

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Vitor Monteiro Macaroun

Correlações Quânticas em Referenciais Não-Inerciais

Belo Horizonte
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Vitor Monteiro Macaroun

Correlações Quânticas em Referenciais Não-Inerciais

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da UFMG, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Marcos Donizeti Sampaio
Co-Orientador: Luiz Cleber Tavares de Brito

Belo Horizonte
2015

Resumo

O problema consiste em considerar um par emaranhado de dois diferentes modos de um campo escalar sem massa em referenciais com aceleração relativa constante. Para isso consideramos esse par no vácuo, ou seja, no espaço-tempo de Minkowski, onde usamos a quadri-aceleração relativística constante. Devido ao efeito Unruh, um observador acelerado imerso no estado fundamental desse campo é capaz de detectar modos de excitação dele e, dessa maneira, interpretar as excitações como um banho térmico característico da radiação de corpo negro com temperatura proporcional a essa aceleração. Investigamos que a métrica que descreve a aceleração relativa dos referenciais imita a métrica usada para descrever buracos negros, em certa aproximação. Por fim, iremos analisar que o emaranhamento é uma quantidade variável que depende da aceleração relativa dos referenciais e, em certa aproximação, relativa à certas regiões na vizinhança de um buraco negro, dado que um dos referenciais é capaz de escapar da queda em direção ao horizonte de eventos enquanto o outro permanece em queda livre.

Abstract

The problem considers an entangled pair of two modes of a massless scalar field with constant relative acceleration. For this, we consider this pair in vacuum, in other words, in Minkowski spacetime, where we use constant relativistic acceleration four-vector. Because of the Unruh effect, an accelerated observer embedded in the fundamental state of this field can detect their modes of excitation. Those excitations are interpreted like a thermal bath characteristic of blackbody radiation with temperature proportional to their relative acceleration. We investigate that the metric that describes the relative acceleration mimics the metric used to describe black holes, in certain approximation. Finally, we will analyse that the entanglement is a variable quantity which depends on the relative acceleration of the two reference frames and, in certain approximation, relative to certain regions in the vicinity of a black hole, given that one of the reference frames is capable to escape the fall toward the black hole horizon while the other reference frame stays in free fall.

Agradecimentos

Aos meus pais Jean e Marta, que me deram suporte e confiança para o desenvolvimento dos meus estudos.

À Maria Carolina, por ter acolhido meus interesses na área de gravitação e por me passar uma das principais referências deste trabalho.

Ao Schor, responsável por ministrar o curso de Relatividade Geral do qual me deu o trabalho de apresentar sobre o Efeito Unruh, essencial para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao Raphael Drumond, que durante a iniciação científica me ensinou muito sobre informação quântica.

Ao José Nogales, professor da UFLA que aceitou me orientar quando ocorreu a morte da nossa querida professora Maria Carolina.

Ao Helvécio, por ter sido peça fundamental quando estive em Lavras sem orientador. Sem ele, provavelmente eu estaria em outra área pesquisa.

Ao Luiz Cleber, por ter aceitado me orientar em momentos em que nada parecia dar certo.

Ao Marcos Sampaio, por ter proposto esse problema tão interessante.

Aos colegas de sala Joilson, Iuri e Gil, que sempre estiveram me apoiando, seja com uma injeção de ânimo e uma boa conversa ou seja com problemas específicos de física.

À UFMG e à UFLA que me deram o suporte estrutural necessário.

Introdução

Para o desenvolvimento deste problema iremos revisar três assuntos essenciais que serão divididos entre os três primeiros capítulos. No primeiro capítulo iremos relembrar como descrevemos a álgebra dos estados quânticos e dos operadores e em seguida definir como podemos quantificar o emaranhamento para estados puros e para estados mistos. No segundo capítulo iremos rever como é feita a teoria quântica de campos para o caso mais simples: o campo escalar sem massa. Também veremos como calculamos o número de partículas de um campo quântico e como é definido o estado de vácuo desse campo. No terceiro capítulo iremos observar algumas ideias da teoria da gravitação moderna e mostrar como é descrito o campo gravitacional de uma massa estática, exigindo a simetria esférica e resolvendo a equação de movimento no vácuo. Finalmente, no quarto capítulo iremos considerar um estado de um par maximamente emaranhado e usaremos as ideias desenvolvidas nos três primeiros capítulos para formular o problema proposto.

Conteúdo

1	Emaranhamento	1
1.1	Introdução	1
1.2	Definição de emaranhamento para estados puros	2
1.3	Matriz densidade	3
1.4	Entropia quântica	5
1.5	Definição de emaranhamento para estados mistos	6
1.6	Alguns critérios de correlações quânticas	7
2	Banho térmico devido à aceleração	9
2.1	Introdução	9
2.2	Referenciais não-inerciais	9
2.3	Transformação de coordenadas	11
2.4	Métrica do espaço-tempo plano não-inercial	13
2.5	Equações de movimento do campo escalar sem massa	14
2.6	Quantização do campo	16
2.7	O número de partículas de um campo	18
2.8	A transformação entre operadores de partículas	19
2.9	A aceleração cria partículas	23
3	Espaço-tempo gerado por uma massa gravitante	29
3.1	Introdução	29
3.2	Dinâmica do espaço-tempo	29
3.3	Solução de vácuo	30
3.4	Simetria esférica	31
3.5	A solução é única	32
3.6	Singularidades	34
3.7	Buraco negro	34
4	Correlações quânticas em referenciais não-inerciais	36
4.1	Introdução	36
4.2	Horizonte de eventos e sub-regiões do espaço-tempo	36
4.3	Expansão do campo escalar	37
4.4	Transformação entre bases de funções	38
4.5	Estado de vácuo	41
4.6	Par emaranhado com aceleração relativa	42
4.7	Correlações quânticas	43
4.8	Métrica próxima ao buraco negro	46
4.9	Considerações finais	47

1 Emaranhamento

1.1 Introdução

Neste capítulo iremos desenvolver critérios e métodos para caracterizar e entender o que são estados quânticos emaranhados, sejam esses estados mistos ou puros. Nos baseamos fortemente no Livro de M. A. Nielsen e I. L. Chuang [2] para o desenvolvimento matemático e notação. Para um entendimento conceitual mais profundo usamos como referência o livro de A. Peres [3] que, curiosamente, evita o nome "emaranhamento". Deste mesmo livro extraímos o exemplo do cristal de calcita da próxima seção. A notação sistemática onde definimos o conjunto de todos os microsistemas quânticos vem do artigo de M. Bunge [4]. Para entender os critérios utilizados para caracterizar emaranhamento em estados mistos estudamos a apostila de A. F. R. de Toledo Piza [5], os artigos de A. Peres [6], da família Horodecki [7] e de M. B. Plenio [8].

O emaranhamento é uma forte correlação que surge entre sistemas quânticos. Esses sistemas podem ser compostos de subsistemas menores e descrever uma variedade de situações reais. Entretanto, quando chegarmos na generalização desejada, critérios para estabelecer e quantificar o emaranhamento só se fazem valer para sistemas muito simples como o sistema de dois níveis compostos de dois subsistemas. Iremos chamar o conjunto de todos os microsistemas de Σ e iremos chamar de $\sigma \in \Sigma$ o sistema de nosso interesse. O menor microsistema puro é o de dois níveis e é representado pelo vetor de estado

$$|\psi_i\rangle = \alpha_i|0\rangle + \beta_i|1\rangle \in \mathcal{H}_i,$$

onde α_i é a amplitude de probabilidade do nível $|0\rangle$, β_i é a amplitude de probabilidade do nível $|1\rangle$ e \mathcal{H}_i representa o espaço de Hilbert associado ao vetor de estado. Para sistemas de duas partes $i = A, B$ temos:

- O vetor de estado representando o sistema σ_A é escrito como $|\psi_A\rangle \in \mathcal{H}_A$,
- O vetor de estado representando o sistema σ_B é escrito como $|\psi_B\rangle \in \mathcal{H}_B$.

É comum entregar o subsistema σ_A para a personagem Alice e entregar o subsistema σ_B para o personagem Bob de forma que esses personagens podem fazer operações locais e trocar comunicação clássica. Dessa forma, são estabelecidos alguns processos de medições quânticas a fim de otimizar algumas operações clássicas. Um exemplo é o algoritmo de Deutsch apresentado na referência [2] página 32.

Pelo princípio da superposição podemos ter o vetor de estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ que representa o sistema conjunto σ escrito como $|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{n-1} \lambda_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$ e para $n = 2$ temos o estado superposto representando sistemas de dois níveis. Os coeficientes λ_{ij} representam a amplitude de probabilidade do nível $|i\rangle \otimes |j\rangle$. Os vetores $|\psi\rangle$ podem representar tanto sistemas emaranhados como sistemas não emaranhados.

1.2 Definição de emaranhamento para estados puros

Queremos estabelecer uma definição que distingue estados emaranhados dos estados separáveis (também conhecidos como estados produto). Para isso vamos considerar um sistema composto pelos subsistemas σ_A e σ_B . Se o estado estiver emaranhado é impossível escrever o vetor de estado que representa o sistema como

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

Reciprocamente, se o estado puder ser descrito pelo vetor $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ então o estado é separável, o que caracteriza a ausência de emaranhamento. Analogamente, um estado puro de n partes é separável se puder ser descrito pelo vetor de estado $|\psi\rangle = \bigotimes_{i=0}^{n-1} |\psi_i\rangle$.

Exemplo: Consideremos o vetor de estado descrevendo um sistema composto de dois níveis

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle \right).$$

Esse estado não descreve um sistema emaranhado pois se fizermos $|\phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ e $|\phi_B\rangle = |1\rangle$ vemos que ele é separável, uma vez que $|\phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$.

Exemplo: Os estados emaranhados mais conhecidos são os estados de Bell [2]. Um dos estados de Bell é descrito pelo vetor de estado

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle + |10\rangle \right),$$

onde estamos usando a notação condensada $|i\rangle \otimes |j\rangle = |ij\rangle$. Para verificar que ele está emaranhado primeiro vamos supor que ele seja separável e investigar a existência dos coeficientes desejados. Os vetores que descrevem cada subsistema são

$$|\phi_A\rangle = \alpha_A |0\rangle + \beta_A |1\rangle,$$

$$|\phi_B\rangle = \alpha_B |0\rangle + \beta_B |1\rangle.$$

Se ele é separável

$$|\phi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle = \alpha_A \alpha_B |00\rangle + \alpha_A \beta_B |01\rangle + \beta_A \alpha_B |10\rangle + \beta_A \beta_B |11\rangle.$$

Então $\alpha_A \alpha_B = 0$, $\alpha_A \beta_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta_A \alpha_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\beta_A \beta_B = 0$, que é um sistema contraditório e elimina nossa premissa que diz que $|\phi\rangle$ é separável. Logo o estado descrito por $|\phi\rangle$ é emaranhado.

