

TESE DE DOUTORADO Nº 252

**ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL ULTRA
FRACA APLICADA AO ELETROMAGNETISMO**

Alfred Gimpel Moreira Pinto

DATA DA DEFESA: 17/03/2017

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA FORMULAÇÃO
VARIACIONAL ULTRA FRACA APLICADA AO
ELETROMAGNETISMO**

Alfred Gimpel Moreira Pinto

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Elson José da Silva

Coorientador: Prof. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte - MG

Março de 2017

P659a Pinto, Alfred Gimpel Moreira.
Aspectos computacionais da formulação varacional ultra fraca aplicada
ao eletromagnetismo [manuscrito] / Alfred Gimpel Moreira Pinto. - 2017.
99 f., enc. : il.

Orientador: Elson José da Silva.
Coorientador: Márcio Matias Afonso.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 91-99.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Eletromagnetismo - Teses.
3. Galerkin, Métodos de - Teses. 4. Otimização matemática - Teses.
I. Silva, Elson José da. II. Afonso, Márcio Matias. III. Universidade Federal
de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)

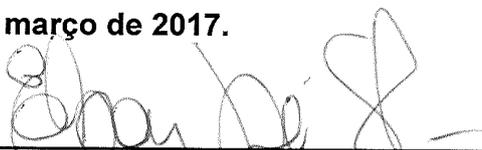
"Aspectos Computacionais da Formulação Variacional Ultra Fraca Aplicada ao Eletromagnetismo"

Alfred Gimpel Moreira Pinto

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 17 de março de 2017.

Por:



Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Márcio Matias Afonso
DEE (CEFET-MG) - Coorientador



Prof. Dra. Ursula do Carmo Resende
DEE (CEFET-MG)



Prof. Dr. Werley Gomes Facco
DMAT (IFES-ES)



Prof. Dr. Eduardo Henrique da Rocha Coppoli
DEE (CEFET-MG)



Prof. Dr. Ricardo Luiz da Silva Adriano
DEE (UFMG)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL ULTRA FRACA APLICADA AO ELETROMAGNETISMO

Alfred Gimpel Moreira Pinto

Belo Horizonte

2017



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Alfred Gimpel Moreira Pinto

ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL ULTRA FRACA APLICADA AO ELETROMAGNETISMO

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos exigidos à obtenção de título de doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Elson José da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Márcio Matias Afonso

Belo Horizonte

Agradecimentos

À Deus pela oportunidade de continuar os estudos e conseguir vencer os obstáculos durante todo o percurso.

Ao meu orientador, Professor Elson José da Silva, que teve papel fundamental nesta pesquisa com muito apoio, paciência, competência e disponibilidade.

Ao meu coorientador, Professor Márcio Matias Afonso, pelos conselhos e ensinamentos.

Aos professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFMG.

À minha mãe, irmãos e amigos pelo apoio e compreensão por minhas ausências.

À minha irmã, Tânia Gimpel, pelo apoio, carinho, incentivo e conselhos que me impulsionaram nesta jornada.

Aos amigos Fernando Dornas e Juliana Carvalho que estiveram ao meu lado durante todos os momentos e me ajudaram em ter resiliência.

Ao amigo Fábio Gonçalves pelo apoio em inúmeros momentos de superação compartilhados durante o curso.

Resumo

Os métodos numéricos que utilizam ondas planas nas funções de base para aproximar a solução da equação de Helmholtz têm recebido considerável atenção no eletromagnetismo computacional. Essas abordagens não requerem a exigência tradicional de cerca de dez pontos nodais por comprimento de onda para aproximar soluções oscilatórias. As principais desvantagens desses métodos são: imposição das condições de contorno essenciais, as discontinuidades do domínio e o mal condicionamento do sistema. O uso de ferramentas adicionais como os multiplicadores de Lagrange e os elementos de *Mortar* podem ser utilizados para incorporar as condições de contorno e discontinuidades do domínio, mas com aumento do custo computacional e do número de condição. Como alternativa, a Formulação Variacional Ultra Fraca utiliza o fluxo numérico *upwind* do Método de Galerkin Descontínuo. Essa técnica garante a incorporação fraca das condições de contorno essenciais e das condições de transmissão entre meios. Essas características têm despertado grande interesse em diversas aplicações, como na solução da equação de Helmholtz. Nesta tese, investigamos a Formulação Variacional Ultra Fraca para a propagação de ondas eletromagnéticas em malhas uniformes e não-uniformes. Para as malhas uniformes, investigamos o mal condicionamento do sistema global como função dos graus de liberdade, os meios heterogêneos, as funções de base como ondas planas e funções de Bessel e o truncamento do domínio computacional com Camadas Perfeitamente Casadas (PML). Para as malhas não-uniformes, que é a principal contribuição dessa pesquisa, propomos uma nova metodologia para controlar o número de condição e como predeterminar a quantidade máxima de funções de base por elemento em função da máxima aresta. A metodologia proposta é validada com a simulação do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica. Além disso, resolvemos um problema eletricamente grande, o espalhamento eletromagnético por um aerofólio condutor perfeito. *Palavras-chaves: UWVF, fluxo numérico, condicionamento.*

Abstract

Numerical methods that use plane waves as basis functions to approximate the solution of the Helmholtz equation have received considerable attention in computational electromagnetics. These approaches do not require the usual ten nodal points per wavelength to approximate oscillatory solutions. The main drawback of these methods are: imposing the essential boundary conditions, the domain discontinuities and ill-conditioning of the system. Although Lagrange multipliers and Mortar elements can be used to incorporate boundary conditions and domain discontinuities, they increase the computational cost and the condition number. Alternatively, the Ultra Weak Variational Formulation uses the numerical upwind flux of the Discontinuous Galerkin Method. This scheme ensures the weak incorporation of the essential boundary conditions and the transmission conditions between medias. These features have arisen great interest in several applications, such as to compute the Helmholtz equation. In this thesis, we investigate the Ultra Weak Variational Formulation for the electromagnetic wave propagation, using uniform and non-uniform meshes. For the uniform meshes, we investigate the ill-conditioning of the global system as function of the degrees of freedom, the heterogeneous medium, the basis functions as plane waves and Bessel functions and the truncation of the domain by means of the Perfectly Matched Layers (PML). For non-uniform meshes, which is the main contribution of this research, we propose a new methodology to control the condition number and how to predetermine the maximum number of basis functions based on maximum edge. The proposed methodology is validated through the simulation of electromagnetic scattering by a perfect conductor cylinder coated by a dielectric layer. Also is solved an electrically large problem as an example, the electromagnetic scattering by a perfect conductor airfoil.

Keywords: UWVF, numerical flow, PML, conditioning.

Sumário

Capítulo 1	12
1.1. Motivação	12
1.2. Estado da arte	15
1.3. Principais contribuições	18
1.4. Organização do texto	20
Capítulo 2	21
2.1. Características	21
2.2. Equações de Maxwell	22
2.3. Equação de onda eletromagnética	25
2.4. Formulação Variacional Bidimensional	26
2.4.1. Fluxos numéricos	29
2.4.2. Discretização e sistema matricial	32
2.4.3. Funções de base	33
2.5. Integração Analítica	35
2.6. Incorporação da PML	37
2.6.1. Projeto da PML	41
2.7. Contribuição original	42
Capítulo 3	43
3.1. Aspectos para análise dos experimentos	43
3.2. Malha uniforme	44

3.2.1. Expansão em ondas planas.....	45
3.2.2. Expansão em funções de Bessel.....	62
3.2.3. Comparação das expansões.....	66
3.3. Malha não uniforme	67
3.3.1. Espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito	67
3.3.2. Aplicação da metodologia de controle do condicionamento do sistema.....	73
3.3.3. Fator de acoplamento	75
3.4. Incorporação da PML	77
3.4.1. Propagação de ondas planas.....	77
3.4.2. Espalhamento Eletromagnético.....	80
3.5. Aplicação	82
Capítulo 4	87
4.1. Conclusões e comentários dos resultados.....	87
4.2. Participação em congressos	89
4.3. Publicação	90
4.4. Continuidade da pesquisa	90
Referências Bibliográficas	92

Lista de figuras

Figura 2-1 – Interface de separação entre dois meios distintos	24
Figura 2-2 – Domínio computacional aplicado a UWVF	27
Figura 2-3 – Elementos triangulares adjacentes sem sobreposição	27
Figura 3-1 – Domínio computacional homogêneo Ω , com $h = 1$ e fronteira absorvente Γ	46
Figura 3-2 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para a propagação de uma onda eletromagnética em meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de direção de 0°	46
Figura 3-3 – Número de condição do sistema para propagação em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 0° para direção de propagação.....	47
Figura 3-4 – Posto das matrizes elementares na propagação de uma onda eletromagnética no espaço livre para o domínio homogêneo, com $h = 1$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0° ..	48
Figura 3-5 – Amplitudes das funções de base para um elemento do domínio computacional homogêneo com 7, 19, 21, 22, 23 e 30 direções para a malha $h = 1$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0°	49
Figura 3-6 – Condicionamento elementar, matriz De , para todos os elementos do domínio computacional com 7, 19, 21, 22, 23, 24 e 30 bases para a malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0°	50
Figura 3-7 – Condicionamento elementar, matriz De , para todos os elementos do domínio computacional com 14 a 19 bases para a malha $h = 0,5$ e ângulo de propagação de 0°	51
Figura 3-8 – Valor médio do condicionamento das matrizes elementares para a malha $h = 0,5$, direção de propagação de 0° no domínio homogêneo com polarização perpendicular.	51
Figura 3-9 – Propagação ao longo da reta $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ no domínio homogêneo com polarização perpendicular, malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0°	52
Figura 3-10 – Propagação no domínio homogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0° , para 20 funções de base por elemento e $h = 1$	53
Figura 3-11 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.....	54

Figura 3-12 – Número de condição do sistema para propagação em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.....	55
Figura 3-13 – Amplitudes das funções de base para um elemento do domínio computacional homogêneo com 14 a 19 direções para a malha $h = 0,5$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 45°	55
Figura 3-14 – Domínio computacional para propagação de ondas planas em um meio heterogêneo.....	56
Figura 3-15 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 0° para direção de propagação.....	57
Figura 3-16 – Número de condição do sistema para propagação em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de incidência de 0°	58
Figura 3-17 – Propagação ao longo da reta $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ no domínio heterogêneo com polarização perpendicular, malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0°	59
Figura 3-18 – Propagação no domínio heterogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de 0° para 40 funções de base por elemento e $h = 0,5$	59
Figura 3-19 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.....	60
Figura 3-20 – Propagação no domínio heterogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de 45° , com 15 funções de base e $h = 0,5$	61
Figura 3-21 – Número de condição da matriz elementar De para 15 funções de base em função aos elementos para $h = 1$ e $h = 0,5$ em meio heterogêneo, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 45°	62
Figura 3-22 – Domínio computacional para linha infinita de corrente no espaço livre.....	63
Figura 3-23 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.	64
Figura 3-24 – Erro relativo em função dos números de condição do sistema para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.	65
Figura 3-25 – Erro relativo em função dos graus de liberdade com expansão em funções de Bessel e ondas planas para uma linha infinita de corrente no espaço livre.....	66
Figura 3-26 – Domínio computacional para um cilindro condutor perfeito iluminado por uma onda plana com incidência normal.	68
Figura 3-27 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z	68

Figura 3-28 – Condicionamento do sistema em função dos graus de liberdade para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z	69
Figura 3-29 – Número de condição dos sistemas $I - D - 1C$ e $D - C$ (eixo esquerdo) e erro relativo (eixo direito) em função ao número máximo de condicionamento de De	70
Figura 3-30 – Quantidade de funções de removidas após a aplicação do posto (eixo esquerdo) e número de iterações para o método BiCG (eixo direito) em função do máximo condicionamento da matriz De .	71
Figura 3-31 – Número de funções de base ao longo do diâmetro para $Cond(De) \leq 1012$	72
Figura 3-32 – Maior aresta dos elementos em relação a quantidade de funções de base para $Cond(De) \leq 1012$	72
Figura 3-33 – Cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica sem perdas, solução numérica em a e c e analítica em b e d, sendo as partes real e imaginária, respectivamente.....	74
Figura 3-34 – Erro absoluto para o cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica sem perdas, sendo a parte real em a e a parte imaginária em b.....	75
Figura 3-35 – Erro relativo em função de $h - 1$ com variação do fator de acoplamento como sendo o valor máximo, a média aritmética e a média geométrica entre os números de ondas. Meio heterogêneo, polarização perpendicular, ângulo de propagação de 30° e 8 funções de base.....	76
Figura 3-36 – Erro absoluto para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z e ABC distante $0,2\lambda$ do espalhador.....	77
Figura 3-37 – Domínio computacional para o espaço livre Ω_0 e região PML Ω_{PML} , UWVF-PML.....	78
Figura 3-38 – Erro relativo em função do parâmetro de decaimento, UWVF-PML.....	79
Figura 3-39 – Número de condição do sistema $A = I - D - 1C$ e da matriz D em função do fator de reflexão, UWVF-PML.....	79
Figura 3-40 – Parte real e imaginária do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito de raio de 0.5λ e a interface entre a PML e o espaço livre a partir de $x, y = \pm 0.7\lambda$	81
Figura 3-41 – Erro absoluto da parte real e imaginária do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito de raio de 0.5λ e a interface entre a PML e o espaço livre a partir de $x, y = \pm 0.7\lambda$	82
Figura 3-42 – Perfil e elementos geométricos do NACA0012.....	83
Figura 3-43 – Malha gerada para o domínio computacional - NACA0012.....	84
Figura 3-44 – Espalhamento eletromagnético para o NACA0012 para onda plana incidente propagando na direção $+x$	85

Lista de tabelas

Tabela 3-1 – Densidade da malha do domínio retangular contínuo.....	45
Tabela 3-2 – Erros relativos mínimos em relação aos graus de liberdade e densidade das malhas para a propagação em domínio homogêneo com ângulo de 0° para direção de propagação.....	47
Tabela 3-3 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 45° no domínio homogêneo com polarização perpendicular.	54
Tabela 3-4 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 0° no domínio heterogêneo com polarização perpendicular.	58
Tabela 3-5 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 45° no domínio heterogêneo com polarização perpendicular.	61
Tabela 3-6 – Erros relativos mínimos e números de condição do sistema para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.	65

Lista de símbolos

<i>B</i>	Densidade de fluxo magnético (Wb/m^2)
<i>D</i>	Densidade de fluxo elétrico (C/m^2)
<i>E</i>	Intensidade de campo elétrico (V/m)
<i>H</i>	Intensidade de campo magnético (A/m)
<i>J</i>	Densidade de corrente elétrica (A/m^2)
<i>k</i>₀	Número de onda no espaço livre
ϵ_0	Permissividade elétrica do espaço livre (F/m)
ϵ_r	Permissividade elétrica relativa do meio
μ_0	Permeabilidade magnética do espaço livre (H/m)
μ_r	Permeabilidade magnética relativa do meio
λ	Comprimento de onda (m)
δ	Condutividade elétrica (Ω^{-1}/m)
ρ_s	Densidade superficial de carga elétrica (C/m^2)

Lista de abreviações

ABC	Absorbing Boundary Conditions
BEM	Boundary Element Method
DEM	Discontinuous Enrichment Method
DGM	Discontinuous Galerkin Method
DPG	Discontinuous Petrov-Galerkin
FEM	Finite Element Method
FMM	Fast Multipole Method
GFEM	Generalized Finite Element Method
LM	Lagrange Multiplier
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
PML	Perfectly Matched Layer
PUM	Partition of Unity Method
SPBVP	Singularly Perturbed Boundary-Value Problems
UWVF	Ultra Weak Variational Formulation
XFEM	eXtended Finite Element Method

Capítulo 1

Introdução

1.1. Motivação

O Método dos Elementos Finitos (FEM) clássico foi proposto inicialmente por Courant em 1942 [1], mas a aplicação no eletromagnetismo foi realizada por Peter Silvester em 1969 [2]. O FEM é uma ferramenta numérica eficaz na solução de problemas de valor de contorno em domínios complexos, sendo a convergência e a precisão dependentes da formulação empregada nos elementos e da malha gerada [3]. No entanto, a precisão pode ser melhorada por meio de procedimentos conhecidos como refinamentos tipo h , p , hp e r que aumentam os graus de liberdade para reduzir o erro de discretização [4].

Essas técnicas adaptativas ajustam os parâmetros do problema por meio da estimativa do erro a fim de torná-lo menor a cada iteração. As alterações são feitas progressivamente até que a solução alcance a precisão desejada. À vista disso, o refinamento tipo h altera o tamanho característico dos elementos (h) e mantém fixa a ordem das funções de forma. Ao contrário do tipo h , o tipo p altera o grau do polinômio interpolador (p) com o aumento da quantidade de nós dos elementos, mas com densidade de malha constante. No refinamento hp , os parâmetros h e p são alterados simultaneamente e no refinamento tipo r as coordenadas dos nós são realocadas e mantem-se constante os parâmetros h e p [4] [5]. Esses processos adaptativos buscam melhorar a precisão do FEM, mas o método ainda possui limitações, principalmente relacionadas à malha, como [6] [7]:

- o aumento do custo computacional;
- nos refinamentos tipo h e hp com a introdução de novos graus de liberdade que exige a reconstrução da malha;

- sensibilidade à distorção dos elementos;
- a utilização de polinômios interpoladores para aproximar a propagação de ondas;
- a simulação de problemas com domínios eletricamente grandes.

Portanto, o FEM clássico não é muito eficaz no estudo de problemas de propagação de ondas, pois soluções harmônicas não são bem representadas por funções polinomiais [8]. No entanto, mesmo com as técnicas adaptativas, podem ocorrer erros de dispersão e de dissipação com o aparecimento de oscilações espúrias, alteração significativa da velocidade de propagação e decaimento da amplitude [8]. Logo, em domínios eletricamente grandes, os erros tornam-se significativos e a solução imprecisa [8].

Para contornar esses problemas, o conhecimento a priori do comportamento da solução pode ser incorporado nas funções de base do FEM. Dentre os métodos que utilizam essa característica, três têm recebido considerável atenção: o Método de Partição da Unidade (PUM) [9], o Método de Enriquecimento Descontínuo (DEM) com Multiplicadores de Lagrange [10] e a Formulação Variacional Ultra Fraca (UWVF) [11].

No PUM, duas técnicas foram desenvolvidas de formas independentes, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (GFEM) e Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM) [9]. Atualmente, são reconhecidas como sendo o mesmo método e amplamente utilizadas, sendo normalmente referenciadas como GFEM [12]. Esse método atenua a exigência de cerca de dez pontos nodais por comprimento de onda devido ao enriquecimento das funções de forma e, assim, não há a necessidade de refinamento da malha para garantir precisão local e global [13]. No entanto, o GFEM apresenta desvantagens, que devem ser tratadas com técnicas específicas, como [7] [14]:

- a imposição das condições de contorno essenciais;
- as descontinuidades da solução devido a mudança de meios materiais;
- o aumento do número de condição do sistema.

Dentre as técnicas utilizadas, os Multiplicadores de Lagrange (LM) podem ser empregados, mas com o inconveniente aumento dos graus de liberdade, do custo computacional e do número de condição do sistema.

Nos métodos descontínuos DEM e UWVF, a continuidade entre elementos vizinhos não é mantida naturalmente, mas em sentido fraco com a incorporação de restrições adicionais na formulação. Esses métodos utilizam o conceito de fluxo numérico decorrente do Galerkin Descontínuo (DG). Essa técnica permite a construção da aproximação global em termos das aproximações locais, que possuem suporte compacto, ou seja, são não-nulas somente no interior do elemento. No entanto, no DEM, de maneira similar ao PUM, as descontinuidades das aproximações nas interfaces entre os elementos podem ser tratadas com multiplicadores de Lagrange, mas com os mesmos inconvenientes.

A UWVF foi desenvolvida em 1994 e posteriormente investigada na solução das equações de Helmholtz e Maxwell com funções de base não-polinomiais [11] [15] [16]. A ideia do método é dividir o domínio original em subdomínios elementares com aproximações que satisfazem localmente as equações e as condições de transmissão são impostas pelo Método de Galerkin Descontínuo (DGM) [17]. Assim, as descontinuidades e as condições de contorno são incorporadas naturalmente na formulação. Em vista disso, a UWVF é o DGM, sendo a terminologia “ultra fraca” devido as funções de base, na formulação variacional, serem avaliadas nas interfaces [15] [17].

As expansões das bases são normalmente feitas por ondas planas que podem ser calculadas de forma fechada [18]. Já com as funções de Bessel, há menor crescimento do número de condição do sistema global, mas com a necessidade de se utilizar quadraturas e refinamento da malha [19].

Na UWVF, o mal condicionamento do sistema está relacionado com o tipo e a quantidade de funções de bases e a densidade da malha [20] [21]. No entanto, o método tem a flexibilidade para garantir o controle do número de condição em cada subproblema antes de compor o sistema global [22] [23].

A UWVF apresenta características atrativas para aplicações no eletromagnetismo, podendo melhorar a precisão das soluções com baixo custo computacional quando comparada ao FEM em problemas eletricamente grandes. Os dois métodos utilizam a mesma forma de decomposição do domínio e são capazes de aproximar geometrias complexas com malha não uniforme, mas a UWVF permite a utilização de elementos

maiores que o comprimento de onda [11]. Portanto, justifica-se a relevância na investigação da UWVF aplicada ao eletromagnetismo computacional. Além disso, nos últimos anos, o método tem sido analisado em diversas aplicações, mas praticamente restrito a poucos grupos de pesquisa de acordo com as publicações disponíveis. Nesse contexto, apresentamos na seção seguinte as principais publicações que investigam o método após o seu advento em 1994.

1.2. Estado da arte

Em 1998, a UWVF foi aplicada ao problema de Helmholtz bidimensional com a investigação da ordem de convergência e aplicações do método por meio de processos teóricos e simulações em uma malha regular [24]. Além disso, os autores mostram a construção da matriz global e a inversão do sistema por um algoritmo iterativo.

Em 2002, os aspectos computacionais da UWVF foram investigados para um problema de acústica com o uso de elementos relativamente grandes quando comparados ao comprimento de onda e, também, o controle do condicionamento do sistema global [21] [25]. Além disso, a incorporação do conhecimento a priori da solução do problema no espaço de aproximação permitiu que a UWVF produzisse resultados precisos com poucos graus de liberdade para um domínio computacional com vários comprimentos de onda [16] [24].

Em 2003 a UWVF teve suas potencialidades investigadas para a solução de problemas de onda bidimensionais de Helmholtz e tridimensionais de Maxwell [26]. Os autores comparam os resultados com o FEM e concluíram que a UWVF é uma interessante alternativa para solução de domínios eletricamente grandes em alta frequência e com elementos da ordem de alguns comprimentos de ondas. Sendo essas características, atrativas nas investigações no eletromagnetismo computacional.

No ano seguinte, 2004, a UWVF foi aplicada na solução de propagação de ondas elásticas em duas dimensões para o problema de Navier [27]. Neste trabalho foram investigados o número de condição da matriz elementar e a convergência da UWVF por

meio do erro relativo, ambos em função dos graus de liberdade. Os resultados evidenciaram a convergência do método com funções de base uniforme e não-uniformes e a importância do controle de condicionamento. No mesmo ano, o truncamento do domínio computacional com o uso da PML foi investigado com a UWVF na solução da equação de Helmholtz em problemas acústicos tridimensionais [28]. A precisão alcançada com a PML foi da ordem de 1%, sendo relatado pelos autores como sendo suficiente para a maioria de aplicações em engenharia. No entanto, a camada PML deve ter espessura relativamente grande em função do comprimento de onda e eleva o número de condição do sistema, o que acarreta em reduzidos graus de liberdade na região [28].

A paralelização da UWVF foi investigada no mesmo período com o uso de clusters na solução de problema tridimensional da equação de Helmholtz com elevado número de onda [29]. O trabalho investigou a característica do método na construção do sistema global sem a sobreposição dos subdomínios, ou seja, as matrizes são construídas para cada elemento isoladamente. Assim, os autores mostraram a possibilidade de paralelização da solução e o controle isolado das características do sistema, por exemplo, o número de condição das partes elementares.

Em 2006, o Método Multipolo Rápido (FMM) foi acoplado à UWVF para que a distância entre o obstáculo e a fronteira artificial seja reduzido [22]. Essa técnica acarretou na necessidade de refinamento da malha para uma boa representação da geometria [22]. O UWVF-FMM apresentou melhoria na precisão dos resultados na investigação da solução de problemas com objetos de geometrias simples e domínio computacional com vários espalhadores [22].

A investigação para a escolha das funções de base para a UWVF foi feita em 2007 [30]. As simulações foram feitas para a solução das equações de Maxwell harmônicas com processamento paralelo. A implementação apresentada teve como resultado as estimativas teóricas para o erro e para o número de condição. Além disso, a redução do número de direções por elemento e a parametrização de superfícies e interfaces a fim de evitar malhas densas [30].

A estimativa do erro foi novamente investigada em 2008 na simulação de meios com e sem perdas [31]. No trabalho, os autores apresentaram a convergência global da

UWVF, considerado a dependência da densidade da malha [31]. Esse resultado foi de suma importância, pois até então era provada a convergência do método somente na fronteira do domínio. Foram utilizados experimentos e provas computacionais para sustentar as estimativas de erro para domínio computacional com e sem meio absorvente. No entanto, os autores afirmaram a existência de lacunas a serem pesquisadas, como a não existência de estimativas de erro para a presença de singularidades e para o refinamento simultâneo da malha e das funções de base, ou seja, para a convergência hp [31].

Em 2012, foram comparadas as expansões em funções de Bessel e ondas planas e investigada a convergência da UWVF para problemas bidimensionais [18]. Nos experimentos as funções de Bessel acarretaram em menor número de condição para o sistema global em comparação com as ondas planas, mas com a necessidade de uso de quadratura. Como as bases com ondas planas podem ser calculadas de forma fechada, são recomendadas para erro relativo em torno de 1% [18].

Em 2013, foram investigados três diferentes tipos de expansões: ondas planas, funções de base de Bessel e ondas evanescentes, sendo os menores condicionamentos alcançados com as funções de Bessel [23]. Além disso, foram investigados diferentes tipos de elementos de malha para melhorar o condicionamento do sistema global e diminuir os graus de liberdade, sendo utilizados elementos triangulares, quadrangulares e hexagonais [23]. O resultado mais preciso foi alcançado com os elementos hexagonais regulares e quadrados. Com números de onda elevados, os triângulos e hexágonos irregulares produziram um sistema mais mal condicionado. Portanto, foi investigada a correlação em o parâmetro de regularidade para a malha e o número de condição [23].

A investigação da solução de equações diferenciais parciais de quarta ordem foi feita em 2014 baseada na teoria de placa fina de Kirchhoff [17]. Neste trabalho, a UWVF foi estendida para as equações de quarta ordem e foi provada a convergência na fronteira. Além disso, as convergências h e p foram aplicadas na investigação numérica da viabilidade da UWVF para experimentos com problemas homogêneos e heterogêneos [17]. A UWVF apresentou potencialidade para resolver problemas de quarta ordem, mas com a necessidade de controle do número de condição.

No ano seguinte, 2015, foi desenvolvido um método Petrov-Galerkin Descontínuo (DPG) com o uso da UWVF [32]. Os autores realizaram a formulação por meio da decomposição do problema em um sistema de primeira ordem e, também, por meio do método primário DPG, ou seja, sem a decomposição em um sistema de primeira ordem [33]. Assim, os autores generalizaram o método primário DPG com funções de teste ideais.

Em 2016, foi feito o acoplamento entre os métodos DPG e BEM. Foi considerado um problema de transmissão modelado por uma equação de difusão [34]. O método proposto baseia-se na UWVF com três variáveis de campo e variáveis estruturais. Neste trabalho, os autores mostraram que o DPG pode ser acoplado ao BEM e forneceram um método robusto para o problema de transmissão.

Conforme exposto, a Formulação Variacional Ultra Fraca é investigada na busca por melhor precisão e convergência. Porém, apesar de aplicações em diversas áreas, como na acústica [35] [36], eletromagnetismo computacional [37] [38] [39], calorimetria [40] e Matemática Aplicada [41] [42], ainda possui inúmeras lacunas para serem preenchidas. Portanto, justifica-se o nosso interesse em investigar o método e contribuir para as aplicações na engenharia, em especial no eletromagnetismo computacional, pois essa técnica tem características vantajosas nas aplicações de propagação de ondas eletromagnéticas, como a solução de problemas eletricamente grandes e o uso de elemento maiores que o comprimento de onda.

