

**Micro fabricação de placas óticas birrefringentes e suas
aplicações**

Larissa Vertchenko

2016



Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Programa de Pós Graduação em Física

Micro fabricação de placas óticas birrefringentes e suas aplicações

Larissa Vertchenko

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Monken

Dissertação apresentada ao departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Física

Área de Concentração: Ótica.

2016

Aos meus pais Lev e Bertoldina, minha avó Angélica e Guilherme

“Podemos facilmente perdoar uma criança que tem medo do escuro; a real tragédia da vida é quando os homens têm medo da luz.”

Platão

Agradecimentos

Ao meu orientador, Carlos Henrique Monken, pela excelente orientação ao longo destes cinco anos.

Ao professor Wagner Nunes Rodrigues, pela disposição em ajudar na fabricação das estruturas.

Ao professor Bernardo Ruegger, pela ajuda no laboratório de microscopia de varredura.

À minha mãe Bertoldina, pelo apoio, compreensão e amor.

À minha avó Angélica, pelo carinho e todas as velas queimadas.

Às minhas tias, tios e primos que participaram ativamente do meu processo de formação.

Às minhas amigas pelas horas de conversa.

Em memória dos meus avós Vera, Ilia e Otaviano .

À Universidade Técnica da Dinamarca e ao grupo de metamaterias, pelo suporte na fabricação das *q-plates*.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

À Guilherme, por me fazer voar.

E finalmente um agradecimento especial ao meu maior mestre, meu pai, Lev.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um método para fabricação e caracterização de elementos óticos, que apresentam estruturas periódicas nanométricas, criadas através da técnica de litografia por feixe de elétrons, resultando em uma anisotropia no índice de refração, chamada birrefringência de forma. O grau da birrefringência de forma pode ser controlado alterando-se parâmetros estruturais como espessura, profundidade e fator de preenchimento, proporcionando uma birrefringência mais forte do que a dos cristais naturais como o quartzo e a calcita.

Através do controle desses parâmetros, a escolha dos materiais e comprimento de onda para a fabricação de placas óticas conversoras de modos eletromagnéticos torna-se irrestrita. Denominadas *q-plates*, essas placas óticas foram inicialmente propostas e fabricadas por Marucci *et al.*, utilizando o processo de *micro-rubbing*, e preenchidas com cristal líquido, sendo capazes de demonstrar a conversão do momento angular da luz de spin em orbital. Usando um procedimento de nano fabricação, possibilitando o controle das dimensões e forma das ranhuras produzidas, no qual dióxido de titânio é precisamente depositado sobre a superfície de uma placa de vidro, foi construída uma nova versão de *q-plates* sem a necessidade do cristal líquido.

A caracterização dos elementos óticos fabricados foi feita analisando valores e perfis de intensidade obtidos em um interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico. Foi possível notar franjas com características peculiares, mostrando a helicidade das frentes de onda dos feixes gerados, de modo a serem observados ganho de fase e transferência de momento angular orbital.

Palavras-chave: Q-plates, momento angular orbital, cristal líquido, birrefringência de forma

Abstract

We present a method for the fabrication and characterization of optical elements with nanometric periodic structures. They were created using electron beam lithography, resulting in an anisotropy of the refractive index, called form birefringence. The level of form birefringence may be controlled by altering structural parameters, such as width, depth and filling factor, allowing a stronger birefringence than the one found in natural crystals like quartz and calcite.

Through the control of these parameters, the choice of the materials and wavelength for the fabrication of electromagnetic mode converters plates becomes unrestricted. Denominated *q-plates*, these optical plates were first proposed and fabricated by Marrucci *et al.*, using the process of micro-rubbing, and filled with liquid crystal, being able to demonstrate the spin-to-orbital angular momentum conversion. By using a nano fabrication procedure enabling the control of form and dimensions of the structures, in which titanium dioxide was precisely deposited on the surface of a glass plate, it was constructed a new version of *q-plates* without the necessity of liquid crystal.

The characterization of the optical elements fabricated was made analysing intensity values and profiles in an asymmetric Mach-Zehnder interferometer. It is possible to notice fringes with peculiar characteristics, showing the helicity of wave fronts of the generated beams, in a way to be observed phase gain and orbital angular momentum transfer.

Keywords: Q-plates, orbital angular momentum, liquid crystal, form birefringence

Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Lista de Figuras	VIII
Lista de Tabelas	IX
Acrônimos	X
1 Introdução	1
2 Birrefringência de forma e suas aplicações	5
2.1 Birrefringência	6
2.2 Placas de onda	13
2.3 Birrefringência de forma	17
2.4 Condição de não difração e singularidade de Rayleigh	19
3 Modos transversais eletromagnéticos e momento angular da luz	24
3.1 Ótica paraxial e modos transversais eletromagnéticos	25
3.2 Momento angular da luz	31
4 Q-plates	33
4.1 Q-plates de cristal líquido	34
4.2 Equação geral e fabricação de q-plates de cristal líquido	36
4.3 Conversão spin-orbital e caracterização	40
4.4 Fase generalizada	43

<i>SUMÁRIO</i>	IV
5 Fabricação e caracterização das placas de fase	49
5.1 Fabricação	50
5.2 Caracterização	56
5.3 Geração de segundo harmônico	61
6 Considerações finais	64
A Condição de difração	66
B Q-plate de fase generalizada	68
Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

2.1	Modelo de um elétron em uma rede cristalina ligado à molas de constantes elásticas diferentes.	7
2.2	Superfície do vetor de onda mostrando duas equações possíveis para cada plano. As setas vermelhas indicam a direção de polarização.	10
2.3	Superfície do vetor de onda para a) um uniaxial e b) biaxial. c , c_1 e c_2 representam as direções dos eixos óticos e as setas pretas as direções de polarização.	12
2.4	Fotografia de um pedaço de calcita. É possível observar uma duplicação da palavra calcita causada pela birrefringência.	12
2.5	Geometria de um cristal uniaxial, de espessura d , com o campo elétrico se propagando na direção z . α é o ângulo compreendido entre o vetor campo elétrico \mathbf{E} e o vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$	13
2.6	Conjunto de placas retangulares, de permissividade ε_1 , ordenadas paralelamente com período espacial Λ	17
2.7	Geometria de uma placa de fase com periodicidade nas direções x e y em um novo sistema de coordenadas não retangulares com os eixos x^1, x^2 e x^3 , onde x^1 e x^3 são paralelos aos eixos x e z respectivamente.	20
2.8	Geometria de uma placa de fase com periodicidade na direção x . O ângulo de incidência é dado por θ e o ângulo azimutal, por φ	22
3.1	Perfis de intensidade para modos Hermite-Gauss (à esquerda) e Laguerre-Gauss (à direita) com índice (nm) e (pl) respectivamente.	28
3.2	Perfis de frentes de onda plana a) e helicoidal b).(Fonte: imagem extraída do artigo " <i>Light with a twist in its tail</i> ", Miles Padgett & L. Allen, <i>Contemporary Physics</i> , 2000)	29

3.3	Frentes de onda helicoidais (à esquerda) e seus perfis de intensidade correspondentes de feixes Laguerre-Gauss com seus respectivos índices. (Fonte: imagem extraída do site Wikipédia https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AHelix_oam.png)	30
4.1	Perfis de frentes de onda helicoidais para diferentes valores de l . (Fonte: imagem extraída do artigo " <i>Light's twist</i> ", <i>Miles Padgett, Proc.R.Soc.A 2014</i>)	34
4.2	Geometria de uma q -plate com origem no centro da placa. A elipse representa uma molécula de cristal líquido orientada fazendo um ângulo α em relação ao eixo x . Quando $\phi = 0$, $\alpha(r, \phi) = \alpha_0$	37
4.3	Variação do vetor diretor em função do ângulo α em uma q -plate de cristal líquido. A curva pontilhada representa o arco de um círculo de raio r	38
4.4	Padrões de q -plates para valores de q iguais a $1/2$, 1 , 2 , 3 , $3/2$ e 4 respectivamente e $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$	39
4.5	q -plate de cristal líquido fabricada através do processo de <i>micro rubbing</i> . (Fonte: imagem extraída do projeto " <i>A Toolbox for Photon Orbital Angular Momentum Technology</i> ", http://cordis.europa.eu/docs/projects/cnect/4/255914/080/deliverables/001-D14novelqplates.pdf)	39
4.6	Efeito de uma q -plate com $q = 1$ para polarizações circulares esquerda (acima) e direita (abaixo). (Fonte: imagem extraída do site Wikipédia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AQ-plate.png)	41
4.7	Perfis de intensidade simulados computacionalmente da interferência de uma onda plana com modos Laguerre-Gauss de $l = 2$ e $l = -2$, respectivamente.	43
4.8	Interferômetro de Mach-Zehnder. No esquema M1 e M2 representam espelhos planos, PBS divisores de feixes polarizadores e $\frac{\lambda}{4}$ placas de um quarto de onda	44
4.9	À esquerda é ilustrada a superfície do vetor de onda no plano xy onde os círculos concêntricos representam a curva do índice ordinário o e as linhas pontilhadas a do índice extraordinário e . À direita são mostradas as orientações dos vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ em relação ao ângulo azimutal ϕ	45

5.1	Protótipo de uma <i>q-plate</i> com $q = 1$ e $\alpha_0 = \pi/2$. a) Imagem do modelo inteiro da placa. A coloração cinza representa a base de sílica e a amarela, as estruturas de dióxido de titânio (TiO_2). b) Vista de um corte transversal do modelo.	50
5.2	Esquema da montagem feita para combinação de duas <i>q-plates</i> com estruturas de dióxido de titânio (TiO_2) sobre uma base de dióxido de silício (SiO_2), que foram previamente seladas em uma estrutura de vidro e alumínio.	51
5.3	Fotografias obtidas de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) da máscara de silício.	52
5.4	Processo de fabricação das placas de fase. O significado das cores é indicado na legenda.	53
5.5	Fotografias obtidas de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) das estruturas de TiO_2	54
5.6	Fotografia retirada de um microscópio ótico.	54
5.7	Perfil feita pelo microscópio de força atômica, registrando um valor de 300 nm de altura.	54
5.8	Fotografia da base onde a placa de fase foi selada. É possível notar o pequeno ponto no centro da base, indicado pela seta vermelha, correspondendo às estruturas da <i>q-plate</i>	55
5.9	Montagem para caracterização da <i>q-plate</i> . Na imagem, L designa as lentes convergentes com distância focal de 10 cm e PBS um divisor de feixe polarizador. A imagem na CCD é uma simulação computacional do modo Laguerre-Gauss com $l = 2$	56
5.10	Perfil de intensidade do modo Laguerre-Gauss capturado pela CCD.	57
5.11	Gráfico da eficiência em função do comprimento de onda. Os pontos azuis indicam os dados experimentais e curva vermelha tracejada, o ajuste teórico.	58
5.12	Interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico com perfis de intensidade simulados computacionalmente, onde M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 representam espelhos e BS um divisor de feixe.	58
5.13	Foto do interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico montado sobre a mesa ótica.	59

5.14	Figura de interferência em forma de cruz simulada computacionalmente (à esquerda) e capturada pela CCD (à direita).	59
5.15	Sequência de fotos do perfil de interferência tiradas em tempos diferentes ao movermos um dos braços do interferômetro.	60
5.16	Perfil de intensidade do modo Laguerre-Gauss ao passar pelo cristal não linear.	61
5.17	Montagem do experimento para geração de segundo harmônico utilizado o feixe proveniente de uma <i>q-plate</i> onde os perfis de intensidade foram simulados computacionalmente. P denomina um prisma, BS um divisor de feixe, A um absorvedor, e $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ são espelhos.	62
5.18	Perfis de intensidade da interferência entre modos Laguerre-Gauss de $l = 4$ e $l = -4$, simulado computacionalmente (à esquerda) e capturado pela CCD (à direita).	63
5.19	Perfil de intensidade da interferência entre modos Laguerre-Gauss de $l = 6$ e $l = -6$, simulado computacionalmente (à esquerda) e capturado pela CCD (à direita).	63
A.1	Rede de difração retangular de altura h e período espacial Λ	66

Lista de Tabelas

2.1	Estados de polarização com seus respectivos vetores de Jones	15
2.2	Componentes óticos com suas respectivas matrizes de Jones	16

Acrônimos

LPCVD - Low Pressure Chemical Vapor Deposition

RIE - Reactive Ion Etching

EBL - Electron Beam Lithography

ASE - Advanced Silicon Etch

SEM - Scanning Electron Microscope

ALD - Atomic Layer Deposition

IBE - Ion Beam Etching

AFM - Atomic Force Microscope

Capítulo 1

Introdução

Os princípios físicos que regem os fenômenos óticos têm sido estudados por filósofos desde a Antiguidade. Os primeiros escritos dos quais se tem conhecimento, feitos de forma sistemática analisando a natureza da luz, foram apresentados pelos filósofos e matemáticos gregos [1] Empédocles (490-430 *a.c.*) e Euclides (300 *a.c.*), que utilizavam a ótica de raios para descrever o comportamento da luz, obtendo êxito principalmente com a lei da reflexão.

Séculos depois, René Descartes (1596-1650) [2] formula ideias sobre a natureza da luz introduzindo o conceito de éter, um meio perfeitamente elástico que preenche todo o espaço e no qual a luz se propaga. Porém, foi através da influência de Galileo Galilei (1564-1642) [3] e seus experimentos de mecânica, que o método experimental solidificou-se na ótica.

Em paralelo com os avanços sobre a ótica geométrica, a teoria ondulatória da luz teve seu início com Robert Hooke (1635-1703) [4], ao conjecturar que a luz consistia em pequenas vibrações que se propagavam simultaneamente. A primeira observação do fenômeno da interferência foi feita independentemente por Robert Boyle (1627-1691) [5] e R. Hooke, ao constatarem franjas circulares em filmes finos, os chamados anéis de Newton. Hooke também havia tentado justificar a existência das cores, mas foi Isaac Newton (1642-1727) [6], em 1666 que conseguiu demonstrar a relação entre cores e refração, através de experimentos

com prismas, afirmando que a cor é uma característica intrínseca da luz.

Em 1690, Christiaan Huygens (1629-1695) aperfeiçoou e estendeu as ideias de Hooke em seu trabalho “Tratado sobre a luz” [7], onde descreve o fenômeno da polarização e postula que cada ponto na frente de onda se comporta como uma nova fonte esférica puntual, e a sua interferência com frentes secundárias dá origem à propagação do feixe. Devido às dificuldades de se conectar a ótica de raios à ondulatória, Newton desenvolve a teoria corpuscular, na qual a luz seria composta de pequenas partículas. Apenas em 1801, Thomas Young (1773-1829), através de experimentos envolvendo fendas duplas [8] conseguiu que a teoria ondulatória fosse bem aceita. Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) [9], ao estudar o comportamento da luz, conseguiu incorporar fenômenos óticos à teoria ondulatória.

No entanto, ainda não havia sido descoberta uma conexão entre a ótica e o electromagnetismo. Foi somente em 1861 que James Clerk Maxwell (1831-1879) conseguiu unificar as duas teorias, ao mostrar que a luz poderia ser considerada uma onda eletromagnética [10]. Porém, mesmo sendo capaz de explicar fenômenos relacionados à propagação da luz, o electromagnetismo falha em elucidar espectros de emissão e absorção resultantes da interação entre matéria e luz. A investigação desses espectros e de como a luz deveria ser produzida nos átomos mostraram que a física clássica seria inadequada para descrever o que ocorre em escala atômica, fazendo-se necessária a teoria quântica, iniciada em 1900 por Max Planck (1858-1947) [11] ao introduzir a ideia do quanta de energia.

Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) [12] influenciado pela teoria corpuscular de Newton e pela descoberta do efeito fotoelétrico, observado em 1887 [13] por Heinrich Hertz (1857-1894), postula que os quanta de energia, propostos por Planck, seriam na verdade partículas de luz, chamados quanta de luz, posteriormente denominados fótons. Em 1923 outro efeito que reforçou ainda mais a natureza corpuscular da luz foi o espalhamento Compton, onde um fóton de raio X atinge uma partícula de um material alvo ocorrendo a transferência de momentum e conseqüentemente energia. Devido à conservação da energia, o fóton espalhado teria energia e comprimento de onda diferentes do incidente. Explicações mais detalhadas sobre peculiaridades conseqüentes das interações entre campos e matéria foram base para extensão da mecânica quântica e criação de outra área do conhecimento, a ótica quântica.

Posteriormente, John Henry Poynting (1852-1914) desenvolve cálculos mostrando que a luz seria capaz de carregar momento angular [14], mas tal afirmação só foi confirmada

em 1936 por Beth [15] em um experimento onde o torque sobre uma placa de quartzo era medido ao se incidir um feixe circularmente polarizado sobre ela. Depois da criação do laser em 1960, a necessidade de geração e manipulação da luz contribuiu para o surgimento de outra área do conhecimento, a fotônica.

Devido às suas inúmeras aplicações [16], a fotônica, assim como a ótica quântica são importantes e ativas linhas de pesquisa, tentando explicar as interações entre luz e matéria, e os fenômenos decorrentes dessas interações. Como exemplo podemos citar a birrefringência de forma, propriedade na qual a variação do índice de refração dos materiais é consequência, como o nome diz, da forma das estruturas que compõem o material. Atualmente, com o avanço tecnológico na área de fabricação de nanoestruturas, a birrefringência de forma vem sendo explorada para fabricação de placas de onda e conversores de modos transversais eletromagnéticos. A necessidade de que esses componentes possam operar com fontes de alta potência nas faixas do ultravioleta e do infravermelho faz da birrefringência de forma uma alternativa atraente, principalmente por não restringir a escolha dos materiais a serem utilizados como substratos onde as nanoestruturas serão formadas, diferentemente de placas que demandam cristais birrefringentes naturais como o quartzo e a calcita, ou cristais líquidos.

Uma categoria de elementos óticos que interagem e manipulam a luz utilizando a birrefringência de forma são as chamadas *q-plates*. As *q-plates* possuem a propriedade de transformar localmente o estado de polarização de uma frente de onda e alterar seu perfil espacial, sendo caracterizadas como conversores de modo eletromagnético. Essas placas apresentam ranhuras em sua superfície, e quando um feixe circularmente polarizado incide sobre elas, seu estado de polarização é alterado, convertendo o momento angular de spin em momento angular orbital. Como o feixe é sujeito a uma sequência de transformações em seu estado de polarização, ele adquire uma mudança de fase, sendo denominada fase de Pancharatnam-Berry [17]. Por esse motivo *q-plates* também representam elementos óticos denominados Pancharatnam-Berry Phase Optical Elements (PBOEs).

As primeiras *q-plates* foram fabricadas em 2006, por L. Marrucci *et al.* [18], utilizando processos de *micro rubbing*, em que um pedaço de veludo devidamente tratado atrita com uma placa de vidro recoberta por um polímero é colocado em movimento de rotação, produzindo um padrão circular. Posteriormente, as ranhuras são preenchidas com cristal líquido e a estrutura é selada com uma outra placa de vidro.

Neste trabalho discutiremos o fenômeno da birrefringência de forma, cujas características dispensam o uso do cristal líquido para conversão de modos eletromagnéticos. Para a fabricação dessas placas, foram utilizadas técnicas avançadas de micro e nano fabricação através de feixes de elétrons para gerarmos diferentes padrões de nano estruturas, visando a fabricação e caracterização das *q-plates*.

No capítulo 2 apresentamos a teoria envolvida por trás de cristais birrefringentes e introduziremos o conceito de birrefringência de forma. No capítulo 3 abordaremos conhecimentos fundamentais da ótica paraxial, momento angular orbital e momento angular de spin. A conexão entre esses dois últimos capítulos será feita no capítulo 4, onde mostraremos a teoria que descreve o funcionamento das *q-plates*. Ainda nesse capítulo serão discutidas técnicas baseadas em interferometria para verificação da confiabilidade e eficiência das placas. Posteriormente, no capítulo 5 apresentaremos uma nova técnica de fabricação das *q-plates* envolvendo formação de nanoestruturas periódicas geradas por processos de litografia de feixes de elétrons e a possibilidade de geração de segundo harmônico com os feixes convertidos. Finalmente no capítulo 6 apresentamos as considerações finais das ideias contidas nessa dissertação.

Capítulo 2

Birrefringência de forma e suas aplicações

A birrefringência pode ser definida como uma propriedade ótica presente em materiais nos quais o índice de refração depende da direção de propagação da luz e de sua polarização. Esse fenômeno foi descoberto no ano de 1669 pelo físico dinamarquês Rasmus Bartholin (1625-1698) ao observar como raios de luz passavam por um pedaço de calcita [19]. Porém, como ainda não existia a teoria ondulatória da luz, esse fenômeno não pôde ser devidamente explicado. Somente em 1818 [9], Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) conseguiu incorporar a birrefringência e outros fenômenos óticos à teoria ondulatória desenvolvida experimentalmente por Thomas Young no ano anterior.

A birrefringência tem grande importância no estudo da ótica de cristais e é usada principalmente para o design e fabricação de componentes óticos como *displays* de cristal líquido (LCDs), moduladores de luz, placas de onda, entre outros. Com a evolução tecnológica e a possibilidade de manipulação e construção de superfícies em escala nanométrica, outro fenômeno ótico envolvendo a dependência do índice de refração com a direção de polarização

da luz foi observado, a birrefringência de forma.

A birrefringência de forma é definida como uma anisotropia no índice de refração provocada pela forma, seja de materiais depositados em uma superfície como moléculas de cristal líquido ou estruturas na própria superfície, criadas artificialmente [20] através de processos de corrosão ou deposição. A principal condição para a existência desse fenômeno é a necessidade de que as estruturas sejam menores do que o comprimento de onda da luz utilizada para que não ocorra difração. Suas aplicações residem no fato de que por meio do controle da birrefringência por tratamento de superfície é possível fabricar elementos óticos, como placas de onda e conversores de modos eletromagnéticos denominados *q-plates*, utilizando-se qualquer material.