O Cristal de Calcita como um Preparador de Estados Emaranhados:

Um cristal de calcita birrefringente é capaz de espalhar um feixe de luz em duas direções diferentes onde podem ser colocados dois detectores a e b . Se considerarmos um único fóton com estado de polarização arbitrário descrito pelo vetor $|\theta\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, com $|0\rangle$ e $|1\rangle$ designando duas polarizações ortogonais definidos pela orientação do cristal, e direção de incidência descrita pelo vetor $|x\rangle$, teremos que o vetor que representa o estado do fóton é $|\phi\rangle = |\theta\rangle \otimes |x\rangle$. Se também considerarmos o vetor de estado que representa o espalhamento na direção do detector a por $|a\rangle$ e o vetor de estado que representa o espalhamento na direção do detector b por $|b\rangle$. Temos que, após passar pelo cristal de calcita, e antes de chegar a qualquer um dos detectores, o estado do fóton é o estado emaranhado descrito por

$$|\phi'\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |a\rangle + \beta|1\rangle \otimes |b\rangle.$$

Curiosamente, se detectarmos o fóton no detector a automaticamente saberemos que o fóton saiu do estado emaranhado e foi para o estado $|0\rangle$ e se detectarmos o fóton no detector b automaticamente saberemos que o fóton saiu do estado emaranhado e foi para o estado $|1\rangle$.

A Rara existência de Estados Puros: Os exemplos descritos nesta seção, assim como outros exemplos envolvendo estados puros, mesmo com suas riquezas de detalhes teóricos, ainda são uma idealização muito simplista do mundo real. Isso ocorre porque nesses exemplos consideramos apenas, como sistema global, o subsistema de nosso interesse. Na verdade, os experimentos feitos à temperatura não-nula estão sujeitos a um banho térmico e de partículas que podem afetar fortemente o subsistema em questão. Dessa maneira, o sistema considerado não poderá ser descrito completamente por um vetor de estado mas como uma mistura estatística de vetores de estado. Para isso teremos que usar o formalismo da matriz densidade, que descreve completamente o estado estocástico do sistema sujeito a, por exemplo, um banho térmico. Esse formalismo também será necessário quando quisermos descrever o estado de um subsistema que está emaranhado. Pois se o estado conjunto for puro e possuir emaranhamento entre as partes, então o estado de cada subsistema não poderá ser descrito por um vetor de estado mas como uma mistura estatística de vetores de estado, independente da existência ou não de um banho térmico. Esse formalismo é mais geral e também inclui os estados puros.

É válido notar que o nosso interesse em estudar problemas sujeitos a um banho térmico se deve ao fato de que, mesmo no vácuo, referenciais com aceleração relativa notam a presença de um banho térmico característico da radiação de corpo negro à temperatura proporcional a essa aceleração. Esse efeito é conhecido como efeito Unruh e será o assunto do Capítulo 2.

1.3 Matriz densidade

Um sistema puro σ que é descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$ também pode ser descrito pela matriz densidade

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Para o caso em que o sistema é descrito por uma mistura estatística de estados puros, queremos que a matriz densidade seja descrita pelo conjunto de distribuição de probabilidades $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, onde cada p_i designa a probabilidade de o sistema estar no estado descrito por $|\psi_i\rangle$. Daí escrevemos

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Dessa forma, podemos extrair algumas propriedades:

ρ é auto-adjunta: imediatamente vemos que $\rho = \rho^\dagger$ pois

$$\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right)^\dagger = \sum_i p_i \left(|\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right)^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

ρ tem traço unitário: se tomarmos o traço de ρ temos

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{Tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1$$

pois para caracterizar o conjunto $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ como uma distribuição de probabilidades, devemos ter $\sum_i p_i = 1$. Além disso, temos que a soma dos autovalores de ρ é sempre igual a unidade, pois a operação do traço é independente da base escolhida. Como ρ é auto-adjunta admite decomposição espectral $\rho = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$. Logo

$$\text{Tr}(\rho) = 1 = \sum_i \lambda_i.$$

ρ é positiva: pegamos um vetor arbitrário $|\phi\rangle$ de mesma dimensão dos $|\psi_i\rangle$ e fazemos

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0$$

pois todo $p_i \geq 0$. Daí segue que todo autovalor $\lambda_i \geq 0$.

ρ representa um estado misto ou um estado puro? Essa pergunta surge naturalmente, uma vez que ρ pode representar tanto estados puros quanto estados mistos. Se ρ é pura então $\rho = |\psi\rangle \langle \psi| = \rho^2$ logo $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. Se ρ é mista então temos pelo menos dois $\lambda_i \neq 0$ de forma que ¹

$$\rho^2 = \left(\sum_i \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \right) \left(\sum_j \lambda_j |v_j\rangle \langle v_j| \right) = \sum_i \lambda_i^2 |v_i\rangle \langle v_i|.$$

Tomando o traço dessa equação $\text{Tr}(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2$. Como os autovalores são todos positivos e a soma de todos eles é igual a um, vemos que $\lambda_i \in [0, 1]$ e também que $\lambda_i \geq \lambda_i^2$. Dessa forma estabelecemos o critério:

¹É importante notar que essa igualdade só vale para o caso em que os autovalores são não-degenerados, no caso degenerado teríamos um termo a mais somando sobre os operadores construídos com vetores dos auto-espacos degenerados. Porém, como queremos tirar o traço desta equação, esses termos não irão contribuir.

Se $Tr(\rho^2) = 1$ então ρ representa um estado puro;

Se $Tr(\rho^2) < 1$ então ρ representa um estado misto.

A operação do traço parcial: Quando temos um sistema σ composto de dois subsistemas σ_A e σ_B é possível que estejamos interessados em saber o estado apenas de uma das partes. Para esse caso, existe uma operação chamada de traço parcial que pega uma matriz densidade ρ descrevendo o sistema conjunto e leva em uma matriz densidade descrevendo somente o sistema de interesse, ρ^A ou ρ^B . Ela é definida como

$$Tr_B(|\psi_A\rangle\langle\phi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\phi_B|) = \langle\phi_B|\psi_B\rangle|\psi_A\rangle\langle\phi_A|,$$

e satisfaz $Tr_B(A \otimes B + A' \otimes B') = Tr_B(A \otimes B) + Tr_B(A' \otimes B')$. Onde $|\psi_A\rangle$ e $|\phi_A\rangle$ são quaisquer vetores do espaço de estados de σ_A e $|\psi_B\rangle$ e $|\phi_B\rangle$ são quaisquer vetores do espaço de estados de σ_B . A definição é inteiramente análoga para o traço parcial no estado σ_A . Dessa forma podemos extrair, do estado conjunto, o estado de cada subsistema separado:

$$\rho^A = Tr_B(\rho),$$

$$\rho^B = Tr_A(\rho).$$

O leitor interessado em entender porque é essa a operação que extrai a matriz densidade do subsistema da matriz densidade do sistema conjunto deve procurar a *Caixa 2.6, página 107* da referência [2].

1.4 Entropia quântica

Entropia é uma variável que mede a quantidade de informação contida num sistema. Suponhamos que descobrimos o valor de uma variável aleatória X . A entropia clássica H , ou entropia de Shannon, quantifica o quanto de informação ganhamos, na média, quando descobrimos o valor dessa variável. Da mesma maneira, H quantifica a quantidade de incerteza que temos sobre X antes da medição. Intuitivamente, esperamos que a quantidade de informação numa dada variável aleatória X não dependa das características dos possíveis estados, mas sim da distribuição de probabilidades $\{p_i\}$. A entropia de Shannon é definida como ²

$$H(X) = - \sum_i p_i \log_2 p_i.$$

Generalizamos o conceito de entropia de distribuições de probabilidades clássicas para a entropia de von Neumann, que mede a quantidade de informação de um sistema quântico descrito por ρ , escrevendo

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho).$$

Para entender a semelhança entre as entropias clássica e quântica e argumentar a validade dessa generalização, escrevemos a decomposição espectral de $\rho =$

²Aqui, e quando definirmos a entropia de von Neumann, estaremos usando a convenção que $0 \log_2 0$ é zero, uma vez que a função $x \log_2 x$ não é bem definida para $x = 0$.

$\sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$ e obtemos ³

$$S(\rho(\{\lambda_i\})) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i.$$

Não faz diferença se o sistema descrito por ρ é um sistema simples ou composto. No caso composto, a entropia acima definida mede a quantidade de informação contida no sistema conjunto.

Definimos a entropia relativa de dois sistemas separados descritos por ρ^A e ρ^B como ⁴

$$S(\rho^A || \rho^B) = \text{Tr}(\rho^A \log_2 \rho^A) - \text{Tr}(\rho^A \log_2 \rho^B) \geq 0.$$

Quando consideramos dois sistemas σ_A e σ_B é comum que um dos dois subsistemas, por exemplo σ_B , seja conhecido. Então queremos saber apenas a entropia do subsistema σ_A . Para isso definimos a entropia condicional

$$S(\rho^A | \rho^B) = S(\rho) - S(\rho^B).$$

Por fim, definimos a informação mútua, que expressa a quantidade de informação comum a ambos os sistemas, como

$$S(\rho^A : \rho^B) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho).$$

Na seção 1.6, quando formos estabelecer alguns critérios para as correlações quânticas, sendo uma dessas correlações o emaranhamento, usaremos a informação mútua e outras quantidades construídas com as entropias acima definidas. É importante notar que a entropia de von Neumann é uma escolha e não provém de nenhuma construção lógica que a torne única ou mais adequada a problemas em geral. No entanto, seguimos Fuentes e Mann [1], que consideram a entropia de von Neumann como um quantificador de emaranhamento para estados puros. Enquanto que, para estados mistos, várias medidas são propostas e as de nossa escolha serão a negatividade logarítmica, definida na seção 1.6, e a informação mútua.

1.5 Definição de emaranhamento para estados mistos

Um estado misto de um sistema de duas partes descrito por $\rho^A \in \mathcal{H}_A$ e $\rho^B \in \mathcal{H}_B$ pode ser descrito por uma matriz $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Caracterizamos o estado como separável se ele puder ser escrito como [6]

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B,$$

onde ρ_i^A são matrizes densidade do subsistema σ_A e ρ_i^B são matrizes densidade do subsistema σ_B . Se o estado não for separável então ele está emaranhado.

³Dessa vez estamos considerando a matriz ρ como não-degenerada, para simplificar. Para o caso degenerado a entropia deveria incluir termos somando sobre o produto escalar entre os vetores dos auto-espacos degenerados.

⁴A desigualdade é consequência da definição e está escrita na forma de um teorema, conhecido como Desigualdade de Klein e pode ser encontrado na referência [2], página 511.