1.3. Principais contribuições

A Formulação Variacional Ultra Fraca apresenta características vantajosas para experimentos em eletromagnetismo computacional como o uso de elementos de malha com alguns comprimentos de onda, controle local do número de condição do sistema global, uso de funções de base por meio dos conhecimentos *a priori* da solução do problema, o uso de malhas não uniforme, a incorporação natural das condições de contorno e o uso de Camadas Perfeitamente Casadas.

Desta forma, nossa contribuição é feita na propagação de ondas eletromagnéticas em alta frequência e, assim, ampliar os aspectos computacionais da UWVF para esses experimentos. Investigamos as características do método, como a convergência e precisão, o controle de condicionamento, a estimação da quantidade de funções de base por elemento, o uso de expansões de base como sendo ondas planas e funções de Bessel, a incorporação da PML e as aplicações em problemas complexos.

Ressaltamos as contribuições dessa pesquisa como uma estratégia para equilibrar o controle do número de condição, o custo computacional, a predeterminação da quantidade de bases por elemento e o truncamento do domínio computacional.

Para o controle do condicionamento, o cálculo do posto possibilita a redução das funções de base por elemento de tal forma que satisfaça ou que esteja próximo a satisfazer a quantidade de bases que atendam o número de condição pré-determinado. Caso essa quantidade não seja alcançada pelo posto, as iterações necessárias para alcançar esse valor são substancialmente reduzidas. Além disso, a previsão das funções de bases por elemento é feita de acordo com a maior aresta do elemento. Essas técnicas aplicadas em conjunto produzem resultado com erro relativo de 1,2% para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma fina camada dielétrica. Essas contribuições foram publicadas na revista *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* no artigo “Performance analysis of the ultra weak variational formulation to compute electromagnetic fields on nonuniform meshes” aceito em janeiro de 2017, DOI 10.1002/jnm.2228.

A principal característica da UWVF é a possibilidade de uso de elementos com vários comprimentos de ondas. Essa peculiaridade é investigada com o truncamento do domínio computacional por meio das Camadas Perfeitamente Casadas (PML). Estabelecemos o perfil do parâmetro de decaimento da camada e comparamos o resultado para o campo próximo com a ABC e a PML. No entanto, o uso de elementos da ordem de alguns comprimentos de onda é comprometido com a PML. Ela incorpora novos graus de liberdade à UWVF, como a espessura, a quantidade de camadas e a ordem de decaimento que devem ser isolados. Diante disso, optamos em investigar o parâmetro de decaimento mantendo as demais variáveis da PML fixas.

Nesta tese, realizamos experimentos em dois problemas complexos do eletromagnetismo computacional que são de interesse na engenharia. São resolvidos problemas eletricamente grandes de espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma fina camada dielétrica e por um aerofólio.

1.4. Organização do texto

Esta tese está organizada em quatro capítulos. O primeiro é dedicado à contextualização, estado da arte da Formulação Variacional Ultra Fraca e contribuições da pesquisa. No segundo capítulo a UWVF é desenvolvida, a PML é incorporada e seus parâmetros de projetos apresentados. No terceiro capítulo são apresentadas as investigações da UWVF na propagação de ondas eletromagnéticas e a aplicação das contribuições do trabalho na simulação em problemas práticos da engenharia. Por fim, no quarto capítulo, os resultados e contribuições são discutidos e as propostas para continuidade da pesquisa apresentadas.

Capítulo 2

Formulação Variacional Ultra Fraca

2.1. Características

A Formulação Variacional Ultra Fraca emprega soluções locais descontínuas em cada elemento da malha, sendo a continuidade da solução forçada de forma fraca por meio das condições de contorno de impedância [21]. Uma característica relevante é a capacidade do método produzir soluções aproximadas com poucos graus de liberdade, sendo essencialmente um método *upwind* Galerkin Descontínuo [31]. A UWVF apresenta as características da *h-convergência*, ou seja, a partir de uma quantidade fixa de funções de base é possível refinar a malha e melhorar a aproximação. Por outro lado, a *q-convergência* é obtida no método por meio da variação da quantidade de funções de base para a mesma densidade de malha. Essas técnicas são combinadas no método adaptativo *hq-convergência* que para a UWVF deve ser associado ao controle do número de condição da matriz local [31].

Diante disso, o considerável interesse despertado pela UWVF, além das características de convergência, é devido à possibilidade de o tamanho dos elementos da malha ser de alguns comprimentos de onda e o número de condição do sistema controlado por elemento. Essas características asseguram a solução de problemas eletricamente grandes, o uso de malhas não uniformes e o emprego de diferentes expansões das funções de base [21].

Portanto, a partir dessas características, desenvolvemos a Formulação Variacional Ultra Fraca e apresentamos algumas características sobre a modelagem.

2.2. Equações de Maxwell

Toda a teoria eletromagnética é condensada nas quatro equações de Maxwell que podem ser representadas na forma diferencial e descrevem a inter-relação existente entre os campos elétrico e magnético e as densidades de carga elétrica e de corrente elétrica, em um ponto no espaço [43]. São escritas na forma harmônica como

$$\text{Lei de Gauss} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2-1)$$

$$\text{Lei de Gauss para campos magnéticos} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2-2)$$

$$\text{Lei de Faraday} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}, \quad (2-3)$$

$$\text{Lei de Ampère-Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}, \quad (2-4)$$

onde j é a unidade complexa, ω é a frequência angular, \mathbf{D} é a densidade de fluxo elétrico, \mathbf{E} é a intensidade de campo elétrico, \mathbf{B} é a densidade de fluxo magnético, \mathbf{H} é a intensidade de campo magnético, \mathbf{J} é a densidade de corrente e ρ_s é a densidade de carga livres.

A equação 2-1 representa a lei de Gauss que estabelece a existência de campos elétricos em uma região devido a presença de carga elétrica total não nula, ou seja, o divergente do campo elétrico é não nulo. Na equação 2-2, lei de Gauss para o magnetismo, as linhas de campo magnético são sempre fechadas, ou seja, expressa a inexistência de cargas magnéticas. A lei de Faraday na equação 2-3 descreve a indução de um campo elétrico por meio do campo magnético. A equação 2-4 representa a Lei de Ampère que apresenta duas possibilidades de geração de campos magnéticos: por meio de correntes elétricas ou por campos elétricos [43].

Além das equações (2-1) a (2-4), as relações constitutivas complementam as equações de Maxwell,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E}, \quad (2-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}, \quad (2-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}, \quad (2-7)$$

onde ε é a permissividade elétrica, μ é a permeabilidade magnética e σ é a condutividade elétrica.

As equações 2-5 e 2-6 relacionam as respectivas densidades com as intensidades de campos e a equação 2-7 relaciona a densidade de corrente elétrica com a intensidade de campo elétrico. As grandezas ε , μ e σ são escalares para o meio linear, homogêneo e isotrópico, ou seja, suas características físicas são independentes da intensidade, da posição e da orientação dos campos [43].

Na caracterização de meios heterogêneos ou diferentes do espaço livre, podemos representar a permissividade e a permeabilidade por parâmetros relativos,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad (2-8)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (2-9)$$

onde ε_r , ε_0 , μ_r e μ_0 são a permissividade relativa, a permissividade do espaço livre, a permeabilidade relativa e a permeabilidade do espaço livre, respectivamente [43].

As equações de Maxwell, em conjunto com as relações constitutivas, modelam o comportamento dos campos em determinado meio. Entretanto, na interface de separação de meios distintos pode ocorrer a variação abrupta dos parâmetros constitutivos e ocasionar na descontinuidade dos campos [43]. Portanto, neste caso, as equações de Maxwell não caracterizam adequadamente o comportamento dos campos e torna-se necessário a análise cuidadosa no contorno [43].

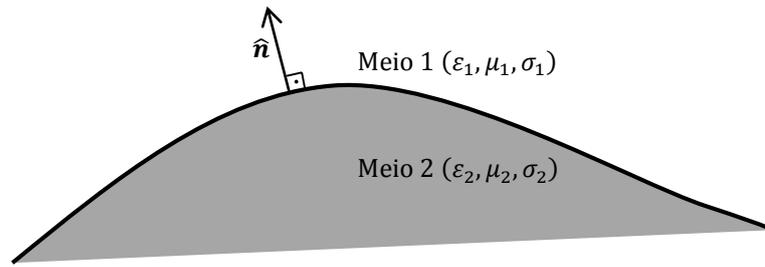


Figura 2-1 – Interface de separação entre dois meios distintos

Na figura 2-1, os campos elétrico e magnético atendem as condições de contorno:

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (2-10)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s, \quad (2-11)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (2-12)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (2-13)$$

onde \hat{n} é o vetor normal à fronteira de separação com direção do meio 1 para o meio 2, \mathbf{J}_s é a densidade de corrente elétrica superficial e ρ_s é a densidade superficial de carga elétrica.

No caso do meio 2 ser um condutor elétrico perfeito $\sigma_2 \rightarrow \infty$, as equações são reduzidas a [44]:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (2-14)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s, \quad (2-15)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_s, \quad (2-16)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0. \quad (2-17)$$

Ainda, considerando que os meios sejam dielétricos e que não haja correntes ou cargas superficiais, assim,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2, \quad (2-18)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2, \quad (2-19)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2, \quad (2-20)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_2. \quad (2-21)$$

Admitindo que a geometria do problema e as características eletromagnéticas são invariantes ao longo do eixo z , o sistema apresentado pelas equações 2-1 a 2-4 é reduzido a uma única componente cartesiana nesta direção de acordo com as polarizações. Assim, obtemos a equação de onda escalar que, em conjunto com as condições de contorno, modelam os problemas bidimensionais.

2.3. Equação de onda eletromagnética

A partir das equações de Maxwell obtemos a equação de onda por meio do desacoplamento dos campos elétrico e magnético nas leis de Faraday e de Ampère. Essa manipulação possibilita a determinação da equação de onda e que deve satisfazer as condições de contorno [43]. Consideremos que as fontes do campo sejam exteriores ao domínio computacional, obtemos:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla E_z \right) + k_0^2 \varepsilon_r E_z = 0, \quad (2-22)$$

$$E_z^1 = E_z^2, \quad (2-23)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_r^1} \frac{\partial E_z^1}{\partial \hat{\mathbf{n}}_1} = - \frac{1}{\varepsilon_r^2} \frac{\partial E_z^2}{\partial \hat{\mathbf{n}}_2}, \quad (2-24)$$

A equação 2-22 representa o modo transversal magnético em z (TM_z), ou seja, não há componente de H na direção z , $H_z = 0$, mas com $E_z \neq 0$. Desta forma, os campos envolvidos nesse modo são E_z , H_x e H_y [45]. Já as equações 2-23 e 2-24 são as condições de transmissão para o campo elétrico na interface.

Ao contrário do modo TM_z , o modo TE_z , transverso elétrico em z , não possui componente de E na direção z , $E_z = 0$, mas com $H_z \neq 0$. Assim, os campos envolvidos nesse modo são H_z , E_x e E_y [45].

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla H_z \right) + k_0^2 \mu_r H_z = 0, \quad (2-25)$$

$$H_z^1 = H_z^2, \quad (2-26)$$

$$\frac{1}{\mu_r^1} \frac{\partial H_z^1}{\partial \hat{n}_1} = - \frac{1}{\mu_r^2} \frac{\partial H_z^2}{\partial \hat{n}_2}, \quad (2-27)$$

O modo TE_z é representado pela equação 2-26 e as condições de transmissão na interface por 2-26 e 2-27 [43].

As equações 2-22 e 2-25 podem ser reescritas de forma única e as características eletromagnéticas serem absorvidas pelo número de onda em um meio homogêneo.

$$\nabla \cdot \nabla u + k^2 u = 0, \quad (2-28)$$

$$u^1 = u^2, \quad (2-29)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial \hat{n}_1} = - \frac{\partial u^2}{\partial \hat{n}_2}, \quad (2-30)$$

onde u representa os campos para cada modo e $k = \omega \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}$.

A equação 2-28, conhecida como equação de Helmholtz, representa a equação de onda escalar. Essa equação tem solução única se estiver relacionada as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, ou seja, quando se conhece, respectivamente, o valor do campo ou da derivada normal no contorno do domínio [45].

2.4. Formulação Variacional Bidimensional

A Formulação Variacional Ultra Fraca bidimensional é modelada por meio da equação de onda escalar 2-28 em um domínio computacional Ω com limites Γ .

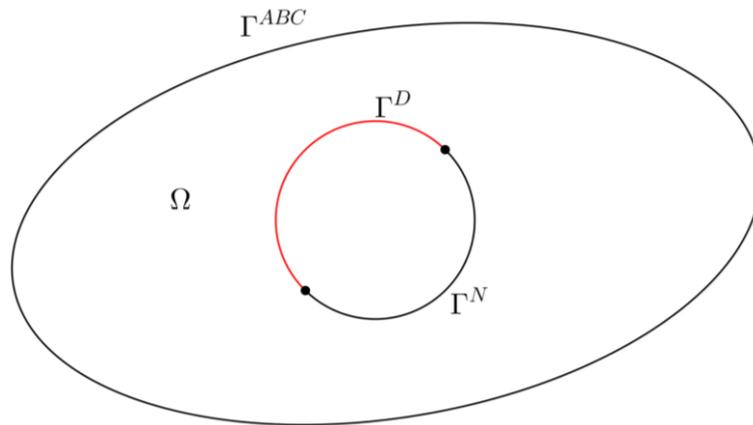


Figura 2-2 – Domínio computacional aplicado a UWVF.

Na figura 2-2, Ω é o domínio computacional, Γ^{ABC} é a fronteira ABC, Γ^D é a fronteira com condição de contorno de Dirichlet e Γ^N com condição de Neumann. Assim, as fronteiras externas do domínio são representadas por Γ , sendo $\Gamma = \Gamma^{ABC} \cup \Gamma^D \cup \Gamma^N$.

O problema original Ω , figura 2-2, é decomposto em um conjunto de subproblemas não sobrepostos, onde cada elemento Ω_e seja tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^N \Omega_e$. Consequentemente, as funções de aproximação podem pertencer a um espaço muito mais amplo quando comparado com a formulação fraca clássica [25].

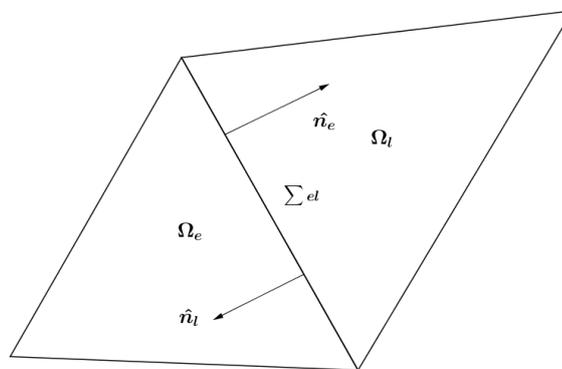


Figura 2-3 – Elementos triangulares adjacentes sem sobreposição.

Na figura 2-3, a partição possui como fronteira interna Σ_{el} que representa a interface entre elementos adjacentes, Ω_e e Ω_l , e os vetores \hat{n}_e e \hat{n}_l são normais às superfícies e exteriores a Ω_e e Ω_l , respectivamente.

Essas hipóteses iniciais em conjunto com a equação 2-28 modelam o comportamento do campo sobre cada elemento Ω_e .

$$\nabla^2 u_e + k_e^2 u_e = 0 \quad \text{em } \Omega_e \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + j\alpha u_e = Q \left(-\frac{\partial u_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + j\alpha u_e \right) + g \quad \text{sobre } \Gamma_e \quad (2-32)$$

onde k_e é o número de onda, $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal para fora, α é o parâmetro de acoplamento igual a $Re(k_e)$ e g é a fonte. A equação 2-32 representa a condição de contorno generalizada sobre a fronteira $\Gamma_e = \Gamma_e^{ABC} \cup \Gamma_e^D \cup \Gamma_e^N$, onde Γ_e é o limite do domínio computacional sobre cada elemento, sendo Γ_e^{ABC} a fronteira absorvente, Γ_e^D a fronteira com condição de Dirichlet e Γ_e^N a fronteira com condição de Neumann [46]. As condições de contorno embutidas na equação 2-32 são obtidas por meio da escolha apropriada de Q , para $Q = 1$ a condição de Neumann, $Q = -1$ a condição de Dirichlet e $Q = 0$ a condição de contorno absorvente de ordem zero [18].

A partir da equação 2-31, a UWVF pode ser derivada da aproximação de Galerkin Descontínuo por meio de um sistema de primeira ordem com a introdução do campo \mathbf{v}_e [18],

$$jk_e \mathbf{v}_e = \nabla u_e \quad (2-33)$$

$$jk_e u_e = \nabla \cdot \mathbf{v}_e \quad (2-34)$$

$$jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e + j\alpha u_e = Q(-jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e + j\alpha u_e) + g \quad (2-35)$$

Multiplicando as equações 2-33 e 2-34 pelo complexo conjugado de um vetor de teste suave $\boldsymbol{\tau}_e$ e de um escalar φ_e , respectivamente, e integrando as equações sobre o elemento Ω_e ,

$$\int_{\Omega_e} jk_e \mathbf{v}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} + u_e \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} dA = \int_{\partial\Omega_e} u_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} d\Gamma, \quad (2-36)$$

$$\int_{\Omega_e} jk_e u_e \overline{\varphi_e} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \overline{\varphi_e} dA = \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \overline{\varphi_e} d\Gamma, \quad (2-37)$$

Somando as equações 2-36 e 2-37 e rearranjando os termos,

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{v}_e \cdot \overline{(-jk_e \boldsymbol{\tau}_e + \nabla \varphi_e)} + u_e \overline{(-jk_e \varphi_e + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_e)} dA = \int_{\partial\Omega_e} u_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} + \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \overline{\varphi_e} d\Gamma \quad (2-38)$$

Então, escolhemos τ_e e φ_e como sendo soluções suaves do problema adjunto de Helmholtz,

$$\overline{(-jk_e \tau_e + \nabla \varphi_e)} = 0, \quad \text{em } \Omega_e \quad (2-39)$$

$$\overline{(-jk_e \varphi_e + \nabla \cdot \tau_e)} = 0. \quad \text{em } \Omega_e \quad (2-40)$$

Portanto, a integral do lado esquerdo na equação 2-38 será nula e o problema modelado por um integral sobre o bordo do elemento. Essa redução da região de integração confere ao método a terminologia “Ultra Fraca”. Assim,

$$\int_{\partial\Omega_e} u_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} + \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \overline{\varphi_e} d\Gamma = 0. \quad (2-41)$$

A equação 2-41 representa a formulação de forma reduzida sobre a fronteira $\partial\Omega_e$ do elemento. Nela, introduzimos os fluxos numéricos por meio da substituição dos termos u_e e \mathbf{v}_e por \hat{u}_e e $\hat{\mathbf{v}}_e$, respectivamente,

$$\int_{\partial\Omega_e} \hat{u}_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_e} + \hat{\mathbf{v}}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e \overline{\varphi_e} d\Gamma = 0 \quad (2-42)$$

onde \hat{u}_e e $\hat{\mathbf{v}}_e$ são os fluxos numéricos nas faces interiores.

Na equação 2-42, os fluxos numéricos \hat{u}_e e $\hat{\mathbf{v}}_e$ devem ser escolhidos de tal forma que as condições de transmissão sejam satisfeitas. Assim,

$$\frac{\partial u_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e} + j\alpha u_e = -\frac{\partial u_l}{\partial \hat{\mathbf{n}}_l} + j\alpha u_l, \quad (2-43)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e} - j\alpha u_e = -\frac{\partial u_l}{\partial \hat{\mathbf{n}}_l} - j\alpha u_l, \quad (2-44)$$

As equações 2-43 e 2-44 são obtidas por meio da combinação linear das equações 2-29 e 2-30 e representam a condição de transmissão para a decomposição do domínio global [47].

2.4.1. Fluxos numéricos

O fluxo numérico é uma característica local que garante a conservação do deslocamento da onda através das fronteiras dos elementos [48] [49]. Os modelos

matemáticos na literatura têm o intuito de melhorar o desempenho da continuidade da energia entre os elementos adjacentes e tem motivado a avaliação e a comparação dos fluxos numéricos [50] [51]. Portanto, esses estudos apresentam orientações práticas que auxiliam na escolha do fluxo numérico para alcançar o equilíbrio entre a performance e a precisão nas simulações numéricas [50] [52].

Diante do exposto, o modelo *upwind* de fluxo numérico é empregado na UWVF, pois apresenta impacto significativo nos processos computacionais devido a incorporação das características do campo em sua formulação [53]. Portanto, estabelece numericamente a direção de propagação dos campos entre elementos adjacentes de forma adaptativa à direção de propagação e, assim, evita o aparecimento de divergência na solução e de oscilações numéricas [54].

Nesta tese é empregado o modelo de fluxo numérico *upwind* proposto no trabalho de Ralf Hiptmair *et al* [55] devido ao desempenho da formulação no estudo de propagação de ondas eletromagnéticas [56].

Nessa abordagem, apresentamos os conceitos de salto e média introduzidos pelo Método de Galerkin Descontínuo entre dois elementos adjacentes, Ω_e e Ω_l , que compartilham uma fronteira interna Σ_{el} ,

$$\{\{u\}\} = \frac{u_e + u_l}{2}, \quad \{\{v\}\} = \frac{v_e + v_l}{2}, \quad (2-45)$$

$$[[u]] = u_e \hat{n}_e + u_l \hat{n}_l, \quad [[v]] = v_e \cdot \hat{n}_e + v_l \cdot \hat{n}_l, \quad (2-46)$$

onde $\{\{\cdot\}\}$ representa a média e $[[\cdot]]$ o salto.

Nas fronteiras entre elementos adjacentes, o fluxo numérico é modelado como sendo uma combinação linear entre o salto e a média [18] [55],

$$\hat{u}_e = \{\{u\}\} - \frac{k_e}{2\alpha} [[v]], \quad (2-47)$$

$$\hat{v}_e = \{\{v\}\} - \frac{\alpha}{2k_e} [[u]], \quad (2-48)$$

onde α é o fator de acoplamento.

Substituindo as equações 2-47 e 2-48 na equação 2-42,

$$\int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} (j\alpha u_e - jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) \overline{(-j\alpha \varphi_e + jk_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_e)} d\Gamma + \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} (j\alpha u_l - jk_e \mathbf{v}_l \cdot \hat{\mathbf{n}}_l) \overline{(-j\alpha \varphi_e - jk_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_e)} d\Gamma = 0. \quad (2-49)$$

Definindo as funções $X_e = j\alpha u_e - \frac{\partial u_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e}$, $X_l = j\alpha u_l + \frac{\partial u_l}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e}$, $Y_e = -j\alpha \varphi_e + \frac{\partial \varphi_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e}$ e $F_e(Y_e) = -j\alpha \varphi_e - \frac{\partial \varphi_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e}$,

$$\int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\sigma} X_e \bar{Y}_e d\Gamma - \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\sigma} X_l \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma = 0. \quad (2-50)$$

A equação 2-50 representa a UWVF para as fronteiras Σ_{el} . Outrossim, devemos constituir a UWVF para a fronteira $\Gamma_e = \partial\Omega_e \cap \Gamma$, desta forma, definimos os fluxos numéricos como sendo $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ e $\hat{u} = u$, pois são aplicadas as condições de contorno conhecidas.

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\alpha} (j\alpha u_e - jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) \overline{(-j\alpha \varphi_e + jk_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_e)} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\alpha} (j\alpha u_e + jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) \overline{(-j\alpha \varphi_e - jk_e \hat{\mathbf{n}}_e \cdot \boldsymbol{\tau}_e)} d\Gamma = 0. \quad (2-51)$$

Aplicando as definições de X_e , Y_e e $F_e(Y_e)$ na equação 2-51,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{1}{\alpha} X_e \bar{Y}_e d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \frac{1}{\alpha} (j\alpha u_e + jk_e \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{n}}_e) \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma = 0 \quad (2-52)$$

A equação 2-52 representa a UWVF para os limites Γ do domínio computacional. Portanto, devemos adicionar as equações 2-50 e 2-52 e aplicando a condição de contorno 2-35,

$$\int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{\alpha} X_e \bar{Y}_e d\Gamma - \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} X_l \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \frac{Q}{\alpha} X_e \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{g}{\alpha} \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma. \quad (2-53)$$

A equação 2-53 representa a Formulação Variacional Ultra Fraca para o domínio bidimensional o qual devemos realizar a discretização do problema.

2.4.2. Discretização e sistema matricial

A equação 2-53 representa a formulação para um único elemento. Portanto, devemos somar as contribuições de todos os elementos do domínio computacional com o objetivo de encontrar $X_e \in L^2(\partial\Omega_e)$, $e = 1 \cdots N$, sendo N o total de elementos.

$$\sum_{e=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{\alpha} X_e \bar{Y}_e d\Gamma - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq e}}^N \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} X_l \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \frac{Q}{\alpha} X_e \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma \right) = \int_{\Gamma_e} \frac{g}{\alpha} \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma \quad (2-54)$$

para todo $Y_e \in L^2(\partial\Omega_e)$.

A discretização do problema é obtida por meio da escolha das funções de base $\{\varphi_{el}\}_{q=1}^{Q_e}$ sobre Ω_e sendo Q_e a quantidade total de funções de base. Assim,

$$X_e = \sum_{q=1}^{Q_e} X_{e,q} \left(j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-55)$$

$$X_l = \sum_{q=1}^{Q_l} X_{l,q} \left(j\alpha\varphi_{l,q} + \frac{\partial\varphi_{l,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-56)$$

$$Y_e = \sum_{q=1}^{Q_e} Y_{e,q} \left(-j\alpha\varphi_{e,q} + \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-57)$$

$$F_e(Y_e) = \sum_{q=1}^{Q_e} Y_{e,q} \left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right). \quad (2-58)$$

Substituindo as equações 2-55 a 2-58 em 2-54 obtemos o sistema matricial para os coeficientes $\{X_{el}\}_{q,e=1}^{Q_e, N}$,

$$(D - C)X = b. \quad (2-59)$$

Na equação 2-59, a matriz D é Hermitiana e esparsa em bloco diagonal e a matriz C é esparsa em blocos. O aumento da quantidade de funções de base e com refinamento

da malha o sistema torna-se mal condicionado [21]. Portanto, utiliza-se o pré-condicionamento do sistema por meio da multiplicação pela inversa de D [21].

$$(I - D^{-1}C)X = D^{-1}b, \quad (2-60)$$

onde X representa os termos procurados, e

$$D_e^q = \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{\alpha} X_{e,q} \left(j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} + \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma, \quad (2-61)$$

$$C_{el}^q = \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} X_{l,q} \left(j\alpha\varphi_{l,q} + \frac{\partial\varphi_{l,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(j\alpha\varphi_{e,q} + \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_e} \frac{Q}{\alpha} X_{e,q} \left(-j\alpha\varphi_{e,q} + \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma, \quad (2-62)$$

$$b_e^q = \int_{\Gamma_e} \frac{g}{\alpha} \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma. \quad (2-63)$$

Com o pré-condicionamento, o custo computacional irá aumentar devido ao cálculo de D^{-1} . No entanto, D^{-1} também é diagonal em blocos e pode ser construída para cada elemento, $D^{-1} = \text{diag}\{D_1^{-1}; D_2^{-1}; D_3^{-1}; \dots; D_N^{-1}\}$.