Atualmente placas de onda comerciais, *q-plates*, moduladores de luz e outros conversores de modos são fabricados com filmes compostos por polímeros, cristais líquidos e cristais birrefringentes naturais. Em muitos casos, a utilização desses dispositivos óticos é limitada pelo espectro de absorção dos materiais utilizados na sua fabricação, como por exemplo os cristais líquidos e polímeros, impedindo a sua operação com lasers de alta potência e no ultravioleta. Dessa maneira, a birrefringência de forma torna-se uma importante alternativa para fabricação desses componentes.

Neste capítulo descrevemos a teoria que explica o fenômeno da birrefringência e as condições necessárias para a ocorrência da birrefringência de forma.

2.1 Birrefringência

Nesta seção seguiremos a linha de raciocínio apresentada no livro "Introduction to modern optics", por Grant R. Fowles [21].

A polarização elétrica é um efeito originado quando existe um campo elétrico médio em um meio material, gerando pequenos momentos de dipolos em seus átomos, que se redirecionam de acordo com o campo elétrico. A densidade volumétrica¹ de dipolos é denominada polarização elétrica. Quando o índice de refração de um cristal depende da polarização e da direção de propagação da luz dizemos que ele é um cristal birrefringente ou de dupla refração. Isso significa que a polarização elétrica produzida por um campo elétrico não é simplesmente

¹Considerando elementos de volume muito maiores que os átomos, mas ainda assim pequenos o suficiente para justificar o conceito de densidade.

uma constante escalar multiplicada pelo campo incidente no cristal, fazendo-se necessário o uso de tensores. Um modelo que ilustra essa anisotropia da polarização presente nas redes cristalinas é mostrado na figura 2.1, onde um elétron sujeito a potenciais harmônicos pode ser representado por uma massa ligada à molas de diferentes constantes elásticas [21].

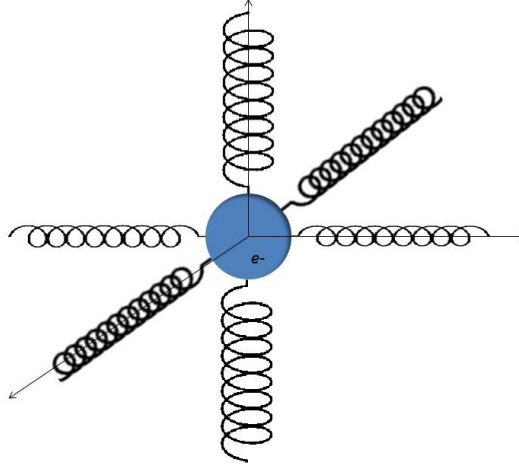


Figura 2.1: Modelo de um elétron em uma rede cristalina ligado à molas de constantes elásticas diferentes.

Para uma frequência fixa ω , a dependência entre a polarização \mathbf{P} com o campo elétrico \mathbf{E} é expressa na forma da relação tensorial

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde χ é o tensor susceptibilidade elétrica e ϵ_0 a constante de permissividade do vácuo. A equação 2.1 é geralmente escrita na forma

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Outra grandeza fundamental para a análise de cristais é o vetor deslocamento elétrico \mathbf{D} [22], dado pela equação

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (\mathbf{1} + \chi) \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade.

A partir do deslocamento elétrico definimos o tensor dielétrico

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0(\mathbf{1} + \boldsymbol{\chi}). \quad (2.4)$$

Na ótica do estado sólido, para materiais não magnéticos, ou seja, cuja permeabilidade magnética é constante $\mu = \mu_0$, e não absorventes, onde ϵ é real, as equações de Maxwell adquirem a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (2.8)$$

onde \mathbf{H} é o campo magnético e \mathbf{J} é a densidade de corrente elétrica. Fazendo o rotacional da equação 2.7 e substituindo o termo do campo magnético pela equação 2.8 obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Como não há a presença de correntes elétricas, $\mathbf{J} = 0$. Utilizando a equação 2.2 chegamos na expressão para a equação da onda generalizada

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \boldsymbol{\chi} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Para que essa equação tenha como solução uma onda plana monocromática da forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, o vetor de onda \mathbf{k} deve satisfazer a equação

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\chi} \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

que escrita em termos das componentes fica equivalente às seguintes equações

$$(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x, \quad (2.12)$$

$$k_y k_x E_x + (-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_y + k_y k_z E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y, \quad (2.13)$$

$$k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2})E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z. \quad (2.14)$$

Para qualquer direção de propagação do vetor de onda \mathbf{k} existem duas possibilidades para a sua magnitude k e para a velocidade de fase ($v = \omega/k$). Uma forma de mostrar tal propriedade é introduzindo-se os três principais índices de refração n_1 , n_2 e n_3 , definidos por

$$n_1 = \sqrt{1 + \chi_{11}}, \quad (2.15)$$

$$n_2 = \sqrt{1 + \chi_{22}}, \quad (2.16)$$

$$n_3 = \sqrt{1 + \chi_{33}}. \quad (2.17)$$

Colocando as equações 2.12, 2.13 e 2.14 na forma matricial, podemos achar uma solução não trivial para as componentes do campo elétrico através do cálculo do determinante

$$\begin{vmatrix} (\frac{n_1 \omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & (\frac{n_2 \omega}{c})^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (\frac{n_3 \omega}{c})^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.18)$$

O determinante acima pode ser simplificado na forma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_x^2}{n_2^2 n_3^2} + \frac{k_y^2}{n_1^2 n_3^2} + \frac{k_z^2}{n_1^2 n_2^2} \right) (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \\ & - \left[k_x^2 \left(\frac{1}{n_2^2} + \frac{1}{n_3^2} \right) + k_y^2 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_3^2} \right) + k_z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} \right) \right] \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^4}{c^4} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Essa equação representa uma superfície no espaço de vetor de onda, ilustrada na figura 2.2.

Quando $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ a equação 2.19 pode ser reescrita como

$$\frac{k_x^2}{k^2 - n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{k_y^2}{k^2 - n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}} + \frac{k_z^2}{k^2 - n_3^2 \frac{\omega^2}{c^2}} = 1. \quad (2.20)$$

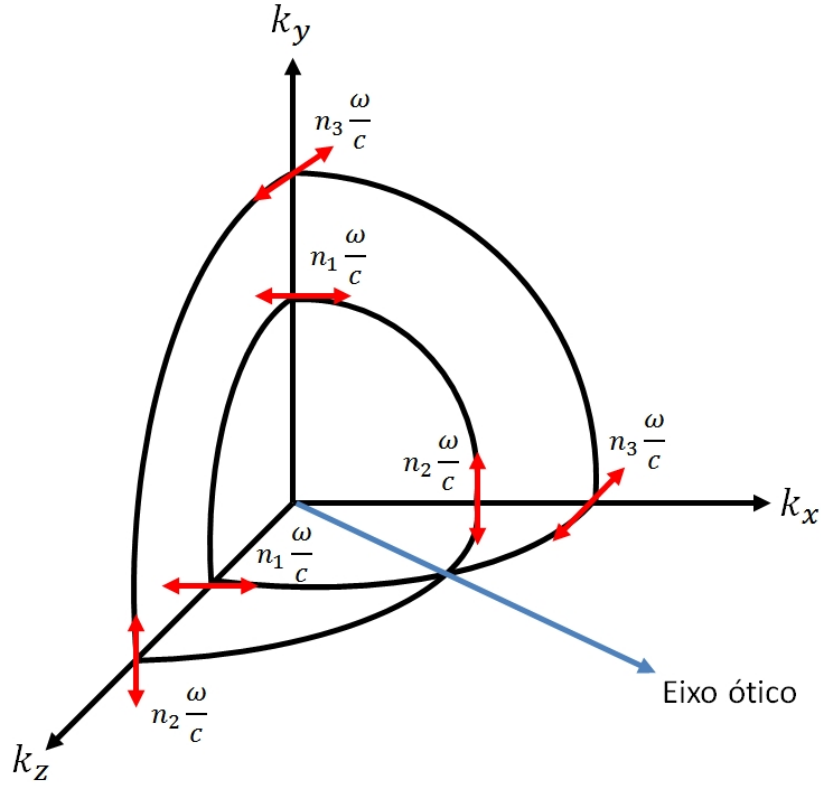


Figura 2.2: Superfície do vetor de onda mostrando duas equações possíveis para cada plano. As setas vermelhas indicam a direção de polarização.

A equação acima é denominada como equação generalizada de Fresnel para os vetores normais às frentes de onda.

Considerando o plano $k_x k_y$, quando $k_z = 0$ o determinante se reduz a

$$\left[\left(n_3 \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] \left\{ \left[\left(n_1 \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right] \left[\left(n_2 \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] - k_x^2 k_y^2 \right\} = 0, \quad (2.21)$$

cujas soluções são a equação de um círculo

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(n_3 \frac{\omega}{c} \right)^2, \quad (2.22)$$

e a equação de uma elipse

$$\frac{k_x^2}{(n_2 \omega/c)^2} + \frac{k_y^2}{(n_1 \omega/c)^2} = 1. \quad (2.23)$$

É possível fazer a mesma análise para a velocidade de fase, sabendo-se que ela se relaciona com o vetor de onda na forma

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \frac{\omega}{v^2}, \quad (2.24)$$

podendo ser escrita em termos das componentes como

$$k_x = v_x \frac{\omega}{v^2}, \quad (2.25)$$

$$k_y = v_y \frac{\omega}{v^2}, \quad (2.26)$$

$$k_z = v_z \frac{\omega}{v^2}. \quad (2.27)$$

Essas expressões podem ser substituídas no determinante anterior para encontrarmos a superfície de velocidade de fase.

Portanto, analisando as equações acima podemos perceber que para uma dada direção do vetor de onda \mathbf{k} existem dois pontos com valores distintos para a velocidade de fase e que nesses mesmos pontos a polarização é ortogonal entre eles. O ponto onde as duas superfícies se interceptam define o eixo ótico do cristal, significando que nessa direção os valores de k são iguais e conseqüentemente suas velocidades.

Quando um cristal possui todos os índices de refração diferentes ele apresentará dois eixos óticos sendo caracterizado como um cristal biaxial. Quando existem dois índices de refração iguais e um diferente, o cristal apresentará somente um eixo ótico, sendo denominado como cristal uniaxial. No caso em que os três índices de refração são iguais o cristal não exhibe birrefringência sendo considerado isotrópico.

As superfícies do vetor de onda para um cristal uniaxial e biaxial estão representadas na figura 2.3, onde c , c_1 e c_2 representam as direções dos eixos óticos.

É importante ressaltar as definições de índice ordinário e extraordinário no caso dos cristais uniaxiais. O índice ordinário n_o corresponde àquele que possui os mesmos valores dos elementos do tensor de susceptibilidade, e o outro índice cujo valor é diferente dos demais elementos é denominado como extraordinário, n_e . Quando $n_o < n_e$, dizemos que o cristal é positivo, enquanto que se $n_o > n_e$ o cristal será denominado negativo.

Um outro meio que possibilita identificar o tipo de cristal, entre os três padrões já citados, é através da estrutura cristalina. Cristais isotrópicos possuem geometria cúbica, os uniaxiais podem apresentar geometria trigonal, tetragonal ou hexagonal e os cristais biaxiais apresentam geometria triclínica, monoclínica ou ortorrômbica [23]. Esses tipos de estruturas são progressivamente menos simétricas, de forma que ao analisarmos o tensor χ , veremos que ocorre uma quebra de simetria afetando as propriedades do cristal. Exemplos de cristais

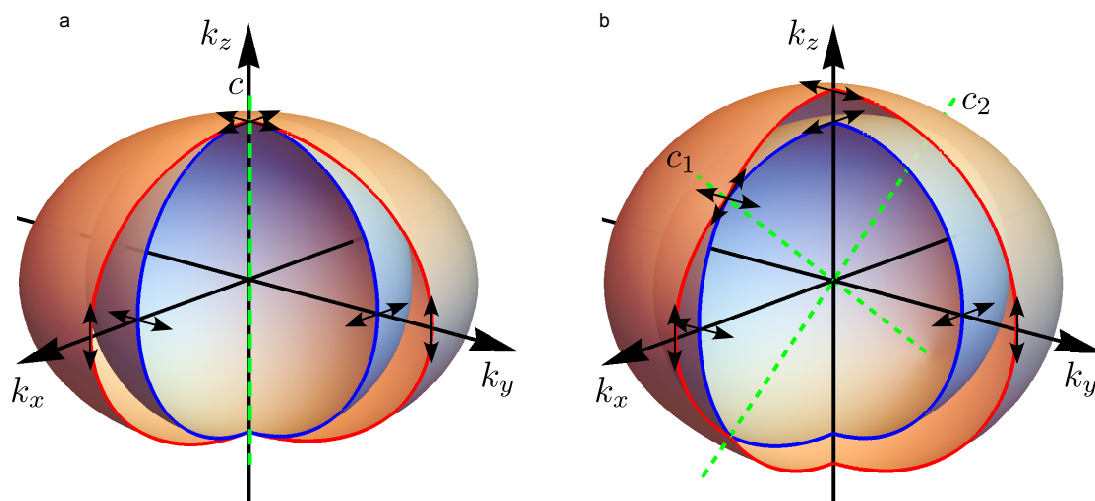


Figura 2.3: Superfície do vetor de onda para a) um uniaxial e b) biaxial. c , c_1 e c_2 representam as direções dos eixos óticos e as setas pretas as direções de polarização.

naturais birrefringentes são o quartzo e a calcita, mostrada na figura 2.4 . Na foto a palavra calcita foi escrita sobre o papel, mas devido ao efeito da birrefringência ela aparece com se tivesse sido duplicada.

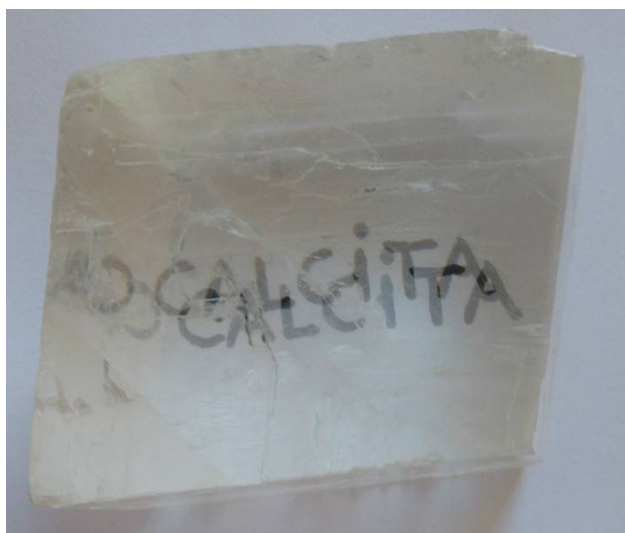


Figura 2.4: Fotografia de um pedaço de calcita. É possível observar uma duplicação da palavra calcita causada pela birrefringência.

2.2 Placas de onda

Uma aplicação importante da birrefringência são as placas de onda ou placas de fase, dispositivos óticos construídos a partir de materiais birrefringente capazes de alterar o estado de polarização da luz imprimindo uma fase nas frentes de onda. O comportamento das placas de onda está relacionado à sua espessura e ao comprimento de onda. Sendo assim é possível obter a diferença de fase desejada alterando-se esses parâmetros.

Considerando a geometria ilustrada na figura 2.5, podemos escrever o campo elétrico que entra no cristal uniaxial, de espessura d , da seguinte forma

$$\mathbf{E}_{in} = E_0 \hat{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.28)$$

onde \mathbf{k}' é o vetor de onda no cristal e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário na direção do campo elétrico, podendo ser decomposto em

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \text{sen} \alpha \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.29)$$

onde α é o ângulo compreendido entre o vetor campo elétrico \mathbf{E} e o vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$.

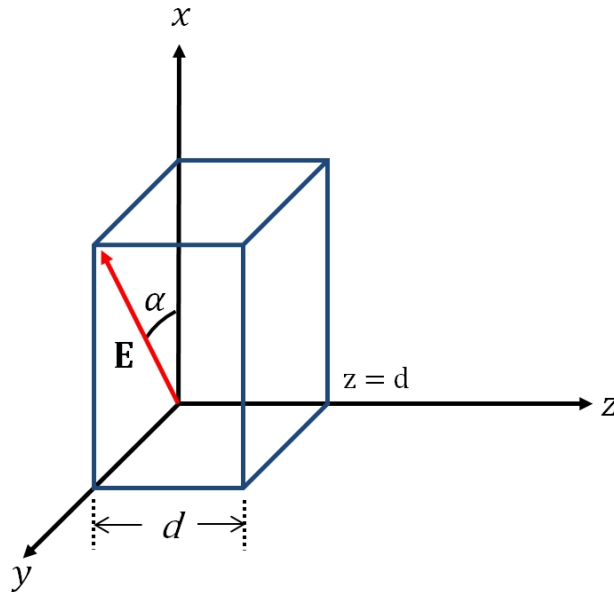


Figura 2.5: Geometria de um cristal uniaxial, de espessura d , com o campo elétrico se propagando na direção z . α é o ângulo compreendido entre o vetor campo elétrico \mathbf{E} e o vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$.

Podemos escrever os vetores de onda ordinário e extraordinário em relação aos índices de refração e do vetor de onda no vácuo \mathbf{k} da seguinte forma

$$k'_{e,o} = n_{e,o}k = n_{e,o}\frac{\omega}{c} \quad (2.30)$$

Considerando o eixo ordinário paralelo à direção de $\hat{\mathbf{x}}$ e o extraordinário paralelo à $\hat{\mathbf{y}}$, o campo elétrico dentro do cristal pode ser escrito em termo dos índices de refração como

$$\mathbf{E}_{crystal} = E_0(\cos \alpha e^{in_0kz}\hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\alpha e^{in_ekz}\hat{\mathbf{y}})e^{-i\omega t}. \quad (2.31)$$

Na saída do cristal $z = d$, e o campo elétrico é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{z=d} &= E_0(\cos \alpha e^{in_0kd}\hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\alpha e^{in_ekd}\hat{\mathbf{y}})e^{-i\omega t} \\ &= E_0e^{in_0kd}[\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\alpha e^{i(n_e-n_o)kd}\hat{\mathbf{y}}]e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Definindo o vetor unitário do campo elétrico na saída do cristal

$$\hat{\mathbf{n}}_{out} = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \text{sen}\alpha e^{i(n_e-n_o)kd}\hat{\mathbf{y}}, \quad (2.33)$$

após o cristal o campo elétrico passa a ser

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0e^{in_0kd}\hat{\mathbf{n}}_{out}e^{i[k(z-d)-\omega t]} \\ &= E_0\hat{\mathbf{n}}_{out}e^{i(n_o-1)kd} e^{i(kz-\omega t)} \\ &= E'\hat{\mathbf{n}}_{out}e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo a equação 2.29 na expressão encontrada para $\mathbf{E}(z, t)$ ficamos com

$$\mathbf{E}(z, t) = E' \cos \alpha e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{x}} + E' \text{sen}\alpha e^{i(n_e-n_o)kd} e^{i(kz-\omega t)}\hat{\mathbf{y}} \quad (2.35)$$

Sendo assim a diferença de fase entre as componentes x e y adquirida pela onda eletromagnética após atravessar o cristal é

$$\phi = (n_e - n_o)kd = (n_e - n_o)\frac{2\pi}{\lambda}d \quad (2.36)$$

Os tipos de placas mais conhecidos são as de um quarto de onda e de meia onda, capazes de imprimir uma diferença de fase entre as duas direções de polarização de $\pi/2$ e π respectivamente.

Utilizando o formalismo de Jones, que descreve elementos óticos e estados de polarização por matrizes e vetores, podemos ver o que acontece com um feixe de luz ao atravessar

uma placa de onda. Os vetores que representam estados de polarização são mostrados na tabela 2.1. Na tabela 2.2 estão inseridos alguns elementos óticos e suas matrizes de Jones correspondentes.

Tabela 2.1: Estados de polarização com seus respectivos vetores de Jones

Polarização	Vetor
Polarização linear horizontal	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Polarização linear vertical	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Polarização circular esquerda	$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
Polarização circular direita	$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Quando uma fonte com polarização horizontal incide sobre uma placa de um quarto de onda orientada a 45° , a onda transmitida terá polarização circular esquerda. O cálculo que leva a esse resultado é mostrado abaixo

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

No caso de uma placa de meio comprimento de onda, quando uma polarização linear orientada a 45 graus de um dos eixos atravessa a placa, a polarização é girada em um ângulo de 90 graus, transformando-se em polarização linear com orientação a -45 graus de um dos eixos.

Tabela 2.2: Componentes óticos com suas respectivas matrizes de Jones

Componente ótico	Matriz
Polarizador linear com eixo de transmissão na horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador linear com eixo de transmissão na vertical	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador linear com eixo de transmissão a $\pm 45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}$
Placa um quarto de onda com eixo rápido horizontal	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
Placa um quarto de onda com eixo rápido vertical	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
Placa um quarto de onda com eixo rápido a $\pm 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix}$
Placa de meia onda	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.3 Birrefringência de forma

A birrefringência de forma ocorre quando existe um arranjo ordenado de partículas ou estruturas, cujas dimensões são menores que o comprimento de onda da luz, formadas em um material ópticamente isotrópico [24]. Para entendermos o funcionamento da birrefringência de forma, vamos considerar o caso idealizado de um conjunto de objetos, ou nanoestruturas, com o formato de placas retangulares dispostas periodicamente, como mostra a figura 2.6.