Essa definição para emaranhamento não é uma definição operacional pois não há procedimento ou critério geral que nos garanta a separabilidade. A fim de procurar uma medida de emaranhamento $M[\rho]$, apresentamos algumas condições gerais que uma medida desse tipo deve satisfazer [5]:

- $M[\rho] = 0$ se ρ representa um estado separável;
- $M[\rho]$ é monotônico, ou seja, se Λ é uma operação que não é capaz de gerar emaranhamento, então $M[\rho] \geq M[\Lambda(\rho)]$;
- $M[\rho]$ é sub-aditiva, ou seja, $M[\rho] \leq M[\rho^A \otimes \rho^B]$;
- $M[\rho]$ é côncava, ou seja, $M[\lambda\rho + (1 - \lambda)\rho'] \geq \lambda M[\rho] + (1 - \lambda)M[\rho']$, para $\lambda \in [0, 1]$.

Para o caso em que o sistema σ é composto de dois subsistemas de dois níveis, uma quantidade que satisfaz todas as condições acima é a chamada negatividade $N[\rho]$, que iremos trabalhar na próxima seção.

1.6 Alguns critérios de correlações quânticas

Uma condição suficiente para caracterizar o emaranhamento é dada pelo mapa positivo Λ que leva operadores densidade ρ positivos e de traço finito em operadores $\Lambda(\rho)$ positivos e de traço finito. Supondo que ρ é separável e usando a extensão $\Lambda \otimes I$ temos que $(\Lambda \otimes I)\rho = \sum_i p_i \Lambda(\rho_i^A) \otimes \rho_i^B$ é um operador positivo. Desta forma estabelecemos um critério suficiente, e necessário [7] para sistemas onde $\dim \mathcal{H}_A = 2$ e $\dim \mathcal{H}_B = 2, 3$, para o emaranhamento:

- Se $(\Lambda \otimes I)\rho$ for um operador positivo então ρ pode ter emaranhamento ou ser separável;
- Se $(\Lambda \otimes I)\rho$ possuir pelo menos um autovalor negativo então ρ está emaranhado.

Um critério algébrico simples desenvolvido por Peres [6] mostra que o mapa de transposição parcial $T \otimes I$ fornece um mapa positivo. Tecnicamente, se temos um estado de duas partes descrito por $\rho = \{\rho_{m\mu, n\nu}\}$, onde m, n designam as componentes do sistema σ_A e μ, ν designam as componentes do sistema σ_B , então podemos calcular os autovalores do operador $(T \otimes I)\rho = \{\rho_{n\mu, m\nu}\}$ para utilizar o critério apresentado acima. Caso encontrarmos algum autovalor negativo saberemos que o estado representado por ρ está emaranhado. Como o critério é apenas suficiente para o caso geral, se encontrarmos todos os autovalores positivos ou nulos nada nos garante a separabilidade do sistema. Nos casos onde temos dois subsistemas de dois níveis ou um subsistema de dois níveis e um subsistema de três níveis o critério se torna também necessário, então se $(T \otimes I)\rho$ for um operador positivo então ρ é separável [6].

Como foi adiantado na seção anterior, existe uma quantidade N , chamada de negatividade, que mede a quantidade de emaranhamento num sistema descrito por ρ . Ela é definida como a soma dos módulos dos autovalores negativos do operador $(T \otimes I)\rho$. Ou seja, se μ_i são os autovalores negativos de $(T \otimes I)\rho$ então

$$N(\rho(\{\mu_i\})) = \sum_i |\mu_i|.$$

A negatividade, assim como a negatividade logarítmica

$$LN(\rho) = 1 + \log_2 \left(\frac{1}{2} + \sum_i |\mu_i| \right),$$

satisfazem todas as condições para uma medida de emaranhamento legítima.

Quando quisermos quantificar as correlações totais do sistema, isto é, as correlações clássicas mais as correlações quânticas, iremos usar a informação mútua, definida na seção anterior.

2 Banho térmico devido à aceleração

2.1 Introdução

O efeito que iremos estudar nesse capítulo é o chamado efeito Unruh, que foi proposto por William George Unruh em 1976 [9]. O efeito, embora curioso, é uma consequência natural da Teoria Quântica de Campos e consiste em utilizar a interpretação usual de partículas de um campo quantizado para mostrar que dois referenciais com aceleração relativa constante discordam quanto ao estado de vácuo do espaço-tempo. Fazemos isso pelas transformações de Bogolyubov, que levam os estados quânticos de vácuo de um referencial inercial a estados térmicos de um referencial acelerado. Nos baseamos no Livro de V. F. Mukhanov e S. Winitzki [9] para desenvolvimento matemático e conceitual. Estudamos as transformações de Lorentz no livro de J. D. Jackson [10] e focamos nos resultados promissores de I. Fuentes em suas notas de aula em 2010 [11].

A linha de mundo de um referencial é a trajetória espaço-temporal que ela descreve e ela pode ser parametrizada pelo tempo próprio deste mesmo referencial. Escrevemos a linha de mundo (ou quadri-vetor posição) como

$$x^\mu = (t, x, y, z).^5$$

Derivando com relação ao tempo próprio obtemos o quadri-vetor velocidade e o quadri-vetor aceleração

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu = v^\mu = (\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad e \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \ddot{x}^\mu = a^\mu = (\ddot{t}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

De fato iremos simplificar um pouco e usaremos somente as duas primeiras coordenadas (t, x) . A parametrização pelo tempo próprio implica em

$$\dot{x}^\mu = (\gamma, \gamma v, 0, 0)$$

onde $v = \frac{dx}{dt}$, $\gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ e já estamos assumindo que as coordenadas y e z permanecem constantes durante o movimento.

2.2 Referenciais não-inerciais

Queremos estudar as relações que existem entre referenciais não-inerciais. Iremos estudar o problema onde um dos referenciais permanece inercial enquanto o outro referencial tem aceleração constante em relação ao referencial inercial adotado. Definir a aceleração constante não é tão imediato como na mecânica clássica e então fazemos o uso de um novo conjunto de referenciais: os referenciais co-móveis, um referencial co-móvel para cada tempo t . Deles, temos que a aceleração própria do referencial acelerado é, por definição, o vetor \vec{a} medido no referencial co-móvel em t_0 . As seguintes convenções serão adotadas:

- O referencial inercial tem coordenadas (t, x) ;

⁵Ao descrever o espaço-tempo relativístico, estamos usando duas convenções: a assinatura da métrica é $(1, -1, -1, -1)$; e estamos usando o sistema de unidades no qual a velocidade da luz $c = 1$.

- O referencial acelerado tem coordenadas (τ, χ) ;
- O referencial co-móvel tem coordenadas (t_c, x_c) e ele está definido somente para o tempo t_0 .

A parametrização pelo tempo próprio implica em $v^\mu v_\mu = 1$. No referencial co-móvel definido no tempo τ_0 , que corresponde ao mesmo instante de tempo t_0 , temos

$$x^\mu(\tau_0) = (\tau_0, 0, 0, 0)$$

então

$$v^\mu(\tau_0) = (1, 0, 0, 0).$$

Derivando $v^\mu v_\mu = 1$ temos

$$a^\mu v_\mu + v^\mu a_\mu = 0$$

então

$$a^\mu v_\mu = 0$$

logo

$$\dot{t}(\tau_0) = 0$$

no referencial co-móvel. No referencial co-móvel também temos que $\dot{t} = \frac{dt_c}{d\tau}$. Agora queremos mostrar que a aceleração é a mesma no referencial inercial e no referencial co-móvel.

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt_c^2} = \frac{d}{dt_c} \left(\frac{dx^\mu}{dt_c} \right) = \frac{1}{\dot{t}} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\dot{t}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{1}{\dot{t}^2} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{\dot{t}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\dot{t}} \right)$$

Queremos calcular isso em $\tau = \tau_0$ mas $\dot{t}(\tau_0) = 1$ e

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\dot{t}(\tau_0)} \right) = - \frac{1}{\dot{t}^2(\tau_0)} \frac{d\dot{t}}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0} = -\ddot{t}(\tau_0) = 0$$

então $\frac{d^2 x^\mu}{dt_c^2} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$ como queríamos.

É importante notar que mesmo que $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ no referencial co-móvel, $a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} \neq 0$ pois temos um referencial co-móvel para cada tempo τ .

Uma vez que a aceleração está restrita ao eixo x temos $a^\mu = (0, a, 0, 0)$ e as coordenadas y e z permanecem constantes durante todo o movimento. Então só precisamos encontrar as funções $t(\tau)$ e $x(\tau)$ para descrever o movimento completo, para isso usamos os invariantes escalares:

$$v^\mu v_\mu = 1 \quad e \quad a^\mu a_\mu = -a^2.$$

Deles encontramos as relações

$$\dot{t} = \sqrt{1 + \dot{x}^2} \quad e \quad \frac{d\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = a d\tau.$$

Integrando a segunda encontramos

$$a(\tau - \tau_0) = \sinh^{-1}(\dot{x}(\tau)) - \sinh^{-1}(\dot{x}(\tau_0)).$$

Mas usando as condições iniciais $\tau_0 = 0$ e $\dot{x}(\tau_0) = 0$ e a primeira relação, encontramos

$$\dot{t}(\tau) = \cosh(a\tau) \quad e \quad \dot{x}(\tau) = \sinh(a\tau).$$

Integrando novamente, obtemos

$$t(\tau) = t(0) + \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad e \quad x(\tau) = x(0) - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cosh(a\tau).$$

Para obter uma forma mais simples para a linha de mundo podemos usar as condições iniciais $t(0) = 0$ e $x(0) = \frac{1}{a}$ e obter

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad e \quad x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh(a\tau).$$

Dessa relação vemos que referenciais acelerados movem-se em hipérbolas espaço-temporais em um diagrama (t, x) .

2.3 Transformação de coordenadas

Queremos encontrar a transformação entre as coordenadas inerciais (t, x) e as coordenadas aceleradas (τ, χ) . Para isso, suponha que o referencial acelerado carrega uma barra de medição (ou uma régua) de tamanho χ_0 com uma das extremidades na origem. No referencial co-móvel a barra de medição é representada pelo vetor $s_c^\mu = (\tau, \chi_0) - (\tau, 0) = (0, \chi_0)$ pois a medição das extremidades deve ocorrer no mesmo instante de tempo. No referencial inercial descrevemos a barra de medição usando o vetor s^μ e para encontrá-lo primeiro apresentamos as transformações de Lorentz

$$t' = \gamma(t - vx)$$

e

$$x' = \gamma(x - vt),$$

que deve ser entendida como sendo a transformação de um sistema de coordenadas parado (t, x) para um sistema de coordenadas (x', t') que adquire uma velocidade v . Então temos que a matriz $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ que descreve a transformação

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$$

só pode ser a matriz

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}.$$

No entanto nos interessa a transformação inversa

$$x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\mu'} x^{\mu'}$$

que representa a transformação de um sistema de coordenadas (t', x') que adquire uma velocidade v para um sistema de coordenadas parado (t, x) . Facilmente encontramos que a matriz inversa é

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v \\ \gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_c^0 \\ s_c^1 \end{pmatrix},$$

Usando as relações exibidas na introdução, que descrevem o quadri-vetor velocidade na parametrização pelo tempo próprio $\dot{x}^\mu(\tau) = (\dot{t}, \dot{x}) = (\gamma, \gamma v)$, e o vetor que representa a barra de medição, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{t} & \dot{x} \\ \dot{x} & \dot{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\chi_0 \\ \dot{t}\chi_0 \end{pmatrix}.$$

Então $s^0 = \dot{x}\chi_0$ e $s^1 = \dot{t}\chi_0$.

