa de variação temporal das funções de pertinência. Isso representa uma maneira menos conservadora de analisar um sistema TS quando comparado com a estabilidade quadrática, que levava em conta apenas a característica politópica. Quando as funções de pertinência são consideradas parcialmente, como na estabilidade quadrática, garante-se estabilidade para o sistema investigado e também para toda a família de modelos que compartilham dos mesmos vértices, relembre a discussão da Seção 1.3. Ao se considerar a taxa de variação das funções de pertinência a família de modelos se torna mais restrita. Usando a FLF, a garantia de estabilidade estende-se para a família de modelos que compartilham determinados vértices com uma taxa de troca máxima entre eles, medida pelo limitante superior da derivada temporal das funções de pertinência. No caso da estabilidade quadrática a troca entre os vértices de um modelo pode assumir qualquer valor, sendo até mesmo instantânea<sup>5</sup>. Portanto, nota-se o motivo pelo qual é mais conservador garantir estabilidade por meio de funções quadráticas.

Outra vantagem é o fato de que somatórios fuzzy duplos são gerados, à semelhança do controle PDC discutido na Seção 2.1, incluindo informação da interação entre os subsistemas lineares, o que permite utilizar técnicas de relaxação do lado direito, reduzindo conservadorismo. Pensando estritamente do ponto de vista computacional, outra vantagem é a presença de mais graus de liberdade para garantir factibilidade de um problema de otimização similar.

Portanto, do ponto de vista teórico, parece claro que a FLF é uma classe de funções de Lyapunov mais ampla que a função quadrática única. De fato, se na equação (2.19) for considerado  $P_i = P, \forall i \in \mathcal{R}$  retorna-se à função quadrática, devido às propriedades em (1.9)

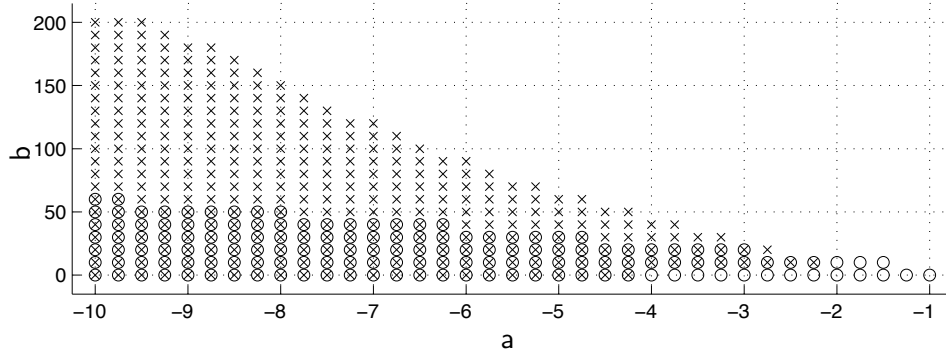
$$V = x^T \sum_{i=1}^r h_i P x = x^T P \left( \sum_{i=1}^r h_i \right) x = x^T P (1) x = x^T P x.$$

Uma suposição natural seria assumir que o Lema 2.1 é um caso particular do Lema 2.3. Contudo, do ponto de vista da tradução da condição (2.21) para as restrições (2.22), dentro do contexto de LMIs, a realidade é diferente, conforme se nota do exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1** (Exemplo 1, Seção 3, [RW06]). *Considere um sistema TS (1.12) de segunda ordem e 4 regras, cujos parâmetros são*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix},$$

<sup>5</sup>O que seria um absurdo, a menos que se trate de um sistema chaveado.



**Figura 2.1** Comparação entre a análise de estabilidade quadrática (Lema 2.1, assinalado com o) e o resultado obtido com o Lema 2.3 (assinalado com ×).

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_i(x_i) = \begin{cases} (1 - \sin(x_i))/2, & \text{caso } |x_i| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{caso } x_i > \pi/2, \\ 1, & \text{caso } x_i < -\pi/2, \end{cases} \quad \beta_i(x_i) = 1 - \alpha_i(x_i),$$

$$h_1 = \alpha_1(x_1)\alpha_2(x_2), \quad h_2 = \alpha_1(x_1)\beta_2(x_2), \quad h_3 = \beta_1(x_1)\alpha_2(x_2), \quad h_4 = \beta_1(x_1)\beta_2(x_2).$$

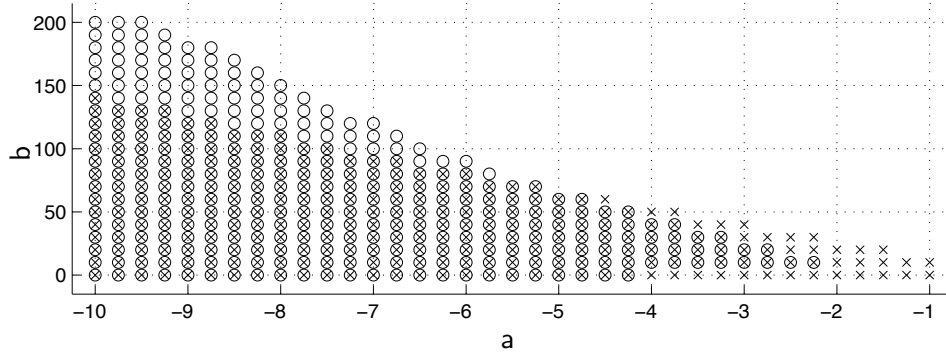
A estabilidade foi investigada usando o Lema 2.1 e o Lema 2.3 para pares de parâmetros  $(a, b)$  no intervalo  $a \in [-10, 0]$  e  $b \in [0, 200]$  considerando o limite das derivadas  $\phi_{1,2} = 0,85$ . Os resultados são mostrados na Figura 2.1 e revelam que usando a FLF é possível assegurar estabilidade para uma maior quantidade de parâmetros. Contudo, existem certos parâmetros para os quais apenas a estabilidade quadrática é bem sucedida.

A primeira vista, as LMIs em (2.22) são menos restritivas do que (2.3) devido a presença de mais variáveis  $P_i$ . Parece que satisfazer (2.22), usando  $r$  variáveis, é uma tarefa bem menos árdua do que satisfazer as restrições similares em (2.3), limitadas a um único grau de liberdade  $P$ . Contudo há uma diferença marcante entre essas duas restrições, pois como a função fuzzy gera informação da derivada temporal das funções de pertinência, surge o termo  $P_\phi$  em (2.22), o qual inexistente em (2.3).

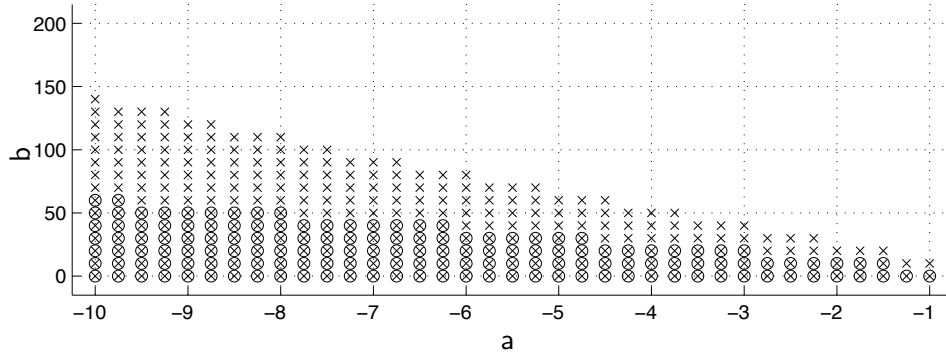
Uma vez que as matrizes  $P_i$  são definidas positivas, o termo  $P_\phi$  também o será pois é formado pela soma dessas matrizes ponderadas por escalares positivos. O resultado da soma matricial em (2.22) deve ter sinal negativo<sup>6</sup> sem a contribuição de  $P_\phi$ . Dessa forma a maneira como o termo  $P_\phi$  é incorporado para se obter uma formulação LMI pode se tornar uma fonte de conservadorismo.

Para reforçar a conjectura de que  $P_\phi$  pode ser uma fonte de conservadorismo considere o seguinte Lema proposto em [THW03] cujo objetivo é relaxar as condições do Lema 2.3, justamente por meio de modificações em  $P_\phi$ :

<sup>6</sup>Neste trabalho adota-se a nomenclatura positivo e negativo para indicar matriz definida positiva e negativa, respectivamente.



**Figura 2.2** Comparação entre a análise de estabilidade com funções fuzzy (Lema 2.3, assinalado com  $\circ$ ) e o resultado obtido com o Lema 2.4 (assinalado com  $\times$ ).



**Figura 2.3** Comparação entre a análise de estabilidade quadrática (Lema 2.1, assinalado com  $\circ$ ) e o resultado obtido com o Lema 2.4 (assinalado com  $\times$ ).

**Lema 2.4** (Teorema 2 em [THW03]). *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i, \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, i \in \mathcal{R}$  que satisfaçam*

$$P_i - P_r \geq 0, \forall i \in \mathcal{R} - \{r\} \quad (2.23)$$

$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.24)$$

sendo  $P_\phi := \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r)$  e  $\phi_k$  escalares positivos.

Repetindo o experimento numérico, obtém-se os resultados ilustrados na Figura 2.2, comparando as duas abordagens baseadas na FLF entre si, Lema 2.3 e Lema 2.4. Também há os resultados mostrados na Figura 2.3, que compara a estabilidade quadrática com a condição modificada proposta no Lema 2.4.

A modificação proposta no Lema 2.4 permite agora que o resultado baseado na FLF envolva toda a região de estabilidade quadrática, o que não era obtido pelo Lema 2.3, compare a Figura 2.1 com a Figura 2.3. A razão para isso pode ser determinada a partir da análise das restrições (2.23). Elas permitem que as matrizes  $P_i$  sejam iguais e como consequência o termo  $P_\phi$  pode assumir valor nulo, fazendo as condições do Lema 2.4

recaírem nas condições apresentadas no Lema 2.1. Portanto, as condições apresentadas no Lema 2.4 serão menos conservadoras que a estabilidade quadrática, que se torna assim um caso particular<sup>7</sup>.

Há um compromisso entre os Lemas 2.3 e 2.4. A Figura 2.2 mostra que há faixas de parâmetros para as quais apenas uma das condições é factível, i.e., um resultado não é menos conservador que outro. A relaxação imposta sobre o termo  $P_\phi$  foi capaz de recuperar a estabilidade quadrática, mas o preço pago foi a perda de desempenho em outra faixa de parâmetros. Portanto, uma condição mais geral, que inclua todos os resultados anteriores, ainda deve ser encontrada, sendo o assunto da seção seguinte.

Antes de prosseguir para a próxima seção mais uma observação pode ser feita com relação ao Lema 2.4. Para obter tais condições foi usada a propriedade

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k = 0, \quad (2.25)$$

a partir da qual segue que

$$\dot{h}_l = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k. \quad (2.26)$$

Esse termo é usado em [THW03] com  $l = r$  para obtenção do Lema 2.4. Contudo, da forma pela qual o Lema 2.4 foi apresentado em [THW03], essa propriedade foi aplicada apenas para a pertinência de índice  $r$ , devendo ser sempre  $P_r$  a matriz a ser fixada nas LMIs (2.23). Tanto no enunciado do Lema 2.4 quanto ao longo do texto em [THW03] não é feita nenhuma menção com relação a possibilidade de outra regra ser fixada.

Porém, essa propriedade permite rescrever qualquer derivada de uma função de pertinência como uma combinação das demais. Considerando (2.21) segue que

$$\dot{V} = x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) x + x^T \sum_{k=1}^r \dot{h}_k P_k x \quad (2.27)$$

$$= x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) x + x^T \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k P_k x + x^T \dot{h}_l P_l x$$

$$= x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j G_{ij} x + x^T \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k P_k x + x^T \dot{h}_l P_l x \quad (2.28)$$

sendo  $G_{ij} := A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j$ .

Usando a propriedade (2.26) para uma regra qualquer obtém-se

---

<sup>7</sup>Assumindo que Proposição 2.1 é verdadeira, i.e., que as funções de pertinência são diferenciáveis ao menos uma vez.

$$\dot{V} = x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j G_{ij} x + x^T \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k P_k x - x^T \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k P_l x \quad (2.29)$$

$$= x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left( G_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \dot{h}_k [P_k - P_l] \right) x. \quad (2.30)$$

Assumindo  $P_k - P_l \geq 0$  e  $|\dot{h}_k| < \phi_k$ ,  $k \in \mathcal{R} - \{l\}$ , segue que

$$\dot{V} \leq x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left( G_{ij} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \phi_k [P_k - P_l] \right) x.$$

O Teorema a seguir é proposto evidenciando a idéia por trás do Lema 2.4 para quaisquer funções de pertinências, um fato deixado à margem em [THW03].

**Teorema 2.1.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R} - \{l\}$ , sendo  $l$  o índice de uma das funções de pertinência. O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, \forall i \in \mathcal{R}$  que satisfaçam*

$$P_i - P_l \geq 0, \forall i \in \mathcal{R} - \{l\} \quad (2.31)$$

$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.32)$$

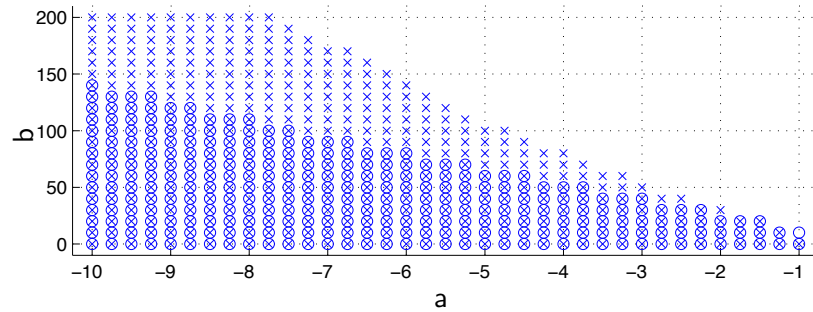
sendo  $P_\phi := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^r \phi_k (P_k - P_l)$  e  $\phi_k$  escalares positivos.

O experimento numérico é repetido usando as condições do Teorema 2.1 para  $l = 1, 2, 3$ . O caso  $l = 4$  equivale ao Lema 2.4. Os resultados são mostrados nas Figuras 2.4, 2.5 e 2.6 para  $l = 1, 2, 3$ , respectivamente, nas quais são comparados com o Lema 2.4. Ao permitir que o índice  $l$  varie, a análise dos resultados evidencia a possibilidade de redução do conservadorismo com relação ao Lema 2.4.

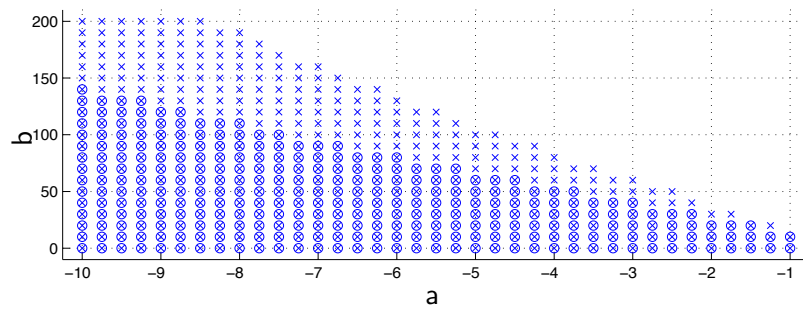
Nesse exemplo específico, o resultado para  $l = 4$  é o mais conservador, sendo envolvido por todos os demais, e  $l = 3$  gera os melhores resultados, envolvendo todos os demais. Comparando os casos  $l = 1$  e  $l = 2$  não há um vencedor claro. Para valores maiores de  $a$  o caso com  $l = 2$  tem melhor desempenho mas para valores menores de  $a$  o caso  $l = 1$  prevalece. Como esperado pela teoria, todos os casos envolvem a estabilidade quadrática. Embora nesse exemplo há valores de  $l$  que conseguem suplantam o resultado do Lema 2.3 não é possível garantir que isso ocorrerá sempre.

## 2.3 APRIMORANDO A ANÁLISE DE ESTABILIDADE COM FUNÇÕES FUZZY

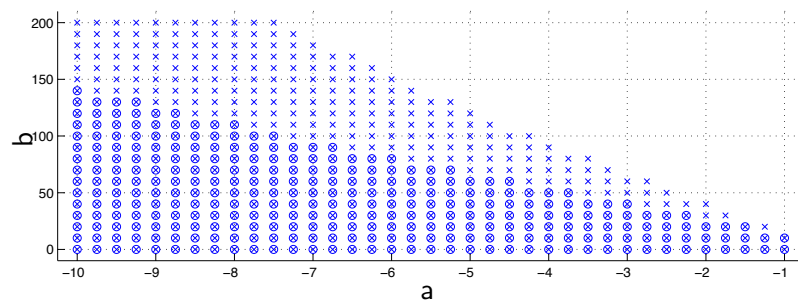
Como a investigação do comportamento da função de Lyapunov fuzzy na análise de estabilidade mostrou que modificações no termo  $P_\phi$  podem alterar o conjunto de parâmetros



**Figura 2.4** Análise de estabilidade por meio do Lema 2.4 (assinalado com  $\circ$ , correspondendo ao Teorema 2.1 com  $l = 4$ ) e considerando  $l = 1$  no Teorema 2.1 (assinalado com  $\times$ ).



**Figura 2.5** Análise de estabilidade por meio do Lema 2.4 (assinalado com  $\circ$ , correspondendo ao Teorema 2.1 com  $l = 4$ ) e considerando  $l = 2$  no Teorema 2.1 (assinalado com  $\times$ ).



**Figura 2.6** Análise de estabilidade por meio do Lema 2.4 (assinalado com  $\circ$ , correspondendo ao Teorema 2.1 com  $l = 4$ ) e considerando  $l = 3$  no Teorema 2.1 (assinalado com  $\times$ ).

para o qual um sistema é considerado estável, a chave para obtenção de uma generalização dos resultados anteriores se encontra nesse termo. Esta generalização é um dos resultados propostos neste trabalho.

Observando, novamente, a característica das funções de pertinência em (1.9), com atenção para suas derivadas temporais, é possível definir o termo a seguir

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i X = 0, \quad (2.33)$$

sendo que  $X$  é uma matriz simétrica qualquer.

Retomando a análise de estabilidade de sistemas TS na forma (1.12) a partir da função de Lyapunov fuzzy (2.19), considere a sua derivada temporal

$$\dot{V} = x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) x + x^T \sum_{k=1}^r \dot{h}_k P_k x. \quad (2.34)$$

Como o termo  $\bar{X}$  é nulo, pode ser somado sem modificá-la:

$$\dot{V} = x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) x + x^T \sum_{k=1}^r \dot{h}_k (P_k + X) x. \quad (2.35)$$

O seguinte termo majorante pode ser obtido

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k (P_k + X) \leq \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) \quad (2.36)$$

impondo-se a restrição  $P_k + X \geq 0, \forall k \in \mathcal{R}$  junto ao fato  $|\dot{h}_k| \leq \phi_k$ . Isso ocorre pois no lado direito de (2.36) haverá a soma de termos estritamente positivos ao passo que do lado esquerdo alguns termos podem ser negativos devido a possibilidade de  $\dot{h}_k < 0$ . Dessa forma, segue que:

$$\dot{V} \leq x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left( A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j + \sum_{k=1}^r \phi_k [P_k + X] \right) x. \quad (2.37)$$

A partir desse resultado, baseado na metodologia proposta em (2.33) para inclusão de variável de folga, é possível formular o Teorema a seguir. Esse Teorema é uma das contribuições deste trabalho, uma vez que na sequência será mostrado, através de Corolários, que os casos discutidos até aqui são condições particulares do resultado proposto.

**Teorema 2.2.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i, \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, \forall i \in \mathcal{R}$  e uma matriz simétrica  $X$  qualquer que satisfaçam*

$$P_i + X \geq 0, \forall i \in \mathcal{R} \quad (2.38)$$

$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.39)$$

sendo  $P_\phi := \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X)$  e  $\phi_k$  escalares positivos.

**Corolário 2.1.** *O Lema 2.1 é um caso particular do Teorema 2.2.*

*Demonstração.* Considerando  $X = -P, P_i = P, \forall i \in \mathcal{R}$ , o termo  $P_\phi$  torna-se nulo nas desigualdades (2.39), assim como desaparecem as desigualdades (2.38). Nesse caso, em (2.39) haverá  $r$  desigualdades idênticas àquelas em (2.3). As demais desigualdades serão do tipo

$$\frac{1}{2} (A_i^T P + P A_i + A_j^T P + P A_j) < 0.$$

Tais desigualdades são redundantes, uma vez que os termos  $A_i^T P + P A_i$  e  $A_j^T P + P A_j$  já são definidos negativos, devido às outras  $r$  desigualdades. ■

**Corolário 2.2.** *O Lema 2.3 é um caso particular do Teorema 2.2.*

*Demonstração.* Considerando  $X = 0$  as desigualdades (2.39) ficam idênticas às desigualdades (2.22). Como em ambos os casos as matrizes  $P_i$  devem ser definidas positivas, as desigualdades em (2.38) com  $X = 0$  são redundantes. ■

**Corolário 2.3.** *O Lema 2.4 é um caso particular do Teorema 2.2.*

*Demonstração.* Considerando  $X = -P_r$  as desigualdades (2.39) ficam idênticas às desigualdades (2.24), pois

$$\sum_{k=1}^r \phi_k (P_k - P_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) + \phi_r (P_r - P_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r).$$

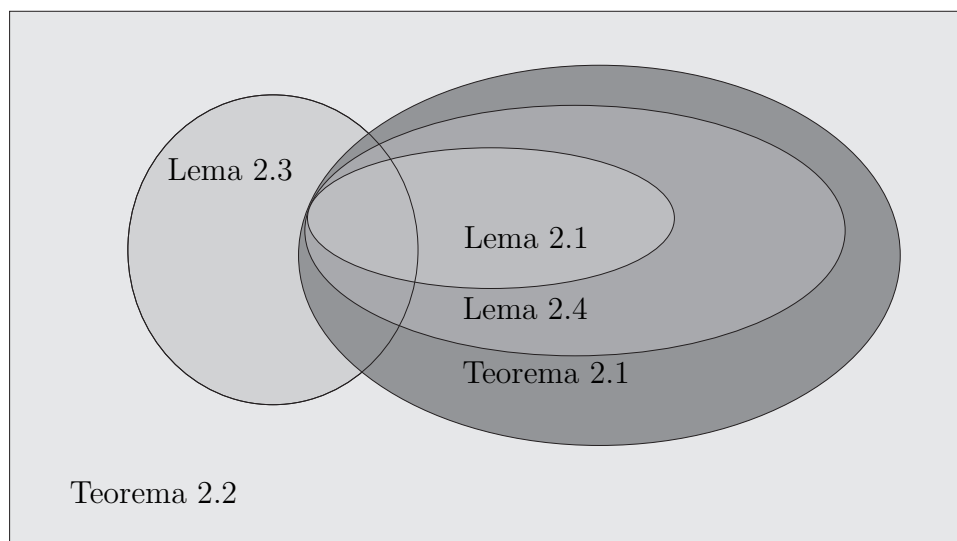
Em (2.38) exige-se que  $r$  desigualdades sejam satisfeitas. Como  $X = -P_r$ , as desigualdades em (2.23) são idênticas a  $r - 1$  desigualdades em (2.38). A desigualdade restante é  $P_r - P_r \geq 0$ , redundante. ■

**Corolário 2.4.** *O Teorema 2.1 é um caso particular do Teorema 2.2.*

*Demonstração.* Segue a mesma idéia do Corolário 2.3, considerando que  $X = -P_l$ . ■

A Figura 2.7 ilustra, através de um diagrama de Euler, a relação de conservadorismo nos resultados apresentados. O Teorema 2.2 possui como casos particulares o Teorema 2.1 e os Lemas 2.4, 2.3 e 2.1. O Teorema 2.1 engloba o Lema 2.4, afinal no Lema 2.4 é feita a escolha particular  $l = r$ . Ambos incluem a estabilidade quadrática, o Lema 2.1, como





**Figura 2.7** Relação de conservadorismo nos resultados apresentados: entendimento por diagrama de Euler.

caso particular. Já o Lema 2.3 é dominado completamente apenas pelo Teorema 2.2, possuindo interseção com os demais, mas sem que se possa garantir dominância para algum deles. No Exemplo 2.1, o Teorema 2.1 com  $l = 4$  envolveu o resultado obtido pelo Lema 2.3, porém não é possível assegurar que sempre haverá um valor do parâmetro  $l$  que possibilite isso.

### 2.3.1 Análise de Complexidade e Comparações Numéricas

Com a inclusão apropriada de uma única variável extra, o Teorema 2.2 representa uma condição de estabilidade menos conservadora, que irá proporcionar resultados melhores ou, na pior hipótese, iguais aos das abordagens discutidas anteriormente. A análise de complexidade comparando as condições discutidas e as condições propostas é mostrada na Tabela 2.1. O custo computacional dessa única variável matricial adicional pode ser desprezado, especialmente na medida em que a quantidade de regras do modelo TS cresce. Com relação ao Lema 2.4 há apenas uma variável matricial e uma LMI, de ordem  $n$ , a mais. Já com relação ao Teorema 2.1, o custo computacional efetivo é bem menor pois, para determinar a escolha ótima do parâmetro  $l$ , é necessário computar um problema com complexidade próxima à do Teorema 2.2 em um total de  $r$  vezes. Ou seja, testando para todas as regras. Em suma, a Tabela 2.1 revela que a condição proposta no Teorema 2.2 tem a mesma ordem de complexidade do que as demais condições, baseadas na função de Lyapunov fuzzy proposta em [THW03], mas irá sempre gerar resultados melhores ou, na pior hipótese, iguais.

O exemplo de análise de estabilidade discutido até aqui é novamente considerado para avaliar a redução no conservadorismo obtido pelo Teorema 2.2. A Figura 2.8 mostra a comparação com a estabilidade quadrática. Nota-se claramente como a inclusão adequada de informação relativa a taxa de variação é uma vantagem com relação a uma abordagem

**Tabela 2.1** Análise de complexidade para as condições LMI baseadas nas funções de Lyapunov quadrática e fuzzy:  $L$  número de linhas;  $V$  número de variáveis escalares;  $n$  ordem do sistemas;  $r$  número de regras. (\*Complexidade para uma dada escolha do parâmetro  $l$ . Se todos os parâmetros forem testados, a complexidade deverá ser multiplicada por  $r$ )

Método	$L$	$V$
Lema 2.1	$n(r + 1)$	$0,5(n^2 + n)$
Lema 2.3	$0,5n(r^2 + 3r)$	$0,5(n^2 + n)r$
Lema 2.4	$0,5n(r^2 + 5r - 2)$	$0,5(n^2 + n)r$
Teorema 2.1 *	$0,5n(r^2 + 5r - 2)$	$0,5(n^2 + n)r$
Teorema 2.2	$0,5n(r^2 + 5r)$	$0,5(n^2 + n)(r + 1)$

que leva em conta apenas a característica multi-modelo do sistema TS.

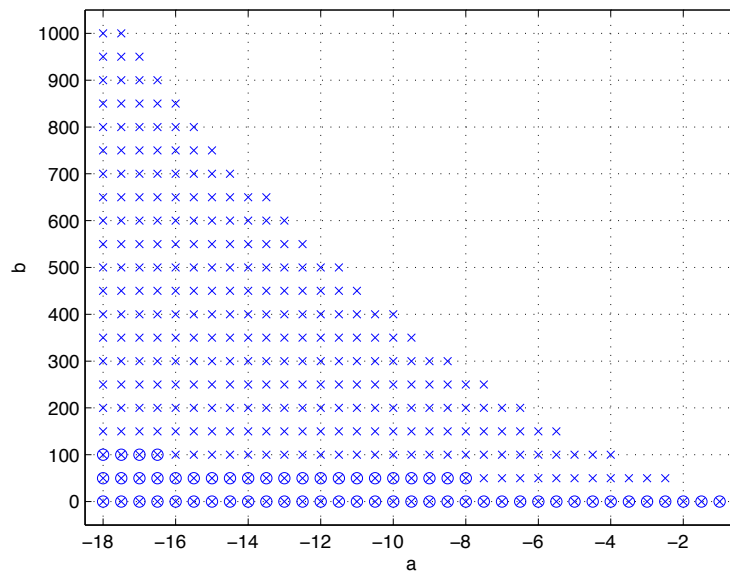
Em seguida, a Figura 2.9 mostra a comparação entre o Teorema 2.2 e o Lema 2.3. Note que embora o Lema 2.3 seja competitivo para valores pequenos de  $a$ , a abordagem proposta é mais vantajosa para todos os valores investigados do parâmetro  $a$ .

Na sequência, a Figura 2.10 mostra a comparação entre Teorema 2.2 e o Lema 2.4, que equivale ao Teorema 2.1 escolhendo  $l = 4$ . Embora o Lema 2.4 seja uma abordagem relaxada com relação ao Lema 2.3 ainda exibe um resultado bastante inferior com relação a metodologia proposta. Para valores grandes do parâmetro  $a$  o resultado é similar ao do Teorema 2.2, porém a medida que  $a$  vai decrescendo a vantagem obtida torna-se nítida.

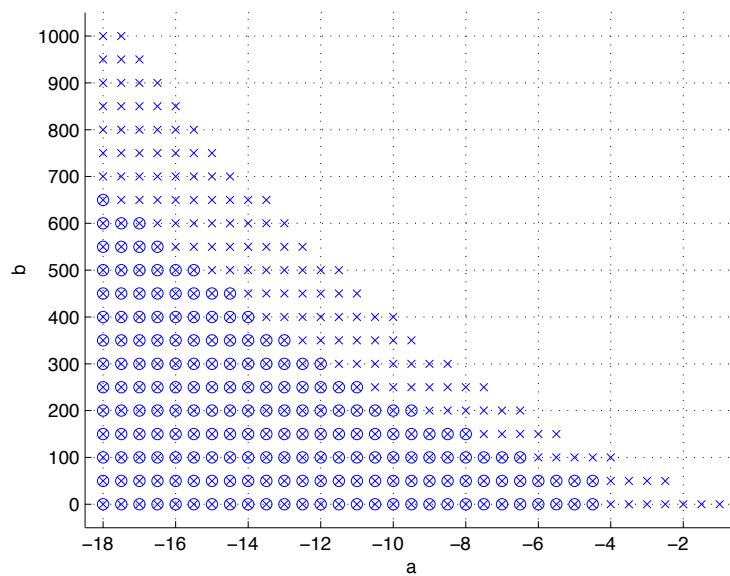
Para ilustrar a comparação entre os Teoremas propostos, escolheu-se o valor  $l = 3$  pois garante o melhor resultado para o Teorema 2.1. Perceba, entretanto, na Figura 2.11 que mesmo escolhendo o valor ótimo para o Teorema 2.1 o resultado do Teorema 2.2 rapidamente o supera, na medida em que o parâmetro  $a$  é reduzido. Outra característica que permite assegurar que o Teorema 2.2 é superior aos demais pode ser notada ao comparar as Figuras 2.10 e 2.11. Não há necessidade de ajuste de parâmetros no Teorema 2.2, que em contrapartida pode ser decisivo no resultado do Teorema 2.1.

Finalmente, os resultados obtidos pelo Teorema 2.2 e pela abordagem apresentada em [RW06] são comparados para esse exemplo numérico, vide Figura 2.12. A função de Lyapunov proposta em [RW06] também é fuzzy, pois é gerada através da interpolação de funções quadráticas usando as funções de pertinência. Contudo essa função tem formato de integral e o cálculo de sua derivada de Lie ao longo das trajetórias do sistema fornece uma expressão que não depende da diferenciação no tempo das funções de pertinência, ao contrário do que ocorre em (2.21). Dessa forma as condições geradas não dependem da escolha de limitantes para as derivadas das funções de pertinência, uma facilidade. Mas eliminar essa informação traz a necessidade do uso de matrizes especiais para compor a função de Lyapunov, o que traz certo conservadorismo. Veja em maiores detalhes dessa função em [RW06] ou também mais a frente neste texto, na Seção 3.2.1.

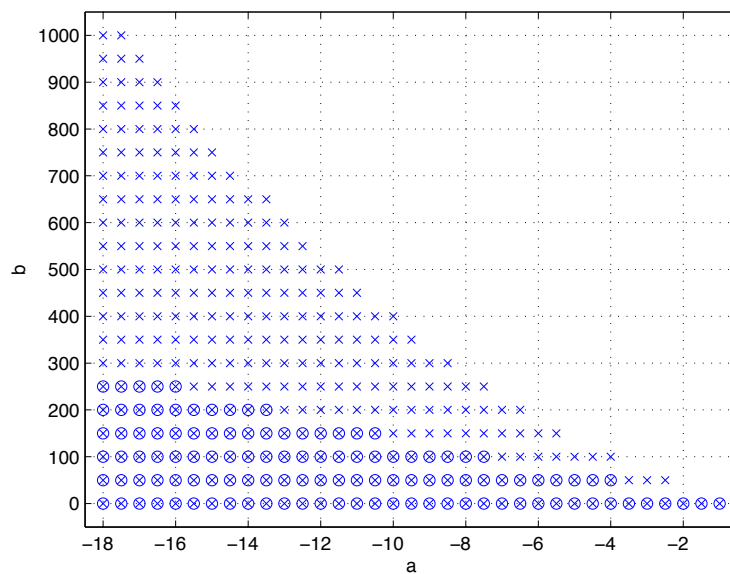
O resultado da Figura 2.12 mostra que embora o Teorema 2.2 seja capaz de determinar estabilidade para uma ampla faixa de parâmetros não se pode dizer que as condições são menos conservadoras, pois há um par de parâmetros  $(-2,50)$  para o qual apenas o Teorema 3 em [RW06] é factível.



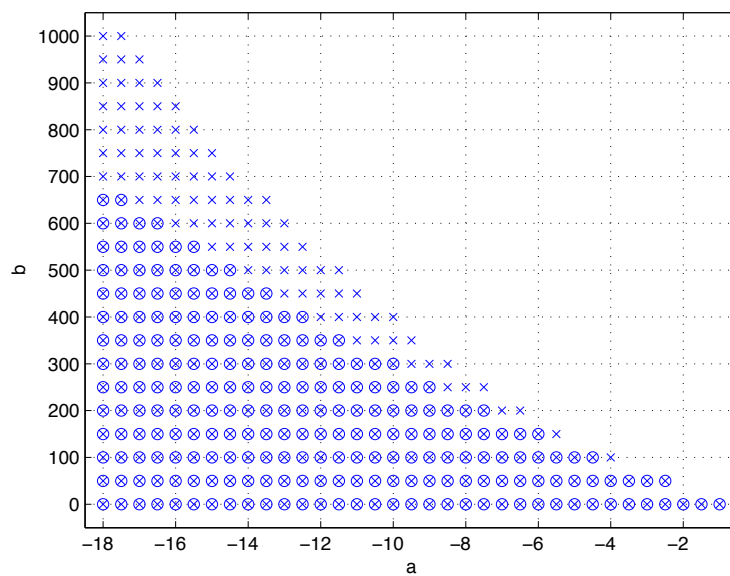
**Figura 2.8** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 (assinalado com  $\times$ ) e por meio da estabilidade quadrática (assinalado com  $\circ$ ).



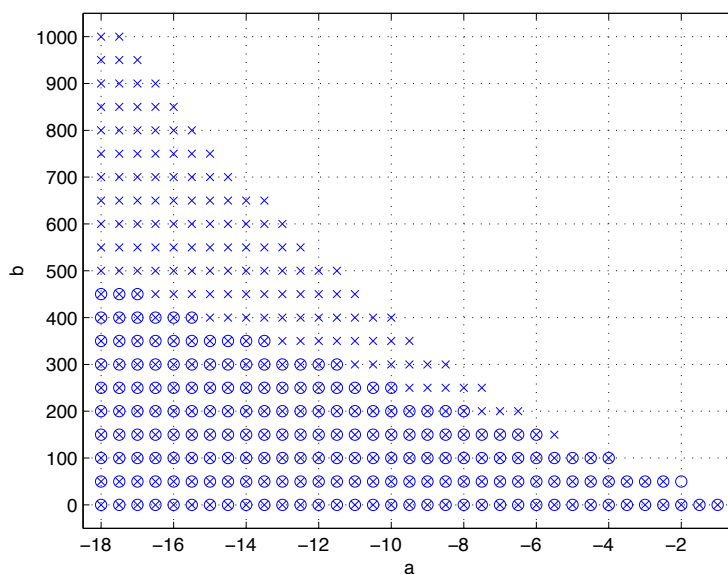
**Figura 2.9** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Lema 2.3 (assinalado com  $\circ$ ).



**Figura 2.10** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Lema 2.4, equivalente ao Teorema 2.1 com  $l = 4$ , (assinalado com  $\circ$ ).



**Figura 2.11** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Teorema 2.1 com  $l = 3$  (assinalado com  $\circ$ ).



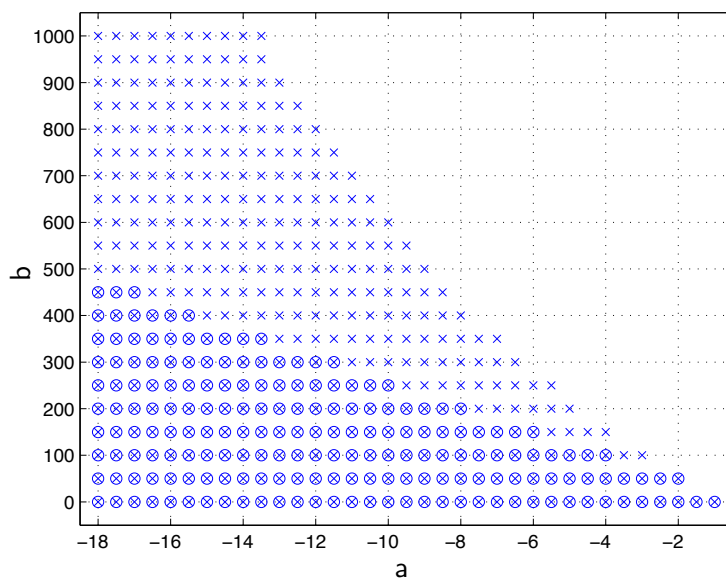
**Figura 2.12** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 com  $\phi_i = 0,85$  (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Teorema 3 em [RW06] (assinalado com  $\circ$ ).