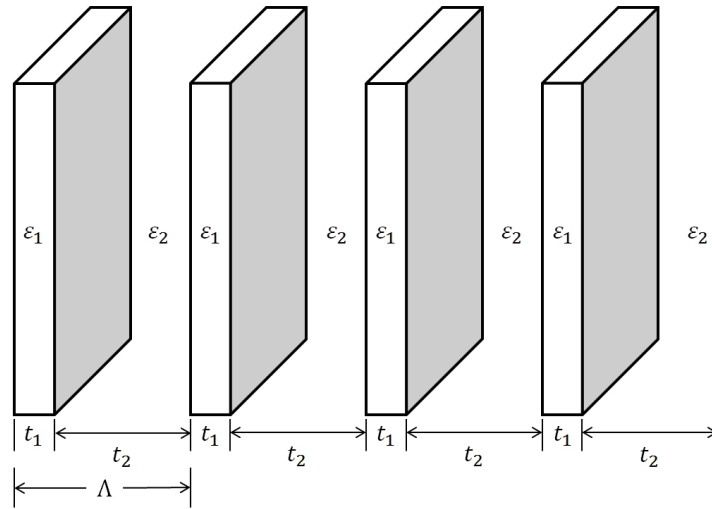


Figura 2.6: Conjunto de placas retangulares, de permissividade ε_1 , ordenadas paralelamente com período espacial Λ .

Cada placa possui espessura t_1 e constante dielétrica ε_1 . Os espaços entre as placas possuem comprimento t_2 e constante dielétrica ε_2 . Devido à periodicidade desse conjunto podemos estabelecer um período espacial Λ no qual a estrutura unitária, formada pela placa e pelo espaço ocupado pelo outro meio, se repete.

Primeiramente analisaremos o caso em que o campo elétrico está perpendicular às faces das placas. Assumindo que a área das faces das placas é grande em relação à t_1 e que t_1 e t_2 são muito menores que o comprimento de onda da luz, podemos afirmar que o campo elétrico entre as placas é uniforme. Quando as propriedades de um meio mudam abruptamente é necessário ver como os vetores \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{D} são afetados. A partir da Lei de Gauss, as condições de contorno determinam que os deslocamentos elétricos nos meios 1 e 2 são iguais, $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2$.

Sendo assim o deslocamento elétrico é contínuo através da superfície, possuindo o mesmo

valor dentro e fora das placas. Os campos elétricos correspondentes aos meios 1 e 2 são dados por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1} \quad (2.38)$$

e

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2}. \quad (2.39)$$

O campo elétrico médio calculado sobre todo o volume é [24]

$$\mathbf{E} = \frac{t_1 \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_1} + t_2 \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_2}}{t_1 + t_2}, \quad (2.40)$$

e constante dielétrica efetiva será

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{D_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{(t_1 + t_2)\varepsilon_1\varepsilon_2}{t_1\varepsilon_2 + t_2\varepsilon_1}. \quad (2.41)$$

Podemos colocar a equação 2.41 em função da fração do volume total ocupado pelas placas, esse número é chamado de fator de preenchimento f e é dado pela equação

$$f = \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{\Lambda} \quad (2.42)$$

A fração correspondente aos espaços do meio 2 será dada por $1 - f$. Então a constante dielétrica efetiva pode ser reescrita como

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{f\varepsilon_2 + (1 - f)\varepsilon_1}. \quad (2.43)$$

Para o caso em que o campo elétrico é paralelo às placas, as condições de contorno devidas à lei de Faraday determinam que os campos elétricos nos meios 1 e 2 são iguais, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$, portanto os deslocamentos elétricos correspondentes aos meio 1 e 2 são dados por

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}, \quad (2.44)$$

e

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}. \quad (2.45)$$

Consequentemente o deslocamento elétrico médio calculado sobre todo o volume é

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon_1 t_1 \mathbf{E} + \varepsilon_2 t_2 \mathbf{E}}{t_1 + t_2} \quad (2.46)$$

e a constante dielétrica efetiva é dada por

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{D_{\parallel}}{E_{\parallel}} = \frac{\varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2}{t_1 + t_2}. \quad (2.47)$$

Expressando a equação 2.47 em função do fator de preenchimento temos

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_1 f + \varepsilon_2(1 - f). \quad (2.48)$$

Podemos observar que esse sistema de placas se comporta de maneira semelhante à um cristal uniaxial, onde a constante dielétrica efetiva é a mesma para quaisquer direções do campo elétrico direcionado paralelamente às placas, sendo assim podemos associá-la ao índice de refração ordinário. Para o campo direcionado perpendicularmente às placas a constante dielétrica varia, podendo associá-la ao índice de refração extraordinário. As equações 2.41 e 2.47 escritas em termos dos índices de refração são

$$n_o^2 = n_1^2 f + n_2^2(1 - f) \quad (2.49)$$

$$n_e^2 = \frac{n_1^2 n_2^2}{f n_2^2 + (1 - f) n_1^2} \quad (2.50)$$

Quando a direção de incidência é perpendicular ao eixo ótico, a birrefringência máxima ocorre para [25]

$$\Delta n = |n_e - n_o|. \quad (2.51)$$

A diferença de fase entre os índices n_e e n_o na saída das placas será dada por

$$\phi = \Delta n \frac{2\pi}{\lambda} h \quad (2.52)$$

onde h representa o caminho ótico percorrido nas estruturas.

Desse modo, é possível controlar o ganho de fase alterando-se o valor da birrefringência de forma e da altura das estruturas. Esse resultado será a principal ferramenta para a fabricação das placas de fase utilizando-se a birrefringência de forma.

2.4 Condição de não difração e singularidade de Rayleigh

Como vimos na sessão anterior, a birrefringência de forma é dependente do período espacial Λ . Sendo assim, outra condição importante para que ela ocorra é que Λ seja menor que o comprimento de onda da luz λ [26], caso contrário apareceriam efeitos indesejados de

$$x^1 = \hat{x} - \hat{y} \operatorname{tg} \zeta \quad (2.53)$$

$$x^2 = \hat{y} \sec \zeta \quad (2.54)$$

$$x^3 = \hat{z} \quad (2.55)$$

Utilizando o método de série de Fourier, demonstrado no apêndice A, encontramos a condição de difração para as componentes do vetor de onda incidente \mathbf{k} dada por

$$k_{rm} = k_r + \frac{m2\pi}{\Lambda_r}, \quad (2.56)$$

onde r denota as componentes x, y e z , k_{rm} é a componente r do vetor de onda transmitido de ordem m , k_r é a componente do vetor de onda incidente, m um número inteiro que representa a ordem de difração e Λ_r o período espacial na direção r .

Escrevendo as componentes dos vetores de onda em função dos ângulos de incidência θ e azimutal φ , mostrados na figura 2.8, ficamos com

$$k_{xm} = \alpha_m = k \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \frac{m2\pi}{\Lambda_x}, \quad (2.57)$$

$$k_{yn} = \beta_n = k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\varphi + \zeta) + \frac{n2\pi}{\Lambda_y}, \quad (2.58)$$

$$k_{zmn} = \gamma_{mn} = k \cos \theta, \quad (2.59)$$

onde simplificamos a notação chamando de α_m a componente em x do vetor de onda, β_n a componente em y e γ_{mn} a componente em z .

No novo sistema de coordenadas, o vetor de onda transmitido, \mathbf{k}_{mn} , é

$$\mathbf{k}_{mn} = \alpha_m \mathbf{x}^1 + \beta_n \mathbf{x}^2 + \gamma_{mn} \mathbf{x}^3. \quad (2.60)$$

Escrevendo o vetor de onda em função do sistema de coordenadas x, y e z temos

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{mn} &= \alpha_m(\hat{x} - \hat{y} \operatorname{tg} \zeta) + \beta_n(\hat{y} \sec \zeta) + \gamma_{mn} \hat{z} \\ &= \alpha_m \hat{x} + (\beta_n \sec \zeta - \alpha_m \operatorname{tg} \zeta) \hat{y} + \gamma_{mn} \hat{z}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

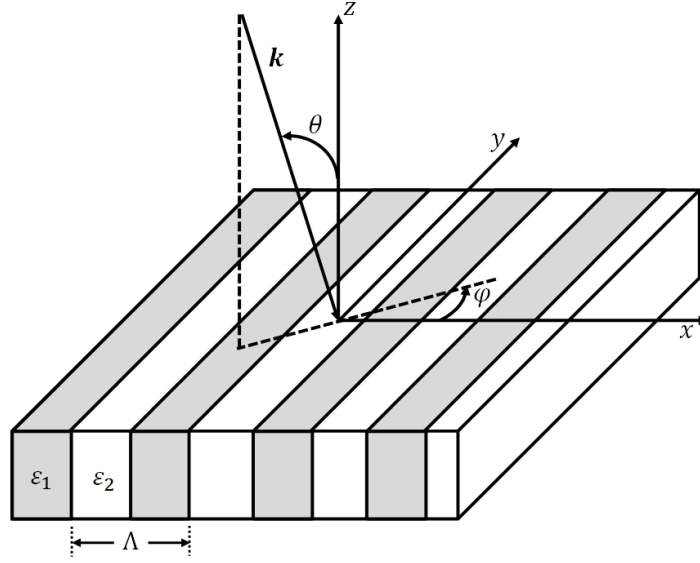


Figura 2.8: Geometria de uma placa de fase com periodicidade na direção x . O ângulo de incidência é dado por θ e o ângulo azimutal, por φ .

Utilizando a relação

$$k_{mn}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.62)$$

e substituindo as expressões das componentes do vetor de onda encontramos a expressão

$$\begin{aligned} k_{mn}^2 &= \alpha_m^2 + \beta_n^2 \sec^2 \zeta - 2\beta_n \alpha_m \sec \zeta \operatorname{tg} \zeta + \alpha_m^2 \operatorname{tg}^2 \zeta + \gamma_{mn}^2 \\ &= \alpha_m^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \zeta) + \sec^2 \zeta (\beta_n^2 - 2\beta_n \alpha_m \operatorname{sen} \zeta) + \gamma_{mn}^2 \\ &= \sec^2 \zeta (\alpha_m^2 + \beta_n^2 - 2\alpha_m \beta_n \operatorname{sen} \zeta) + \gamma_{mn}^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

A equação 2.63 é chamada de equação de dispersão de Rayleigh e mostra como o vetor de onda transmitido em uma rede de difração varia com os ângulos de incidência, azimutal e o ângulo da estrutura cristalina ζ .

Neste trabalho é de interesse a análise de uma rede de difração com estruturas retangulares que são periódicas somente em uma direção, como está ilustrado na figura 2.8. Nesse caso $\zeta = 0$ e a equação de dispersão será simplificada em

$$k_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2 + \gamma_{mn}^2. \quad (2.64)$$

A condição para que ocorra uma singularidade de Rayleigh é que a componente normal do vetor de onda γ_{mn} seja zero [29], resultando em

$$k_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2. \quad (2.65)$$

Como não existe periodicidade na direção y , as componentes do vetor de onda em função de θ e φ são

$$\alpha_m = k \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \frac{m2\pi}{\Lambda}, \quad (2.66)$$

$$\beta_n = k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi. \quad (2.67)$$

Substituindo as expressões de α_m e β_n na equação 2.65 ficamos com

$$k_{mn}^2 = \left(k \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \frac{m2\pi}{\Lambda}\right)^2 + (k \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^2 \quad (2.68)$$

$$k \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \frac{m2\pi}{\Lambda} = \sqrt{k_{mn}^2 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi}. \quad (2.69)$$

Em termos dos índices de refração dos meios 1 e 2, os vetores de onda k e k_{mn} assumem a forma

$$k = n_2 k_0, \quad (2.70)$$

$$k_{mn} = n_1 k_0, \quad (2.71)$$

onde k_0 é o vetor de onda no vácuo dado por $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Ecrevendo a equação 2.69 em relação aos índices de refração obtemos a expressão

$$n_2 k_0 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \frac{m2\pi}{\Lambda} = \sqrt{(n_1 k_0)^2 - (n_2 k_0)^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi} \quad (2.72)$$

Colocando k_0 em evidencia em ambos os lados da equação 2.72 e sabendo que a difração ocorre para $m \geq 1$, definimos como valor limite objetivando extinguir as ordens de difração, $m = 1$. Dessa forma, encontramos a seguinte equação de dispersão de Rayleigh para que não aconteça difração

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \geq -n_2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi}. \quad (2.73)$$

Quando a incidência é normal, $\theta = 0$, e a equação 2.73 representa a condição para o período máximo que as estruturas podem possuir, dado por

$$\Lambda_{\max} = \frac{\lambda}{n_1}, \quad (2.74)$$

onde n_1 é o índice de refração do substrato. Através dessa fórmula, podemos calcular a espessura necessária para conseguirmos a birrefringência de forma sem que ocorram efeitos de difração.

Capítulo 3

Modos transversais eletromagnéticos e momento angular da luz

As equações de Maxwell, propostas em 1863 [22], tem papel crucial para o entendimento das leis que regem fenômenos eletromagnéticos. Com auxílio dessa equações, James Clerk Maxwell (1831-1879) [30] deduziu a equação da onda, conseguindo unificar a ótica e o eletromagnetismo ao constatar que a luz deveria ser considerada uma onda eletromagnética. As soluções da equação da onda em regime paraxial são denominadas como modos transversais eletromagnéticos (TEM) e são de grande interesse na ótica quântica.

Em 1909 John Henry Poynting (1852-1914) [14] demonstrou quantitativamente que um campo eletromagnético seria capaz de possuir momento angular. Poynting argumentou que uma onda circularmente polarizada deveria carregar momento angular, e que esse momento poderia ser medido ao incidir-se uma luz linearmente polarizada sobre placas de um quarto de onda, induzindo a rotação das placas, que seria provocada pela transferência de momento angular. A verificação experimental do torque exercido por uma luz polarizada sobre uma placa de material birrefringente foi conseguida em 1936 por R. Beth [15].

Através de observações mais cuidadosas envolvendo a interação entre a luz e partículas, C. Darwin [31] concluiu, em 1932, que o momento angular provocado pela polarização não seria suficiente para explicar o movimento em forma de órbita realizado pelas partículas ao se incidir uma luz circularmente polarizada cuja posição estaria deslocada em relação ao centro dessas partículas. Em consequência dessa descoberta, surge a definição do momento angular orbital da luz. Em 1992, Allen *et al.* [32] descrevem o momento angular orbital como uma propriedade natural de ondas eletromagnéticas, proveniente da forma helicoidal das frentes de onda.

Nesse capítulo daremos ênfase aos modos transversais eletromagnéticos (TEM) e à capacidade dos modos Laguerre-Gauss de carregarem momento angular orbital.

3.1 Ótica paraxial e modos transversais eletromagnéticos

Em um meio homogêneo sem a presença de cargas ou correntes, é fácil mostrar que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (3.1)$$

Uma equação análoga é encontrada para o campo magnético. Essa equação diferencial é conhecida como equação da onda vetorial do campo elétrico, cuja velocidade de propagação é dada por $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Suas soluções são capazes de apresentar os perfis transversais desse campo. A equação vetorial da onda pode ser separada nas componentes dos campos elétrico e magnético, resultando em uma equação da onda escalar, que pode ser útil ao lidarmos com polarizações.

Para fazermos uma análise da equação da onda consistente com o que observamos no laboratório de ótica, utilizaremos uma fonte de luz monocromática de frequência ω e um feixe colimado, tal que ele seja pouco divergente. Sendo assim, a divergência do feixe é pequena o suficiente para adotarmos a aproximação paraxial.

Como solução inicial da equação da onda consideraremos os campos elétrico e magnético, propagando-se na direção z , em sua forma complexa dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^{(+)*}(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{B}^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{B}^{(+)*}(\mathbf{r})e^{i\omega t}}{2}, \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{ikz}\mathbf{e}. \quad (3.4)$$

A equação para $\mathbf{B}^{(+)}(\mathbf{r})$ é análoga à de $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$. Nessa notação, o asterisco representa o complexo conjugado, $u(\mathbf{r})$ indica a amplitude da onda propagante e \mathbf{e} é o vetor que indica o estado de polarização. Substituindo a equação (3.2) na equação de onda para o campo elétrico (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] \\ + \nabla^2 \left[e^{i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r})^* \right] - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[e^{i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r})^* \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Selecionando a parte da equação que representa o campo se propagando na direção positiva de z chegamos na relação

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} u(\mathbf{r}) e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (3.6)$$

Como a expressão do número de onda k é

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (3.7)$$

encontramos a equação de Helmholtz para o campo elétrico [33]

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) e^{ikz} + k^2 u(\mathbf{r}) e^{ikz} = 0. \quad (3.8)$$

No regime paraxial $u(\mathbf{r})$ varia lentamente com z , de forma que podemos adotar a aproximação $\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$. Sendo assim, desenvolvendo o Laplaciano na equação de Helmholtz (3.8) temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] + k^2 u(\mathbf{r}) e^{ikz} = 0 \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[e^{-i(\omega t - kz)} u(\mathbf{r}) \right] + e^{-i\omega t} \left(2ik e^{ikz} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} + e^{ikz} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.10)$$

Devido à aproximação paraxial é possível desprezar o termo $\frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial z^2}$, mostrando que $u(\mathbf{r})$ satisfaz a equação paraxial

$$\nabla_{\perp}^2 u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (3.11)$$

onde ∇_{\perp}^2 representa o Laplaciano atuando somente nas coordenadas transversais (x, y) .

As soluções dessa equação equivalem aos modos transversais eletromagnéticos (TEM), e dependem da geometria utilizada no sistema. A solução de menor ordem, em coordenadas cartesianas, representa o modo gaussiano e é dada por [34]

$$u_0(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (3.12)$$

onde $w(z)$ é a função

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (3.13)$$

tal que w_0 é o ponto onde o raio do feixe é mínimo. Esse ponto é designado como cintura do feixe. z_R é o comprimento de Rayleigh, que representa a distância a partir da cintura na qual o feixe aumenta seu raio por um fator de $\sqrt{2}$. Esse parâmetro é dado pela função

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (3.14)$$

$R(z)$ é o raio de curvatura do feixe, dado por

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right), \quad (3.15)$$

e finalmente, o termo $\arctan(z/z_R)$ é conhecido como fase de Gouy.

Os modos de ordem superior em coordenadas cartesianas são denominados modos Hermite-Gauss e são dados pela expressão

$$u_{m,n}(x, y, z) = \frac{A_{mn}}{w(z)} H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \times \exp \left[ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right] e^{-i\phi_{mn}(z)}, \quad (3.16)$$

onde $A_{m,n}$ é um fator de normalização, H_m é o polinômio de Hermite de ordem m e ϕ_{mn} é a fase de Gouy, agora dada por

$$\phi_{mn}(z) = i(m + n + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (3.17)$$

Em coordenadas cilíndricas, a solução da equação paraxial para ordens superiores é representada pelos modos transversais Laguerre-Gauss, através da expressão

$$u_p^l(\rho, \phi, z) = \frac{A_p^l}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right]^{|l|} L_p^{|l|} \left[\frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{w(z)^2} \right] \times \exp \left[ik \frac{\rho^2}{2R(z)} \right] e^{il\phi} e^{-i\phi_{pl}(z)}, \quad (3.18)$$

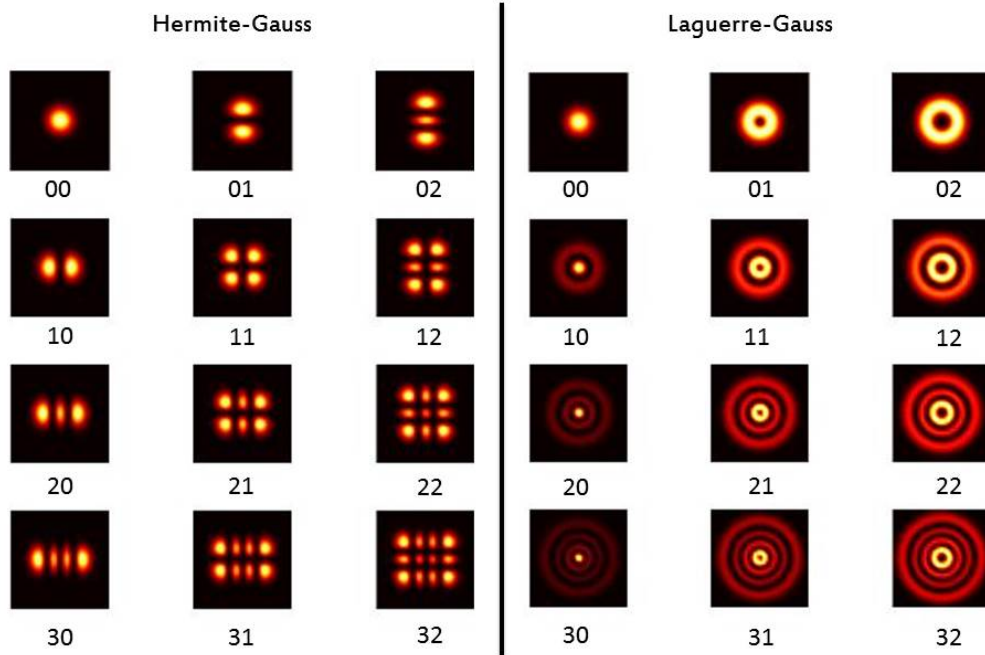


Figura 3.1: Perfis de intensidade para modos Hermite-Gauss (à esquerda) e Laguerre-Gauss (à direita) com índice (nm) e (pl) respectivamente.

onde A_p^l é um fator de normalização, p representa o índice radial, l o índice azimutal e $L_p^{|l|}$ são os polinômios de Laguerre. Nesse caso a fase de Gouy é dada por

$$\phi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (3.19)$$

Na figura 3.1 mostramos os perfis de intensidade para os feixes Hermite-Gauss (nm) e Laguerre-Gauss (pl) .

Podemos observar a presença do termo $e^{il\phi}$ na equação dos modos Laguerre-Gauss (3.18). Para $l = 0$ o feixe apresenta uma frente de onda esférica, que para regiões muito próximas ao eixo de propagação (z) pode ser aproximada por uma onda plana. Quando $l \neq 0$, a frente de onda passa a ser helicoidal [35], como é ilustrado na figura 3.2 [36]. Isso sugere que o feixe carrega momento angular orbital com valor proporcional a l . Em 1992, L. Allen *et al.* [32] demonstram matematicamente que o autovalor do momento angular orbital é dado por $l\hbar$ por fóton.