No referencial inercial temos que a extremidade da barra de medição se relaciona com as coordenadas do referencial acelerado por

$$t(\tau, \chi) = t(\tau) + s^0 \quad e \quad x(\tau, \chi) = x(\tau) + s^1.$$

Considerando uma régua de tamanho arbitrário $\chi_0 = \chi$ temos

$$t(\tau, \chi) = t(\tau) + \frac{dx}{d\tau}\chi \quad e \quad x(\tau, \chi) = x(\tau) + \frac{dt}{d\tau}\chi.$$

Usando a linha de mundo do referencial acelerado com as condições iniciais já escolhidas obtemos a transformação de coordenadas entre o referencial acelerado e o referencial inercial

$$\begin{aligned} t(\tau, \chi) &= \frac{1 + a\chi}{a} \sinh(a\tau) & \text{com} & \quad t(0) = 0 \\ x(\tau, \chi) &= \frac{1 + a\chi}{a} \cosh(a\tau) & \text{com} & \quad x(0) = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Facilmente encontramos as transformações inversas

$$\begin{aligned} \tau(t, x) &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x+t}{x-t} \\ \chi(t, x) &= \sqrt{x^2 - t^2} - \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Se analisarmos o domínio e a imagem dessas funções de duas variáveis, percebemos que as coordenadas do referencial acelerado não são capazes de descrever todo o espaço-tempo descrito pelas coordenadas do referencial inercial. Isso acontece porque a função logarítmo não está definida para variáveis nulas ou negativas no corpo dos reais, assim como a função raiz não está definida para variáveis negativas no corpo dos reais. Logo, essa mudança de coordenadas só descreve uma parcela do espaço-tempo que é descrito pelas coordenadas do referencial inercial. Nesse caso, dividimos o espaço-tempo em duas regiões, uma acessível ao referencial acelerado com aceleração a e outra, acessível a outro referencial acelerado com aceleração $-a$. Ambas regiões do tipo-espaço quando vistas do referencial inercial.

2.4 Métrica do espaço-tempo plano não-inercial

Nesta seção queremos usar as transformações de coordenadas obtidas na seção anterior para encontrar a métrica do espaço-tempo vista por um referencial acelerado. Estamos considerando o espaço-tempo sem curvatura, ou seja, em um referencial inercial a métrica para esse espaço-tempo é a métrica de Minkowski e se escreve

$$ds^2 = dt^2 - dx^2.$$

Usando as transformações de coordenadas

$$t = \frac{1 + a\chi}{a} \sinh(a\tau), \quad x = \frac{1 + a\chi}{a} \cosh(a\tau).$$

e calculando as diferenciais

$$dt = (1 + a\chi) \cosh(a\tau) d\tau + \sinh(a\tau) d\chi$$

$$dx = (1 + a\chi) \sinh(a\tau) d\tau + \cosh(a\tau) d\chi$$

$$dt^2 = (1 + a\chi)^2 \cosh^2(a\tau) d\tau^2 + \sinh^2(a\tau) d\chi^2 + (1 + a\tau) \sinh(a\tau) \cosh(a\tau) d\tau d\chi$$

$$dx^2 = (1 + a\chi)^2 \sinh^2(a\tau) d\tau^2 + \cosh^2(a\tau) d\chi^2 + (1 + a\tau) \sinh(a\tau) \cosh(a\tau) d\tau d\chi$$

obtemos a métrica do espaço-tempo plano nas coordenadas de um referencial acelerado com aceleração a :

$$ds^2 = (1 + a\chi)^2 d\tau^2 - d\chi^2,$$

conhecida como a métrica de Rindler.

No caso de uma única coordenada espacial, queremos escrever a métrica de Rindler $g_{\mu\nu}$ numa forma conforme, isto é, queremos que a métrica de Rindler seja apenas uma mudança de escala local da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, ou seja

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\sigma) \eta_{\mu\nu}.$$

Onde Ω^2 é o fator conforme que procuramos. Um dos interesses em encontrar essa transformação conforme é que esse tipo de transformação deixa as curvas nulas invariantes⁶. Assim, curvas nulas em uma dada métrica são as mesmas em uma outra métrica conformalmente transformada. Outro interesse vem da simplificação das contas para o caso bidimensional que iremos comentar mais à frente.

Observando a forma da métrica de Rindler, procuramos uma nova coordenada espacial ξ tal que $d\chi = (1 + a\chi)d\xi$ para podermos obter em seguida

$$ds^2 = (1 + a\chi(\xi))^2 (d\tau^2 - d\xi^2)$$

⁶Curvas nulas são as trajetórias espaço-temporais descritas por partículas sem massa. O conjunto dessas curvas forma aquilo que chamamos de cone de luz para o caso inercial. Para o caso acelerado, esses cones se inclinam formando outro tipo de superfície mas com as mesmas características de causalidade dos cones.

com o fator conforme desejado. Podemos integrar a equação na forma diferencial da nova coordenada

$$d\xi = \frac{d\chi}{1 + a\chi}$$

para obter

$$\xi = \frac{1}{a} \ln(1 + a\chi).$$

O fator conforme escrito nas novas coordenadas é

$$(1 + a\chi(\xi)) = e^{a\xi}.$$

Portanto podemos escrever a métrica de Rindler

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 - d\xi^2)$$

e a nova transformação de coordenadas

$$t(\tau, \xi) = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\tau), \quad x(\tau, \xi) = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\tau).$$

2.5 Equações de movimento do campo escalar sem massa

A interpretação de partículas surge naturalmente quando quantizamos o campo no formalismo canônico [9]. Iremos quantizar esse campo no referencial acelerado e no referencial inercial na próxima seção. Em seguida, iremos comparar o conteúdo de partículas de um estado do ponto de vista de cada um dos referenciais. Nessa seção vamos obter as equações de movimento de um campo escalar sem massa. As partículas desse campo devem ser interpretadas como bósons neutros sem massa. Se quiséssemos entender o comportamento de elétrons ou fótons nesses referenciais, deveríamos quantizar um campo de Dirac ou um campo de Maxwell, respectivamente. Mas iremos seguir na linha de raciocínio dos bósons neutros sem massa por simplicidade.

A ação de um campo ϕ escrita nas coordenadas do referencial inercial é

$$S[\phi(x, t)] = \frac{1}{2} \int dt dx \sqrt{-\det \eta} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi).$$

Fazendo a transformação conforme $g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$ calculamos $\det g = \Omega^4 \det \eta$ então $\sqrt{-\det g} = \Omega^2 \sqrt{-\det \eta}$ e a métrica inversa $g^{\mu\nu} = \Omega^{-2} \eta^{\mu\nu}$. Daí escrevemos a ação do campo ϕ nas coordenadas do referencial acelerado

$$\begin{aligned} S[\phi(\xi, \tau)] &= \frac{1}{2} \int d\tau d\xi \sqrt{-\det g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi), \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau d\xi \Omega^2 \sqrt{-\det \eta} \Omega^{-2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) \end{aligned}$$

e os fatores conformes se cancelam. Logo, temos a mesma ação para ambos os referenciais e, portanto, mesmas equações de movimento.

Concluimos que a teoria de um campo escalar sem massa em um espaço-tempo bidimensional possui uma representação conforme. A invariância conforme causa uma grande simplificação da teoria bidimensional, mas note que em quatro dimensões o campo escalar não é conformalmente acoplado devido a $\sqrt{-\det g} = \Omega^4 \sqrt{-\det \eta}$.

Procuramos um extremo desta ação fazendo

$$\begin{aligned}\delta S &= 0 \\ &= \frac{1}{2} \int \delta \left[(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_1 \phi)^2 \right] dx^0 dx^1,\end{aligned}$$

onde $x^0 = t$ e $x^1 = x$ no referencial inercial e $x^0 = \tau$ e $x^1 = \xi$ no referencial acelerado.

$$\delta S = \int \left[(\partial_0 \phi) \partial_0 \delta \phi - (\partial_1 \phi) \partial_1 \delta \phi \right] dx^0 dx^1.$$

Podemos integrar parcialmente cada termo dessa integral para obter

$$\delta S = \int \left[-\partial_0(\partial_0 \phi) \delta \phi + \partial_1(\partial_1 \phi) \delta \phi \right] dx^0 dx^1 + \text{termos de fronteira}.$$

Iremos desprezar esses termos de fronteira argumentando que a ação não varia nos extremos, isto é, conhecemos as condições iniciais e condições de fronteira do campo ϕ .

$$\delta S = \int \left[-\partial_0^2 \phi + \partial_1^2 \phi \right] \delta \phi dx^0 dx^1 = 0$$

então obtemos as equações de movimento, uma para cada referencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = 0.$$

Para obter a solução dessas equações é necessário escolher as condições de fronteira para o campo ϕ . Nos interessa ver o campo em todo o espaço, ou seja, queremos que a coordenada espacial varie de $-\infty$ até $+\infty$. Formalmente, se quisermos descrever o campo em todo o espaço devemos impor as condições de fronteira nas quais o campo seja zero para um dado L finito. Após obter a solução, tomamos o limite para L tendendo ao infinito. Para o caso onde o espaço é limitado, obteríamos ondas senoidais expressas por senos e cossenos com vetor de onda dado por

$$k = \frac{2\pi n}{L},$$

onde n é um número inteiro. Dessa forma, o número de onda k é um múltiplo de inteiro e os estados são contáveis. Quando tomarmos o limite para L tendendo ao infinito a diferença entre dois valores de k se torna zero e então teremos que o número de onda k pode passar a valer qualquer número real.

Nesse trabalho, iremos tratar de maneira não-formal, de modo que já tomaremos o limite para o espaço infinito de antemão, onde o número de onda k pertence aos números reais. Mais à frente, quando precisarmos contar os estados, usaremos a aproximação onde o espaço é muito grande, mas finito. Isso

nos permitirá contar os estados e construir o espaço de Fock associado a eles. O leitor que ainda não viu a solução de ondas num espaço limitado deve recorrer a referência [9], essencial para a compreensão do caso que iremos tratar.