Repetindo o exemplo mas considerando que a mudança nas funções de pertinência é mais lenta, representada por  $\phi_k = 0,5$ , se produz o resultado visto na Figura 2.13. Para essa configuração o Teorema 2.2 consegue envolver todo o resultado do Teorema 3 em [RW06]. Contudo nas Figuras 2.14 e 2.15 mostra-se o resultado do Teorema 2.2 para um limitante maior. Foi adotado  $\phi_i = 12,3$ , indicando que a troca de modelos é bem intensa.

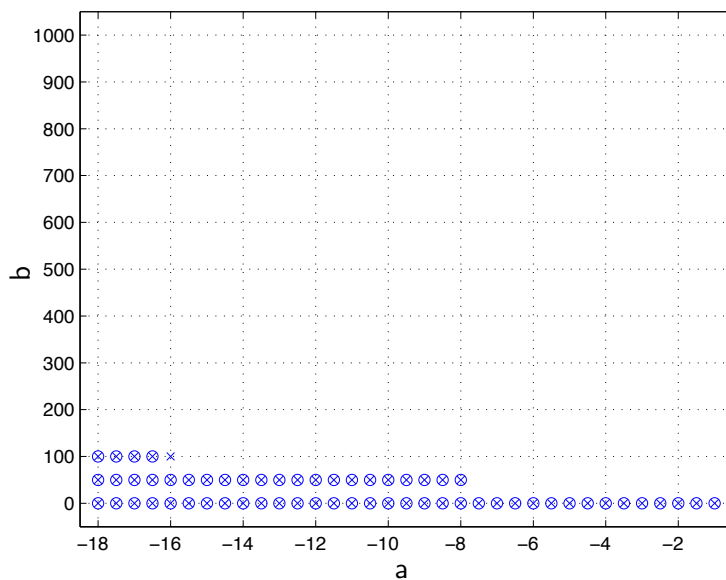
Nesse caso o resultado do Teorema 2.2 tende a repetir a estabilidade quadrática e tem um desempenho inferior a condição proposta em [RW06]. Isso está coerente com a teoria, haja visto que a estabilidade quadrática serve para garantir estabilidade de um sistema TS para qualquer combinação convexa dos submodelos locais. Em última instância isso significa que a estabilidade quadrática é adequada quando se admite até mesmo uma mudança abrupta de um modelo para outro, i.e., uma troca instantânea (derivada indeterminada).

Para valores  $\phi_i > 12,3$  o resultado do Teorema 2.2 permanece sempre igual ao da estabilidade quadrática. Vale destacar que esse fenômeno de achatamento, com o resultado tendendo ao resultado da estabilidade quadrática, observado na Figura 2.14, não é exclusivo do Teorema 2.2. Ele ocorre também para o Teorema 2.1 e os Lemas 2.3 e 2.4, afinal tais condições também dependem dos limitantes superiores da derivada temporal das funções de pertinência.

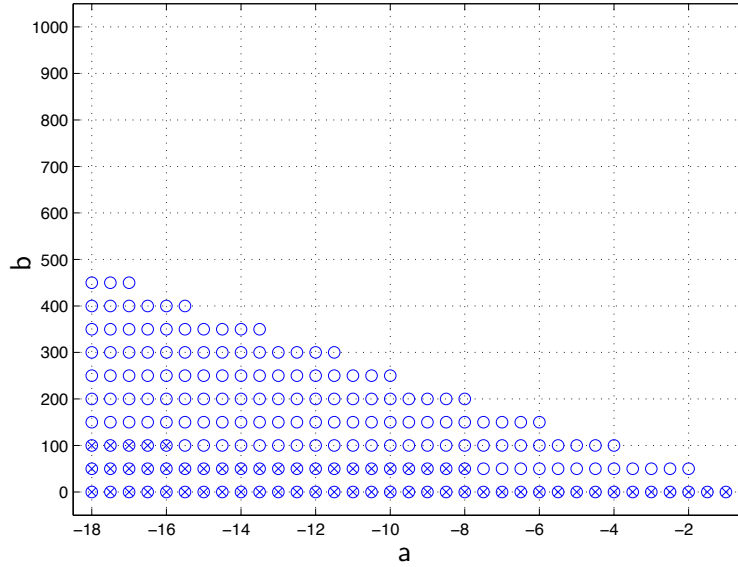
Os resultados apresentados até agora mostram que análise de estabilidade segundo a função de Lyapunov fuzzy em (2.19) é muito influenciada pelos limitantes escolhidos para a derivada temporal das funções de pertinência. Essa característica vai de encontro proposta do trabalho, pois aproxima os resultados do contexto não-linear direto e fuzzy, haja vista a possibilidade de distinguir sistemas mais lentos de sistemas mais rápidos.



**Figura 2.13** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 com  $\phi_i = 0,50$  (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Teorema 3 em [RW06] (assinalado com  $\circ$ ).



**Figura 2.14** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 com  $\phi_i = 12,3$  (assinalado com  $\times$ ) e por meio da estabilidade quadrática (assinalado com  $\circ$ ).



**Figura 2.15** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 com  $\phi_i = 12,3$  (assinalado com  $\times$ ) e por meio do Teorema 3 em [RW06] (assinalado com  $\circ$ ).

Isso não acontece com a estabilidade quadrática ou mesmo para o resultado proposto em [RW06]. Para enfatizar essa observação um outro exemplo numérico é mostrado.

**Exemplo 2.2** (Exemplo 2, Seção V, [TYOW09]). *Considere o seguinte sistema não-linear de segunda ordem*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 - f(t)x_1(t),\end{aligned}\tag{2.40}$$

sendo  $f(t) \in (0, k]$  uma função pelo menos  $\mathcal{C}^1$ .

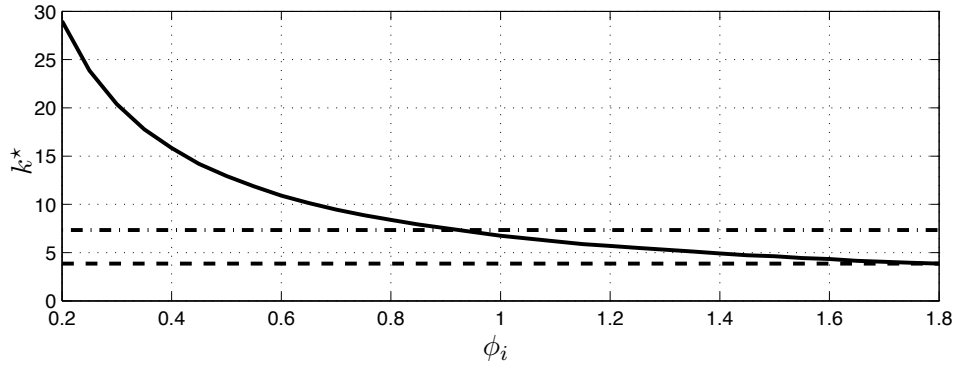
A dinâmica em (2.40) pode ser modelada com exatidão por um modelo TS com duas regras assumindo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - k & -1 \end{bmatrix},$$

e considerando as seguintes funções de pertinência

$$h_1 = \frac{k - f(t)}{k}, \quad h_2 = \frac{f(t)}{k}.$$

Vários valores de  $\phi_i$  no intervalo  $[0,2, 2,0]$  foram considerados como limitantes superiores para a derivada temporal das funções de pertinência. Isso significa que diferentes funções  $f(t)$  foram usadas no modelo não-linear original, indicando que a troca entre regras fica mais rápida. Para cada limitante busca-se determinar o valor máximo do parâmetro  $k$  para o qual o sistema é estável, definido por  $k^*$ .



**Figura 2.16** Análise de estabilidade para diferentes valores do parâmetro  $\phi$ : por meio do Teorema 2.2 (linha cheia); por meio do Teorema 3 em [RW06] (linha traço-ponto); por meio da estabilidade quadrática (linha pontilhada).

Tanto a estabilidade quadrática quanto o Teorema 3 em [RW06] determinam o mesmo valor de  $k^*$  para quaisquer  $\phi_i$ , afinal tais abordagens não dependem da taxa de variação das funções de pertinência. Para a estabilidade quadrática tem-se que  $k^* = 3,82$  e para [RW06] tem-se  $k^* = 7,35$ .

Note que para uma certa faixa de  $\phi_i$  o Teorema 2.2 consegue os melhores resultados. Porém a medida em que  $\phi_i$  cresce o resultado converge para a estabilidade quadrática, sendo superado pelo Teorema 3 em [RW06].

Dessa forma, o resultado proposto no Teorema 2.2 é uma alternativa, de baixo custo computacional, para redução no conservadorismo na análise de estabilidade quadrática de sistemas TS. Caso a informação da derivada temporal das funções de pertinência esteja prontamente disponível o Teorema 2.2 deve ser a escolha, afinal essa informação tem papel relevante no aprimoramento dos resultados, podendo ser mais eficaz que o resultado proposto em [RW06]. No cenário em que os limitantes da variação das funções de pertinência não possam ser determinados facilmente há a possibilidade de uma busca linear procurando maximizar o parâmetro  $\phi_i$  que ainda garante estabilidade ao sistema.

## 2.4 SOBRE A DERIVADA TEMPORAL DAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

Na seção anterior a informação da taxa de variação das funções de pertinência foi incluída nas formulações LMIs por meio de limitantes superiores. Nesta seção este expediente ainda será adotado, contudo busca-se formas menos conservadoras de incluir tal informação, explorando a interdependência que há entre as funções de pertinência. O caso com duas regras e, conseqüentemente, duas funções de pertinência, será tomado como base para iniciar a discussão, mas as idéias podem ser estendidas para mais regras.

Para escrever as condições de estabilidade baseadas na função de Lyapunov fuzzy no formato LMI, veja por exemplo (2.37), adota-se como limitante superior para  $\dot{V}$  uma forma bem simples: todas as derivadas das funções de pertinência assumem o valor máximo em módulo ao mesmo tempo. Dessa forma, cada termo  $\phi_i$  contribui positivamente em  $P_\phi$ . Note, baseado nas propriedades (1.9), que essa contribuição positiva de todos os termos não acontece na prática, o que torna essa abordagem conservadora. Por



exemplo, para duas regras tem-se que

$$\dot{h}_1 = -\dot{h}_2. \quad (2.41)$$

Então caso uma derivada assuma o valor máximo a outra deverá obrigatoriamente assumir o valor mínimo. Mesmo que esses valores sejam iguais em módulo, eles têm sinais diferentes. Portanto o procedimento adotado na seção anterior, embora seja bastante simples e gere um pequeno número de restrições, é uma situação de pior caso, gerando restrições duras no problema de otimização, mais exigentes do que realmente acontece na prática.

Uma forma de abrandar tais restrições consiste em observar o espaço gerado pelas derivadas temporais das funções de pertinência. O entendimento desse espaço será feito na sequência progressivamente. A princípio, será considerado apenas o fato de que as derivadas das funções de pertinência são limitadas em módulo.

No caso de duas regras temos um espaço bidimensional, no qual cada ponto é formado por um par  $(\dot{h}_1, \dot{h}_2)$  que corresponde ao valor da respectiva derivada de cada função de pertinência. Existem limites para o valor das derivadas, um superior e outro inferior, mas que são iguais no caso de duas regras como mostra a equação (2.41). O limite será denotado por  $\phi_1$ . Desta forma, os possíveis valores das derivadas das funções de pertinência ficam confinados em um quadrado de lados  $2\phi_1$ , como demarcado em cor escura na Figura 2.17. Para o caso geral de mais regras os possíveis valores das derivadas ficam confinadas em hiper-retângulos, já que há possibilidade de limitantes distintos. Um hiper-retângulo no espaço  $r$ -dimensional será definido através do produto cartesiano de seus intervalos

$$\Phi := [\phi_1^-, \phi_1^+] \times [\phi_2^-, \phi_2^+] \times \cdots \times [\phi_r^-, \phi_r^+] \subset \mathbb{R}^r \quad (2.42)$$

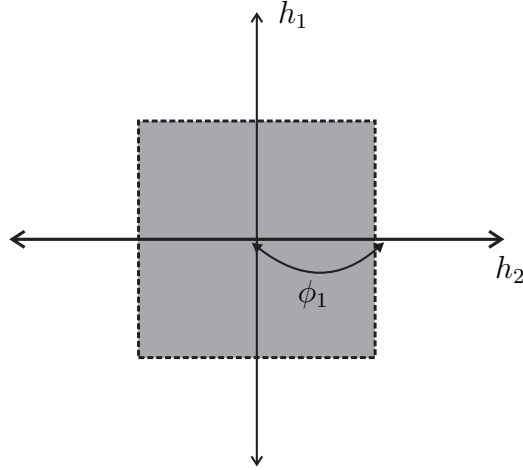
sendo  $\phi_i^-$  e  $\phi_i^+$  os limite inferiores e superiores das derivadas  $\dot{h}_i$ , respectivamente. Um valor para o conjunto das  $r$  derivadas está dentro do hiper-retângulo se  $\phi_i^- < \dot{h}_i < \phi_i^+, \forall i \in \mathcal{R}$ .

Logo a condição (2.37) deveria ser verificada para todos as possíveis combinações das derivadas das funções de pertinência. Como essa região delimitada pelas derivadas é convexa, um quadrado, para duas regras ou um hiper-retângulo, no caso geral, basta verificar se as restrições são atendidas nos vértices. Temos então restrições que aumentam de forma exponencial, afinal para duas regras há quatro vértices; para três regras tem-se oito vértices, e assim por diante. Dessa forma, no caso geral para  $r$  regras o resultado são  $2^r$  restrições. Essa é a idéia presente em [Jad99], cujas condições de estabilidade são apresentadas a seguir.

**Lema 2.5** (Teorema 2 [Jad99]). *Considere que  $\dot{h}_i < \phi_i, \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i$  que satisfaçam*

$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.43)$$

sendo  $P_\phi := \sum_{k=1}^r \pm \phi_k P_k$ ,  $\phi_k$  escalares positivos e  $\pm$  indica que todas as possíveis combinações de  $+(\cdot)$  e  $-(\cdot)$  devem ser consideradas.



**Figura 2.17** Valores das derivadas das funções de pertinência (quadrado escuro): sistema com duas regras.

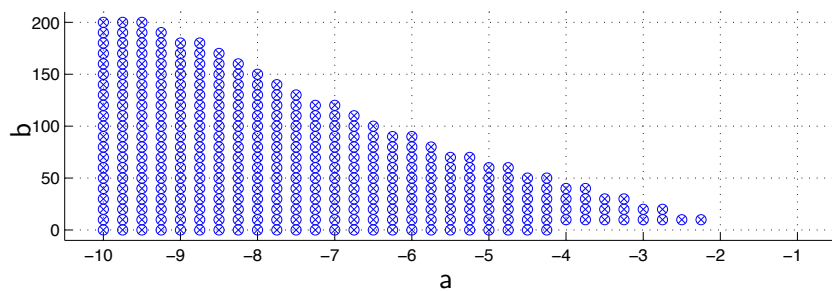
Embora a idéia proposta em [Jad99] seja interessante, já que busca caracterizar melhor o politopo ao qual as derivadas das funções de pertinência pertencem, ela não é menos conservadora do que o Lema 2.3. As restrições formadas para duas regras no Lema 2.5 são do tipo

$$\begin{aligned}
 & +\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, \\
 & -\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, \\
 & +\phi_1 P_1 - \phi_2 P_2 + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, \\
 & -\phi_1 P_1 - \phi_2 P_2 + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0,
 \end{aligned}$$

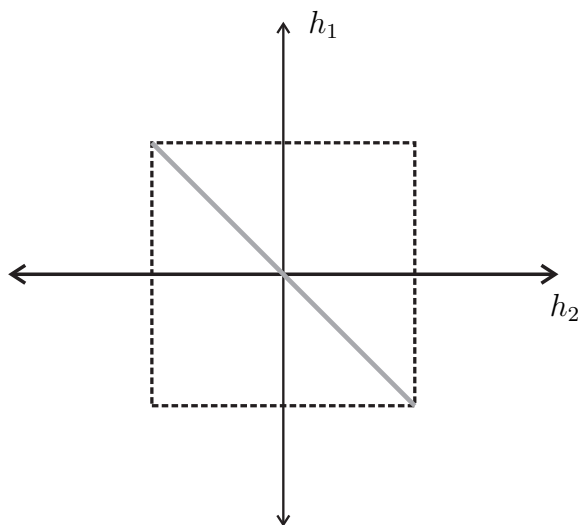
Observando atentamente o Lema 2.3 é possível notar que das restrições acima apenas a restrição do tipo

$$+\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0,$$

está presente. Mas essa condição é de fato a mais restritiva e domina as demais, afinal busca-se garantir que a desigualdade tenha sinal negativo mas os termos  $+\phi_1 P_1 + \phi_2 P_2$  contribuem positivamente, afinal são matrizes definidas positivas multiplicadas por escalares positivos, relembre a discussão sobre o termo  $P_\phi$  na Seção 2.2. Portanto, as outras três restrições estão dominadas e não trazem informação ao problema de otimização, apenas aumentando o custo computacional. Esse raciocínio pode ser estendido para um número qualquer de regras. De fato, repetindo o exemplo numérico da Seção 2.3 para um sistema com quatro regras, podemos ver na comparação das Figuras 2.1 e 2.18 que o resultado obtido com os Lemas 2.3 e 2.5 é exatamente o mesmo.



**Figura 2.18** Análise de estabilidade por meio do Lema 2.5 (assinalado com  $\circ$ ): repetição do resultado do Lema 2.3 (assinalado com  $\times$ ).



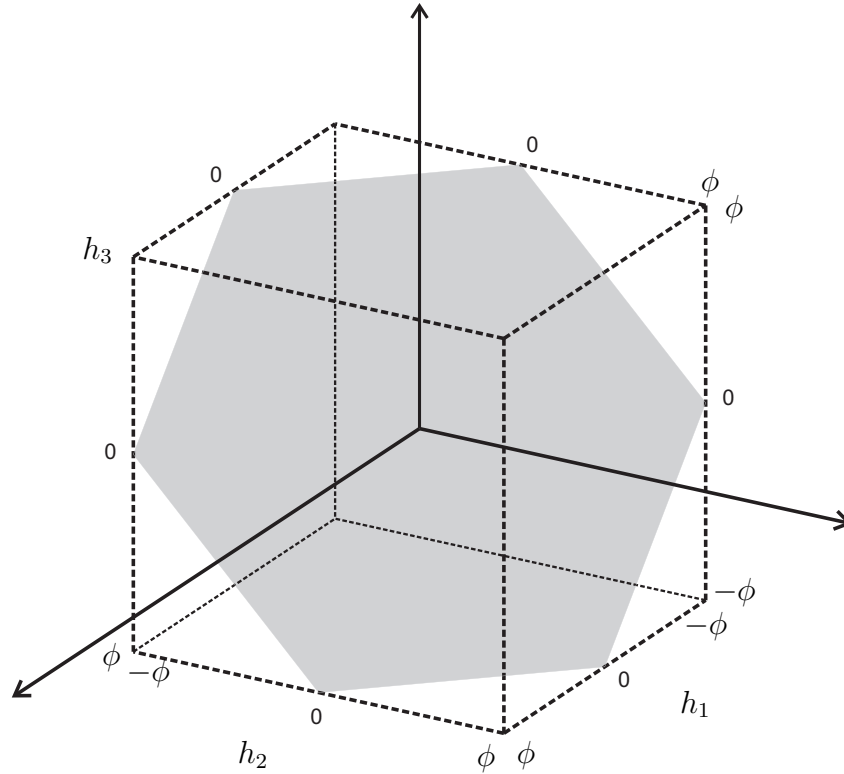
**Figura 2.19** Valores admissíveis das derivadas das funções de pertinência: duas regras.

É preciso levar em consideração que há mais restrições impostas sobre as derivadas das funções de pertinência. Para isso parte da equação (1.9) é rescrita a seguir para conveniência do leitor:

$$\sum_{i=1}^r \dot{h}_i = 0. \quad (2.44)$$

Por meio dessa equação percebe-se que o sub-espço no qual as derivadas das funções de pertinência estão contidas não é dado simplesmente por um hiper-retângulo. Os valores admissíveis das derivadas temporais das funções de pertinência pertencem a uma variedade de dimensão  $r - 1$ , dada pela interseção do hiper-retângulo com o hiper-plano definido pela equação (2.44). No caso mais simples, de duas regras, temos a variedade unidimensional mostrada na Figura 2.19. Para três regras temos a variedade bidimensional mostrada na Figura 2.20, um plano seccionando o cubo em seis vértices.

Portanto as derivadas das funções de pertinência pertencem a uma variedade convexa, já que é dada pela interseção de duas geometrias convexas, hiper-retângulo com hiper-plano, sendo definida através de:



**Figura 2.20** Valores admissíveis das derivadas das funções de pertinência: três regras.

$$\begin{aligned} \Omega &\triangleq \text{co}\{v^1, v^2, \dots, v^m\} \\ &= \{v^j \in \mathbb{R}^r \mid -\phi_k \leq v_k^j \leq \phi_k, c^T v^j = 0\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

sendo  $c^T = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^r$ ,  $k$  como a  $k$ -ésima coordenada de  $v_k^j$  e  $|\dot{h}_k| \leq \phi_k$ . Portanto, é possível incluir a informação das derivadas temporais das funções de pertinência usando um número finito de vetores que indicam os vértices desse politopo, como feito por exemplo em [GC06, CGTV07, CGTV09].

Nesses trabalhos, assim como em [OdOP09], que também adota tal solução, não é mencionado explicitamente como determinar os vértices da variedade poliedral resultante da interseção do hiper-plano com o hiper-retângulo em dimensões quaisquer. Essa tarefa pode ser realizada com auxílio de algoritmos eficientes de geometria computacional. Na sequência apresenta-se um algoritmo muito simples, capaz de determinar de forma exata essa interseção para dimensão  $r$  [LFC09]. Não houve preocupação com a eficiência numérica pois a resolução das LMIs é uma tarefa cuja ordem de grandeza do custo computacional é muito maior comparado com a tarefa de determinar os vértices. Ao leitor interessado em implementações mais eficientes é recomendada a leitura de [LFC09, Gla94].

Dois vértices adjacentes do hiper-retângulo são indicados por  $v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$  e  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ . A aresta que liga ambos é indicada por  $a_{uv}$ . A equação a seguir gera todos os pontos  $a_{uv}(t)$  que pertencem a aresta

$$a_{uv}(t) = v + t(u - v) \quad (2.46)$$

sendo  $t \in [0,1]$ .

Quando o hiper-plano intercepta o hiper-retângulo, um ponto da aresta irá satisfazer a equação equação (2.44), que define o hiper-plano, portanto;

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^r v_i}{\sum_{i=1}^r (u_i - v_i)} \quad (2.47)$$

A substituição de  $t^*$  na equação (2.46) resulta no ponto de interseção entre hiper-plano e hiper-retângulo, ou seja, no vértice do politopo  $\Omega$ . O algoritmo para determinar os vértices é dado a seguir:

---

**Algoritmo 1:** Determinar os vértices do politopo  $\Omega$ , definido na equação (2.45): os pontos de interseção do hiper-plano definido na equação (2.44) com o hiper-retângulo equação (2.42).

---

**Entrada:** O hiper-retângulo  $\Phi$  e o hiper-plano.

**Saída:** Lista  $\mathcal{L}$  contendo os vértices de  $\Omega$

$\mathcal{L} \leftarrow \{ \}$ ;

Calcule as arestas  $A(\Phi)$ ;

**para todo**  $a_{vu} \in A(\Phi)$  **faça**

    calcule  $t^*$  usando a equação (2.47);

**se**  $0 \leq t^* \leq 1$  **então**

        |  $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup a_{vu}(t^*)$

**fim**

**fim**

---

No Algoritmo 1 é necessário computar as arestas do hiper-retângulo. Uma solução simples é fornecida a seguir, que consiste em determinar a distância de cada vértice aos demais e com base nessa informação decidir quais são as arestas desse vértice. Para isso considere a matriz

$$M := \begin{bmatrix} p^1 & p^2 & \dots & \begin{pmatrix} p_1^j \\ p_2^j \\ \vdots \\ p_r^j \end{pmatrix} & \dots & p^{2^r} \end{bmatrix},$$

que acumula as coordenadas dos vértices de  $\Phi$  como vetores coluna, totalizando  $2^r$  colunas.

---

**Algoritmo 2:** Determinar as arestas do hiper-retângulo  $\Phi$  da equação (2.42).

---

**Entrada:** Matriz contendo os vértices  $p^i$  de  $\Phi$ .

**Saída:** Lista  $A(\Phi)$  contendo a arestas  $a_{p^i p^j}$  de  $\Phi$

$A(\Phi) \leftarrow \{ \};$

**para todo**  $p^i \in M$  **faça**

$M \leftarrow M - p^i;$

$n_{min} \leftarrow \infty;$

**para todo**  $p^j \in M$  **faça**

$n \leftarrow \|p^j - p^i\|_2;$

**se**  $n \leq n_{min}$  **então**

$n_{min} \leftarrow n;$

**fim**

**fim**

**para todo**  $p^j \in M$  **faça**

**se**  $n = \|p^j - p^i\|_2$  **então**

$A(\Phi) \leftarrow a_{p^i p^j};$

**fim**

**fim**

**fim**

---

Os Algoritmos 1 e 2 permitem determinar os vértices do politopo  $\Omega$ . Esses vértices podem ser agrupados na forma de vetores coluna em uma matriz apresentada a seguir:

$$V_{\Omega} \triangleq \left[ v^1, v^2, \dots, \begin{pmatrix} v_1^j \\ v_2^j \\ \vdots \\ v_r^j \end{pmatrix}, \dots, v^m \right]. \quad (2.48)$$

O número de linhas dessa matriz é igual ao número de regras  $r$ , sendo esta também a dimensão na qual o politopo se encontra. Já o número de colunas  $m$  varia de acordo com a dimensão  $r$  de maneira exponencial. Obter uma expressão fechada relacionando tais variáveis é uma tarefa difícil. A Tabela 2.2 fornece a relação entre a quantidade de vértices  $m$  de acordo com a dimensão  $r$ . Um fato curioso é que para dimensões ímpares o aumento da quantidade de vértices ocorre em uma taxa mais rápida do que para dimensões pares.

Com base nessa representação é possível adaptar o resultado apresentado em [GC06] para o contexto de sistemas TS. Relembrando aqui a derivada da função de Lyapunov fuzzy (2.19), por conveniência, segue que:

**Tabela 2.2** Quantidade de vértices  $m$  de acordo com a dimensão  $r$  para o politopo  $\Omega$ .

$r$	2	3	4	5	6	7	8
$m$	2	6	6	30	20	140	70

$$\dot{V} = x^T \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) x + x^T \sum_{k=1}^r \dot{h}_k P_k x \quad (2.49)$$

Devido a convexidade de  $h_i$  e  $h_j$  junto ao fato de que  $\dot{h}_k$  pertence ao politopo dado em (2.45) é suficiente para garantir  $\dot{V} < 0$ :

$$\frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) + \sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k P_k < 0, \quad (2.50)$$

para  $i, j \in \mathcal{R}$ ,  $i \leq j$  e  $m \in \mathcal{M}$ .

Com base no exposto, é possível estabelecer o Teorema seguinte:

**Teorema 2.3.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, \forall i \in \mathcal{R}$  que satisfaçam*

$$P_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, i, j \in \mathcal{R}, i \leq j \quad (2.51)$$

sendo  $P_\phi := \sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k P_k$ , tal que a matriz  $V$  é dada pela matriz  $V_\Omega$  na equação (2.48), sendo  $(k, m)$  o elemento da  $k$ -ésima linha e da  $m$ -ésima coluna.

Um fato notável é a estratégia apresentada na Seção 2.3, qual seja, incluir o termo  $\bar{X}$  nas condições de estabilidade, não surtir efeito quando aplicada ao Teorema 2.3 no caso em que todos os termos  $\phi_i$  são iguais. Recordando a matriz  $\bar{X}$  tem-se que

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k X = X \left( \sum_{k=1}^r \dot{h}_k \right) = X \cdot (0) = 0$$

No caso do Teorema 2.2 como todos os termos  $\phi_k$  tinham sinal positivo o termo  $\bar{X}$  era substituído por

$$\sum_{k=1}^r \phi_k X \neq 0$$

conferindo grau de liberdade ao problema para atenuar o efeito do termo  $P_\phi$ , definido positivo. Nos vértices do politopo  $\Omega$  o somatório das componentes deve ser nulo. Logo, para  $\phi_k$  iguais segue que:

$$\sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k X = X \left( \sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k \right) = X \cdot (0) = 0.$$

Esse fato vai de encontro a discussão feita na Seção 2.2, na qual havia a conjectura de que relaxações no termo  $P_\phi$  seriam benéficas. Haja vista que a inclusão das derivadas das funções de pertinência era feita de forma conservadora, com todos termos  $\phi_i$  com sinais positivos. Isso motivou o uso do termo  $\bar{X}$ , como um tentativa de reduzir o quão

positivo era  $P_\phi$ . Contudo ao se incluir de forma adequada as derivadas das funções de pertinência, i.e., explorando a propriedade do politopo  $\Omega$  e preterindo a condição em que todos os escalares  $\phi_i$  são positivos, também é reduzida a positividade do termo  $P_\phi$ . É possível conjecturar que o termo  $\bar{X}$  buscava refletir uma propriedade inerente da relação existente entre as funções  $h_i$ .

**Exemplo 2.3** (Exemplo 1, Seção V.A, [TYOW09]). *Considere o seguinte sistema não-linear*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \text{sen}(x_1(t))\right) x_1(t) - 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \left(\frac{19}{2} - \frac{21}{2} \text{sen}(x_1(t))\right) x_1(t) - 2x_2(t)\end{aligned}\quad (2.52)$$

É possível obter um modelo TS, por meio do método da não-linearidade setorial [TW01], que representa exatamente essa dinâmica:

$$R_1 : \text{ SE } x_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^1 \text{ ENTÃO } \dot{x}(t) = A_1 x(t)$$

$$R_2 : \text{ SE } x_1(t) \text{ é } \mathcal{M}_1^2 \text{ ENTÃO } \dot{x}(t) = A_2 x(t)$$

sendo que

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

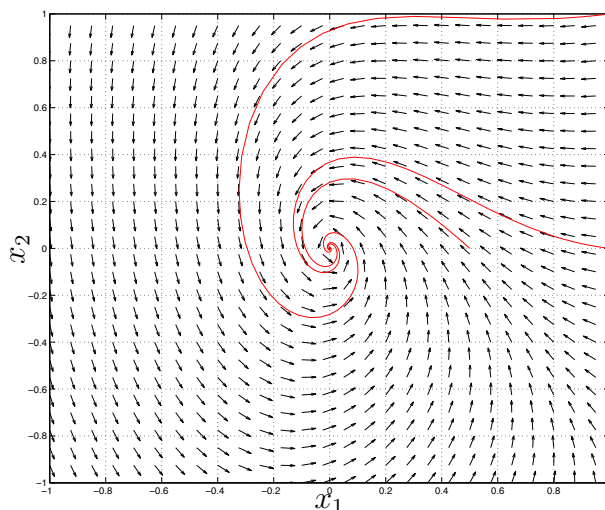
$$h_1(x_1(t)) = \frac{1 + \text{sen}(x_1(t))}{2}, \quad h_2(x_1(t)) = \frac{1 - \text{sen}(x_1(t))}{2} \quad (2.54)$$

$$\dot{h}_1(x_1(t)) = -\cos(x_1(t)) \left( \frac{7}{4} x_1(t) + 2x_2(t) \right) - \frac{3}{4} x_1(t) \text{sen}(x_1(t)) \cos(x_1(t)). \quad (2.55)$$

Embora várias trajetórias convergentes para a origem sejam observadas (veja na Figura 2.21 o retrato de fases indicado por setas e algumas trajetórias em linhas), o que indica estabilidade, nenhuma função quadrática existe para este sistema [THW03, TYOW09].

Todas as condições apresentadas até agora são aplicadas com o intuito de determinar estabilidade para o sistema do Exemplo 2.3. Para cada condição, buscou-se determinar o maior valor do limitante superior da derivada temporal das funções de pertinência, indicado por  $\phi^*$ . Nesse caso o limitante é único por se tratar de um sistema com duas regras. O resultado é mostrado na Tabela 2.3. Dentre as abordagens que não fazem uso da característica politópica das derivadas das funções de pertinência, o Teorema 2.2 consegue obter o melhor resultado, conforme previsto pela discussão da Seção 2.3 e sumarizado na Figura 2.7. Ainda dentro dessa categoria o segundo melhor resultado é obtido pelo





**Figura 2.21** Retrato de fases e algumas trajetórias para o sistema não-linear do Exemplo 2.3.

**Tabela 2.3** Valores máximos do limitante para a derivada temporal das funções de pertinência ( $\phi^*$ ) obtidos segundo as metodologias baseadas na função de Lyapunov fuzzy para o Exemplo 2.3.

Metodologia	Lema 2.3	Lema 2.4	Teorema 2.1 $l=1$	Teorema 2.2	Teorema 2.3
$\phi^*$	0,88	2,58	2,39	2,95	6,81

Teorema 2.1 com  $l = 2$ , que equivale ao Lema 2.4, seguido pelo Teorema 2.1 com  $l = 1$ , ficando por último o Lema 2.3. Superando todas as demais condições, encontra-se o Teorema 2.3, obtendo um limitante duas vezes maior que aquele determinado pelo Teorema 2.2.

Outro aspecto merece destaque no desempenho do Teorema 2.3. Se derivada temporal de  $h_1$ , mostrada na equação (2.55) for avaliada dentro do universo de discurso do modelo, ou seja confinando  $|x_1| \leq \pi/2$  e  $|x_2| \leq \pi/2$ , para uma malha de pontos regularmente espaçados de 0,1, determina-se que  $|h_1| \leq 3,7$ . Dessa forma apenas o Teorema 2.3 consegue garantir estabilidade para todo o universo de discurso. Já as outras metodologias conseguem determinar estabilidade para universos de discurso menores.

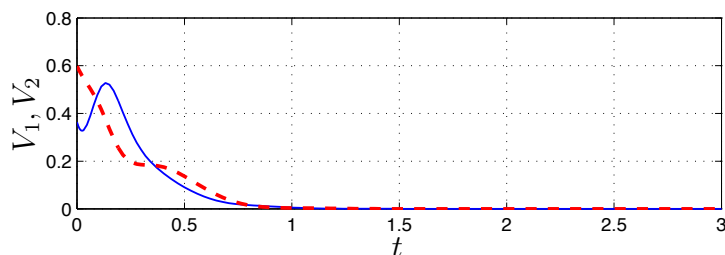
Usando  $\phi_1 = \phi_2 = 4$  no Teorema 2.3 as seguintes matrizes são obtidas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,2408 & 0,0313 \\ 0,0313 & 0,1723 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,4076 & 0,0163 \\ 0,0163 & 0,0963 \end{bmatrix},$$

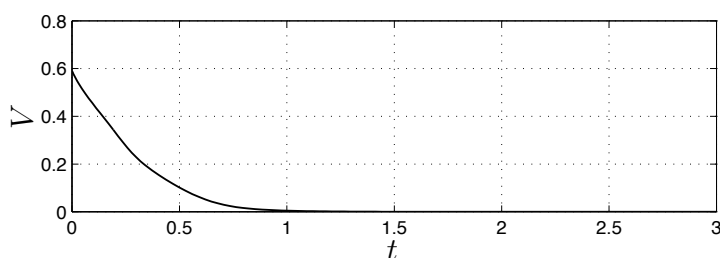
para compor uma função de Lyapunov fuzzy que certifica estabilidade

$$V = x^T \{h_1 P_1 + h_2 P_2\} x = x^T \frac{1}{2} \{P_1 + P_2 + \text{sen}(x_1)(P_1 - P_2)\} x.$$

Um aspecto interessante das funções de Lyapunov fuzzy pode ser evidenciado na



**Figura 2.22** Evolução temporal de cada função quadrática gerada pelo Teorema 2.3 tomada isoladamente: linha contínua  $V_1$ ; linha pontilhada  $V_2$ . Condições iniciais:  $x = [-1, 2, 0, 6]^T$ .



**Figura 2.23** Evolução temporal das funções quadráticas geradas pelo Teorema 2.3 combinadas em uma função de Lyapunov fuzzy. Condições iniciais:  $x = [-1, 2, 0, 6]^T$ . Note o decaimento monotônico.

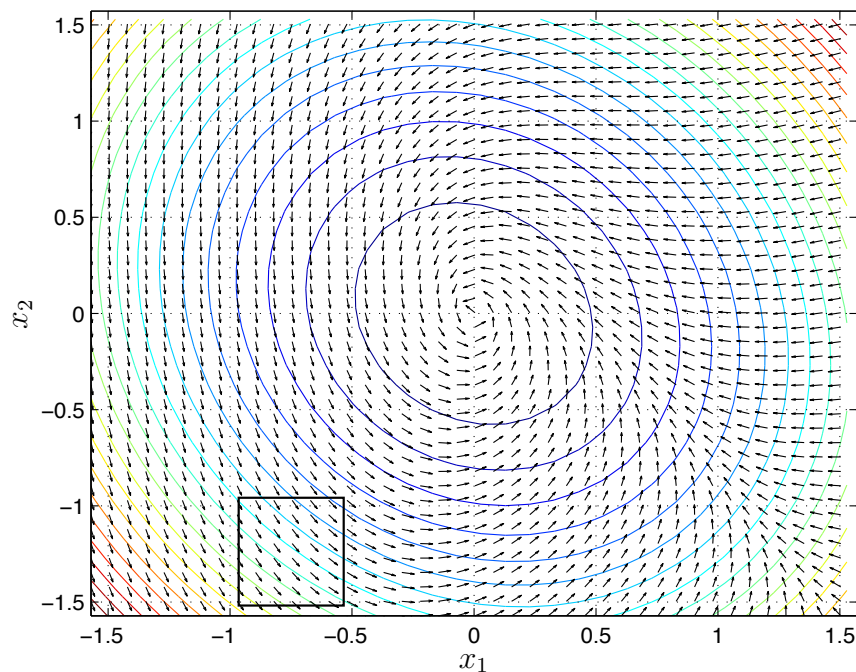
Figura 2.22, na qual a evolução temporal das funções quadráticas  $V_1 = x^T P_1 x$  e  $V_2 = x^T P_2 x$  é mostrada. Tomadas isoladamente, essas funções não precisam ser Lyapunov para o sistema. Note o comportamento oscilatório para as condições iniciais  $x = [-1, 2, 0, 6]^T$ . Já a Figura 2.23 mostra a função fuzzy resultante da combinação das duas funções quadráticas. Ao contrário daquilo mostrado na Figura 2.22, o decaimento é monotônico, requisito para a função ser Lyapunov.