Os modos Laguerre-Gauss são de enorme interesse por carregarem momento angular orbital. Isso significa que suas frentes de onda apresentam uma configuração espacial na

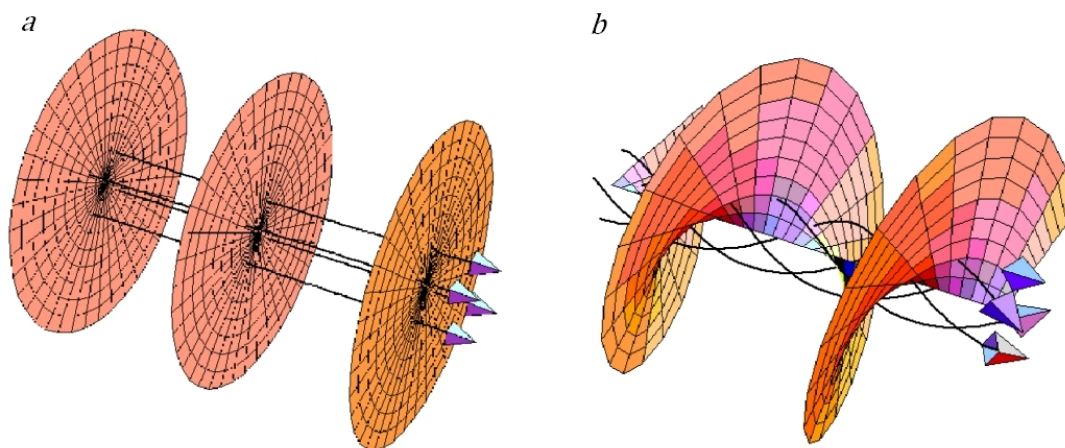


Figura 3.2: Perfis de frentes de onda plana a) e helicoidal b). (Fonte: imagem extraída do artigo "*Light with a twist in its tail*", Miles Padgett & L. Allen, *Contemporary Physics*, 2000)

forma de hélice, como está ilustrado na figura 3.3 [37]. Esses modos são capazes de formar uma base infinita no espaço de Hilbert, apresentando grandes aplicações para a ótica quântica [38].

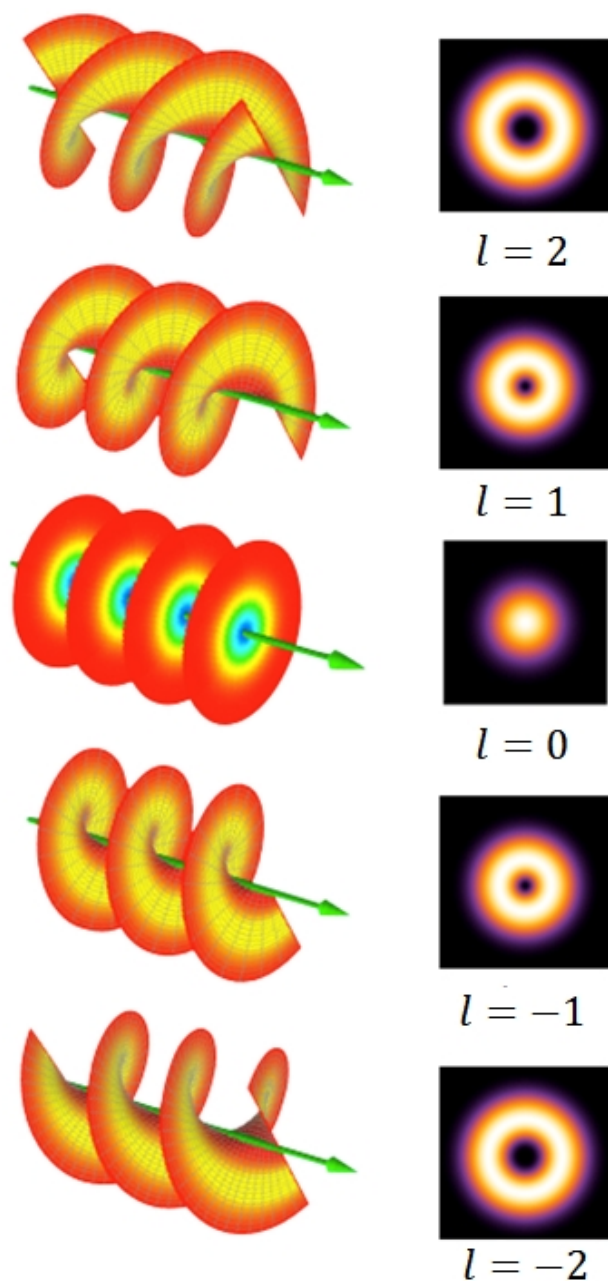


Figura 3.3: Frentes de onda helicoidais (à esquerda) e seus perfis de intensidade correspondentes de feixes Laguerre-Gauss com seus respectivos índices. (Fonte: imagem extraída do site Wikipédia https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AHelix_oam.png)

3.2 Momento angular da luz

Nesta sessão abordaremos os conceitos de momento angular orbital e momento angular de spin da luz. A distinção entre os dois tipos de momentos angulares, spin e orbital, surgiu no ano de 1932 por C. Darwin mas foi matematicamente formulada em 1992 com S. J. van Enk e G. Nienhuis [39].

Para discutirmos sobre o momento angular da luz começaremos com as expressões para as densidades dos momentos linear e angular, propostos pela teoria eletromagnética [40], dados respectivamente por

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 (\mathbf{r} \times \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (3.21)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição. Sendo assim, as equações dos momentos totais serão

$$\mathbf{P} = \int d^3r \mathbf{p}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{J} = \int d^3r \mathbf{j} = \int d^3r (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (3.23)$$

Usando as expressões dos campos das Eqs. 3.2 e 3.3 e substituindo-as na equação de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) ficamos com

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{i\omega \mathbf{B}^{(+)} e^{-i\omega t} - i\omega \mathbf{B}^{(+)*} e^{i\omega t}}{2}, \quad (3.24)$$

tal que,

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(+)} = i\omega \mathbf{B}^{(+)} \quad (3.25)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(+)*} = -i\omega \mathbf{B}^{(+)*}. \quad (3.26)$$

Substituindo $\mathbf{B}^{(+)}$ e $\mathbf{B}^{(+)*}$ nas expressões dos momentos linear e angular (3.22, 3.23) temos

$$\mathbf{P} = \int d^3r \epsilon_0 \left\{ \left(\frac{\mathbf{E}^{(+)} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^{(+)*} e^{i\omega t}}{2} \right) \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}^{(+)} e^{-i\omega t} - \nabla \times \mathbf{E}^{(+)*} e^{i\omega t}}{2i\omega} \right) \right\}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{P} = Re \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int d^3r \mathbf{E}^{(+)*} \times (\nabla \times \mathbf{E}^{(+)}, \quad (3.28)$$

e

$$\mathbf{J} = Re \left[\frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int d^3r \mathbf{r} \times \left[\mathbf{E}^{(+)*} \times (\nabla \times \mathbf{E}^{(+)}) \right] \right]. \quad (3.29)$$

Integrando por partes as equações dos momentos totais, encontramos para os campos, que se anulam rapidamente quando $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, as expressões [41]

$$\mathbf{P} = \text{Re} \left[\frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int d^3r \sum_{j=x,y,z} E_j^{(+)*} \nabla E_j^{(+)} \right], \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & \text{Re} \left[\frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int d^3r \sum_{j=x,y,z} E_j^{(+)*} (\mathbf{r} \times \nabla) E_j^{(+)} \right] \\ & + \text{Re} \left[\frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int d^3r \mathbf{E}^{(+)*} \times \mathbf{E}^{(+)} \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir das equações (3.30) e (3.31), podemos perceber que o momento angular total se divide em duas expressões, sendo a primeira equivalente ao momento angular orbital (OAM) e a segunda ao momento angular de spin (SAM). É importante salientar que como partimos da equação de Faraday para substituímos o campo magnético, o potencial vetor não aparece nas equações dos momentos linear e angular totais. Porém, caso tivéssemos substituído \mathbf{B} usando a relação $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, onde \mathbf{A} é o potencial vetor, encontraríamos uma expressão equivalente para o momento angular dada por [42]

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int d^3r \sum_{j=x,y,z} E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j + \epsilon_0 \int d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (3.32)$$

Como visto na seção anterior, o momento angular orbital está relacionado com a configuração espacial do feixe, cuja helicidade é relacionada ao índice l e depende do ponto de referência considerado. Cada fóton carrega um momento angular orbital de $l\hbar$. Já o momento angular de spin, é relacionado à polarização circular ou elíptica apresentada pelo feixe e independe de qualquer referencial. No caso da polarização circular, cada fóton carrega um momento angular de spin equivalente à $\pm\hbar$, dependendo do sentido de rotação.

Existem duas outras definições do momento angular que são usualmente interpretadas erroneamente, os momentos angulares intrínseco e extrínseco. O momento angular intrínseco corresponde às componentes do momento angular total que são invariantes às mudanças de referencial, e o momento angular extrínseco é aquele no qual variações ocorrem ao se mudar o referencial. Sendo assim, o momento angular intrínseco não precisa ser necessariamente o momento angular de spin, podendo conter componentes do momento angular orbital [35].

Capítulo 4

Q-plates

As *q-plates* são uma categoria de componentes óticos capazes de gerar modos eletromagnéticos transversais Laguerre-Gaussianos, através de um processo de conversão do momento angular de spin em momento angular orbital [43]. Em nível quântico, essas placas são capazes de produzir estados emaranhados envolvendo a polarização e o momento angular orbital. Essa transformação só é possível com uma placa de fase que possui birrefringência cuja orientação do eixo ótico é dependente da posição em relação à placa. Inicialmente as *q-plates* foram fabricadas com uma mistura de cristal líquido que imprimia o grau de birrefringência necessário para determinado comprimento de onda. No entanto, dispondo do fenômeno da birrefringência de forma, torna-se possível a construção de *q-plates* sem a necessidade do cristal líquido.

Neste capítulo abordaremos o mecanismo da conversão de modos transversais eletromagnéticos produzidos pelas *q-plates* e o método experimental para caracterização das placas de fase utilizando técnicas interferométricas. Posteriormente, apresentaremos cálculos gerais capazes de caracterizar qualquer placa de fase.

4.1 Q-plates de cristal líquido

Como foi mencionado no capítulo anterior, os modos eletromagnéticos Laguerre-Gauss são capazes de apresentar momento angular orbital, definindo uma helicidade nas frentes de onda. Em contrapartida o momento angular de spin, também presente nesses modos, é caracterizado pelas polarizações circular ou elíptica. Sabe-se que quando uma fonte de luz, que carrega momento angular, incide em uma molécula de cristal líquido, haverá transferência de momento e conseqüentemente a molécula sofrerá uma rotação. A ideia inicial por trás das *q-plates*, proposta em 2006 por Lorenzo Marrucci et al. [18] consiste na possibilidade de se realizar o caminho contrário, ou seja, moléculas de cristal líquido também apresentariam a capacidade de girar a luz.

Adotando o sistema de coordenadas cilíndricas r, ϕ, z , com o feixe se propagando em z , a expressão genérica para o campo elétrico, em regime paraxial, de uma onda helicoidal é

$$\mathbf{E}(r, \phi, z, t) = \mathbf{E}_0(r, z)e^{il\phi}e^{i(kz-\omega t)}, \quad (4.1)$$

onde λ é o comprimento de onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω é a frequência angular, e l é um número inteiro que caracteriza o grau e sinal da helicidade. Quando um feixe apresenta uma frente de onda helicoidal, ele carrega um momento angular orbital de $l\hbar$ por fóton [44]. Na figura 4.1 são mostrados perfis de frentes de onda para diferentes valores de l .

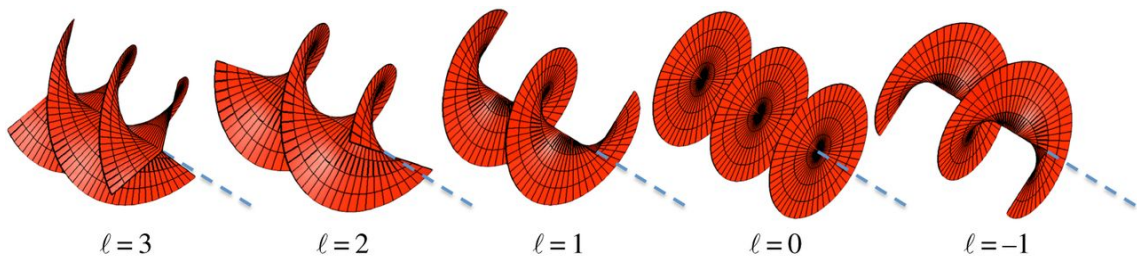


Figura 4.1: Perfis de frentes de onda helicoidais para diferentes valores de l . (Fonte: imagem extraída do artigo "*Light's twist*", Miles Padgett, *Proc.R.Soc.A* 2014)

Para a análise das placas vamos considerar uma mistura de cristal líquido capaz de imprimir uma fase de $\delta = \pi$ no feixe incidente, atuando como uma placa de meia onda. A direção de orientação das moléculas de cristal líquido pode ser definida por um vetor diretor \mathbf{n} , tal que $\mathbf{n}(x, y) = \mathbf{n}(r, \phi)$. Definimos α como sendo o ângulo entre o vetor diretor \mathbf{n} e a

direção do eixo de referência x . Para analisarmos o efeito dessa nova categoria de placas de fase sobre o campo elétrico podemos adotar o formalismo de Jones.

A matriz de Jones que representa uma placa de meia onda cujo eixo de transmissão forma um ângulo α com o eixo x é dada por

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(-\alpha)\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{2}}\mathbf{R}(\alpha), \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{R}(\alpha)$ é a matriz de Jones de rotação

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e $\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{2}}$ é a matriz de Jones de uma placa de meia onda

$$\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dessa forma a matriz \mathbf{M} que representa a placa de fase preenchida com cristal líquido atuando em cada ponto do plano xy é

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha(x, y) & -\text{sen} \alpha(x, y) \\ \text{sen} \alpha(x, y) & \cos \alpha(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha(x, y) & \text{sen} \alpha(x, y) \\ -\text{sen} \alpha(x, y) & \cos \alpha(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha(x, y) & \text{sen} 2\alpha(x, y) \\ \text{sen} 2\alpha(x, y) & -\cos 2\alpha(x, y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando uma onda incidente plana circularmente polarizada dada pelo vetor

$$\mathbf{E}_{in}(x, y) = \mathbf{E}_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

o campo elétrico resultante da interação entre a q -plate e o campo elétrico de entrada é

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out}(x, y) &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{in}(x, y) \\ &= \mathbf{E}_0 \begin{bmatrix} \cos 2\alpha(x, y) & \text{sen} 2\alpha(x, y) \\ \text{sen} 2\alpha(x, y) & -\cos 2\alpha(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_0 \begin{bmatrix} \cos 2\alpha(x, y) \pm i \text{sen} 2\alpha(x, y) \\ \text{sen} 2\alpha(x, y) \mp i \cos \alpha(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_0 e^{\pm i 2\alpha(x, y)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir dessa equação, podemos observar que o campo elétrico na saída da placa teve seu sentido de polarização invertido, o que é esperado por se tratar de uma placa de meia onda. Além disso ele adquiriu um fator de fase não uniforme dependente de x e y na forma

$$\Delta\phi(x, y) = \pm 2\alpha(x, y). \quad (4.8)$$

Esse resultado mostra que a fase depende do ângulo do vetor diretor \mathbf{n} e portanto, da orientação das moléculas de cristal líquido em relação ao eixo de coordenadas adotado. Dependendo do padrão formado pelas moléculas de cristal líquido, é possível encontrar diferentes fatores de fase que proporcionam uma modulação nas frentes de onda.

4.2 Equação geral e fabricação de q-plates de cristal líquido

Antes de analisarmos o termo responsável pela modulação nas frentes de onda, demonstraremos a equação que rege o padrão que deve ser formado pelas moléculas de cristal líquido objetivando alcançar os resultados desejados para determinadas frentes de onda. Considerando a geometria da figura 4.2, definimos o ângulo $\alpha(r, \phi)$ como

$$\alpha(r, \phi) = \alpha_0 + q\phi, \quad (4.9)$$

onde α_0 e q são as constantes responsáveis pela orientação das moléculas de cristal líquido. É possível notar que quando $r = 0$, ϕ e a fase $\Delta\phi$ se tornam indefinidos, havendo uma descontinuidade no centro do padrão.

Para encontrarmos as expressões que descrevem os padrões formados pelas moléculas em função das coordenadas r e ϕ do padrão formado por várias moléculas de cristal líquido distribuídas na superfície de uma q -plate, devemos analisar como o vetor diretor varia com o ângulo azimutal ϕ ao efetuarmos uma rotação de 2π . Do centro da molécula de cristal líquido, que corresponde à origem do vetor diretor \mathbf{n} , até a sua extremidade, o ângulo ϕ sofre uma variação infinitesimal de $d\phi$, como consequência existe uma diferença de $d\mathbf{r}$ entre o vetor posição \mathbf{r} desses dois pontos, como está ilustrado na figura 4.3.

Utilizando a aproximação de ângulos pequenos encontramos a relação entre dr e $d\phi$, dada por

$$\frac{dr}{rd\phi} = \operatorname{tg}\theta. \quad (4.10)$$

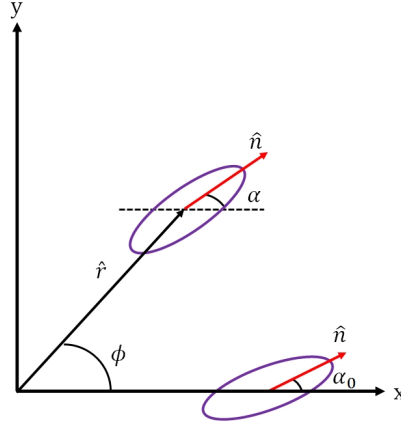


Figura 4.2: Geometria de uma q -plate com origem no centro da placa. A elipse representa uma molécula de cristal líquido orientada fazendo um ângulo α em relação ao eixo x . Quando $\phi = 0$, $\alpha(r, \phi) = \alpha_0$

Analisando a figura 4.3 podemos definir θ como

$$\theta = \phi + \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (4.11)$$

Substituindo θ na equação 4.10 temos

$$\frac{dr}{rd\phi} = \text{tg}\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot(\phi - \alpha), \quad (4.12)$$

$$\frac{dr}{r} = -\cot(\phi - \alpha)d\phi. \quad (4.13)$$

Integrando ambos os lados da equação acima e substituindo α pela equação 4.9 ficamos com

$$\begin{aligned} \ln \frac{r}{r_0} &= \frac{1}{(q-1)} \left(\frac{\text{sen}[(q-1)\phi + \alpha_0]}{\text{sen}[(q-1)\phi_0 + \alpha_0]} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\text{sen}[(q-1)\phi + \alpha_0]}{\text{sen}[(q-1)\phi_0 + \alpha_0]} \right)^{\frac{1}{(q-1)}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, a equação que rege os padrões que indicam a orientação das moléculas definem as q -plates é

$$r = r_0 \left(\frac{\text{sen}[(q-1)\phi + \alpha_0]}{\text{sen}[(q-1)\phi_0 + \alpha_0]} \right)^{\frac{1}{(q-1)}}, \quad (4.15)$$

onde r_0 é uma constante que representa a posição inicial em relação a origem e ϕ_0 um ângulo inicial. Na figura 4.4 apresentamos os padrões de q -plates para $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ e q igual a $1/2$, 1 , 2 , $3/2$, 3 e 4 .

No caso das q -plates de cristal líquido, as linhas da figura 4.4 representam a tangente do vetor diretor \mathbf{n} , ou seja, elas indicam a orientação das moléculas. A primeira q -plate

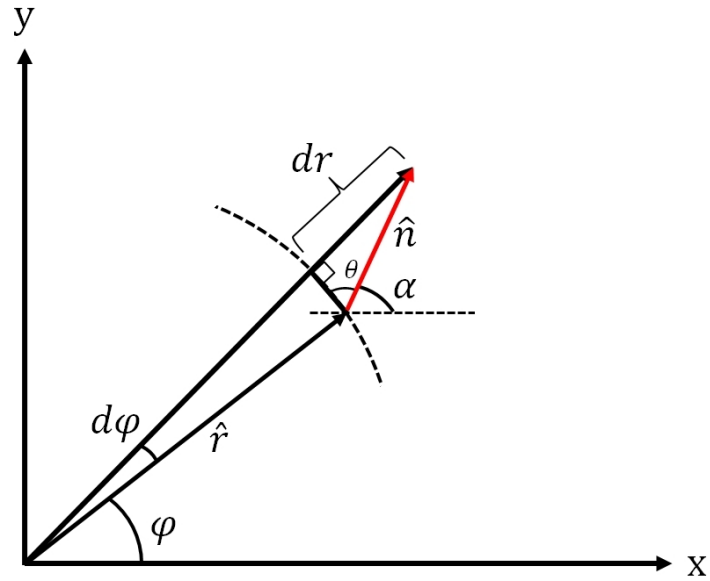


Figura 4.3: Variação do vetor diretor em função do ângulo α em uma q -plate de cristal líquido. A curva pontilhada representa o arco de um círculo de raio r .

fabricada [18] utilizava o padrão circular, equivalente a $q = 1$ e $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$. Para conseguir que as moléculas de cristal líquido tivessem essa disposição, foi utilizado o processo de *micro rubbing*, que consiste em pressionar um pedaço de veludo contra o substrato, no caso o vidro, coberto por um polímero e rotacioná-lo de forma a gerar ranhuras circulares. Em seguida, essas ranhuras são preenchidas com uma mistura de cristal líquido, que tem sua temperatura controlada de forma a se obter um retardamento de $\frac{\lambda}{2}$. Como resultado as moléculas se alinham dentro das ranhuras formando o padrão desejado. Na figura 4.5 apresentamos a imagem de uma q -plate fabricada com cristal líquido [45]. Esse procedimento pode parecer simples, mas apresenta limitações quando se pretende a formação de diferentes padrões. Além disso, como mencionado anteriormente o cristal líquido não suporta fontes de alta potência e nem alguns comprimentos de onda, como o ultravioleta.