Levando em conta essa aproximação para o espaço muito grande, escrevemos o campo no referencial inercial $\phi(t, x)$ na decomposição espacial de Fourier

$$\phi(t, x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \phi_k(t)$$

e usando a equação de movimento obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2} + k^2 \phi_k = 0.$$

Essas equações (uma para cada valor de k), descrevem um conjunto de osciladores harmônicos de frequência $\omega = |k|$ e cada ϕ_k deve ser entendido como um modo de momentum k do campo $\phi(x, t)$. Esses modos podem ser escritos usando a base de funções

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{i\omega t}, \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \right\}.$$

Daí escrevemos

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(a_k e^{i\omega t} + b_k e^{-i\omega t} \right)$$

que são as soluções para os modos do campo $\phi(t, x)$. Agora que temos a solução para os modos podemos usar a decomposição espacial de Fourier para obter o campo. Nos interessa ver o campo ϕ não somente como uma função do espaço-tempo mas como um operador hermiteano pertencente a um espaço de Hilbert. Agora trataremos da quantização do campo ϕ .

2.6 Quantização do campo

Na quantização canônica as coordenadas generalizadas $\phi(t)$ e os momentos generalizados $\pi(t)$ são substituídos por operadores pertencentes a um espaço de Hilbert. Em seguida postulamos a relação de comutação de Heisenberg em tempos iguais para o operador campo e o operador momento ⁷

$$[\hat{\phi}(t), \hat{\pi}(t)] = i.$$

Percebemos que com essa nova relação a solução $\hat{\phi}(t) = 0$, que antes era perfeitamente admissível para $\phi(t)$, agora não é possível pois viola a relação de comutação de Heisenberg. Esse é o processo para quantizar um único oscilador.

Para quantizar um campo, fazemos um processo semelhante, só que dessa vez postulamos a relação de comutação para o campo

$$[\hat{\phi}(t, x), \hat{\pi}(t, y)] = i\delta(x - y).$$

⁷Estamos usando um sistema de unidades no qual a constante de Planck $\hbar = 2\pi$ e a constante de Boltzmann $k_B = 1$.

Como as variáveis são contínuas e queremos expressá-las de forma discreta fazemos a aproximação para o espaço finito. Se quiséssemos ser mais rigorosos, deveríamos quantizar esse campo dentro de uma caixa com volume finito para, em seguida, levar os limites da caixa para o infinito obtendo assim a quantização do espaço livre que queremos. O que nos interessa aqui é que os modos normais de Fourier sejam contáveis, por simplificação. Usando a transformação de Fourier apresentada na seção anterior, encontramos o conjunto de relações de comutação para os modos do campo

$$[\hat{\phi}_k(t), \hat{\pi}_l(t)] = i\delta(k + l),$$

uma para cada par de modos k e l .

Definimos os operadores de aniquilação e criação como

$$\begin{aligned}\hat{a}_k(t) &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{\phi}_k(t) + \frac{i}{\omega} \hat{\pi}_k(t) \right] \\ \hat{a}_k^\dagger(t) &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\hat{\phi}_k(t) - \frac{i}{\omega} \hat{\pi}_k(t) \right]\end{aligned}$$

e conseqüentemente encontramos as relações de comutação para os operadores de aniquilação e criação independentes do tempo

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta(k - l).$$

que têm evolução temporal dada por

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k e^{-i\omega t} \qquad \hat{a}_k^\dagger(t) = \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega t}.$$

Utilizando essas representações para \hat{a} e \hat{a}^\dagger o operador modo $\hat{\phi}_k(t)$ pode ser escrito em termos desses operadores

$$\hat{\phi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-k}^\dagger e^{i\omega t} \right),$$

onde escolhemos o índice $-k$ no segundo operador por conveniência. Escrevemos esses modos quantizados na decomposição de Fourier de $\phi(t, x)$ para obter o operador campo $\hat{\phi}(t, x)$:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(t, x) &= \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \hat{\phi}_k(t) \\ &= \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{ikx} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-k}^\dagger e^{i\omega t} \right)\end{aligned}$$

e como $k \in (-\infty, \infty)$ podemos fazer a mudança $k \rightarrow -k$ no segundo termo do integrando com o objetivo de torná-lo hermiteano:

$$\hat{\phi}(t, x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}_k e^{-i\omega t + ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i\omega t - ikx} \right).$$

Da mesma maneira faríamos para o campo nas coordenadas do referencial acelerado (τ, ξ) , que naturalmente tem operadores de aniquilação e criação diferentes mas obedecendo as mesmas relações de comutação:

$$\hat{\phi}(\tau, \xi) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\hat{b}_k e^{-i\omega\tau + ik\xi} + \hat{b}_k^\dagger e^{i\omega\tau - ik\xi} \right),$$

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] = \delta(k - l).$$

Agora que temos o campo quantizado em ambos os referenciais precisamos entender como é interpretada a quantidade de partículas de um campo. Em seguida, encontraremos a transformação dos operadores de aniquilação e criação entre os referenciais inercial e acelerado, que é a transformação de Bogolyubov.

2.7 O número de partículas de um campo

Nesta seção iremos desenvolver a interpretação da quantidade de partículas de um campo num certo estado. Sabemos que a energia de um único oscilador, ou no nosso caso, de um modo k do campo, é

$$E_{n,k} = \left(\frac{1}{2} + n_k \right) \omega$$

lembrando que $\omega = |k|$ para o campo escalar sem massa. Essa energia vem da equação de autovalor da atuação do Hamiltoniano H_k de um oscilador no modo k nos seus autovetores

$$H_k |n_k\rangle = E_{n,k} |n_k\rangle.$$

A energia de ponto zero é interpretada como a ausência de partículas, ou seja, o vácuo. Dessa forma, interpretamos a diferença entre a energia do modo k e a energia de ponto zero

$$\Delta E_{n,k} = E_{n,k} - E_{0,k} = n_k \omega$$

como sendo a energia de n partículas com momentum k . Logo n_k é o número de partículas no particular modo k . No entanto não podemos nos restringir somente a um modo particular e então se tivermos n partículas no modo k e nenhuma partícula nos demais modos escrevemos o estado do campo como sendo

$$|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \otimes |n_k\rangle \otimes |0\rangle \dots \otimes |0\rangle$$

ou de maneira suscinta

$$|0, \dots, 0, n_k, 0, \dots, 0\rangle$$

onde n_k se posiciona na k -ésima posição do vetor. Generalizamos esse estado para o estado com n_1 partículas no modo $k = 1$, n_2 partículas no modo $k = 2$, etc:

$$|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle.$$

Agora queremos mostrar que o operador hermiteano

$$N_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

é operador que descreve o número de partículas no modo k no estado $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$. Para isso usamos a atuação dos operadores nesses estados

$$\begin{aligned}\hat{a}_k|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle &= \sqrt{n_k}|n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle \\ \hat{a}_k^\dagger|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle &= \sqrt{n_k + 1}|n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle.\end{aligned}$$

Daí

$$N_k|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = n_k|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$$

temos um conjunto de equações de autovalor para cada modo k , como procurávamos.

Se quisermos saber o valor médio de partículas num determinado modo k de um campo no estado $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$ calculamos a amplitude de probabilidade

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | N_k | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle.$$

Veremos adiante que existe uma relação entre os operadores de aniquilação e criação entre o referencial inercial $\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger$ e o referencial acelerado $\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger$. Dessa forma consideraremos o estado de vácuo visto pelo referencial inercial e usaremos os operadores do referencial acelerado para calcular o número médio de partículas. Agora precisamos ficar convencidos que o estado de vácuo visto pelo referencial inercial não é o mesmo visto pelo referencial acelerado.

O estado de vácuo é o estado onde o número de partículas é zero em todos os modos do campo, ou seja,

$$|0, \dots, 0, \dots\rangle.$$

Dessa maneira, se atuarmos operadores de aniquilação no estado de vácuo, necessariamente obteremos o vetor nulo ⁸

$$\hat{a}_k|0, \dots, 0, \dots\rangle = 0 \quad \forall k.$$

Esse é o vácuo visto pelo referencial inercial mas ainda não sabemos como atua o operador \hat{b}_k nesse estado. No entanto, podemos definir o estado de vácuo visto pelo referencial acelerado da mesma maneira

$$\hat{b}_k|0, \dots, 0, \dots\rangle' = 0 \quad \forall k$$

onde só saberemos que $|0, \dots, 0, \dots\rangle \neq |0, \dots, 0, \dots\rangle'$ quando encontrarmos, na próxima seção, a relação entre os operadores \hat{a}_k e \hat{b}_k .

2.8 A transformação entre operadores de partículas

Nesta seção obteremos a transformação de Bogolyubov, que é a transformação que relaciona os operadores de aniquilação e criação \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger do referencial inercial com os operadores de aniquilação e criação \hat{b}_k e \hat{b}_k^\dagger do referencial acelerado. Antes de apresentar a transformação queremos apenas mostrar o que de fato queremos calcular.

⁸O símbolo \forall deve ser lido como "para todo"

Nosso problema consiste em considerar o vácuo global visto pelo referencial inercial $|0, \dots, 0, \dots\rangle$ e utilizar o operador que descreve o número de partículas do referencial acelerado

$$M_k = \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$$

e calcular a amplitude de probabilidade $\langle 0, \dots, 0, \dots | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | 0, \dots, 0, \dots \rangle$ que representa o número médio de partículas vista pelo referencial acelerado do vácuo visto pelo referencial inercial. Escreveremos de forma suscinta o vácuo global

$$|0, \dots, 0, \dots\rangle = |O\rangle$$

lembrando que, em princípio, o vácuo visto pelo referencial acelerado $|O\rangle'$ é diferente de $|O\rangle$.

Gostaríamos de repetir com outras palavras o que já foi falado, pois é nesse cálculo que está a ideia do efeito Unruh. A quantidade

$$\langle M_k \rangle = \langle O | \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k | O \rangle$$

representa o número médio de partículas que o referencial acelerado é capaz de detectar dado que o referencial inercial está imerso no vácuo global. Então só precisamos saber como atua os operadores \hat{b}_k e \hat{b}_k^\dagger nos estados de vácuo $|O\rangle$.