As curvas de nível da função quadrática  $V_1$  e da função de Lyapunov fuzzy são mostradas nas Figuras 2.24 e 2.25, respectivamente. Note que em ambos os casos as curvas de nível são convexas, mas para a função de Lyapunov fuzzy não são elipses. A ponderação pelas funções de pertinência permite modificar a geometria das curvas de nível garantindo que o produto escalar entre o gradiente da função de Lyapunov fuzzy e  $\dot{x}$  seja sempre negativo, i.e., que as trajetórias saiam de um contorno para outro mais interno.

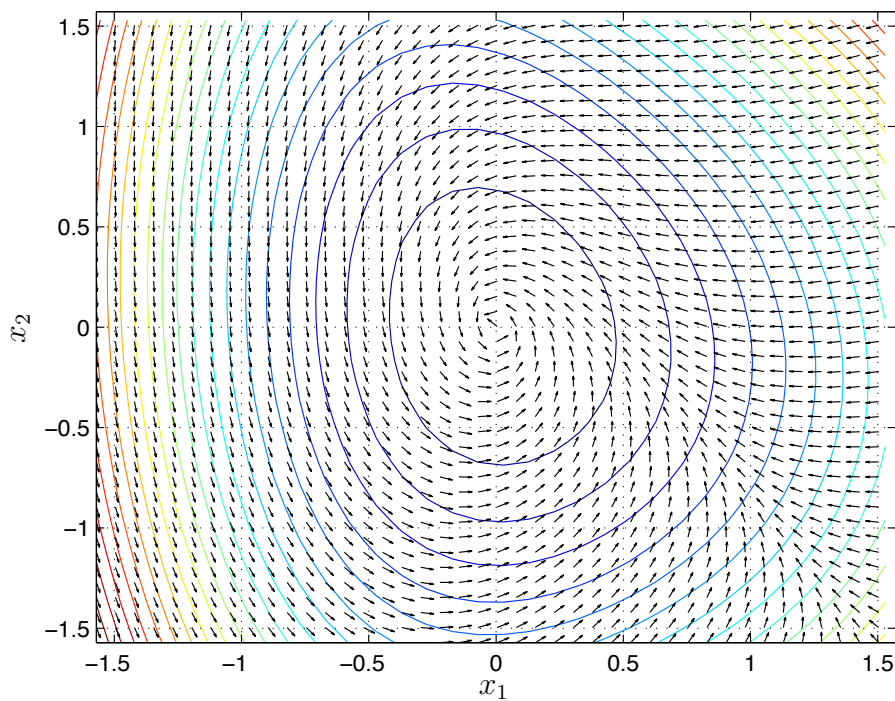
Finalmente, a Figura 2.26 mostra a comparação entre o resultado do Teorema 2.3 com o resultado proporcionado pelo Teorema 2.2. Nota-se, principalmente para valores menores de  $a$ , que a inclusão apropriada das derivadas das funções de pertinência explorando sua geometria é capaz de reduzir o conservadorismo.

## 2.5 SOLUÇÕES NUMÉRICAS

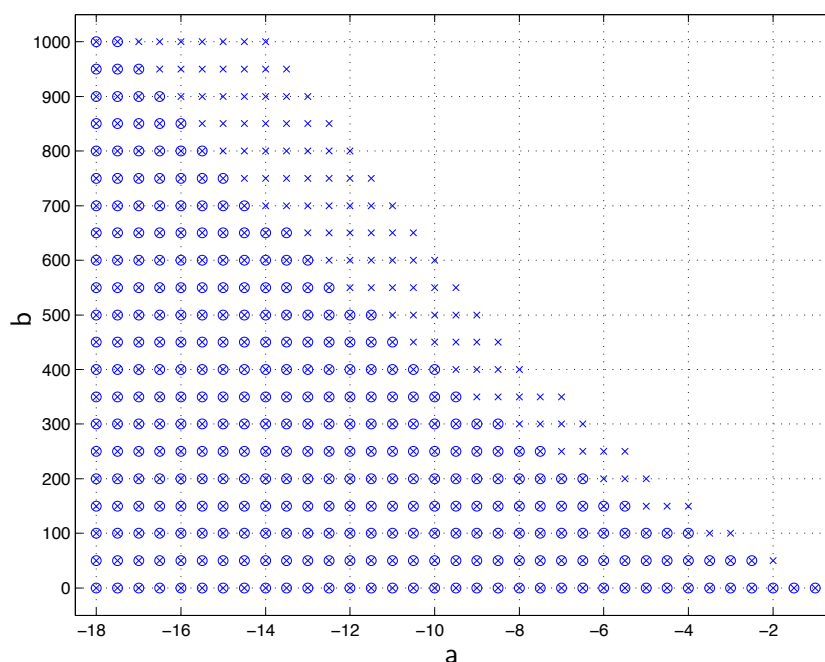
Até o momento investigou-se a influência da função de Lyapunov candidata na análise de estabilidade de sistemas TS. Foi visto que a função de Lyapunov fuzzy é uma escolha adequada haja visto que permite melhor caracterização do comportamento dinâmico dos



**Figura 2.24** Curvas de nível para a função quadrática  $V_1$  isoladamente. Delimitada por um caixa há uma região na qual as trajetórias não convergem para níveis mais internos.



**Figura 2.25** Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. Note que são convexas e as trajetórias partem de um contorno para outro mais interno.



**Figura 2.26** Análise de estabilidade por meio do Teorema 2.2 (assinalado com  $\circ$ ) e do Teorema 2.3 (assinalado com  $\times$ ) usando  $\phi_i = 0,85$ .

sistemas TS. Foram também apresentadas contribuições para reduzir o conservadorismo, atuando principalmente no termo  $P_\phi$ , produzido nas condições LMI devido a derivada temporal das funções de pertinência. Soluções numéricas também foram analisadas para incluir a informação da derivada temporal das funções de pertinência de forma pouco conservadora. Na sequência, serão apresentadas soluções numéricas que servem num contexto geral de análise de estabilidade, visando tanto a redução do conservadorismo quanto do esforço computacional na solução das condições LMI.

A discussão começa com a observação que há um forte acoplamento entre as matrizes da função de Lyapunov,  $P_i$ , e as matrizes que descrevem a dinâmica do sistema TS,  $A_i$ , nas LMIs das seções anteriores. Uma vez que se impõe sinal sobre as matrizes  $P_i$ , além da simetria, há uma redução no grau de liberdade das LMIs que devem ser definidas negativas, veja por exemplo (2.51). A idéia consiste em desacoplar as matrizes  $P_i$  e  $A_j$ , trocando os produtos  $P_i A_j$ <sup>8</sup> por um produto das matrizes  $A_j$  com matrizes de folga livres, para as quais não há imposição de sinal ou de simetria. Existem algumas técnicas numéricas capazes de realizar tal tarefa e será demonstrado a seguir que três delas são equivalentes do ponto de vista de análise de estabilidade de sistemas TS.

### 2.5.1 Termo Nulo

O chamado termo nulo é baseada na seguinte equação, verificada de acordo com a dinâmica do sistema TS (1.12):

<sup>8</sup>E também suas versões transpostas e de índices trocados

$$2 [x^T M_1 + \dot{x}^T M_2] \times [\dot{x} - A(h)x] = 0, \quad (2.56)$$

sendo que  $M_1$  e  $M_2$  são matrizes quaisquer de dimensão apropriada. O segundo termo multiplicado é nulo pois  $\dot{x} = A(h)x$ . Termos similares a esse podem ser vistos no contexto de sistemas incertos [HWS05] ou no contexto de sistemas dinâmicos com retardo no tempo [SPTM08, SPMT08, SPB08].

Na sequência, essa técnica será aplicada aos principais resultados apresentados na seção anterior: Teorema 2.2 e Teorema 2.3. Tais resultados foram elencados pois quando a preocupação é a complexidade computacional o Teorema 2.2 apresenta a melhor relação custo e benefício. Já o Teorema 2.3 apresenta a maior redução no conservadorismo, mas também exige maior demanda computacional que os demais.

O objetivo é garantir que a derivada temporal da função de Lyapunov fuzzy (2.19) é definida negativa:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P(h)x + x^T P(h)\dot{x} + x^T \dot{P}(h)x < 0 \quad (2.57)$$

Expandindo o termo da equação (2.56):

$$x^T M_1 \dot{x} + \dot{x}^T M_1^T x - x^T [M_1 A(h) + A^T(h) M_1^T] x + \dot{x}^T (M_2 + M_2^T) \dot{x} - \dot{x}^T M_2 A(h) x - x^T A^T(h) M_2^T \dot{x} \quad (2.58)$$

somando à equação (2.57) e considerando o vetor aumentado  $\xi^T = [x^T \ \dot{x}^T]$  segue que

$$\dot{V} = \xi^T \Xi(h) \xi \quad (2.59)$$

sendo

$$\Xi(h) := \begin{bmatrix} \dot{P}(h) - M_1 A(h) - A^T(h) M_1^T & \bullet \\ P(h) - M_2 A(h) + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}$$

Note que essa ferramenta permite descrever a derivada temporal da função de Lyapunov sem os produtos entre suas matrizes com as matrizes da dinâmica do sistema. Como o objetivo é garantir que  $\dot{V} < 0$  ainda há um acoplamento fraco, mas comparando com a equação (2.49) nota-se que há mais graus de liberdade.

Nesse ponto o resultado da Seção 2.3 pode ser aplicado. Adicionando a matriz  $\bar{X}$ , definida na equação (2.33), usando limitantes positivos  $\phi_i, i \in \mathcal{R}$  no lugar de  $\dot{h}_i$  e se impondo  $P_i + X > 0, i \in \mathcal{R}$  segue que

$$\dot{V} \leq \xi^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) - M_1 A(h) - A^T(h) M_1^T & \bullet \\ P(h) - M_2 A(h) + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \xi$$

Baseado na convexidade envolvendo  $h$  e os vértices  $A_i$  é suficiente para garantir  $\dot{V} < 0$

$$\bar{\Xi}_i < 0, \quad i \in \mathcal{R}$$

sendo que

$$\bar{\Xi}_i := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Com base nesse resultado o Teorema a seguir pode ser formulado:

**Teorema 2.4.** *Considere que  $\dot{h}_i < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, \forall i \in \mathcal{R}$  e uma matriz simétrica  $X$  qualquer que satisfaçam*

$$P_i + X \geq 0, \forall i \in \mathcal{R} \quad (2.61)$$

$$\bar{\Xi}_i < 0, \forall i \in \mathcal{R} \quad (2.62)$$

sendo  $\bar{\Xi}_i$  definido em (2.60).

Retomando a equação (2.59), o resultado da Seção 2.4 também pode ser aprimorado. Devido a convexidade envolvendo tanto  $h$  quanto  $\dot{h}$ , pois as derivadas pertencem ao politopo  $\Omega$  definido em (2.45), e os vértices  $A_i$ , é suficiente para  $\dot{V} < 0$  que:

$$\Xi_i^m < 0, i \in \mathcal{R}, m \in \mathcal{M}$$

sendo que

$$\Xi_i^m := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k P_k - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Com base nesse resultado o Teorema a seguir pode ser formulado:

**Teorema 2.5.** *Considere que  $\dot{h}_i < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes definidas positivas  $P_i, \forall i \in \mathcal{R}$  que satisfaçam*

$$\Xi_i^m < 0, \forall i \in \mathcal{R}, m \in \mathcal{M} \quad (2.64)$$

sendo  $\Xi_i^m$  definido em (2.63) e  $V_{(k,m)}$  em (2.48).

Antes de aplicar os Teoremas em um exemplo numérico, será demonstrado que a aplicação do chamado termo nulo é equivalente a outras estratégias presentes na literatura, ao menos com o objetivo de análise de estabilidade de sistemas TS.

### 2.5.2 Equivalência com Finsler

Nessa seção será mostrado que para fins de análise de estabilidade a abordagem com termo nulo é equivalente a usar o lema a seguir, atribuído a Finsler [dO04]:

**Lema 2.6** (Lema de Finsler). *Seja  $w \in \mathbb{R}^q$ ,  $Q \in \mathbb{C}^q$  e  $B \in \mathbb{R}^{q \times s}$ , de tal forma que  $\text{posto}(B) < q$ . As seguintes afirmações são verdadeiras*

1.  $w^T Q w < 0, \quad \forall B w = 0, \quad w \neq 0$
2.  $B^{\perp T} Q B^{\perp} < 0$

$$3. \exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B^T B < 0$$

$$4. \exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B^T X^T < 0$$

O Lema de Finsler é usado rotineiramente em muitas aplicações de análise de estabilidade e controle baseados em LMI. A eliminação de variáveis é um objetivo frequente ao aplicá-lo, partindo do item 4 para obter o item 2, removendo a matriz  $X$ , dando origem a um corolário chamado Lema da Eliminação [BEGFB94]. Algumas aplicações da eliminação de variáveis, no contexto de sistemas TS, podem ser vistas em [DGK07, DGK08] cujo objetivo é reduzir a quantidade de LMIs no projeto de controlador. Já o Lema de Finsler é usado em [MOP09] para melhorar a convergência numérica das condições LMI propostas.

Outro objetivo do Lema de Finsler é a inclusão de variáveis de folga que fazem o desacoplamento entre matrizes da dinâmica e da função de Lyapunov, estratégia vantajosa quando funções de Lyapunov parametrizadas, como por exemplo a função de Lyapunov fuzzy equação (2.19), são buscadas. No contexto de sistemas TS discretos veja, [GV04, GKL09]. No caso de estabilidade quadrática não há redução no conservadorismo, como observado em [PG05]. O leitor pode encontrar maiores informações relacionadas ao Lema de Finsler e suas aplicações em [GdOH98, dOS02, dOGB02, dO04].

O Lema de Finsler será aplicado na sequência para a análise de estabilidade de sistemas TS. Assuma que

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{P}(h) & P(h) \\ P(h) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

$$B = [A(h) \quad -I], \quad X = \begin{bmatrix} L \\ G \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

e  $w^T = [x^T \quad \dot{x}^T]$ , resultando nas dimensões  $q = 2n$  e  $s = 2n$ . Em  $X$  na (2.66),  $L$  e  $G$  são quaisquer matrizes não-singulares de dimensão apropriada.

A equação (2.57) revela a seguinte equivalência:

$$\dot{V} = w^T Q w. \quad (2.67)$$

O Lema 2.6, estabelece que  $w^T Q w < 0$  equivale a  $Q + XB + B^T X^T < 0$  (item 1  $\Leftrightarrow$  item 4), uma vez que pela dinâmica do sistema TS:

$$Bw = [A(h) \quad -I] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \dot{x} - A(h)x = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} Q + XB + B^T X^T &= \\ \begin{bmatrix} \dot{P}(h) & P(h) \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -LA(h) & L \\ -GA(h) & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A^T(h)L^T & -A^T(h)G^T \\ L^T & G^T \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} \dot{P}(h) - LA(h) - A^T(h)L^T & \bullet \\ P(h) - GA(h) + L^T & G^T + G \end{bmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

Substituindo  $L$  por  $M_1$  e  $G$  por  $M_2$  a desigualdade acima é a mesma mostrada em (2.59). Portanto a aplicação do Lema de Finsler ou do termo nulo terá os mesmos resultados.

### 2.5.3 Sistemas Descritores: formulação particular

Sistemas descritores consistem na combinação de equações diferenciais e algébricas para modelar sistemas dinâmicos [Lue77, Lue78], principalmente sistemas interconectados como por exemplo circuitos elétricos e sistemas de potência. Representam sistemas mais gerais que modelos em espaço de estados e permitem incluir restrições estáticas. Uma discussão interessante sobre as vantagens de sistemas descritores no contexto de modelos TS é apresentada em [TW01, Seção 10.4].

O sistema TS (1.12) pode ser reescrito na forma descritora a seguir [TOW06]:

$$\bar{E}\dot{\bar{x}} = \bar{A}(h)\bar{x} \quad (2.68)$$

sendo  $\bar{x}^T = [x^T \ x^T]$  e

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(h) = \sum_{i=1}^r h_i \bar{A}_i = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} 0 & A_i \\ I & -I \end{bmatrix}.$$

A função de Lyapunov fuzzy usada em [TOW07] é uma versão modificada de (2.19), adaptada ao contexto descritor, sendo mostrada a seguir:

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E}^T P(h) \bar{x}, \quad (2.69)$$

sendo

$$P(h) := \begin{bmatrix} Y(h) & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} Y_i & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

com  $Y_i > 0$ , que garante a positividade de  $V(\bar{x})$ ;  $P_{21}$  e  $P_{22}$  são matrizes não-singulares quaisquer.

A derivada temporal da função (2.69) é dada segundo

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T \bar{E}^T \dot{P}(h) \bar{x} + \dot{\bar{x}}^T \bar{E}^T P(h) \bar{x} + \bar{x}^T \bar{E}^T P(h) \dot{\bar{x}} \\ &= \bar{x}^T \bar{E}^T \dot{P}(h) \bar{x} + \dot{\bar{x}}^T \bar{E}^T P(h) \bar{x} + \bar{x}^T P^T(h) \bar{E} \dot{\bar{x}} \end{aligned}$$

Para garantir seu sinal basta que

$$\bar{E}^T \dot{P}(h) + \bar{A}^T(h) P(h) + P^T(h) \bar{A}(h) < 0 \quad (2.70)$$

Nesse ponto, não foi possível desacoplar as matrizes  $P_i$  das matrizes  $A_i$ , como fora obtido nas seções anteriores. Mesmo com trocas na configuração das matrizes  $\bar{E}$ ,  $\bar{A}(h)$  e  $P(h)$ , que preservem ao mesmo tempo  $Y_i$  na diagonal de  $P(h)$  e a equivalência entre



as equações dinâmicas (2.68) e (1.12), não é possível chegar aos resultados estabelecidos pelo Lema de Finsler ou pelo termo nulo.

Uma outra alternativa seria considerar  $X := P^{-1}(h)$ . Multiplicando à esquerda por  $X^T$  e à direita por  $X$  tem-se que

$$X^T \bar{E}^T \dot{P}(h)X + X^T \bar{A}^T(h) + \bar{A}(h)X < 0 \quad (2.71)$$

Com essa escolha há uma matriz apropriada  $X$  com a qual é possível desacoplar os termos  $A(h)$  de  $P(h)$ . Contudo, o termo não-linear  $X^T \bar{E}^T \dot{P}(h)X$  surge, inviabilizando a formulação LMI. Uma maneira de contornar essa situação foi proposta em [TOW07] ao modificar a função de Lyapunov fuzzy para a forma:

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E}^T P^{-1}(h)\bar{x}, \quad (2.72)$$

Dessa forma segue que [TOW07, Seção III]:

$$\frac{d}{dt}P^{-1}(h) = -P^{-1}(h)\frac{d}{dt}[P(h)]P^{-1}(h)$$

Partindo dessa função candidata e tomando sua derivada temporal

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \bar{x}^T \bar{E}^T \dot{P}^{-1}(h)\bar{x} + \dot{\bar{x}}^T \bar{E}^T P^{-1}(h)\bar{x} + \bar{x}^T P^{-T}(h)\bar{E}\dot{\bar{x}} \\ &= -\bar{x}^T P^{-T}(h)\bar{E}^T \dot{P}(h)P^{-1}(h)\bar{x} + \dot{\bar{x}}^T \bar{E}^T P^{-1}(h)\bar{x} + \bar{x}^T P^{-T}(h)\bar{E}\dot{\bar{x}} \end{aligned}$$

Para garantir seu sinal basta que

$$-\bar{E}^T P^{-1}(h)\dot{P}(h)P^{-1}(h) + \bar{A}^T(h)P^{-1}(h) + P^{-T}(h)\bar{A}(h) < 0 \quad (2.73)$$

Multiplicando à esquerda por  $P^T(h)$  e à direita por  $P(h)$  tem-se que

$$-\bar{E}^T \dot{P}(h) + P^T(h)\bar{A}^T(h) + \bar{A}(h)P(h) = \quad (2.74)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{Y}(h) + A(h)P_{21} + P_{21}^T A^T(h) & \bullet \\ Y(h) + P_{22}^T A^T(h) - P_{21} & -P_{22}^T - P_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

Portanto com a escolha feita em [TOW07] é possível obter desigualdades nas quais as matrizes  $Y_i$ , que devem ser simétricas e definidas positivas, não são multiplicadas pelas matrizes  $A_i$  da dinâmica do sistema. Na sequência será mostrado que partindo da função a seguir :

$$V(x) = x^T P^{-1}(h)x = x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i P_i \right)^{-1} x, \quad (2.76)$$

similar a proposta em [TOW07], é possível obter a desigualdade (2.75) usando tanto Finsler quanto termo nulo. Sua derivada temporal é dada por:

$$\dot{V}(x) = -x^T P^{-T}(h)\dot{P}(h)P^{-1}(h)x + x^T P^{-T}(h)\dot{x} + \dot{x}^T P^{-1}(h)x \quad (2.77)$$

Tomando o vetor  $\xi^T = [x^T \ \dot{x}^T]$ , a seguinte forma é obtida

$$\dot{V}(x) = \xi^T \Gamma \xi = \xi^T \begin{bmatrix} -P^{-T}(h)\dot{P}(h)P(h)^{-1} & \bullet \\ P^{-1}(h) & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (2.78)$$

O objetivo é garantir que  $\dot{V}(x) < 0$  através da imposição de que  $\Gamma < 0$ . Multiplicando  $\Gamma$  em ambos os lados por

$$\Theta := \begin{bmatrix} P(h) & 0 \\ 0 & P(h) \end{bmatrix},$$

obtem-se  $\bar{\Gamma} = \Theta^T \Gamma \Theta < 0$ . Então é possível afirmar que

$$\xi^T \bar{\Gamma} \xi = \xi^T \begin{bmatrix} -\dot{P}(h) & \bullet \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (2.79)$$

Finalmente, o termo nulo da equação (2.58) pode ser subtraído para obter

$$\xi^T \check{\Gamma} \xi = \xi^T \begin{bmatrix} -\dot{P}(h) + M_1 A(h) + A^T(h) M_1 & \bullet \\ P(h) + M_2 A(h) - M_1^T & -M_2 - M_2^T \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (2.80)$$

Logo é suficiente que  $\check{\Gamma} < 0$ . A observação revela que, salvo termos transpostos, a desigualdade  $\check{\Gamma} < 0$  equivale a (2.75). Partindo da função (2.76) e seguindo os passos mostrados a partir de (2.65) a mesma desigualdade pode ser determinada via Finsler.

Dessa forma, foi mostrado que o resultado apresentado em [TOW07] pode ser recuperado pela estratégia do termo nulo ou por Finsler, mas o contrário não é verdade, permitindo estabelecer a relação

$$\text{Termo Nulo} \Leftrightarrow \text{Finsler} \Rightarrow \text{Descritor}$$

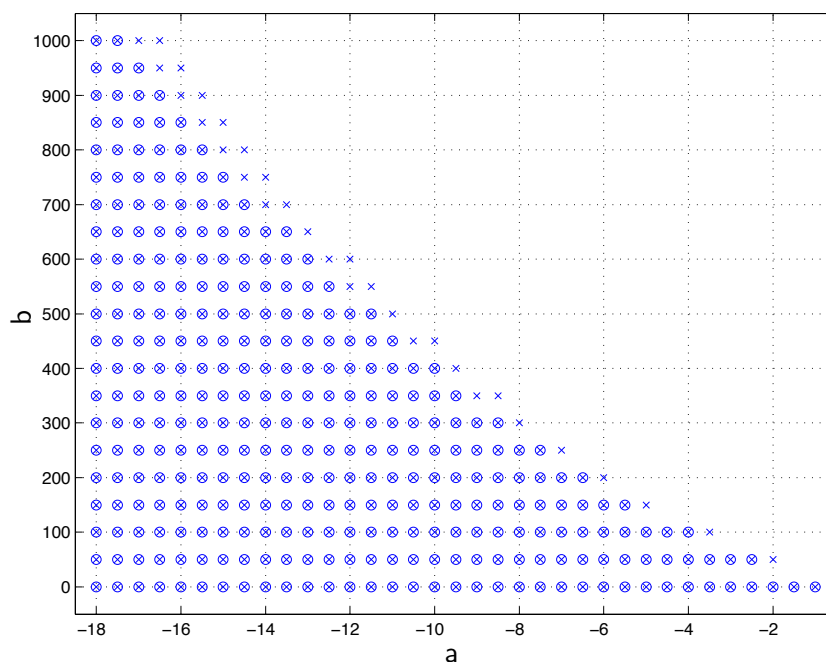
Vale ressaltar que a equivalência entre termo nulo e Finsler é parcial, uma vez que limita-se ao itens 1 e 4 do último.

#### 2.5.4 Comparações Numéricas

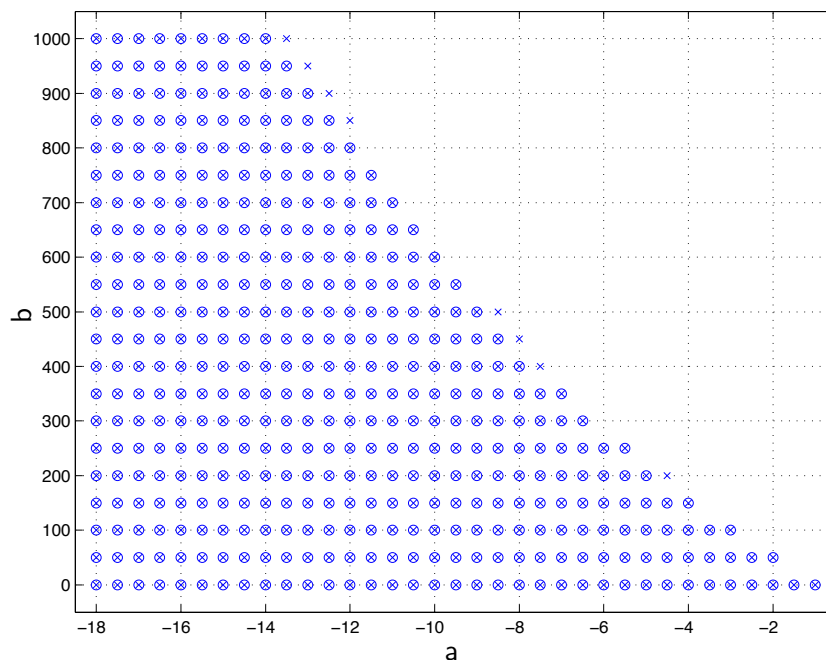
Os Teoremas 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 são aplicados ao Exemplo 2.1 para avaliar a redução de conservadorismo, conforme pode ser visto nas Figuras 2.27 e 2.28. Nota-se que em ambos os casos os Teoremas que são baseados nas técnicas de desacoplamento conseguem determinar estabilidade para uma gama maior de parâmetros quando comparados a suas versões nas quais não foram aplicadas tais soluções numéricas. Contudo, a melhoria nos resultados é pouco expressiva.

Mesmo assim outra figura de mérito para as soluções numéricas apresentadas nessa seção é a complexidade computacional das LMIs, que pode ser medida através do número de linhas e de variáveis escalares. A Tabela 2.4 mostra o número de linhas  $L$  e variáveis  $V$  com base na ordem do sistema  $n$  e no número de regras  $r$ .

A comparação das linhas 1 e 3 da Tabela 2.4 revela a expressiva redução na complexidade numérica. Do ponto de vista das variáveis escalares o Teorema 2.4 introduz  $2n^2$



**Figura 2.27** Efeito do desacoplamento de matrizes: resultado obtido pelo Teorema 2.2, com acoplamento forte, assinalado com  $\circ$ , e o resultado obtido com o Teorema 2.4, acoplamento mais fraco, assinalado com  $\times$ .



**Figura 2.28** Efeito do desacoplamento de matrizes: resultado obtido pelo Teorema 2.3, com acoplamento forte, assinalado com  $\circ$ , e o resultado obtido com o Teorema 2.5, acoplamento mais fraco, assinalado com  $\times$ .

**Tabela 2.4** Complexidade computacional das condições LMI:  $L$  número de linhas;  $V$  número de variáveis;  $n$  ordem do sistemas;  $r$  número de regras.

Método	$L$	$V$
Teorema 2.2	$0,5(r^2 + 5r)n$	$0,5(n^2 + n)(r + 1)$
Teorema 2.3	$0,5(r^2 + r)m.n + rn$	$0,5(n^2 + n)r$
Teorema 2.4	$4rn$	$0,5(n^2 + n)(r + 1) + 2n^2$
Teorema 2.5	$rn(m + 1)$	$0,5(n^2 + n)r + 2n^2$

variáveis adicionais. Contudo, tanto o Teorema 2.2 quanto o Teorema 2.4 têm complexidade  $O(n^2)$ . Do ponto de vista de linhas das LMIs há uma clara distinção: Teorema 2.2 é  $O(r^2)$  enquanto Teorema 2.4 é  $O(r)$ . Isso significa que para sistemas de mesma ordem, mesmo  $n$ , não haverá grande distinção em ambos os casos. Contudo, as condições são bem mais sensíveis com relação ao parâmetro  $r$ , associado ao número de regras no modelo TS, que por sua vez está associado a quantidade de não-linearidades no sistema não-linear original [TW01].

No caso dos Teoremas 2.3 e 2.5 o mesmo fato ocorre. Todavia a interpretação desse resultado é um pouco diferente, haja vista que há uma relação exponencial entre a quantidade de regras  $r$  e a quantidade de colunas  $m$  da matriz  $V_\Omega$  definida em (2.48). A determinação da expressão exata do aumento do número de linhas não é trivial, sendo mostrados na Tabela 2.2 alguns valores. Portanto, mesmo havendo uma redução do número de linhas no Teorema 2.5, ela não é tão significativa devido ao termo  $m$ , de crescimento exponencial.

Uma observação final com relação às soluções numéricas discutidas nessa seção merece destaque. As matrizes de folga  $M_1$  e  $M_2$  podem ser trocadas por conjuntos  $M_1(h)$  e  $M_2(h)$ . Dessa forma haveria um termo nulo modificado

$$2 [x^T M_1(h) + \dot{x}^T M_2(h)] \times [\dot{x} - A(h)x] = 0, \quad (2.81)$$

sendo  $M_1(h) := \sum_{i=1}^r h_i M_1^i$  e  $M_2(h) := \sum_{i=1}^r h_i M_2^i$ .

Essa modificação é capaz de reduzir o conservadorismo ainda mais, contudo nota-se um compromisso pois as condições geradas voltam a ser  $O(r^2)$  devido a restrições adicionais que devem ser impostas. Ao leitor interessado, recomenda-se a leitura de [MPM10], no qual foram publicados a discussão e os resultados sobre as soluções numéricas dessa seção mas com o enfoque nos termos  $M_1(h)$  e  $M_2(h)$ .

## 2.6 NOVAS FUNÇÕES DE LYAPUNOV PARA SISTEMAS TS

Nas seções anteriores, foi dado um grande enfoque para a função de Lyapunov fuzzy proposta em [Jad99]. Foi discutido como aprimorar as condições de análise de estabilidade, atuando principalmente nos chamados termos  $P_\phi$ , seja por meio da inclusão apropriada de uma variável, como feito na Seção 2.3, seja por meio da descrição completa da variedade a qual pertencem as derivadas temporais das funções de pertinência, como descrito

na Seção 2.4. Nessas seções foram estabelecidos novos resultados havendo compromisso entre desempenho e complexidade computacional. Na sequência, soluções numéricas foram apresentadas para reduzir custo computacional, ao mesmo tempo que os resultados numéricos eram aprimorados.

É possível concluir, após a discussão das seções anteriores, que os termos envolvendo as funções de pertinência são capazes de caracterizar melhor o comportamento dos sistemas TS, fornecendo maiores informações sobre variação temporal. Dessa forma, busca-se construir na sequência funções de Lyapunov que sejam capazes de agregar ainda mais informações, na expectativa de reduzir o conservadorismo e a distância que separa os contextos fuzzy e não-linear.

### 2.6.1 Função de Lyapunov Parametrizada pelas Funções de Pertinência e por Vetor de Estados Aumentado

Uma característica comum à grande maioria das funções de Lyapunov disponíveis para sistemas TS é possuírem uma dependência quadrática em relação ao vetor de estados. Além dos casos que foram analisados, isso pode ser verificado na função linear por partes [JRA99]; na função integral [RW06]; na função em tempo discreto baseada na variação de  $k$  passos [KWG08]. Em todos esses casos há um termo matricial no núcleo multiplicado à direita e à esquerda pelo vetor de estados e seu transposto, respectivamente.

Somente recentemente nos trabalhos [TYOW09, TOW09, SA09] surgiram funções de Lyapunov cujos vetores que multiplicam um núcleo matricial não são apenas os estados. No caso da função polinomial proposta em [TYOW09] as entradas desses vetores são monômios em  $x$ . Todavia a análise de estabilidade e o controle baseado em tais funções não recaem em condições LMI, sendo necessário tratá-los com ferramentas computacionais para problemas do tipo SOS, cujo custo computacional é mais elevado.

Propõe-se aqui construir uma função de Lyapunov cujo núcleo matricial seja multiplicado não só pelo vetor de estados como também por termos capazes de enriquecer a caracterização da dinâmica do sistema TS. Mais importante, essa nova função deverá ser no contexto de LMIs. Além disso, a nova função também será dada como uma combinação fuzzy, para aproveitar as características benéficas discutidas nas questões anteriores.

A motivação parte do trabalho [EHPA05] no contexto de sistemas incertos invariantes no tempo, no qual se propõe o uso de um vetor aumentado incluindo os estados e suas derivadas temporais. A função proposta aqui tem a forma a seguir

$$V(x, \dot{x}, h) := [x^T \ \dot{x}^T] \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i}^T \\ P_{2i} & P_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

sendo  $P_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes quaisquer e  $P_{1i}, P_{3i}$  matrizes simétricas de mesma dimensão. Uma consequência desse vetor aumentado é uma parametrização pelas funções de pertinência e combinações polinomiais das mesma. Para verificar isso basta substituir  $\dot{x}$  por  $A(h)x$  resultando em:

$$V(x, \dot{x}, h) = x^T \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i h_j h_k [P_{1i} + A_j^T P_{2i} + P_{2i}^T A_j + A_j^T P_{3i} A_k] x$$

Perceba a maior complexidade dessa função em comparação com (2.19). Aqui a parametrização se dá por meio de um triplo somatório fuzzy. Além disso, o núcleo matricial incluir informação dos vértices  $A_i$ .

A derivada temporal dessa função pode ser escrita de forma compacta como

$$\dot{V}(x, \dot{x}, h) = [x^T \ \dot{x}^T \ \ddot{x}^T] \left( \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} 0 & P_{1i} & P_{2i}^T \\ P_{1i} & P_{2i} + P_{2i}^T & P_{3i} \\ P_{2i} & P_{3i} & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i}^T & 0 \\ P_{2i} & P_{3i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

A derivada temporal das funções de pertinência aparecem duas vezes nesse caso, um aspecto interessante. Naturalmente, como ocorre na função (2.19) e também implicitamente nos termos  $\ddot{x}$ , pois

$$\ddot{x} = \sum_{i=1}^r h_i A_i \dot{x} + \sum_{i=1}^r \dot{h}_i A_i x. \quad (2.84)$$

Para preservar convexidade na formulação das condições de estabilidade é necessário manter os vetores na sua forma aumentada ao trabalhar com a função proposta. Daí se percebe a necessidade das soluções numéricas discutidas na Seção 2.5. No trabalho original [EHPA05] o Lema de Finsler é a escolha. Essa também poderia ser a escolha aqui, contudo, por razões que ficarão mais claras adiante, opta-se pela abordagem do termo nulo, que também é propícia para essa nova função.

O termo mostrado na equação (2.56) será utilizado. Porém somente com ele não é possível estabelecer condições adequadas de estabilidade, sendo definida a igualdade a seguir

$$2 [x^T M_3 + \dot{x}^T M_4 + \ddot{x}^T M_5] \times [\ddot{x} - A(h)\dot{x} - \dot{A}(h)x] = 0 \quad (2.85)$$

O segundo termo dessa multiplicação é nulo segundo a equação (2.84).

Até esse ponto, não há um motivo por preterir o Lema de Finsler em favor da abordagem do termo nulo, sendo equivalentes. Contudo, explorando a abordagem do termo nulo será possível definir o termo seguinte

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \left[ x^T \sum_{i=1}^r \dot{h}_i X_i + \dot{x}^T \sum_{i=1}^r \dot{h}_i Y_i \right] \times [\dot{x} - A(h)x] \\ &= 2 [x^T \dot{X}(h) + \dot{x}^T \dot{Y}(h)] \times [\dot{x} - A(h)x] \end{aligned} \quad (2.86)$$

que será útil na tarefa de redução do conservadorismo.

É suficiente para garantir sinal positivo à nova função definida na equação (2.82) que:

$$\begin{bmatrix} P_{1i} & \bullet \\ P_{2i} & P_{3i} \end{bmatrix} \underset{i \in \mathcal{R}}{>} 0 \quad (2.87)$$

com base na convexidade entre  $h$  e o núcleo matricial. Já a condição de derivada temporal negativa pode ser viabilizada em um primeiro passo com a soma da equação (2.83) com

os termos nulos mostrados nas equações (2.56), (2.85) e (2.86). Em seguida, apoiando-se na convexidade sobre  $h$  e  $\dot{h}$ , limitada ao politopo definido em (2.45), é suficiente garantir

$$\Theta_i + P_i + \sum_{k=1}^r V_{(k,j)} \left( \check{\Theta}_{(k,i)} + \check{P}_k \right) < 0 \quad i \in \mathcal{R}, j \in \mathcal{M} \quad (2.88)$$

sendo

$$\Theta_i := \begin{bmatrix} -M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet & \bullet \\ -A_i^T M_3 - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T - M_4 A_i - A_i^T M_4^T & \bullet \\ M_3^T & M_4^T - M_5 A_i & M_5 + M_5^T \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\check{\Theta}_{(k,i)} := \begin{bmatrix} -M_3 A_k - A_k^T M_3^T - X_k A_i - A_i^T X_k^T & \bullet & \bullet \\ -M_4 A_k - Y_k A_i + X_k^T & Y_k + Y_k^T & \bullet \\ -M_5 A_k & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$P_i := \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet \\ P_{1i} & P_{2i} + P_{2i}^T & \bullet \\ P_{2i} & P_{3i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{P}_i := \begin{bmatrix} P_{1i} & \bullet & \bullet \\ P_{2i} & P_{3i} & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Esse resultado é sintetizado no Teorema seguinte.