2.4.3. Funções de base

Na Formulação Variacional Ultra Fraca as funções de base são usualmente escolhidas como sendo ondas planas e devem satisfazer as equações 2-33, 2-34, 2-39 e 2-40. Além disso, essa escolha possibilita que as integrais da equação 2-54 possam ser calculadas de forma fechada, ou seja, analiticamente [18]. Assim,

$$\varphi_{e,q} = \begin{cases} e^{-jk\mathbf{d}_{e,q}\cdot\mathbf{r}}, & \text{em } \Omega_e, \\ 0, & \text{em } \Omega \setminus \Omega_e, \end{cases} \quad (2-64)$$

onde

$$\mathbf{d}_{e,q} = \left(\cos\left(\frac{2\pi(q-1)}{Q_e}\right), \text{sen}\left(\frac{2\pi(q-1)}{Q_e}\right) \right), q = 1, \dots, Q_e \quad (2-65)$$

e

$$\mathbf{r} = (x_j, y_j). \quad (2-66)$$

A equação 2-65 representa a distribuição das ondas planas que é feita uniformemente em 360°. Substituindo a expressão 2-61 nas integrais 2-58 a 2-60,

$$D_e^q = \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{\alpha} X_{e,q} \left(j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} + \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma, \quad (2-67)$$

$$C_{el}^q = \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} X_{l,q} \left(j\alpha\varphi_{l,q} + \frac{\partial\varphi_{l,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_e} \frac{Q}{\alpha} X_{e,q} \left(j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right) \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma, \quad (2-68)$$

$$b_e^q = \int_{\Gamma_e} \frac{g}{\alpha} \overline{\left(-j\alpha\varphi_{e,q} - \frac{\partial\varphi_{e,q}}{\partial\hat{\mathbf{n}}_e} \right)} d\Gamma. \quad (2-69)$$

As funções de base definidas como expressões de ondas planas acarretam no aumento do número de condição e, conseqüentemente, podem levar à imprecisão dos resultados [21]. A alternativa para minimizar os efeitos do condicionamento é a utilização de ondas cilíndricas como sendo funções de Bessel de primeiro tipo e ordem n para as funções de base [18].

$$\varphi_{e,n_e} = \begin{cases} J_{n_e}(k_e |\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_{0,e}|) e^{jn_e\theta}, & em \Omega_e \\ 0, & em \Omega \setminus \Omega_e \end{cases}, \quad (2-70)$$

onde $\mathbf{r}_{0,e}$ é o centroide do elemento Ω_e e θ é o ângulo sobre $\mathbf{r}_{0,e}$.

A equação 2-70 apresenta funções de base com menor aumento do número de condição do sistema em comparação com as ondas planas. Essa diminuição é observada para elementos com tamanho (h) inferior ao comprimento de onda (λ) [55]. O aumento da ordem n da função de Bessel aproxima as bases de uma onda cilíndrica com fonte no centróide do elemento.

A escolha de bases como sendo funções de Bessel exige o uso de quadratura no cálculo das integrais [55]. No entanto, as ondas planas possibilitam que as integrais sejam calculadas de forma fechada [23].

Ao contrário das ondas planas em que escolhemos a direção de cada base, na expansão com funções de Bessel escolhemos a ordem, determinada por

$$n_e = p - \frac{Q_e - 1}{2} - 1, \quad (2-71)$$

$$-\frac{Q_e - 1}{2} \leq n \leq \frac{Q_e - 1}{2},$$

onde n é a ordem da função de Bessel, Q é a quantidade bases e p a ordem atual.

Na equação 2-71 a variação da ordem da função de Bessel é determinada por Q , sendo o seu valor ímpar para que todos os valores de n sejam inteiros.

2.5. Integração Analítica

As formas fechadas das equações integrais são desenvolvidas para funções de base como sendo ondas planas. O desenvolvimento da forma fechada para o vetor b é feito por meio da escolha conveniente da fonte g . A escolha conveniente da condição de contorno generalizada definida na equação 2-31 permite o estabelecimento das diferentes condições de contorno. Desta forma, consideramos $Q = 0$ que define uma fronteira ABC com a condição absorvente de ordem zero.

$$b = \int_{\Gamma_{ABC}} \frac{g}{\sigma} \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma \quad (2-72)$$

Assim, a fonte definida por g é expressa como,

$$g = \left(jk_e u_i + \frac{\partial u_i}{\partial n} \right), \quad (2-73)$$

onde u_i é o campo incidente.

A substituição de u_i pela expressão para o campo incidente na fronteira ABC, temos que

$$g = jk_e \left(1 - (n_x \cos \theta_i + n_y \sin \theta_i) \right) e^{-jk_e(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)}. \quad (2-74)$$

Na equação 2-74, o termo $F_e(Y_e)$ é definido como sendo

$$F_e(Y_e) = -j\alpha\phi_e - \frac{\partial\phi_e}{\partial n_e} \quad (2-75)$$

Substituindo as funções de base ϕ_e por ondas planas, obtemos a expressão analítica para o conjugado da equação 2-75,

$$\overline{F_e(Y_e)} = A_1 e^{jk_e((x-G_{ex})\cos\theta_{Yeq} + (y-G_{ey})\sin\theta_{Yeq})}, \quad (2-76)$$

e

$$A_1 = [j\alpha - jk_e(n_x \cos\theta_{Yeq} + n_y \sin\theta_{Yeq})], \quad (2-77)$$

onde, n_x e n_y representam o vetor normal à fronteira, x e y estão sobre a fronteira, G_{ex} e G_{ey} são o centroide do elemento e e θ_{Yeq} a direção da função de base.

Assim, a expressão integral pode ser escrita como sendo

$$b = \frac{A_1 g}{\alpha} e^{-jk_e(G_{ex}\cos\theta_{Yeq} + G_{ey}\sin\theta_{Yeq})} \int e^{-jk_e(x(\cos\theta_i - \cos\theta_{Yeq}) + y(\sin\theta_i - \sin\theta_{Yeq}))} d\Gamma \quad (2-78)$$

A matriz D é determinada sobre o elemento central da partição da unidade, sendo a expressão repetida aqui por conveniência.

$$D = \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{\alpha} X_e \overline{Y_e} d\Gamma, \quad (2-79)$$

onde,

$$X_e = j[\alpha + k_e(n_x \cos\theta_{Xeq} + n_y \sin\theta_{Xeq})] e^{-jk_e((x-G_{ex})\cos\theta_{Xeq} + (y-G_{ey})\sin\theta_{Xeq})}, \quad (2-80)$$

e

$$\overline{Y_e} = j[\alpha + k_e(n_x \cos\theta_{Yeq} + n_y \sin\theta_{Yeq})] e^{jk_e((x-G_{ex})\cos\theta_{Yeq} + (y-G_{ey})\sin\theta_{Yeq})}. \quad (2-81)$$

Substituindo 2-80 e 2-81 em 2-79 e rearranjando os termos, obtemos

$$D = \frac{B_1 B_2}{\alpha} \int e^{jk_e((x-G_{ex})(\cos\theta_{Yeq} - \cos\theta_{Xeq}) + (y-G_{ey})(\sin\theta_{Yeq} - \sin\theta_{Xeq}))} d\Gamma, \quad (2-82)$$

onde,

$$B_1 = j[\alpha + k_e(n_x \cos\theta_{Xeq} + n_y \sin\theta_{Xeq})] \quad (2-83)$$

e

$$B_2 = j[\alpha + k_e(n_x \cos \theta_{Yeq} + n_y \sin \theta_{Yeq})] \quad (2-84)$$

Para completar o sistema matricial, devemos construir a matriz C ,

$$C = \int_{\Sigma_{el}} \frac{1}{\alpha} X_l \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \frac{Q}{\alpha} X_e \overline{F_e(Y_e)} d\Gamma. \quad (2-85)$$

Os termos da equação 2-85 são desenvolvidos nas equações 2-76 e 2-77 Assim,

$$C = \frac{A_1}{\alpha} \left[C_1 \int_{\Sigma_{el}} e^{-jk_l((x-G_{lx}) \cos \theta_{Xlq} + (y-G_{ly}) \sin \theta_{Xlq})} e^{jk_e((x-G_{ex}) \cos \theta_{Yeq} + (y-G_{ey}) \sin \theta_{Yeq})} d\Gamma \right. \\ \left. + QB_1 \int_{\Gamma_e} e^{-jk_e((x-G_{ex})(\cos \theta_{Xeq} - \cos \theta_{Yeq}) + (y-G_{ey})(\sin \theta_{Xeq} - \sin \theta_{Yeq}))} d\Gamma \right] \quad (2-86)$$

onde,

$$C_1 = j[\alpha - k_l(n_x \cos \theta_{Xlq} + n_y \sin \theta_{Xlq})] \quad (2-87)$$

A forma fechada do sistema matricial pode ser calculada no sistema de coordenadas do problema físico ou por meio do mapeamento isoparamétrico. A escolha do subespaço por meio da transformação de coordenadas possibilita a fixação dos limites de integração.

2.6. Incorporação da PML

Na solução de problemas abertos é necessário truncar domínio computacional na aplicação da UWVF. Originalmente, a condição de contorno absorvente de ordem zero tem tratamento especial na UWVF e é feita de forma natural [24]. Para as ABC de ordens superiores não é possível a incorporação natural na UWVF. Portanto, a introdução das Camadas Perfeitamente Casadas (Perfectly Matched Layers - PML) possibilita a diminuição do espaço computacional para solução do problema e pode ser feita sem alterações substanciais na formulação. Além disso, os parâmetros da PML podem ser facilmente controlados para que seja possível especificá-los a fim de evitar reflexões espúrias para qualquer ângulo de incidência [57].

A PML é inserida na UWVF com o uso da extensão por variáveis complexas para que a formulação da UWVF não seja substancialmente modificada [58]. Sendo que a PML ocupa a região com,

$$x \in [-x_0 - L_x, -x_0] \cup [x_0, x_0 + L_x], \quad (2-88)$$

$$y \in [-y_0 - L_y, y_0] \cup [y_0, y_0 + L_y], \quad (2-89)$$

onde, para cada um dos eixos do espaço coordenado, x_0 e y_0 são as coordenadas iniciais da região PML e L_x e L_y são as espessuras da PML em cada direção.

A incorporação da PML na UWVF é feita por meio da mudança de variáveis reais por variáveis complexas das coordenadas espaciais [30] [37]. Desta forma, o mapeamento é feito da seguinte forma,

$$x' = \begin{cases} x - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \int_{x_0}^x \sigma_{0,x} \left(\frac{|x| - x_0}{L_x} \right)^n dx & \text{para } |x| \geq x_0, \\ x & \text{para } |x| < x_0 \end{cases}, \quad (2-90)$$

$$y' = \begin{cases} y - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \int_{y_0}^y \sigma_{0,y} \left(\frac{|y| - y_0}{L_y} \right)^n dy & \text{para } |y| \geq y_0, \\ y & \text{para } |y| < y_0 \end{cases}, \quad (2-91)$$

onde $\sigma_{0,x}$ e $\sigma_{0,y}$ são os parâmetros de absorção máximos em cada direção e n o perfil de aumento do decaimento dentro da região PML.

Nas equações 2-90 e 2-91 o perfil de decaimento dentro da região PML deve assumir valores inteiros. Para $n > 1$ poderá ocorrer reflexões espúrias entre as camadas da PML devido ao aumento abrupto do fator de decaimento entre regiões.

Definimos,

$$\sigma_x(x) = \sigma_{0,x} \left(\frac{|x| - x_0}{L_x} \right)^n, \quad (2-92)$$

$$\sigma_y(y) = \sigma_{0,y} \left(\frac{|y| - y_0}{L_y} \right)^n. \quad (2-93)$$

Substituindo 2-92 e 2-93 em 2-90 e 2-91, respectivamente, obtemos

$$x' = \begin{cases} x - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \int_{x_0}^x \sigma_x(x) dx & \text{para } |x| \geq x_0, \\ x & \text{para } |x| < x_0 \end{cases}, \quad (2-94)$$

$$y' = \begin{cases} y - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \int_{y_0}^y \sigma_y(y) dy & \text{para } |y| \geq y_0, \\ y & \text{para } |y| < y_0 \end{cases}, \quad (2-95)$$

As equações 2-94 e 2-95 representam as variáveis espaciais complexas contínuas para a PML. A mudança de variáveis é obtida a partir da derivada dessas equações em função das variáveis reais. Assim,

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = s_x(x), \quad (2-96)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = s_y(y), \quad (2-97)$$

onde,

$$s_x(x) = \begin{cases} 1 - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \sigma_x(x) & \text{para } |x| \geq x_0, \\ 1 & \text{para } |x| < x_0 \end{cases}, \quad (2-98)$$

$$s_y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \sigma_y(y) & \text{para } |y| \geq y_0, \\ 1 & \text{para } |y| < y_0 \end{cases}. \quad (2-99)$$

Desta forma, as variáveis reais podem ser substituídas por

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2-100)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2-101)$$

Então, a equação de Helmholtz pode ser reescrita por meio da mudança de variáveis, como [28]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + k^2 s_x s_y u = 0 \quad (2-102)$$

Portanto, podemos reescrever as equações 2-31 e 2-32 como,

$$\nabla \cdot (A \nabla u_e) + k^2 \beta u_e = 0 \quad \text{em } \Omega_e \quad (2-103)$$

$$A \nabla u_e \cdot \hat{\mathbf{n}} + j\alpha u_e = Q(-A \nabla u_e \cdot \hat{\mathbf{n}} + j\alpha u_e) + g \quad \text{sobre } \Gamma_e \quad (2-104)$$

onde,

$$\beta = (s_x s_y), \quad (2-105)$$

e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{s_y}{s_x} & 0 \\ 0 & \frac{s_x}{s_y} \end{bmatrix}, \quad (2-106)$$

Nas equações 2-103 e 2-104, fazendo $\beta = 1$ e $A = I$ as equações em coordenadas complexas tornam-se em coordenadas reais. Então, seguindo os mesmos procedimentos no desenvolvimento da formulação bidimensional, temos

$$X_e = \left(j\alpha u_e - A_e \frac{\partial \phi_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-107)$$

$$X_l = \left(j\alpha u_l - A_l \frac{\partial \phi_l}{\partial \hat{\mathbf{n}}_l} \right), \quad (2-108)$$

$$Y_e = \left(-j\alpha \phi_e + \overline{A_e} \frac{\partial \phi_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-109)$$

$$F_e(Y_e) = \left(-j\alpha \phi_e - \overline{A_e} \frac{\partial \phi_e}{\partial \hat{\mathbf{n}}_e} \right), \quad (2-110)$$

As equações de 2-107 a 2-110 representam os termos da equação 2-55 com a incorporação da região PML. Portanto, o controle dos parâmetros s_x e s_y alteram os valores de A para cada região sem a necessidade de alterações significativas na formulação.

Por fim, as funções de base devem ser escolhidas como sendo solução da equação de Helmholtz em coordenadas espaciais complexas. Assim, a mudança de variáveis é introduzida ao vetor deslocamento, ou seja,

$$r(x, y) \rightarrow r(x', y'), \quad (2-111)$$

A equação 2-111 representa a alteração necessária nas funções de base para que elas sejam solução da equação de Helmholtz 2-102.

2.6.1. Projeto da PML

A absorção da energia eletromagnética é determinada pelo fator de decaimento presente na formulação da PML de tal forma que seja totalmente dissipada ao longo da região [37]. Nas equações 2-98 e 2-99 esse parâmetro contempla as direções de propagação x e y . Portanto, no projeto da PML devem ser escolhidas a ordem de decaimento e a espessura da camada [59].

A reflexão de uma onda incidente sobre a superfície PML é determinada de forma semelhante à incidência oblíqua em um meio semi-infinito,

$$R(\theta) = e^{-2\eta_0\sigma_0\delta\cos\theta/(n+1)}, \quad (2-112)$$

onde η_0 é a impedância intrínseca do espaço livre, σ_0 é o parâmetro de decaimento máximo, δ é a espessura da camada e θ é o ângulo de incidência.

Na equação 2-112, observa-se que o erro admissível na PML aumenta exponencialmente com o ângulo de incidência, sendo que o valor máximo é obtido quando $\theta = 90^\circ$, ou seja, $R(90^\circ) = 1$, o que torna a PML ineficiente.

Portanto, para tornar a PML eficiente deve-se garantir que a reflexão seja a menor possível. Desta forma, o fator máximo de decaimento deve ser elevado o suficiente para que a atenuação da onda na camada reduza o erro, principalmente para valores de θ próximos de 90° .

No projeto da PML estabelecemos inicialmente a espessura e a ordem de decaimento e, assim, determinamos o parâmetro de decaimento para que não haja reflexões espúrias na interface. Esse parâmetro não pode ter crescimento rápido ao longo da camada em função da profundidade, pois acarreta em reflexões entre as camadas.

A variação espacial do parâmetro de decaimento pode ser linear ($n = 1$), parabólico ($n = 2$) ou geométrico ($n \geq 3$) [37]. Nesta tese, escolhemos utilizar o perfil linear, pois a magnitude dos saltos entre as camadas é o mesmo.

2.7. Contribuição original

Dentre as características da Formulação Variacional Ultra, o aumento do condicionamento do sistema global depende da quantidade de funções de base por elemento e do refinamento da malha, coloca sérios desafios na aplicação do método. Nesse sentido, este trabalho propõe, como contribuição original, uma metodologia para o controle do número de condição e para a previsão da quantidade de funções por elemento. O processo para o controle do condicionamento do sistema tem as seguintes etapas que devem ser executadas para cada elemento:

1. Determina-se a quantidade máxima de funções de base para todos os elementos;
2. Calcula-se a matriz elementar;
3. Calcula-se o posto da matriz;
4. Se o posto for menor que a quantidade de funções de bases, então o esse valor atribuído à dimensão da base. Caso contrário, o processo é interrompido e retorna-se a matriz elementar; calcula-se novamente a matriz elementar com a nova quantidade de funções de base;
5. Verifica-se o número de condição da matriz, caso seja menor ou igual ao valor predeterminado o processo é interrompido e a matriz elementar retornada;
6. Para o número de condição com valor superior ao previamente estabelecido, reduz-se em uma unidade a quantidade de bases e calcula-se novamente a matriz elementar. Esse procedimento é repetido até que o condicionamento seja menor ou igual ao valor preestabelecido;

Por sua vez, a sistemática para a definição da quantidade de funções de base por elemento está relacionada com a maior aresta do mesmo. Desta forma, atribuímos a cada elemento a quantidade máxima de bases suportadas. Assim, o processo descrito anteriormente (etapas de 1 a 7) tem o custo computacional reduzido devido a menor quantidade de funções de bases impostas inicialmente por elemento (etapa 1).

Capítulo 3

Experimentos numéricos

Neste capítulo, investigamos a Formulação Variacional Ultra Fraca recorrendo a problemas em que as variáveis envolvidas possam ser isoladas e as características do método evidenciadas. A análise dos experimentos é feita por meio do erro relativo, sendo os resultados de referência determinados pela solução analítica e, quando não é possível obtê-la, utilizamos a solução pelo FEM. Portanto, investigamos a UWVF em situações como: malha uniforme e não uniforme, expansão em ondas planas e funções de Bessel e truncamento do domínio computacional por meio de ABC e PML. Assim, produzimos contribuições relevantes na aplicação da UWVF no eletromagnetismo computacional. Essas contribuições são aplicadas em dois problemas de engenharia, sendo o primeiro no espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma fina camada dielétrica e o segundo no espalhamento eletromagnético por um aerofólio.

3.1. Aspectos para análise dos experimentos

O cálculo do erro relativo é obtido por meio da *norma* $-L_2$, sendo a solução numérica comparada com uma solução de referência. A expressão desse erro é dada por:

$$\|e_r\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (u_{ref} - u_{num})^2 d\Omega}{\int_{\Omega} u_{ref}^2 d\Omega}}, \quad (3-1)$$

onde $\|e_r\|_{L_2}$ é o erro relativo calculado por meio da *norma* $-L_2$, u_{ref} é a solução de referência, u_{num} a solução numérica por meio da UWVF e Ω o domínio computacional.

As malhas são geradas por meio do software GMSH, sendo a densidade da malha estabelecida pela maior aresta do elemento [60]. As dimensões são todas parametrizadas em função do comprimento de onda no espaço livre.

Os códigos são desenvolvidos no MATLAB que possui precisão de ponto flutuante da ordem de 10^{-15} . Para a solução do sistema global, utilizamos o Método do Gradiente Biconjugado por meio da função *bicg*. Essa função é parametrizada como *bicg* ($A, b, tol, maxit$), sendo a solução do sistema $Ax = b$. Afim de garantir que as iterações sejam interrompidas pelo mesmo critério, parametrizamos a tolerância como sendo $tol = 10^{-6}$ e o número máximo de iterações $maxit = 1000$. Portanto, com esses parâmetros, podemos garantir que a interrupção é feita quando a tolerância é alcançada. Caso seja interrompido pelo número de iterações, não há convergência do resultado.

3.2. Malha uniforme

Utilizamos a malha uniforme para validar o código desenvolvido e na investigação das características do método. Optamos, inicialmente, pela propagação de ondas eletromagnéticas planas em um domínio retangular, pois é possível controlar naturalmente as variáveis envolvidas. Desta forma, somente as características da UWVF são avaliadas. Portanto, evidenciamos o comportamento do fluxo numérico, as funções de base por elemento, o condicionamento do sistema global e o tratamento da descontinuidade física dos meios.

As simulações são modeladas para o campo elétrico perpendicular ao plano de propagação por meio da equação de Helmholtz escalar e da adequada condição de contorno,

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad em \Omega \tag{3-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + jku = g, \quad sobre \Gamma \tag{3-3}$$

onde u é o campo, k o número de onda do meio, $\frac{\partial}{\partial n}$ a derivada normal, j a unidade imaginária e g a fonte da condição de contorno.

O domínio computacional é definido em $\Omega = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ e a malha formada por elementos triangulares com densidades $h = 1$ e $h = 0,5$, onde h é a maior aresta admissível.

h	Total de elementos
1	16
0,5	44

Tabela 3-1 – Densidade da malha do domínio retangular contínuo.

A tabela 3-1 relaciona a quantidade total de elementos na malha com a respectiva densidade. Esses valores são utilizados em todas as simulações no espaço computacional.

3.2.1. Expansão em ondas planas

Iniciamos a investigação da UWVF com a simulação da propagação de ondas planas no espaço livre. Com essa proposta, consideramos a análise da precisão do método em função da variação da densidade da malha, do ângulo de propagação e da quantidade de funções de base por elemento. Portanto, podemos analisar o efeito do condicionamento do sistema e da quantidade de funções de base na precisão do método.

A modelagem matemática é feita por meio das equações 3-2 e 3-3, sendo o termo fonte (g) da condição de contorno na equação 3-3 dado por:

$$g = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + jku, \quad (3-4)$$

sendo $u = e^{-jk \cdot \mathbf{r}_i}$, $\mathbf{k} = k_0 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ e $\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$, onde θ é o ângulo de propagação e \mathbf{r}_i é o vetor posição.

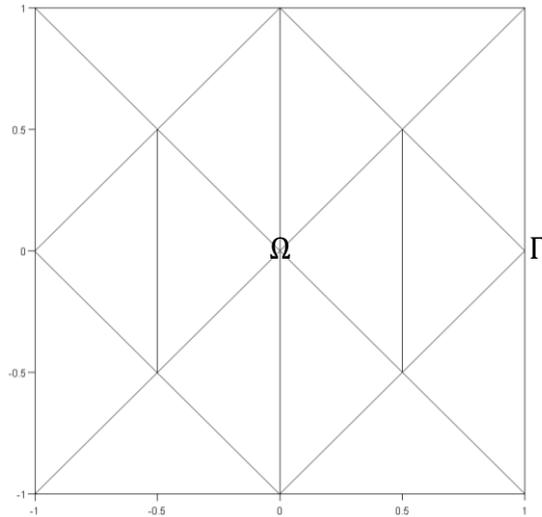


Figura 3-1 – Domínio computacional homogêneo (Ω), com $h = 1$ e fronteira absorvente Γ .

Na figura 3-2 são apresentados os erros relativos em função do aumento do número de funções de base para as densidades de malha $h = 1$ e $h = 0,5$.

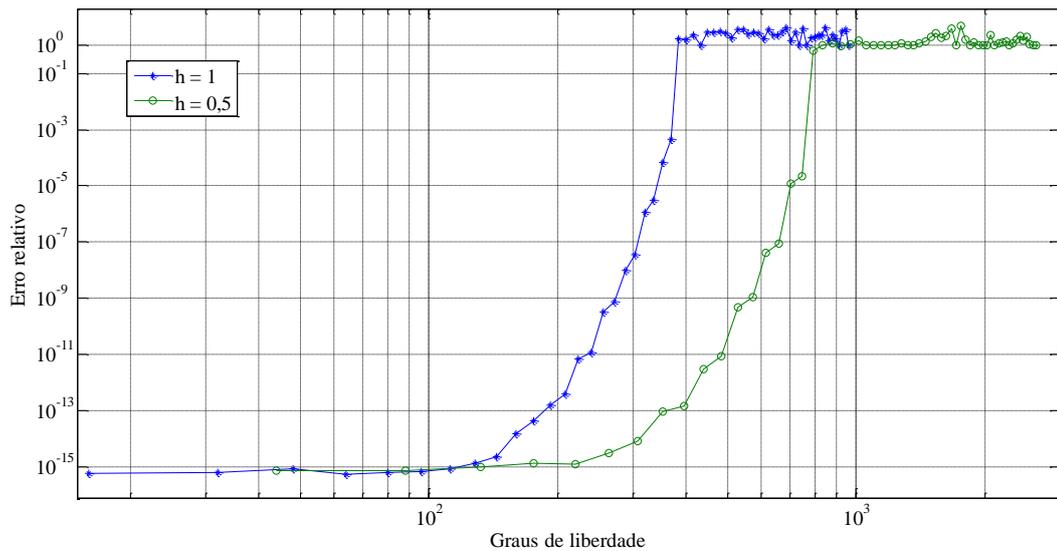


Figura 3-2 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para a propagação de uma onda eletromagnética em meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de direção de 0° .

Os resultados da figura 3-2 são para o intervalo de funções de base de $1 \leq Q \leq 60$. Para a densidade de malha $h = 1$, o erro é da ordem de precisão de 10^{-15} para até oito funções de base e, após esse valor, torna-se crescente e instável para $Q > 23$. Comportamento similar é observado para a malha $h = 0,5$, sendo a estabilidade para até cinco bases e instabilidade para $Q > 17$. Para as duas densidades de malha, o erro relativo

é da ordem de 10^{-15} devido a presença de uma função de base na direção de propagação da onda em todas as simulações, mas com o aumento dos graus de liberdade o erro torna-se crescente. A malha $h = 1$ apresenta erro relativo crescente com menos graus de liberdade que $h = 0,5$, mas com maior quantidade de funções de base. A Região de instabilidade para as malhas é devida à não convergência da solução do sistema. Portanto, com esses resultados, podemos evidenciar a influência das funções de base no número de condição do sistema global, bem como a sua relação com o tamanho do elemento.

h	NDOF	Erro relativo
1	64	$0,54375 \times 10^{-15}$
0,5	44	$0,74727 \times 10^{-15}$

Tabela 3-2 – Erros relativos mínimos em relação aos graus de liberdade e densidade das malhas para a propagação em domínio homogêneo com ângulo de 0° para direção de propagação.

Na tabela 3-2 os valores mínimos das simulações são da ordem de 10^{-15} . O crescimento do erro relativo com o aumento do número de funções de base observado na figura 3-2 é esperado em consequência do mal condicionamento do sistema [61] [62]. Portanto, é relevante que o número de condição do sistema seja analisado.

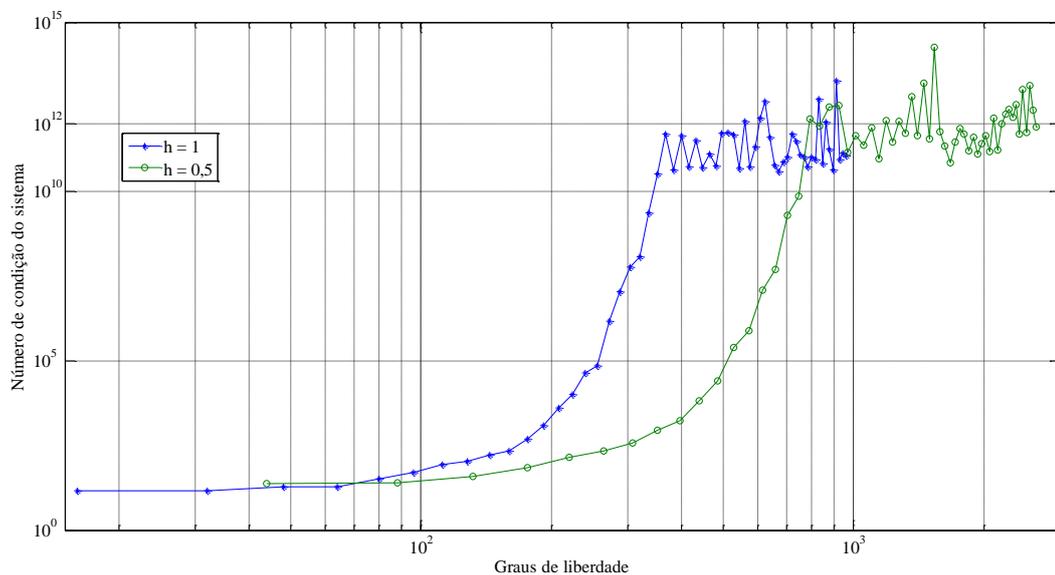


Figura 3-3 – Número de condição do sistema para propagação em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 0° para direção de propagação.