Para encontrar as transformações de Bogolyubov introduzimos novos sistemas de coordenadas conhecidos como coordenadas do cone de luz. Para o referencial inercial fazemos a mudança

$$u = t - x \qquad v = t + x$$

e para o referencial acelerado

$$\mu = \tau - \xi \qquad \nu = \tau + \xi.$$

Para encontrar as relações entre as coordenadas do cone de luz do referencial inercial e as coordenadas do cone de luz do referencial acelerado usamos as relações já apresentadas na seção 2.3

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\tau \qquad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\tau$$

e obtemos

$$u = -\frac{1}{a} e^{-a\mu} \qquad v = \frac{1}{a} e^{a\nu}.$$

Podemos calcular a métrica $ds^2 = dt^2 - dx^2$ nessas novas coordenadas calculando as diferenciais $dt(u, v)$ e $dx(u, v)$ para obter

$$ds^2 = dudv.$$

E calculando as diferenciais $du(\mu, \nu)$ e $dv(\mu, \nu)$ encontramos a métrica

$$ds^2 = e^{a(\nu-\mu)} d\mu d\nu.$$

Vamos escrever o operador campo

$$\hat{\phi}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \left(\hat{a}_k e^{-i|k|t+ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{i|k|t-ikx} \right),$$

nas coordenadas do cone de luz; onde ja substituímos $\omega = |k|$. Para isso, convém desaparecer com a função módulo dividindo a integral em duas partes, uma para $k < 0$ e uma para $k > 0$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{\sqrt{2|k|}} \left(\hat{a}_k e^{ikt+ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikt-ikx} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{a}_k e^{-ikt+ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikt-ikx} \right). \end{aligned}$$

Na primeira integral podemos trocar k por $-k$ o que muda o limite inferior de $-\infty$ para ∞ , consequentemente trocamos dk por $-dk$, o que nos permite mudar a ordem dos limites de integração e obter, já nas novas variáveis (u, v)

$$\hat{\phi}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{a}_{-k} e^{-ikv} + \hat{a}_{-k}^\dagger e^{ikv} + \hat{a}_k e^{-iku} + \hat{a}_k^\dagger e^{iku} \right).$$

Fazemos o mesmo para o campo $\hat{\phi}(\tau, \xi)$ para obter

$$\hat{\phi}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_{-k} e^{-ik\nu} + \hat{b}_{-k}^\dagger e^{ik\nu} + \hat{b}_k e^{-ik\mu} + \hat{b}_k^\dagger e^{ik\mu} \right).$$

Como u e v são variáveis independentes, assim como μ e ν são variáveis independentes, além de termos o mesmo campo em qualquer das variáveis $\hat{\phi}(u, v) = \hat{\phi}(\mu, \nu)$. Podemos igualar, separadamente, os termos de frequência positiva e os termos de frequência negativa. Igualando os termos de frequência positiva

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{a}_k e^{-iku} + \hat{a}_k^\dagger e^{iku} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k e^{-ik\mu} + \hat{b}_k^\dagger e^{ik\mu} \right).$$

No primeiro termo podemos escrever a variável u em termos da variável μ e, em seguida, calculamos a transformada de Fourier de cada termo numa nova variável l . No primeiro,

$$\hat{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu l} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{a}_k e^{-iku} + \hat{a}_k^\dagger e^{iku} \right) \right]$$

mas $u = -\frac{1}{a} e^{-a\mu}$ então

$$\hat{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left[\hat{a}_k \exp \left(i\mu l + i\frac{k}{a} e^{-a\mu} \right) + \hat{a}_k^\dagger \exp \left(i\mu l - i\frac{k}{a} e^{-a\mu} \right) \right].$$

Daí definimos os coeficientes de Bogolyubov

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(il\mu + i\frac{k}{a}e^{-a\mu}\right)$$

$$\beta_{kl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(il\mu - i\frac{k}{a}e^{-a\mu}\right)$$

para obter uma forma mais simples para o primeiro termo

$$\hat{P} = \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \sqrt{\frac{k}{l}} \left[\alpha_{kl} \hat{a}_k + \beta_{kl} \hat{a}_k^\dagger \right].$$

Agora calculamos a transformada de Fourier do segundo termo

$$\hat{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k e^{-ik\mu} + \hat{b}_k^\dagger e^{ik\mu} \right) \right]$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} \left(\hat{b}_k e^{i(l-k)\mu} + \hat{b}_k^\dagger e^{i(l+k)\mu} \right)$$

mas lembrando da transformada de Fourier inversa da função delta de Dirac

$$\delta(k-l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i(k-l)\mu}$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} 2\pi \left(\hat{b}_k \delta(l-k) + \hat{b}_k^\dagger \delta(l+k) \right)$$

e o segundo termo da integral desaparece pois a função $\delta(k+l)$ é zero nesse domínio de integração. Daí escrevemos

$$\hat{S} = \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2k}} \hat{b}_k \delta(l-k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l}} \hat{b}_l.$$

Retornando na igualdade dos termos de frequência positiva onde tomamos a transformada de Fourier em ambos os lados

$$\hat{P} = \hat{S}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2l}} \left[\alpha_{kl} \hat{a}_k + \beta_{kl} \hat{a}_k^\dagger \right] = \frac{1}{\sqrt{2l}} \hat{b}_l$$

e finalmente obtemos o operador $\hat{b}_{k=l}$ em termos dos operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger

$$\hat{b}_l = \int_0^{\infty} dk \left(\alpha_{kl} \hat{a}_k + \beta_{kl} \hat{a}_k^\dagger \right)$$

e seu conjugado hermitiano $\hat{b}_{k=l}^\dagger$

$$\hat{b}_l^\dagger = \int_0^{\infty} dk \left(\alpha_{kl}^* \hat{a}_k^\dagger + \beta_{kl}^* \hat{a}_k \right)$$

onde

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(il\mu + i\frac{k}{a}e^{-a\mu}\right)$$

$$\beta_{kl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(il\mu - i\frac{k}{a}e^{-a\mu}\right).$$

Que era a transformação que procurávamos. Desse modo, sabemos como atuam os operadores \hat{b}_k e \hat{b}_k^\dagger nos estados de vácuo exatamente porque já sabemos como atuam os operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger nesses estados.

2.9 A aceleração cria partículas

Nessa última seção gostaríamos de calcular o número médio de partículas $\langle M_k \rangle$ no modo $k = l$ que o referencial acelerado percebe dado que o referencial inercial está imerso no vácuo descrito por $|O\rangle$. Essa quantidade é dada por

$$\langle M_l \rangle = \langle O | M_l | O \rangle.$$

Mas $M_l = \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l$

$$= \left[\int_0^\infty dk \left(\alpha_{kl}^* \hat{a}_k^\dagger + \beta_{kl}^* \hat{a}_k \right) \right] \left[\int_0^\infty ds \left(\alpha_{sl} \hat{a}_s + \beta_{sl} \hat{a}_s^\dagger \right) \right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty dk ds \left(\alpha_{kl}^* \alpha_{sl} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s + \alpha_{kl}^* \beta_{sl} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s^\dagger + \beta_{kl}^* \alpha_{sl} \hat{a}_k \hat{a}_s + \beta_{kl}^* \beta_{sl} \hat{a}_k \hat{a}_s^\dagger \right).$$

Relembrando a atuação dos operadores nos estados de vácuo

$$\hat{a}_k |O\rangle = 0 \iff \left(\hat{a}_k |O\rangle \right)^\dagger = \langle O | \hat{a}_k^\dagger = 0$$

$$\hat{a}_k^\dagger |O\rangle = |0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots\rangle \iff \left(\hat{a}_k^\dagger |O\rangle \right)^\dagger = \langle O | \hat{a}_k = \langle 0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots |$$

onde 1_k significa o vetor $|1\rangle$ na posição k , ou seja,

$$|0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots\rangle = |0\rangle^{\otimes(k-1)} \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle^{\otimes \dots}.$$

Agora calculamos

$$\langle M_l \rangle = \langle O | \int_0^\infty \int_0^\infty dk ds \left(\alpha_{kl}^* \alpha_{sl} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s + \alpha_{kl}^* \beta_{sl} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s^\dagger + \beta_{kl}^* \alpha_{sl} \hat{a}_k \hat{a}_s + \beta_{kl}^* \beta_{sl} \hat{a}_k \hat{a}_s^\dagger \right) |O\rangle$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty dk ds \left(\alpha_{kl}^* \alpha_{sl} \langle O | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s |O\rangle + \alpha_{kl}^* \beta_{sl} \langle O | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s^\dagger |O\rangle + \beta_{kl}^* \alpha_{sl} \langle O | \hat{a}_k \hat{a}_s |O\rangle + \right.$$

$$\left. + \beta_{kl}^* \beta_{sl} \langle O | \hat{a}_k \hat{a}_s^\dagger |O\rangle \right)$$

usando a atuação dos operadores no estado de vácuo

$$\langle O | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_s |O\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle O|\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_s^\dagger|O\rangle &= 0 \\
\langle O|\hat{a}_k\hat{a}_s|O\rangle &= 0 \\
\langle O|\hat{a}_k\hat{a}_s^\dagger|O\rangle &= \langle 0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots|0, \dots, 0, 1_s, 0, \dots\rangle = \delta(k-s)
\end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\langle M_l\rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty dk ds \beta_{kl}^* \beta_{sl} \delta(k-s) \\
&= \int_0^\infty dk |\beta_{kl}|^2.
\end{aligned}$$

Efetuar o cálculo dessa integral não é nada simples e levamos o leitor aos exercícios resolvidos 8.2 e 8.3 da referência [9], esses exercícios naturalmente levarão o leitor também ao *Apêndice A* desta mesma referência. No entanto, tentaremos esboçar alguns passos da solução.

Usando a relação de comutação para os operadores de partículas no referencial inercial

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta(k-l)$$

podemos calcular a relação de comutação para os operadores de partículas no referencial acelerado

$$\begin{aligned}
\delta(k-l) &= [\hat{b}_k, \hat{b}_l^\dagger] \\
&= \left[\int_0^\infty ds \left(\alpha_{sk} \hat{a}_s + \beta_{sk} \hat{a}_s^\dagger \right), \int_0^\infty dr \left(\alpha_{rl}^* \hat{a}_r^\dagger + \beta_{rl}^* \hat{a}_r \right) \right] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty ds dr \left(\alpha_{sk} \alpha_{rl}^* [\hat{a}_s \hat{a}_r^\dagger] + \alpha_{sk} \beta_{rl}^* [\hat{a}_s \hat{a}_r] + \beta_{sk} \alpha_{rl}^* [\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r^\dagger] + \beta_{sk} \beta_{rl}^* [\hat{a}_s^\dagger, \hat{a}_r] \right) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty ds dr \left(\alpha_{sk} \alpha_{rl}^* \delta(s-r) - \beta_{sk} \beta_{rl}^* \delta(s-r) \right) \\
&= \int_0^\infty ds \left(\alpha_{sk} \alpha_{sl}^* - \beta_{sk} \beta_{sl}^* \right).
\end{aligned}$$

Agora usamos esse comutador para $k=l$ ⁹

$$\delta(0) = \int_0^\infty ds \left(|\alpha_{sk}|^2 - |\beta_{sk}|^2 \right).$$

Onde agora só precisamos encontrar uma relação entre os coeficientes de Bogolyubov α_{sk} e β_{sk} e veremos que, naturalmente, o número médio de partículas $\langle M_k \rangle$ estará determinado.