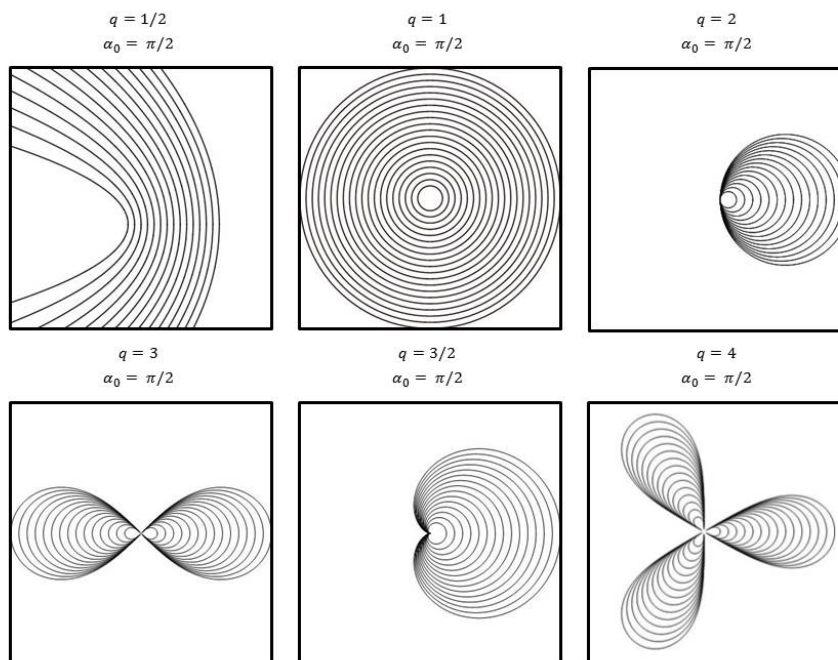


Figura 4.4: Padrões de q -plates para valores de q iguais a $1/2$, 1 , 2 , 3 , $3/2$ e 4 respectivamente e $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$.

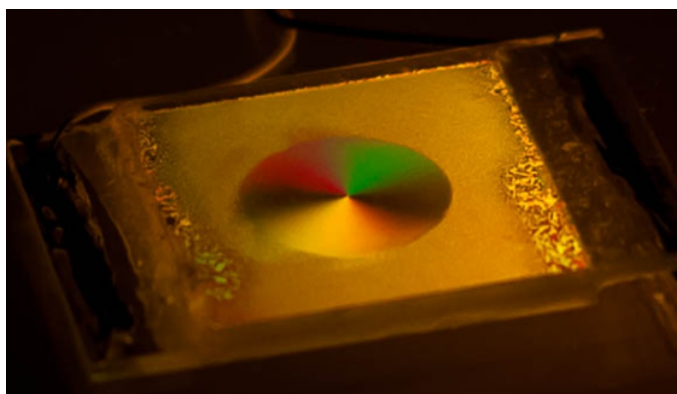


Figura 4.5: q -plate de cristal líquido fabricada através do processo de *micro rubbing*. (Fonte: imagem extraída do projeto "*A Toolbox for Photon Orbital Angular Momentum Technology*", <http://cordis.europa.eu/docs/projects/cnect/4/255914/080/deliverables/001-D14novelqplates.pdf>)

4.3 Conversão spin-orbital e caracterização

Através das equações do campo elétrico resultante e da geometria das moléculas de cristal líquido, podemos analisar a modulação sofrida pelas frentes de onda ao serem transmitidas por uma *q-plate*. Como foi visto na seção 4.1, o campo elétrico na saída da placa adquire um fator de fase que é dependente de α . Substituindo a expressão 4.9 na equação do campo elétrico 4.7 obtemos

$$\mathbf{E}_{out}(x, y) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i 2q\phi} e^{\pm i 2\alpha_0} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Comparando a expressão acima com a equação do campo elétrico generalizado, 4.1, observamos que a frente de onda adquiriu uma helicidade correspondente a

$$l = \pm 2q, \quad (4.17)$$

onde o sinal da helicidade é controlado pelo sinal da polarização de entrada.

Para explicarmos esse fenômeno vamos considerar um único fóton incidente sobre uma *q-plate*, com polarização circular esquerda e frente de onda plana. Assumiremos que a *q-plate* é capaz de imprimir uma fase de $\delta = \pi$ como determinado anteriormente. Sendo assim, o momento angular de spin desse fóton é $+\hbar$ e o momento angular orbital é 0, resultando em um momento angular total de $+\hbar$. Na saída da placa, a polarização sofreu o efeito de uma placa de meia onda transformando-se em circular direita com momento angular de spin igual a $-\hbar$, e adquiriu uma frente de onda helicoidal com $l = 2q$, cujo momento angular orbital corresponde a $2q\hbar$. Então o momento angular total na saída é dado por

$$L_{out} = (2q - 1)\hbar, \quad (4.18)$$

e a variação do momento angular total é

$$\Delta L = (2q - 1)\hbar - \hbar = 2(q - 1)\hbar. \quad (4.19)$$

Como o momento angular total deve ser conservado, essa variação ocasiona um torque sobre o meio. No caso especial de $q = 1$ o momento angular total não é alterado de modo que não ocorra torque. Entretanto os valores dos momentos angulares de spin e orbital variam de forma que o de spin passa de $+\hbar$ a $-\hbar$ e o orbital de 0 a $2\hbar$, gerando o modo Laguerre-Gauss de $l = 2$. Esse fenômeno, ilustrado na figura 4.6 [46], no qual o momento

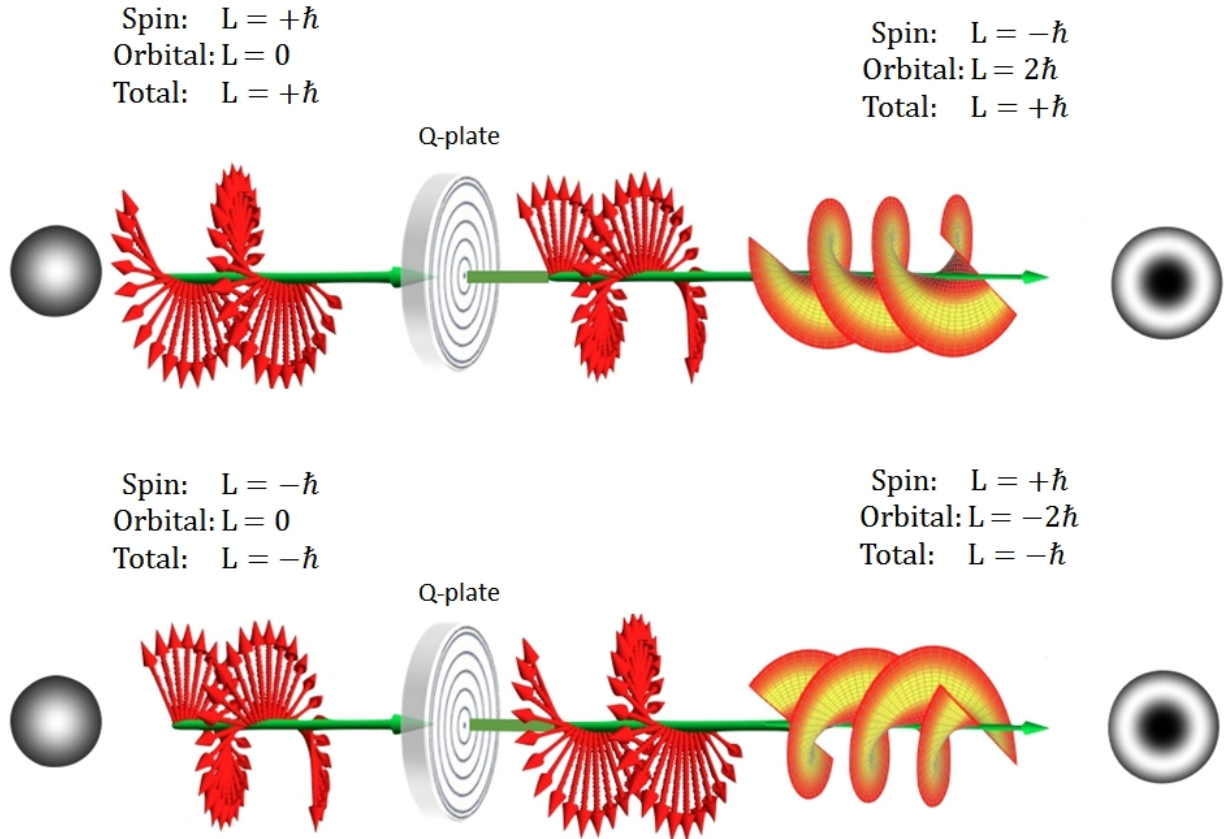


Figura 4.6: Efeito de uma q -plate com $q = 1$ para polarizações circulares esquerda (acima) e direita (abaixo). (Fonte: imagem extraída do site Wikipédia, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AQ-plate.png>)

angular da luz muda sua natureza ao interagir com o meio mas fica inteiramente no campo ótico é denominado como conversão de momento angular de spin em orbital.

É importante retratar o que acontece quando a q -plate possui um retardo arbitrário δ . Nesse caso, a matriz de Jones \mathbf{M} será substituída por

$$\mathbf{M}(x, y) = \cos \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + i \sin \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} \cos 2\alpha(x, y) & \sin 2\alpha(x, y) \\ \sin 2\alpha(x, y) & -\cos 2\alpha(x, y) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Ao incidirmos um campo elétrico dado pela equação 4.6 sobre essa q -plate, o campo elétrico resultante será

$$\mathbf{E}_{out}(x, y) = E_0 \cos \frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} + i E_0 \sin \frac{\delta}{2} e^{\pm i 2q\phi} e^{\pm i 2\alpha_0} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Podemos observar que essa expressão é composta por um termo que possui a mesma polarização circular do feixe incidente e um outro termo com polarização circular reversa

que sofreu a ação da *q-plate* e adquiriu frente de onda helicoidal. Dessa forma o feixe resultante é uma superposição de uma onda plana com uma onda helicoidal que carrega momento angular orbital. As amplitudes relativas entre esses termos são determinadas pelo valor de δ .

Em uma linguagem mais próxima da mecânica quântica, é possível escrevermos a atuação das *q-plates* utilizando a notação de Dirac. No caso das *q-plates* que possuem $\delta = \pi$, a transformação induzida no fóton é

$$|\Psi\rangle_{in} = |\pm 1, l\rangle \xrightarrow{q\text{-plate}} |\Psi\rangle_{out} = e^{\pm i\alpha_0} |\mp 1, l \pm 2q\rangle, \quad (4.22)$$

onde o primeiro termo dos kets indica o momento angular de spin e o segundo termo o momento angular orbital em unidades de \hbar . Para o caso de $\delta \neq \pi$ essa transformação pode ser escrita como

$$|\Psi\rangle_{in} = |\pm 1, l\rangle \xrightarrow{q\text{-plate}} |\Psi\rangle_{out} = \cos \frac{\delta}{2} |\pm 1, l\rangle + i \sin \frac{\delta}{2} e^{\pm i\alpha_0} |\mp 1, l \pm 2q\rangle, \quad (4.23)$$

mostrando que o estado final do fóton é uma superposição de um fóton que não foi modificado com um fóton que sofreu conversão.

Experimentalmente, encontrar o perfil de intensidade desejado não é suficiente para garantir que a frente de onda tornou-se helicoidal. A verificação do fator de fase responsável pela conversão de uma frente de onda plana em uma helicoidal se dá através de experimentos de interferometria. Quando uma frente de onda plana interfere com uma frente de onda helicoidal, são formadas franjas com perfis de intensidade como os mostrados, através de simulação computacional, na figura 4.7.

Utilizando o interferômetro de Mach-Zehnder, ilustrado na figura 4.8, o feixe que incide sobre a *q-plate* é circularmente polarizado e ao atravessá-la adquire uma frente de onda helicoidal, enquanto o feixe do outro braço é mantido com polarização linear e frente de onda plana. Após passar pela *q-plate*, outra placa de um quarto de onda e um polarizador são posicionados com a finalidade de bloquear a polarização circular que não foi convertida pela placa de fase. Finalmente, os feixes dos dois braços são recombinados nos divisores de feixe polarizadores gerando o padrão de interferência entre uma onda plana e uma helicoidal com $l = 2$, que posteriormente é capturado por uma CCD.

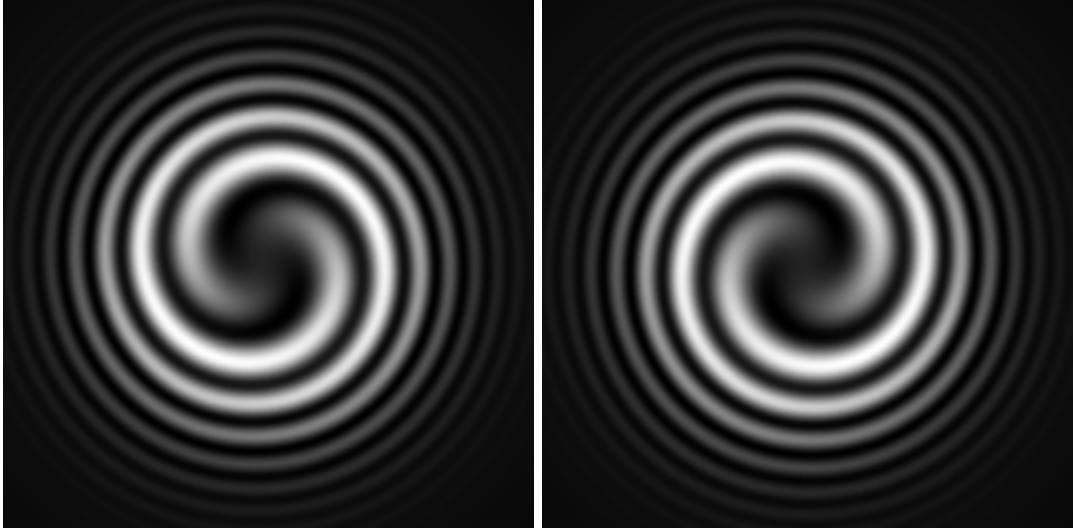


Figura 4.7: Perfis de intensidade simulados computacionalmente da interferência de uma onda plana com modos Laguerre-Gauss de $l = 2$ e $l = -2$, respectivamente.

4.4 Fase generalizada

Na seção anterior vimos a teoria que rege o funcionamento das *q-plates* de cristal líquido e analisamos o caso especial onde a placa imprime uma fase de π sobre o campo. Nesta seção abordaremos o efeito de uma *q-plate* sem cristal líquido, fabricada de maneira a implementar o conceito de birrefringência de forma. Ao invés de moléculas, consideraremos estruturas cuja altura seja variável visando alterar a fase e mostraremos os cálculos para analisarmos o que acontece com uma onda ao incidir em uma placa que induz uma fase arbitrária δ na frente de onda.

Analisando a superfície do vetor de onda de um cristal birrefringente uniaxial, mostrado anteriormente na figura 2.2, podemos reproduzir no plano $k_x k_y$ como a polarização varia ao longo das curvas que representam os índices de refração extraordinário e ordinário. Considerando o padrão de *q-plates* com $q = 1$ e utilizando a geometria da figura 4.9 definimos o vetor unitário $\hat{\theta}$ como sendo o vetor correspondente à polarização extraordinária e o vetor unitário $\hat{\phi}$ o da polarização ordinária. Dessa forma podemos perceber que o eixo rápido da placa de fase varia localmente.

Considerando uma onda plana se propagando na direção z , entrando na placa de fase, podemos fazer a decomposição do campo em relação a $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$

$$\mathbf{E}_i = E_{ix}\hat{x} + E_{iy}\hat{y} = E_{ix}(\hat{x} \cdot \hat{\theta} + \hat{x} \cdot \hat{\phi}) + E_{iy}(\hat{y} \cdot \hat{\theta} + \hat{y} \cdot \hat{\phi}) \quad (4.24)$$

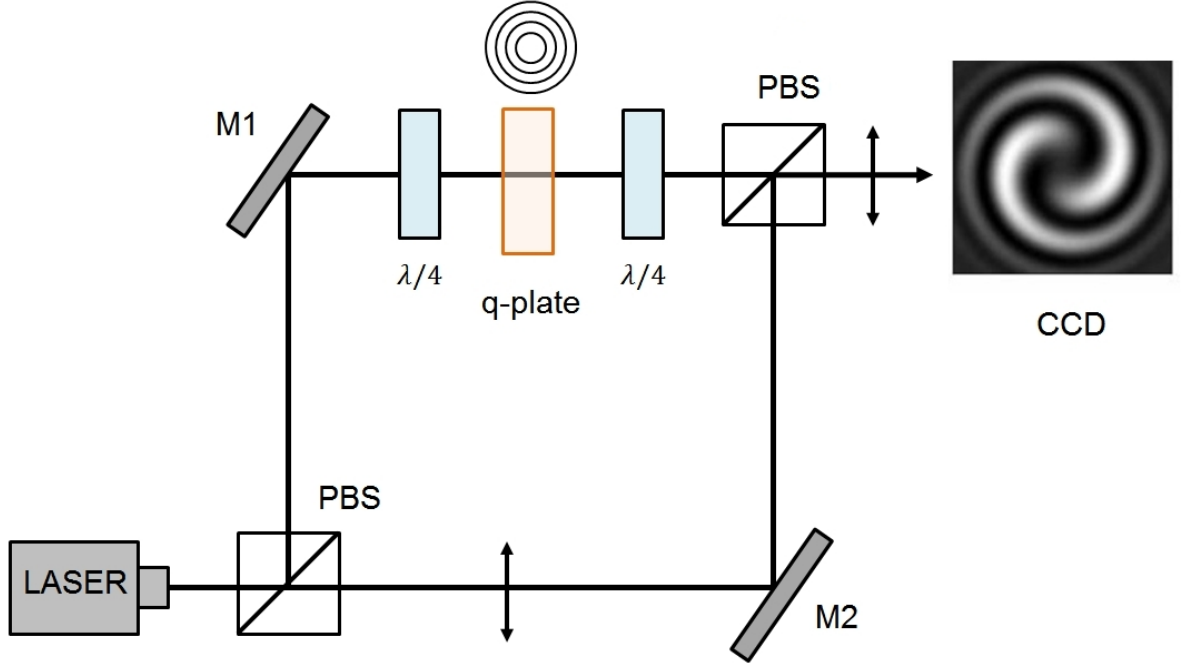


Figura 4.8: Interferômetro de Mach-Zehnder. No esquema M1 e M2 representam espelhos planos, PBS divisores de feixes polarizadores e $\frac{\lambda}{4}$ placas de um quarto de onda .

Fazendo uma mudança de base usando o sistema de coordenadas projetado nas direções dos vetores $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ podemos escrever os campos incidentes como:

$$\begin{aligned} E_{i\theta} &= E_{ix}\hat{x} \cdot \hat{\theta} + E_{iy}\hat{y} \cdot \hat{\theta} \\ &= E_{ix} \cos \phi + E_{iy} \sin \phi \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} E_{i\phi} &= E_{ix}\hat{x} \cdot \hat{\phi} + E_{iy}\hat{y} \cdot \hat{\phi} \\ &= -E_{ix} \sin \phi + E_{iy} \cos \phi \end{aligned} \quad (4.26)$$

Depois de se propagarem pelas placas, as componentes E_θ e E_ϕ ganham fases diferentes ψ_e e ψ_o ficando

$$E_\theta = E_{i\theta} e^{i\psi_e}, \quad (4.27)$$

$$E_\phi = E_{i\phi} e^{i\psi_o}. \quad (4.28)$$

Suponhamos que a polarização de entrada seja circular direita,

$$E_{ix} = E_0 \quad (4.29)$$

$$E_{iy} = -iE_0. \quad (4.30)$$

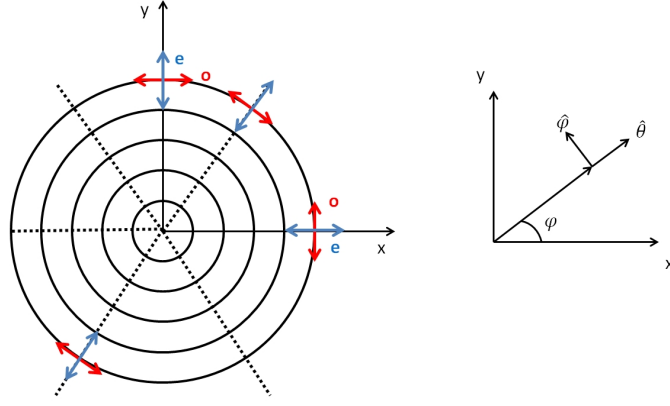


Figura 4.9: À esquerda é ilustrada a superfície do vetor de onda no plano xy onde os círculos concêntricos representam a curva do índice ordinário o e as linhas pontilhadas a do índice extraordinário e . À direita são mostradas as orientações dos vetores unitários $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ em relação ao ângulo azimutal ϕ .