Na figura 3-3 o condicionamento do sistema tem comportamento crescente para ambas as malhas, alcançando valores elevados devido ao aumento dos graus de liberdade. Para as duas densidades de malhas, os valores limites de funções de base, antes da instabilidade, têm número de condição compreendido entre 10^{10} e 10^{12} . Como o aumento dos graus de liberdade, o número de condição do sistema oscila entre esses limites e espera-se que o erro relativo seja da mesma ordem. No entanto, comparando com os resultados da figura 3-2, essas simulações estão na região de instabilidade do erro, ou seja, não produzem resultados satisfatórios. Portanto, investigamos o posto do sistema global, pois as quantidades de linhas linearmente dependentes influenciam a precisão.

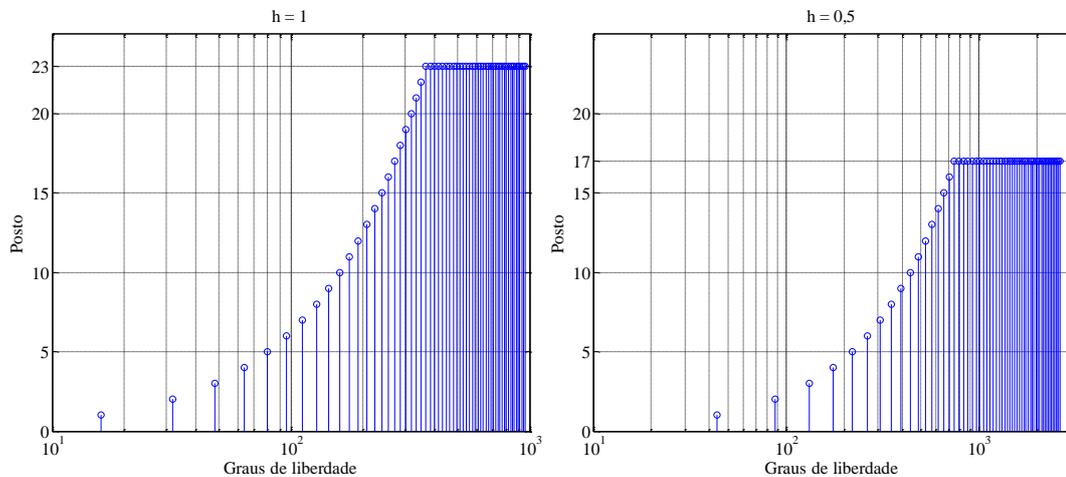


Figura 3-4 – Posto das matrizes elementares na propagação de uma onda eletromagnética no espaço livre para o domínio homogêneo, com $h = 1$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0° .

Os resultados da figura 3-4 revelam que os limites de linhas linearmente independentes dos sistemas globais são os mesmos das quantidades de funções de base alcançadas nas simulações antes da instabilidade que são mostrados na figura 3-2. Portanto, concluímos que a quantidade de funções de base admissíveis por elemento pode ser determinada mediante o cálculo do posto das matrizes elementares e, também, pelo controle do número de condição pré-estabelecido [62].

Uma vez que o aumento do condicionamento do sistema está relacionado ao grau de liberdade, investigamos a contribuição de cada base na solução numérica para um elemento do domínio computacional para a malha $h = 1$.

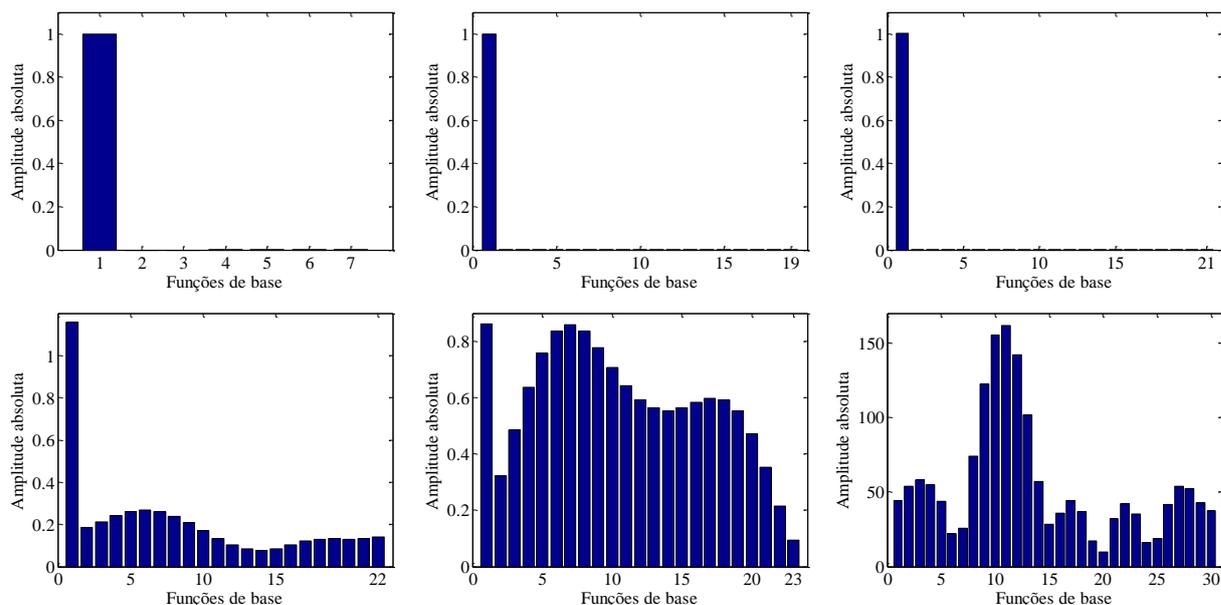


Figura 3-5 – Amplitudes das funções de base para um elemento do domínio computacional homogêneo com 7, 19, 21, 22, 23 e 30 direções para a malha $h = 1$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0° .

Na figura 3-5, somente há contribuição da primeira base por elemento nas simulações com 7, 19 e 21 direções, pois há coincidência entre as direções da base e de propagação da onda. Nas simulações com 22 e 23 bases, o erro relativo é inferior a 10^{-3} e já se observa uma significativa contribuição das amplitudes de todas as bases. A simulação com 30 bases tem amplitudes elevadas para todas as direções e o erro relativo está na região de instabilidade. Contudo, o número de condição do sistema global é inferior ao da simulação com 23 bases. Diante disso, investigamos o número de condição das matrizes elementares.

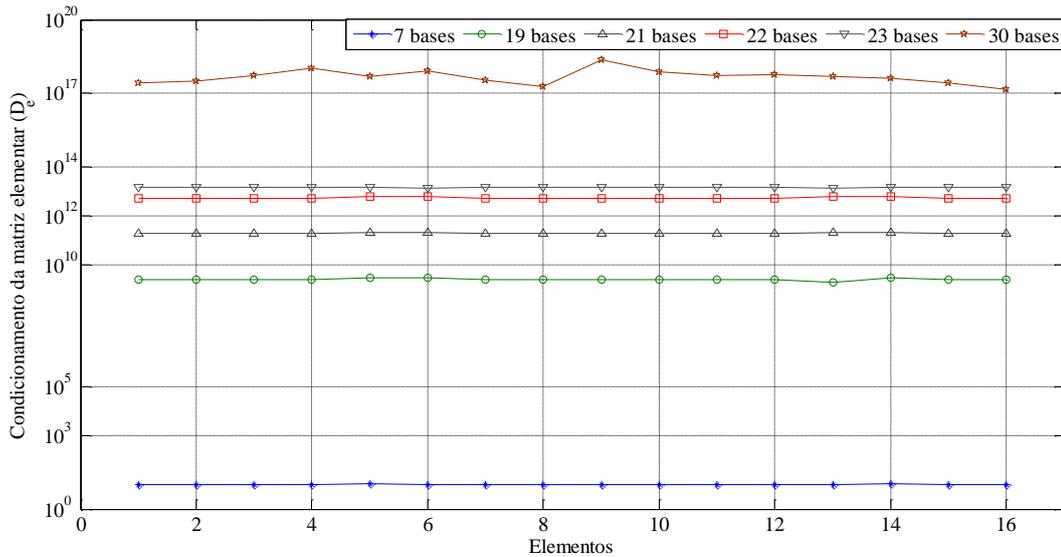


Figura 3-6 – Condicionamento elementar, matriz D_e , para todos os elementos do domínio computacional com 7, 19, 21, 22, 23, 24 e 30 bases para a malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0° .

Na figura 3-6, as simulações apresentam condicionamentos das matrizes elementares praticamente constantes. As bases de 7 a 23 estão com número de condição inferior a 10^{14} e possuem erro relativo inferior a 10^{-3} , conforme a figura 3-2. Então, podemos concluir que o condicionamento inferior a esse valor produz melhor precisão nos resultados. Na região de instabilidade do erro relativo, a simulação com 30 funções de base tem condicionamento elevado, da ordem de 10^{18} . Esses resultados são corroborados pelas amplitudes das funções de base na figura 3-5. Portanto, torna-se necessário a análise do condicionamento das matrizes elementares para a malha $h = 0,5$.

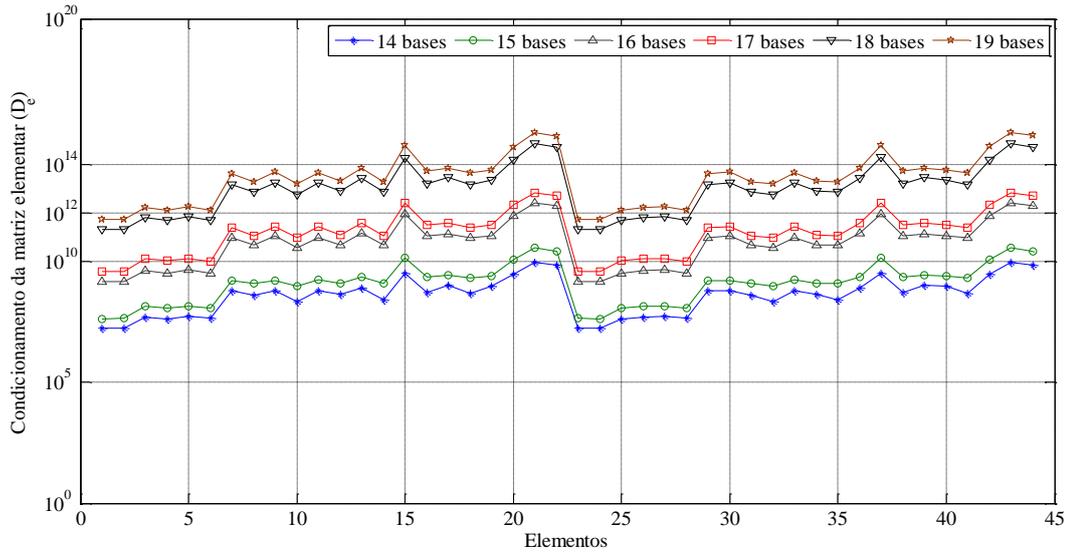


Figura 3-7 – Condicionamento elementar, matriz D_e , para todos os elementos do domínio computacional com 14 a 19 bases para a malha $h = 0,5$ e ângulo de propagação de 0° .

Na figura 3-7 os números de condição das matrizes elementares apresentam comportamentos similares e oscilatórios. Portanto, a análise do condicionamento é comprometida. No entanto, determinamos os valores médios dos condicionamentos para as duas densidades de malhas.

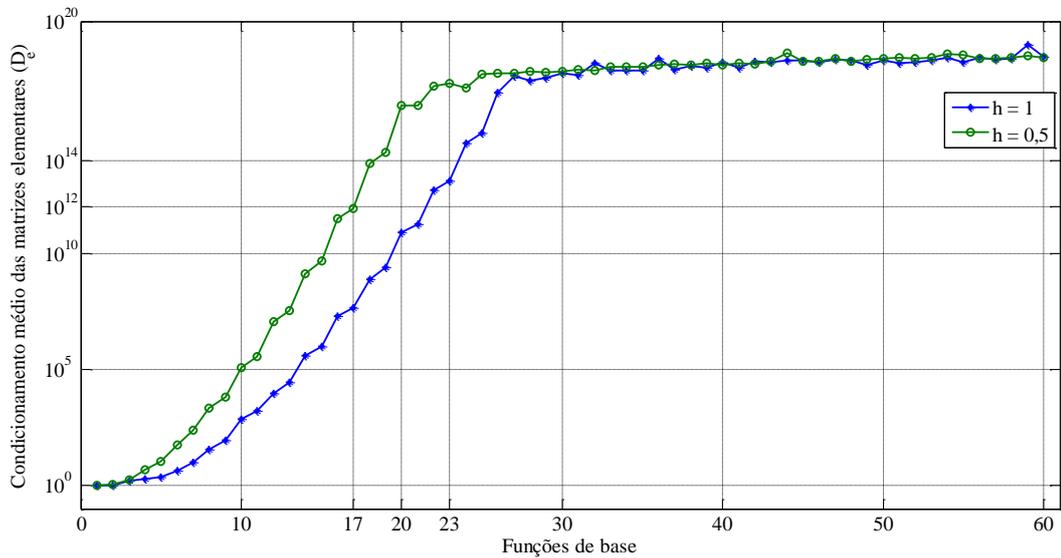


Figura 3-8 – Valor médio do condicionamento das matrizes elementares para a malha $h = 0,5$, direção de propagação de 0° no domínio homogêneo com polarização perpendicular.

Na figura 3-8, verifica-se que quando os números de condição ultrapassam 10^{14} , o erro relativo está na região de instabilidade. Para a malha $h = 1$, devido ao

comportamento quase constante para todos os elementos, conforme a figura 3-6, verifica-se que o limite de 23 bases está no intervalo entre 10^{12} e 10^{14} . Embora, para a malha $h = 0,5$, o valor médio para 18 bases é da ordem de 10^{14} , mas o erro relativo está na região de instabilidade. No entanto, devido ao comportamento oscilatório, alguns elementos possuem condicionamento superior a 10^{14} e levam o erro relativo à instabilidade. Desta forma, podemos estabelecer que o limite máximo do número de condição não deve ultrapassar 10^{14} .

Diante disso, é fundamental investigar o erro de dispersão ao longo do eixo central para $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$. Escolhemos o experimento com erro relativo limite dentro da região de estabilidade para a malha $h = 1$, ou seja, com 23 funções de bases. Essa análise qualitativa é relevante para que seja avaliada a precisão da solução numérica antes da instabilidade do erro relativo e, assim, determinar se a solução numérica, mesmo com erro relativo inferior a 10^{-3} , não apresenta erros de fases e amplitudes.

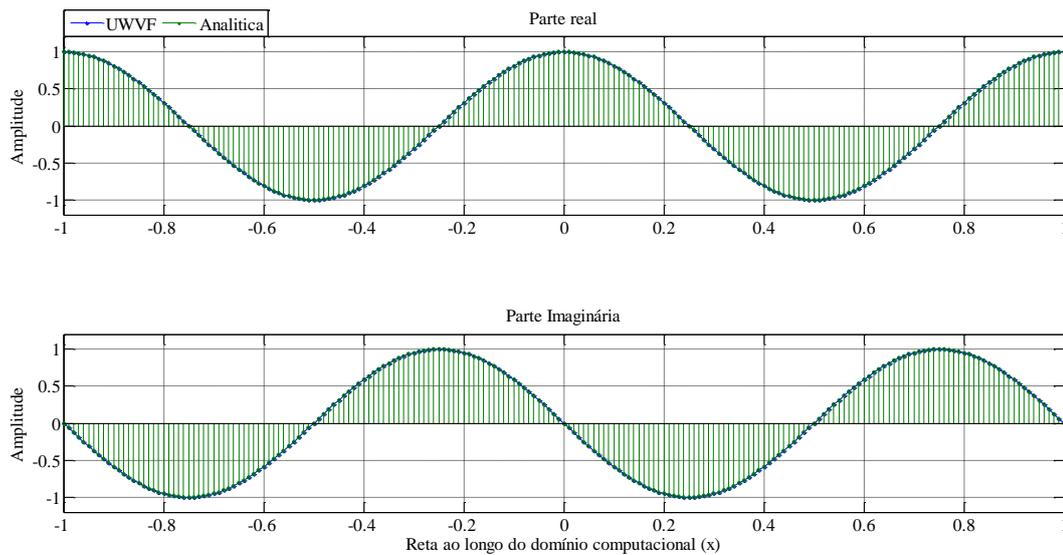


Figura 3-9 - Propagação ao longo da reta $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ no domínio homogêneo com polarização perpendicular, malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0° .

Observa-se na figura 3-9 a não existência de erros de fase e amplitude ao longo do eixo central. Concluímos que para o experimento com número de condição inferior entre 10^{12} e 10^{14} o erro relativo está relacionado às amplitudes das funções de base e distribuído em todo o domínio. Desta forma, a análise qualitativa em todo o domínio é expressiva.

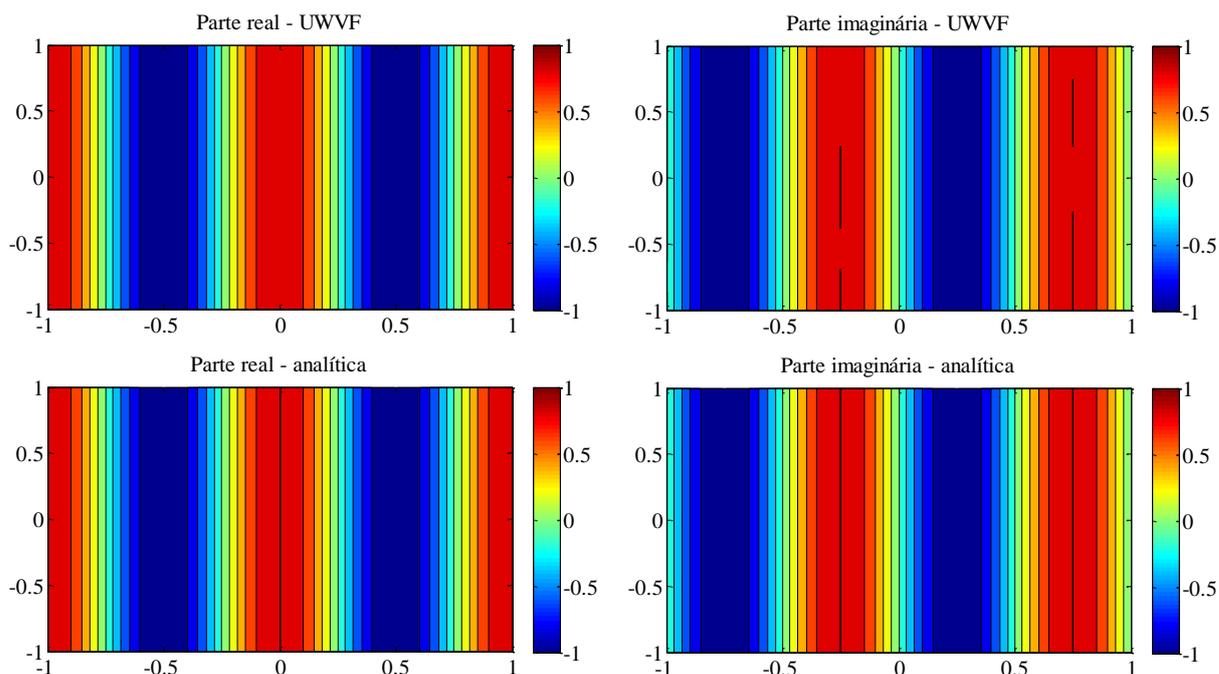


Figura 3-10 – Propagação no domínio homogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de propagação de 0° , para 20 funções de base por elemento e $h = 1$.

Qualitativamente, na figura 3-10 verifica-se que as partes real e imaginária possuem o mesmo comportamento e amplitude em todo o domínio computacional, não sendo constatadas distorções e dispersões.

Essas investigações da Formulação Variacional Ultra Fraca para a propagação de ondas planas em um meio homogêneo asseguram a precisão do método para esse problema e a validação do código desenvolvido. Além disso, podemos verificar as características de condicionamento do sistema global e da matriz elementar, de contribuição das funções de base na solução, de dependência linear entre as bases, de densidade da malha e de precisão que são relevantes para a aplicação da UWVF nos experimentos.

No entanto, observa-se que a coincidência entre as direções da função de base e a propagação da onda acarreta em erro relativo da ordem de precisão 10^{-15} . Portanto, em continuidade às investigações, é relevante a análise da UWVF para experimentos onde não ocorram coincidências entre as direções em todos os experimentos. Desta forma, alteramos a direção de propagação da onda para 45° e, assim, asseguramos que haja coincidência entre as direções quando a quantidade de funções de base é múltipla de oito.

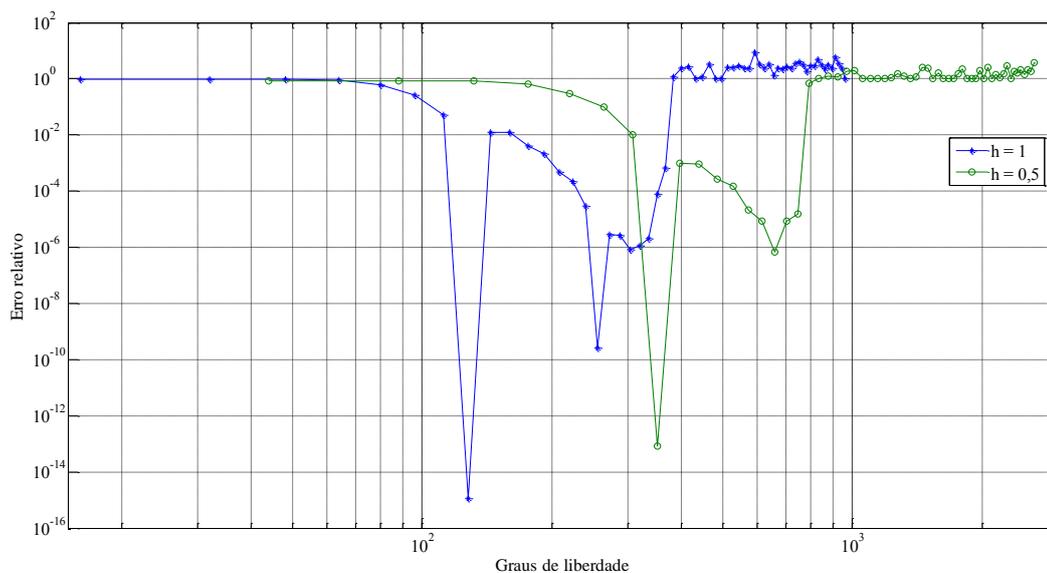


Figura 3-11 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.

Os erros relativos na figura 3-11 são decrescentes com valores elevados para as primeiras direções das funções de base e da ordem de 10^{-15} para oito funções de base por elemento. Essa peculiaridade ocorre devido à coincidência entre os ângulos dos vetores de onda numérica e analítica. No caso de 16 funções de base, o erro é menor do que para 15 bases na malha $h = 1$, mas isso não é observado para a malha $h = 0,5$. Devido à instabilidade do erro relativo ser similar à figura 3-2, optamos em realizar as mesmas análises.

<i>h</i>	NDOF	Erro relativo
1	128	$0,11234 \times 10^{-14}$
0,5	352	$8,5627 \times 10^{-14}$

Tabela 3-3 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 45° no domínio homogêneo com polarização perpendicular.

Na tabela 3-3, os erros relativos mínimos são da ordem de 10^{-14} , sendo que para a malha $h = 1$, além de menor valor, apresenta menos graus de liberdade.

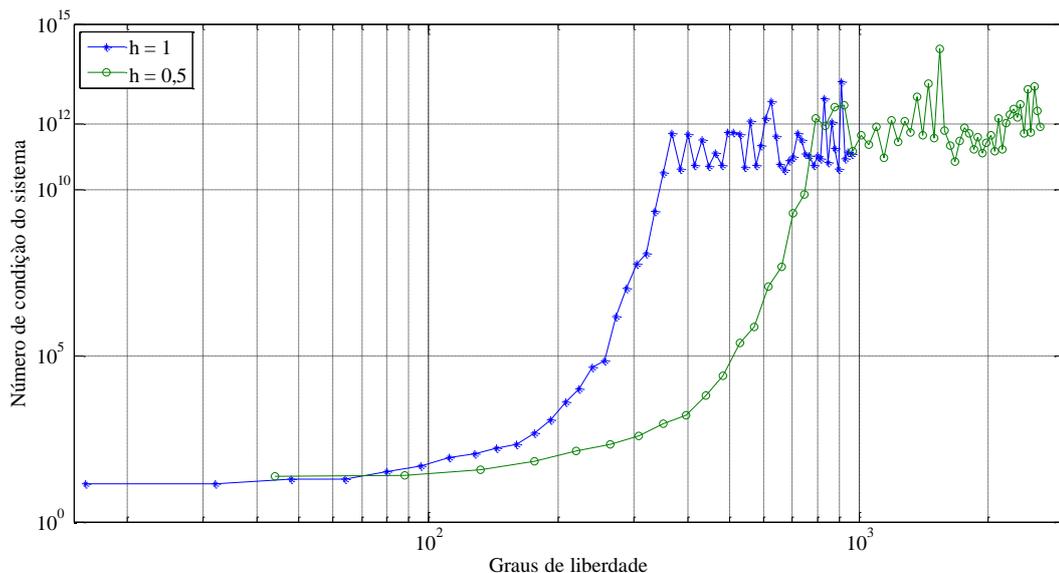


Figura 3-12 – Número de condição do sistema para propagação em um meio homogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.

Na figura 3-12, o número de condição do sistema tem comportamento similar ao apresentado na figura 3-3. O condicionamento do sistema é crescente com o aumento dos graus de liberdade para ambas as malhas até a instabilidade. Para a malha $h = 0,5$, espera-se que o erro relativo para 16 bases seja menor do que para 15, mas esse comportamento não ocorre. Isto posto, analisamos a amplitude das funções de base para a malha $h = 0,5$ no intervalo de 14 a 19 base.

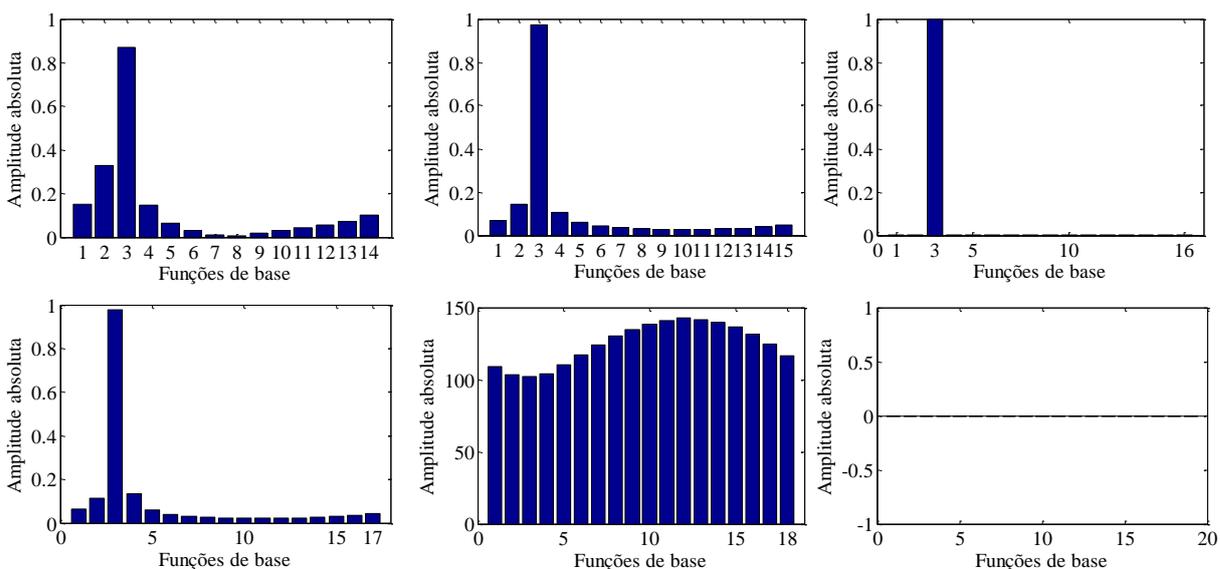


Figura 3-13 – Amplitudes das funções de base para um elemento do domínio computacional homogêneo com 14 a 19 direções para a malha $h = 0,5$, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 45° .