**Teorema 2.6.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas  $P_{1i}, P_{3i}, X, Y$  e matrizes quaisquer  $P_{2i}, M_w$ ,  $w = \{1, \dots, 5\}$  que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} P_{1i} & \bullet \\ P_{2i} & P_{3i} \end{bmatrix} > 0 \quad i \in \mathcal{R} \quad (2.92)$$

$$\Theta_i + P_i + \sum_{k=1}^r V_{(k,j)} \left( \check{\Theta}_{(k,i)} + \check{P}_k \right) < 0 \quad i \in \mathcal{R}, j \in \mathcal{M} \quad (2.93)$$

sendo que a matriz  $V$  é definida em (2.48) e os demais termos são definidos nas equações (2.89) a (2.91).

**2.6.1.1 Comparações Numéricas** O Exemplo 2.2 é retomado com o objetivo de comparar diversas funções de Lyapunov disponíveis na Literatura de sistemas TS com a função de Lyapunov fuzzy e com a nova função proposta. Para referência futura os Teoremas 2.5 e 2.6 serão indicados por T25 e T26, respectivamente. O Teorema 2.5 foi escolhido por ser a condição de estabilidade que agrega as soluções numéricas da Seções 2.4 e 2.5, sendo a menos conservadora.

A estabilidade quadrática está representada pelo Teorema 2 em [MOP09], usando como parâmetros  $g = d = 5$ , sendo referido por MOP09. Poderia ser usado o Lema 2.1, uma vez que para sistemas em malha-aberta os termos de relaxação do lado direito não são eficazes, conforme discutido na Seção 2.1. Todavia, usa-se o resultado de [MOP09]

para ilustrar essa conjectura. Como representante das funções de Lyapunov por partes adota-se o Teorema 3.1 de [XSF97], indicado por XFS97. A função de Lyapunov fuzzy integral também é escolhida, RW06, sendo usado o Teorema 3 em [RW06]. Finalmente, o Teorema 1 em [TYOW09] é escolhido para comparação com uma função polinomial, mesmo que esta não possa ser obtida no contexto de LMIs, sendo usado um polinômio de décima ordem em  $x$ , denotado por TYOW09. Com esse grupo de abordagens todas as funções de Lyapunov desenvolvidas para sistemas TS contínuos, que o autor tem conhecimento, são representadas<sup>9</sup>.

A Figura 2.29 mostra o valor máximo obtido para o parâmetro  $k$ , relacionado à função não-linearidade do modelo do Exemplo 2.2, indicado por  $k^*$ , para diferentes valores do limitante da derivada temporal das funções de pertinência,  $\phi_i$ . Como nesse caso o sistema possui duas regras, esse valor, em módulo, é simultaneamente o limitante superior e inferior.

Comparando entre si apenas os resultados que dependem das derivadas das funções de pertinência, nota-se que há uma clara superioridade da nova função proposta, T26 marcado por linha contínua, sobre uma abordagem bem relaxada da função de Lyapunov fuzzy, T25 marcado por linha tracejada. Embora ambos valores sejam próximos a medida que  $\phi_i$  cresce  $k^*$  ainda é cerca de 12% maior com T26 em relação a T25. Nota-se que a redução no conservadorismo é bastante significativa para limitantes menores das derivadas temporais. Para  $\phi_i = 0,8$  ocorre a maior diferença entre ambos, com o valor  $k^*$  encontrado pela abordagem T26 chegando a ser 50% maior do que o valor determinado com T25. É possível concluir que a nova função proposta é menos conservadora sendo capaz de caracterizar melhor dinâmicas tanto lentas quanto rápidas.

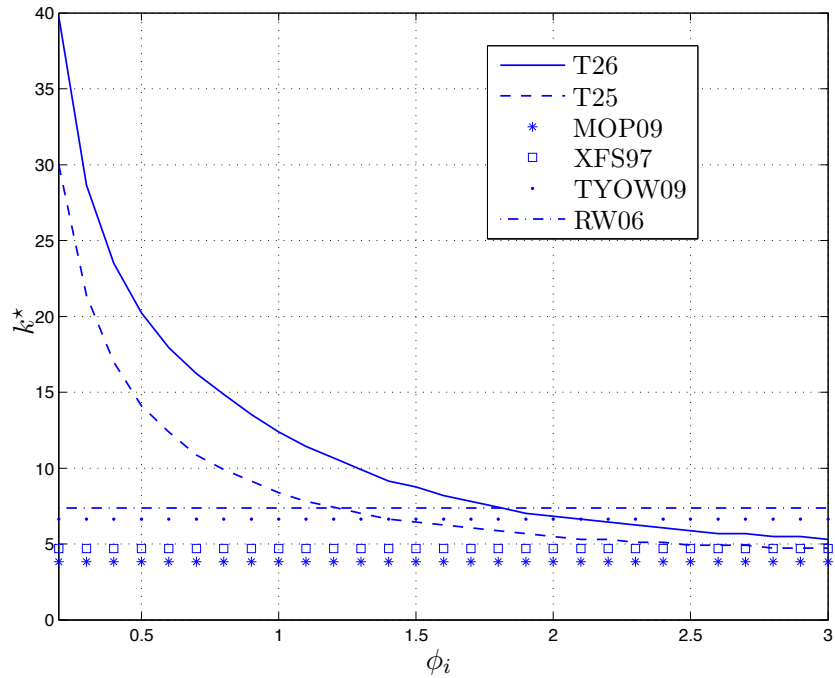
Quando comparado aos resultados que independem dos limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência a nova função ainda é bastante competitiva. Na faixa em que apresenta pior desempenho,  $\phi_i > 1,9$ , no pior dos casos, o resultado obtido com T26 encontra  $k^*$  que equivale a 72% e a 80% dos valores obtidos com RW06 e TYOW09, respectivamente. Já na faixa onde o desempenho de T26 é superior o parâmetro  $k^*$  determinado chega a ser 540% e 600% maior do que RW06 e TYOW09, respectivamente. Com relação a estabilidade quadrática e a função de Lyapunov por partes é possível garantir que tanto T25 quanto T26 são melhores. Mesmo para valores maiores de  $\phi_i$  do que mostrados na Figura 2.29, T25 converge para XFS97, enquanto T26 ainda permanece um pouco maior. Os valores extremos da Figura 2.29 são mostrados na Tabela 2.5.

### 2.6.2 Função de Lyapunov Parametrizada pelas Funções de Pertinência e suas Primeiras Derivadas Temporais

Há algumas décadas, funções de Lyapunov parametrizadas têm sido muito utilizadas para análise de estabilidade ou controle de vários tipos de sistemas, merecendo destaque trabalhos pioneiros como [GAC96, FAG96, FLA96]. A função de Lyapunov fuzzy proposta em [Jad99], bem como a função aumentada (2.82), proposta na seção anterior, também fazem parte dessa classe. Nesse caso a parametrização se dá com relação às funções de pertinência.

<sup>9</sup>A função baseada na variação de  $k$  passos propostas em [KWG08] é dedicada à sistemas discretos.





**Figura 2.29** Comparação entre diversas funções: nova função proposta T26; funções de Lyapunov fuzzy dependente, T25, e independente, RW06, de limitantes; função de Lyapunov por partes XFS97; estabilidade quadrática MOP09; e função de Lyapunov polinomial TYOW09.

**Tabela 2.5** Valores máximos do parâmetro  $k$  para diferentes limitantes  $\phi_i$ .

Métodos	$\phi_i = 3,0$	$\phi_i = 0,2$
MOP09	3,82	3,82
XFS97	4,70	4,70
TYOW	6,64	6,64
RW06	7,37	7,37
T25	4,73	29,9
T26	5,33	39,8

Haja vista a relevância da informação contida nas funções de pertinência para o modelo TS global, já que fazem um papel fundamental na interpolação dos modelos lineares locais, uma conjectura plausível é de que uma melhor caracterização da variação das mesmas pode levar a uma redução no conservadorismo. Portanto a função de Lyapunov a seguir é proposta, parametrizada não só pelas funções de pertinência mas também por suas derivadas temporais

$$V(x, h, \dot{h}) = x^T \left[ P(h) + \bar{P}(\dot{h}) \right] x \quad (2.94)$$

sendo

$$P(h) := \sum_{i=1}^r h_i P_i, \quad \bar{P}(\dot{h}) := \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \bar{P}_i,$$

cuja derivada temporal pode ser determinada como

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) = x^T \left[ \dot{P}(h) + \dot{\bar{P}}(\dot{h}) \right] x + \dot{x}^T \left[ P(h) + \bar{P}(\dot{h}) \right] x + x^T \left[ P(h) + \bar{P}(\dot{h}) \right] \dot{x} \quad (2.95)$$

O termo  $\dot{\bar{P}}(\dot{h})$  na equação (2.95) gera informação relativa a derivada temporal segunda das funções de pertinência,  $\ddot{h}_i$ . Por isso se faz necessária a seguinte consideração.

**Proposição 2.2.** *As funções de pertinência são tais que  $h_i \in \mathcal{C}^2$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ .*

Uma vez que as funções  $h_i$  satisfazem (1.9), a mesma propriedade do somatório da primeira derivada temporal das funções de pertinência é válida para a segunda derivada:

$$\sum_{i=1}^r \ddot{h}_i = 0 \quad (2.96)$$

Essa propriedade poderá ser explorada na sequência com as soluções propostas neste trabalho. Além disso, as segundas derivadas também serão limitadas em módulo. Por isso os conjuntos de escalares  $\phi_i^1$  e  $\phi_i^2$  serão, respectivamente, limitantes em módulo para  $\dot{h}_i$  e  $\ddot{h}_i$ .

Como tem sido o padrão ao longo deste trabalho, em primeiro lugar serão desenvolvidas condições de estabilidade que não levam em consideração a característica politópica da variedade definida pelas derivadas temporais das funções de pertinência. Embora seja uma abordagem mais conservadora, privilegia o custo computacional linear ou quadrático. Em seguida, condições análogas são obtidas, enfatizando redução no conservadorismo porém preterindo a preocupação com o custo computacional.

A derivada temporal da função (2.94) ao longo das trajetórias descritas pelo sistema TS é

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, h, \dot{h}) &= x^T \left[ \dot{P}(h) + \dot{\bar{P}}(\dot{h}) + A^T(h)P(h) + A^T(h)\bar{P}(\dot{h}) + P(h)A(h) + \bar{P}(\dot{h})A(h) \right] x \\ &= x^T \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h})x \end{aligned} \quad (2.97)$$

Para garantir estabilidade em Lyapunov basta que

$$P(h) + \bar{P}(\dot{h}) > 0, \quad \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) < 0 \quad (2.98)$$

Usando um termo como definido na equação (2.33) e o fato  $|\dot{h}_i| \leq \phi_i^1$  segue que

$$P(h) + \bar{P}(\dot{h}) = P(h) + \sum_{i=1}^r \dot{h}_i \bar{P}_i \quad (2.99)$$

$$= P(h) + \sum_{i=1}^r \dot{h}_i (\bar{P}_i + Y) \quad (2.100)$$

$$\geq P(h) - \sum_{i=1}^r \phi_i^1 (\bar{P}_i + Y) \quad (2.101)$$

caso sejam impostas as restrições

$$\bar{P}_i + Y > 0, \quad i \in \mathcal{R} \quad (2.102)$$

Com base na convexidade em  $P(h)$  é suficiente para ter  $P(h) + \bar{P}(\dot{h}) > 0$  que

$$P_i - \sum_{k=1}^r \phi_k^1 (\bar{P}_k + Y) = P_i - \bar{P}_\phi^1 > 0, \quad i \in \mathcal{R} \quad (2.103)$$

Voltando a atenção para a condição sobre a derivada da função, com base na desigualdade (2.102), na equação (2.33) e no fato de que  $|\dot{h}_k| \leq \phi_k^2$  é possível garantir que

$$\begin{aligned} \Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) &= \sum_{k=1}^r \ddot{h}_k \bar{P}_k + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h) \bar{P}_k + \bar{P}_k A(h)] + A^T(h) P(h) + P(h) A(h) \\ &= \sum_{k=1}^r \ddot{h}_k (\bar{P}_k + Y) + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h) \bar{P}_k + \bar{P}_k A(h) + X] \\ &\quad + A^T(h) P(h) + P(h) A(h) \\ &\leq \sum_{k=1}^r \phi_k^2 (\bar{P}_k + Y) + \sum_{k=1}^r \dot{h}_k [P_k + A^T(h) \bar{P}_k + \bar{P}_k A(h) + X] \\ &\quad + A^T(h) P(h) + P(h) A(h) = \bar{\Theta}(h, \dot{h}, \ddot{h}) \end{aligned} \quad (2.104)$$

Ao se impor

$$P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X > 0, \quad i, k \in \mathcal{R}, \quad (2.105)$$

combinado ao fato que  $|\dot{h}_i| \leq \phi_i^1$  tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(h, \dot{h}, \ddot{h}) &\leq \sum_{k=1}^r \phi_k^2 (\bar{P}_k + Y) + \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k + A^T(h)\bar{P}_k + \bar{P}_k A(h) + X] \\ &\quad + A^T(h)P(h) + P(h)A(h) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^r \phi_k^2 (\bar{P}_k + Y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X] + A_i^T P_j + P_j A_i \right\} \\ &= \bar{P}_\phi^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \{ \Theta_i + A_i^T P_j + P_j A_i \} \end{aligned} \quad (2.107)$$

sendo  $\Theta_i := \sum_{k=1}^r \phi_k^1 (P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X)$  e  $\bar{P}_\phi^2 := \sum_{k=1}^r \phi_k^2 (\bar{P}_k + Y)$ .

Portanto, para assegurar que  $\Theta(h, \dot{h}, \ddot{h}) < 0$  é suficiente que

$$\bar{P}_\phi^2 + \frac{1}{2} (\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0 \quad (2.108)$$

O Teorema a seguir consiste em uma maneira de verificar estabilidade para sistemas TS por meio de LMIs com base na nova função proposta.

**Teorema 2.7.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i^1$ ,  $|\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas  $P_i, \bar{P}_i, X$  e  $Y$  que satisfaçam*

$$\bar{P}_i + Y > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad (2.109)$$

$$P_i - \bar{P}_\phi^1 > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad (2.110)$$

$$P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X > 0, \quad i, k \in \mathcal{R}, \quad (2.111)$$

$$\bar{P}_\phi^2 + \frac{1}{2} (\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i \leq j \quad (2.112)$$

sendo

$$P_\phi^w := \sum_{k=1}^r \phi_k^w (\bar{P}_k + Y), \quad w = 1, 2, \quad \Theta_i := \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X]$$

**Corolário 2.5.** *O Teorema 2.2 é um caso particular do Teorema 2.7.*

*Demonstração.* Ao fazer  $Y = 0$  e  $\bar{P}_i = 0, \forall i \in \mathcal{R}$  as desigualdades do Teorema 2.7 são reduzidas às mesmas do Teorema 2.2. ■

Antes de analisar os resultados obtidos com a nova função proposta é possível utilizar alguma das soluções numéricas apresentadas na Seção 2.5, seja para aprimorar os resultados ou simplesmente reduzir o custo computacional.

A derivada temporal da função (2.94) pode ser reescrita da forma a seguir, ficando em conformidade com a abordagem do termo nulo:

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) = \xi^T \begin{bmatrix} \dot{P}(h) + \dot{\bar{P}}(\dot{h}) + A^T(h)\bar{P}(\dot{h}) + \bar{P}(\dot{h})A(h) & \bullet \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (2.113)$$

sendo  $\xi^T = [x^T \ \dot{x}^T]$ .

Considere as desigualdades (2.102) e (2.103). Assumindo que ambas são verdadeiras garante-se que  $P(h) + \bar{P}(\dot{h}) > 0$ . Usando termos como os da equação (2.33) ainda garante-se que

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) \leq \xi^T \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k^2(\bar{P}_k + Y) + \dot{P}(h) + A^T(h)\bar{P}(\dot{h}) + \bar{P}(\dot{h})A(h) & \bullet \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (2.114)$$

Com base na desigualdade (2.105) segue que

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) \leq \xi^T \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k^2(\bar{P}_k + Y) + \sum_{k=1}^r \phi_k^1(P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X) & \bullet \\ P_i & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (2.115)$$

Finalmente, com a adição do termo nulo da equação (2.56) a desigualdade permanece inalterada

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) \leq \xi^T \sum_{i=1}^r h_i \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^2 + \Theta_i - M_1 A_i - A_i^T M_1 & \bullet \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \xi \quad (2.116)$$

sendo

$$\bar{P}_\phi^2 := \sum_{k=1}^r \phi_k^2(\bar{P}_k + Y), \quad \Theta_i := \sum_{k=1}^r \phi_k^1(P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X)$$

Essa condição de estabilidade é enunciada pelo Teorema a seguir:

**Teorema 2.8.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i^1, |\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas  $P_i, \bar{P}_i, X, Y$  e matrizes quaisquer  $M_1, M_2$  que satisfaçam*

$$\bar{P}_i + Y > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad (2.117)$$

$$P_i - \bar{P}_\phi^1 > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad (2.118)$$

$$P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X > 0, \quad i, k \in \mathcal{R}, \quad (2.119)$$

$$\bar{\Xi}_i < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad (2.120)$$

sendo

$$\bar{P}_\phi^w := \sum_{k=1}^r \phi_k^w (\bar{P}_k + Y), \quad w = 1, 2, \quad \Theta_i := \sum_{k=1}^r \phi_k^1 [P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i + X]$$

$$\bar{\Xi}_i := \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^2 + \Theta_i - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}$$

**Corolário 2.6.** *O Teorema 2.4 é um caso particular do Teorema 2.8.*

*Demonstração.* Ao fazer  $Y = 0$  e  $\bar{P}_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$  as desigualdades do Teorema 2.8 são reduzidas às mesmas do Teorema 2.4.  $\blacksquare$

Vale ressaltar que o efeito do desacoplamento no caso da nova função proposta é diferente daquele que ocorria na função de Lyapunov fuzzy, no qual não havia produtos entre matrizes da função de Lyapunov e da dinâmica do sistema. Neste caso o acoplamento é parcial, pois ainda há a multiplicação dos termos  $A_i \bar{P}_k$ , sendo eliminados apenas termos  $A_i P_k$ .

A outra alternativa para garantir que as condições de estabilidade em (2.98) sejam satisfeitas é considerar os politopos aos quais pertencem as sucessivas derivadas temporais das funções de pertinência. A segunda derivada temporal de cada função de pertinência também é restringida por dois conjuntos de equações: em módulo, gerando um hiper-retângulo no espaço  $\ddot{h}$ ; e pela equação (2.96), que define o mesmo hiper-plano que havia no caso da primeira derivada. Portanto, a variedade de dimensão  $r-1$  é o mesmo politopo que havia no espaço  $\dot{h}$ , sendo apenas que o tamanho é modificado, devido a mudança de limitantes sobre as derivadas.

Para garantir  $P(h) + \bar{P}(\dot{h}) > 0$  é suficiente explorar a convexidade sobre  $h$  e o fato de que  $\dot{h}$  está confinado a variedade  $\Omega$  definida em (2.45). No caso, deve-se ter em mente que os limites do hiper-retângulo devem ser ajustados, trocando  $\phi_k$  por  $\phi_k^1$ . Dessa forma, segue que

$$P_i + \sum_{k=1}^r V_{(k,m)} \phi_k^1 \bar{P}_k > 0, \quad i \in \mathcal{R}, m \in \mathcal{M} \quad (2.121)$$

sendo que matriz  $V$  agrupa na forma de vetores coluna os vértices do politopo  $\Omega$ , como discutido na Seção 2.4.

As segundas derivadas temporais  $\ddot{h}$  também pertencem a uma variedade definida por (2.45). No caso, deve-se trocar  $\phi_k$  por  $\phi_k^2$ . Explorando a convexidade em  $h$  e os vértices dos politopos aos quais  $\dot{h}$  e  $\ddot{h}$  estão confinados segue que é suficiente satisfazer

$$\bar{P}_\phi^2 + \frac{1}{2} [\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j] < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, m, l \in \mathcal{M}, i \leq j \quad (2.122)$$

sendo

$$\bar{P}_\phi^2 := \sum_{k=1}^r \phi_k^2 V_{(k,l)} \bar{P}_k, \quad \Theta_i := \phi_k^1 V_{(k,m)} [P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i]$$

Finalmente o Teorema a seguir enuncia mais uma condição de estabilidade verificável via LMIs.

**Teorema 2.9.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i^1, |\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas  $P_i$  e  $\bar{P}_i$  que satisfaçam*

$$P_i + \bar{P}_\phi^1 > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad (2.123)$$

$$\bar{P}_\phi^2 + \frac{1}{2} [\Theta_i + \Theta_j + A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j] < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i \leq j, \quad l, m \in \mathcal{M}, \quad (2.124)$$

sendo

$$\bar{P}_\phi^1 := \sum_{k=1}^r \phi_k^1 V_{(k,m)} \bar{P}_k, \quad \bar{P}_\phi^2 := \sum_{k=1}^r \phi_k^2 V_{(k,l)} \bar{P}_k, \quad \Theta_i := \phi_k^1 V_{(k,m)} [P_k + A_i^T \bar{P}_k + \bar{P}_k A_i]$$

**Corolário 2.7.** *O Teorema 2.3 é um caso particular do Teorema 2.9.*

*Demonstração.* Ao fazer  $\bar{P}_i = 0, \forall i \in \mathcal{R}$  as desigualdades do Teorema 2.9 são reduzidas às mesmas do Teorema 2.3. ■

Uma última condição de estabilidade pode ser estabelecida com base na nova função de Lyapunov, explorando a natureza politópica das derivadas temporais das funções de pertinência e as soluções numéricas da Seção 2.5. Reescrevendo a derivada temporal da função (2.94) em conformidade com a abordagem do termo nulo obtém-se

$$\dot{V}(x, h, \dot{h}) = \xi^T \begin{bmatrix} \dot{P}(h) + \dot{\bar{P}}(\dot{h}) & \bullet \\ P(h) + \bar{P}(\dot{h}) & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (2.125)$$

Somando o termo nulo da equação (2.56) e apoiado na característica convexa das combinações matriciais parametrizadas por  $h, \dot{h}$  e  $\ddot{h}$ , são obtidas as condições suficientes a seguir

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r [\phi_k^1 V_{(k,m)} P_k + \phi_k^2 V_{(k,l)} \bar{P}_k] - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ P_i + \sum_{k=1}^r \phi_k^1 V_{(k,m)} \bar{P}_k - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.126)$$

$i \in \mathcal{R}, \quad m, l \in \mathcal{M},$

O Teorema a seguir pode ser enunciado, sendo um aprimoramento com respeito ao Teorema 2.9:

**Teorema 2.10.** *Considere que  $|\dot{h}_i| < \phi_i^1, |\ddot{h}_i| < \phi_i^2 \forall i \in \mathcal{R}$ . O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas  $P_i, \bar{P}_i$  e matrizes quaisquer  $M_1, M_2$  que satisfaçam*

$$P_i + \sum_{k=1}^r \phi_k^1 V_{(k,m)} \bar{P}_k > 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad m \in \mathcal{M}, \quad (2.127)$$

$$\Xi_i^{m,l} < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad m, l \in \mathcal{M} \quad (2.128)$$

sendo

$$\Xi_i^{m,l} := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r [\phi_k^1 V_{(k,m)} P_k + \phi_k^2 V_{(k,l)} \bar{P}_l] - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & \bullet \\ \sum_{k=1}^r \phi_k^1 V_{(k,m)} \bar{P}_k + P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}$$

**Corolário 2.8.** *O Teorema 2.5 é um caso particular do Teorema 2.10.*

*Demonstração.* Ao fazer  $\bar{P}_i = 0, \forall i \in \mathcal{R}$  as desigualdades do Teorema 2.10 são reduzidas às mesmas do Teorema 2.5. ■

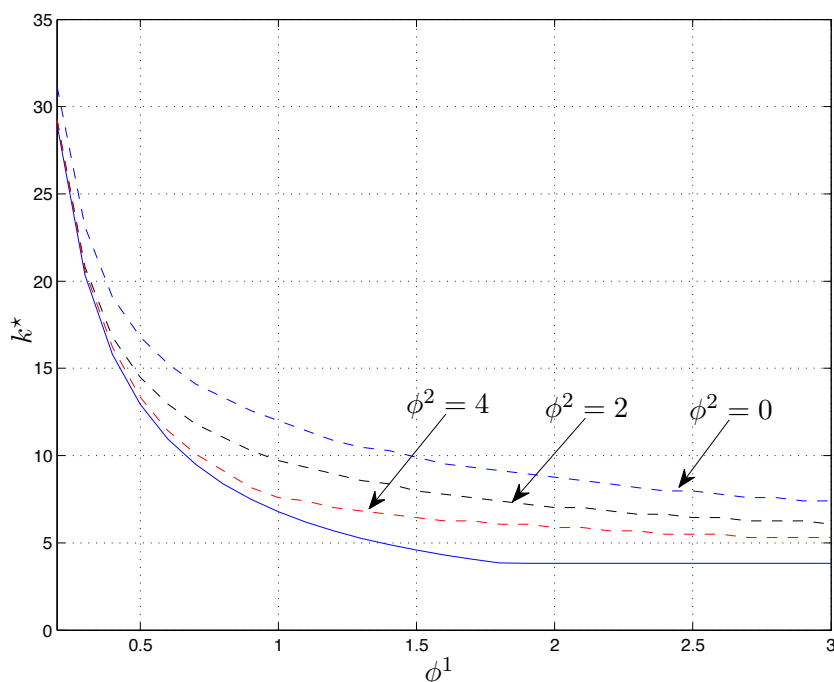
**2.6.2.1 Comparações Numéricas** O Exemplo 2.2 é retomado pois permite analisar com maior facilidade a relação entre a redução do conservadorismo e as taxas de variação das funções de pertinência. O objetivo consiste em avaliar o maior intervalo da não-linearidade do sistema, sendo identificado por  $k^*$ , para valores atribuídos como limitantes para a primeira,  $\phi^1$ , e segunda,  $\phi^2$ , derivadas temporais.

A Figura 2.30 mostra a comparação entre o Teorema 2.7 para alguns valores de  $\phi^2$ , assinalados em linha pontilhada, com relação ao Teorema 2.2, assinalado com linha cheia. O resultado do Teorema 2.7 é sempre melhor, ou no pior caso igual, que Teorema 2.2, fato antecipado pelo Corolário 2.5. A melhoria no resultado é mais significativa para dinâmicas mais rápidas. Note para  $\phi_i^1 \leq 0,5$  que os resultados são bem próximos. Contudo, à medida que  $\phi_i^1$  cresce, o parâmetro  $k^*$  encontrado varia bastante.

Note na Figura 2.30 um aspecto bem interessante da nova função de Lyapunov proposta. Nela indica-se que o desempenho do Teorema 2.7 converge para o resultado obtido com o Teorema 2.2 à medida em que a taxa  $\phi^2$  cresce. A explicação para este comportamento é análoga à explicação da convergência dos resultados com funções de Lyapunov parametrizadas para os resultados da estabilidade quadrática.

Uma vez que funções quadráticas não levam em consideração a taxa de troca entre os vértices do modelo, estabilidade é garantida para valores arbitrários da primeira derivada temporal das funções de pertinência. Como discutido na Seção 1.3, essa noção de estabilidade serve para toda uma família de modelos que compartilham dos mesmos vértices  $A_i$  e possuem funções de pertinência satisfazendo (1.9), sendo este conjunto identificado por  $\Xi_{TS}$ . Já no caso das funções parametrizadas padrões, como por exemplo (2.19), a estabilidade é restrita para modelos que compartilham dos vértices de  $\Xi_{TS}$  mas cuja troca





**Figura 2.30** Análise de estabilidade dependente da primeira e da segunda derivada temporal da função de pertinência: resultados obtidos com Teorema 2.7, assinalados com linha pontilhada, e com o Teorema 2.2, linha cheia.

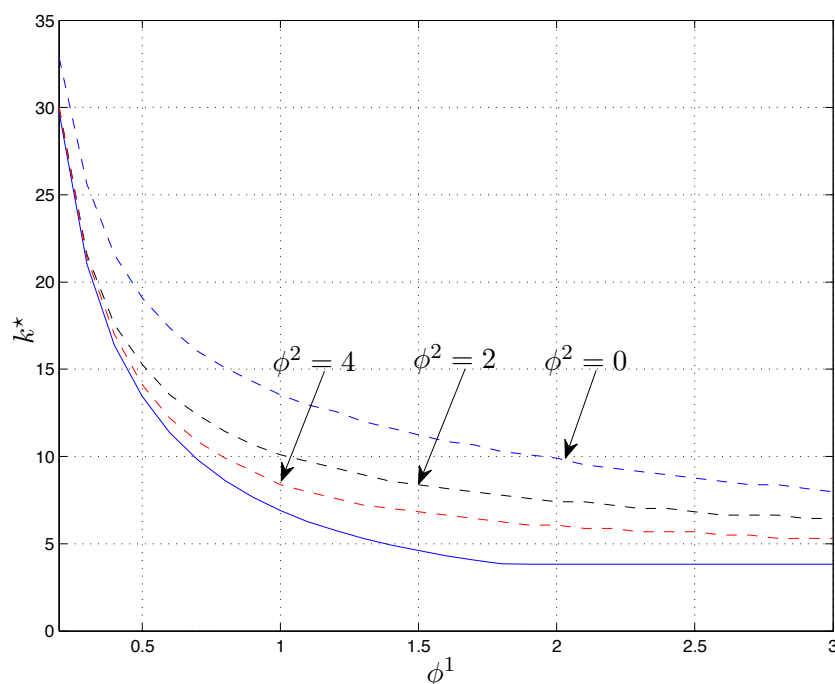
entre eles é limitada por  $\phi^1$ . Considere este conjunto de modelos como  $\Xi_{TS}^1$ . Contudo, nada é dito a respeito da variação temporal da taxa de troca de modelos, ou em outras palavras, sobre a segunda derivada temporal das funções de pertinência. Uma vez que essa informação é omitida, estabilidade será aplicável a sistemas que possuam segunda derivada temporal das funções de pertinência quaisquer<sup>10</sup>.

Ao se incluir a informação da segunda derivada temporal, a família de modelos torna-se mais restrita, formando o conjunto  $\Xi_{TS}^2$ . Dentre aqueles modelos em  $\Xi_{TS}^1$ , a função proposta na (2.94) busca garantir estabilidade apenas para os modelos cuja derivada segunda é limitada por  $\phi^2$ . Portanto, a noção de estabilidade para  $\Xi_{TS}^1$  aplica-se a todos os modelos em  $\Xi_{TS}^2$ , mas o contrário não é verdade. Logo, a análise segundo a nova função proposta é menos conservadora.

O resultado menos conservador ocorre quando  $\phi^2 = 0$ , significando que a segunda derivada temporal das funções de pertinência é nula. Essa informação é bem relevante, mesmo que os termos relacionados a  $\phi^2$  sejam zerados. Repare a sutileza. Há diversas funções cujo limitante da primeira derivada temporal é dado por  $\phi^1$ . Porém o conjunto formado por funções cujo limitante da primeira derivada temporal é dado por  $\phi^1$  e a segunda derivada é pequena é bem mais restrito.

As mesmas conclusões podem ser obtidas analisando os Teoremas 2.8, 2.9 e 2.10 com relação a suas contrapartidas, respectivamente, Teoremas 2.4, 2.3 e 2.5, ou também pela inspeção das Figuras 2.31, 2.32 e 2.33. Outra característica desse exemplo numérico é que

<sup>10</sup>Inclusive ser instantânea, o que seria um absurdo.

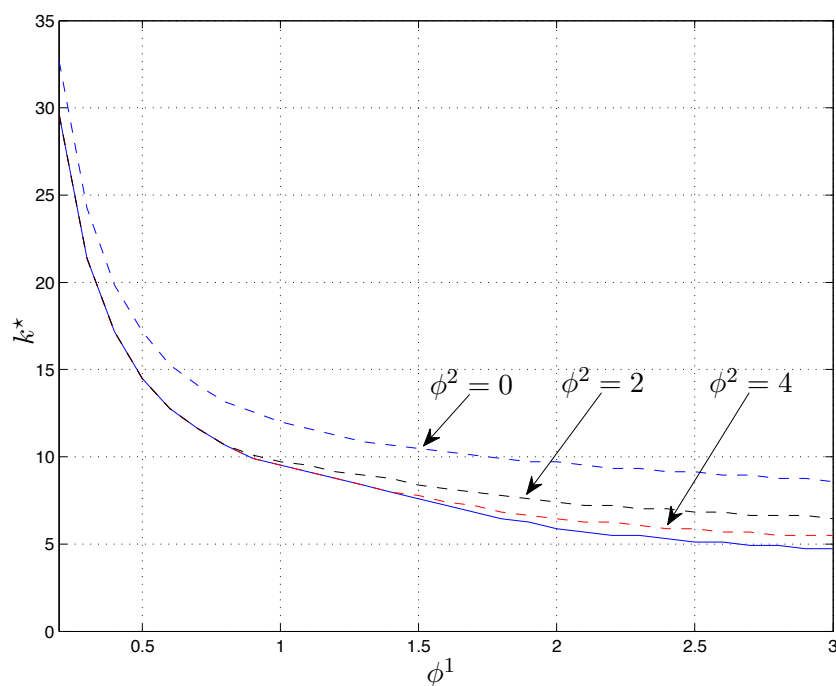


**Figura 2.31** Análise de estabilidade dependente da primeira e da segunda derivada temporal da função de pertinência junto com abordagem do termo nulo: resultados obtidos com Teorema 2.8, assinalados com linha pontilhada, e com o Teorema 2.4, linha cheia.

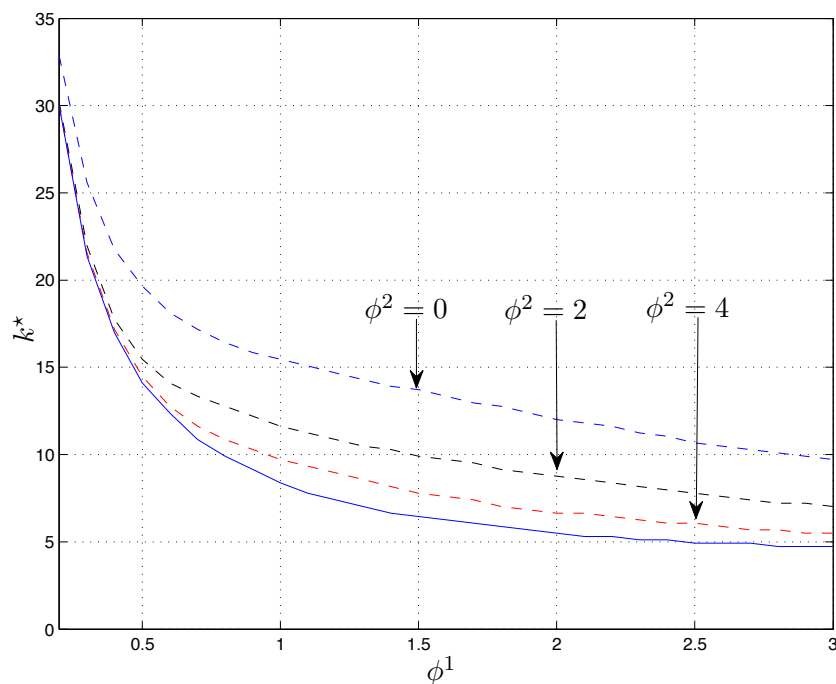
para valores muito pequenos de  $\phi^1$  a redução no conservadorismo não é tão significativa. Contudo, para valores grandes e, principalmente, intermediários de  $\phi^1$  nota-se o contrário, sendo que a contribuição nesse caso pode chegar a determinação de um  $k^*$  duas vezes maior do que obtido pelos Teoremas que não levam tal informação em consideração.

Foi escolhido o valor  $\phi^2 = 0$  para a comparação das condições dependentes da derivada segunda entre si, como mostrado na Figura 2.34. Da mesma forma que acontecia com a função de Lyapunov fuzzy, parametrizada apenas pela função de pertinência, progressivamente os resultados melhoram com a implementação das soluções numéricas discutidas nas Seções 2.4 e 2.5. Com linha tracejada-pontilhada (azul) está o resultado obtido com Teorema 2.7 que não utiliza nenhuma dessas soluções. O melhor resultado é obtido pelo Teorema 2.10, linha tracejada (verde-escura), que combina ambas as técnicas discutidas. É interessante notar que no caso dos Teoremas 2.8 e 2.9 não há um vencedor bem definido. Para valores pequenos e intermediários de  $\phi^1$  o Teorema 2.8, assinalado com linha pontilhada (preta), é melhor que o Teorema 2.9, mostrado com linha contínua (vermelha), mas a medida que  $\phi^1$  cresce o contrário é observado. Não se pode concluir qual solução numérica é mais eficiente entre as da Seção 2.4 e da Seção 2.5, nesse exemplo. A conclusão mais plausível permite afirmar que as soluções numéricas aprimoram os resultados e que a combinação simultânea de ambas promove maior redução no conservadorismo.