Então, a partir das equações para os campos incidentes, 4.25 e 4.26, temos

$$E_{i\theta} = E_0 \cos \phi - iE_0 \sin \phi = E_0 e^{-i\phi} \quad (4.31)$$

$$E_{i\phi} = -E_0 \sin \phi - iE_0 \cos \phi = -iE_0 e^{-i\phi}. \quad (4.32)$$

Substituindo o resultado das componentes do campo elétrico de entrada nas expressões das componentes do campo elétrico resultante 4.27 e 4.28 ficamos com

$$E_\theta = E_0 e^{-i(\phi - \psi_e)} \quad (4.33)$$

$$E_\phi = -iE_0 e^{-i(\phi - \psi_o)}. \quad (4.34)$$

Voltando ao sistema de coordenadas inicial x, y temos as componentes do campo elétrico na saída da placa dadas por

$$\begin{aligned} E_x &= E_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{x} + E_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{x} \\ &= E_\theta \cos \phi - E_\phi \sin \phi \end{aligned} \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned} E_y &= E_\theta \hat{\theta} \cdot \hat{y} + E_\phi \hat{\phi} \cdot \hat{y} \\ &= E_\theta \sin \phi + E_\phi \cos \phi. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituindo as equações 4.33 e 4.34 nas expressões acima chegamos aos resultados das

componentes do campo elétrico resultante

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 \left[e^{-i(\phi-\psi_e)} \cos \phi + i e^{-i(\phi-\psi_o)} \operatorname{sen} \phi \right] \\
&= E_0 e^{-i\phi} \left(e^{i\psi_e} \cos \phi + i e^{i\psi_o} \operatorname{sen} \phi \right) \\
&= E_0 e^{-i\phi} e^{i\left(\frac{\psi_e+\psi_o}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\psi_e-\psi_o}{2}\right)} \cos \phi + i e^{-i\left(\frac{\psi_e-\psi_o}{2}\right)} \operatorname{sen} \phi \right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

e

$$\begin{aligned}
E_y &= E_0 \left[e^{-i(\phi-\psi_e)} \operatorname{sen} \phi - i e^{-i(\phi-\psi_o)} \cos \phi \right] \\
&= E_0 e^{-i\phi} \left(e^{i\psi_e} \operatorname{sen} \phi - i e^{i\psi_o} \cos \phi \right) \\
&= E_0 e^{-i\phi} e^{i\left(\frac{\psi_e+\psi_o}{2}\right)} \left[e^{i\left(\frac{\psi_e-\psi_o}{2}\right)} \operatorname{sen} \phi - i e^{-i\left(\frac{\psi_e-\psi_o}{2}\right)} \cos \phi \right].
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Se reduzirmos as soluções acima para o caso analisado das *q-plates* de cristal líquido com $q = 1$, onde a diferença de fase corresponde a $\psi_e - \psi_o = \pi$ encontramos

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 e^{-i\phi} e^{i\xi} (i \cos \phi + \operatorname{sen} \phi) \\
&= i E_0 e^{i\xi} e^{-2\phi}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\begin{aligned}
E_y &= E_0 e^{-i\phi} e^{i\xi} (i \operatorname{sen} \phi - \cos \phi) \\
&= -E_0 e^{i\xi} e^{-2\phi},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde $\xi = \frac{\psi_e+\psi_o}{2}$.

Desprezando o fator de fase comum $e^{i\xi}$ podemos escrever o campo elétrico total na saída da placa como

$$\mathbf{E} = i E_0 e^{-i2\phi} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

que corresponde à polarização circular esquerda com um fator de fase 2ϕ carregando um momento angular orbital de $2\hbar$, como previsto anteriormente para esse tipo de *q-plate*.

No caso geral, para qualquer polarização de entrada, podemos escrever as componentes E_x e E_y do campo elétrico resultante na forma

$$E_x = E_{ix} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} \left(i \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right), \tag{4.42}$$

$$E_y = E_{ix} \left(i \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} \left(\cos \frac{\delta}{2} - i \cos 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right). \tag{4.43}$$

Essas equações podem se colocadas na forma matricial

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} & i \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \\ i \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} - i \cos 2\phi \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

No entanto, as equações 4.42 e 4.43 podem ser simplificadas se considerarmos como base a polarização circular. Sabendo que as expressões para as polarizações circulares direita e esquerda são escritas, respectivamente, como

$$E_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y), \quad (4.45)$$

$$E_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y). \quad (4.46)$$

Fazendo uma mudança de base encontramos como resultados

$$E_R = \cos \frac{\delta}{2} E_{iR} + i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{-i2\phi} E_{iL}, \quad (4.47)$$

$$E_L = i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{i2\phi} E_{iR} + \cos \frac{\delta}{2} E_{iL}, \quad (4.48)$$

onde E_{iR} e E_{iL} são os campos de entrada nas bases circulares direita e esquerda. A forma matricial dessas equações será, portanto

$$\begin{bmatrix} E_R \\ E_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{-i2\phi} \\ i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{i2\phi} & \cos \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{iR} \\ E_{iL} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Os cálculos detalhados que levaram a esses resultados são encontrados no Apêndice B.

Embora as *q-plates* modifiquem a helicidade das frentes de onda, o modo resultante não é mais descrito como um único modo Laguerre-Gauss, mas uma superposição deles [47]. Para entendermos esse resultado, podemos fazer a expansão de cada componente do campo em modos de Laguerre-Gauss, que são autofunções da transformada de Fourier. Partindo de um perfil gaussiano LG_{00} com polarização circular direita (E_{iR}) entrando nas placas de fase, as componentes circulares do campo elétrico na saída serão

$$E_R = \cos \frac{\delta}{2} E_{iR} = \cos \frac{\delta}{2} LG_{00}, \quad (4.50)$$

e

$$E_L = i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{i2\phi} E_{iR} = i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} e^{i2\phi} LG_{00}. \quad (4.51)$$

A decomposição do campo 4.51 em modos LG_{pl} é definida pelos coeficientes

$$C_{pl} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} LG_{00}(r, \phi) e^{i2\phi} LG_{pl}^*(r, \phi) r dr d\phi. \quad (4.52)$$

O modo $LG_{00}(r, \phi)$ é dado por

$$LG_{00}(r, \phi) = B_{00} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}, \quad (4.53)$$

onde $B_{00} = \frac{1}{w_o} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ é a constante de normalização e determinamos que a placa se localiza no plano da cintura do feixe. Dessa forma podemos definir $LG_{pl}^*(r, \phi)$ como

$$LG_{pl}^*(r, \phi) = B_{pl} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_o} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w_o^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_o^2}} e^{-il\phi}, \quad (4.54)$$

onde

$$B_{pl} = \frac{1}{w_o} \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}}. \quad (4.55)$$

Resolvendo a integral o valor do coeficiente C_{pl} é

$$C_{pl} = \delta_{l,2} \sqrt{\frac{p!}{(2+p)!}} \quad (4.56)$$

Voltando para a equação 4.51, o campo elétrico resultante é

$$E_L = i \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \sqrt{\frac{p!}{(2+p)!}} LG_{p2}(r, \phi) \quad (4.57)$$

onde podemos observar que se trata de uma superposição de modos Laguerre-Gauss de $l = 2$ com diferentes valores de p . Através dessas equações é possível prever o que acontece com as componentes do campo elétrico ao atravessarem qualquer placa de fase, tornando-se uma ferramenta poderosa para verificação dos resultados experimentais.

Capítulo 5

Fabricação e caracterização das placas de fase

Neste capítulo serão abordados os detalhes envolvendo a fabricação das *q-plates* através da técnica de litografia por feixe de elétrons. Durante um processo de fabricação de estruturas que tenham escala nanométrica é necessário levar diversos fatores em consideração como o comprimento de onda que será usado para análise das placas, o material que compõe o substrato, a resolução das máquinas utilizadas e o local de trabalho. O comprimento de onda é o passo inicial para definirmos o resto dos outros parâmetros. Através dele temos a informação das dimensões das superfícies desejadas. Devido ao tamanho das estruturas, o processo de fabricação demanda um ambiente de trabalho dentro de uma sala limpa, para que partículas suspensas no ambiente não influenciem na forma das estruturas.

Posteriormente, serão apresentados os processos para caracterização das placas, envolvendo a geração do modo Laguerre-Gauss com $l = 2$ e a possibilidade de geração de segundo harmônico ao incidirmos o feixe gerado em um cristal não linear resultando em um modo Laguerre-Gauss com $l = 4$. Para confirmação da presença do momento angular orbital serão

mostrados os perfis de intensidade encontrados através de experimentos de interferometria.

5.1 Fabricação

Visando encontrar o melhor material para fabricação das *q-plates* que operem em um comprimento de onda de 810 nm, gerado por uma fonte de 3W de potência, foi necessário investigar materiais que tivessem transmissão alta, ponto de fusão alto, e índice de refração adequado para fabricar nano estruturas. Esse último detalhe é determinado pela resolução das máquinas que fazem os padrões no substrato. Um índice de refração muito alto demandaria estruturas com espaçamento menor do que as máquinas utilizadas conseguiriam atingir.

O foco dessa dissertação é a fabricação de *q-plates* formadas pelo padrão de círculos concêntricos, $q = 1$ e $\alpha_0 = \pi/2$, utilizando a birrefringência de forma. Como primeiro passo, utilizamos em conjunto as equações do capítulo 2, 2.52 e 2.74, para descobrirmos o material adequado que não ultrapassasse a resolução do processo de fabricação ao calcularmos o período limite, Λ , das estruturas e a altura necessária para imprimirmos uma fase de $\delta = \pi$. Para facilitar o processo, escolhemos que as estruturas fossem retangulares quando vistas por um plano transversal, como está ilustrado na figura 5.1.

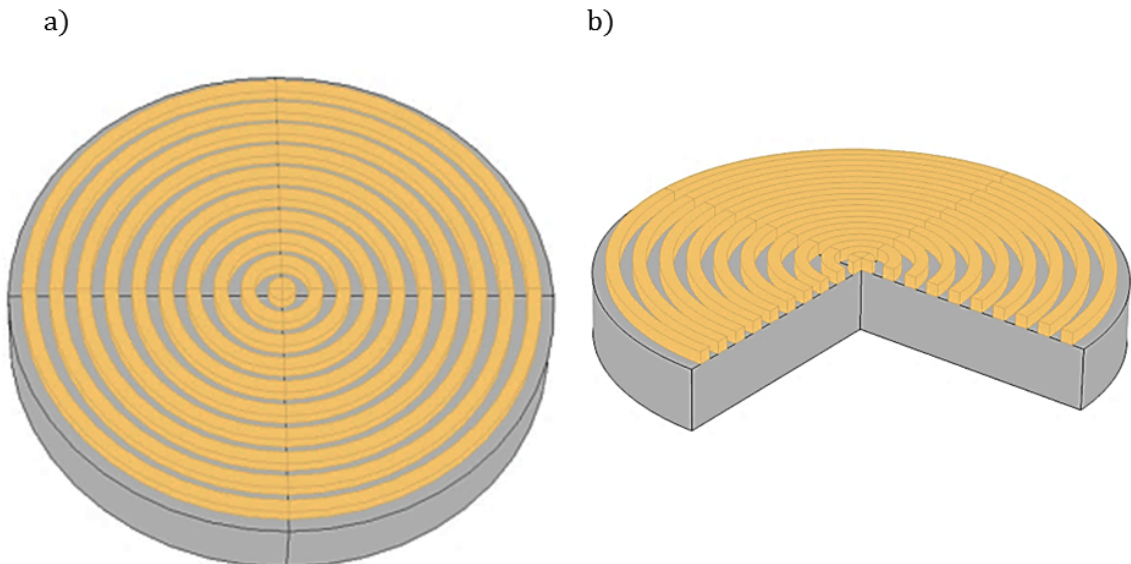


Figura 5.1: Protótipo de uma *q-plate* com $q = 1$ e $\alpha_0 = \pi/2$. a) Imagem do modelo inteiro da placa. A coloração cinza representa a base de sílica e a amarela, as estruturas de dióxido de titânio (TiO_2). b) Vista de um corte transversal do modelo.

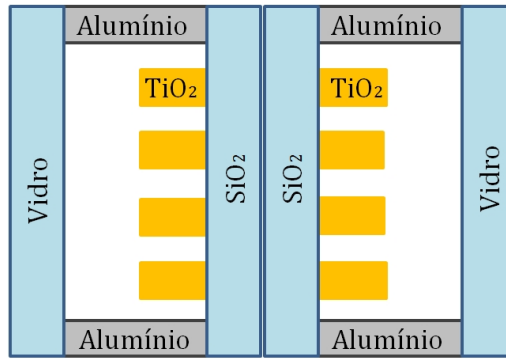


Figura 5.2: Esquema da montagem feita para combinação de duas q-plates com estruturas de dióxido de titânio (TiO_2) sobre uma base de dióxido de silício (SiO_2), que foram previamente seladas em uma estrutura de vidro e alumínio.

O material escolhido para fabricação dos padrões, representados na imagem pela cor amarela, foi o dióxido de titânio (TiO_2), que apresenta um índice de refração relativamente alto de 2,52. Sendo assim, os valores ideais de Λ e da altura h são 321 nm e 675 nm, respectivamente. A base na qual os pilares foram formados foi um wafer de dióxido de silício, (SiO_2) por apresentar alta transmitância. Todo o processo foi realizado no centro de fabricação Danchip, localizado na Universidade Técnica da Dinamarca (DTU). É importante ressaltar que como a razão entre a altura e a largura das estruturas é muito grande, foi feita a fabricação de duas placas com metade da altura necessária. Durante a caracterização, elas foram seladas em uma estrutura de vidro e alumínio e colocadas em sequência, resultando na altura adequada, como está esquematizado na figura .

Primeiramente o wafer de (SiO_2) passa pelo método RCA *clean*, que consiste em três etapas de limpeza para remoção de compostos orgânicos, óxidos e íons. Depois de limpo são depositados 340 nm de silício através do processo químico de *Low Pressure Chemical Vapor Deposition* (LPCVD). Por meio de *Reactive Ion Etching* (RIE) é retirado o silício da parte de trás do wafer usando hexafluoreto de enxofre (SF_6), e novamente o wafer passa pela mesma etapa inicial de limpeza. Posteriormente, é depositada uma camada de 150 nm do fotorresiste CSAR e o wafer é exposto à litografia de feixe de elétrons (EBL), cujo modelo utilizado foi o JEOL JBX-9500 Electron-beam writer. Esses elétrons sensibilizam a camada de CSAR imprimindo o padrão desejado, no caso círculos concêntricos de espessura 160 nm entre as linhas, tornando a parte exposta solúvel a um revelador. Para o teste de dosagem,

foram feitas 50 estruturas em um wafer. Devido ao fato de o tempo de exposição na EBL ser demorado para essa quantidade, as estruturas tiveram que ocupar uma área pequena, onde o círculo mais externo possui diâmetro de 0,5 mm. Depois de definido o padrão, é feito novamente o *etching* do silício por *Advanced Silicon Etch* (ASE) (modelo DRIE-Pegasus) e a remoção da camada restante de fotorresiste por plasma de oxigênio. Até este ponto, os processos citados objetivam a fabricação de uma máscara de silício. As imagens das estruturas fabricadas, feitas através de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) são mostradas na figura 5.3.

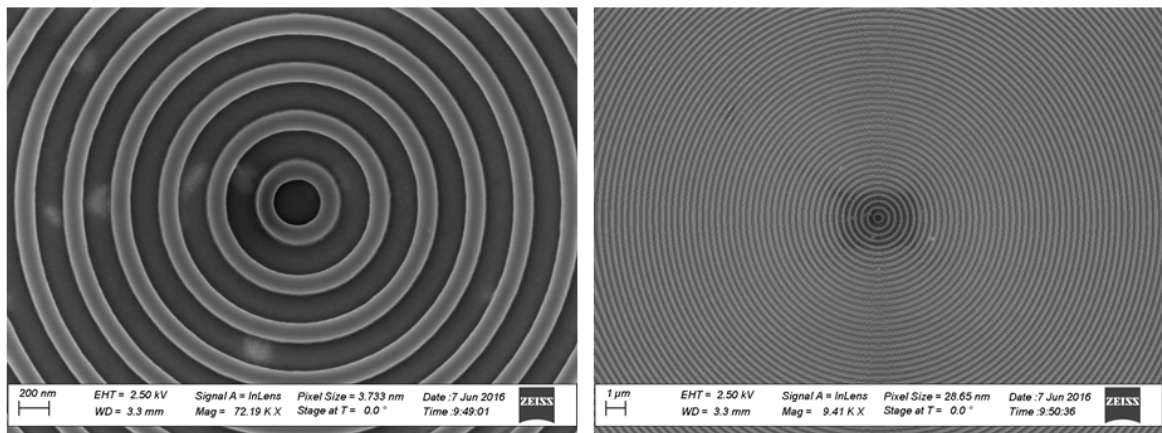


Figura 5.3: Fotografias obtidas de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) da máscara de silício.

Para fabricarmos estruturas de TiO_2 , a máscara de silício é preenchida com essa substância utilizando o processo de *Atomic Layer Deposition* (ALD) (modelo Picosun), que consiste na deposição sequencial de um material na fase gasosa sobre o substrato formando um filme fino. Em seguida, é feito outro processo de corrosão, denominado *Ion Beam Etching* (IBE) para retirada do excesso de TiO_2 e finalmente o RIE da camada de silício, restando apenas o wafer de SiO_2 com estruturas de TiO_2 . Todo o processo de fabricação está esquematizado na figura 5.4 e as imagens obtidas do SEM e microscópio ótico são mostradas nas figuras 5.5 e 5.6, respectivamente.

Para verificarmos a altura das estruturas foi utilizado o microscópio de força atômica (AFM), registrando um valor médio de 300 nm, como mostra a figura 5.7.

Depois de prontas, as placas foram seladas em uma base de alumínio e vidro para que elas continuassem limpas ao longo de todo processo de caracterização. A fotografia da base

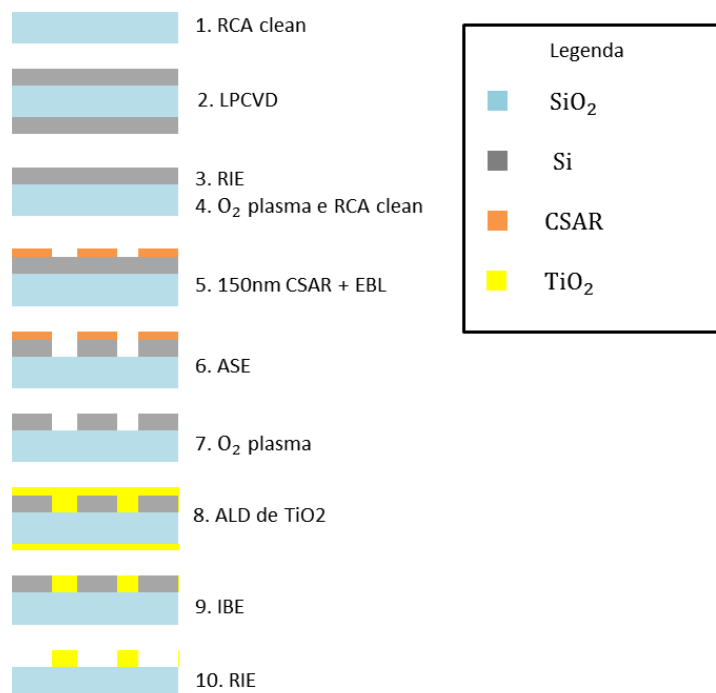


Figura 5.4: Processo de fabricação das placas de fase. O significado das cores é indicado na legenda.

é mostrada na figura 5.8, onde a seta vermelha indica a posição das estruturas.

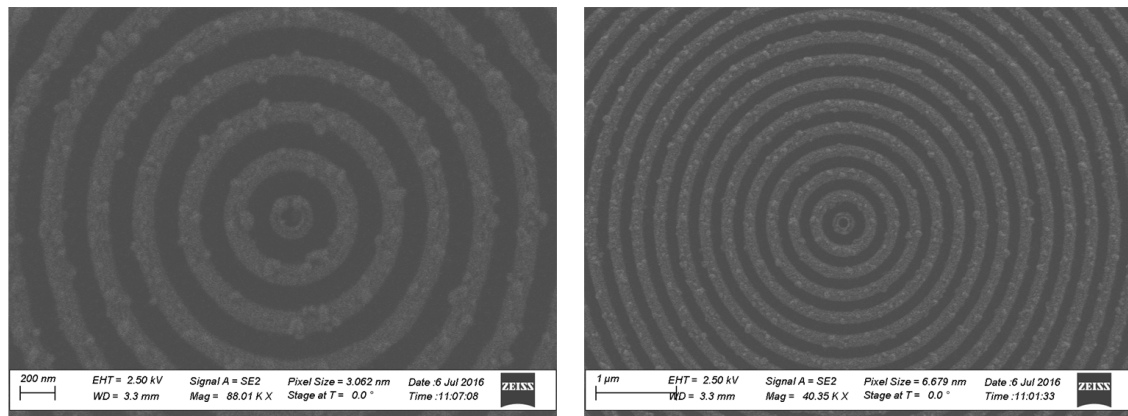


Figura 5.5: Fotografias obtidas de um microscópio eletrônico de varredura (SEM) das estruturas de TiO₂.

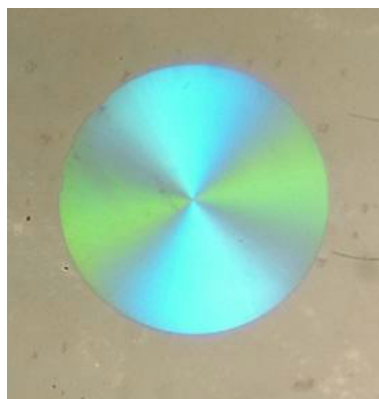


Figura 5.6: Fotografia retirada de um microscópio ótico.

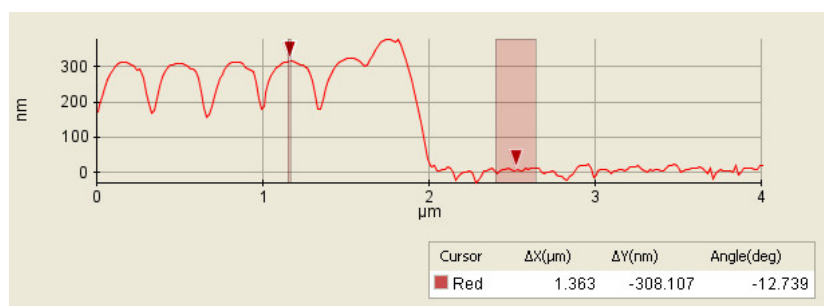


Figura 5.7: Perfil feita pelo microscópio de força atômica, registrando um valor de 300 nm de altura.