Na figura 3-13, as amplitudes mais expressivas das funções de base são coincidentes com direção de propagação da onda para as simulações com 14 a 16 bases. No caso de 18 direções, as amplitudes alcançam valores muito elevados e para 19 bases todas são nulas. Para 15 direções, todas as bases apresentam valores não nulos, sendo que para 16 bases somente a terceira, que está em 45°, tem valor unitário e as demais nulo.

Investigamos a seguir o tratamento da descontinuidade da característica física do meio pela UWVF. Consideramos a mudança de meio no mesmo domínio computacional em $x = 0$, sendo $k = 2\pi$ para $x < 0$ e $k = 4\pi$ para $x > 0$.

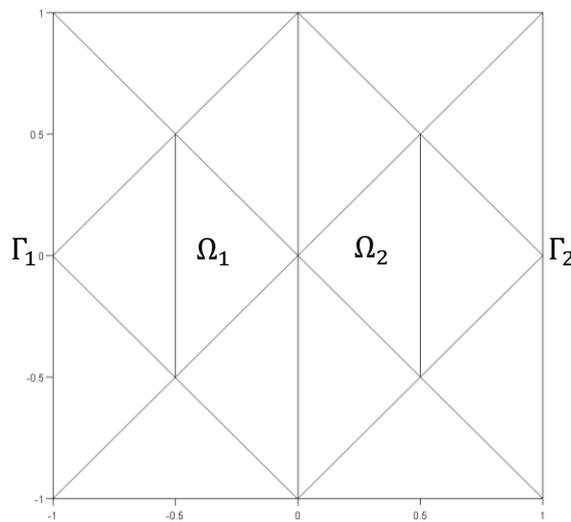


Figura 3-14 – Domínio computacional para propagação de ondas planas em um meio heterogêneo.

Na figura 3-14 o domínio computacional é dividido em duas regiões, sendo o espaço livre em $\Omega_1 = \{(x, y) / -1 \leq x \leq 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ com $k = 2\pi$ e em $\Omega_2 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$ com $k = 4\pi$. No meio Ω_1 há ondas incidente e refletida e em Ω_2 somente onda transmitida. Portanto, o campo total passa a ser apresentando por:

$$u = u_i + u_r, \quad \text{em } \Omega_1 \tag{3-5}$$

$$u = u_t, \quad \text{em } \Omega_2 \tag{3-6}$$

onde u é o campo total, u_i o campo incidente, u_r o campo refletido e u_t o campo transmitido.

A fonte da condição de contorno 3-3 é alterada para cada região da seguinte maneira,

$$g = \left(\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} + jku_i \right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial \mathbf{n}} + jku_r \right), \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3-7)$$

$$g = \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}} + jku_t, \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3-8)$$

Na análise inicial, o ângulo de propagação da onda é de 0° para o meio Ω_1 com polarização perpendicular e malhas com $h = 1$ e $h = 0,5$. Desta forma, os ângulos dos campos transmitido, incidente e refletido são iguais.

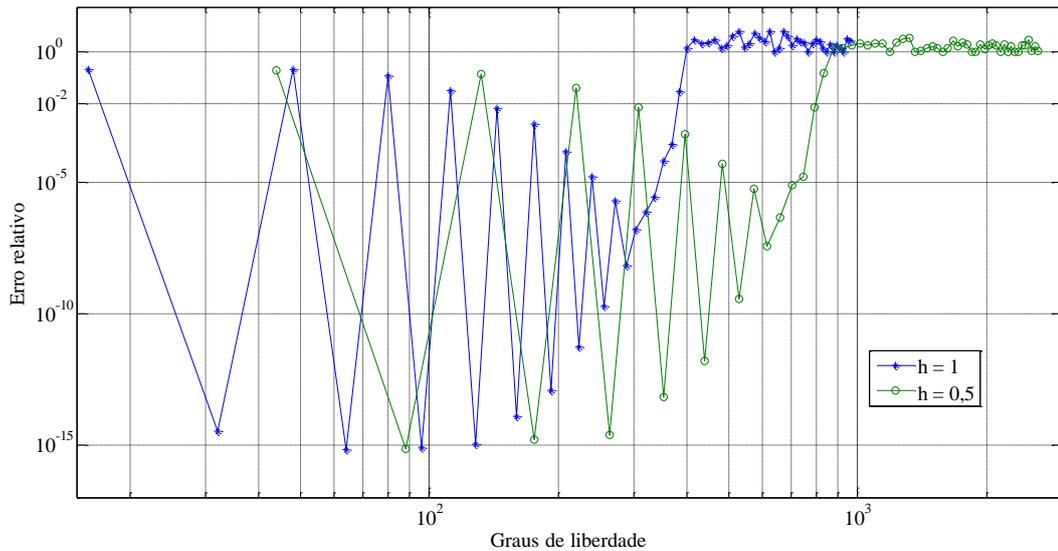


Figura 3-15 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 0° para direção de propagação.

O comportamento oscilatório do erro relativo na figura 3-15 é devido à presença de ondas incidente, refletida e transmitida no domínio computacional. Observa-se que para número par de funções de base o erro é da ordem de 10^{-15} e aumenta com o aumento dos graus de liberdade. Nas direções de ordem ímpar, o erro relativo tem comportamento inverso, ou seja, ele diminui com o aumento dos graus de liberdade. O aumento do erro é observado para a malha $h = 1$ a partir de 19 direções e a instabilidade a partir de 25 bases e para a malha $h = 0,5$, com comportamento similar, tem erro crescente a partir de 15 direções e instável a partir de 19 direções.

h	NDOF	Erro relativo
1	64	$0,658 \times 10^{-15}$
0,5	88	$0,727 \times 10^{-15}$

Tabela 3-4 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 0° no domínio heterogêneo com polarização perpendicular.

Os valores mínimos para as malhas $h = 1$ e $h = 0,5$ são alcançados com quatro e duas direções, respectivamente, e são da ordem de 10^{-15} . Esses resultados evidenciam que a maior precisão da UWVF ocorre quando há sobreposição entre as direções da onda propagante e das funções de base.

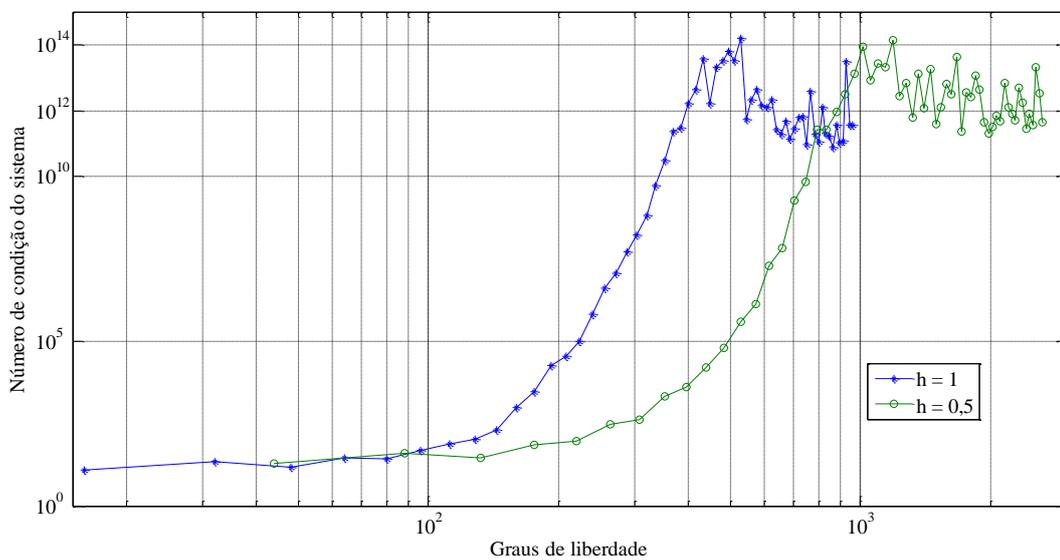


Figura 3-16 – Número de condição do sistema para propagação em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de incidência de 0° .

Na figura 3-16 o número de condição do sistema superior a 10^{12} para a malha $h = 1$ encontra-se na região de instabilidade do erro relativo e limite máximo de 24 funções de base. Já para a malha $h = 0,5$, o condicionamento é da ordem de 10^{11} para 18 e 19 funções de base, sendo que para essa última o erro relativo está instável.

Outra possível fonte de erro na simulação é a descontinuidade das ondas na interface entre os meios. Assim, verificamos qualitativamente a propagação da onda ao longo da reta $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$.

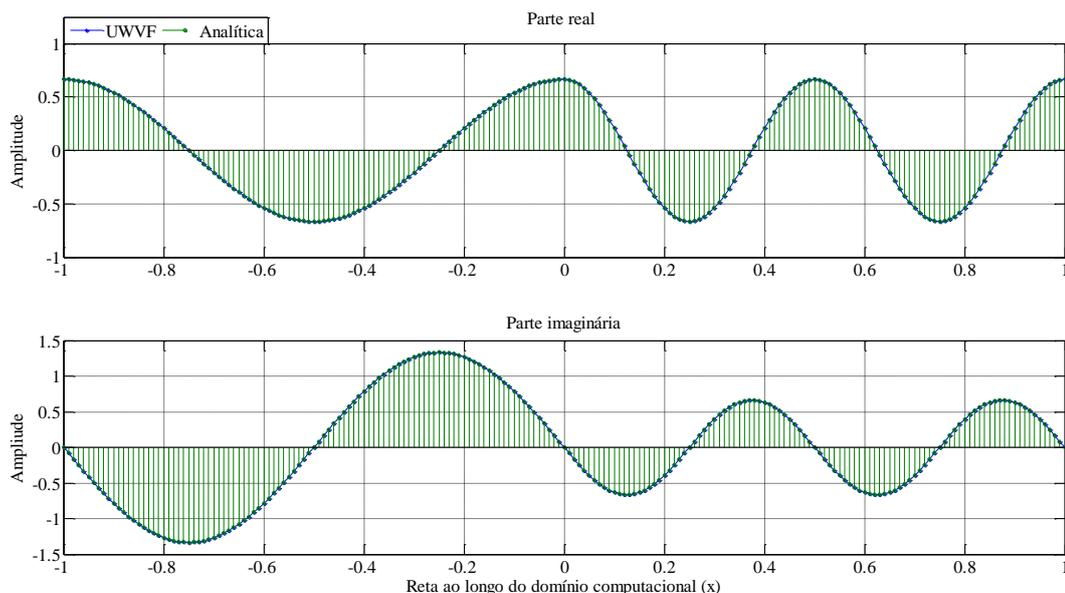


Figura 3-17 - Propagação ao longo da reta $-1 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ no domínio heterogêneo com polarização perpendicular, malha $h = 1$ e ângulo de propagação de 0° .

Na figura 3-17, as partes real e imaginária das soluções numérica e analítica são coincidentes ao longo do domínio descontínuo, sendo esse tratamento incorporado pela UWVF. Portanto, é considerável a análise qualitativa dos campos em todos o domínio.

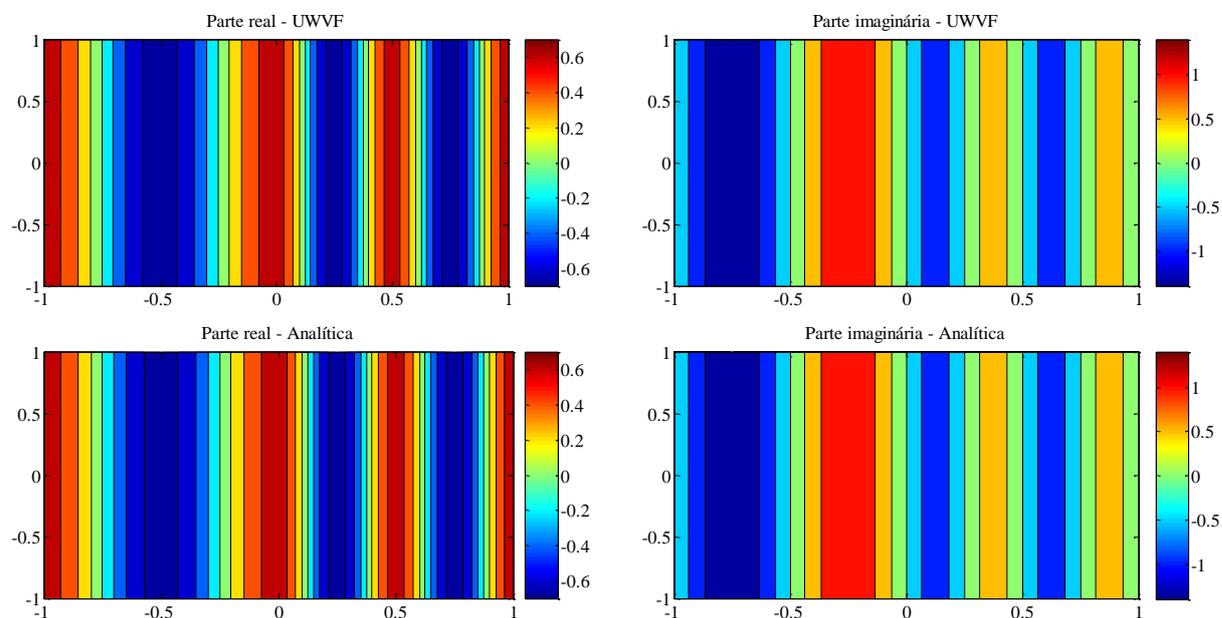


Figura 3-18 - Propagação no domínio heterogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de 0° para 40 funções de base por elemento e $h = 0,5$.

Na figura 3-18 os resultados analítico e numérico possuem a mesma escala de amplitudes e não são percebidas alterações significativas entre eles. Esses resultados demonstram que mesmo com a aumento do número de condição do sistema, o método é preciso para o problema proposto.

Na mudança de meio, é fundamental investigar a precisão da UWVF com incidência oblíqua. Nessa perspectiva, o ângulo de incidência é alterado para 45° no domínio da figura 3-14 e igual ao ângulo de reflexão em Ω_1 . No subdomínio Ω_2 , o ângulo de transmissão é dado por:

$$\theta_t = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \cdot \text{sen} \theta_i \right), \quad \text{em } \Gamma_{12} \quad (3-9)$$

onde θ_t é o ângulo de transmissão, η_1 e η_2 as impedâncias intrínsecas dos meios 1 e 2, respectivamente, e θ_i é o ângulo de incidência.

Os resultados são obtidos para as malhas $h = 1$ e $h = 0,5$ e, por meio da equação 3-9, o ângulo de transmissão é computado $\theta_t = 20,71^\circ$ para $\theta_i = 45^\circ$ e $k = 4\pi$ em Ω_2 .

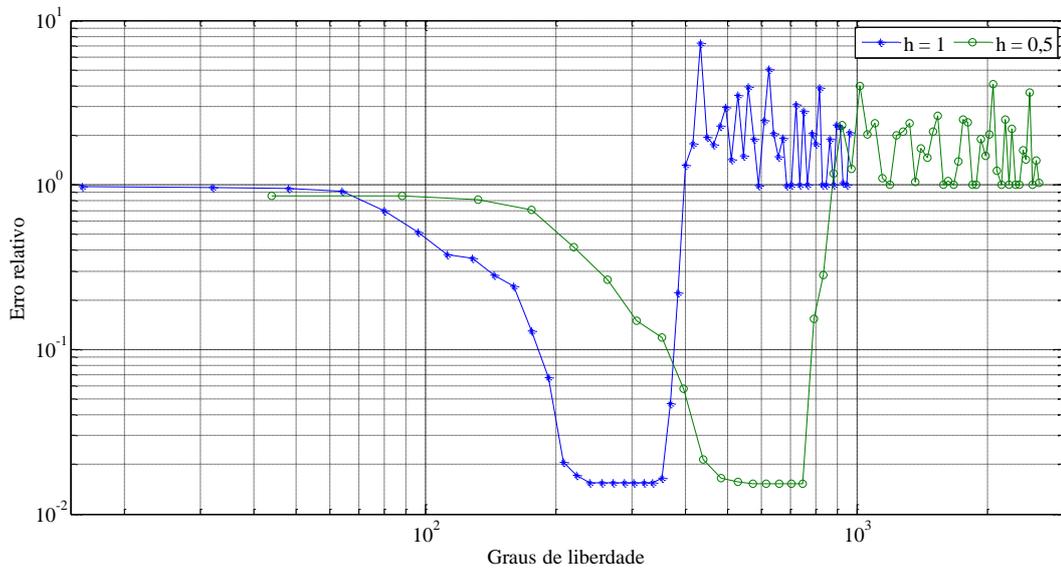


Figura 3-19 – Erro relativo para propagação eletromagnética em um meio heterogêneo com polarização perpendicular e ângulo de 45° para direção de propagação.

Na figura 3-19 a convergência ocorre a partir de treze direções das funções de base para a malha $h = 1$ e de onze para $h = 0,5$. As duas densidades apresentam erro relativos elevados até quatro funções de base por elemento e decaimento até a convergência e

estabilidade. Observa-se que com o aumento dos graus de liberdade ocorre o crescimento do erro relativo até a instabilidade a partir de 23 e 18 funções de base para as malhas $h = 1$ e $h = 0,5$, respectivamente.

h	NDOF	Erro relativo
1	240	0,0155
0,5	660	0,0152

Tabela 3-5 – Erros relativos mínimos para a direção de propagação de 45° no domínio heterogêneo com polarização perpendicular.

Na tabela 3-5 os valores mínimos dos erros relativos são aproximados, sendo que a malha $h = 1$ tem menos graus de liberdade e para as duas densidades os valores são alcançados com 15 funções de base. Porém, é considerável a análise qualitativa do comportamento do campo numérico, pois os valores encontrados neste problema são bem superiores aos das simulações anteriores. Portanto, é feita a análise qualitativa para $h = 0,5$ com 15 funções de base.

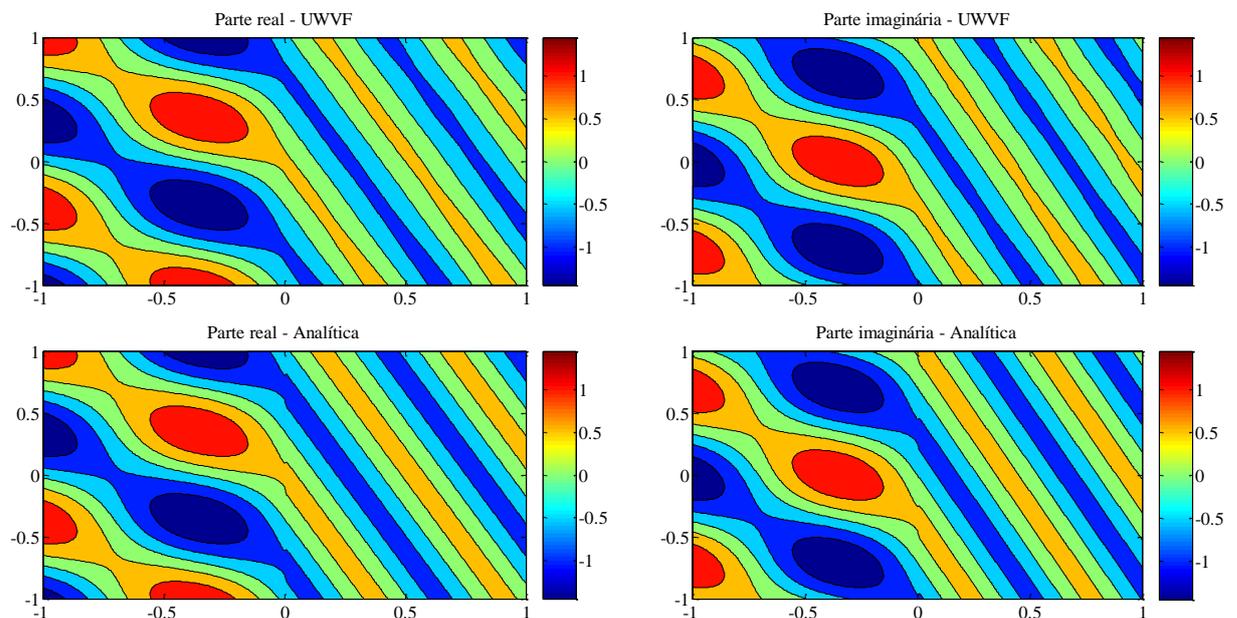


Figura 3-20 – Propagação no domínio heterogêneo, com polarização perpendicular e ângulo de 45° , com 15 funções de base e $h = 0,5$.

Na figura 3-20, os resultados numérico e analítico têm comportamentos semelhantes tanto para a parte real como para a parte imaginária. Erro relativo para essa

simulação é da ordem de 10^{-2} e mesmo como aumento dos graus de liberdade esse valor não é diminuído devido ao condicionamento do sistema.

Neste problema, temos dois fatores importantes: o primeiro é que no espaço livre há sempre uma função de base na direção de propagação da onda para a quantidade de direções múltiplas de oito, sendo que o mesmo não ocorre no meio dielétrico; e o segundo é a diferença entre os números de onda entre os meios.

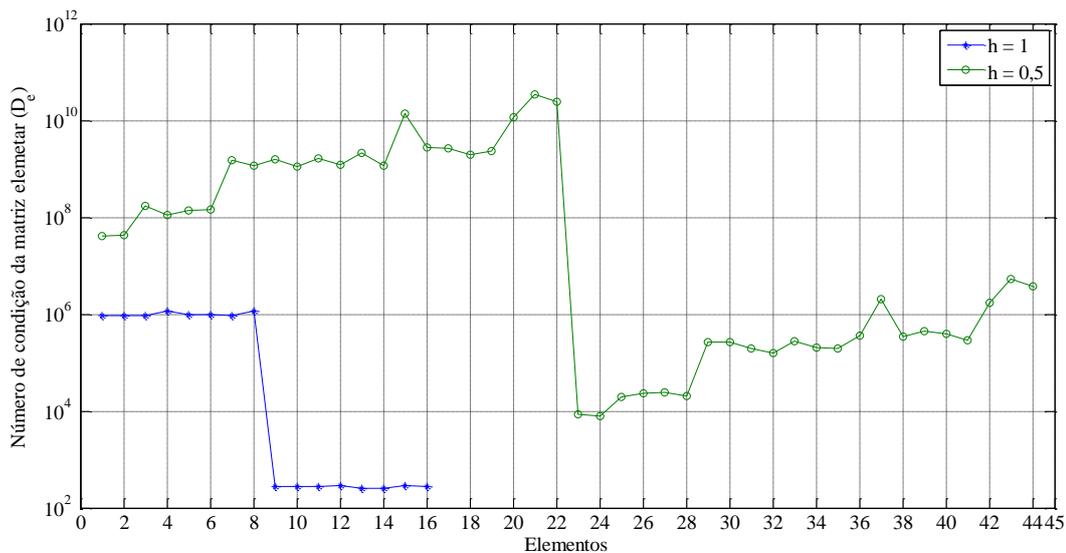


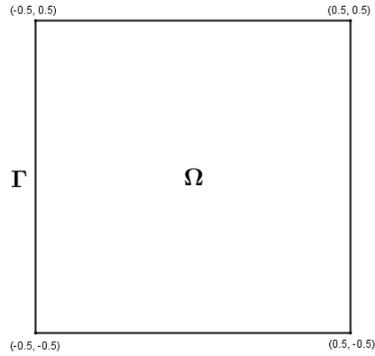
Figura 3-21 – Número de condição da matriz elementar D_e para 15 funções de base em função aos elementos para $h = 1$ e $h = 0,5$ em meio heterogêneo, polarização perpendicular e ângulo de propagação de 45° .

Na figura 3-21, os números de condição das matrizes elementares D_e para as malhas $h = 1$ e $h = 0,5$ possuem valores inferiores no meio com maior número de onda, ou seja, $k = 4\pi$, estando esse resultado de acordo com a literatura [63]. Desta forma, torna-se conveniente o controle do condicionamento das matrizes elementares de forma a conseguir maior quantidade de funções de base no segundo meio e, assim, a possibilidade de melhor precisão dos resultados.

3.2.2. Expansão em funções de Bessel

Até o momento, investigamos a UWVF com funções de base como sendo ondas planas. Nesta subseção analisamos as características do método quando são utilizadas as

funções de Bessel como bases. Todavia, as integrais não podem mais ser calculadas de forma fechada e utilizamos a quadratura de Gauss-Legendre com 150 pontos de integração sobre cada aresta. À vista disso, garantimos que não haverá a introdução de erros de integração em nossas análises.



$$f_{(-1,-1)}$$

Figura 3-22 – Domínio computacional para linha infinita de corrente no espaço livre.

Na figura 3-22, o domínio computacional é de 1λ para $\Omega = \{(x, y) / -0,5 \leq x \leq 0,5 \text{ e } -0,5 \leq y \leq 0,5\}$ com $k = 2\pi$. A linha infinita é representada por f e está localizada em $(-1, -1)$.

A fonte da condição de contorno descrita equação 3-3 é alterada para cada região como sendo,

$$g = -\frac{I\omega\mu_0}{4} H_0^2(k\rho), \quad \text{em } \Gamma \tag{3-10}$$

Onde I é a corrente em Ampères, H_0^2 é a função de Hankel de ordem zero e segundo tipo e ρ é o modulo do vetor deslocamento.

Nesse problema, consideramos $I = 1 \text{ A}$ e a linha infinita de corrente está localizada em $(-1, -1)$. As densidades de malhas são $h^{-1} = 1, 2, 4, 8$ e a ordem das funções de Bessel são dadas por $n = 2t - 1 \in \{1 \leq t \leq 30\}$.

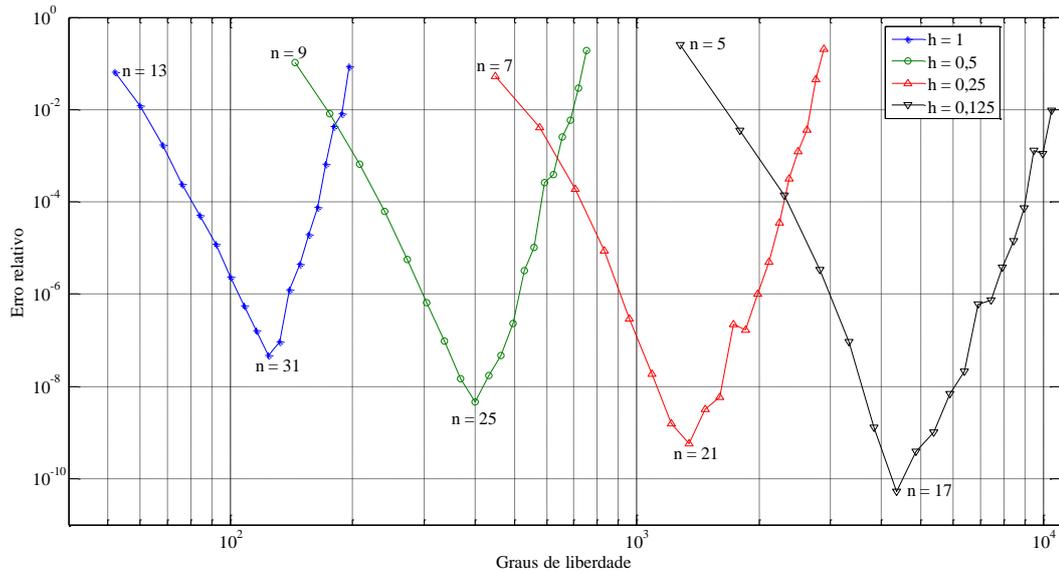


Figura 3-23 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.

Na figura 3-23, indicamos as ordens iniciais e com menor erro relativo para a expansão com funções de Bessel. Verifica-se que o refinamento da malha diminui o erro relativo, sendo o menor valor alcançado para a malha $h = 0,125$ da ordem de 10^{-11} . Além disso, quanto maior o refinamento, menor a quantidade de ordens necessárias para alcançar essa precisão. Assim, as funções de Bessel apresentam uma importante característica para experimentos com elementos menores que o comprimento de onda em que a expansão por ondas planas não alcança a mesma precisão.

Em continuidade, analisamos o número de condição do sistema global, pois essa característica, investigada anteriormente, mostra-se relevante na precisão do método.