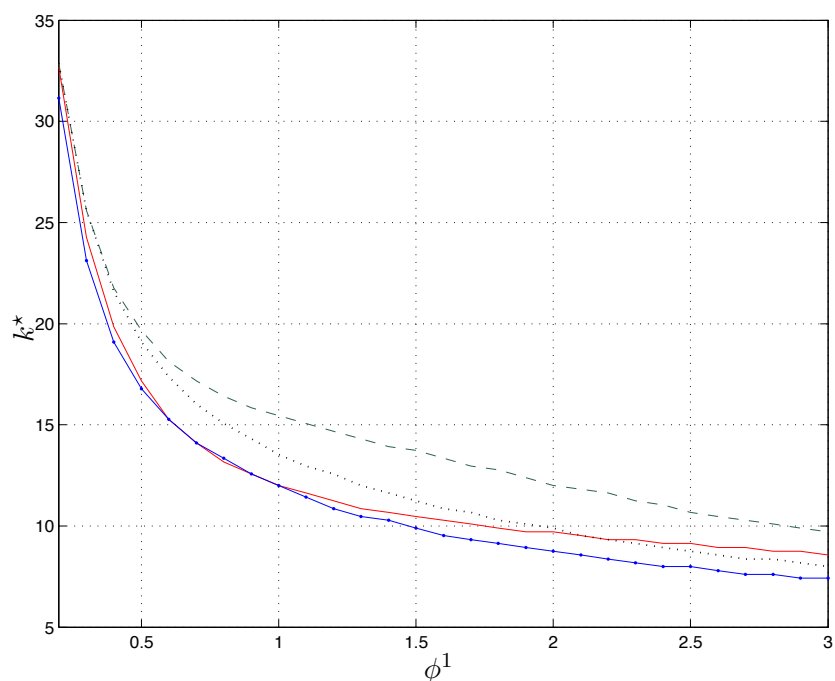
O esforço computacional demandado pelas condições de estabilidade é sumarizado na Tabela 2.6, em termo do número de linhas e de variáveis escalares. Nas abordagens baseadas em técnicas de desacoplamento há mais variáveis escalares, um esforço que



**Figura 2.32** Análise de estabilidade dependente da primeira e da segunda derivada temporal da função de pertinência e que explora a característica politópica das derivadas: resultados obtidos com Teorema 2.9, assinalados com linha pontilhada, e com o Teorema 2.3, linha cheia.



**Figura 2.33** Análise de estabilidade dependente da primeira e da segunda derivada temporal da função de pertinência, com base no termo nulo e que explora a característica politópica das derivadas: resultados obtidos com Teorema 2.10, assinalados com linha pontilhada, e com o Teorema 2.5, linha cheia.



**Figura 2.34** Análise de estabilidade: comparação entre as condições dependentes da segunda derivada. Teorema 2.7 (linha traço-ponto, azul); Teorema 2.8 (linha pontilhada, preto); Teorema 2.9 (linha contínua, vermelho); Teorema 2.10 (linha tracejada, verde-escuro).

é pago pela redução na quantidade de linhas, compare o Teorema 2.7 com relação ao Teorema 2.8 e o Teorema 2.9 com respeito ao Teorema 2.10. A ordem de complexidade não é alterada tanto em termos de linhas quanto de variáveis, entretanto. Vale ressaltar que ao contrário do que foi visto na Seção 2.5 não foram obtidas condições de estabilidade com dependência linear com o número de regras  $r$ . Isso pode ser explicado pelo fato de que no Teorema 2.8 não há um desacoplamento tão forte entre matrizes do sistema e da função de Lyapunov.

As quatro condições de estabilidade propostas nessa seção buscaram representar extremos. Um dos extremos, representado pelos Teoremas 2.7 e 2.8, prima pela baixa complexidade computacional, embora isso represente perda na capacidade de análise. O

**Tabela 2.6** Complexidade computacional das condições LMI que dependem da segunda derivada temporal:  $L$  número de linhas;  $V$  número de variáveis;  $n$  ordem do sistemas;  $r$  número de regras

Método	$L$	$V$
Teorema 2.7	$(1,5r^2 + 2,5r)n$	$(n^2 + n)(r + 2)$
Teorema 2.8	$(r^2 + 4r)n$	$(n^2 + n)(r + 2) + 2n^2$
Teorema 2.9	$0,5(r^2 + r)nm^2 + rnm$	$(n^2 + n)r$
Teorema 2.10	$(m^2 + m)rn$	$(n^2 + n)r + 2n^2$

outro extremo, Teoremas 2.9 e 2.10, visa formular as condições de estabilidade menos conservadoras possíveis, enfatizando o poder de análise em detrimento do custo computacional, que pode se tornar demasiadamente elevado dependendo do número de regras.

Além das condições de estabilidade propostas nessa seção outras podem ser obtidas ponderando como incluir as informações das primeiras e segundas derivadas. É possível, por exemplo, incluir a informação da derivada segunda de forma mais conservadora, a feição do Teorema 2.7, e incluir a informação da derivada primeira de forma mais precisa, como feito no Teorema 2.9. Essa formulação híbrida, por assim dizer, foi apresentado no artigo [MP10], no qual se encontram alguns dos resultados desta seção.

**2.6.2.2 Outra comparação numérica** O Exemplo 2.3 é reconsiderado. Usando a forma mais conservadora de traduzir para o contexto de LMIs as condições de estabilidade baseadas na nova função parametrizada pelas funções de pertinência e suas derivadas, qual seja o Teorema 2.7, é possível garantir estabilidade para o universo de discurso  $|x_1| \leq \pi/2$  e  $|x_2| \leq \pi/2$ . Isso não era possível com o Teorema 2.2, caso particular do Teorema 2.7 obtido a partir da função de Lyapunov parametrizada apenas pelas funções de pertinência, conforme foi mostrado na Seção 2.4.

Para aplicar o Teorema 2.7 ao Exemplo 2.3 a segunda derivada temporal das funções de pertinência pode ser calculada a partir de (2.52) e (2.55). A expressão resultante é

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1 &= \frac{7}{4}\dot{x}_1 [\sin(x_1)x_1 - \cos(x_1)] + 2\sin(x_1)\dot{x}_1x_2 - 2\cos(x_1)\dot{x}_2 \\ &\quad - \frac{3}{4}\dot{x}_1 [\sin(x_1)\cos(x_1) + \sin(x_1)^2x_1 - \cos(x_1)] \end{aligned} \quad (2.129)$$

Calculando esta derivada para uma malha regular de pontos no universo de discurso do modelo o valor máximo em módulo é 92,7. Usando o mesmo procedimento calcula-se que a primeira derivada é limitada em 3,61. Portanto, pode-se considerar com segurança  $\phi^1 = 4,0$  e  $\phi^2 = 95$ .

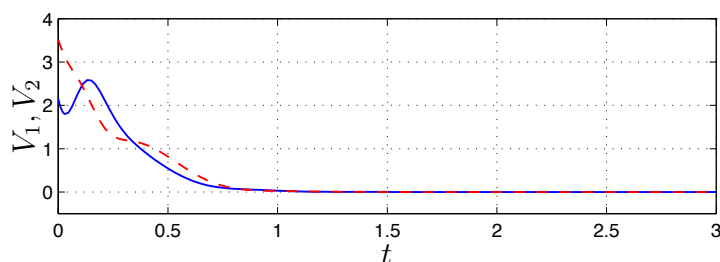
Usando  $\phi^2 = 95$  buscou-se determinar os valores máximos para o limitante da primeira derivada temporal, indicado por  $\phi_\star^1$ . Os resultados encontram-se na Tabela 2.7, na qual os resultados da Seção 2.4 são parcialmente reproduzidos para conveniência do leitor. A expressiva melhora no resultado obtido com o Teorema 2.2 em relação ao obtido com o Teorema 2.7, o parâmetro  $\phi_\star^1$  é quase duas vezes maior, pode ser explicada pelas mesmas razões expostas no exemplo numérico anterior. O conjunto de modelos para os quais  $\phi^2 = 95$  é bem mais restrito do que assumir um valor qualquer para esse limite, sendo mais fácil a busca por uma função de Lyapunov.

A título de ilustração duas funções de Lyapunov são determinadas usando como parâmetros  $\phi^1 = 4,0$  e  $\phi^2 = 95$  nos Teoremas 2.7 (T27) e 2.9 (T29), respectivamente:

$$\text{T27: } \begin{cases} P_1 = \begin{bmatrix} 1,3334 & 0,0603 \\ 0,0603 & 0,8914 \end{bmatrix}, & P_2 = \begin{bmatrix} 2,3297 & 0,0407 \\ 0,0407 & 0,6197 \end{bmatrix}, \\ \bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2,0658 & -0,3016 \\ -0,3016 & 0,0014 \end{bmatrix}, & \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 2,0649 & -0,3025 \\ -0,3025 & 0,0006 \end{bmatrix} \end{cases}$$

**Tabela 2.7** Valores máximos do limitante para a primeira derivada temporal das funções de pertinência ( $\phi_\star^1$ ) para o Exemplo 2.3. Para as funções parametrizadas pelas derivadas das funções de pertinência adotou-se  $\phi^2 = 95$ .

Metodologia	Teorema 2.2	Teorema 2.3	Teorema 2.7	Teorema 2.9
$\phi_\star^1$	2,95	6,81	5,79	6,82

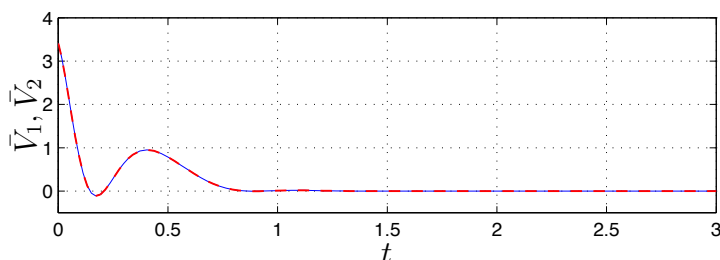


**Figura 2.35** Evolução temporal de cada função quadrática obtida com T26 tomada isoladamente: linha contínua  $V_1$ ; linha pontilhada  $V_2$ . Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ .

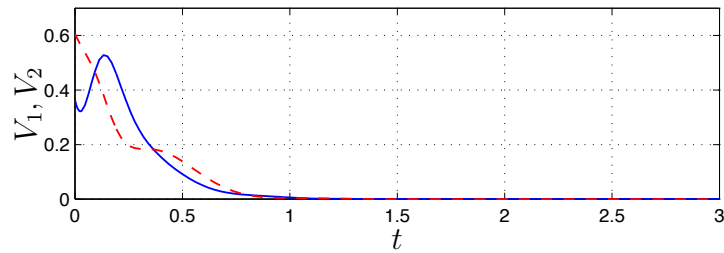
$$\text{T29: } \left\{ \begin{array}{l} P_1 = \begin{bmatrix} 0,2363 & 0,0281 \\ 0,0281 & 0,1754 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,4155 & 0,0185 \\ 0,0185 & 0,0964 \end{bmatrix}, \\ \bar{P}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,2027 & 0,8342 \\ 0,8342 & 0,5922 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_2 = 10^{-13} \begin{bmatrix} 0,3350 & 0,1700 \\ 0,1700 & -0,4842 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

De forma análoga à Seção 2.4 a evolução das funções quadrática é considerada isoladamente, sendo indicadas por  $V_i = x^T P_i x$  e  $\bar{V}_i = x^T \bar{P}_i x$ , nas Figuras 2.35 a 2.38. As combinações fuzzy, parametrizadas pelas funções de pertinência e suas derivadas, resultam nas Figuras 2.39 e 2.40. Novamente é possível constatar que isoladamente as funções não são de Lyapunov, mas sua combinação satisfaz a condição de monotonicidade.

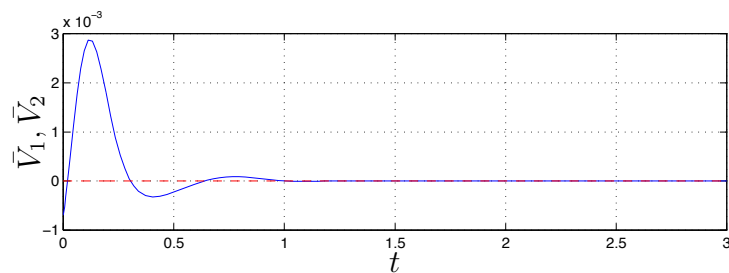
Finalmente as Figuras 2.42 e 2.43 mostram as curvas de nível para as duas funções obtidas. Elas são interessantes ao se considerar a interpretação geométrica da estabilidade no sentido de Lyapunov [Lei04, Seção 7.7].



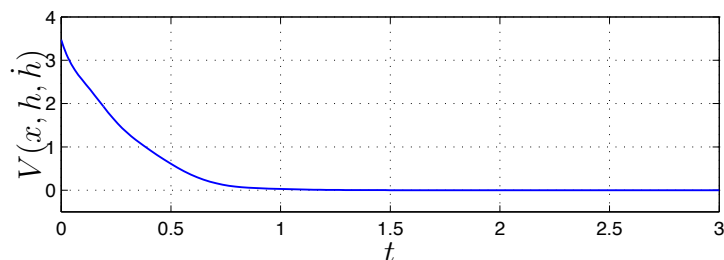
**Figura 2.36** Evolução temporal de cada função quadrática obtida com T26 isoladamente: linha contínua  $\bar{V}_1$ ; linha pontilhada  $\bar{V}_2$ . Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ .



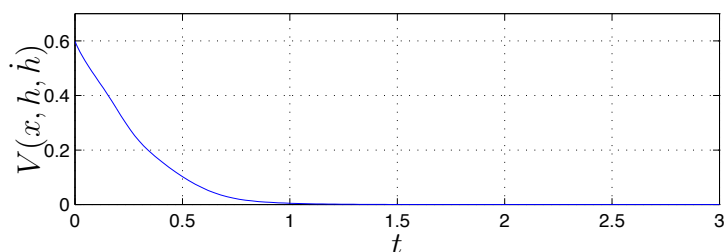
**Figura 2.37** Evolução temporal de cada função quadrática obtida com T27 isoladamente: linha contínua  $V_1$ ; linha pontilhada  $V_2$ . Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ .



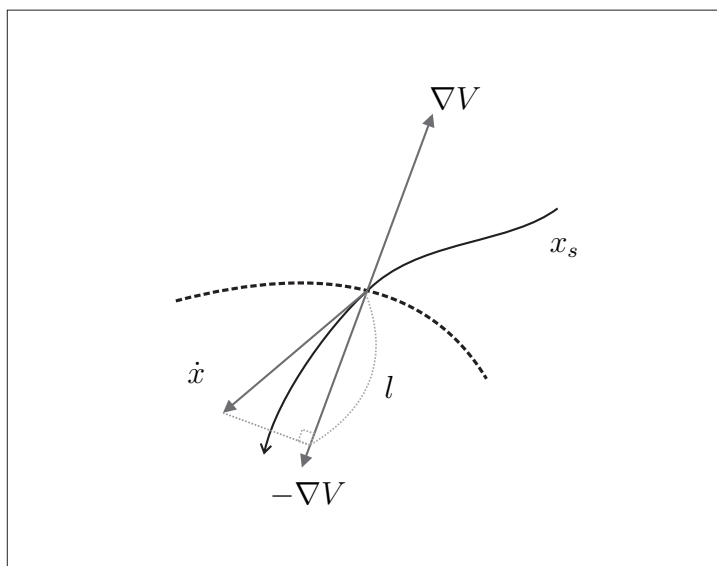
**Figura 2.38** Evolução temporal de cada função quadrática obtida com T27 isoladamente: linha contínua  $\bar{V}_1$ ; linha pontilhada  $\bar{V}_2$ . Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ .



**Figura 2.39** Evolução temporal das funções quadráticas obtidas com T26 combinadas em uma única função que é Lyapunov. Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ . Note o decaimento monotônico.



**Figura 2.40** Evolução temporal das funções quadráticas obtidas com T26 combinadas em uma única função que é Lyapunov.. Condições iniciais:  $x = [-1,2 \ 0,6]^T$ . Note o decaimento monotônico.



**Figura 2.41** Interpretação geométrica para estabilidade no sentido de Lyapunov. Um campo escalar  $V$ , cujo gradiente é  $\nabla V$ . Uma trajetória do sistema  $x_s$  e o vetor tangente  $\dot{x}$  no ponto de intersecção com o contorno, assinalado em pontilhado. O vetor  $l$  é a projeção de  $\dot{x}$  em  $\nabla V$ .

Considere  $x_s$ , uma trajetória do sistema do sistema em direção à origem ao cruzar uma curva de nível de  $V$ , uma função de Lyapunov para o sistema. O vetor tangente a  $x_s$  nesse dado instante é  $\dot{x}$ , resultado da substituição de  $x$  por  $x_s$  em (1.12). Considere  $\nabla V$  o gradiente de  $V$ . A Figura 2.41 ilustra essa situação.

Considerando a projeção de  $\dot{x}$  no vetor gradiente  $\nabla V$ :

$$l := \left\langle \frac{\nabla V}{\|\nabla V\|}, \dot{x} \right\rangle$$

é possível notar pela Figura 2.41 que se trata de um vetor ortogonal ao contorno  $V$ , apontando para dentro do mesmo.

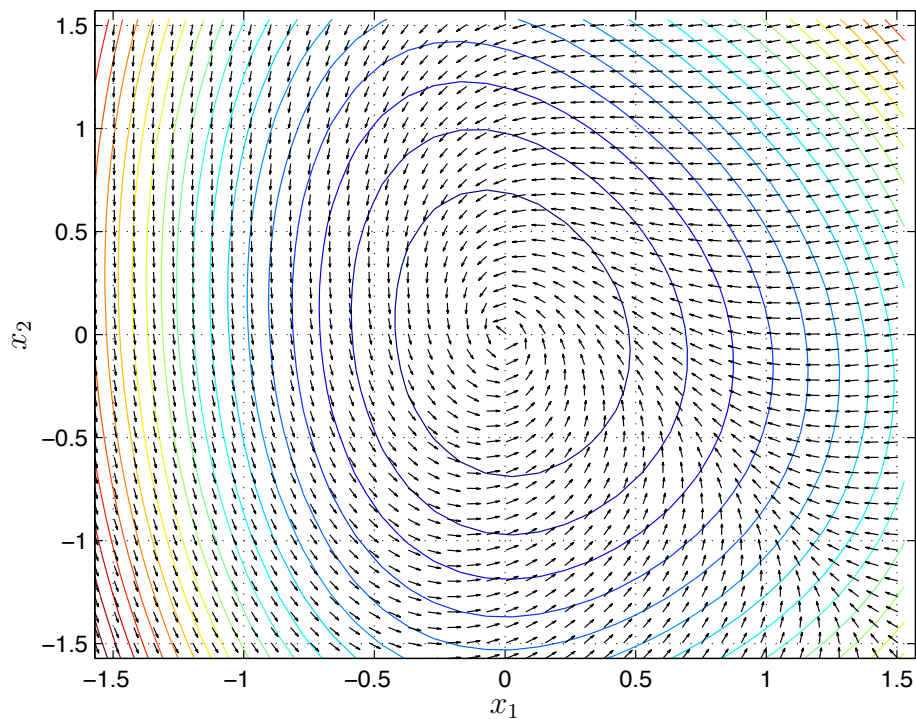
Estabilidade no sentido de Lyapunov é garantida caso  $V$  e  $-dV/dt$  sejam definidas positivas. Esse requisito é o mesmo que exigir que os vetores  $l$  sejam negativos (ou apontem para dentro de  $V$ , afinal [Lei04])

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \langle \nabla V, \dot{x} \rangle$$

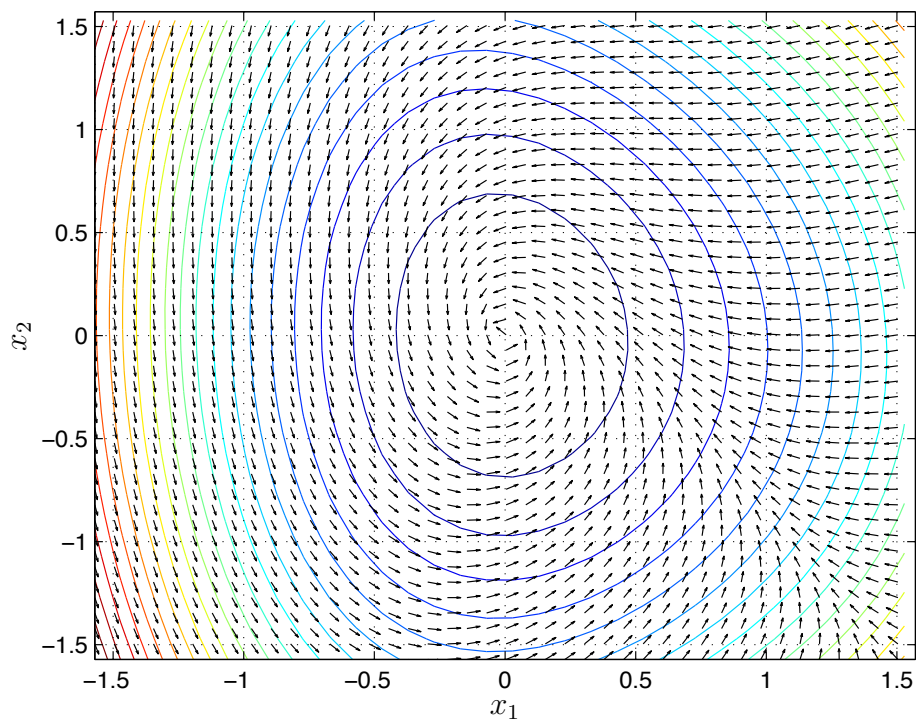
que é a mesma definição para  $l$  na Figura 2.41, a menos de um fator de escala.

Retomando a análise das Figuras 2.42 e 2.43 nota-se que as curvas de nível são convexas mas não elipses como no caso da estabilidade quadrática. No lado esquerdo as curvas de nível possuem um padrão quase vertical enquanto do lado direito têm maior curvatura. Isso se faz necessário do ponto de vista geométrico para acompanhar o perfil do retrato de fases, garantindo que os vetores tangentes às trajetórias apontem de um contorno externo para outro mais interno.





**Figura 2.42** Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. Note que são convexas e as trajetórias partem de um contorno para outro mais interno.



**Figura 2.43** Curvas de nível para a função de Lyapunov fuzzy. Note que são convexas e as trajetórias partem de um contorno para outro mais interno.

# PROJETO DE CONTROLADOR

*Obstinacy and tenacity. Not being afraid to get embroiled in controversy.  
... I can be very stubborn. That's probably been beneficial for the  
development of Fuzzy Logic<sup>1</sup>.*

—LOTFI A. ZADEH (Blair, Betty. "Interview with Zadeh, Creator of Fuzzy Logic". Azerbaijan International, Winter 1994 (2.4), pages 46-47)

O capítulo que segue irá abordar soluções numéricas para viabilizar o projeto de controladores fuzzy no formato PDC a partir de funções de Lyapunov fuzzy, no contexto de LMIs. Como no caso de análise, aplica-se o método direto de Lyapunov ao sistema em malha-fechada para em seguida determinar os parâmetros de uma função candidata que dá um certificado de estabilidade global por meio da solução de um conjunto de LMIs. Na síntese, entretanto, a procura é dupla. Simultaneamente, busca-se o valor dos ganhos do controlador que estabiliza o sistema em malha-fechada. Em suma, no projeto de um controlador, tanto as matrizes dos ganhos quanto da função de Lyapunov são variáveis de decisão que devem tornar um conjunto de restrições do tipo LMI factível.

Critérios de projeto também podem ser incluídos. Nesse caso, busca-se dentre a família de todos os ganhos estabilizantes aquele que otimiza uma função objetivo linear relacionada a algum índice de desempenho.

Neste capítulo serão adotadas duas funções candidatas: a função de Lyapunov fuzzy proposta em [Jad99] e a função no formato integral, também fuzzy, proposta em [RW06]. Na primeira parte deste capítulo serão discutidas as principais dificuldades na síntese com funções de Lyapunov fuzzy. Em seguida soluções para esses desafios são propostas. Finalizando o capítulo exemplos numéricos e de simulação ilustram as características das metodologias propostas.

### 3.1 CONTROLE BASEADO NA ESTABILIDADE QUADRÁTICA

O capítulo anterior buscou mostrar o quão conservador pode ser  $x^T P x$ , sendo  $P$  uma matriz simétrica definida positiva fixa, como a escolha para função de Lyapunov candidata. A simplicidade computacional do teste apresentado no Lema 2.1 poderia ser, a princípio, uma justificativa, haja vista sua complexidade linear em relação ao número de regras. Contudo testes simples e competitivos foram propostos nos capítulos anteriores, até mesmo  $O(r)$ , veja Seção 2.5. Portanto é natural questionar o porquê da estabilidade quadrática possuir tamanha popularidade.

---

<sup>1</sup>Obstinação e tenacidade. Não ter receio de se envolver em polêmica. ... Eu consigo ser muito teimoso. Isso provavelmente foi benéfico para o desenvolvimento da Lógica Fuzzy.

Uma das respostas certamente se encontra no projeto de controlador segundo essa função. Escrevendo a derivada temporal da função quadrática ao longo das trajetórias do sistema TS em malha-fechada tem-se:

$$\dot{V} = x^T \{A(h) + B(h)K(h)\}^T P x + x^T P \{A(h) + B(h)K(h)\} x \quad (3.1)$$

$$= x^T [\{K(h)^T B(h)^T + A(h)^T\} P + P \{A(h) + B(h)K(h)\}] x \quad (3.2)$$

Portanto é suficiente garantir que

$$\{K(h)^T B(h)^T + A(h)^T\} P + P \{A(h) + B(h)K(h)\} < 0. \quad (3.3)$$

Nesse ponto nota-se que a desigualdade não é uma LMI, pois há dois conjuntos de variáveis matriciais a serem determinados que estão multiplicados: um deles composto pelas matrizes dos ganhos  $K(h)$  e o outro pela matriz da função  $P$ . A simplicidade pela qual se pode converter tais desigualdade em LMIs é o grande atrativo da estabilidade quadrática. Primeiro, usando uma transformação de congruência com a variável  $W := P^{-1}$  obtém-se a condição equivalente

$$Z(h)^T B(h)^T + W A(h)^T + A(h)W + B(h)Z(h) < 0 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i W + W A_i^T + B_i Z_j + Z_j^T B_i^T) < 0 \quad (3.5)$$

sendo  $Z_j := K_j W$ . Agora está disponível um conjunto de desigualdades lineares nas variáveis  $P$  e  $Z_j$ . Uma forma amplamente difundida na literatura fuzzy para tratá-las consiste em separar os termos do somatório duplo nos quais as funções de pertinência ficam elevadas ao quadrado

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i W + W A_i^T + B_i Z_j + Z_j^T B_i^T) = \sum_{i=1}^r h_i^2 G_{ii} + \sum_{i < j}^r h_i h_j G_{ij} \quad (3.6)$$

sendo

$$G_{ii} := A_i W + W A_i^T + B_i Z_j + Z_j^T B_i^T \quad (3.7)$$

$$G_{ij} := A_i W + W A_i^T + A_j W + W A_j^T + B_i Z_j + Z_j^T B_i^T + B_j Z_i + Z_i^T B_j^T \quad (3.8)$$

conduzindo ao Lema seguinte

**Lema 3.1** (Capítulo 2, [TW01]). *O sistema TS (1.12) é assintoticamente estável caso exista uma matriz definida positiva  $W$  e matrizes quaisquer  $Z_i$  que satisfazem*

$$G_{ii} < 0, i \in \mathcal{R}, \quad (3.9)$$

$$G_{ij} < 0, i, j \in \mathcal{R}, i < j \quad (3.10)$$

sendo que as matrizes são definidas em (3.7) e (3.8).

Nesse caso uma solução factível qualquer para o Lema 3.1 apresenta os ganhos do controlador estabilizante, que podem ser obtidos fazendo  $K_j = Z_j W^{-1}$ , e também a função de Lyapunov que garante estabilidade para o sistema em malha-fechada para esses ganhos projetados, obtida a partir da inversão de  $W$ .

Vale destacar que ao contrário do que ocorria na análise de estabilidade, condições de síntese menos conservadoras podem ser obtidas usando termos de relaxação do lado direito como pode ser visto em [TIW98, KL00, TPA00, TAA01, TANY01, TAA03, XQ03, Fen06, FLK<sup>+</sup>06, MOP07, SA07, MCP<sup>+</sup>07, MOP09] e referências.

O Lema 3.1 projeta controladores que garantem estabilidade. No contexto da função quadrática existem diversos resultados que visam garantir não só estabilidade em malha-fechada mas também desempenho segundo diversos critérios: custos  $\mathcal{H}_2$  [MOP10],  $\mathcal{H}_\infty$  [MCP<sup>+</sup>07, APA<sup>+</sup>08] ou o compromisso entre ambos [CTU00]; restrição de autovalores<sup>2</sup> [AN06]; restrição sobre a norma do sinal de controle ou sobre a saída [TW01]; taxa de decaimento [TIW98].

### 3.2 CONTROLE BASEADO EM FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY: DESAFIOS

Os passos executados para obter condições LMI baseadas na função de Lyapunov quadrática serão repetidos para a função de Lyapunov fuzzy da equação (2.19). Para garantir estabilidade global usando essa função deve-se garantir que:

$$P(h) > 0, \quad (3.11)$$

$$\dot{P}(h) + [A(h) + B(h)K(h)]^T P(h) + P(h) [A(h) + B(h)K(h)] < 0 \quad (3.12)$$

Nessas desigualdades nota-se a presença de produto entre as variáveis de interesse em  $P(h)$  e  $K(h)$ , sendo necessária uma transformação linearizante. Uma escolha interessante seria multiplicar a desigualdade à direita e à esquerda por  $P(h)^{-1}$ . Tal inversa existe haja vista que impõe-se positividade sobre  $P(h)$ , resultando em

$$P(h)^{-1} > 0, \quad (3.13)$$

$$P(h)^{-1} \dot{P}(h) P(h)^{-1} + P(h)^{-1} [A(x) + B(x)F(x)]^T + [A(x) + B(x)F(x)] P(h)^{-1} < 0 \quad (3.14)$$

Esse último conjunto de desigualdades é um problema de dimensão infinita com relação às variáveis premissas [LTL06]. Todavia, dadas as propriedades das funções de pertinência, veja (1.9), esse é um problema convexo, portanto seria equivalente a um número finito de restrições do tipo:

$$X_k > 0, \quad (3.15)$$

$$P(h)^{-1} \dot{P}(h) P(h)^{-1} + X_k A_i + X_k F_j^T B_i^T + A_i X_k + B_i F_j X_k < 0. \quad (3.16)$$

---

<sup>2</sup>Conhecido também como alocação de pólos, mas no caso de sistemas TS não há o conceito de pólos

sendo  $P(h)^{-1} := \sum_{i=1}^r h_i X_i$  e  $\dot{P}(h)$  pode ser avaliado como no capítulo anterior em duas possíveis formas: usando limitantes superiores para  $\dot{h}$  ou considerando a característica politópica de  $\dot{h}$ . Assim posto, bastaria como na seção anterior definir  $\Gamma_{jk} = F_j X_k$  como novas variáveis, linearizando o problema.

Contudo esse expediente não pode ser realizado pois de posse de  $\Gamma_{jk}$  que satisfazem as desigualdades não seria possível determinar unicamente os ganhos  $F_j$ , haja vista que não há garantias que

$$F_j = \Gamma_{jk} X_k^{-1} = \Gamma_{jk} P_k = \Gamma_{j1} P_1 = \Gamma_{j2} P_2 = \dots = \Gamma_{jr} P_r$$

Essa indeterminação é uma das questões que impõe dificuldades na síntese de controladores tendo base na função de Lyapunov fuzzy. No trabalho de [THW03] uma solução é apresentada, baseada na técnica conhecida como completamento de quadrados. Todavia essa técnica é bastante conservadora, em alguns casos perdendo para a estabilidade quadrática [TNOW05], sendo que posteriormente os próprios autores apresentam um método recursivo com melhor desempenho [OTW03]. A idéia consiste em determinar ganhos que estabilizam apenas os sub-sistemas locais fazendo com que  $F_j$  deixem de ser variáveis e passem a ser valores conhecidos. No passo seguinte é verificado se os ganhos são capazes de garantir estabilidade global, ou seja, se satisfazem a desigualdade nas variáveis  $P_k$ . Caso a escolha não seja satisfatória o procedimento é repetido.

### 3.2.1 Funções no Formato Integral: Outros Desafios

Em [RW06] uma nova função de Lyapunov fuzzy foi apresentada:

$$V(x, h) = 2 \int_{\Gamma(0, x)} P(\psi) \psi d\psi, \quad (3.17)$$

sendo que  $\Gamma(0, x)$  é um caminho da origem até o estado atual;  $\psi$  é um vetor para a integração;  $d\psi$  é um vetor de deslocamento infinitesimal. A função  $P(\psi)$  é parametrizada de acordo com as mesmas funções de pertinência do modelo TS (1.12):

$$P(\bar{h}) := \sum_{i=1}^r \bar{h}_i P_i. \quad (3.18)$$

Um detalhe dessa função: as variáveis premissas das funções de pertinência devem ser os estados, por isso são indicadas por  $\bar{h}_i$  ao invés de  $h_i$ . Não obstante, a função (3.17) também recai na categoria de funções de Lyapunov fuzzy, pois depende da interpolação fuzzy de matrizes constantes  $P_i$  por meio das funções de pertinência  $\bar{h}_i$ .

A proposta em [RW06] foi obter uma função de Lyapunov que possuísse qualidades da função fuzzy de [Jad99, THW03], destacando-se parametrização pelas funções de pertinência e a característica de múltiplas matrizes, mas sem que sua derivada temporal fosse parametrizada pela taxa de variação das funções de pertinência. Isso justifica o formato integral dessa função.

Funções de Lyapunov no formato de integral são utilizadas no contexto geral de sistemas não-lineares [HC08]. Em geral, tais funções *não* são construídas através do se-

gundo método de Lyapunov [HC08, Cap. 3], no qual se determina uma função candidata quadrática definida positiva (ou uma combinação fuzzy delas como na equação (2.19)) cuja derivada ao longo das trajetórias do sistema deve ser definida negativa, em verificação posterior. Esse método também é conhecido como método direto de Lyapunov e foi empregado durante todo capítulo anterior.

Alternativamente, a construção daquelas funções se dá pelo método do gradiente variável [HC08, Cap. 3], no qual assume-se que  $g(x)$  é o gradiente de uma função de Lyapunov desconhecida que satisfaz  $g(x)^T \dot{x} < 0$ . Caso a matriz Jacobiana  $\partial g(x)/\partial x$  seja simétrica, então a função de Lyapunov desconhecida é construída como a integral de linha de  $g(x)$ . A restrição sobre a Jacobiana implica que a função de Lyapunov obtida é um campo potencial conservativo, ou seja, a diferença de potencial não depende do caminho, apenas dos pontos inicial e final. Uma vez obtida a função de Lyapunov resta verificar se é definida positiva.

Assumindo que o gradiente da função desconhecida é dado como uma combinação fuzzy de matrizes constantes, sem depender da derivada temporal dessas pertinências, tem-se que

$$g(x)^T \dot{x} = 2x^T P(\bar{h})\dot{x}.$$

Para garantir a condição de simetria do Jacobiano de  $\partial g(x)/\partial x$  as matrizes  $P_i$  têm a forma especial a seguir, veja detalhes em [RW06, MPA09]:

$$P_i = D_0 + D_i, \quad (3.19)$$

sendo

$$D_0 := \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{12} & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_i := \begin{bmatrix} d_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{\alpha_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix}.$$

Esta notação indica que somente os elementos de  $D_i$  (elementos da diagonal de  $P_i$ ) mudam com as regras fuzzy. Os elementos da diagonal são alterados de acordo com os conjuntos fuzzy no antecedente das regras Se-Então. Se uma variável premissa pertencer ao mesmo conjunto fuzzy em regras distintas, então os elementos da diagonal relativos àquela variável serão iguais. Contudo, seja  $x_j(t)$  pertencente a conjuntos distintos nas regras  $k$  e  $l$ . Os  $j$ -ésimos elementos da diagonal de  $D_k$  e  $D_l$  (quais sejam  $d_{jj}^{\alpha_{kj}}$  e  $d_{jj}^{\alpha_{lj}}$ ) serão diferentes.

Em [RW06] demonstra-se em detalhes que (3.17) é uma função de Lyapunov se as matrizes  $P_i$  possuem a estrutura apresentada em (3.19). Nota-se contudo que a demonstração não segue as idéias apresentadas nessa seção, baseadas no método do gradiente variável.

Os desafios para síntese de controlador discutidos para a função da equação (2.19) permanecem, haja vista que são inerentes de funções de Lyapunov fuzzy, devido à característica de múltiplas matrizes parametrizadas. Todavia, a imposição de uma estrutura adicional sobre  $P_k$ , veja equação (3.19), traz outros desafios no contexto de LMIs, que serão vistos na sequência. No trabalho original de [RW06] são apresentadas apenas condições BMI para projeto de controlador, baseadas em um algoritmo que depende da escolha apropriada de alguns parâmetros para garantir convergência, restringindo sua portabilidade para casos gerais.

Considere que na função integral da equação (3.17) seja usada a combinação fuzzy de matrizes  $P_i$  que respeitam a condição da equação (3.19). Suponha que de alguma forma, por exemplo seguindo a maneira apresentada na seção anterior, condições LMIs para síntese sejam obtidas mas que apareçam termos do tipo  $X_i = P_i^{-1}$ . Não é possível garantir que a relação de igualdade dos termos fora da diagonal em  $P_i$  se estenda a suas matrizes inversas  $X_i$ , a não ser em casos muito particulares. Um deles seria o caso de todas as matrizes  $P_i$  possuírem termos nulos fora da diagonal principal. Isso é mais um empecilho na busca por condições de síntese estritamente LMI.

Dessa forma o controle não-PDC também fica inviabilizado para a função fuzzy no formato integral, haja vista que o controlador tem a estrutura que depende da inversa das matrizes da função de Lyapunov, veja por exemplo [TOW07, GV04]. No trabalho [LZX08] foi feita uma tentativa de controle não-PDC baseado nessa função que recebeu duras críticas em [GGB<sup>+</sup>10], por justamente não observar as restrições impostas pela equação (3.19). Foi mostrado que embora as condições de síntese propostas em [LZX08] fossem factíveis para um determinado sistema TS, a simulação em malha-fechada mostrou que os ganhos projetados não conseguiam estabilizar o sistema em um ponto de equilíbrio mas na verdade em um ciclo limite, o que fere a estabilidade no sentido de Lyapunov.

### 3.3 SOLUÇÕES NUMÉRICAS PARA SÍNTESE DE CONTROLE COM FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY

Nesta seção serão apresentadas soluções numéricas que permitem viabilizar o projeto de controladores baseados nas funções de Lyapunov fuzzy usando somente LMIs. Pelo que foi visto até agora a presença de várias matrizes na função de Lyapunov dificultam a linearização das condições de síntese, devido às multiplicações entre essas variáveis de decisão. Portanto serão exploradas soluções numéricas que permitem o desacoplamento entre as matrizes dos ganhos e das funções de Lyapunov. Uma dessas técnicas foi vista no Capítulo 2. Uma outra técnica apresentada em [GK06] no contexto de sistemas incertos também será empregada.