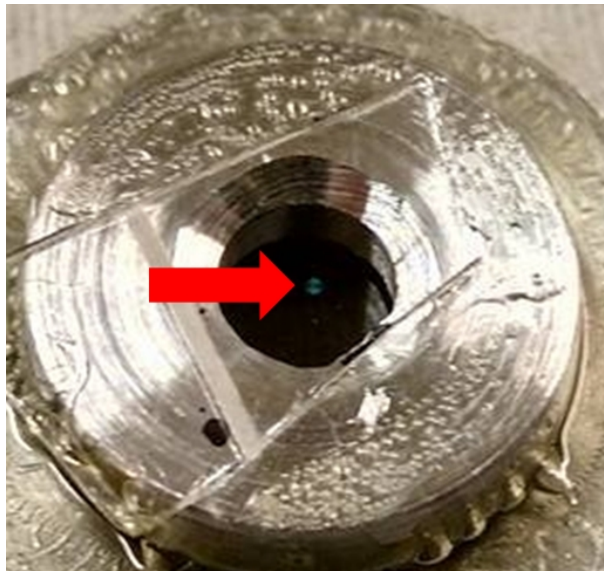


Figura 5.8: Fotografia da base onde a placa de fase foi selada. É possível notar o pequeno ponto no centro da base, indicado pela seta vermelha, correspondendo às estruturas da *q-plate*.

5.2 Caracterização

A caracterização das placas foi feita utilizando o esquema da figura 5.9, onde uma fonte circularmente polarizada incide sobre uma lente convergente com distância focal de 10 cm, diminuindo o tamanho do feixe o suficiente para que ele passe sobre as estruturas da *q-plate*. Na saída da placa de fase ele é ampliado por outra lente convergente de mesma distância focal e depois é filtrado por uma placa de um quarto de onda seguida de um polarizador linear. O perfil de intensidade resultante aparece na forma de um modo Laguerre-Gauss com $l = 2$, como mostra a imagem capturada através da CCD na figura 5.10. Mesmo que as placas tenham sido projetadas para 810 nm, o comprimento de onda utilizado nas imagens foi de 840 nm devido às limitações dos filtros presentes no laboratório.

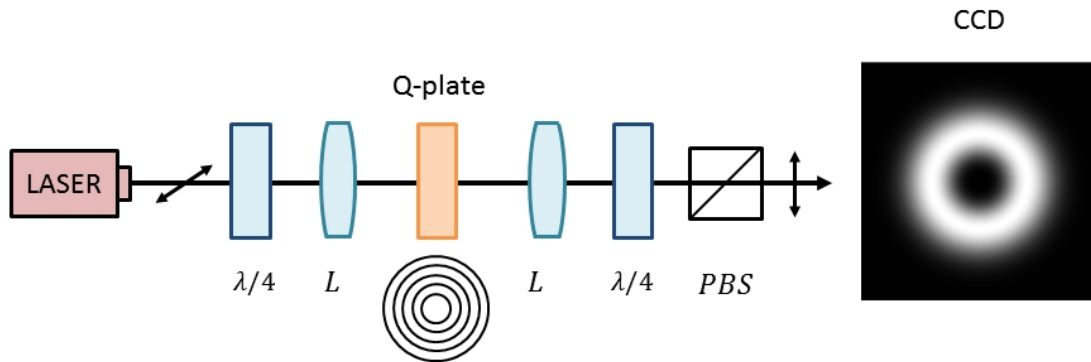


Figura 5.9: Montagem para caracterização da *q-plate*. Na imagem, *L* designa as lentes convergentes com distância focal de 10 cm e PBS um divisor de feixe polarizador. A imagem na CCD é uma simulação computacional do modo Laguerre-Gauss com $l = 2$

O polarizador posicionado após a placa de um quarto de onda é formado por um cubo que reflete a polarização ortogonal à transmitida. Através desses dois canais de saída foi possível calcular a eficiência de conversão das placas pela equação:

$$\eta = \frac{T}{T + R}, \quad (5.1)$$

onde T representa a potência transmitida pelo polarizador e R a potencia refletida. Para um comprimento de onda de 700 nm, as *q-plates* fabricadas apresentaram eficiência de 45%. Quando colocadas em sequência, a altura alcançada é próxima da desejada e a eficiência registrada é de 93%. Fazendo com que o campo incidente na *q-plate* apresente polarização

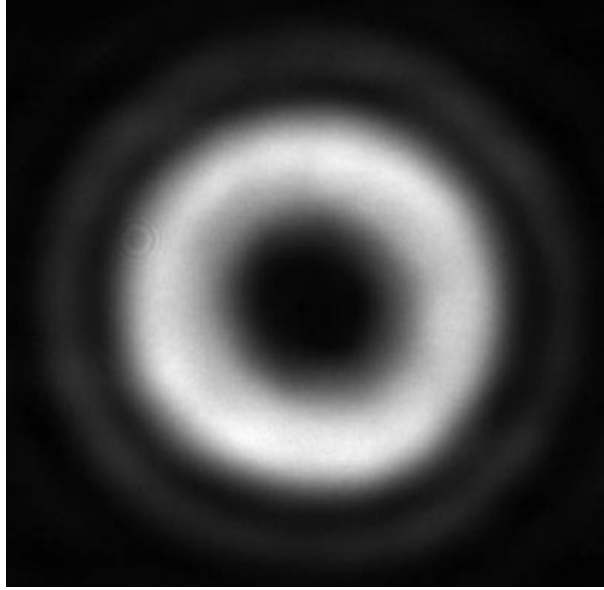


Figura 5.10: Perfil de intensidade do modo Laguerre-Gauss capturado pela CCD.

circular direita e utilizando a equação 4.48 podemos obter o campo elétrico resultante na saída das placas. Sabendo o campo elétrico, a intensidade será proporcional a $|\mathbf{E}|^2$. Dessa forma, ao variarmos o comprimento de onda do laser, podemos observar como a eficiência das placas varia através da relação

$$\eta = \text{sen}^2 \left(\frac{\pi h \Delta n}{\lambda} \right), \quad (5.2)$$

onde h representa a altura das estruturas fabricadas e Δn a birrefringência.

A figura 5.11 mostra um gráfico da eficiência em função do comprimento de onda para uma q-plate. Os pontos azuis indicam os dados experimentais e curva vermelha tracejada, o ajuste teórico.

Porém, como mencionado no capítulo anterior, é necessário verificar se o feixe gerado realmente carrega momento angular orbital através de experimentos de interferometria. Utilizando um interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico, ilustrado nas figuras 5.12 e 5.13, o feixe interfere com o modo espelhado dele mesmo, gerando um perfil de intensidade em forma de cruz. A figura 5.14 mostra a comparação entre um perfil simulado computacionalmente e o perfil de intensidade capturado pela CCD .

Ao movermos um dos braços do interferômetro, percebemos que o perfil de interferência começa a girar, evidenciando a existência do momento angular orbital, como mostra a sequência de imagens capturadas em tempos diferentes da figura 5.15.

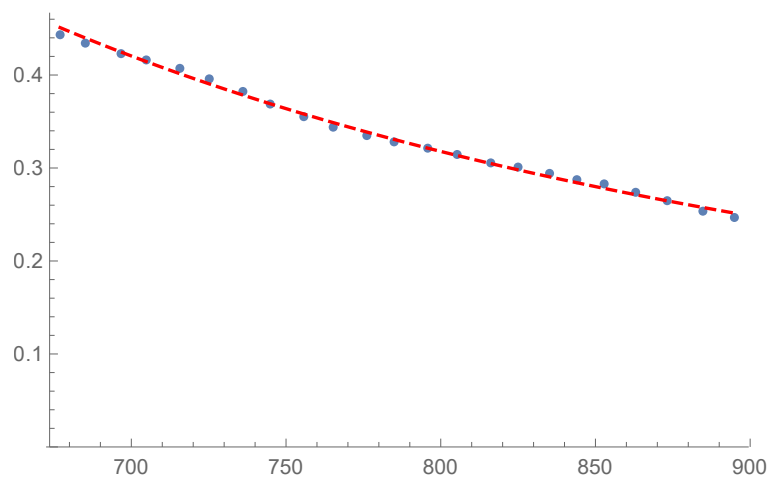


Figura 5.11: Gráfico da eficiência em função do comprimento de onda. Os pontos azuis indicam os dados experimentais e curva vermelha tracejada, o ajuste teórico.

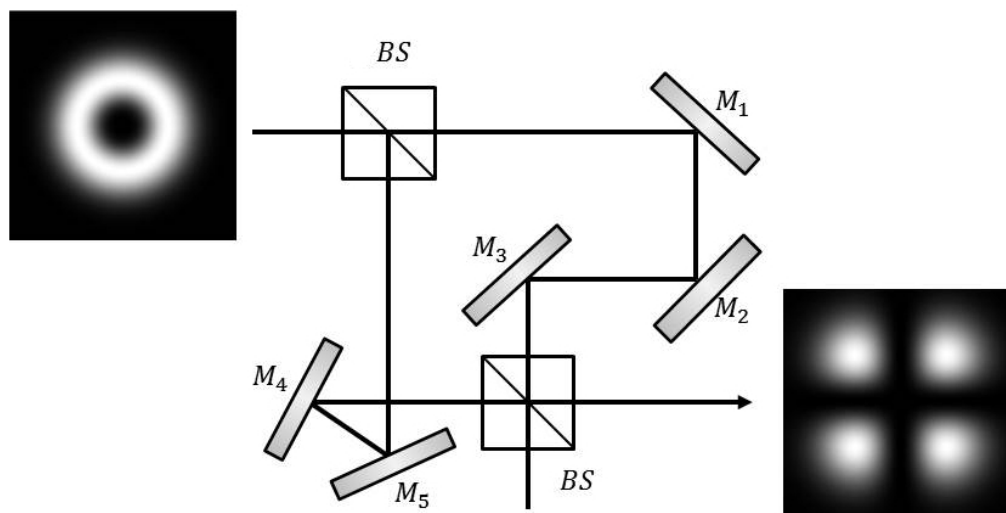


Figura 5.12: Interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico com perfis de intensidade simulados computacionalmente, onde M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 representam espelhos e BS um divisor de feixe.

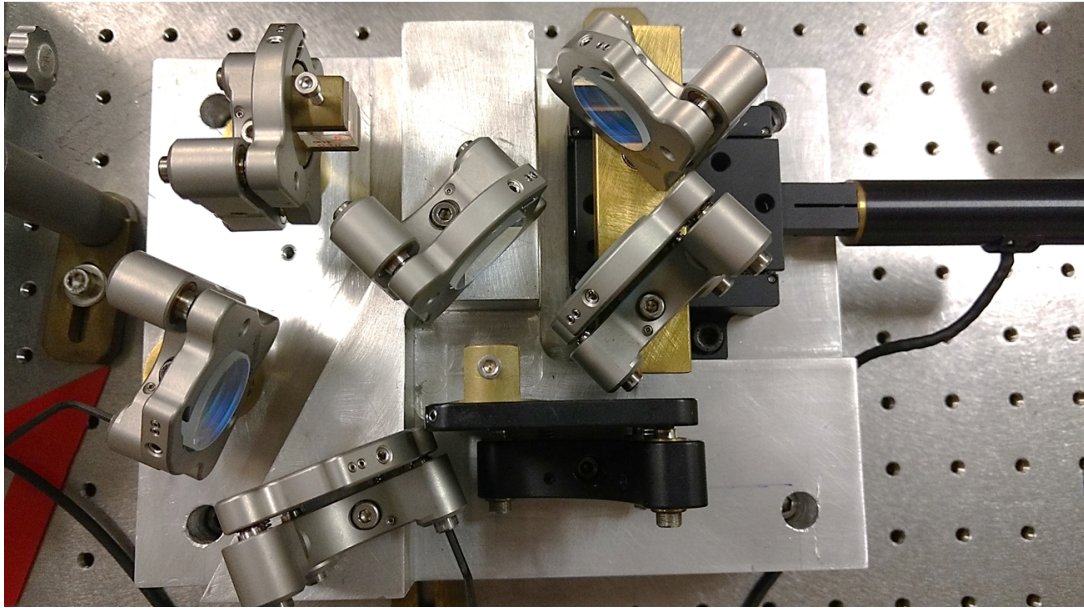


Figura 5.13: Foto do interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico montado sobre a mesa ótica.

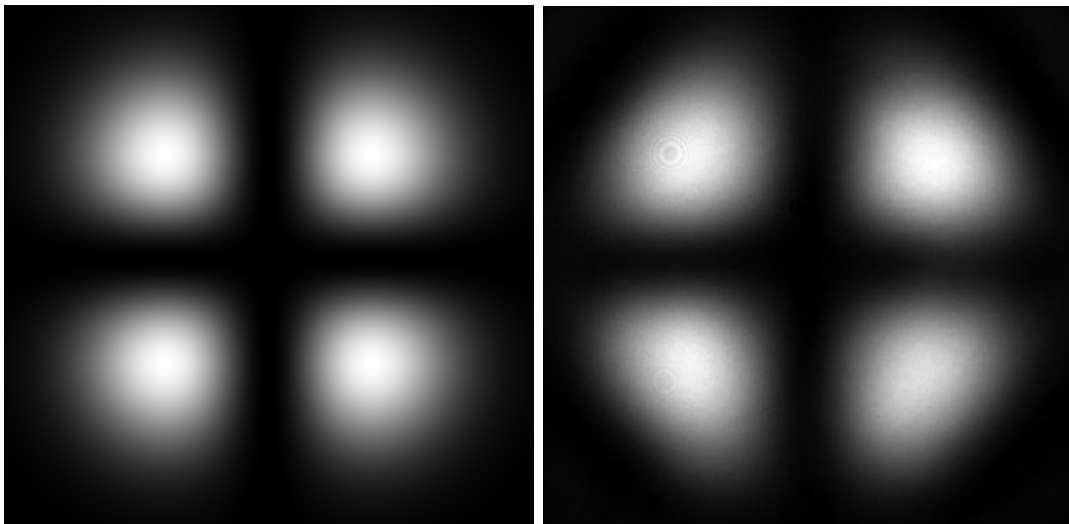


Figura 5.14: Figura de interferência em forma de cruz simulada computacionalmente (à esquerda) e capturada pela CCD (à direita).

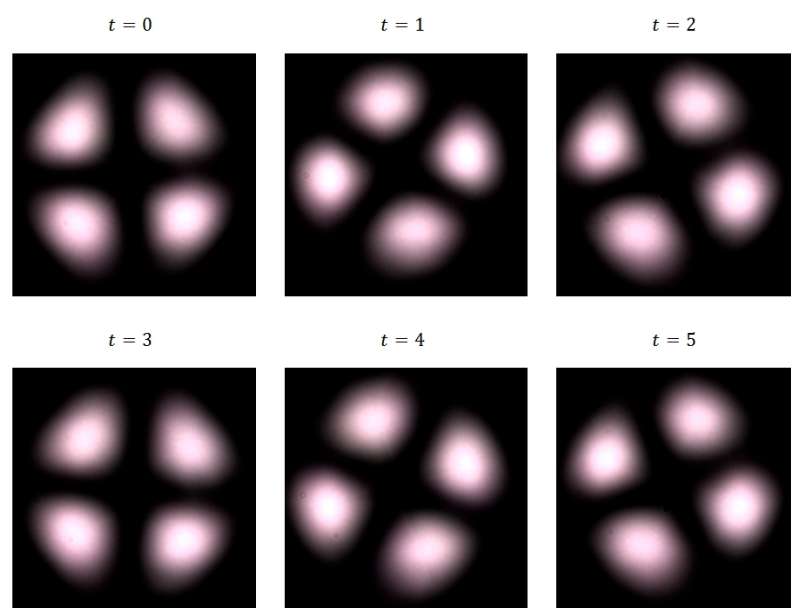


Figura 5.15: Sequência de fotos do perfil de interferência tiradas em tempos diferentes ao movermos um dos braços do interferômetro.

5.3 Geração de segundo harmônico

A geração de segundo harmônico é um fenômeno ótico não linear onde um cristal interage com fótons da mesma frequência gerando outros fótons com o dobro da frequência dos incidentes e metade do comprimento de onda [48]. Nesta sessão abordaremos um experimento feito com as *q-plates* para verificação da conservação do modo Laguerre-Gauss através de geração de segundo harmônico.

Inicialmente o modo Laguerre-Gauss de $l = 2$ é gerado em um comprimento de onda de 840 nm através do método da sessão anterior. Em seguida esse feixe é focalizado em um cristal não linear de borato de bismuto (BiB_3O_6 , conhecido como BiBO), resultando em um modo com metade do comprimento de onda, ou seja 420 nm, e apresentando um perfil de intensidade semelhante ao Laguerre-Gauss, como mostra a figura 5.16.

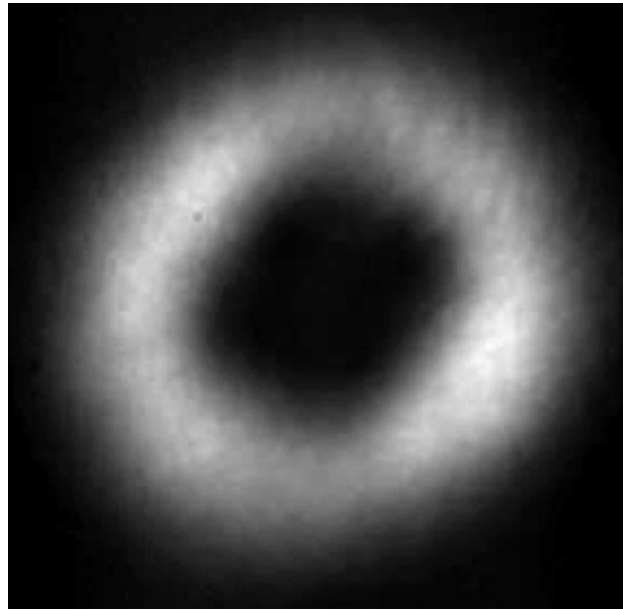


Figura 5.16: Perfil de intensidade do modo Laguerre-Gauss ao passar pelo cristal não linear.

Porém, ao desviarmos o feixe para o interferômetro, cuja montagem é ilustrada na figura 5.17, observamos o padrão de interferência produzido equivalente a $l = 4$, figura 5.18, o que significa que o momento angular orbital tem a ordem dobrada durante o processo de conversão.

Dando prosseguimento ao processo de caracterização, decidimos investigar o que acontece ao posicionarmos mais uma *q-plate* depois do feixe dobrado, e direcioná-lo para o interferômetro. Como previsto através dos cálculos das placas de fase, o modo Laguerre-Gauss, que

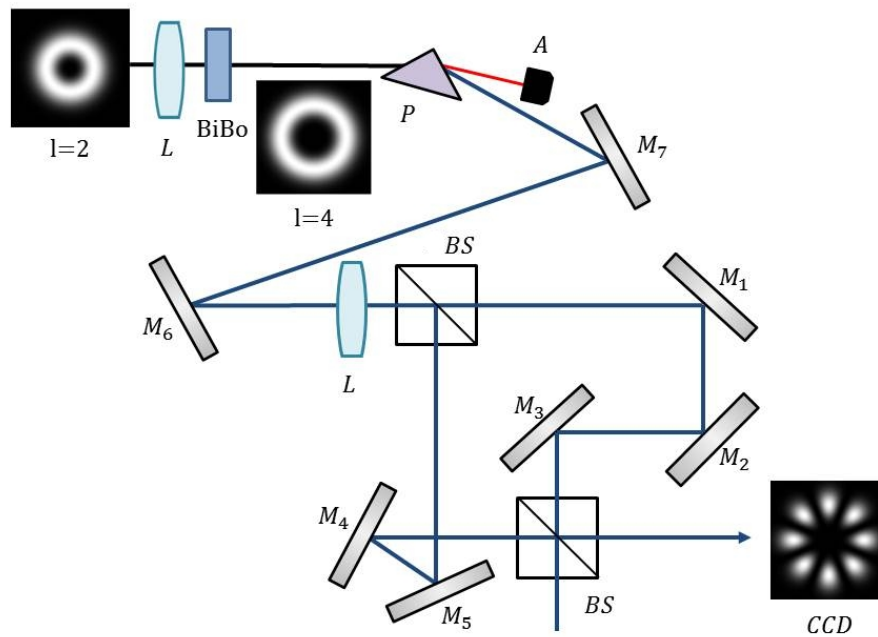


Figura 5.17: Montagem do experimento para geração de segundo harmônico utilizado o feixe proveniente de uma q -plate onde os perfis de intensidade foram simulados computacionalmente. P denomina um prisma, BS um divisor de feixe, A um absorvedor, e $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ são espelhos.

antes possuía $l = 4$, transforma-se em um modo com $l = 6$, sendo observado 12 gomos no padrão de interferência. A comparação entre a fotografia capturada pela CCD e uma simulação computacional do perfil de intensidade é apresentada na figura 5.19.

Portanto, esse experimento torna-se útil para geração de diversos modos Laguerre-Gauss de ordem elevada e em comprimentos de onda pequenos, como o ultravioleta.