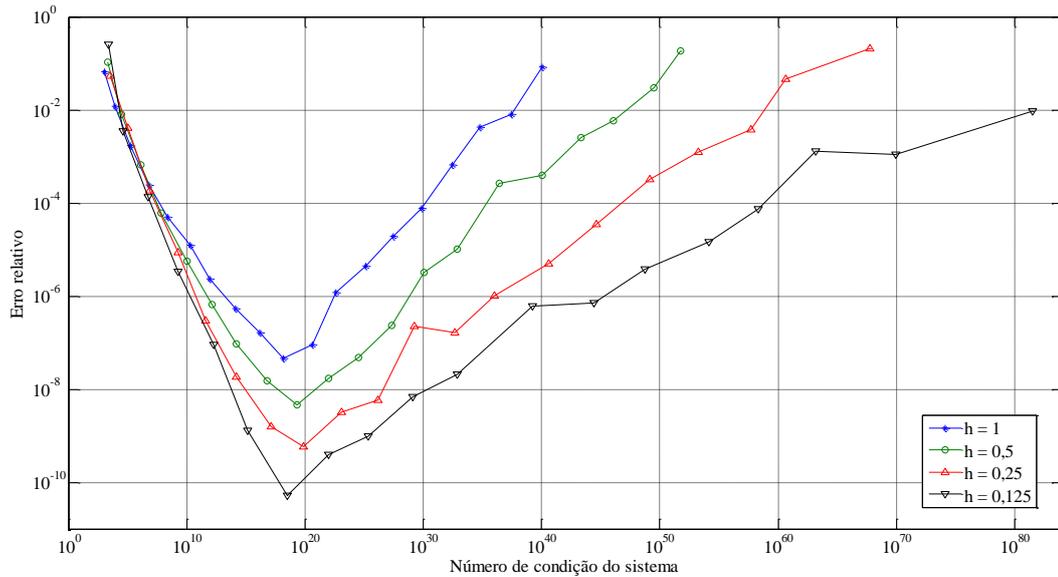


Figura 3-24 – Erro relativo em função dos números de condição do sistema para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.

Na figura 3-24 o condicionamento do sistema aumenta com os graus de liberdade e, mesmo alcançando valores elevados, o sistema converge com menor erro relativo para a malha mais refinada. Observamos que o algoritmo iterativo para resolver o sistema estagnou sem a convergência para a tolerância desejada.

h^{-1}	Elementos	Ordem da função de Bessel	Erro relativo mínimo	Número de condição do sistema
1	4	31	$4,68 \times 10^{-8}$	$1,58 \times 10^{18}$
2	16	25	$4,68 \times 10^{-9}$	$2,15 \times 10^{19}$
4	64	21	$5,80 \times 10^{-10}$	$7,78 \times 10^{19}$
8	256	17	$5,23 \times 10^{-11}$	$3,42 \times 10^{18}$

Tabela 3-6 – Erros relativos mínimos e números de condição do sistema para irradiação de onda eletromagnética devido a uma linha infinita de corrente no espaço livre.

Na tabela 3-6, verifica-se que a malha $h^{-1} = 8$ apresenta menor erro relativo com aproximadamente o mesmo número de condição que os demais refinamentos, sendo que necessita menor quantidade de ordem para convergir. Em todas as simulações o menor erro é alcançado com número de condição do sistema superior ao valor máximo com ondas planas, ou seja, $cond(A) \leq 10^{20}$ e $cond(A) \leq 10^{12}$, respectivamente.

3.2.3. Comparação das expansões

Com os resultados dessa seção verificamos que o refinamento da malha produz resultados mais precisos com as funções de Bessel. No entanto, essa característica não é observada com as ondas planas, pois o aumento do condicionamento do sistema ocasiona o aumento do erro relativo.

Observamos que o sistema com funções de base de Bessel apresenta menor sensibilidade ao condicionamento do sistema global. Então, comparamos o problema de uma linha infinita de corrente fora do domínio computacional com expansão em ondas planas e funções de Bessel.

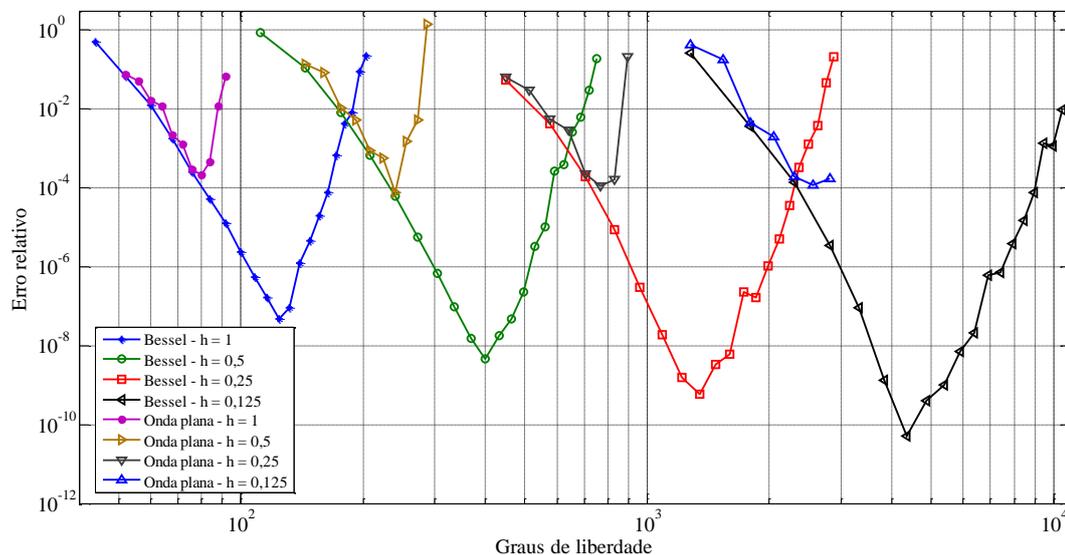


Figura 3-25 – Erro relativo em função dos graus de liberdade com expansão em funções de Bessel e ondas planas para uma linha infinita de corrente no espaço livre.

Com os resultados da figura 3-25 podemos observar que o aumento do refinamento da malha melhora a precisão do método com a expansão em função de Bessel. Essa característica não é observada com o uso de ondas planas, verifica-se que mesmo com o refinamento da malha não houve melhora da precisão. Neste caso, observamos que a quantidade de funções de base por elemento decresce com o aumento da densidade da malha com ondas planas.

3.3. Malha não uniforme

Nesta seção investigamos a malha não uniforme e apresentamos a principal contribuição desta pesquisa que é estabelecer uma metodologia para o controle do condicionamento do sistema e na predeterminação do número de direções de onda na simulação de problemas em malhas não uniformes. Esses procedimentos impactam no custo computacional, pois, como cada elemento representa um domínio homogêneo, a precisão do método é alcançada com o controle do número de condição do sistema global. Nesse sentido, o procedimento é particularmente útil em domínios eletricamente grandes divididos em uma malha não uniforme.

3.3.1. Espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito

Investigamos o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito. A modelagem matemática do problema proposto é feita pela equação de onda escalar e as respectiva condição de contorno.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + jku = g, \quad \text{sobre } \Gamma \quad (3-12)$$

Esse conjunto de equações viabiliza a simulação numérica com a correta escolha das variáveis u e g .

O espalhador é iluminado por uma onda plana TM_z que propaga na direção $+x$ e com número de onda $k = 2\pi$. O cilindro tem raio de 0.5λ e a ABC com raio de 3.0λ , sendo a malha formada por 1178 elementos e $h_{max} = 0.6814\lambda$.

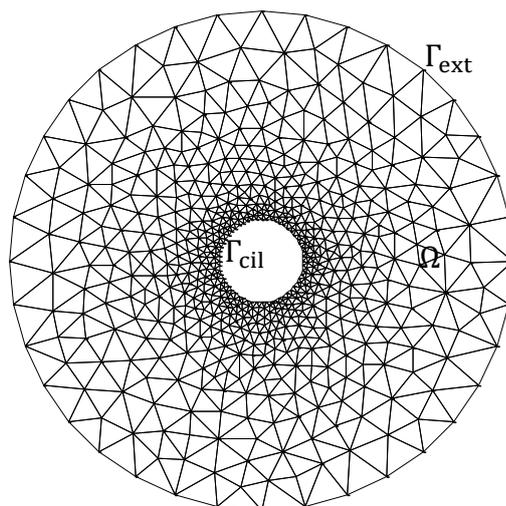


Figura 3-26 – Domínio computacional para um cilindro condutor perfeito iluminado por uma onda plana com incidência normal.

Na figura 3-26, a condição de contorno de Dirichlet está ao longo da fronteira Γ_{cil} e o contorno Γ_{ext} é modelado pela ABC de ordem zero.

Na simulação variamos as funções de bases nos elementos no intervalo $1 \leq Q \leq 30$ e calculamos o erro relativo em todo o domínio.

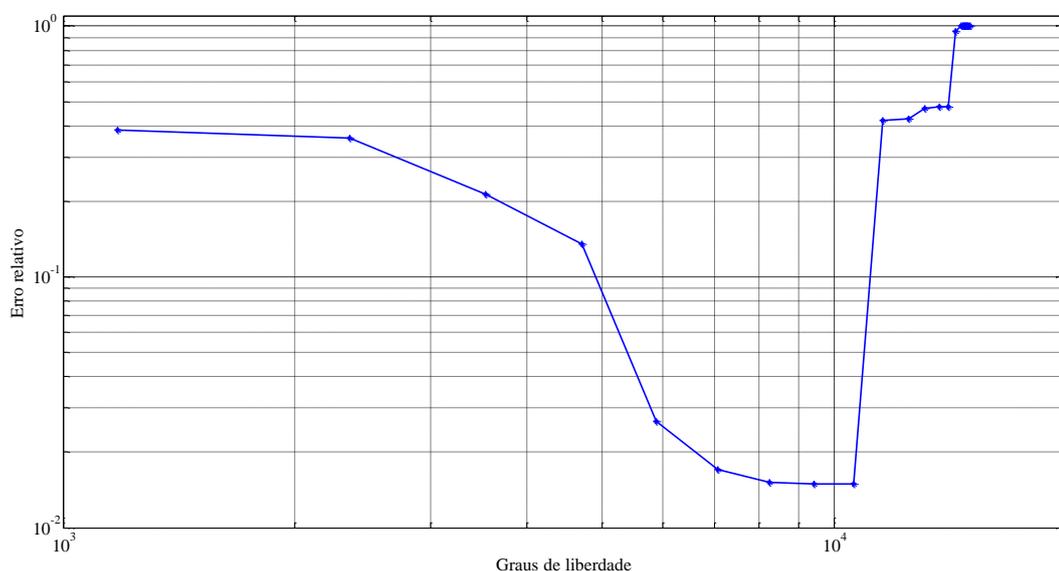


Figura 3-27 – Erro relativo em função dos graus de liberdade para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z

Na figura 3-27, o aumento dos graus de liberdade acarreta na diminuição do erro relativo que alcança uma estabilidade entre seis e nove bases. A partir desse valor, o erro

relativo é crescente até a região de instabilidade (erro maior que 10^{-1}) que não apresentam resultados satisfatórios.

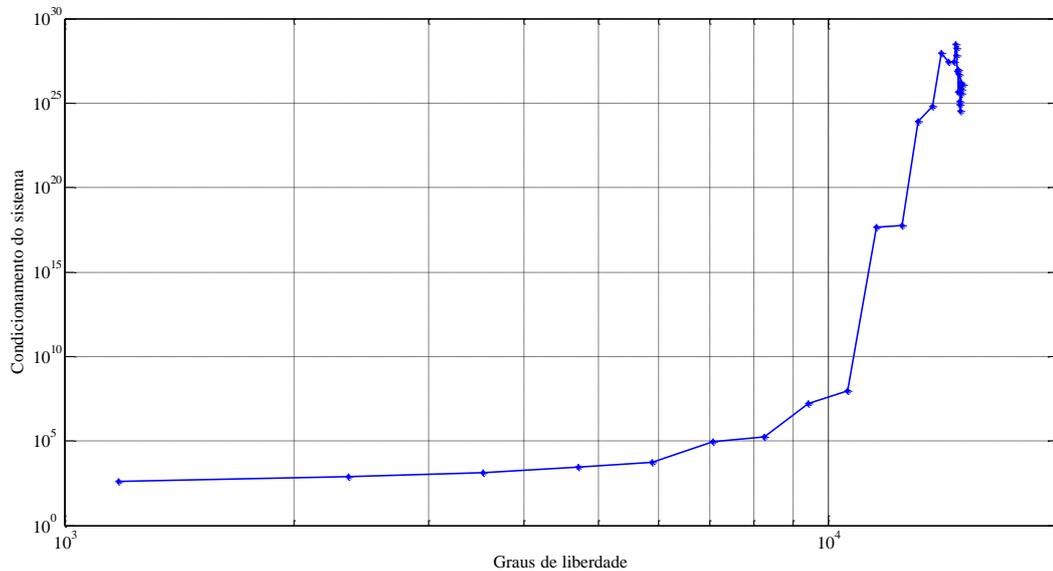


Figura 3-28 – Condicionamento do sistema em função dos graus de liberdade para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z

O condicionamento do sistema é crescente com o aumento dos graus de liberdade. Comparado as figuras 3-27 e 3-28, verifica-se que o erro relativo está na região de instabilidade para números de condição superiores a 10^{15} .

Tendo isso em vista, investigamos a solução dos sistemas matriciais $A = (D - C)$, $cond(D - C)$, e $A = (I - D^{-1}C)$, $cond(I - D^{-1}C)$ em função do número de condição máximo da matriz elementar D_e , $cond(D_e)$.

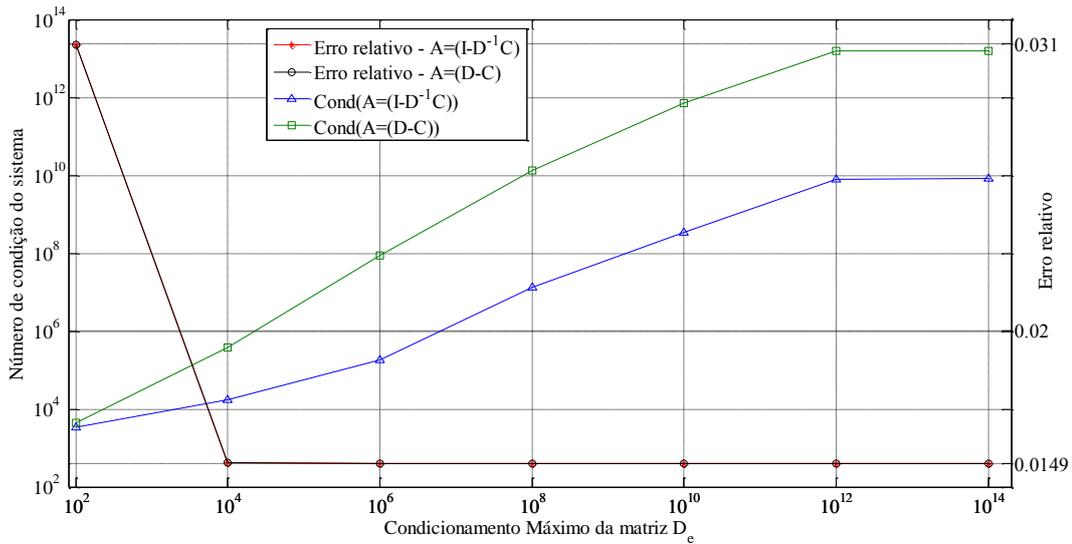


Figura 3-29 – Número de condição dos sistemas $(I - D^{-1}C)$ e $(D - C)$ (eixo esquerdo) e erro relativo (eixo direito) em função ao número máximo de condicionamento de D_e .

Na figura 3-29, observa-se que o sistema pré-condicionado por D^{-1} melhora o número de condição do sistema global. Desta forma, para obtermos $cond(A) \leq 10^{10}$ devemos fixar o número de condição máximo para a matriz elementar como sendo $cond(D_e) \leq 10^{14}$ para o sistema $A = (I - D^{-1}C)$ e $cond(D_e) \leq 10^8$ para $A = (D - C)$.

O processo de controle do número de condição é feito pela verificação de $cond(D_e)$ e, conseqüentemente, a remoção de uma base até que $cond(D_e)$ seja menor ou igual ao limite predefinido. No entanto, a imposição de um valor menor de $cond(D_e)$ pode levar a um reduzido número de funções de base e, por conseguinte, comprometer a precisão da solução.

Nesse resultado a precisão não é afetada para $cond(D_e) > 10^4$, mas mostramos a seguir que é mais vantajoso selecionar o limite superior para o número de condição $cond(D_e) \leq 10^{12}$. Essa afirmação justifica-se se utilizarmos como controle inicial do condicionamento o cálculo do posto da matriz elementar para uma quantidade predeterminada de funções de bases. Esse resultado nos fornece as linhas linearmente independentes e atribuímos esse valor como sendo as bases. Portanto, após o cálculo do posto, aplicamos o processo de redução das bases por meio da verificação do condicionamento do sistema.

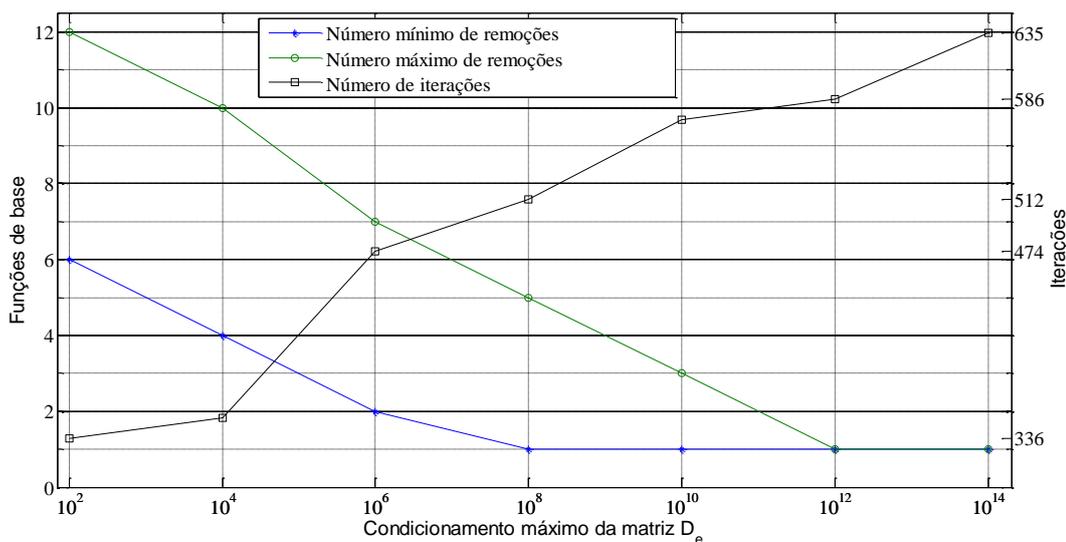


Figura 3-30 – Quantidade de funções de removidas após a aplicação do posto (eixo esquerdo) e número de iterações para o método BiCG (eixo direito) em função do máximo condicionamento da matriz D_e .

Na figura 3-30, o eixo esquerdo representa os valores máximos e mínimos de função de base que devem ser removidas para que o condicionamento pré-estabelecido seja alcançado após a redução pelo posto da matriz. Nesta simulação, todos os elementos possuem inicialmente 40 funções de base que são reduzidas pela quantidade de linhas linearmente independentes da matriz elementar.

Observa-se que o $cond(D_e)$ aumenta a quantidade de funções de base por elemento e as tornam próximas do posto da matriz. Essa característica é importante para a escolha do condicionamento máximo do sistema por meio da análise do custo computacional desse processo. O número de condição máximo de 10^{12} acarreta em três iterações de cálculo da matriz D_e para alcançar o valor desejado, que totalizam em 3534 iterações para todo o domínio. Já para o condicionamento de 10^4 , são necessárias 12552 iterações. Além disso, a convergência do BiCG ocorre para 586 e 351 iterações para o primeiro e segundo caso, respectivamente. No entanto, essa diferença não é expressiva quando comparada como o total de iterações para o cálculo das matrizes elementares.

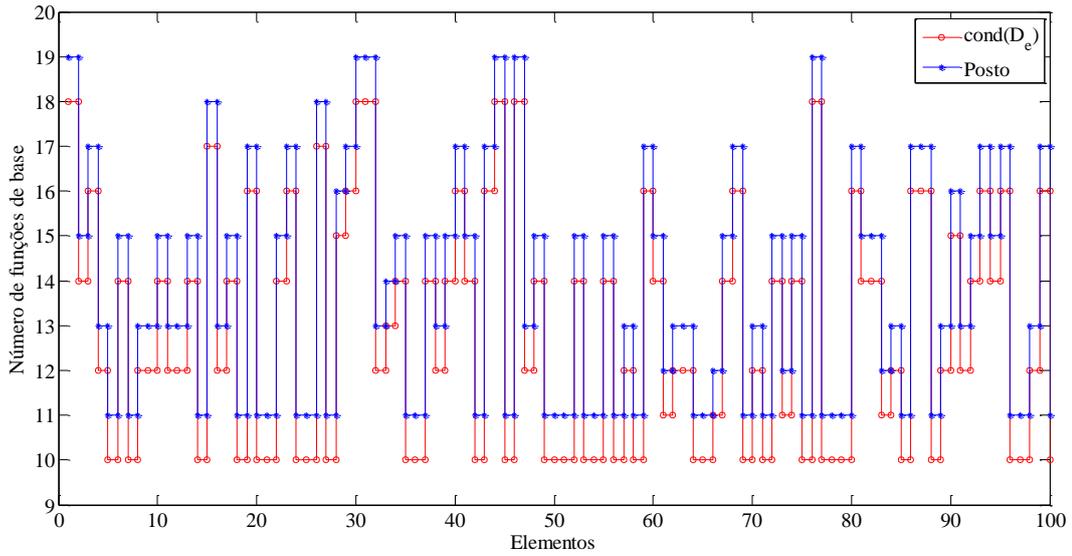


Figura 3-31 – Número de funções de base ao longo do diâmetro para $Cond(D_e) \leq 10^{12}$.

Na figura 3-31 são observadas as funções de base previstas no cálculo do posto e o número de bases com o processo de controle do número de condição $cond(D_e) \leq 10^{12}$. Nesse resultado, a amostra de triângulos é ao longo do diâmetro na linha $y = 0$ e, para todos os elementos, o valor do posto é superior em uma direção de onda.

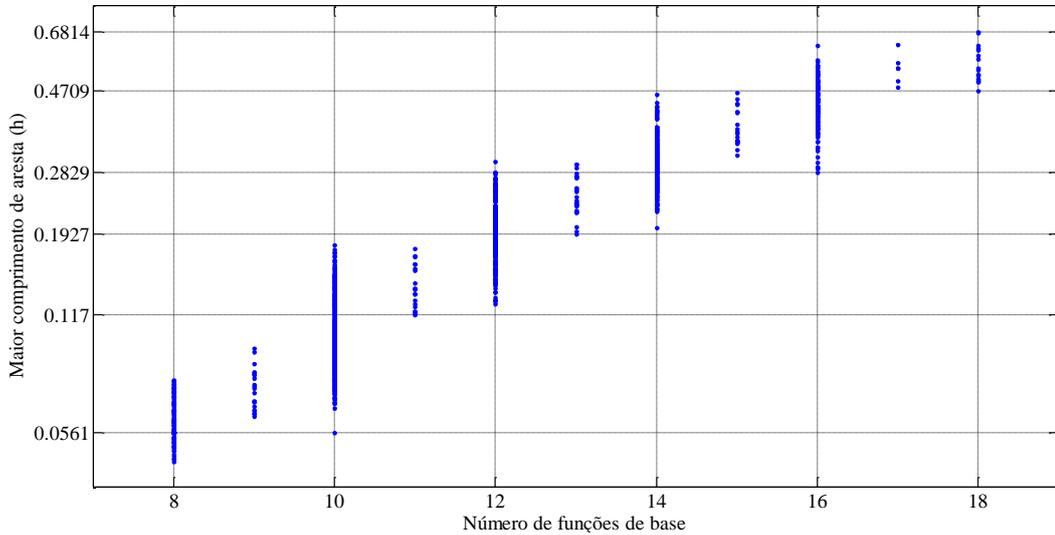


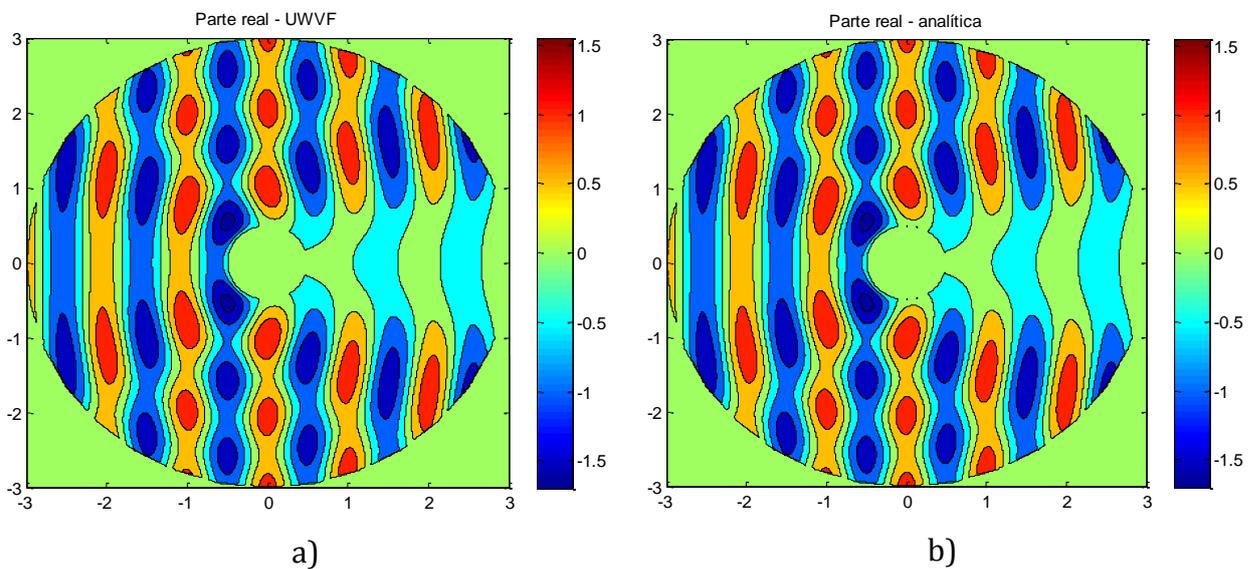
Figura 3-32 – Maior aresta dos elementos em relação a quantidade de funções de base para $Cond(D_e) \leq 10^{12}$.

Na figura 3-32 investigamos a relação existente entre o número de funções de base e a maior aresta de cada elemento. Observa-se que podemos associar um intervalo de variação da maior aresta com o máximo de funções de bases admissíveis por elemento.

Por exemplo, para todos os elementos com a maior aresta no intervalo $[0.0561 - 0.0117]$ podem iniciar com 10 bases e, em seguida, aplicar o controle de condicionamento. Portanto, antes de aplicar o controle do número de condição, este critério pode ser utilizado para reduzir o a quantidade de vezes que a matriz D_e é calculada e, assim, reduzir significativamente o custo computacional.

3.3.2. Aplicação da metodologia de controle do condicionamento do sistema

Aplicamos os resultados para controle do número de condição e a especificação da quantidade de funções de base de acordo com a máxima aresta dos elementos na simulação numérica do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica sem perdas com $\epsilon_r = 4$, 0.5λ de raio do cilindro, 0.1λ de espessura do dielétrico e 3λ de raio da ABC. A discretização do domínio computacional tem $h_{max} = 0.6801\lambda$, $h_{min} = 0.0448\lambda$ e 870 elementos.