Essa seção é dividida em três partes: na primeira será abordado o controle PDC com base nas funções de Lyapunov fuzzy da equação (3.17) e da equação (2.19); em seguida, as condições propostas são comparadas com resultados relevantes da literatura; finalmente, três exemplos de simulação são considerados para ilustrar o funcionamento das metodologias propostas.

### 3.3.1 Controle PDC

O controle baseado na função da equação (2.19) será abordado primeiro. Tomando a derivada dessa função com respeito às trajetórias do sistema TS em malha-fechada (1.14) e a escrevendo em conformidade com a abordagem do termo nulo segue

$$\dot{V} = \xi^T \begin{bmatrix} \dot{P}(h) & P(h) \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (3.20)$$

sendo  $\xi^T = [x^T \ \dot{x}^T]$ .

O termo nulo definido na equação (2.56) é reescrito para o sistema em malha-fechada

$$2 [x^T M_1 + \dot{x}^T M_2] \times [\dot{x} - A(h)x - B(h)K(h)x] = 0, \quad (3.21)$$

sendo que  $M_1$  e  $M_2$  são matrizes quaisquer de dimensão apropriada e  $K(h)$  é o conjunto de ganhos do controlador PDC (1.14). Esse termo pode ser verificado com base na dinâmica do sistema TS em malha-fechada, equação (1.15) rescrita aqui por conveniência:

$$\dot{x} = A(h)x + B(h)K(h)x = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_i + B_i K_j] x \quad (3.22)$$

Expandindo o termo da equação (3.21):

$$x^T M_1 \dot{x} + \dot{x}^T M_1^T x - x^T [M_1 A(h) + M_1 B(h)K(h) + A^T(h)M_1^T + K^T(h)B^T(h)M_1^T] x + \dot{x}^T (M_2 + M_2^T) \dot{x} - \dot{x}^T [M_2 A(h) + M_2 B(h)K(h)] x - x^T [A^T(h)M_2^T + K^T(h)B^T(h)M_2^T] \dot{x}$$

considerando o vetor aumentado  $\xi^T = [x^T \ \dot{x}^T]$  e somando à equação (3.20) determina-se

$$\dot{V} = \xi^T \Xi(h) \xi \quad (3.23)$$

sendo

$$\Xi(h) := \begin{bmatrix} \dot{P}(h) - M_1 A(h) - M_1 B(h)K(h) - A^T(h)M_1^T - K^T(h)B^T(h)M_1^T & \bullet \\ P(h) - M_2 A(h) - M_2 B(h)K(h) + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Portanto deve-se garantir que  $\Xi(h) < 0$ . Aplicando a transformação de congruência

$$\Theta \Xi(h) \Theta^T = \bar{\Xi}(h), \quad \Theta := \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 \\ 0 & M_1^{-1} \end{bmatrix}$$

segue que  $\bar{\Xi}(h) < 0$ . Fazendo a escolha particular  $R = M_1^{-T}$  e  $M_2 = \alpha M_1$  obtém-se

$$\bar{\Xi}(h) := \begin{bmatrix} R^T \dot{P}(h) R - [A(h) + B(h)K(h)] R - R^T [A^T(h) + K^T(h)B^T(h)] & \bullet \\ R^T P(h) R - \alpha [A(h) + B(h)K(h)] R + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix}$$



Condições lineares podem agora ser estabelecidas facilmente com as transformações

$$T(h) := R^T \dot{P}(h)R, \quad S(h) := K(h)R$$

resultando em

$$\begin{aligned} \check{\Xi}(h) &:= \begin{bmatrix} \dot{T}(h) - A(h)R - B(h)S(h) - R^T A^T(h) - S^T(h)B^T(h) & \bullet \\ T(h) - \alpha A(h)R - \alpha B(h)S(h) + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \dot{h}_k T_k - A_i R - B_j S_j - R^T A_i^T - S_j^T B_i^T & \bullet \\ T_i - \alpha A_i R - \alpha B_j S_j + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Neste ponto, o efeito devido ao uso de uma das soluções numéricas discutidas na Seção 2.5 pode ser avaliado. Comparando (3.25) com (3.14) nota-se que não há multiplicação envolvendo ganhos do controlador e matrizes da função candidata, portanto são desigualdades lineares. Com relação ao projeto via estabilidade quadrática também há uma diferença marcante. Nas desigualdades (3.8) os ganhos eram recuperados a partir de matrizes  $Z_j$  relacionadas diretamente com a matriz da função candidata  $W$ . No caso das desigualdades (3.25) as matrizes dos ganhos  $S_j$  não estão explicitamente relacionadas às matrizes da função candidata  $T_i$ .

Daqui em diante, como de praxe, duas alternativas são possíveis: considerar a situação de pior caso com todas as pertinências possuindo derivada máxima ou considerar o politopo que restringe os possíveis valores de  $\dot{h}$ . Adicionando a matriz  $\bar{X}$ , definida na equação (2.33), usando limitantes positivos  $\phi_i, i \in \mathcal{R}$  no lugar de  $\dot{h}_i$  e impondo-se  $P_i + X > 0, i \in \mathcal{R}$  segue que

$$\check{\Xi}(h) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Xi_{ij} \quad (3.26)$$

sendo

$$\Xi_{ij} := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k (T_k + X) - A_i R - B_j S_j - R^T A_i^T - S_j^T B_i^T & \bullet \\ T_i - \alpha A_i R - \alpha B_j S_j + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Portanto a primeira condição para projeto de controlador fuzzy pode ser enunciada.

**Teorema 3.1.** *Considere  $|\dot{h}_i| < \phi_i, \forall i \in \mathcal{R}$  e  $\alpha$  um escalar dado. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ , uma matriz simétrica  $X$  e matrizes quaisquer  $S_i, R$  que satisfazem*

$$\Xi_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.28)$$

sendo  $\Xi_{ij}$  definido na equação (3.27). Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = S_i R^{-1}$ .

Retomando a partir da equação (3.25) é possível adotar a solução discutida na Seção 2.4. Devido a convexidade envolvendo  $h$ ,  $\dot{h}$  e as matrizes do problema segue como condição suficiente para  $\tilde{\Xi}(h)$

$$\Xi_{ii}^m < 0, \quad \Xi_{ij}^m + \Xi_{ji}^m < 0 \quad (3.29)$$

sendo

$$\Xi_{ij}^m := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k V_{(k,m)} T_k - A_i R - B_i S_j - R^T A_i^T - S_j^T B_i^T & \bullet \\ T_i - \alpha A_i R - \alpha B_j S_i + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e a matriz  $V_{(k,m)}$  definida em (2.48), sendo possível enunciar o Teorema a seguir:

**Teorema 3.2.** *Considere  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$  e  $\alpha$  um escalar dado. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$  e matrizes quaisquer  $S_i, R$  que satisfazem*

$$\Xi_{ii}^m < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Xi_{ij}^m + \Xi_{ji}^m < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.31)$$

sendo  $\Xi_{ij}^m$  definida na equação (3.30) e a matriz  $V_{(k,m)}$  definida em (2.48). Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = S_i R^{-1}$ .

Antes de proceder aos testes numéricos, serão apresentadas condições de projeto de controlador baseadas em um outro tipo de solução numérica, diferente das soluções propostas na Seção 2.5. Essa solução é adequada para síntese, sendo capaz também de converter desigualdades bilineares para desigualdades lineares. Essa solução numérica foi apresentada em [GK06]:

**Lema 3.2** (Corolário 2 [GK06]). *Sejam dadas matrizes simétricas  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\alpha$  um escalar positivo. Se existirem matrizes quaisquer  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que a LMI a seguir é factível*

$$\begin{bmatrix} W + BL + L^T B^T + J & BL & 0 \\ \bullet & -U - U^T & \alpha P - U \\ \bullet & \bullet & -J \end{bmatrix} < 0$$

então  $U$  é não-singular e  $K = \alpha L U^{-1}$  satisfaz a desigualdade não-linear

$$W + B K P + P^T K^T B^T < 0.$$

A função de Lyapunov fuzzy definida na equação (2.19) é adaptada para lidar de forma apropriada com esse Lema na forma seguinte:

$$V(x, h) = x^T \left( \sum_{i=1}^r h_i P_i \right)^{-1} x = x^T P(h)^{-1} x = x^T X(h) x \quad (3.32)$$

Segundo [TOW07], veja também Seção 2.5.3, sua derivada temporal é dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, h) &= -x^T X^T(h) \dot{P}(h) X(h) x + x^T X(h) \dot{x} + \dot{x}^T X(h) x \\
&= x^T \left\{ -X^T(h) \dot{P}(h) X(h) + X(h) [A(h) + B(h)K(h)] \right. \\
&\quad \left. + [A(h) + B(h)K(h)]^T X(h) \right\} x = x^T \Theta(h, \dot{h}) x.
\end{aligned}$$

Logo deve-se garantir que  $\Theta(h, \dot{h}) < 0$ . Fazendo  $P^T(h)\Theta(h, \dot{h})P(h)$  obtém-se

$$\bar{\Theta}(h, \dot{h}) := -\dot{P}(h) + [A(h) + B(h)K(h)]P(h) + P(h)[A(h) + B(h)K(h)]^T$$

A desigualdade a ser satisfeita,  $\bar{\Theta}(h, \dot{h}) < 0$ , pode ser reescrita para ficar compatível com o enunciado do Lema 3.2

$$W(h) + B(h)K(h)P(h) + P(h)K^T(h)B^T(h) < 0$$

sendo  $W(h) := -\dot{P}(h) + A(h)P(h) + P(h)A^T(h)$ . Com base na equivalência mostrada pelo Lema 3.2 troca-se essa desigualdade pela forma

$$\check{\Theta}(h, \dot{h}) := \begin{bmatrix} W(h) + B(h)L(h) + L^T(h)B^T(h) + J(h) & B(h)L(h) & 0 \\ \bullet & -U - U^T & \alpha P(h) - U \\ \bullet & \bullet & -J(h) \end{bmatrix} < 0. \quad (3.33)$$

Antes de proceder aos Teoremas que fornecem condições LMI para síntese de controlador compare as matrizes em (3.25) e (3.33). Em ambas as variáveis de decisão relacionadas ao controlador,  $L(h)$  em (3.33) e  $S(h)$  em (3.25), apresentam características interessantes do ponto de vista do projeto de controle: tais variáveis não são multiplicadas por outras variáveis, um requisito para se obter LMIs; essas variáveis não estão diretamente relacionadas às matrizes da função de Lyapunov, ao contrário do que ocorria, por exemplo, no projeto de controle via função quadrática discutido na Seção 3.1.

Uma diferença entre (3.25) e (3.33) pode ser destacada nos termos que multiplicam as matrizes da dinâmica do sistema em malha-aberta  $A(h)$ . Em (3.25) esses termos são multiplicados por  $R$ , uma matriz de folga não-singular qualquer, sem restrição de sinal. Já em (3.33) os mesmos termos são multiplicados pelas matrizes  $P(h)$  da função de Lyapunov, simétricas e com sinal positivo. Já em (3.33) há uma matriz de folga a mais do que em (3.25).

Uma última diferença entre (3.25) e (3.33) merece ser detalhada. Na primeira matriz há o termo  $\dot{P}(h)$ , enquanto na outra há o mesmo termo com sinal trocado. Em termos práticos essa questão não faz grande distinção. Para um dos termos será necessário considerar o limite superior (para  $\dot{P}(h)$  com sinal positivo) enquanto para o outro deve-se ater ao limite inferior. Embora possam haver dois limites distintos para cada  $\dot{h}_i$

$$\phi_i^- \leq \dot{h}_i \leq \phi_i^+$$

um negativo  $\phi_i^-$  e outro positivo  $\phi_i^+$ , na prática deve ser considerado aquele que possui maior valor em módulo. Logo, é viável assumir um dentre os dois cenários a seguir

$$\begin{aligned}\phi_i^- &\leq \dot{h}_i \leq -\phi_i^-, \text{ caso } |\phi_i^+| < |\phi_i^-| \\ -\phi_i^+ &\leq \dot{h}_i \leq \phi_i^+, \text{ caso } |\phi_i^-| < |\phi_i^+|\end{aligned}$$

Dessa forma assumindo um limitante único, é possível usá-lo com sinal positivo em (3.25) e com sinal negativo em (3.33).

Após pontuar algumas características relevantes, o desenvolvimento de condições LMI a partir de (3.33) pode ser retomado. Adicionando a matriz  $\bar{X}$ , definida na equação (2.33), usando o fato de que  $\dot{h}_i \geq \phi_i, i \in \mathcal{R}$  e impondo  $P_i + X > 0, i \in \mathcal{R}$ , a condição suficiente é formulada

$$\check{\Theta}(h, \dot{h}) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Theta_{ij} < 0, \quad (3.34)$$

sendo

$$\Theta_{ij} := \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) + A_i P_j + P_j^T A_i^T + B_i L_j + L_j^T B_i^T + J_i & B_i L_j & 0 \\ \bullet & -U - U^T & \alpha P_i - U \\ \bullet & \bullet & -J_i \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

sendo  $\phi_k$  um valor negativo, indicando o limite inferior da derivada temporal das funções de pertinência.

A outra alternativa consiste em retomar a desigualdade (3.33) e explorar a convexidade das funções de pertinência e o politopo que define os possíveis valores de suas derivadas, estabelecendo a condição suficiente a seguir

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \Theta_{ij}^m < 0, \quad (3.36)$$

sendo

$$\Theta_{ij}^m := \begin{bmatrix} -\sum_{k=1}^r \phi_k V_{(k,m)} P_k + A_i P_j + P_j^T A_i^T + B_i L_j + L_j^T B_i^T + J_i & B_i L_j & 0 \\ \bullet & -U - U^T & \alpha P_i - U \\ \bullet & \bullet & -J_i \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

com a matriz  $V_{(k,m)}$  definida em (2.48), porém considerando os limites inferiores e superiores iguais para cada derivada temporal  $\dot{h}_i$  e  $\phi_i$  como escalares negativos. Com base nessas duas alternativas de desenvolvimento é possível enunciar os Teoremas a seguir.

**Teorema 3.3.** *Considere  $\dot{h}_i > \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$  e  $\alpha$  um escalar dado. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $P_i, J_i$ , uma matriz simétrica  $X$  e matrizes quaisquer  $L_i, U$  que satisfazem*

$$\Theta_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Theta_{ij} + \Theta_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.38)$$

sendo  $\Theta_{ij}$  definida na equação (3.35). Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = \alpha L_i U^{-1}$ .

**Teorema 3.4.** *Considere que  $\dot{h}_i > \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$  e que  $\alpha$  seja um escalar dado. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $P_i, J_i$  e matrizes quaisquer  $L_i, U$  que satisfazem*

$$\Theta_{ii}^m < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Theta_{ij}^m + \Theta_{ji}^m < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.39)$$

sendo  $\Theta_{ij}^m$  definida na equação (3.37) e a matriz  $V_{(k,m)}$  definida em (2.48). Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = \alpha L_i U^{-1}$ .

Deste ponto em diante discute-se sobre controle PDC baseado na função definida pela equação (3.17), visando estabelecer condições LMI, uma proposta desta tese haja vista que existem apenas soluções do tipo BMI para essa função. A técnica de desacoplamento empregada será o termo nulo. O Lema 3.2 não pode ser empregado devido à necessidade da inversão das matrizes da função de Lyapunov, o que não é viável conforme discussão na Seção 3.2.1 sobre a estrutura especial desta função.

Aplicando a derivada de Lie [NvdS90] à função (3.17) e reescrevendo em conformidade com a abordagem do termo nulo segue que:

$$\dot{V}(x, h) = \xi^T \begin{bmatrix} 0 & P(h) \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (3.40)$$

sendo  $\xi^T = [x^T \quad \dot{x}^T]$ .

Somando o termo nulo definido na equação (3.21) à equação (3.40) segue que condição a ser satisfeita é

$$\dot{V}(x, h) = \xi^T \Xi(h) \xi < 0 \quad (3.41)$$

sendo

$$\Xi(h) := \begin{bmatrix} -M_1 A(h) - M_1 B(h) K(h) - A^T(h) M_1^T - K^T(h) B^T(h) M_1^T & \bullet \\ P(h) - M_2 A(h) - M_2 B(h) K(h) + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

O termo  $\Xi(h)$  é praticamente o mesmo definido na equação (3.24), exceto pela ausência do termo  $\dot{P}(h)$  no bloco (1,1), relacionado à parametrização pela taxa de variação das funções de pertinência, que não ocorre com a derivada da função (3.17). Por brevidade, os passos para chegar às condições linearizadas são omitidos. Seguindo exatamente os mesmos passos feitos para se obter (3.25) chega-se a desigualdade

$$\check{\Xi}(h) < 0 \quad (3.43)$$

sendo

$$\begin{aligned} \check{\Xi}(h) &:= \begin{bmatrix} -A(h)R - B(h)S(h) - R^T A^T(h) - S^T(h)B^T(h) & \bullet \\ T(h) - \alpha A(h)R - \alpha B(h)S(h) + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \begin{bmatrix} -A_i R - B_i S_j - R^T A_i^T - S_j^T B_i^T & \bullet \\ T_i - \alpha A_i R - \alpha B_j S_i + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Finalmente o Teorema a seguir apresenta condições LMI suficientes, baseadas na função de Lyapunov fuzzy no formato integral, para projeto de controlador fuzzy.

**Teorema 3.5.** *Considere  $\alpha$  um escalar dado. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $T_i$ , restrita pela equação (3.19), e matrizes quaisquer  $R, S_i$  que satisfazem*

$$\Xi_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.45)$$

sendo  $\Xi_{ij}$  definido na equação (3.44). Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = S_i R^{-1}$ .

Antes de proceder às comparações numéricas uma consideração dever ser feita com relação às condições estabelecidas. Em todos os casos é necessário definir de antemão um escalar  $\alpha$ . Portanto pode ser necessário realizar uma busca unidimensional nesse parâmetro até que seja determinada factibilidade das condições. As condições propostas no Teorema 3.1 são similares às condições observadas em [EH04] mas que tratam o caso de sistemas incertos invariantes no tempo. No caso apresentado em [EH04] mostra-se que caso o sistema seja quadraticamente estabilizável então existe um valor  $\alpha$  que assegura factibilidade. Conclusões análogas são feitas em [GK06] com relação ao parâmetro escalar do Lema 3.2.

### 3.3.2 Comparações Numéricas

Nesta seção um exemplo numérico será abordado com o objetivo de comparar a redução no conservadorismo obtida pelas metodologias de projeto de controlador propostas com relação ao projeto baseado na estabilidade quadrática.

Um sistema de segunda ordem com duas regras será considerado. As matrizes locais são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,63 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}$$

cujas funções de pertinência são

$$h_1(x_1) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \text{atan}(x_1) \right), \quad h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1). \quad (3.46)$$

O objetivo desse exemplo é investigar o conjunto de parâmetros  $(a, b)$  para o qual é possível encontrar um controlador que estabilize o sistema. Nesse sentido, o exemplo servirá como figura de mérito para comparar as abordagens propostas entre si, obtendo uma medida da redução no conservadorismo. A busca no conjunto de parâmetros ocorreu em uma malha uniforme:  $b \in [0, 2]$ , com espaçamento 0,05 e  $a \in [5, 25]$ , com espaçamento 1. Dessa forma a abordagem menos conservadora será aquela que consegue determinar ao menos um controlador para a maior quantidade de pares  $(a, b)$ .

Alguns parâmetros devem ser definidos. Para os Teoremas 3.2 e 3.4 a matriz  $V$  da equação (2.48) tem a estrutura a seguir

$$V = \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Para o Teorema 3.5 é necessário definir a estrutura das matrizes da função de Lyapunov. Como o sistema possui duas regras e a variável premissa é apenas  $x_1$  para ambas funções de pertinência, de acordo com a equação (3.19) apenas o primeiro termo da diagonal principal das matrizes deverá ser modificado, resultando em

$$P_1 = \begin{bmatrix} d_{11} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} d_{22} & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

sendo que os elementos das matrizes são variáveis escalares.

Para representar o projeto de controlador quadraticamente estabilizante foi escolhido o Teorema 2 em [MOP09]. As condições estabelecidas na seção anterior possuem um conjunto de LMIs fixo. De acordo com a ordem e a quantidade de regras do sistema esse conjunto pode crescer em quantidade de LMIs como também no tamanho de cada uma delas. Contudo, a estrutura de cada LMI permanece a mesma. Em [MOP09] a estrutura do conjunto de LMIs não é fixo, mudando de acordo com dois parâmetros escolhidos pelo projetista. A medida que esses parâmetros crescem a complexidade computacional aumenta e as condições convergem assintoticamente para um conjunto necessário e suficiente. Dessa forma escolheu-se uma forma bastante relaxada do Teorema 2 de [MOP09] usando os parâmetros  $g = d = 5$ . Essa escolha é menos conservadora que várias condições de projeto via estabilidade quadrática, veja [MOP09, Seção III.C].

Com relação aos parâmetros  $\alpha$  necessários para o projeto de controlador com base nas condições dos Teoremas 3.1 a 3.4 não foi feita uma busca otimizada individual para cada par da malha investigada. Em outras palavras se dado um par  $(a_1, b_1)$  e um escalar  $\alpha_1$  que consegue projetar um controlador, no par vizinho  $(a_2, b_2)$  a escolha desse mesmo escalar  $\alpha_1$  pode não ser bem sucedida. Contudo, pode haver outro escalar distinto  $\alpha_2$  que garante um controlador para  $(a_2, b_2)$ . Dessa forma foi feita uma escolha fixa para  $\alpha$  e em seguida a varredura na malha uniforme de parâmetros  $(a, b)$  sem trocar o valor de  $\alpha$ . Outro detalhe a ser destacado é o fato que, em geral, os escalares que atendem as condições obtidas via termo nulo, Teoremas 3.1, 3.2 e 3.5, não atendem as condições obtidas via Lema 3.2, Teoremas 3.3 e 3.4. Portanto o escalar do primeiro grupo de condições será indicado por  $\alpha_n$  e do segundo indicado por  $\alpha_p$ .

As comparações são mostradas nas Figuras 3.1 a 3.6 e sumarizadas na Tabela 3.1, que mostra a quantidade de testes bem sucedidos de acordo com cada abordagem. Em todos

**Tabela 3.1** Quantidade de testes bem sucedidos para cada metodologia de projeto. Os resultados são ordenados de acordo com  $N$ , que indica a quantidade de pares  $(a, b)$  para os quais as metodologias são factíveis.

Método	$N$	$\alpha$	$\phi$
Teorema 2 [MOP09]	441	$\times$	$\times$
Teorema 3.3	451	50,00	10
Teorema 3.1	462	0,010	10
Teorema 3.4	497	50,00	10
Teorema 3.2	508	0,010	10
Teorema 3.5	519	0,010	$\times$
Teorema 3.3	539	10,00	1,0
Teorema 3.4	561	10,00	1,0
Teorema 3.3	577	50,00	1,0
Teorema 3.4	602	50,00	1,0
Teorema 3.1	680	0,035	1,0
Teorema 3.2	711	0,035	1,0

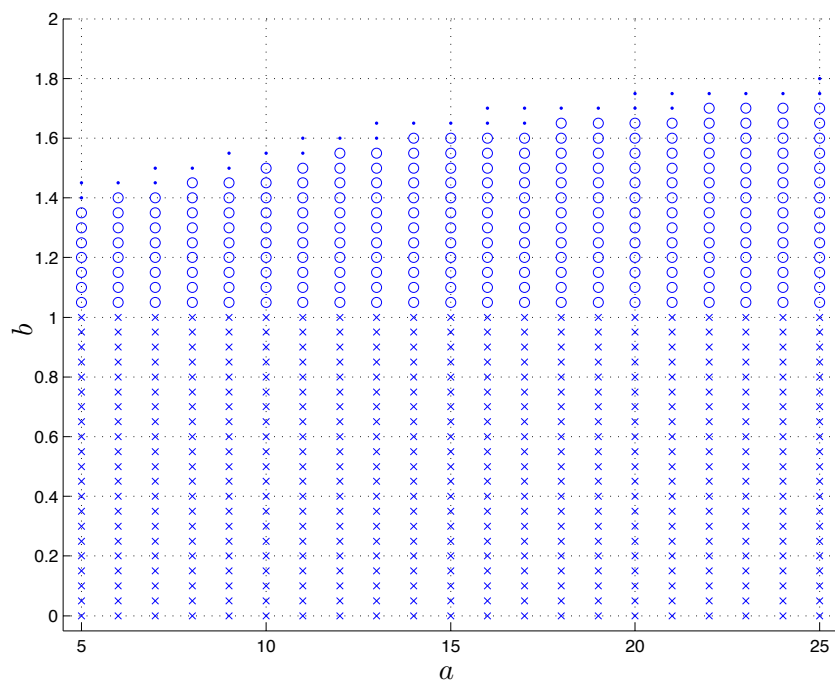
os casos as condições propostas conseguem determinar controladores para um conjunto maior de parâmetros do que a condição baseada na estabilidade quadrática.

Mesmo quando um valor elevado é atribuído como limitante para a derivada da função de pertinência as condições propostas ainda são menos conservadoras que a estabilidade quadrática, veja as Figuras 3.2 e 3.5 e também as linhas dois a cinco da Tabela 3.1. Em relação à estabilidade quadrática, no pior caso foi verificado que Teorema 3.3, Teorema 3.1, Teorema 3.4 e Teorema 3.2 conseguem ainda ser, respectivamente, 2%, 4%, 13% e 15% melhores. Comparando as abordagens que independem da taxa de variação das funções de pertinência, nota-se que o Teorema 3.5 consegue ser 18% melhor que o Teorema 2 em [MOP09]. A análise revela também que no caso de um limitante elevado os Teoremas 3.4 e 3.2 possuem um desempenho muito próximo ao resultado obtido com o Teorema 3.5, diferindo no máximo em 5%. Quando se permite um valor menor para a derivada das funções de pertinência nota-se a melhoria obtida com as metodologias propostas, chegando a uma eficiência em encontrar controladores 70% maior.

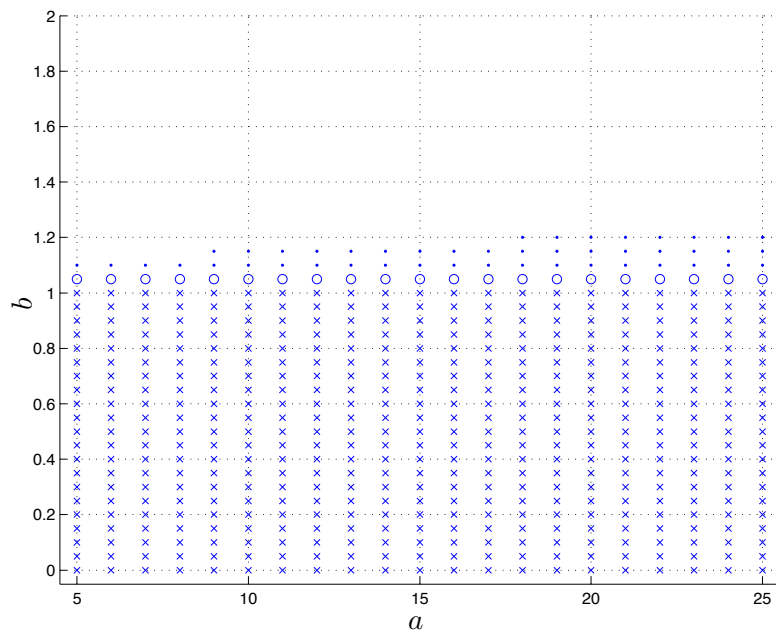
Como visto no Capítulo 2, em se tratando de análise de estabilidade, as condições baseadas na característica politópica das derivadas das funções de pertinência foram menos conservadoras do que as abordagens que baseiam-se apenas na suposição de pior caso, todas as funções de pertinência com mesmo sinal. Isso pode ser novamente constatado para o projeto de controlador, conforme as Figuras 3.1 a 3.5 mostram, onde as condições baseadas apenas em limitantes (superiores ou inferiores) são demarcadas com  $(\circ)$  e  $(\times)$ , enquanto as condições que exploram a variedade politópica definida por  $\hat{h}$  são assinaladas por  $(\cdot)$ ,  $(\circ)$  e  $(\times)$ . Na Tabela 3.1 basta comparar o Teorema 3.1 em relação ao Teorema 3.2 e o Teorema 3.3 frente ao Teorema 3.4.

É interessante comparar os Teoremas que dependem das derivadas das funções de per-

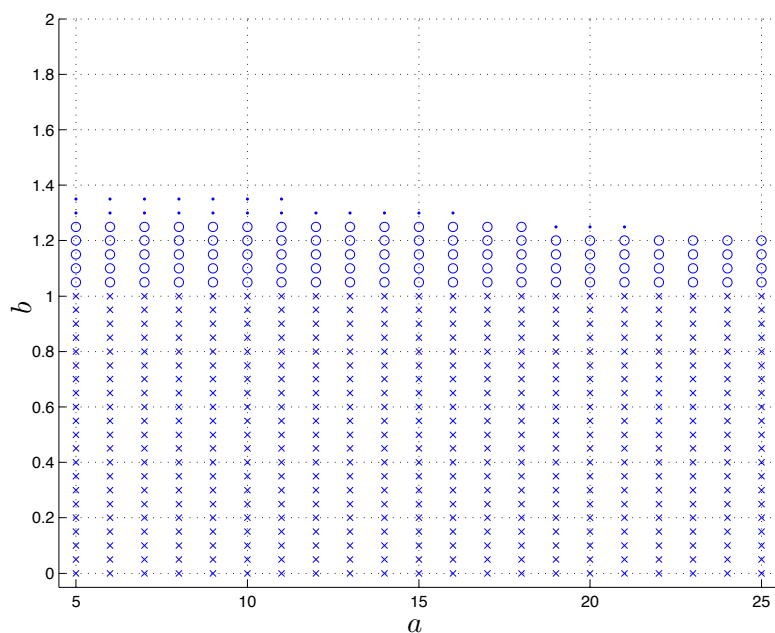




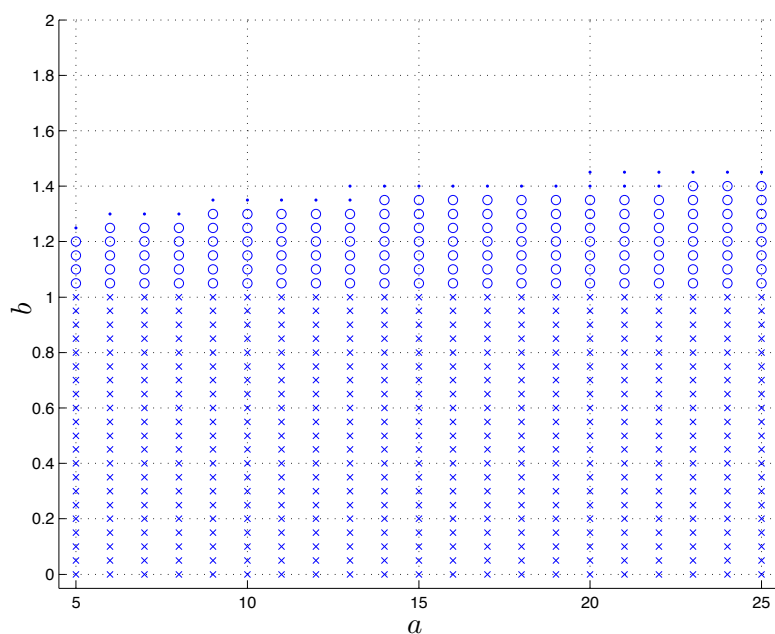
**Figura 3.1** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condições baseadas na função de Lyapunov fuzzy, Teorema 3.1, assinalado por ( $\times$ ) e ( $\circ$ ); Teorema 3.2, ( $\cdot$ ), ( $\circ$ ) e ( $\times$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetros  $\phi_i = 1$  e  $\alpha_n = 0,035$ .



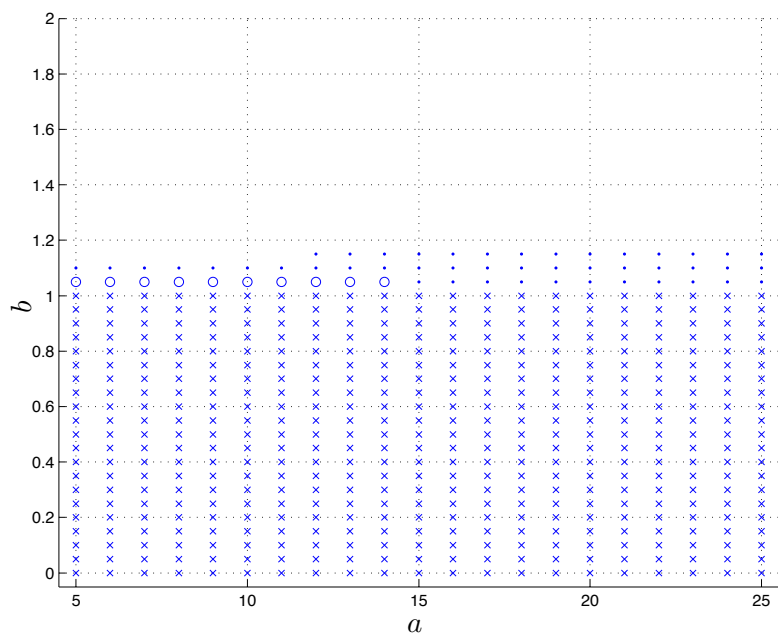
**Figura 3.2** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condições baseadas na função de Lyapunov fuzzy, Teorema 3.1, assinalado por ( $\times$ ) e ( $\circ$ ); Teorema 3.2, ( $\cdot$ ), ( $\circ$ ) e ( $\times$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetros  $\phi_i = 10$  e  $\alpha_n = 0,01$ .



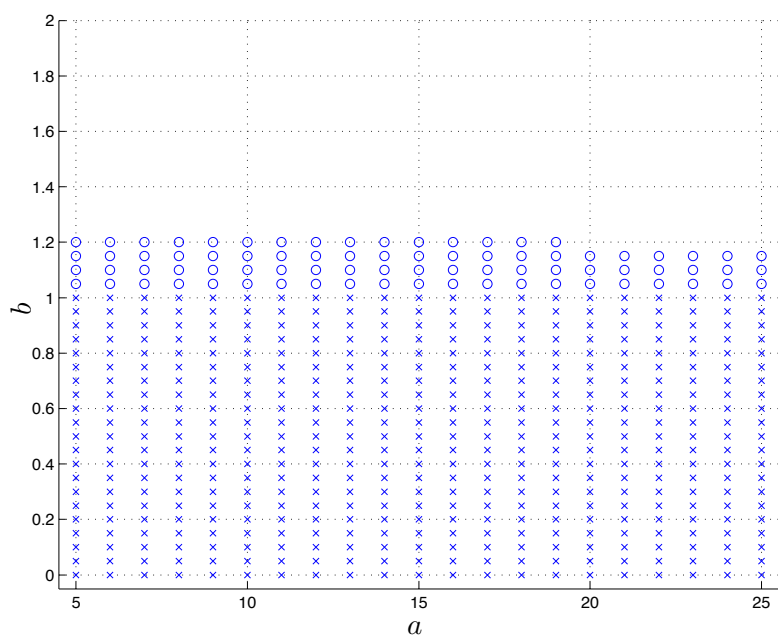
**Figura 3.3** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condições baseadas na função de Lyapunov fuzzy, Teorema 3.3, assinalado por ( $\times$ ) e ( $\circ$ ); Teorema 3.4, ( $\cdot$ ), ( $\circ$ ) e ( $\times$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetros  $\phi_i = 1$  e  $\alpha_r = 10$ .



**Figura 3.4** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condições baseadas na função de Lyapunov fuzzy, Teorema 3.3, assinalado por ( $\times$ ) e ( $\circ$ ); Teorema 3.4, ( $\cdot$ ), ( $\circ$ ) e ( $\times$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetros  $\phi_i = 1$  e  $\alpha_r = 50$ .



**Figura 3.5** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condições baseadas na função de Lyapunov fuzzy, Teorema 3.3, assinalado por ( $\times$ ) e ( $\circ$ ); Teorema 3.4, ( $\cdot$ ), ( $\circ$ ) e ( $\times$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetros  $\phi_i = 10$  e  $\alpha_r = 50$ .



**Figura 3.6** Conjunto para o qual o projeto de controlador é factível: estabilidade quadrática, Teorema 2 de [MOP09], assinalado com ( $\times$ ); condição baseada na função de Lyapunov fuzzy integral, Teorema 3.5, ( $\times$ ) e ( $\circ$ ), todos os pontos assinalados. Parâmetro  $\alpha_n = 0,01$ .

**Tabela 3.2** Parâmetros do pêndulo invertido controlado por motor de corrente contínua.

Parâmetros	Valor
$k_1$	9,8
$k_2$	1,0
$k_3$	-10
$k_4$	-10
$k_5$	10

tinência entre si. Embora seja apenas um exemplo numérico pode-se perceber um melhor desempenho dos Teoremas 3.1 e 3.2, baseados no termo nulo, em relação a suas contrapartidas baseadas na solução numérica proposta pelo Lema 3.2, quais sejam, Teoremas 3.3 e 3.4.

Uma possível explicação para esse desempenho pode ser atribuída a uma observação feita na seção anterior. Nos Teoremas 3.1 e 3.2 o acoplamento entre matrizes do sistema e da função de Lyapunov praticamente não existe. As variáveis de decisão da função candidata  $P(h)$  não são multiplicadas nem por  $A(h)$  nem por  $B(h)$ . No caso dos Teoremas 3.3 e 3.4 ainda há um certo acoplamento, pois embora  $B(h)$  e  $P(h)$  não sejam multiplicados, persiste a multiplicação entre as matrizes  $P(h)$  e  $A(h)$ . Isso pode ser conservador pois se impõe sobre  $P(h)$  simetria e sinal. Já nos Teoremas 3.1 e 3.2,  $A(h)$  são multiplicadas por matrizes livres  $R$ , sem exigência de sinal ou simetria, fornecendo maior grau de liberdade ao conjunto de LMIs.