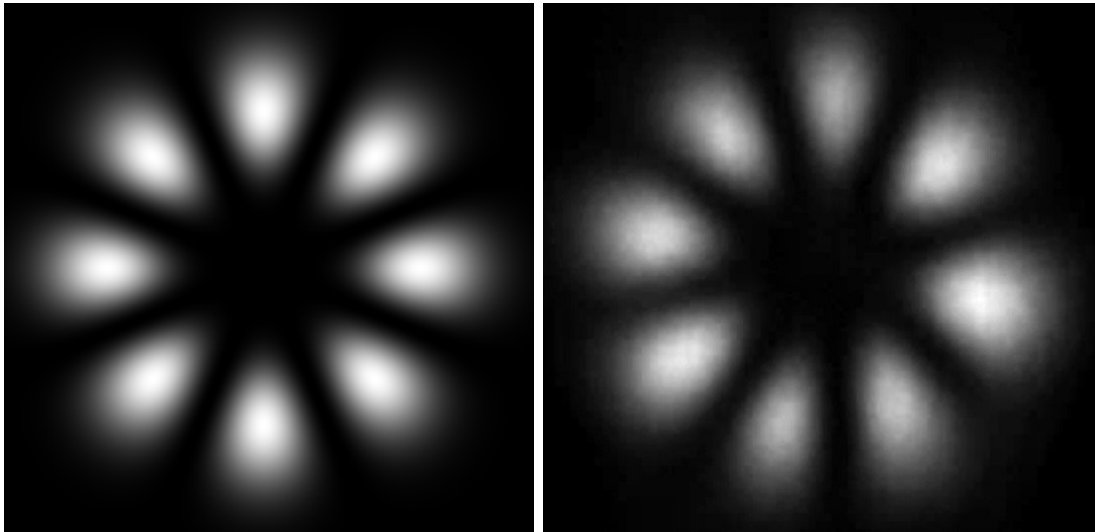


Figura 5.18: Perfis de intensidade da interferência entre modos Laguerre-Gauss de $l = 4$ e $l = -4$, simulado computacionalmente (à esquerda) e capturado pela CCD (à direita).

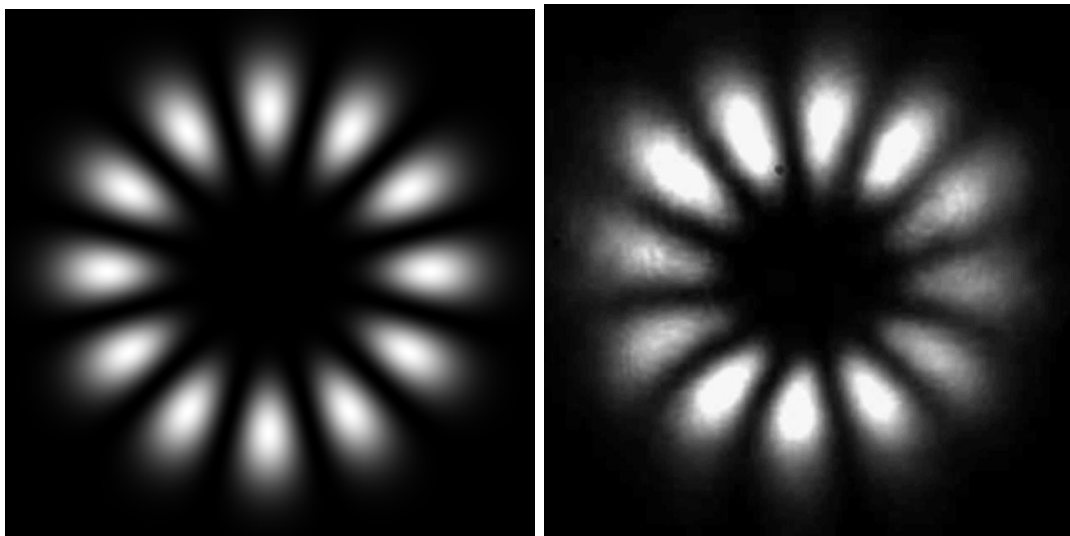


Figura 5.19: Perfil de intensidade da interferência entre modos Laguerre-Gauss de $l = 6$ e $l = -6$, simulado computacionalmente (à esquerda) e capturado pela CCD (à direita).

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho mostramos o processo de fabricação e caracterização de uma categoria de placas de fase denominadas q-plates. A peculiaridade das novas placas fabricadas reside no fato delas não possuírem cristal líquido. O cristal líquido restringe a possibilidade de se usar fontes de alta potência e comprimentos de onda abaixo do ultravioleta. Empregando somente o fenômeno da birrefringência de forma, responsável pelo acoplamento entre os momentos angulares de spin e orbital, o cristal líquido foi substituído por nanoestruturas criadas através de métodos de tratamento de superfície. O processo de fabricação foi realizado na sala limpa da Universidade Técnica da Dinamarca e o de caracterização foi feito nos laboratórios de ótica quântica e microscopia de força atômica da Universidade Federal de Minas Gerais. Ao analisarmos as novas q-plates, evidenciamos que a conversão entre um feixe gaussiano em um Laguerre-Gauss foi bem sucedida para uma fonte de alta potência, com um comprimento de onda de 810 nm.

Posteriormente, foi verificada a geração de segundo harmônico quando o feixe convertido pela q-plate incide sobre um cristal não linear resultando em um modo Laguerre-Gauss com l duplicado.

A possibilidade de fabricação de placas de fase conversoras de modos e a geração de feixes

que carregam momento angular orbital de ordens altas é importante para a ótica quântica devido à grande capacidade de que esses feixes possuem de carregar informação, e para a fotônica na análise de guias de onda.

Apêndice A

Condição de difração

Neste apêndice demonstraremos a condição de difração através do método de série de Fourier para uma rede retangular com período espacial Λ e altura h , ilustrada na figura A.1.

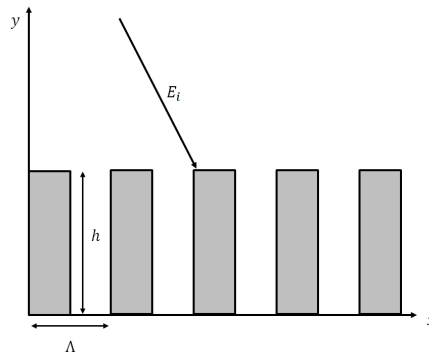


Figura A.1: Rede de difração retangular de altura h e período espacial Λ .

Considerando uma onda plana incidente da forma:

$$E_i = E e^{ik_i x}, \quad (\text{A.1})$$

onde k_i é a componente x do vetor de onda.

O meio periódico acarreta na periodicidade da constante dielétrica ε ao longo de x e com período Λ , sendo assim:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(x + \Lambda, y). \quad (\text{A.2})$$

Na ótica linear, a resposta do campo eletromagnético à rede retangular pode ser descrita por um operador linear R , que é definido por:

$$E_\Lambda(x, y) = R(x)E_i(x, y) \quad (\text{A.3})$$

onde $E_\Lambda(x, y)$ representa o campo total. Devido à periodicidade de ε , o operador R torna-se invariante ao longo de x com respeito a uma translação de Λ , então

$$\begin{aligned} E_\Lambda(x + \Lambda, y) &= R(x + \Lambda)E_i(x + \Lambda, y) \\ &= R(x)E(x, y)e^{ik_i\Lambda} \\ &= E_\Lambda(x, y)e^{ik_i\Lambda} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A equação acima mostra a periodicidade adquirida pelo campo eletromagnético devido à periodicidade do meio. Podemos verificar que a função definida por:

$$\nu(x, y) = \frac{E_\Lambda(x, y)}{e^{ik_ix}} \quad (\text{A.5})$$

é periódica e com período Λ de forma que:

$$\begin{aligned} \nu(x + \Lambda, y) &= \frac{E_\Lambda(x + \Lambda, y)}{e^{ik_i(x+\Lambda)}} \\ &= \frac{E_\Lambda(x, y)e^{ik_i\Lambda}}{e^{ik_i(x+\Lambda)}} \\ &= \frac{E_\Lambda(x, y)}{e^{ik_ix}} \\ &= \nu(x, y) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Essa função periódica pode ser representada por uma série de Fourier

$$\begin{aligned} \nu(x, y) &= \frac{E_\Lambda(x, y)}{e^{ik_ix}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu_m(y)e^{i\frac{2\pi m}{\Lambda}x} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde m é um número inteiro e $\nu_m(y)$ são as componentes de Fourier. Então substituindo esse resultado na equação A.5 temos:

$$E_\Lambda(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m(y)e^{i(k_i + \frac{2\pi m}{\Lambda})x}, \quad (\text{A.8})$$

Definindo k_m como:

$$k_m = k_i + \frac{2\pi m}{\Lambda} \quad (\text{A.9})$$

e substituindo essa expressão na equação A.8 encontramos a equação para o campo elétrico

$$E_\Lambda(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu_m(y)e^{ik_mx} \quad (\text{A.10})$$

A equação A.8 representa a condição de difração em função do período espacial Λ e da componente do vetor de onda incidente.

Apêndice B

Q-plate de fase generalizada

Neste apêndice demonstramos o cálculo do campo elétrico resultante ao incidirmos um campo elétrico com polarização arbitrária sobre uma placa de fase.

Retomando as variáveis da sessão 4.4, para qualquer polarização de entrada da componente x do campo, E_{ix} , temos na saída da placa:

$$\begin{aligned} E_x &= (E_{ix} \cos \varphi + E_{iy} \operatorname{sen} \varphi) e^{i\psi_e} \cos \varphi + (E_{ix} \operatorname{sen} \varphi - E_{iy} \cos \varphi) e^{i\psi_o} \operatorname{sen} \varphi \\ &= E_{ix} \cos^2 \varphi e^{i\psi_e} + E_{iy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi e^{i\psi_e} + E_{ix} \operatorname{sen}^2 \varphi e^{i\psi_o} - E_{iy} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi e^{i\psi_o} \\ &= E_{ix} (\cos^2 \varphi e^{i\psi_e} + \operatorname{sen}^2 \varphi e^{i\psi_o}) + E_{iy} (\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi e^{i\psi_e} - \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi e^{i\psi_o}), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

usando identidades trigonométricas para $\operatorname{sen}^2 \varphi$ e $\cos^2 \varphi$ e substituindo-as nas expressões acima ficamos com:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} E_{ix} (e^{i\psi_e} + \cos 2\varphi e^{i\psi_e} + e^{i\psi_o} - \cos 2\varphi e^{i\psi_o}) + E_{iy} (\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (e^{i\psi_e} - e^{i\psi_o})) \\ &= \frac{1}{2} E_{ix} [(e^{i\psi_e} + e^{i\psi_o}) + \cos 2\varphi (e^{i\psi_e} - e^{i\psi_o})] + E_{iy} (\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi (e^{i\psi_e} - e^{i\psi_o})). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Sabendo que:

$$e^{i\psi_e} \pm e^{i\psi_o} = (\cos \psi_e \pm \cos \psi_o) + i(\operatorname{sen} \psi_e \pm \operatorname{sen} \psi_o) \quad (\text{B.3})$$

e utilizando as identidades:

$$\cos \psi_e + \cos \psi_o = 2 \cos \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$\cos \psi_e - \cos \psi_o = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\operatorname{sen} \psi_e \pm \operatorname{sen} \psi_o = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\psi_e \pm \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e \mp \psi_o}{2} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \quad (\text{B.7})$$

encontramos a expressão:

$$\begin{aligned}
 E_x = & \frac{1}{2} E_{ix} \left\{ \left[2 \cos \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) + i 2 \sin \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \cos 2\varphi \left[- 2 \sin \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \sin \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) + i 2 \sin \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} E_{iy} \left\{ \sin 2\varphi \left[- 2 \sin \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \sin \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{\psi_e - \psi_o}{2} \right) \cos \left(\frac{\psi_e + \psi_o}{2} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Fazendo novamente as mudanças de variáveis

$$\psi_e - \psi_o = \delta \quad \text{e} \quad \frac{\psi_e + \psi_o}{2} = \xi, \quad (\text{B.9})$$

chegamos no resultado final de E_x :

$$E_x = E_{ix} \left(\cos \xi \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \xi \cos \frac{\delta}{2} - \cos 2\varphi \sin \xi \sin \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \cos \xi \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
 & + E_{iy} \left(- \sin 2\varphi \sin \xi \sin \frac{\delta}{2} + i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \cos \xi \right) \\
 = & E_{ix} \left[\cos \frac{\delta}{2} e^{i\xi} + i \left(i \cos 2\varphi \sin \xi \sin \frac{\delta}{2} + \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \cos \xi \right) \right] \\
 & + E_{iy} \left[i \sin 2\varphi \left(i \sin \xi \sin \frac{\delta}{2} + \cos \xi \sin \frac{\delta}{2} \right) \right].
 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Portanto,

$$E_x = E_{ix} e^{i\xi} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} e^{i\xi} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right). \quad (\text{B.12})$$

O cálculo de E_y é feito de maneira análoga ao de E_x , resultando em

$$\begin{aligned}
 E_y = & (E_{ix} \cos \varphi + E_{iy} \sin \varphi) e^{i\psi_e} \sin \varphi + (E_{iy} \cos \varphi - E_{ix} \sin \varphi) e^{i\psi_o} \cos \varphi \\
 = & E_{ix} (\cos \varphi e^{i\psi_e} - \sin \varphi \cos \varphi e^{i\psi_o}) + E_{iy} (\sin^2 \varphi e^{i\psi_e} + \cos^2 \varphi e^{i\psi_o}).
 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Utilizando as identidades trigonométricas apresentadas anteriormente e fazendo as substituições das expressões B.9 encontramos:

$$\begin{aligned}
 E_y = & E_{ix} e^{i\xi} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} \left[(1 - \cos^2 \varphi) e^{i\psi_e} + (1 - \sin^2 \varphi) e^{i\psi_o} \right] \\
 = & E_{ix} e^{i\xi} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} e^{i\xi} \left(\cos \frac{\delta}{2} - i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Nas equações encontradas para E_x e E_y podemos desprezar o termo de fase global $e^{i\xi}$, ficando com

$$E_x = E_{ix} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right), \quad (\text{B.15})$$

$$E_y = E_{ix} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) + E_{iy} \left(\cos \frac{\delta}{2} - i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right). \quad (\text{B.16})$$

Esses resultados podem ser reduzidos à forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} & i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \\ i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} - i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Porém, as equações B.15 e B.16 podem ser simplificadas se considerarmos uma base de polarização circular. As expressões para as polarizações circulares direita e esquerda são escritas, respectivamente, como

$$E_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y), \quad (\text{B.18})$$

$$E_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y). \quad (\text{B.19})$$

Substituindo as expressões de E_x e E_y , encontradas anteriormente, nas equações acima ficamos com:

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{E_{ix}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} + \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{E_{iy}}{\sqrt{2}} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} - i \cos \frac{\delta}{2} - \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} + \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) (E_{iR} + E_{iL}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} - i \cos \frac{\delta}{2} - \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) (E_{iR} - E_{iL}). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Portanto a equação para E_R torna-se

$$E_R = \cos \frac{\delta}{2} E_{iR} + i \sin \frac{\delta}{2} e^{-i2\varphi} E_{iL}. \quad (\text{B.22})$$

Realizando de forma análoga as operações para E_L temos

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{E_{ix}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\delta}{2} + i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} - \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{E_{iy}}{\sqrt{2}} \left(i \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} + i \cos \frac{\delta}{2} + \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$= \left(i \cos 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} - \sin 2\varphi \sin \frac{\delta}{2} \right) E_{iR} + \cos \frac{\delta}{2} E_{iL}. \quad (\text{B.24})$$

Então a equação para E_L será

$$E_L = i \sin \frac{\delta}{2} e^{i2\varphi} E_{iR} + \cos \frac{\delta}{2} E_{iL}. \quad (\text{B.25})$$

Colocando esses resultados na forma matricial chegamos finalmente a

$$\begin{bmatrix} E_R \\ E_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & i \sin \frac{\delta}{2} e^{-i2\varphi} \\ i \sin \frac{\delta}{2} e^{i2\varphi} & \cos \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{iR} \\ E_{iL} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

Referências Bibliográficas

- [1] D. Lindberg, *Theories of Vision from Al-kindī to Kepler*. Chicago History of Science and Medicine, University of Chicago Press, 1981.
- [2] G. Rodis-Lewis and J. Todd, *Descartes: His Life and Thought*. Cornell paperbacks, Cornell University Press, 1999.
- [3] M. Sharratt, *Galileo: Decisive Innovator*. Blackwell science biographies, Cambridge University Press, 1996.
- [4] R. Hooke, *Micrographia: Or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies Made by Magnifying Glasses, with Observations and Inquiries Thereupon*. Dover phoenix editions, Dover Publications, 2003.
- [5] R. Boyle and P. Shaw, *The Philosophical Works of the Honourable Robert Boyle Esq: Abridged, Methodized, and Disposed Under the General Heads of Physics, Statics, Pneumatics, Natural History, Chymistry, and Medicine*. No. v. 2, W. and J. Innys, 1725.
- [6] P. Fara, “Newton shows the light: a commentary on newton (1672) ‘a letter ... containing his new theory about light and colours...’,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 373, no. 2039, 2015.
- [7] C. Huygens, *Traité de la lumière: où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, & dans la refraction, et particulièrement dans l’etrange refraction du cristal d’Islande*. Chez Pierre vander Aa, 1690.
- [8] T. Young, “The bakerian lecture: On the theory of light and colours,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 92, pp. 12–48, 1802.

- [9] A. Fresnel, *Memoire sur la diffraction de la lumiere; par M. A. Fresnel*. 1826.
- [10] J. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*. No. v. 1 in *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, 1873.
- [11] M. Planck, “On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum,” *Annalen Phys.*, vol. 4, p. 553, 1901.
- [12] A. Einstein, “Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light,” *American Journal of Physics*, vol. 33, no. 5, p. 367, 1965.
- [13] H. Hertz, “Ueber einen einfluss des ultravioletten lichtes auf die electrische entladung,” *Annalen der Physik*, vol. 267, no. 8, pp. 983–1000, 1887.
- [14] J. Poynting, “The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 82, no. 557, pp. 560–567, 1909.
- [15] R. A. Beth, “Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light,” *Physical Review*, vol. 50, no. 2, p. 115, 1936.
- [16] B. Saleh and M. Teich, *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics, Wiley, 2013.
- [17] F. De Zela, *The Pancharatnam-Berry Phase: Theoretical and Experimental Aspects, Theoretical Concepts of Quantum Mechanics*. InTech, 2012.
- [18] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo, “Pancharatnam-berry phase optical elements for wave front shaping in the visible domain: Switchable helical mode generation,” *Applied Physics Letters*, vol. 88, no. 22, p. 221102, 2006.
- [19] R. Bartholin, *Experimenta Crystalli Islandici disdiaclastici, quibus mira et insolita refractio detegitur*. D. Paulli, 1669.
- [20] M. McCall, I. Hodgkinson, and Q. Wu, *Birefringent Thin Films and Polarizing Elements*. World Scientific Publishing Company, 2014.

- [21] G. Fowles, *Introduction to Modern Optics*. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2012.
- [22] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Education, 2014.
- [23] J. Glusker and K. Trueblood, *Crystal Structure Analysis: A Primer*. IUCr texts on crystallography, OUP Oxford, 2010.
- [24] M. Born, E. Wolf, and A. Bhatia, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] L. Cescato, E. Gluch, H. Haider, and N. Streibl, “Form birefringence of dielectric coatings and relief gratings,” 1990.
- [26] L. Li, “New formulation of the fourier modal method for crossed surface-relief gratings,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, pp. 2758–2767, Oct 1997.
- [27] L. H. Cescato, E. Gluch, and N. Streibl, “Holographic quarterwave plates,” *Applied optics*, vol. 29, no. 22, pp. 3286–3290, 1990.
- [28] A. Maurel, S. Félix, J.-F. Mercier, A. Ourir, and Z. E. Djefal, “Wood’s anomalies for arrays of dielectric scatterers,” *Journal of the European Optical Society - Rapid publications*, vol. 9, no. 0, 2014.
- [29] J. Bischoff and W. Neundorf, “Effective schema for the rigorous modeling of grating diffraction with focused beams,” *Appl. Opt.*, vol. 50, pp. 2474–2483, Jun 2011.
- [30] J. C. Maxwell, “A dynamical theory of the electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 13, pp. 531–536, 1863.
- [31] C. G. Darwin, “Notes on the theory of radiation,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 136, no. 829, pp. 36–52, 1932.
- [32] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, pp. 8185–8189, Jun 1992.

- [33] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [34] A. Siegman, *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [35] C. Vannier, “Bell inequalities with Orbital Angular Momentum of Light,” 2012.
- [36] M. Padgett and L. Allen, “Light with a twist in its tail,” *Contemporary Physics*, vol. 41, pp. 275–285, May 2000.
- [37] E-karimi, “helical beam with different topological charge. columns show the helical structures, phase-front and intensity of the beams — Wikipedia, the free encyclopedia,” 2011.
- [38] A. M. Yao and M. J. Padgett, “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications,” *Advances in Optics and Photonics*, vol. 3, no. 2, pp. 161–204, 2011.
- [39] S. J. van Enk and G. Nienhuis, “Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light,” *Optics Communications*, vol. 94, no. 1-3, pp. 147–158, 1992.
- [40] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [41] S. M. Barnett and L. Allen, “Orbital angular momentum and nonparaxial light beams,” *Optics Communications*, vol. 110, no. 5–6, pp. 670 – 678, 1994.
- [42] S. Van Enk and G. Nienhuis, “Commutation Rules and Eigenvalues of Spin and Orbital Angular Momentum of Radiation Fields,” *Journal of Modern Optics*, vol. 41, no. December, pp. 963–977, 1994.
- [43] L. Marrucci, “Rotating light with light: Generation of helical modes of light by spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous liquid crystals,” *Proc. SPIE*, vol. 6587, pp. 658708–658708–11, 2007.
- [44] M. Padgett, “Light’s twist,” *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 470, no. 2172, 2014.
- [45] L. Marrucci, “A toolbox for photon orbital angular momentum technology,” 2012.
- [46] E-karimi, “The q-plate effect for left and right-hand circular polarizations — Wikipedia, the free encyclopedia,

- [47] M. Beijersbergen, R. Coerwinkel, M. Kristensen, and J. Woerdman, “Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate,” *Optics Communications*, vol. 112, no. 5, pp. 321–327, 1994.
- [48] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. Padgett, “Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order laguerre-gaussian modes,” *Physical Review A*, vol. 56, no. 5, p. 4193, 1997.