⁹A divergência associada ao fator $\delta(0)$ será discutida adiante.

Primeiro vamos expressar o coeficiente

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \exp\left(i l \mu + i \frac{k}{a} e^{-a\mu}\right)$$

na forma de uma função Γ , para isso fazemos a mudança de variável $x = e^{-a\mu}$. Tomando a diferencial encontramos $d\mu = -a^{-1} e^{a\mu} dx$. Daí obtemos

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_0^{\infty} dx x^{-\frac{il}{a}-1} e^{\frac{ik}{a}x}.$$

A função Γ de uma variável x é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

que é uma generalização da função fatorial para qualquer valor real de x . A forma que obtivemos para o coeficiente de Bogolyubov é

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{l}{k}} \int_0^{\infty} dx x^{\sigma-1} e^{-\rho x}$$

com σ e ρ puramente imaginários $\sigma = -\frac{il}{a}$ e $\rho = -\frac{ik}{a}$. Fazendo a mudança de variáveis $y = \rho x$ e calculando a diferencial $dx = \rho^{-1} dy$ obtemos

$$\alpha_{\sigma\rho} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \rho^{-\sigma} \Gamma(\sigma)$$

e como $\rho^{-\sigma} = e^{-\sigma \ln \rho}$ reescrevemos

$$\alpha_{\sigma\rho} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} e^{-\sigma \ln \rho} \Gamma(\sigma).$$

Agora precisamos usar alguns resultados da teoria de variáveis complexas uma vez que a função logaritmo tem seu argumento puramente imaginário. Escrevendo $\rho = A + iB$ escrevemos a função logaritmo como ¹⁰

$$\ln(A + iB) = \ln |A + iB| + i(\text{sign} B) \tan^{-1} \frac{|B|}{A}$$

que só vale para $A > 0$. Mas é óbvio que, se olharmos para ρ , vemos que $A = 0$ e a integral diverge em $x = 0$. Portanto vamos procurar o limite de distribuição dessa integral, fazendo

$$\sigma = -\frac{il}{a} + \epsilon \qquad \rho = -\frac{ik}{a} + \epsilon$$

onde $\epsilon > 0$ e em seguida tomaremos o limite para ϵ tendendo a zero. Daí calculamos

$$\ln \rho = \ln \left(\epsilon - \frac{ik}{a} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \epsilon^2} \right) + i(\text{sign}(-k/a)) \tan^{-1} \left(\frac{k}{a\epsilon} \right).$$

¹⁰ A função sinal de uma variável x é definida como sendo $\text{sign}(x) = 1$ se $x > 0$ e $\text{sign}(x) = -1$ se $x < 0$.

Assumindo que a aceleração $a > 0$ e fazendo ϵ tender para zero obtemos

$$\ln \rho = \ln \left| \frac{k}{a} \right| - i \frac{\pi}{2} (\text{sign}(k)).$$

Observando a forma dos coeficientes de Bogolyubov obtidos na forma integral da seção anterior, percebemos que β_{kl} só difere de α_{kl} por uma mudança no sinal de k exceto na raiz $\sqrt{k/l}$, ou seja, α_{kl} tem $(\text{sign}(k)) = +1$ e β_{kl} tem $(\text{sign}(k)) = -1$. Retornando as antigas variáveis k e l podemos reescrever os coeficientes de Bogolyubov numa forma interessante

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{l}{k}} \exp \left[\frac{il}{a} \ln \left| \frac{k}{a} \right| + \frac{l\pi}{2a} \right] \Gamma \left(-\frac{il}{a} \right)$$

$$\beta_{kl} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{l}{k}} \exp \left[\frac{il}{a} \ln \left| \frac{k}{a} \right| - \frac{l\pi}{2a} \right] \Gamma \left(-\frac{il}{a} \right).$$

Então, finalmente, encontramos a relação entre os coeficientes

$$\alpha_{kl} = e^{\frac{\pi l}{a}} \beta_{kl}.$$

Todo esse trabalho que tivemos para expressar os coeficientes de Bogolyubov servirá para efetuar o cálculo da integral do número médio de partículas

$$\langle M_l \rangle = \int_0^\infty dk |\beta_{kl}|^2.$$

Para isso, já usamos as relações de comutação entre os operadores de partículas para encontrar que

$$\delta(0) = \int_0^\infty dk \left(|\alpha_{kl}|^2 - |\beta_{kl}|^2 \right)$$

e usando a relação que obtivemos entre os coeficientes

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \int_0^\infty dk \left(e^{\frac{2\pi l}{a}} |\beta_{kl}|^2 - |\beta_{kl}|^2 \right) \\ &= \left(e^{\frac{2\pi l}{a}} - 1 \right) \int_0^\infty dk |\beta_{kl}|^2 \\ &= \left(e^{\frac{2\pi l}{a}} - 1 \right) \langle M_l \rangle \end{aligned}$$

Por fim chegamos na expressão

$$\langle M_l \rangle = \frac{\delta(0)}{e^{\frac{2\pi l}{a}} - 1}.$$

A primeira vista esse não parece ser um resultado muito satisfatório pois o número médio de partículas diverge. Isso ocorre porque quantizamos o campo ϕ no espaço livre infinito e $\delta(0)$ representa o volume deste espaço. Se tivéssemos quantizado o campo num espaço finito, por exemplo numa caixa, então ao invés do fator divergente $\delta(0)$ teríamos um fator proporcional ao volume desse espaço. No entanto, podemos calcular a densidade média de partículas n_k no modo k

desse campo usando que o número médio de partículas é a densidade média de partículas vezes o volume do espaço. Ou seja, a densidade média de partículas no modo k é dada por

$$n_k = \frac{1}{e^{\frac{2\pi k}{a}} - 1}.$$

O vácuo Acabamos de concluir que o referencial acelerado é capaz de detectar uma densidade de partículas enquanto o referencial inercial não é capaz de detectar partícula alguma. Então vemos que o vácuo descrito pelo referencial inercial $|O\rangle$ é diferente do vácuo descrito pelo referencial acelerado $|O'\rangle$. Uma pergunta natural que surge é: qual é o vácuo correto? Para isso imaginamos que qualquer um dos referenciais pode ter um aparato que extrai toda energia das partículas e prepara, em seu próprio referencial, um estado de vácuo. Nesse caso, um referencial acelerado irá preparar o estado $|O'\rangle$ enquanto um referencial inercial irá preparar o estado $|O\rangle$. Somente os observadores que têm mesma aceleração do referencial acelerado concordarão que o estado de vácuo é $|O'\rangle$ e somente observadores inerciais concordarão que o estado de vácuo é $|O\rangle$. Logo, não existe um estado de vácuo correto, o que existe é uma interpretação relativa desses estados. A escolha decisiva do estado de vácuo deve ser determinada por experimento de forma que as previsões teóricas concordem com os dados experimentais.

A temperatura de Unruh A densidade de partículas de um gás de bósons com energia E é dada pela distribuição de Bose-Einstein

$$n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E}{T}} - 1},$$

onde podemos indentificar a temperatura T com a quantidade $\frac{a}{2\pi}$. Nas unidades do sistema internacional obtemos a temperatura de Unruh como

$$T = \frac{\hbar}{k_B c} \frac{a}{2\pi},$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Uma interpretação física desse efeito vista do referencial inercial é que o detector acelerado está acoplado com os campos quânticos e perturba os estados ao longo de sua trajetória. Essa perturbação é muito pequena mas como resultado o detector registra partículas. As partículas registradas são reais e a energia dessas partículas vem do agente que acelera o detector [9].

Agora queremos exibir um exemplo que sugere que o efeito Unruh é uma maneira muito ineficiente de produzir partículas pois a energia gasta pelo agente que acelera o detector é exponencialmente grande quando comparada com a energia das partículas registradas. Vamos considerar o exemplo onde temos um copo de água numa plataforma com aceleração constante e queremos saber qual a aceleração necessária para a água aumentar sua temperatura em um grau Kelvin. Usando a fórmula da temperatura de Unruh e as constantes universais envolvidas vemos que a aceleração necessária para que um banho térmico de um grau kelvin atue nas vizinhanças do copo de água devido ao efeito Unruh é $a \simeq 2,45 \cdot 10^{20} m/s^2!$

Movimento genérico Referenciais com aceleração variável irão, em geral, detectar partículas no vácuo, porém com um espectro não-térmico. Para uma trajetória genérica é muito complicado construir os referenciais co-móveis. Então podemos considerar um modelo quântico de um detector acoplado com o campo e em seguida computar a probabilidade para obter um estado excitado desse detector. Cálculos desta espécie foram feitos pela primeira vez por W. G. Unruh e podemos encontrá-lo no livro de Birrell and Davies, §3.2.

3 Espaço-tempo gerado por uma massa gravitante

3.1 Introdução

Neste capítulo queremos mostrar como é abordado o problema do campo gravitacional de uma massa estática de acordo com a teoria moderna da gravitação. Quando encontrarmos a solução para a equação de movimento de Einstein, iremos notar que essa solução é única e independente do tempo, caso seja adotada a simetria esférica, esse é o teorema de Birkhoff e a solução é a famosa métrica de Schwarzschild. Também iremos notar que existe uma singularidade nesta solução e essa singularidade nos conduzirá ao estudo dos buracos negros. Esses buracos negros serão muito interessantes mais à frente quando compararmos o espaço-tempo visto por um referencial com aceleração constante com o espaço-tempo do buraco negro. A solução que iremos apresentar é a solução mais simples, onde a massa que gera o campo está estática e não possui carga. Existem outras soluções para o espaço-tempo, como a métrica de Kerr, que considera a massa girando em torno de um eixo, assim como a métrica de Reissner-Nordstrom, que considera a massa carregada com uma carga elétrica. Outra solução muito interessante é a solução cosmológica de de Sitter que leva em consideração a expansão do universo, ou a anti-de Sitter, que considera o universo em contração. Uma solução também muito interessante é a métrica de Nariai, que contempla as soluções de de Sitter e Schwarzschild juntas.

Não pretendemos aqui explicar a teoria da Relatividade Geral, mas expor as ideias básicas do espaço-tempo de uma massa gravitante estática e sem carga. A referência que nos baseamos para desenvolvimento matemático e notação foi o livro de S. Carroll [12] e buscamos a demonstração para o teorema de Birkhoff no livro de M. Carmeli [13].