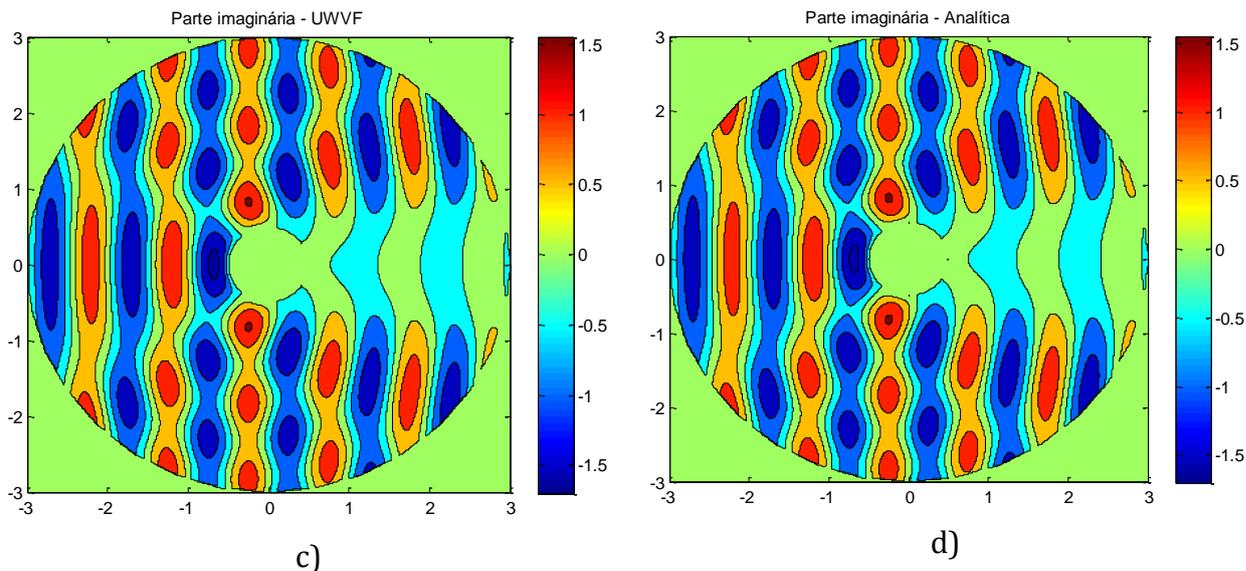


Figura 3-33 – Cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica sem perdas, solução numérica em a e c e analítica em b e d, sendo as partes real e imaginária, respectivamente.

Na figura 3-33, os resultados são para a simulação numérica (a e c) e analítica (b e d), sendo representadas as partes real e imaginária. A avaliação qualitativa desses resultados convalida as técnicas apresentadas para determinação da quantidade de funções de base por elemento e o controle do condicionamento proposto neste trabalho. O valor máximo do número de condição é 10^{12} , que nos leva a 11066 incógnitas e o sistema pré-condicionado com número de condição da ordem de 10^9 . Nessa simulação, o erro relativo é de 1,2%, que está compatível com a literatura. Isto nos instiga em observar no domínio computacional a distribuição do erro absoluto.

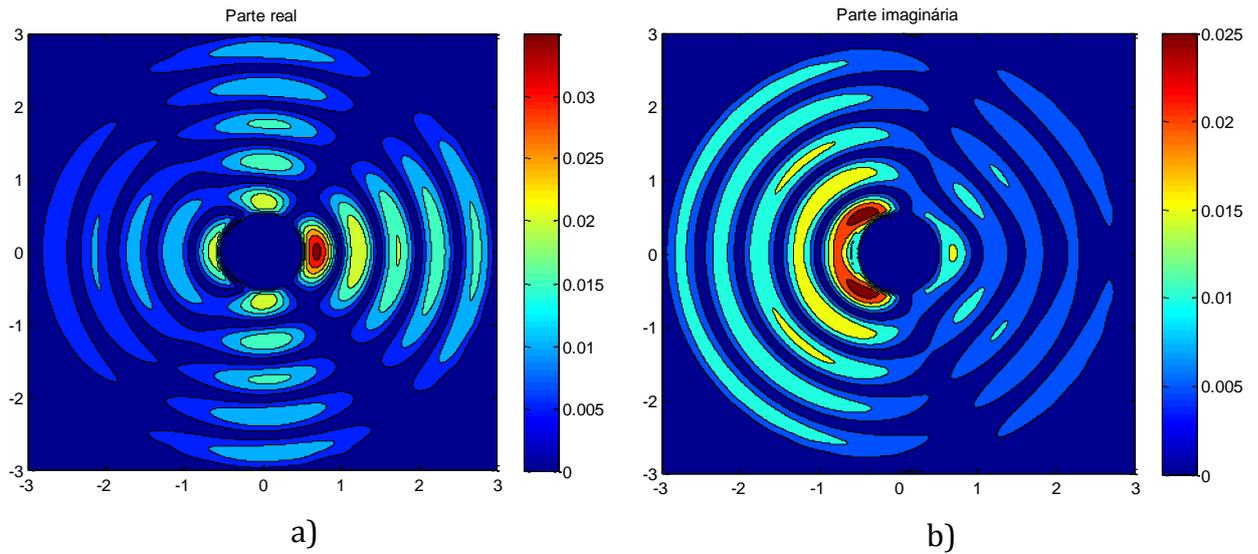


Figura 3-34 – Erro absoluto para o cilindro condutor perfeito revestido por uma camada dielétrica sem perdas, sendo a parte real em a e a parte imaginária em b.

Na figura 3-34 são apresentadas as partes real e imaginária do erro absoluto. Verifica-se que o erro máximo é da ordem de 10^{-2} e que os valores mais significativos estão próximo ao cilindro.

Portanto, com esses resultados, convalidamos a técnica que desenvolvemos para o controle do condicionamento e a predeterminação da quantidade de funções de base por elemento a partir da maior aresta do elemento.

3.3.3. Fator de acoplamento

Investigamos o fator de acoplamento presente nas equações 2-44 e 2-45 dos fluxos numéricos. Esses valores podem ser determinados por:

$$\alpha = \sqrt{k_e k_l} \quad (3-13)$$

$$\alpha = \frac{k_e + k_l}{2} \quad (3-14)$$

$$\alpha = \max(k_e, k_l) \quad (3-15)$$

As equações 3-5 a 3-7 representam a média geométrica, a média aritmética e o valor máximo entre os números de ondas entre elementos vizinho. Investigamos o fator de acoplamento do fluxo numérico para a propagação de uma onda plana com ângulo de 30° e oito funções de base por elemento. A densidade de malha é variada de $h^{-1} = 2, 4, 6, 8, 10, 20$ e o número de onda do meio Ω_2 como $k = 4\pi$ e $k = 10\pi$.

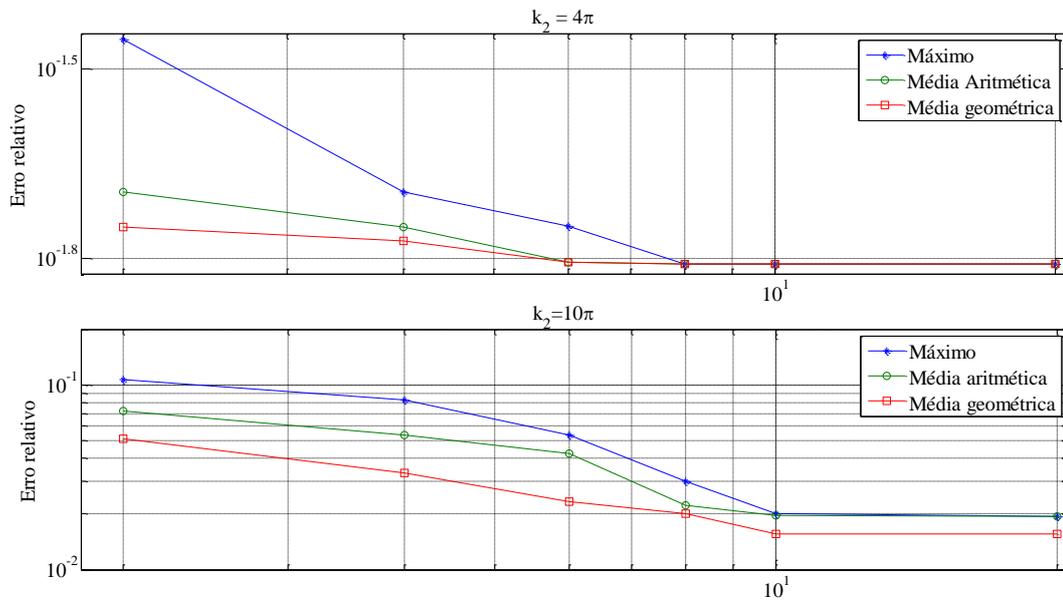


Figura 3-35 – Erro relativo em função de h^{-1} com variação do fator de acoplamento como sendo o valor máximo, a média aritmética e a média geométrica entre os números de ondas. Meio heterogêneo, polarização perpendicular, ângulo de propagação de 30° e 8 funções de base.

Na figura 3-35, a média geométrica fornece melhor precisão nas duas simulações. Para $k_2 = 4\pi$ as médias geométrica e aritmética se igualam a partir de $h = 0,1667$ e o valor máximo a partir de $h = 0,125$. Nesse caso, as precisões se mantêm constantes para todos os casos. Quando $k_2 = 10\pi$ o erro relativo da média geométrica é sempre inferior aos das demais, sendo que a média aritmética e o valor máximo são aproximadamente iguais a partir de $h = 0,1$. Portanto, em nossas simulações utilizamos sempre a média geométrica para determinar o fator de acoplamento.

3.4. Incorporação da PML

Nesta seção investigamos a incorporação da PML para truncar o domínio do problema e, assim, reduzir o erro relativo e o custo computacional. A avaliação inicial para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com a aproximação da ABC do objeto. Nesta simulação, o raio do cilindro é de $0,5\lambda$ e a fronteira absorvente $0,7\lambda$, sendo a malha composta por 72 elementos e $h_{max} = 0,25\lambda$.

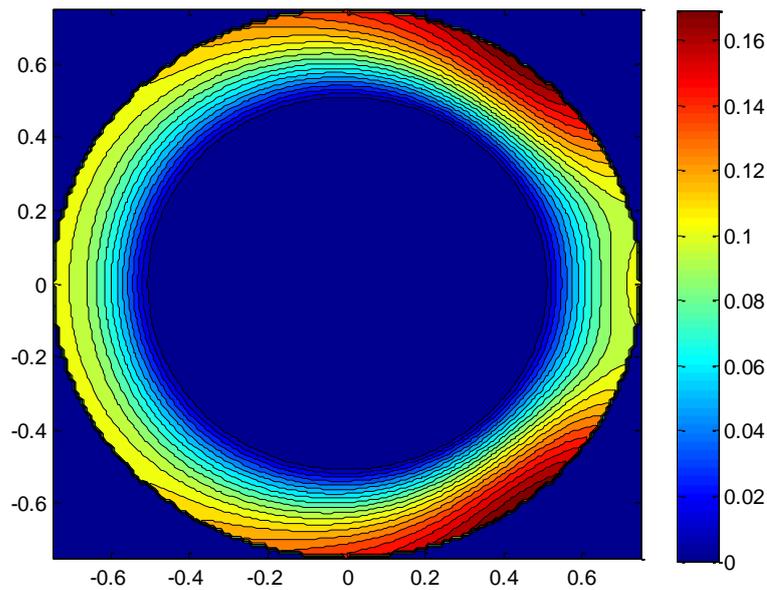


Figura 3-36 – Erro absoluto para o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito com incidência normal de uma onda TM_z e ABC distante $0,2\lambda$ do espalhador.

Na figura 3-36 o erro absoluto máximo está concentrado sobre ABC e o erro relativo é de 3,9%. Portanto, esse resultado sustenta a essencialidade de investigação da PML com a UVWF.

3.4.1. Propagação de ondas planas

Nesta seção investigamos o comportamento da PML para incidência de uma onda plana propagando no espaço livre. Optamos por essa classe de problema devido ao acessível controle das variáveis envolvidas, como a direção de propagação. Portanto, podemos ressaltar a análise dos parâmetros de projeto da PML.

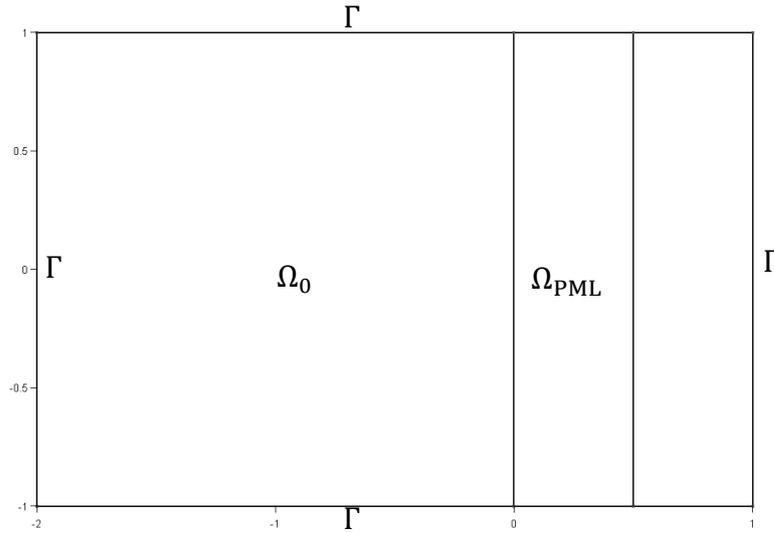


Figura 3-37 – Domínio computacional para o espaço livre Ω_0 e região PML Ω_{PML} , UWVF-PML.

Na figura 3-37, o espaço livre (Ω_0) está em $-2 \leq x \leq 0$ e a região PML (Ω_{PML}) em $0 \leq x \leq 1$. A onda propaga na direção $+x$ com $k = 2\pi$ e incide sobre a interface espaço livre – PML em $x = 0$. A região PML é formada por duas camadas com espessura total de 1λ , igualmente espaçadas, e todo o domínio é limitado por uma ABC de ordem zero em Γ .

A investigação inicial é referente ao parâmetro de decaimento que está relacionado a condutividade máxima, sendo expresso por $\sigma_{\text{max}}/(\omega\varepsilon_0)$. A onda incidente na interface PML propaga com um ângulo de 45° no espaço livre. O número de condição máximo admitido é de 10^{12} para as matrizes elementares, controlado pelo método do posto, com o máximo de oito funções de base por elemento.

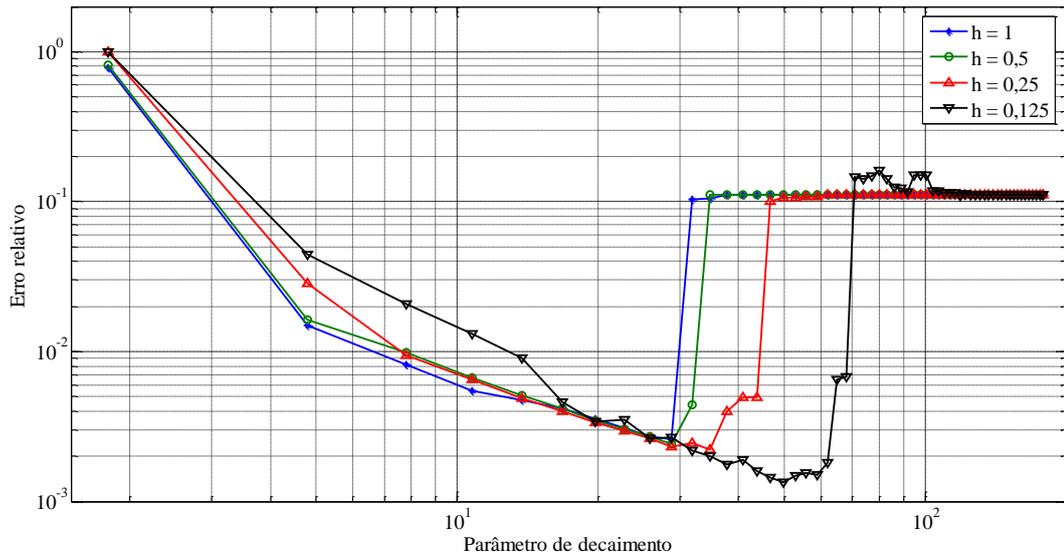


Figura 3-38 – Erro relativo em função do parâmetro de decaimento, UWVF-PML.

Na figura 3-38, o erro relativo é decrescente com o aumento do parâmetro de decaimento. Observa-se que quanto mais refinada a malha, menor o erro absoluto alcançado. Para todas as densidades de malha, o erro relativo aumenta e estabiliza no mesmo patamar. Essa estabilidade é devida ao controle de condicionamento do sistema, mas o resultado não é satisfatório.

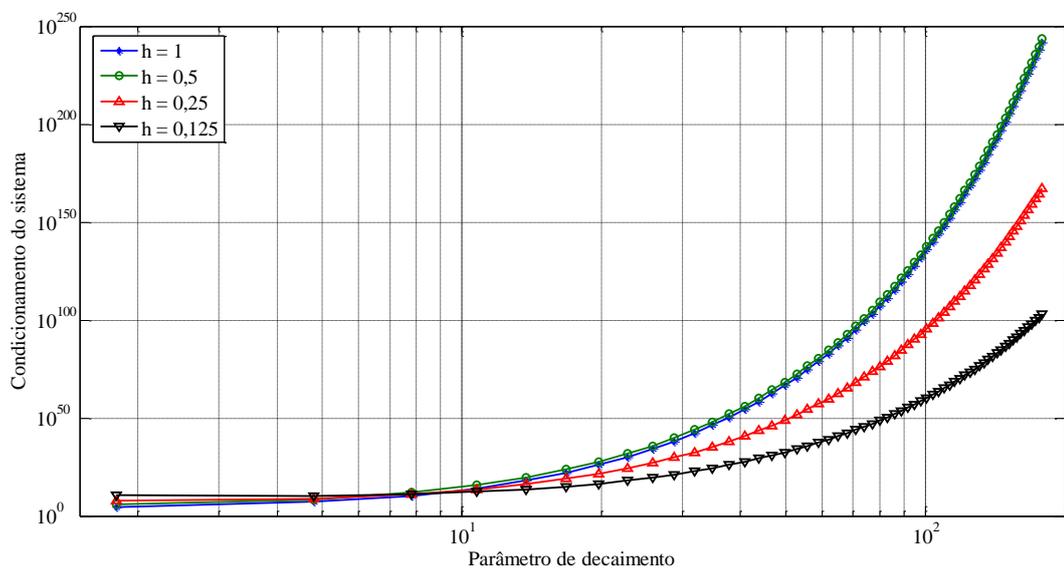


Figura 3-39 – Número de condição do sistema $A = (I - D^{-1}C)$ e da matriz D em função do fator de reflexão, UWVF-PML.

Na figura 3-39, o aumento do parâmetro de decaimento acarreta no aumento do condicionamento do sistema que alcança valores elevados. Comparando as figuras 3-37 e 3-38, quando o condicionamento ultrapassa o limite 10^{50} o erro relativo alcança a região de instabilidade gerando resultados não satisfatórios. Portanto, para o projeto da PML, escolhamos um problema simples em que as variáveis envolvidas sejam possíveis de se isolar. Encontramos a dependência com a malha em função do erro relativo e também em função do condicionamento do sistema. Desta forma, verifica-se que o uso da PML para truncar o domínio computacional, quando aplicada com a UWVF, acarreta no aumento do custo computacional devido ao controle do condicionamento e ao comprometimento da precisão da simulação. No entanto, ressaltamos que a PML tem ampla aplicação em diversos métodos numéricos apresentando melhor precisão que o uso das ABCs e, para projetar a PML, torna-se necessário a otimização dos parâmetros envolvidos, como a espessura da PML, quantidade de camadas, fator de decaimento e condutividade máxima.

Diante do exposto, aplicamos esses parâmetros da PML na solução de um problema de espelhamento eletromagnético comparado com o uso da ABC da figura 3-33.

3.4.2. Espalhamento Eletromagnético

Nesta seção aplicamos os parâmetros de projeto da PML investigados na seção anterior para a simulação do espelhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito iluminado por uma onda plana com polarização TM_z . A onda plana incidente propaga na direção $+x$ e com número de onda $k = 2\pi$. O cilindro tem raio de 0.5λ e a interface entre a PML e o espaço livre ocorre a partir dos pontos $x, y = \pm 0.7\lambda$. A camada PML tem espessura $L = 1\lambda$ e o parâmetro de decaimento, $\sigma_{max}/(\omega\epsilon_0)$, é igual a 50. A malha gerada tem 313 pontos e 554 elementos.

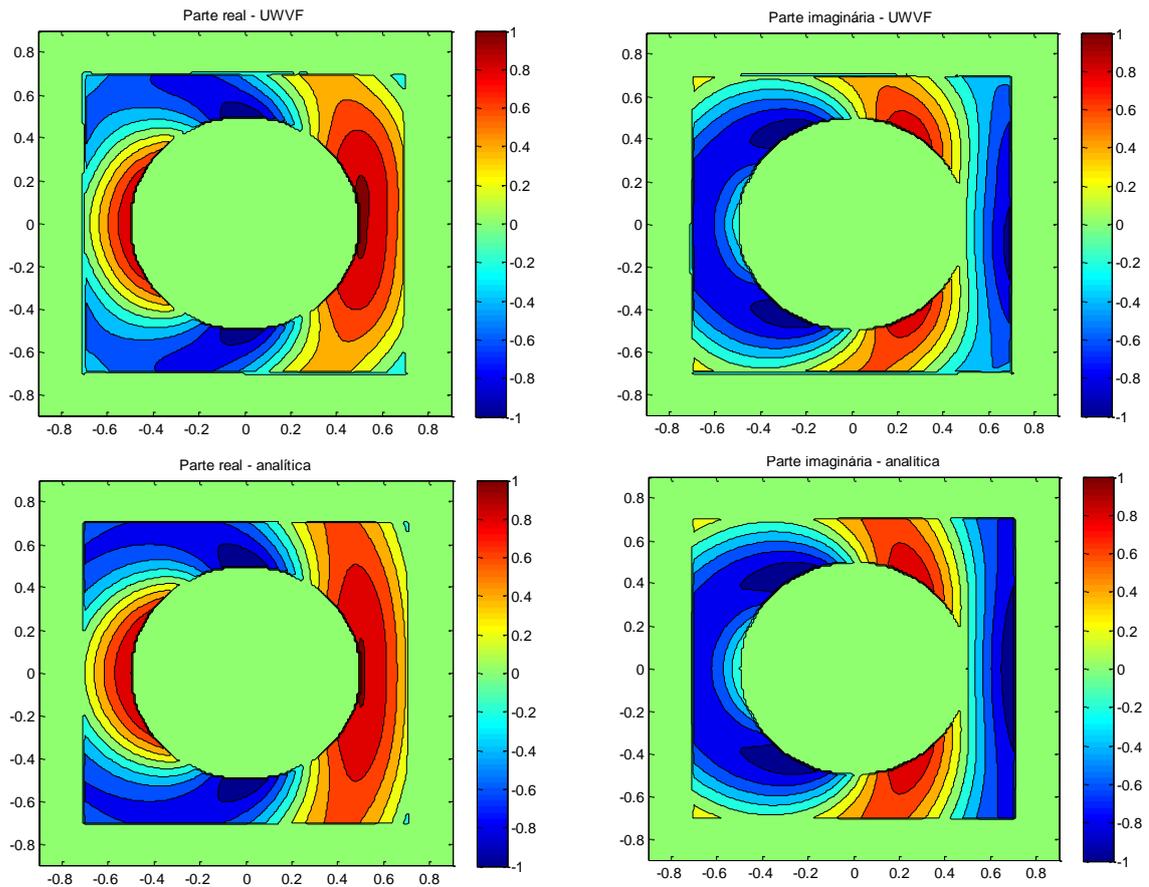


Figura 3-40 – Parte real e imaginária do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito de raio de 0.5λ e a interface entre a PML e o espaço livre a partir de $x, y = \pm 0.7\lambda$.

Na figura 3-40 observamos similaridade entre os campos analítico e numérico nas proximidades do espalhador. As distorções são percebidas nas proximidades com a aproximação da interface entre o espaço livre e a PML. Desta forma, verificamos a distribuição do erro sobre o domínio computacional.

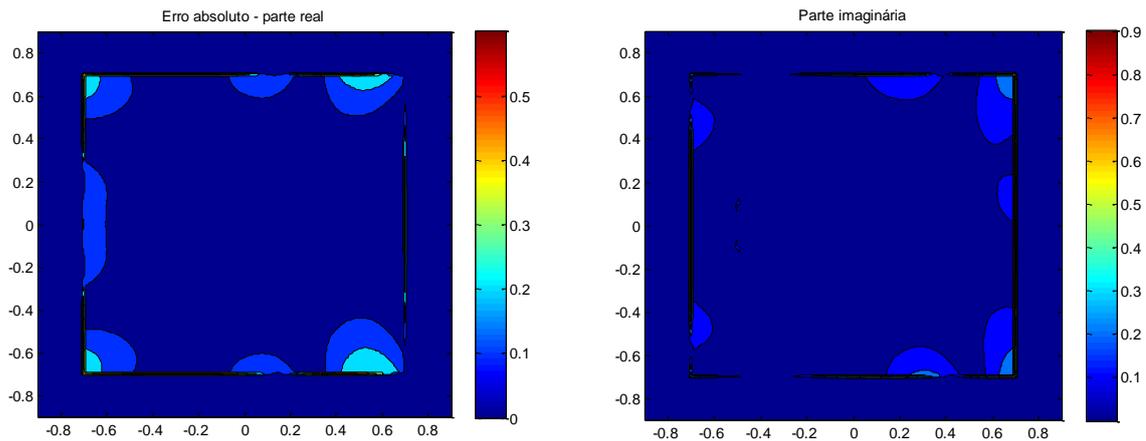


Figura 3-41 – Erro absoluto da parte real e imaginária do espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito de raio de 0.5λ e a interface entre a PML e o espaço livre a partir de $x, y = \pm 0.7\lambda$.

O erro absoluto na figura 3-41 está concentrado na região de interface entre o ar livre e a região PML. Ao contrário do erro apresentado na figura 3-35 que está distribuído ao longo do domínio. Em vista disso, podemos eliminar a região de concentração do erro e determinar o erro relativo. Desta forma, o erro relativo alcançado é de 1,01% que é inferior ao erro relativo com o uso da ABC. Esse resultado pode ser melhorado com o distanciamento da interface da PML e a otimização dos parâmetros de projeto.

3.5. Aplicação

Nesta seção aplicamos a metodologia de controle do condicionamento do sistema global para ondas planas e, também, as funções de base como sendo funções de Bessel. Escolhemos a simulação do espalhamento eletromagnético para um aerofólio NACA0012 como apresentado em [24].

O estudo da aerodinâmica de aerofólios tem início com os trabalhos de Kutta (1902) em modelos finos e de Joukowski (1905) para modelos com espessura [64]. Em 1930, o aerofólio NACA0012 é desenvolvido pelo Comitê Nacional para Aconselhamento sobre Aeronáutica (National Advisory Committee for Aeronautics - NACA). Esse aerofólio primário tem aplicações na aviação em geral, caudas horizontais, jatos supersônicos, lâminas do helicóptero, cobertura de proteção aerodinâmica e aletas de mísseis e foguetes [65].

Os quatro dígitos do aerofólio NACA0012 representam as suas características geométricas, sendo o primeiro dígito (0) o abaulamento, o segundo (0) a primeira casa decimal onde ocorre máxima distância da superfície à linha central e os últimos dois dígitos (12) a porcentagem da espessura em função do comprimento [66] [65]. Portanto, o perfil escolhido é simétrico, sem abaulamento e espessura com proporção de 12% do comprimento do aerofólio. A equação que modela o perfil geométrico do aerofólio NACA0012 é dada por

$$y = 5tc \left[0.2969 \left(\frac{x}{c} \right)^{0.5} - 0.1260 \left(\frac{x}{c} \right) - 0.3516 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c} \right)^4 \right] \quad (3-16)$$

onde t é a espessura máxima proporcional ao comprimento do aerofólio dado por 12%, c é o comprimento do aerofólio, x é a posição ao longo do eixo para $0 \leq x \leq c$ e y é a meia espessura em um dado valor de x (linha central da superfície).

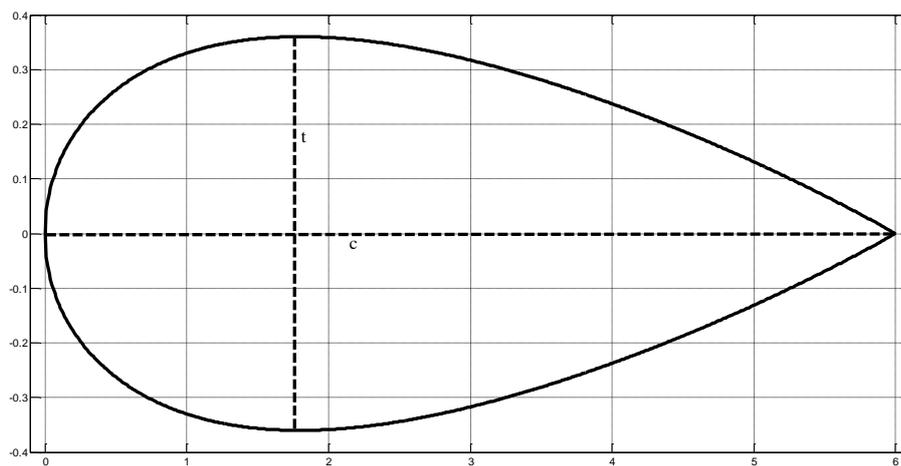


Figura 3-42 – Perfil e elementos geométricos do NACA0012.