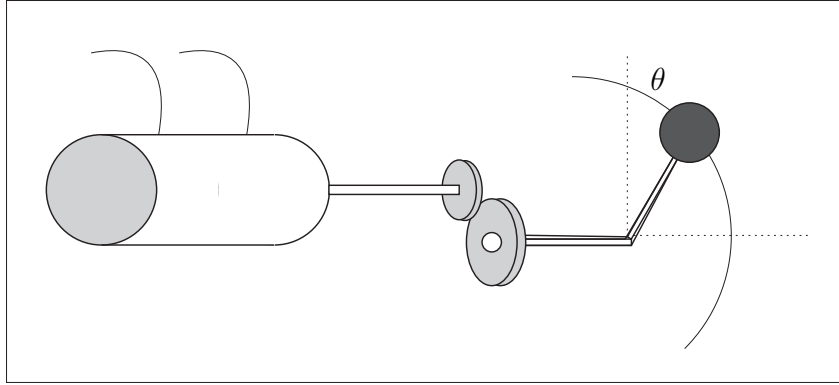
### 3.3.3 Exemplos de Simulação

Finalizando este capítulo, alguns exemplos são apresentados nos quais sistemas não-lineares reais são simulados sob a ação de controladores projetados segundo as diversas metodologias propostas. Haja vista que as metodologias propostas visam apenas controle estabilizante, sem nenhum critério de desempenho embutido na etapa de síntese, esses exemplos terão caráter ilustrativo, não sendo dado enfoque na comparação entre desempenho dos controladores gerados.

**3.3.3.1 Sistema Mecânico Simples** O primeiro exemplo considerado consiste em um pêndulo invertido controlado por um motor de corrente contínua, acoplados por um conjunto de engrenagens, conforme ilustrado na Figura 3.7. A dinâmica desse sistema é dada segundo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ k_1 \sin(x_1) + k_2 x_3 \\ k_3 x_2 + k_4 x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{bmatrix} u$$

sendo que no vetor de estados  $x_1 = \theta$ , o ângulo computado a partir da vertical;  $x_2 = \omega = \dot{\theta}$ , a velocidade angular;  $x_3 = I$ , é a corrente do motor. Os parâmetros foram obtidos em [Kaw96] e são mostrados na Tabela 3.2.



**Figura 3.7** Diagrama esquemático do sistema mecânico não-linear: pêndulo invertido controlado por um motor de corrente contínua.

Um modelo com duas regras foi obtido em [TIW98]. Os vértices determinados são

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9,8 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

As funções de pertinência são

$$h_1 = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x_1)}{x_1}, & \text{caso } x_1 \neq 0 \\ 1, & \text{caso } x_1 = 0 \end{cases}, \quad h_2 = 1 - h_1$$

Este modelo é exato para no universo de discurso  $|x_1| \leq \pi$  [TIW98]. A derivada da função de pertinência pode ser obtida fazendo

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\text{sen}(x_1)}{x_1} \right) = \frac{x_1 \frac{d}{dt} (\text{sen}(x_1)) - \text{sen}(x_1) \frac{d}{dt} (x_1)}{x_1^2} = \frac{x_1 \cos(x_1) \dot{x}_1 - \text{sen}(x_1) \dot{x}_1}{x_1^2} \\ &= \frac{x_1 \cos(x_1) x_2 - \text{sen}(x_1) x_2}{x_1^2} \end{aligned}$$

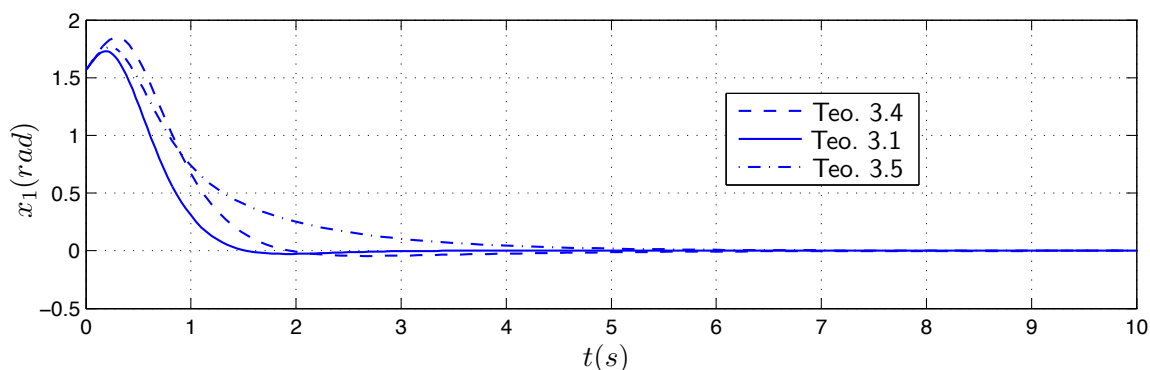
Para determinar um limitante para essa derivada é necessário restringir o universo de discurso com relação ao estado  $x_2$ . Valores típicos de rotação para motores comerciais de pequeno porte variam entre 2000 a 4000 RPM [WEG01]. Portanto, é plausível restringir  $x_2$  a 15rad/s. Nesse universo de discurso um limitante para  $\dot{h}_1$  é  $\phi = 10$ .

Com a definição desses parâmetros é possível aplicar as metodologias propostas para projeto dos ganhos de um controlador por realimentação completa de estados na forma PDC. Os resultados encontram-se na Tabela 3.3. Em termos de norma os ganhos obtidos segundo as várias metodologia são parecidos, não devendo ser tão diferentes durante a ação de controle.

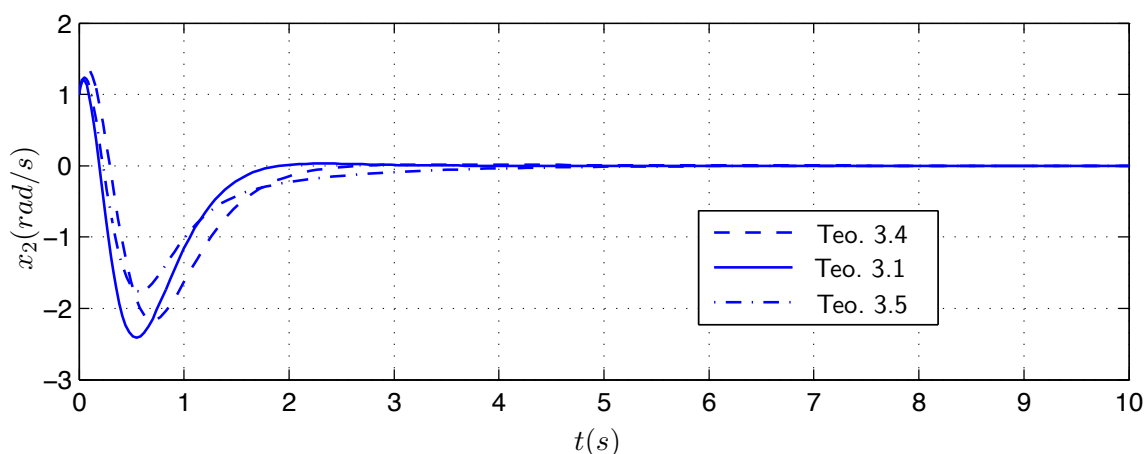
As Figuras 3.8 a 3.10 mostram a evolução temporal dos estados para a condição inicial  $x_0 = [\pi/2 \ 1 \ 0]^T$ . O controlador projetado pelo Teorema 3.1 é capaz garantir uma

**Tabela 3.3** Ganhos projetados para controle do pêndulo invertido segundo as metodologias propostas. Parâmetros usados  $\alpha_n = 1$ ,  $\alpha_p = 5$  e  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 10$ .

Método	$F_i$
Teorema 3.1	$F_1 = [-15,393 \quad -3,6614 \quad -0,0925]$
	$F_2 = [-12,656 \quad -3,6722 \quad -0,0920]$
Teorema 3.2	$F_1 = [-10,312 \quad -2,2366 \quad 0,1324]$
	$F_2 = [-7,3570 \quad -2,2418 \quad 0,1453]$
Teorema 3.3	$F_1 = [-16,251 \quad -4,7964 \quad -0,2926]$
	$F_2 = [-9,2546 \quad -3,9219 \quad -0,2164]$
Teorema 3.4	$F_1 = [-14,296 \quad -4,1803 \quad -0,1732]$
	$F_2 = [-7,7249 \quad -3,1489 \quad 0,0590]$
Teorema 3.5	$F_1 = [-7,7870 \quad -1,4297 \quad 0,2742]$
	$F_2 = [-8,5642 \quad -2,0878 \quad 0,1395]$



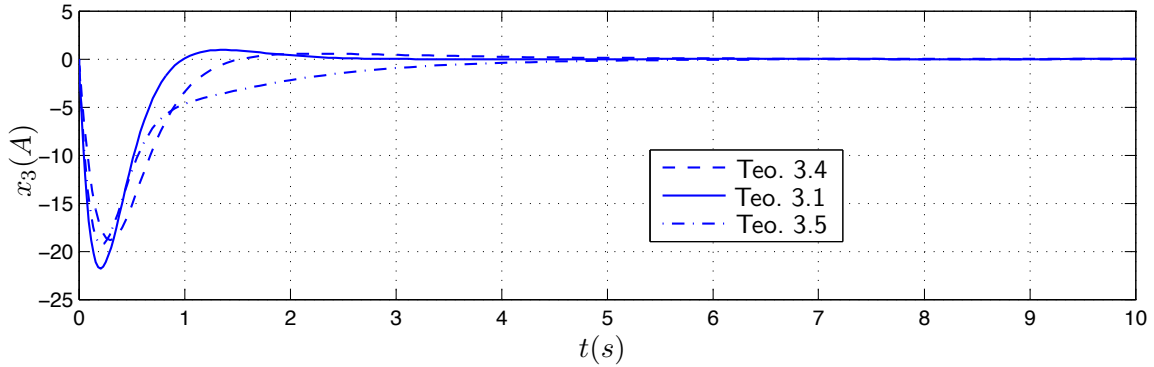
**Figura 3.8** Simulação dos controladores projetados com os Teoremas 3.1, 3.4 e 3.5: evolução temporal da posição angular.



**Figura 3.9** Simulação dos controladores projetados com os Teoremas 3.1, 3.4 e 3.5: evolução temporal da velocidade angular.

condição de equilíbrio a partir de 2s. É possível ver que para os demais essa condição é alcançada com aproximadamente 5s. Isso pode ser justificado pelos ganhos maiores obtidos com Teorema 3.1 em comparação aos Teoremas 3.4 e 3.5. Nota-se que o valor da corrente chega a atingir um pico de aproximadamente 20A, mas não foi especificado nenhum critério de desempenho com relação a limitação na norma da saída nem do sinal de controle. De qualquer forma tais valores não são excessivos para motores desse porte.

**3.3.3.2 Veículo Aéreo Não-Tripulado: Helimodelo em Escala Reduzida** O desenvolvimento dos chamados VANTs (veículos aéreos não-tripulados) têm crescido bastante nos últimos anos. Embora os setores militares sejam os maiores investidores, o mercado de aplicações civis encontra-se em franco crescimento, sobretudo em atividades repetitivas, tediosas ou perigosas para um piloto [IPT10, CCM<sup>+</sup>09]. Nesse contexto é possível enumerar: inspeção, tanto para localização de falhas ou situações com dano em potencial, de linhas de transmissão ou gasodutos [Jon05, GJ05, TPM09, HZSS05]; o monitoramento do tráfego urbano [PVK07]; pulverização de plantações [Mor10].



**Figura 3.10** Simulação dos controladores projetados com os Teoremas 3.1, 3.4 e 3.5: evolução temporal da corrente.

Dentre a diversidade de aplicações merece destaque o suporte proporcionado por esses veículos em grandes desastres naturais, tanto na busca por sobreviventes, quanto na coleta de dados em ambientes hostis [SMNI08]. Durante as etapas de socorro e recuperação dos danos causados pelos furacões Katrina e Wilma no Estados Unidos, VANTs foram usados para avaliar o abalo estrutural em edificações [MPB08]. Recentemente, no tsunami provocado pelo pior terremoto da história do Japão o VANT Global Hawk foi utilizado para avaliar os danos nos reatores da usina nuclear de Fukushima [The11, IEE11, Blo11].

Em [TKOW08] é realizado um estudo sobre o controle automático de um helicóptero em pequena escala com sensoriamento embarcado. Apesar do controle completo desse veículo envolver seis graus de liberdade, o protótipo estudado possui dois rotores e uma estrutura mecânica capaz de manter seu rotor principal na posição horizontal. Dessa forma o modelo não-linear é reescrito como

$$\dot{u} = rv + \frac{1}{m}U_x \quad (3.47)$$

$$\dot{v} = -ru + \frac{1}{m}U_y \quad (3.48)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m}U_z \quad (3.49)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_z}U_\psi \quad (3.50)$$

sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  a posição e  $u$ ,  $v$  e  $w$  as respectivas velocidades;  $\psi$  é o ângulo de guinada<sup>3</sup>, cuja velocidade angular é dada por  $r$ ;  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  e  $U_\psi$  são os sinais de controle. A massa total do helimodelo é  $m = 0,200$  e o momento de inércia em torno do eixo  $z$  é  $I_z = 0,2857$ .

Em [TKOW08] foi adotada uma lei de controle linear para a dinâmica da guinada, haja vista que ela interfere nos demais estados mas nenhum deles interfere nela:

$$U_\psi = -a\psi$$

<sup>3</sup>Devido à estrutura do helimodelo os ângulos de rolagem e arfagem são mantidos constantes.



sendo  $a$  um valor positivo. Embora o valor de  $a$  não tenha sido informado em [TKOW08] pode ser utilizado o valor de referência  $a = 1,5$  no trabalho posterior [TOW09]. Isso resulta no seguinte modelo a ser estabilizado

$$\dot{u} = -\frac{a}{I_z}\psi v + \frac{1}{m}U_x \quad (3.51)$$

$$\dot{v} = \frac{a}{I_z}\psi u + \frac{1}{m}U_y \quad (3.52)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m}U_z \quad (3.53)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{a}{I_z}\psi \quad (3.54)$$

Estados adicionais são incluídos para rastreamento da trajetória de referência enviada ao helimodelo remotamente:

$$\bar{x} = [e_x \ e_y \ e_z]^T = [x - x_r \ y - y_r \ z - z_r]^T$$

sendo que  $x_r$ ,  $y_r$  e  $z_r$  são posições de referência.

Finalmente um modelo dinâmico aumentado de sexta ordem com duas regras, baseado no conceito da modelagem pela não-linearidade setorial [OTW01, TW01], pode ser obtido, sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a\pi}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a\pi}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a\pi}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a\pi}{I_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_1 = \frac{\psi + \pi}{2\pi}, \quad h_2 = \frac{\pi - \psi}{2\pi}$$

$$x = [u \ v \ w \ e_x \ e_y \ e_z]^T$$

Essa modelagem é exata para no universo de discurso  $|\psi| \leq \pi$ . Note que devido a característica peculiar desse sistema, com um acoplamento parcial no qual a dinâmica de alguns estados é influenciada por outro sem que este sofra influência dos demais, a variável premissa  $\psi$  não faz parte do vetor de estados para o modelo fuzzy. Portanto, a metodologia proposta no Teorema 3.5 baseada na função do tipo integral não pode ser adotada, recorde a Seção 3.2.1.

A derivada temporal da função de pertinência pode ser facilmente obtida como

**Tabela 3.4** Ganhos projetados para controle do helimodelo autônomo segundo uma das metodologias propostas. Parâmetros usados  $\alpha_n = 0,1$  e  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 18$ .

Método	$F_i$
Teorema 3.1	$F_1 = \begin{bmatrix} -2,0882 & 21,9771 & -0,0000 & -0,8843 & -0,0050 & 0,0000 \\ -21,9771 & -2,0882 & -0,0000 & 0,0050 & -0,8843 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & -1,2924 & -0,0000 & -0,0000 & -0,6244 \end{bmatrix}$
	$F_2 = \begin{bmatrix} -2,0882 & -22,0074 & -0,0000 & -0,8843 & -0,0050 & 0,0000 \\ 22,0074 & -2,0882 & -0,0000 & 0,0050 & -0,8843 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & -1,2924 & -0,0000 & -0,0000 & -0,6244 \end{bmatrix}$

**Tabela 3.5** Referência para o voo do helimodelo decolando a partir do solo.

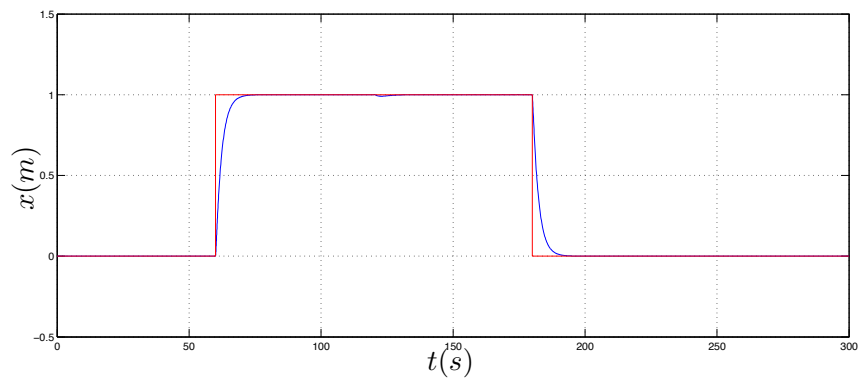
Referência	Tempo
$[0 \ 0 \ 1]^T$	$t \leq 60$
$[1 \ 0 \ 1]^T$	$60 < t \leq 120$
$[1 \ 1 \ 1]^T$	$120 < t \leq 180$
$[0 \ 1 \ 1]^T$	$180 < t \leq 240$
$[0 \ 1 \ 0]^T$	$240 < t \leq 300$

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{2\pi} \dot{\psi} = \frac{1}{2\pi} \frac{a\psi}{I_z}$$

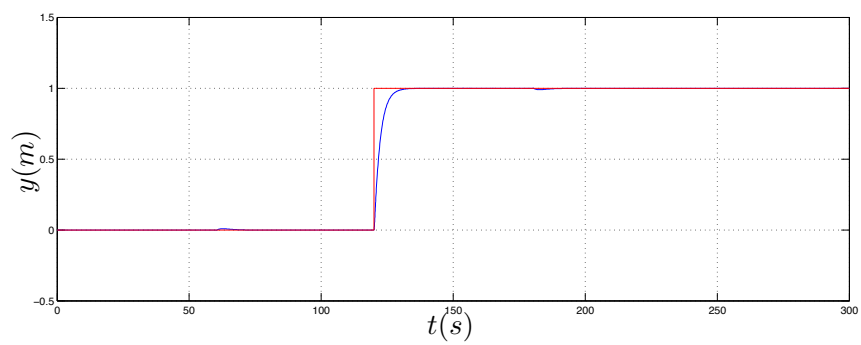
De acordo com a proposta em [TOW09], selecionando-se  $a = 1,5$ , haja vista que  $\psi \leq \pi$ , tem-se que  $\dot{h}_1 = 17,501$ . Portanto, pode-se adotar  $\phi = 18$  para efeito de projeto do controlador. Os ganhos projetados encontram-se na Tabela 3.4.

Um voo com duração de 5min, decolando a partir do solo, foi planejado, tendo como referência os valores mostrados na Tabela 3.5. Nas Figuras 3.11 a 3.13 são mostrados os sinais de referência em vermelho e a trajetória descrita em azul. Note que o helimodelo é capaz de seguir a trajetória sem oscilações em questão de poucos segundos, um desempenho bom haja vista sua reduzida dimensão, cerca de 36x16x9cm (CxAxL).

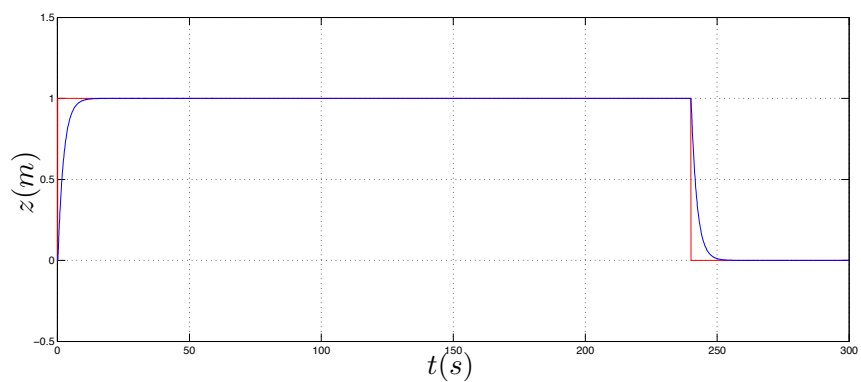
A Figura 3.14 mostra a trajetória completa descrita pelo VANT bem como os pontos de decolagem, pouso e nos quais foi obrigado a pairar. Note que o controlador fuzzy projetado é capaz de rastrear a trajetória desejada com boa precisão.



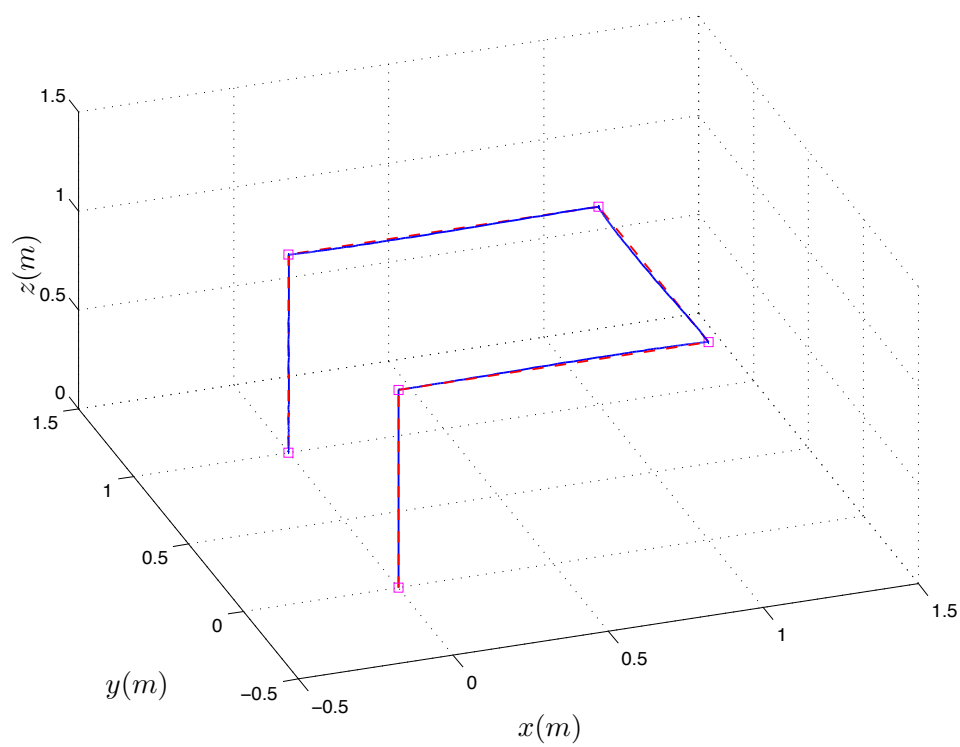
**Figura 3.11** Controle do VANT: coordenada  $x$ . Em azul a trajetória descrita e em vermelho o sinal de referência.



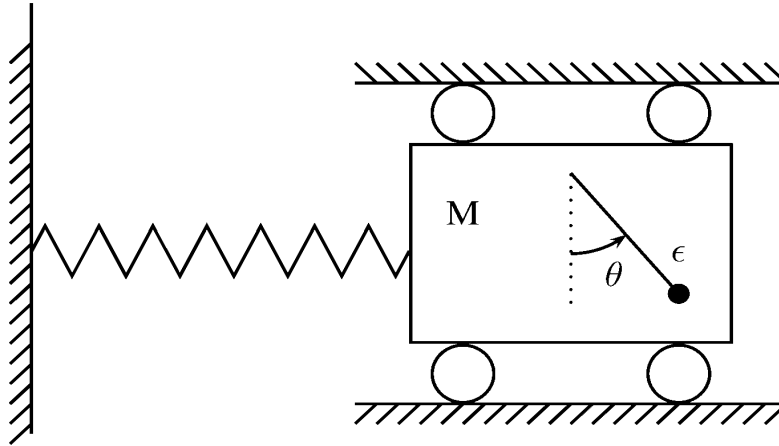
**Figura 3.12** Controle do VANT: coordenada  $y$ . Em azul a trajetória descrita e em vermelho o sinal de referência.



**Figura 3.13** Controle do VANT: coordenada  $z$ . Em azul a trajetória descrita e em vermelho o sinal de referência.



**Figura 3.14** Trajetória descrita pelo helimodelo durante o voo (em azul) e a referência (pontilhado em vermelho). Os pontos nos quais o helimodelo descolou, pairou e pousou foram assinalados com  $\square$ .



**Figura 3.15** Diagrama esquemático da planta não-linear considerada, TORA: Translational Oscillation by a Rotational Actuator.

**3.3.3.3 Outro Sistema Mecânico** O sistema escolhido para o teste de simulação é uma planta não-linear conhecida pela sigla TORA<sup>4</sup>, sendo um *benchmark* de controle não-linear proposto em [BBC95]. O sistema consiste em um carro de massa  $M$  com liberdade de movimento unidimensional conectado a uma mola linear de coeficiente elástico  $k$ . O atuador rotacional consiste em um pêndulo que gira no plano horizontal do carro, com centro de massa localizado a uma distância  $\epsilon$  do centro de massa do carro. Portanto o torque exercido pelo atuador irá limitar a movimentação do carro, sendo esse acoplamento não-linear o mecanismo de controle. No *benchmark* proposto em [BBC95] há várias restrições que devem ser observadas. Aqui o interesse é somente pela estabilização do sistema em torno da posição  $\theta = x = 0$ . A Figura 3.15 ilustra esquematicamente esse sistema.

Esse modelo é de quarta ordem sendo que seus estados são: o deslocamento  $x_1$  e a velocidade  $x_2 = \dot{x}_1$  de translação do carro; o ângulo do rotor  $x_3$  e sua velocidade angular  $x_4 = \dot{x}_3$ . A dinâmica normalizada é dada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-x_1 + \epsilon x_4^2 \sin(x_3)}{1 - \epsilon^2 \cos^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{\epsilon \cos(x_3)(x_1 - \epsilon x_4^2 \sin(x_3))}{1 - \epsilon^2 \cos^2(x_3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-\epsilon \cos(x_3)}{1 - \epsilon^2 \cos^2(x_3)} \\ 0 \\ \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2(x_3)} \end{bmatrix} u$$

Fazendo as transformações

$$z_1 := x_1 + \epsilon \sin(x_3), \quad z_2 := x_2 + \epsilon x_4 \cos(x_3), \quad y_1 = x_3, \quad y_2 = x_4$$

e a linearização parcial por realimentação dos estados [NvdS90, Kha01]

<sup>4</sup>Acrônimo inglês para *Translational Oscillation by a Rotational Actuator*.

$$v = \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos(y_1)^2} [\epsilon \cos(y_1)(z_1 - (1 + y_2^2)\epsilon \operatorname{sen} y_1) + u]$$

é obtido o seguinte modelo auxiliar

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_1 + \epsilon \operatorname{sen} y_1 \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= v\end{aligned}$$

Em [WL07] um modelo fuzzy TS exato é proposto para o modelo auxiliar, que possui apenas um termo não-linear. O universo de discurso desse modelo restringe sua validade a  $-\pi \leq x_3 \leq \pi$ . As matrizes locais são

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \epsilon_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

sendo que  $\epsilon_1 = \epsilon$ ,  $\epsilon_2 = 2\epsilon/\pi$  e  $0,05\epsilon$ . O parâmetro  $\epsilon = 0,1$  foi retirado também da referência [WL07].

As funções de pertinência são definidas como

$$h_2 = \begin{cases} 1 - \frac{\operatorname{sen}(x_3)}{\frac{x_3}{2}}, & 0 \leq |x_3| \leq \pi/2 \\ 1 - \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}(x_3)}{2 x_3}, & \pi/2 \leq |x_3| \leq \pi \end{cases}$$

$$h_1 = \begin{cases} 1 - h_2, & 0 \leq |x_3| \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \leq |x_3| \leq \pi \end{cases}, \quad h_3 = \begin{cases} 0, & 0 \leq |x_3| \leq \pi/2 \\ 1 - h_2, & \pi/2 \leq |x_3| \leq \pi \end{cases}$$

A derivada temporal da função de pertinência  $h_3$  pode ser calculada como

$$\dot{h}_3 = \frac{dh_3}{dx_3} \frac{dx_3}{dt} \quad (3.55)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x_3) - x_3 \cos(x_3)}{x_3^2} \dot{x}_3 \quad (3.56)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(x_3) - x_3 \cos(x_3)}{x_3} \quad (3.57)$$

Uma vez que  $x_3$  está confinado entre  $-\pi$  e  $\pi$  o limitante da derivadas é dado por aproximadamente 1,063. Portanto escolhe-se com certa margem de folga  $\phi = 1,5$  como parâmetro para o projeto com os métodos que dependem das derivadas das funções de

**Tabela 3.6** Ganhos projetados segundo as metodologias propostas. Parâmetros usados  $\alpha_n = 1$ ,  $\alpha_p = 1$  e  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 1,5$ .

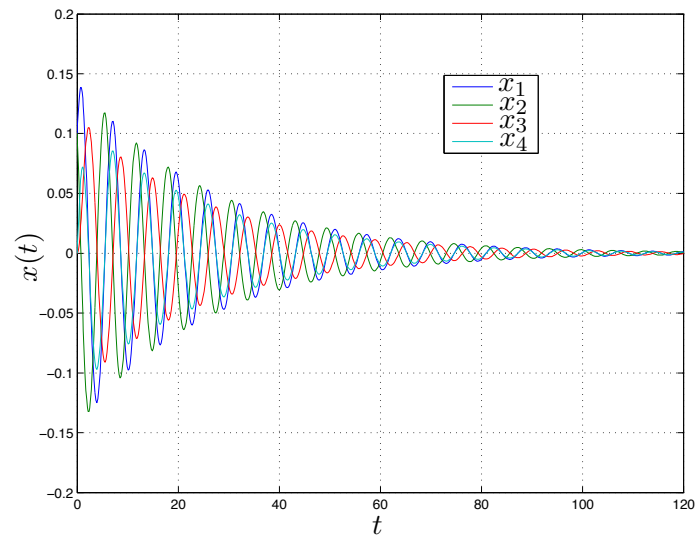
Método	$F(h)$
Teorema 3.1	$F_1 = \begin{bmatrix} 2,3830 & -1,3538 & -2,7466 & -3,2793 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 2,3826 & -1,3148 & -2,7392 & -3,2782 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 2,3757 & -1,2352 & -2,7242 & -3,2730 \end{bmatrix}$
Teorema 3.2	$F_1 = \begin{bmatrix} 1,3503 & -0,1132 & -1,1498 & -2,0594 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 1,3485 & -0,1057 & -1,1481 & -2,0566 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 1,3446 & -0,0918 & -1,1385 & -2,0523 \end{bmatrix}$
Teorema 3.3	$F_1 = \begin{bmatrix} 0,8054 & 0,0517 & -0,8749 & -1,2996 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 0,8060 & 0,0647 & -0,8712 & -1,3006 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 0,8068 & 0,0850 & -0,8672 & -1,3017 \end{bmatrix}$
Teorema 3.4	$F_1 = \begin{bmatrix} 0,7135 & 0,1084 & -0,7882 & -1,1439 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 0,7136 & 0,1175 & -0,7868 & -1,1442 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 0,7130 & 0,1336 & -0,7855 & -1,1458 \end{bmatrix}$
Teorema 3.5	$F_1 = \begin{bmatrix} 1,2785 & -0,0990 & -1,1590 & -2,0609 \end{bmatrix}$ $F_2 = \begin{bmatrix} 1,2890 & -0,1045 & -1,1627 & -2,0637 \end{bmatrix}$ $F_3 = \begin{bmatrix} 1,3062 & -0,1133 & -1,1594 & -2,0685 \end{bmatrix}$

pertinência. As simulações usam como condição inicial  $x^0 = [0,1 \ 0,1 \ 0 \ 0]^T$ . Desta forma o sistema está fora do ponto de equilíbrio com certa velocidade inicial.

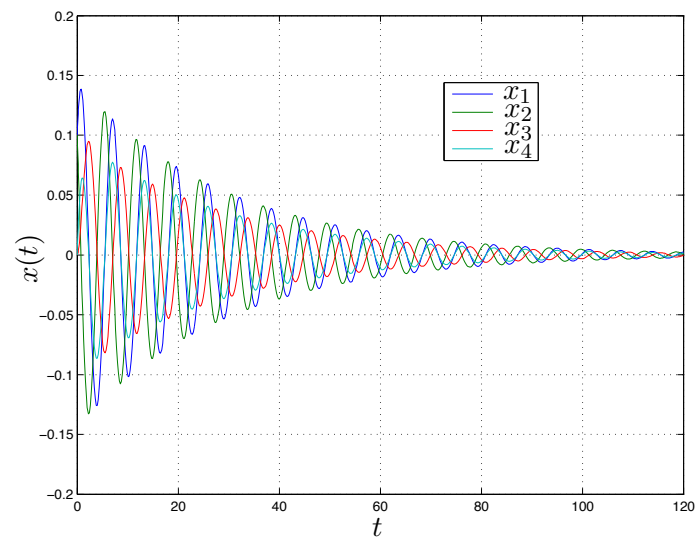
O resultado do projeto do controlador PDC para o sistema TORA segundo os Teoremas 3.1 a 3.5 é mostrado na Tabela 3.6. Nota-se que os ganhos são bastantes parecidos, todos na mesma ordem de grandeza. Os ganhos tem uma norma pequena, podendo ser implementados facilmente na prática, sem risco de saturação no atuadores. Uma observação que pode ser feita é o fato de que os ganhos obtidos pelos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.5 apresentam uma norma maior do que os ganhos obtidos pelos Teoremas 3.3 e 3.4. Há uma divisão entre os resultados obtidos com termo nulo de um lado e resultados obtidos com o Lema 3.2 de outro. Contudo isso não tem uma explicação clara pois um fato que se observa é que a escolha dos parâmetros  $\alpha$  interfere na norma do controlador obtido. Além disso não foi imposta qualquer restrição sobre o sinal de controle ou o controlador, sendo que esse fato pode ser apenas uma coincidência numérica.

Os resultados de simulação do sistema segundo os Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 são mostrados nas Figuras 3.16, 3.17 e 3.18, respectivamente. Os resultados para os Teoremas 3.5 e 3.4 são omitidos pois os ganhos são muito parecidos com aqueles obtidos via Teoremas 3.2 e 3.3, respectivamente.

A comparação das Figuras 3.16 a 3.18 não revela uma grande diferença no resultado

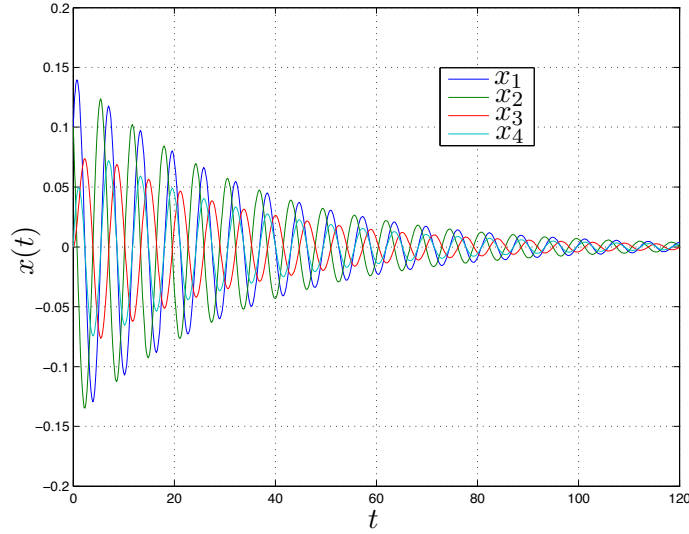


**Figura 3.16** Simulação do controlador projetado com Teorema 3.1: evolução dos estados.



**Figura 3.17** Simulação do controlador projetado com Teorema 3.2: evolução dos estados.





**Figura 3.18** Simulação do controlador projetado com Teorema 3.3: evolução dos estados.

da ação dos três controladores testados, como era de se esperar já que não havia diferenças grandes na norma dos mesmos. Como pode ser notado o sistema acomoda-se lentamente, exibindo um comportamento bastante oscilatório. Embora esse tipo de comportamento possa ser inadequado em muitas aplicações ele é justificável nesse caso haja vista que não foi estabelecido nenhum critério de projeto que não fosse a estabilidade assintótica para quaisquer condições iniciais. De fato até mesmo em algumas abordagens com minimização de custo quadrático como por exemplo em [TANY01, DKG08, TW01, WL07] esse tipo de comportamento oscilatório e lento é observado.

Para acelerar a resposta do sistema é possível impor uma taxa de decaimento, de forma análoga a [BAT<sup>+</sup>10]. Para isso considere que a seguinte restrição deverá ser satisfeita

$$\dot{V} \leq -2\gamma V$$

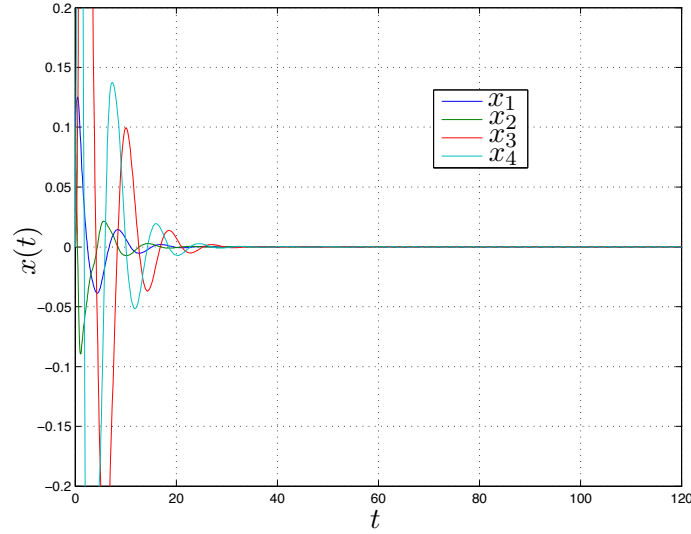
sendo  $V$  e  $\dot{V}$  definidos em (2.19) e (3.20), respectivamente. Dessa forma segue que

$$\xi^T \begin{bmatrix} 2\gamma P(h) + \dot{P}(h) & P(h) \\ P(h) & 0 \end{bmatrix} \xi \leq 0$$

Seguindo passos similares para obter o Teorema 3.1 é possível estabelecer o Teorema a seguir, que garante estabilidade com uma taxa de decaimento específica.