O perfil geométrico do NACA0012 está representado na figura 3-42, fora de escala, com comprimento de 6λ e espessura máxima de 0.72λ . Portanto, com o uso da ABC na simulação, devemos garantir que esta esteja distante o suficiente das extremidades para que não ocorram reflexões espúrias. Além disso, a geometria curva do NACA0012 exige maior refinamento sobre sua superfície para que seja bem representado na simulação. Essas características geram um domínio computacional grande, uma malha não uniforme e quantidade elevada de elementos.

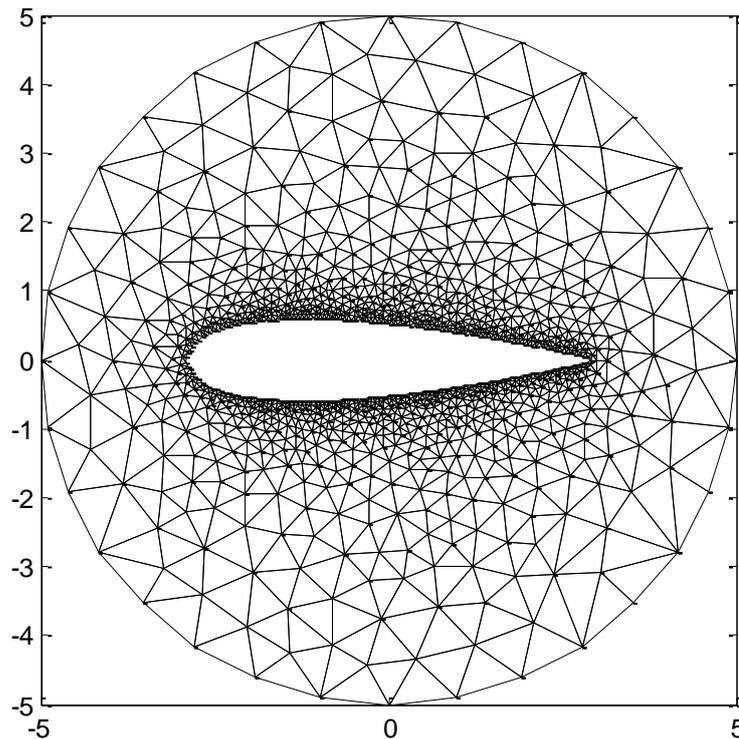


Figura 3-43 – Malha gerada para o domínio computacional - NACA0012.

Na figura 3-43 está representado o domínio computacional da simulação, sendo o raio da fronteira ABC de 5λ devido ao comprimento do NACA0012 para garantir que haja 2λ entre as extremidades e a fronteira absorvente. Na superfície do objeto a malha possui maior refinamento do elemento há maior quantidade de elemento para melhor representação da curvatura. Portanto, a malha gerada tem 1220 nós e 2009 elementos.

A simulação é para o NACA0012 condutor perfeito, iluminado por uma onda plana TM_z que propaga na direção $+x$ e $k = 2\pi$. Essa escolha é baseada no trabalho de [24], portanto, simulamos o espalhamento eletromagnético para que a relação entre o comprimento do NACA0012 e o comprimento de onda seja igual a seis.

O erro relativo é determinado por meio da comparação dos resultados obtidos com a UWVF e o FEM. A simulação com o Método dos Elementos Finitos é obtida por meio do software comercial COMSOL, sendo a malha gerada com 36754 elementos e 18679 pontos.

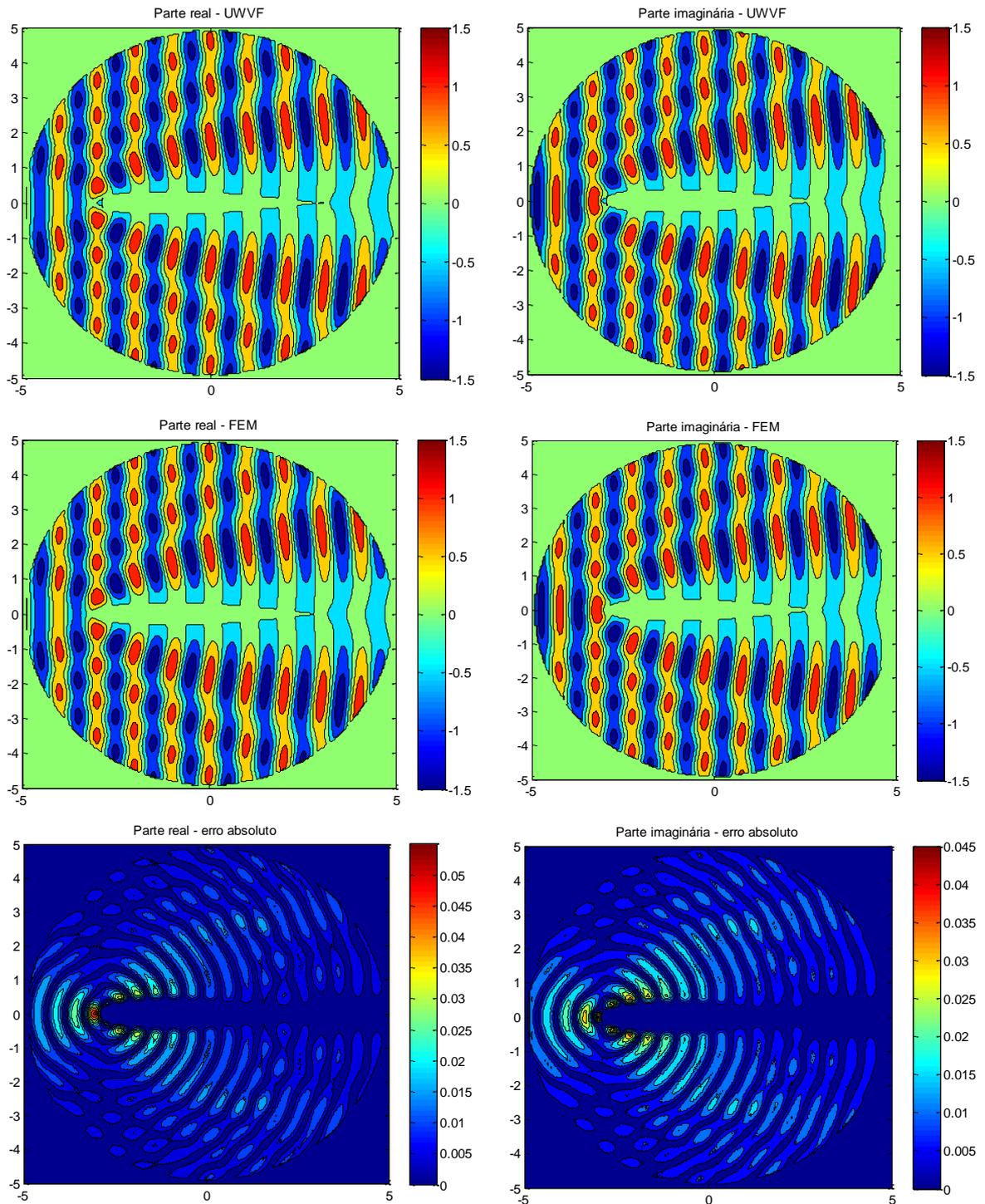


Figura 3-44 – Espalhamento eletromagnético para o NACA0012 para onda plana incidente propagando na direção $+x$.

A simulação da figura 3-44 apresenta as partes real e imaginária para o espalhamento eletromagnético pelo NACA0012 com onda propagando nas direções $+x$ para a UWVF e o FEM. Qualitativamente, observa-se que as partes reais e imaginárias das

simulações apresentam comportamentos semelhantes. Os erros absolutos dessas partes estão concentrados no bordo de ataque, sendo o erro relativo de 1,05%.

Com esses resultados, a Formulação Variacional Ultra Fraca apresenta resultado muito próximo ao Método dos Elementos Finitos com a vantagem de utilizar 5,47% dos elementos e 24,88% dos graus de liberdade quando comparado com o FEM.

Capítulo 4

Conclusões

4.1. Conclusões e comentários dos resultados

Ao longo do texto apresentamos as características da Formulação Variacional Ultra Fraca (UWVF). Os resultados apresentados na pesquisa fornecem direções para aplicação da Formulação Variacional Ultra Fraca em eletromagnetismo e sustentam as características do método.

Iniciamos nossa investigação usando uma malha uniforme e a expansão em ondas planas. O uso dessas funções de base acarreta no aumento do condicionamento do sistema global com o aumento da quantidade de bases. No entanto, essas funções possibilitam que as integrais sejam calculadas de forma fechada. A coincidência entre a direção da base e do campo em todo o domínio computacional acarreta no menor erro relativo. Essa característica não é observada na mudança de meio, pois devido a refração da onda, essa coincidência somente ocorreu no espaço livre. Então, investigamos o aumento do número de funções de base, mas o número de condição elevado do sistema impossibilitou que essa coincidência fosse alcançada em ambos os meios. As amplitudes da expansão em ondas planas apresentaram crescimento com o aumento dos graus de liberdade. Portanto, verificamos a existência de um máximo número de linhas linearmente independentes das matrizes elementares que possibilitam a solução do sistema.

Investigamos ainda a expansão com funções de Bessel para a solução de um problema de ondas cilíndricas. Essas funções acarretaram em menor crescimento do número de condição da matriz elementar e, ainda, permitiram que o limite pré-estabelecido fosse superior ao das ondas planas. Assim, foi possível alcançar maior quantidade de bases em elementos com $h = 0,1$ do que com as ondas planas. Comparamos os resultados com a expansão por ondas planas e verificamos que o aumento da densidade

da malha acarreta em melhor precisão para as funções de Bessel. No entanto, o refinamento não produziu melhoria significativa com as ondas planas, permanecendo praticamente constante em todos os casos. Desta forma, as funções de Bessel são mais atrativas na solução de problemas em que seja necessária maior densidade da malha. As funções de Bessel apresentam dois inconvenientes: a necessidade do uso de quadraturas e apresentam melhor resultado para elementos da ordem de 0,1. Quanto a integração, utilizamos a quadratura de Gauss-Legendre com 150 pontos para todas as densidades, pois em experimentos realizados com malhas menos densas foi necessária essa quantidade para convergência.

A principal contribuição dessa pesquisa é a predeterminação da quantidade de funções de base por elemento de acordo com a maior aresta e o controle do condicionamento do sistema. Esses resultados foram explorados para uma malha não uniforme, sendo esse tipo de malha amplamente utilizada para representar domínios computacionais. Desta forma, estabelecemos que a escolha inicial da quantidade de funções de base está relacionada com o tamanho da maior aresta. O cálculo do posto da matriz elementar pode ser substituído pela quantidade de bases por elementos e ainda assim apresentar resultado com precisão da ordem de 10^{-2} . Portanto, com esse conjunto de características, podemos reduzir significativamente o custo computacional e obter resultado com precisão da ordem de 1%.

Por fim, realizamos a investigação do parâmetro de decaimento das Camadas Perfeitamente Casada (PML) próximo ao espalhador. Devido ao aumento dos graus de liberdade com a PML, fixamos os demais parâmetros e verificamos o erro relativo para o campo próximo ao objeto. Esse resultado foi comparado com a ABC de ordem zero onde o erro ficou distribuído em todo o domínio computacional. Enquanto que com a PML o erro ficou concentrado na interface entre os meios. Portanto, para a determinação do campo próximo ao objeto, a PML apresentou melhor resultado. No entanto, para o problema de espalhamento por um cilindro condutor perfeito, a ABC pode ser colocada distante do objeto e apresenta erro da mesma ordem que a PML. Assim, ressaltamos que a característica do método em utilizar elementos da ordem de vários comprimentos de onda é comprometida com o uso da PML.

As contribuições dessa pesquisa foram aplicadas em dois problemas de engenharia. O primeiro foi o espalhamento eletromagnético por um cilindro condutor perfeito revestido por uma fina camada dielétrica. Neste problema aplicamos o controle de condicionamento do sistema e a predeterminação da quantidade de funções de base a partir do tamanho da maior aresta do elemento. O resultado foi da ordem de 1% e a comparação feita com a solução analítica. O erro absoluto está concentrado sobre a camada dielétrica por causa do refinamento da malha e, como solução, podemos utilizar a expansão acoplada de ondas planas e funções de Bessel. No entanto, não realizamos essa investigação nesta tese.

Em seguida, escolhemos um problema mais complexo de ser resolvido e optamos por calcular o espalhamento eletromagnético por um aerofólio NACA0012 com comprimento de 6λ . Esse problema não tem solução analítica e, assim, o nosso resultado de referência foi a simulação com o FEM para uma malha densa. Comparando o resultado da UWVF com o FEM, verifica-se que o erro absoluto está concentrado no bordo de ataque e o erro relativo é de 1,05%. Esse resultado alcançado com a Formulação Variacional Ultra Fraca é obtido com 5,47% dos elementos e 24,88% dos graus de liberdade em relação ao Método dos Elementos Finitos. Concluímos assim que a técnica por nós desenvolvida pode ser aplicada em experimentos geometricamente mais complexos e obter precisão da ordem de 1%.

4.2. Participação em congressos

1. COMPUMAG 2015, Montreal, Canadá, 28 junho a 02 de julho. ***“Comparative Analysis of the Generalized Finite Element Method and the Ultra Weak Variational Formulation Approaches to Solve Electromagnetic Scattering Problems”***
2. EMF 2016 (10th International Symposium on Electric and Magnetic Fields), Lyon, França, 12 a 14 de Abril. ***“Performance analysis of the Ultra Weak Variational Formulation to compute electromagnetic fields in electrically large domains”***

4.3. Publicação

Gimpel, A., Silva, E. J. e Afonso, M. M., "*Performance analysis of the ultra weak variational formulation to compute electromagnetic fields on nonuniform meshes*", International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. Wiley. Aceito em 05 de janeiro de 2017.

4.4. Continuidade da pesquisa

Apresentamos pontos importantes como continuidade dessa pesquisa:

1. **Funções de base:** A quantidade de funções de base por elemento é um limitador do método, pois influencia no condicionamento do sistema e no custo computacional. Portanto, é relevante que seja feita a investigação de outras expansões que contribuam para a precisão do método como o acoplamento entre as expansões em ondas planas e funções de Bessel.
2. **Truncamento do domínio computacional:** Investigar a incorporação de outros modelos de fronteiras que possibilitem o truncamento do domínio computacional com maior eficiência que a ABC de ordem zero. Dentre as possibilidades, citamos o uso de ABCs de ordem superior, pois elas não são incorporadas naturalmente na UWVF. No entanto, esse procedimento pode ser possível com alteração da formulação original do método. Outra proposta de truncamento é a PML otimizada, pois ela insere mais graus de liberdade no método e devem ser tratados de tal forma que seja possível a sua otimização
3. **Elementos de ordem superior:** A limitação do trabalho dos elementos está relacionada com a necessidade de uma malha mais densa nas proximidades do objeto para que geometria seja bem representado. Desta forma, destacamos o uso de elemento curvos sobre essas fronteiras. Esse método poderá acarretar em elementos maiores na malha e apresentam menor custo computacional e diminuição do erro.

4. **Fluxo numérico:** Nesta pesquisa utilizamos o fluxo numérico upwind que é o mais utilizado na literatura com a UWVF. No entanto, em nossas pesquisas encontramos outras formulações para o fluxo numérico, mas sem aplicação na UWVF. Assim, o uso de um esquema de fluxo mais eficiente, alguns problemas encontrados com o método poderão ser sanados.
5. **Imposição de condições de contorno não homogêneas:** As condições de contorno de Dirichlet e Neumann são incorporadas ao método por meio do fluxo numérico e, ao contrário do FEM, não são impostas diretamente sobre a fronteira, mas na equação integral que modela o problema. Portanto, é relevante a investigação da incorporação dessas condições não homogêneas.
6. **Formulação 3D:** Os resultados obtidos com a UWVF em 2D são relevantes para domínios computacionais grandes e quando há mudança de meio, pois o custo computacional é inferior a outros métodos, como o FEM e GFEM. Desta forma, a expansão do estudo para domínio tridimensional é o caminho natural a ser seguido pela pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] R. COURANT, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *American Mathematical Society*, pp. 1-23, 1943.
- [2] P. P. Silvester, "Finite element solution of homogeneous waveguide problems," *Alta Frequenza*, nº 38, pp. 313-317, 1969.
- [3] J. M. Gil e J. P. Webb, "A New Edge Element for the Modeling of Field Singularities in Transmission Lines and Waveguides," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 45, nº 12, pp. 2125 - 2130, 1997.
- [4] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha e R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4 ed., Hardcover: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [5] J. F. Foganholi e R. Pavanello, *Estudo de estimadores de erro de Elementos Finitos em elasticidade linear bidimensional*, Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [6] T. Belytschko, Y. Y. Lu e L. Gu, "Element-free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [7] W. G. Facco, *Tratamento de Descontinuidade de Material no Método dos Elementos Finitos Generalizado*, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2012.
- [8] S. Ham e K.-J. Bathe, "A finite element method enriched for wave propagation problems," *Computers and Structures*, 2012.

- [9] I. BABUŠKA e J. M. MELENK, “The Partition of Unity Method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 4, p. 727–758, 28 February 1997.
- [10] C. Farhat, I. Harari e L. P. Franca, “The discontinuous enrichment method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and*, vol. 190, p. 6455–6479, 2001.
- [11] B. Dèpres, “Sur une formulation variationnelle de type ultra-faible,” em *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, France, 1994.
- [12] I. Babuška e U. Banerjee, “Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM),” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vols. %1 de %2201-204, pp. 91-111, January 2012.
- [13] O. Laghrouche e M. S. Mohamed, “Locally enriched finite elements for the Helmholtz equation in two dimensions,” *Computers and Structures*, vol. 88, n° 23-24, p. 1469–1473, December 2010.
- [14] I. Babuska, U. Banerjee e J. E. Osborn, “Generalized Finite Element Methods: Main Ideas, Results, and Perspective,” *International Journal of Computational Methods*, vol. 1, pp. 67-103, 2004.
- [15] O. Cessenat e B. Despres, “Une nouvelle formulation variationnelle des équations d'onde en fréquence, Application au problème de Helmholtz 2D,” Villeneuve St Georges, 1994.
- [16] O. Cessenat, *Application d'une Nouvelle Formulation Variationnelle aux Équations D'ondes Harmoniques, Problèmes de Helmholtz 2D et de Maxwell 3D*, Université Paris - IX Dauphine, 1996.
- [17] T. Luostari, T. Huttunen e P. Monk, “The ultra weak variational formulation of thin clamped plate problems,” *Journal of Computational Physics*, n° 260, pp. 85-106, 2014.

- [18] T. Luostari, T. Huttunen e P. Monk, "The Ultra Weak Variational Formulation Using Bessel Basis Functions," *Computer Physics Communications*, vol. 11, n° 2, pp. 400-414, February 2012.
- [19] E. Perrey-Debain, "Plane wave decomposition in the unit disc: Convergence estimates and computational aspects," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, n° 193, p. 140 – 156, 2006.
- [20] M. Loeser e B. Witzigmann, "The Ultra Weak Variational Formulation Applied to Radiation Problems With Macroscopic Sources in Inhomogeneous Domains," *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 15, n° 4, pp. 1144-1154, 2009.
- [21] T. Huttunen, P. Monk e J. P. Kaipio, "Computational Aspects of the Ultra-Weak Variational Formulation," *Journal of Computational Physics*, vol. 182, n° 1, pp. 27-46, October 2002.
- [22] E. Darrigrand e P. Monk, "Combining the Ultra-Weak Variational Formulation and the Multilevel Fast Multipole Method," HAL, 4 January 2011. [Online]. Available: <http://hal.archives-ouvertes.fr/>. [Acesso em 15 August 2014].
- [23] T. Luostari, T. Huttunen e P. Monk, "Improvements for the ultra weak variational formulation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n° 94, pp. 598-624, 2013.
- [24] O. Cessenat e B. Després, "Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional Helmholtz problem," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 35, n° 1, pp. 255-299, February 1998.
- [25] C. Howarth, P. Childs e A. Moiola, "Implementation of an Interior Point Source in the Ultra Weak Variational Formulation through Source Extraction," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 271, p. 295–306, 2014.
- [26] O. Cessenat e B. Després, "Using plane waves as base functions for solving time harmonic equations with the ultra weak variational formulation," *Journal of Computational Acoustics*, vol. 11, n° 2, pp. 227-238, 2003.

- [27] T. Huttunen, P. Monk, F. Collino e J. P. Kaipio, “The Ultra-Weak Variational Formulation for Elastic Wave Problems,” *Journal on Scientific Computing*, vol. 25, n^o 5, pp. 1717-1742, 2004.
- [28] T. Huttunen, J. P. Kaipio e P. Monk, “The perfectly matched layer for the ultra weak variational formulation of the 3D Helmholtz equation,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, n^o 7, p. 1072–1092, 2004.
- [29] T. Huttunen, J. P. Kaipio e P. Monk, “Acoustic modeling using Ultra Weak Variational Formulation,” *Baltic-Nordic Acoustics Meeting*, Junho 2004.
- [30] T. Huttunen, M. Malinen e P. Monk, “Solving Maxwell’s equations using the ultra weak variational formulation,” *Journal of Computational Physics*, n^o 223, p. 731–758, 2007.
- [31] A. Buffa e P. Monk, “Erros estimates for the Ultra Weak Variational Formulation of the Helmholtz equation,” *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 42, n^o 6, p. 925–940, November 2008.
- [32] N. Heuer e M. Karkulik, “A robust DPG method for singularly perturbed reaction-diffusion problems,” 24 September 2015. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1509.07560>. [Acesso em 15 July 2016].
- [33] L. Demkowicz e J. Gopalakrishnan, “A primal DPG Method without a first order reformulation,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, n^o 6, p. 1058–1064, 2013.
- [34] T. Führer e N. Heuer, “Robust coupling of DPG and BEM for a singularly perturbed transmission problem,” 16 March 2016. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1603.05164>. [Acesso em 05 August 2016].
- [35] T. Huttunen, E. T. Seppala, O. Kirkeby, A. Karkkainen e L. Karkkainen, “Simulation of the Transfer Function for a Head-and-Torso Model over the Entire Audible Frequency Range,” *Journal of Computational Acoustics*, vol. 15, n^o 4, pp. 429-448, December 2007.

- [36] T. Huttunen, M. Malinen, J. P. Kaipio, P. J. White e K. Hynynen, "A full-wave Helmholtz model for continuous-wave ultrasound transmission," *Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 52, n^o 3, March 2005.
- [37] J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *Journal of Computational Physics*, n^o 114, pp. 185-200, 1994.
- [38] W. Cai, *Computational Methods for Electromagnetic Phenomena: Electrostatics in Solvation, Scattering, and Electron Transport*, Cambridge University Press, 2013, p. 444.
- [39] L.-M. Imbert-Gerard e P. Monk, "Numerical simulation of wave propagation in inhomogeneous media using Generalized Plane Waves," 30 November 2015. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1511.08251>. [Acesso em 15 July 2016].
- [40] T. Führer, N. Heue e J. S. Gupta, "A time-stepping DPG scheme for the heat equation," 1 July 2016. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1607.00301>. [Acesso em 7 September 2016].
- [41] A. Lieu, G. Gabard e H. Bériot, "A comparison of high-order polynomial and wave-based methods for Helmholtz problems," *Journal of Computational Physics*, vol. 321, p. 105–125, 2016.
- [42] L.-M. Imbert-Gérard e B. Després, "A generalized plane-wave numerical method for smooth nonconstant coefficients," *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 34, n^o 3, pp. 1-32.
- [43] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, 1989.
- [44] D. K. Cheng, *Field and wave Electromagnetics*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1983.
- [45] W. E. Boyce e R. C. D. Prima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 6^a ed., LTC, 1997.

- [46] S. Dumont, O. Goubet, T. Ha-Duong e P. Villon, “Meshfree methods and boundary conditions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n° 66, pp. 989-1011, 2000.
- [47] J.-D. Benamou e B. Dèspres, “A domain decomposition method for the Helmholtz equation and related optimal control problems,” *Journal of Computational Physics*, n° 136, pp. 68-82, 1997.
- [48] B. V. Leer , J. L. Thomas, P. L. Roe e R. W. Newsome, “A comparison of Numerical Flux formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations,” *The American Institute of Aeronautics and Astronautics*, pp. 36-41, 1987.
- [49] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal & External Flows*, JohnWiley & Sons, 2007.
- [50] R. M. Kirby e G. E. Karniadakis, “Selecting the Numerical Flux in Discontinuous Galerkin Methods for Diffusion Problems,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 22 and 23, June 2005.
- [51] M. Zhang e C.-W. Shu, “An Analysis of Three Different Formulations of the Discontinuous Galerkin Method for Diffusion Equations,” *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 13, n° 3, pp. 395-413, March 2003.
- [52] B. Cockburn, G. E. Karniadakis e C.-W. Shu, “The development of discontinuous Galerkin methods,” *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 11, pp. 5-50, 2000.
- [53] J. W. Banks e W. D. Henshaw, “Upwind schemes for the wave equation in second-order form,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n° 17, pp. 5854-5889, July 2012.
- [54] R. Courant, E. Isaacson e M. Rees, “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, n° 3, p. 243–255, 1952.

- [55] R. Hiptmair, A. Moiola e I. Perugia, "Plane wave discontinuous Galerkin methods for the 2D Helmholtz equation: analysis of the p-version.," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 49, pp. 264-284, 2011.
- [56] H. Liu e J. Yan, "The Direct Discontinuous Galerkin (DDG) Methods for Diffusion Problems," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 47, pp. 675-698, 2008/2009.
- [57] J.-Y. Wu, D. M. Kingsland, J.-F. Lee e R. Lee, "A Comparison of Anisotropic PML to Berenger's PML and Its Application to the Finite-Element Method for EM Scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, n° 1, 1997.
- [58] W. C. Chew e W. H. Weedon, "A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell's Equations with Stretched Coordinates," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 7, n° 13, pp. 599-604, September 1994.
- [59] J. Jamali e H. Keivani , *Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure*, Vouliagmeni, Athens, 2006, pp. 309-312.
- [60] G. C. e J. F. Remacle, "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.," *International Journal for mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.*, vol. 79, n° 11, pp. 1309-1331, 2009.
- [61] M. A. Schweitzer, "Stable Enrichment and Local Preconditioning in the Particle-Partition of Unity Method," *Journal Numerische Mathematik*, vol. 118, n° 1, pp. 137-170, 2011.
- [62] T. Huttunen, J. P. Kaipio e P. Monk, "An ultra-weak method for acoustic fluid-solid interaction," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 213, pp. 166-185, 2008.
- [63] O. Laghrouche, P. Bettess e R. Sugimoto, *Analysis of the conditioning number of the plane wave approximation for the Helmholtz equation*, Barcelona: ECCOMAS, 2000.

- [64] A. Merabet e B. Necib, "Characterisation of Wings with NACA 0012 Airfoils," *Renewable Energies Journal*, pp. 131-137, 2003.
- [65] C. L. Ladson, C. W. Brooks e A. S. Hill, "Computer Program To Obtain Ordinates for NACA Airfoils," NASA Technical Memorandum 4741, Hampton, 1996.
- [66] J. D. Anderson, *Introduction to flight*, 6 ed., New York: MC-Graw Hill, 2013.
- [67] T. Luostari, T. Hurrunen e P. Monk, *The ultra weak variational formulation for 3D elastic wave problems*, Sydney, 2010.
- [68] J. Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics," John Wiley & sons, 1993.
- [69] E. Turkel e Y. A. Erlanggay, *Preconditioning a finite element solver of the exterior Helmholtz equation*, 2006.
- [70] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [71] O. Scherzer, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, vol. 1, Springer Science & Business Media, 2011, p. 455.
- [72] W. C. Chew e W. H. Weedon, "A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 7, n° 13, p. 599-604, 1994.
- [73] R. L. Higdon, "Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation," *Mathematics of Computation*, vol. 47, n° 176, pp. 437 - 459, 1986.
- [74] T. Huttunen e P. Monk, "The use of plane waves to approximate wave propagation in anisotropic media," *Journal of Computational Mathematics*, vol. 25, n° 3, p. 350-367, 2007.

- [75] D. Colton e P. Monk, "Herglotz Wave Functions in Inverse Electromagnetic Scattering Theory," *Topics in Computational Wave Propagation*, vol. 31, pp. 367-394, 2003.