**Teorema 3.6.** *Considere  $|\dot{h}_i| < \phi_i$ ,  $\forall i \in \mathcal{R}$ ,  $\alpha$  e  $\gamma$  escalares dados. O sistema TS em malha-fechada (1.15) é assintoticamente estável com taxa de decaimento  $\gamma$  caso existam matrizes simétricas definidas positivas  $P_i$ , uma matriz simétrica  $X$  e matrizes quaisquer  $S_i, R$  que satisfazem*

$$\Xi_{ii} < 0, \quad i \in \mathcal{R}, \quad \Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathcal{R}, \quad i < j \quad (3.58)$$



**Figura 3.19** Simulação do controlador projetado com Teorema 3.6: evolução dos estados.

sendo

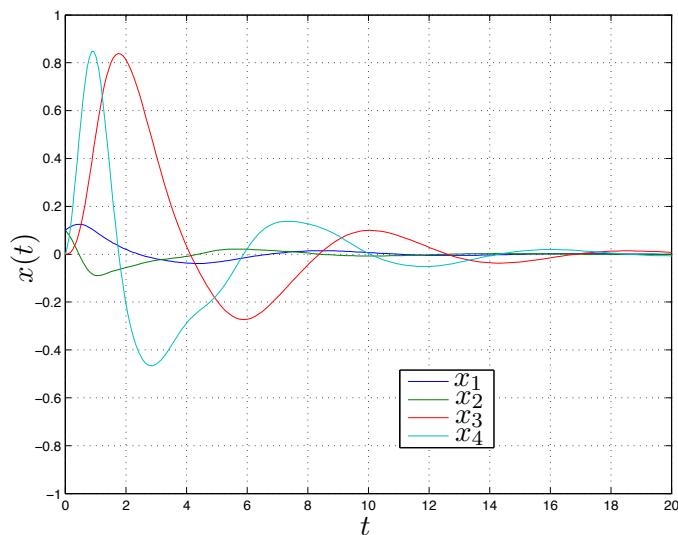
$$\Xi_{ij} := \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^r \phi_k(T_k + X) + 2\gamma T_i - A_i R - B_i S_j - R^T A_i^T - S_j^T B_i^T & \bullet \\ T_i - \alpha A_i R - \alpha B_j S_i + R^T & \alpha(R + R^T) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Os ganhos que garantem estabilidade são obtidos fazendo-se  $K_i = S_i R^{-1}$ .

Aplicando essa versão modificada do Teorema 3.1, que incorpora a taxa de decaimento como requisito de projeto, é possível obter o resultado mostrado nas Figuras 3.19 e 3.20. Os parâmetros adotados foram  $\phi = 1,5$ ,  $\alpha_n = 1$  e  $\gamma = 0,015$ . Os ganhos obtidos são mostrados na Tabela 3.7. Uma taxa de decaimento maior poderia ser obtida, contudo rapidamente os ganhos ficavam elevados, com ordem de grandeza  $10^3$  para alguns elementos do vetor de ganho. Portanto, optou-se por ganhos menores, mais factíveis de implementação na prática.

Na Figura 3.19 é mantida a mesma escala dos eixos para efeito de comparação com relação à Figura 3.16 em termos do tempo necessário para o sistema acomodar. Usando a técnica modificada a resposta tornou-se cerca de seis vezes mais rápida. Já a Figura 3.20 enfatiza que os picos que os estados alcançam são bem maiores, cerca de quatro vezes. Claramente se percebe um compromisso entre a rapidez da resposta e amplitude dos estados, restrição típica em problemas de controle.

Outros critérios podem ser incorporados, assunto das propostas de continuidade no próximo capítulo. Para limitar a norma dos ganhos do controlador poderia ser adotado um critério de minimização do esforço de controle.



**Figura 3.20** Simulação do controlador projetado com Teorema 3.6: evolução dos estados.

**Tabela 3.7** Ganhos projetados para controle do TORA impondo  $\gamma = 0,015$  como taxa de decaimento. Parâmetros usados  $\alpha_n = 0,1$  e  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 1,5$ .

Método	$F_i$
	$F_1 = [28,671 \quad -26,038 \quad -4,3974 \quad -3,8828]$
Teorema 3.6	$F_2 = [28,626 \quad -23,920 \quad -4,1324 \quad -3,8775]$
	$F_3 = [28,561 \quad -21,344 \quad -4,0236 \quad -3,8760]$

# CONCLUSÃO

*Valeu a pena? Tudo vale a pena*

*Se a alma não é pequena*

—FERNANDO PESSOA (Mar Português)

*Se de tudo fica um pouco,*

*mas por quê não ficaria um pouco de mim?*

—CARLOS DRUMMOND DE ANDRADE (Resíduo)

Este trabalho buscou contribuir na análise de estabilidade e projeto de controladores para sistemas dinâmicos na forma TS. Com um enfoque voltado para desigualdades matriciais lineares, as metodologias propostas são apresentadas nas formas de Teoremas e Corolários cuja implementação numérica nas principais interfaces de programação de LMI pode ser feita de forma quase direta.

Nas últimas duas décadas a metodologia de controle fuzzy baseado em modelos TS se mostrou uma alternativa interessante para sistemas não-lineares, estabelecendo um compromisso entre o formalismo do controle não-linear com a praticidade e abundância de recursos numéricos do controle linear. Contudo, o preço pago pela maior simplicidade foi um maior conservadorismo. Atuando em algumas das principais fontes de conservadorismo existentes na abordagem que combina sistemas TS e LMI espera-se que este trabalho tenha contribuído no sentido de aproximar os controles não-linear e fuzzy.

Uma fonte de conservadorismo que pode ser destacada é o uso inadequado, parcial ou mesmo o desuso da informação contida nas funções de pertinência nas condições de análise e síntese. Tais condições baseiam-se apenas nas informações contidas nos vértices e na convexidade das funções de pertinência. A estabilidade é garantida não só para um sistema não-linear específico, mas para uma família de sistemas na forma (1.15), desde que possuam os mesmos vértices  $A_i + B_i F_j$  e funções de pertinência quaisquer, desde que satisfaçam (1.9).

Embora funções de Lyapunov parametrizadas sejam usadas a bastante tempo para sistemas fuzzy [Jad99, THW01] certo grau de conservadorismo persistia tanto na análise quanto na síntese. Na Seção 2.3 foi apresentada uma solução muito simples, mas bastante eficaz, para usar adequadamente a informação fornecida pela derivada temporal das funções de pertinência. A um custo computacional inexpressivo, condições de análise de estabilidade propostas na literatura recente passaram a ser casos particulares. Quando o custo computacional deixou de ser prioridade, uma nova solução para incluir essa informação de forma adequada foi proposta na Seção 2.4, reduzindo ainda mais o conservadorismo. Embora essa estratégia já seja aplicada no contexto de sistemas incertos

[GC06, CGTV09], espera-se que o tratamento geométrico detalhado dado na Seção 2.4 tenha contribuído na adaptação para sistemas fuzzy.

Esse maior entendimento dos fatores que influenciam a dinâmica de um sistema fuzzy, bem como dos fatores que tornam análise ou síntese conservadoras, permitiu abordar outra fonte de conservadorismo. Como o método direto de Lyapunov tem caráter apenas suficiente, para a maioria dos casos, torna-se primordial ter mais funções candidatas a disposição. Caso a busca por controlador ou garantia de estabilidade falhem nada pode ser concluído acerca da inexistência de controlador ou da instabilidade. Nesse sentido, na Seção 2.6 duas novas funções de Lyapunov são propostas. Embora com características distintas ambas buscam incluir informações sobre a dinâmica e as funções de pertinência para reduzir conservadorismo. Na primeira função, o conservadorismo é reduzido considerando combinações polinomiais das funções de pertinência, bem como informação de derivada de mais alta ordem dos estados. Na segunda função, informação adicional sobre a dinâmica das funções de pertinência é incluída através de suas segundas derivadas temporais. Enquanto funções parametrizadas apenas pela funções de pertinência são capazes de certificar estabilidade para uma família de modelos que compartilham vértices e a mesma taxa de variação das funções de pertinência, a nova função é mais específica, pois restringe a análise para sistemas com certa segunda derivada temporal. A análise ficou menos conservadora, mais à feição do que ocorre na teoria de sistemas não-lineares.

Embora as funções analisadas neste trabalho sejam menos conservadoras, existe uma dificuldade maior no momento de aplicá-las para a síntese de controladores fuzzy no contexto de LMIs. Tais dificuldades são apresentadas na Seção 3.2. Outra contribuição deste trabalho consiste em propor soluções para esses problemas usando as soluções numéricas apresentadas nas Seções 2.5 e 3.3. Metodologias de projeto baseadas em LMIs para funções de Lyapunov fuzzy são propostas, uma novidade na opinião do autor. As metodologias são comparadas com os principais resultados baseados na função de Lyapunov quadrática, mostrando vantagens. Finalmente, verifica-se que as metodologias podem ser aplicadas com sucesso em sistemas não-lineares, conforme ilustrado por três exemplos de simulação abordado na Seção 3.3.3.

## 4.1 PRODUÇÃO CIENTÍFICA

Esta tese foi fruto de um trabalho desenvolvido ao longo de dois anos e sete meses. A medida em que os resultados surgiam, o autor, seu orientador e colaboradores buscaram reportá-los à comunidade acadêmica e científica, por meio de artigos em periódicos ou apresentações em congressos. Os resultados desta tese foram agrupados pela temática e, portanto, a sequência na qual eles são apresentados não reflete a cronologia do seu desenvolvimento. Portanto, essa Seção dedica-se a pontuar como os resultados que forma esta tese foram apresentados à comunidade. Até o presente momento, os seguintes artigos diretamente relacionados com o este trabalho foram publicados ou aceitos para publicação:

- [MPSM09] - Uma das primeiras publicações baseadas nessa tese. Aborda o tema da Seção 2.3, na qual se avalia o conservadorismo na inclusão da informação da derivada temporal da função de pertinência. A partir daí uma solução de baixíssimo

custo computacional é proposta que permite obter uma novo Teorema para análise de estabilidade. Essa nova metodologia inclui a estabilidade quadrática e outros trabalhos da literatura como casos particulares.

- [MPA09, MPA08] - Apresenta a metodologia do termo nulo que permite obter condições LMIs para síntese de controlador baseadas na função de Lyapunov fuzzy, estendendo o resultado proposto em [MPSM09] para controle. O conteúdo desses artigos está na Seção 3.3.
- [MPAdS10, AMP08] - Contém resultados relativos ao projeto de controladores baseados na função de Lyapunov fuzzy integral com a adoção do termo nulo. Estão relacionadas ao conteúdo da Seção 3.3.
- [MPM10] - Contém resumo da equivalência demonstrada na Seção 2.5, na qual termo nulo, lema de Finsler e a forma descritora garantem os mesmos resultados quando o tema é análise de estabilidade.
- [MP10] - Apresenta a nova função de Lyapunov parametrizada pela função de pertinência e suas derivadas temporais, proposta na Seção 2.6.2.

Outro trabalho foi aceito para o *18th IFAC World Congress*, apresentando a nova função de Lyapunov proposta na Seção 2.6.1, usando combinação polinomial das funções de pertinência através da informação contida nas derivadas superiores dos estados:

- L. A. Mozelli, , F. O. Souza., R. M. Palhares, “New Lyapunov function and extra information on membership functions for improving stability conditions of TS systems”, em *18th IFAC World Congress*, Milão, Itália.

Outros artigos indiretamente relacionados a este trabalho também foram publicados ou aceitos para publicação. Os três primeiros artigos foram publicados e usam os resultados de análise de estabilidade e síntese de controle para sistemas TS com retardo no tempo. Além disso, as novas funções propostas são aplicadas a sistemas lineares variantes no tempo no outro artigo, aceito para publicação.

- [SMP09, SMP08]: resultados que dialogam com as seções 2.3, 2.5 e 3.3, usando funções de Lyapunov fuzzy.
- [MSP11]: resultados que dialogam com as seções 2.5 e 3.3, usando funções de Lyapunov fuzzy integral.
- L. A. Mozelli, , R. M. Palhares, “Stability analysis of linear time-varying systems: improving conditions by adding more information about parameter variation”, *System & Control Letters*.

Merece citação também o auxílio nos projetos de iniciação científica dos alunos Rafael Ferreira dos Santos e Gustavo Silva Castilho de Avellar, ambos sob orientação do Prof. Reinaldo Martinez Palhares e apresentados na Semana da Iniciação Científica da UFMG,

nos anos de 2008 e 2009. É digno de nota que o trabalho do discente Gustavo Silva Castilho de Avellar recebeu menção honrosa por “Relevância Acadêmica em Iniciação Científica - selecionado entre os melhores trabalhos da Escola de Engenharia da UFMG”. Dessa forma, essa tese auxiliou também na formação de recursos humanos.

## 4.2 PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

O primeiro passo para síntese de controladores fuzzy via LMI baseados nas funções de Lyapunov fuzzy foi dado. Uma continuidade nessa linha de pesquisa seria integrar nas metodologias propostas critérios de desempenho como minimização de custo quadrático,  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , por exemplo. Foi visto ao final da Seção 3.3.3 que as metodologias propostas são flexíveis, já que foi possível incluir o índice de taxa de decaimento no procedimento de obtenção do controlador.

Outra frente de pesquisa que se abre para as propostas dessas tese são estratégias de controle baseadas em realimentação de saída, como por exemplo em [BGM09]. Uma das vantagens da realimentação de saída ocorre em aplicações nas quais não é possível, devido a motivos estruturais ou financeiros, medir todos os estados. Dessa forma, alguns estados medidos compõem a saída e o controlador atua baseado nessa medida parcial. Outra alternativa é o controle baseado em estimador de estados.

Outra possibilidade seria a extensão dos resultados obtidos para a síntese de controladores na estrutura não-PDC, veja [TOW07, CY10]. Controladores não-PDC, embora possuam uma estrutura mais complexa para implementação na prática, proporcionam maior redução no conservadorismo.

Finalmente, maiores investigações podem ser conduzidas com relação a geometria do espaço formado pelas funções de pertinência, para reduzir o aumento exponencial no número de LMIs que algumas formulações discutidas podem gerar.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Agu07] L. A. Aguirre, *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, 3ª ed. UFMG, 2007.
- [ÅM06] K. J. Åström e R. M. Murray, *Feedback Systems: an Introduction for Scientists and Engineers*, 1ª ed. Princeton University Press, 2006.
- [AMP08] G. S. C. Avellar, L. A. Mozelli, e R. M. Palhares, “Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov fuzzy,” em *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA’08*, Juiz de Fora, MG, 2008.
- [AN06] W. Assawinchaichote e S. K. Nguang, “Fuzzy  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control design for singularly perturbed systems with pole placement constraints: an LMI approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n.º. 3, págs. 361 – 371, 2006.
- [APA+08] C. Q. Andrea, J. O. P. Pinto, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, e L. G. Junior, “Controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas não-lineares com modelos fuzzy Takagi-Sugeno,” *SBA: Controle & Automação*, vol. 19, n.º. 3, págs. 256–269, 2008.
- [AS07] C. Ariño e A. Sala, “Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure,” *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 20, n.º. 8, págs. 1036 – 1046, 2007.
- [BAT+10] L. F. S. Buzachero, E. Assunção, M. C. M. Teixeira, F. A. Faria, e E. R. P. da Silva, “Implementações de controladores robustos, com restrições de taxa de decaimento e otimizados em sistemas sujeitos a falhas,” em *Proceedings of the 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications - DINCON’10*, Serra Negra, SP, Brasil, Junho 2010, págs. 954–960.
- [BBC95] R. T. Bupp, D. S. Bernstein, e V. T. Coppola, “A benchmark problem for nonlinear control design: problem statement, experimental testbed, and passive nonlinear compensation,” em *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, vol. 6, 1995, págs. 4363 –4367.
- [BEGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, 1994, vol. 15.



- [Ben04] P. Benner, “Solving large-scale control problems,” *Control Systems Magazine, IEEE*, vol. 24, n.º. 1, págs. 44 – 59, 2004.
- [Ber02] D. S. Bernstein, “Feedback control: an invisible thread in the history of technology,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, n.º. 2, págs. 53 – 68, 2002.
- [BGM09] T. Bouarar, K. Guelton, e N. Manamanni, “Static output feedback controller design for Takagi-Sugeno systems - a fuzzy Lyapunov LMI approach,” em *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, 2009, págs. 4150 –4155.
- [BGM10] —, “Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors,” *ISA Transactions*, vol. 49, n.º. 4, págs. 447 – 461, 2010.
- [Blo11] Bloomberg. (2011, Março) Northrop drone flies over Japan reactor to record data. Disponível em: <http://www.bloomberg.com/news/2011-03-16/northrop-grumman-drone-to-fly-over-japan-reactor-to-gather-data.html>
- [CCM<sup>+</sup>09] P. Campoy, J. F. Correa, I. Mondragón, C. Martínez, M. Olivares, L. Mejías, e J. Artieda, “Computer vision onboard uavs for civilian tasks,” em *Unmanned Aircraft Systems*, K. P. Valavanis, P. Oh, e L. A. Piegl, EE. Springer Netherlands, 2009, págs. 105–135.
- [CGTV07] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, e A. Vicino, “Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous Lyapunov functions,” *Automatica*, vol. 43, págs. 309–316, 2007.
- [CGTV09] —, *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, M. Thoma, F. Allgöwer, e M. Morari, EE. Springer, 2009, vol. 390.
- [CP00] G. Chen e T. T. Pham, *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*, 1ª ed. CRC Press, 2000.
- [CRF97] S. G. Cao, N. W. Rees, e G. Feng, “Analysis and design for a class of complex control systems part II: fuzzy controller design,” *Automatica*, vol. 33, n.º. 6, págs. 1029 – 1039, 1997.
- [CTU00] B.-S. Chen, C.-S. Tseng, e H.-J. Uang, “Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: an LMI approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, n.º. 3, págs. 249 –265, 2000.
- [CY10] X.-H. Chang e G.-H. Yang, “Relaxed stabilization conditions for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy control systems,” *Information Sciences*, vol. 180, n.º. 17, págs. 3273 – 3287, 2010.

- [DGK07] F. Delmotte, T. M. Guerra, e M. Ksantini, “Continuous Takagi–Sugeno’s models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, n.º. 3, págs. 426–438, 2007.
- [DGK08] F. Delmotte, T. M. Guerra, e A. Kruszewski, “Discrete Takagi–Sugeno’s fuzzy models: reduction of the number of LMI in fuzzy control techniques,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, vol. 38, n.º. 5, págs. 1423–1427, 2008.
- [DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, e B. A. Francis, “State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, n.º. 8, págs. 831–847, 1989.
- [dO04] M. C. de Oliveira, “Novos testes de estabilidade para sistemas lineares,” *SBA: Controle & Automação*, vol. 15, n.º. 1, págs. 17–23, 2004.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, e J. Bernussou, “Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems,” *International Journal of Control*, vol. 75, n.º. 9, págs. 666–679, 2002.
- [dOS02] M. C. de Oliveira e R. E. Skelton, “On stability tests for linear systems,” em *Proceedings of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [EH04] Y. Ebihara e T. Hagiwara, “New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis,” *Automatica*, vol. 40, n.º. 11, págs. 2003–2009, 2004.
- [EHPA05] Y. Ebihara, T. Hagiwara, D. Peaucelle, e D. Arzelier, “Robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems by taking higher-order time-derivatives of the state,” em *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, 2005, págs. 5030–5035.
- [FAG96] E. Feron, P. Apkarian, e P. Gahinet, “Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n.º. 7, págs. 1041–1046, 1996.
- [FCSZ05] G. Feng, C.-L. Chen, D. Sun, e Y. Zhu, “ $\mathcal{H}_\infty$  controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions and bilinear matrix inequalities,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, n.º. 1, págs. 94–103, 2005.
- [Fen03] G. Feng, “Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, n.º. 5, págs. 605–612, 2003.

- [Fen06] ———, “A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n.º. 5, págs. 676–697, 2006.
- [FLA96] R. Fierro, F. L. Lewis, e C. T. Abdallah, “Common, multiple and parametric Lyapunov functions for a class of hybrid dynamical systems,” em *Proceedings of the 4th IEEE Mediterranean Symposium of New Directions in Control and Automation*, Krete, Greece, June 1996, págs. 77–82.
- [FLK<sup>+</sup>06] C.-H. Fang, Y.-S. Liu, S.-W. Kau, L. Hong, e C.-H. Lee, “A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n.º. 3, págs. 386–397, 2006.
- [GAC96] P. Gahinet, P. Apkarian, e M. Chilali, “Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n.º. 3, págs. 436–442, 1996.
- [GC06] J. C. Geromel e P. Colaneri, “Robust stability of time varying polytopic systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 55, n.º. 1, págs. 81–85, 2006.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, e L. Hsu, “LMI characterization of structural and robust stability,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 285, págs. 69–80, 1998.
- [GGB<sup>+</sup>10] K. Guelton, T. M. Guerra, M. Bernal, T. Bouarar, e N. Manamanni, “Comments on fuzzy control systems design via fuzzy Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, vol. 40, n.º. 3, págs. 970–972, 2010.
- [GJ05] I. Golightly e D. Jones, “Visual control of an unmanned aerial vehicle for power line inspection,” *International Confer Autom Robot*, págs. 288–295, 2005.
- [GK06] J. C. Geromel e R. H. Korogui, “Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, n.º. 12, págs. 1984–1989, 2006.
- [GKL09] T. M. Guerra, A. Kruszewski, e J. Lauber, “Discrete Takagi–Sugeno models for control: where are we?” *Annual Reviews in Control*, vol. 33, págs. 37–47, 2009.
- [Gla94] G. Glaeser, *Fast algorithms for 3D-graphics*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1994.
- [GV04] T. M. Guerra e L. Vermeiren, “LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form,” *Automatica*, vol. 40, n.º. 5, págs. 823–829, 2004.

- [HC08] W. M. Haddad e V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control: a Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press, 2008.
- [HWS05] Y. He, M. Wu, e J.-H. She, “Improved bounded-real-lemma representation and  $\mathcal{H}_\infty$  control of systems with polytopic uncertainties,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 52, n.º. 7, págs. 380 – 383, 2005.
- [HZSS05] D. Hausamann, W. Zirrig, G. Schreier, e P. Strobl, “Monitoring of gas pipelines – a civil UAV application,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 77, n.º. 5, págs. 352–360, 2005.
- [IEE11] IEEE Spectrum. (2011, Março) Japan earthquake: Global Hawk UAV may be able to peek inside damaged reactors. Disponível em: <http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/military-robots/global-hawk-uav-may-be-able-to-peek-inside-damaged-reactors>
- [IPT10] P. Iscold, G. A. S. Pereira, e L. A. B. Torres, “Development of a hand-launched small UAV for ground reconnaissance,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 46, n.º. 1, págs. 335 –348, 2010.
- [Jad99] A. Jadbabaie, “A reduction in conservatism in stability and  $L_2$  gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems,” em *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
- [Jon05] D. Jones, “Power line inspection - a UAV concept,” em *The IEE Forum on Autonomous Systems*, 2005, pág. 8 pp.
- [JRA99] M. Johansson, A. Rantzer, e K.-E. Arzen, “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 7, n.º. 6, págs. 713 –722, 1999.
- [JSM97] J.-S. R. Jang, C.-T. Sun, e E. Mizutani, *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. Prentice Hall, 1997.
- [JSMS00] T. A. Johansen, R. Shorten, e R. Murray-Smith, “On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, n.º. 3, págs. 297 –313, 2000.
- [Kaw96] S. Kawamoto, “Nonlinear control and rigorous stability analysis based on fuzzy system for inverted pendulum,” em *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 2, 1996, págs. 1427–1432.
- [Kha01] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2001.
- [KL00] E. Kim e H. Lee, “New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, n.º. 5, págs. 523 –534, 2000.

- [KWG08] A. Kruszewski, R. Wang, e T. M. Guerra, “Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models: a new approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, n.º. 2, págs. 606–611, 2008.
- [Lan99] I. D. Landau, “From robust control to adaptive control,” *Control Engineering Practice*, vol. 7, págs. 1113–1124, 1999.
- [LCG11] A. Lemos, W. Caminhas, e F. Gomide, “Multivariable gaussian evolving fuzzy modeling system,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 19, n.º. 1, págs. 91–104, 2011.
- [Lei04] J. R. Leigh, *Control Theory*, 2ª ed. The Institution of Engineering and Technology - IET, 2004.
- [LFC09] C. Lara, J. J. Flores, e F. Calderon, “On the hyperbox – hyperplane intersection problem,” *INFOCOMP - Journal of Computer Science*, vol. 8, n.º. 4, págs. 21–27, 2009.
- [LTL06] K.-Y. Lian, H.-W. Tu, e J.-J. Liou, “Stability conditions for LMI-based fuzzy control from viewpoint of membership functions,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, n.º. 6, págs. 874–884, 2006.
- [Lue77] D. Luenberger, “Dynamic equations in descriptor form,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, n.º. 3, págs. 312–321, 1977.
- [Lue78] —, “Time-invariant descriptor systems,” *Automatica*, vol. 14, págs. 473–480, 1978.
- [Lya92] A. M. Lyapunov, *General Problem of the Stability Of Motion*, 1ª ed. CRC Press, 1992.
- [LZX08] J. Li, S. Zhou, e S. Xu, “Fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, vol. 38, n.º. 6, págs. 1657–1661, 2008.
- [MA75] E. H. Mamdani e S. Assilian, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller,” *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 7, págs. 1–13, 1975.
- [MA99] —, “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller,” *International Journal of Human-Computer Studies*, vol. 51, págs. 135–147, 1999.
- [Mam93] E. H. Mamdani, “Twenty years of fuzzy control: experiences gained and lessons learnt,” em *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1993, págs. 339–344.

- [MCP<sup>+</sup>07] L. A. Mozelli, C. D. Campos, R. M. Palhares, L. A. B. Tôres, e E. M. A. M. Mendes, “Chaotic synchronization and information transmission experiments: a fuzzy relaxed  $\mathcal{H}_\infty$  control approach,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 26, n.º. 4, págs. 427–449, 2007.
- [Mic96] A. N. Michel, “Stability: the common thread in the evolution of feedback control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, n.º. 3, págs. 50–60, 1996.
- [MOP07] V. F. Montagner, R. C. L. F. Oliveira, e P. L. D. Peres, “Necessary and sufficient LMI conditions to compute quadratically stabilizing state feedback controllers for Takagi-Sugeno systems,” em *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, 2007, págs. 4059–4064.
- [MOP09] —, “Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and  $\mathcal{H}_\infty$  control of Takagi-Sugeno fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, n.º. 4, págs. 863–873, 2009.
- [MOP10] —, “Relaxações convexas de convergência garantida para o projeto de controladores para sistemas nebulosos de Takagi-Sugeno,” *SBA: Controle & Automação*, vol. 21, n.º. 1, págs. 82–95, 2010.
- [Mor10] M. A. G. Moreira, “Localização, modelagem e controle de um helimodelo em ambientes internos,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Fevereiro 2010.
- [Moz08] L. A. Mozelli, “Controle fuzzy para sistemas Takagi-Sugeno: Condições aprimoradas e aplicações,” Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Outubro 2008.
- [MP03] V. F. Montagner e P. L. D. Peres, “A new LMI condition for the robust stability of linear time-varying systems,” em *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 6, 2003, págs. 6133–6138.
- [MP10] L. A. Mozelli e R. M. Palhares, “Análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS via LMI: Metodologia baseada em uma nova função de Lyapunov fuzzy,” em *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA'10*, Bonito, MS, 2010, págs. 462–467.
- [MPA08] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, e G. S. C. Avellar, “Novas condições de estabilidade e de estabilização para sistemas Takagi-Sugeno baseadas na função de Lyapunov fuzzy,” em *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA'08*, Juiz de Fora, MG, 2008.
- [MPA09] —, “A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems,” *Information Sciences*, vol. 179, n.º. 8, págs. 1149–1162, 2009.

- [MPAdS10] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, G. S. C. Avellar, e R. F. dos Santos, “Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov fuzzy,” *SBA: Controle & Automação*, vol. 21, n.º. 1, págs. 96–107, 2010.
- [MPB08] R. R. Murphy, K. S. Pratt, e J. L. Burke, “Crew roles and operational protocols for rotary-wing micro-UAVs in close urban environments,” em *Proceedings of the 3rd ACM/IEEE international Conference on Human Robot Interaction*. New York, NY, USA: ACM, 2008, págs. 73–80.
- [MPM10] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, e E. M. A. M. Mendes, “Equivalent techniques, extra comparisons, and less conservative control design for TS fuzzy systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, n.º. 12, págs. 2813–2822, 2010.
- [MPSM09] L. A. Mozelli, R. M. Palhares, F. O. Souza, e E. M. A. M. Mendes, “Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems,” *Automatica*, vol. 45, n.º. 6, págs. 1580–1583, 2009.
- [MSP11] L. A. Mozelli, F. O. Souza, e R. M. Palhares, “A new discretized Lyapunov–Krasovskii functional for stability analysis and control design of time-delayed TS fuzzy systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, n.º. 1, págs. 93–105, 2011.
- [NvdS90] H. Nijmeijer e A. J. van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*. Springer, 1990.
- [OdOP09] R. C. L. F. Oliveira, M. C. de Oliveira, e P. L. D. Peres, “Special time-varying Lyapunov function for robust stability analysis of linear parameter varying systems with bounded parameter variation,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 3, n.º. 10, págs. 1448–1461, 2009.
- [Oga02] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4ª ed. Prentice Hall, 2002.
- [OTW01] H. Ohtake, K. Tanaka, e H. O. Wang, “Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept,” em *Proceedings of the 20th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society*, vol. 1, 2001, págs. 127–132.
- [OTW03] —, “Piecewise nonlinear control,” em *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 5, 2003, págs. 4735–4740.
- [PG05] D. Peaucelle e F. Gouaisbaut, “Discussion on: ‘parameter-dependent Lyapunov function approach to stability analysis and design for uncertain systems with time-varying delay’,” *European Journal of Control*, vol. 11, n.º. 1, págs. 69–70, 2005.

- [PG07] R. M. Palhares e E. N. Gonçalves, “Desigualdades matriciais lineares em controle,” em *Enciclopédia de Automática: Controle & Automação*, L. A. Aguirre, E. Blucher, 2007, vol. 1, págs. 155–195.
- [PVK07] A. Puri, K. Valavanis, e M. Kontitsis, “Statistical profile generation for traffic monitoring using real-time UAV based video data,” em *Proceedings of the Mediterranean Conference on Control Automation*, 2007, págs. 1–6.
- [Ros04] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*, 2ª ed. John Wiley & Sons, 2004.
- [RW06] B.-J. Rhee e S. Won, “A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, n.º. 9, págs. 1211 – 1228, 2006.
- [SA07] A. Sala e C. Ariño, “Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: applications of Polya’s theorem,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, págs. 2671–2686, 2007.
- [SA09] —, “Polynomial fuzzy models for nonlinear control: a Taylor series approach,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, n.º. 6, págs. 1284–1295, 2009.
- [Sal09] A. Sala, “On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems,” *Annual Reviews in Control*, vol. 33, n.º. 1, págs. 48 – 58, 2009.
- [SGB05] A. Sala, T. M. Guerra, e R. Babuska, “Perspectives of fuzzy systems and control,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 156, n.º. 3, págs. 432 – 444, 2005.
- [SK88] M. Sugeno e G. T. Kang, “Structure identification of fuzzy model,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 28, n.º. 1, págs. 15 – 33, 1988.
- [SL91] J.-J. E. Slotine e W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [SMNI08] S. Sasa, Y. Matsuda, M. Nakadate, e K. Ishikawa, “Ongoing research on disaster monitoring UAV at JAXA aviation program group,” em *SICE Annual Conference*, 2008, págs. 978–981.
- [SMP08] F. O. Souza, L. A. Mozelli, e R. M. Palhares, “Condições de estabilidade e estabilização se sistemas não-lineares com retardo no tempo via abordagem TS,” em *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA’08*, Juiz de Fora, MG, 2008.
- [SMP09] —, “On stability and stabilization of T-S fuzzy time-delayed systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, n.º. 6, págs. 1450–1455, 2009.



- [SPB08] F. O. Souza, R. M. Palhares, e K. A. Barbosa, “New improved delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for uncertain neutral systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, n.º. 12, págs. 1033–1043, 2008.
- [SPMT08] F. O. Souza, R. M. Palhares, E. M. A. M. Mendes, e L. A. B. Tôrres, “Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for master-slave synchronization of Lur’e systems with time-delay feedback control,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 18, n.º. 4, págs. 1161–1173, 2008.
- [SPTM08] F. O. Souza, R. M. Palhares, L. A. B. Tôrres, e E. M. A. M. Mendes, “Further results on master-slave synchronization of general Lur’e systems with time-varying delay,” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 18, n.º. 1, págs. 187–202, 2008.
- [Ste03] G. Stein, “Respect the unstable,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, n.º. 4, págs. 12–25, 2003.
- [TAA01] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, e R. G. Avellar, “On relaxed LMI-based design for fuzzy controllers,” em *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, vol. 2, 2001, págs. 704–707.
- [TAA03] ———, “On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, n.º. 5, págs. 613–623, 2003.
- [TANY01] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, e Y. Yamamoto, “Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, n.º. 2, págs. 324–332, 2001.
- [The11] The Mainichi Daily News. (2011, Março) Japan reluctant to disclose footage of power plant taken by U.S. drone. Disponível em: (<http://mdn.mainichi.jp/mdnnews/news/20110319p2a00m0na005000c.html>)
- [THW01] K. Tanaka, T. Hori, e H. Wang, “A fuzzy lyapunov approach to fuzzy control system design,” em *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, vol. 6, 2001, págs. 4790–4795.
- [THW03] K. Tanaka, T. Hori, e H. O. Wang, “A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, n.º. 4, págs. 582–589, 2003.
- [TIW98] K. Tanaka, T. Ikeda, e H. O. Wang, “Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, n.º. 2, págs. 250–265, 1998.
- [TKOW08] K. Tanaka, T. Komatsu, H. Ohtake, e H. O. Wang, “Micro helicopter control: LMI approach vs SOS approach,” em *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2008, págs. 347–353.

- [TNOW05] K. Tanaka, T. Nebuya, H. Ohtake, e H. Wang, “Fuzzy control system designs using redundancy of descriptor representation: a fuzzy Lyapunov function approach,” em *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, vol. 2, 2005, págs. 1096 – 1101.
- [TO10] E. S. Tognetti e V. A. Oliveira, “Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 20, págs. 571–578, 2010.
- [TOW06] K. Tanaka, H. Ohtake, e H. O. Wang, “A descriptor system approach to fuzzy control system designs using fuzzy Lyapunov function,” em *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, 2006, pág. 6 pp.
- [TOW07] —, “A descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy Lyapunov functions,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, n.º. 3, págs. 333 –341, 2007.
- [TOW09] —, “Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B*, vol. 39, n.º. 2, págs. 561 –567, 2009.
- [TPA00] M. C. M. Teixeira, H. C. Pietrobom, e E. Assunção, “Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI,” *SBA: Controle & Automação*, vol. 11, n.º. 1, págs. 37–48, 2000.
- [TPM09] K. Toussaint, N. Pouliot, e S. Montambault, “Transmission line maintenance robots capable of crossing obstacles: State-of-the-art review and challenges ahead,” *Journal of Field Robotics*, vol. 26, n.º. 5, págs. 477–499, 2009.
- [TS85] T. Takagi e M. Sugeno, “Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-15, n.º. 1, págs. 116–132, 1985.
- [TS92] K. Tanaka e M. Sugeno, “Stability analysis and design of fuzzy control systems,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, n.º. 2, págs. 135 – 156, 1992.
- [TS94] K. Tanaka e M. Sano, “A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 2, n.º. 2, págs. 119 –134, 1994.
- [TTOW01] T. Taniguchi, K. Tanaka, H. Ohtake, e H. O. Wang, “Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, n.º. 4, págs. 525 –538, 2001.
- [TW01] K. Tanaka e H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: a Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, 2001.

- [TYOW09] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, e H. O. Wang, “A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, n.º. 4, págs. 911–922, 2009.
- [VB96] L. Vandenberghe e S. Boyd, “Semidefinite programming,” *SIAM Review*, vol. 38, n.º. 1, págs. 49–95, 1996.
- [VB97] L. Vandenberghe e V. Balakrishnan, “Algorithms and software for LMI problems in control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, n.º. 5, págs. 89–95, 1997.
- [VB00] J. G. VanAntwerp e R. D. Braatz, “A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities,” *Journal of Process Control*, vol. 10, n.º. 4, págs. 363–385, 2000.
- [Wan92] L.-X. Wang, “Fuzzy systems are universal approximators,” em *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1992, págs. 1163–1170.
- [WEG01] WEG, *Catálogo WEG 050 - Motores de Baixa Tensão - Mercado Brasil*, WEG Equipamentos Elétricos SA, Jaraguá do Sul, SC, Brasil, 2001.
- [WL07] H. O. Wang e J. Li, “Nonlinear control via PDC: the TORA system example,” <http://www.ee.duke.edu/~jingli/research/tora.ps>, 2007.
- [XQ03] L. Xiaodong e Z. Qingling, “New approaches to  $\mathcal{H}_\infty$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI,” *Automatica*, vol. 39, n.º. 9, págs. 1571–1582, 2003.
- [XSF97] L. Xie, S. Shishkin, e M. Fu, “Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 31, n.º. 3, págs. 165–171, 1997.
- [YSL10] S. Yan, Z. Sun, e Z. Li, “Universal approximation of TS fuzzy systems constructed dynamically-MISO cases,” em *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, 2010, págs. 6472–6479.
- [Zad65] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, págs. 338–353, 1965.
- [Zad08] —, “Is there a need for fuzzy logic?” *Information Sciences*, vol. 178, n.º. 13, págs. 2751–2779, 2008.