3.2 Dinâmica do espaço-tempo

A teoria da gravitação moderna de Einstein considera o espaço-tempo como uma variedade diferenciável dinâmica. A estrutura do espaço-tempo é governada pela distribuição de matéria e energia $T_{\mu\nu}$ e, simultaneamente, o movimento das massas é descrito pelas geodésicas desse espaço-tempo. O campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ é o produto interno do espaço tangente em cada ponto da variedade. Daí escrevemos um elemento infinitesimal da linha de mundo como ¹¹

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

onde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ são as coordenadas escolhidas para descrever o sistema. É importante notar que $g_{\mu\nu}$, assim como ds^2 , são grandezas locais, ou seja, são funções do espaço e do tempo. As duas quantidades são igualmente conhecidas como a métrica do espaço-tempo.

¹¹Estamos adotando a convenção de Einstein dos somatórios serem substituídos por índices que se repetem.

A equação que relaciona a estrutura do espaço-tempo com a distribuição de matéria nele contido é a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da distribuição de matéria e energia, G uma constante, $R_{\mu\nu}$ é um tensor construído com as derivadas de $g_{\mu\nu}$ e R é simplesmente o traço de $R_{\mu\nu}$. O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ envolve derivadas primeiras e segundas da métrica, logo, a equação de Einstein, que é uma equação tensorial simétrica, nos leva a 10 equações diferenciais de segunda ordem acopladas.

Com a equação de Einstein em mãos nos perguntamos se podemos resolvê-la exatamente. Antes de responder exibimos o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

a equação de Einstein escrita com ele

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

e nos voltamos para a solução mais simples: a solução de vácuo.

3.3 Solução de vácuo

Para encontrar a solução de vácuo fazemos desaparecer o tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = 0.$$

Isso é equivalente a escrever $R_{\mu\nu} = 0$ porque podemos aplicar a métrica inversa na equação de Einstein e obter

$$R_{\mu}{}^{\nu} - \frac{1}{2}R\delta_{\mu}^{\nu} = 8\pi GT_{\mu}{}^{\nu}$$

e tomar o traço fazendo $\mu = \nu$:

$$R - \frac{1}{2}R \cdot 4 = 8\pi GT \Rightarrow R = -8\pi GT.$$

Daí substituímos a expressão que encontramos para R na equação de Einstein para obter

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right)$$

e vemos que $R_{\mu\nu} = 0$ se $T_{\mu\nu} = 0$.

Resolver a equação $R_{\mu\nu} = 0$ requer que mostremos a relação entre $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu})$$

é uma densidade de tensor conhecida como símbolo de Christoffel. Essas equações estão escritas numa forma um pouco suscinta, conhecida como notação de Einstein. Na notação usual escreveríamos

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 \left[\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} + \sum_{\rho=0}^3 \left(\Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \right) \right],$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^3 g^{\rho\lambda} \left(-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right).$$

A solução de vácuo deve ser entendida como sendo o campo gravitacional na ausência de matéria, ou seja, estamos considerando o campo gravitacional externamente à distribuição de matéria que gera o campo. Ou simplesmente considerando a massa que gera o campo como pontual de forma que a distribuição não engloba algum volume. O caso mais simples é o caso de uma massa gravitante, que gera um campo com simetria esférica, por primeiros princípios, pois esperamos que o campo gravitacional só dependa da distância à massa.

3.4 Simetria esférica

Estamos interessados em encontrar a métrica do espaço-tempo gerado por uma massa que, por simplicidade, colocamos na origem. O campo gravitacional dado por essa métrica deve depender somente de sua distância à massa por isso exigimos a simetria esférica. O espaço vazio claramente possui simetria esférica e partimos dele para encontrar essa simetria.

A métrica de Minkowski $ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ escrita em coordenadas esféricas $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ é a métrica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

O termo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ é a métrica de uma esfera unitária e queremos que esse termo seja o mesmo na métrica de uma massa gravitante, portanto sugerimos a forma

$$ds^2 = f_1(t, r) dt^2 - f_2(t, r) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

para esse espaço-tempo.

3.5 A solução é única

A solução de vácuo esfericamente simétrica para a métrica é única, e ainda mais, ela não depende do tempo. Esse é o teorema de Birkhoff e a solução é a famosa métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Para obter a métrica de Schwarzschild a partir da equação de Einstein começamos escrevendo a métrica numa forma geral

$$ds^2 = A dt^2 + B dr^2 + C dt dr + D d\Omega^2$$

onde cada coeficiente A , B , C e D é função somente do tempo e da distância r à massa na origem. Uma nova escolha de coordenadas

$$t' = t'(t, r) \quad r' = r'(t, r)$$

nos permite reescrever a métrica sem o termo cruzado

$$ds^2 = f dt'^2 + h dr'^2 + dd\Omega^2.$$

Escolhendo d de forma que o perímetro de um círculo à uma distância r seja $2\pi r$, temos $D = r^2$. E escrevemos as funções f e h como exponenciais para obter

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

onde já escolhemos a assinatura e retornamos aos antigos nomes das variáveis sem linha.

Agora podemos usar a equação de Einstein no vácuo $G_{\mu\nu} = 0$ para obter as equações para $\nu(t, r)$ e $\lambda(t, r)$. As componentes não-nulas do símbolo de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial t}; & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r}; & \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial t} e^{\lambda-\nu}; \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} e^{\nu-\lambda}; & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial t}; & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial r}; & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}; \\ & & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}; \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}; & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \end{aligned}$$

Multiplicando o tensor de Einstein pela métrica inversa obtemos o tensor de Einstein misto

$$G_\mu{}^\nu = R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2} R \delta_\mu^\nu = 0.$$

Usando o símbolo de Christoffel podemos encontrar $R_\mu{}^\nu$ para encontrar as seguintes componentes não-nulas do tensor de Einstein misto

$$G_0{}^0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0;$$

$$\begin{aligned}
G_0^1 &= -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0; \\
G_1^1 &= -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0; \\
G_2^2 = G_3^3 &= -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Dessas componentes obtemos três equações independentes

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2} &= 0 \\
\frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2} &= 0 \\
\frac{\partial\lambda}{\partial t} &= 0.
\end{aligned}$$

Somando as duas primeiras encontramos que

$$\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} = 0 \Rightarrow \nu + \lambda = f(t).$$

Podemos, sem perda de generalidade, fazer uma transformação na coordenada temporal de forma a anular a função $f(t)$. Essa mudança é feita fazendo t como uma função arbitrária de uma nova coordenada t' . Após essa mudança voltamos ao antigo nome sem linha. Se $\nu + \lambda = 0$ usamos a terceira equação $\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$ para mostrar um importante resultado pois $\frac{\partial\nu}{\partial t} = 0$. Acabamos de chegar na importante conclusão que o campo gravitacional esfericamente simétrico é necessariamente estático. Podemos integrar as outras equações para obter, finalmente,

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{k}{r}$$

onde k é uma constante de integração a ser determinada. No limite de campo gravitacional fraco podemos comparar a componente g_{00} com o campo escalar gravitacional de Newton

$$\varphi(r) = -\frac{GM}{r}$$

onde G é a constante gravitacional e M a massa do corpo que gera o campo. No limite newtoniano a métrica está relacionada com o potencial gravitacional de Newton por $g_{00} \simeq 1 + 2\varphi$. Logo identificamos a constante de integração como $k = 2GM$ daí

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

que é a solução de Schwarzschild.

3.6 Singularidades

Ao olharmos a solução que acabamos de obter percebemos que ela diverge em $r = 0$ e em $r = 2GM$. Essas singularidades podem existir devido a uma escolha do sistema de coordenadas ou podem existir devido a uma singularidade da própria variedade. Para o caso $r = 0$ a singularidade existe na variedade enquanto a singularidade $r = 2GM$ pode ser contornada mudando-se para um sistema de coordenadas conveniente. Mas essa singularidade, que é característica da escolha das coordenadas de Schwarzschild, nos diz algo a mais. Ela define o horizonte de eventos desse espaço-tempo e resulta, por exemplo, do colapso gravitacional de uma estrela extremamente densa.

3.7 Buraco negro

Em mecânica clássica, é possível imaginarmos a existência de estrelas que não emitem luz. Para isso basta que a velocidade de escape desta estrela seja igual a velocidade da luz. Para uma estrela arbitrária de Massa M e raio r qualquer corpo em sua superfície com velocidade radial

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

escapa da órbita dessa estrela. Em particular, se a velocidade de escape for igual a velocidade da luz encontramos o mesmo valor da singularidade do horizonte de eventos ¹²

$$r = \frac{2GM}{c^2}.$$

Com um detalhe adicional: essas contas clássicas valem para o caso onde o objeto a ser lançado não possui propulsores, ou seja, adquire uma velocidade e em seguida só sente a influência gravitacional. Esse objeto não pode ser um foguete que acelera continuamente.

Um buraco negro resulta do colapso gravitacional de uma quantidade de massa extremamente concentrada. Se a densidade da massa em questão é constante podemos usar que a massa total é o volume total vezes a densidade e usamos $r = 2GM/c^2$ para encontrar a densidade de uma massa no momento do colapso

$$\rho = \frac{3}{32\pi} \frac{c^6}{G^3 M^2}.$$

Após o colapso os observadores externos ainda sentem a influência do campo gravitacional mas não enxergam mais a massa que gera esse campo. Resta aos observadores externos explorar o interior do horizonte de eventos.

A característica mais marcante do horizonte de eventos é que existem linhas de mundo penetrando em seu interior mas não existem linhas de mundo saindo de seu interior. Assim, um referencial pode naturalmente entrar em um horizonte de eventos mas jamais poderá sair de lá.

¹²Apenas para fim de comparação com a mecânica clássica, retornamos às unidades onde a velocidade da luz $c \neq 1$.

Existe outro sistema de coordenadas, mais interessante para estudar o interior do buraco negro, é o sistema de coordenadas de Kruskal. Explorar matematicamente o interior de um buraco negro pode ser muito interessante e nos leva à regiões de um espaço-tempo ainda não explorado de forma experimental. Esses resultados fazem acreditar que, ao penetrar em um buraco negro, existe uma saída, em outra região do espaço-tempo ou até mesmo em outro espaço-tempo.

4 Correlações quânticas em referenciais não-inerciais

4.1 Introdução

Neste capítulo nos interessa encontrar o estado maximamente emaranhado de um par de modos do campo escalar sem massa. Para fazer isso necessitaremos de um tratamento que inclua as duas sub-regiões do espaço-tempo descritas por um referencial acelerado. Para esse caso, o tratamento feito no capítulo 2 se torna incompleto e a notação precisou ser modificada para incluir qual sub-região estamos considerando. O cálculo dos coeficientes de Bogolyubov também será refeito, para que possamos relacionar esses coeficientes entre as duas sub-regiões. Para calcular os estados de partículas devido ao efeito Unruh, nos baseamos no artigo de Matsas [14] e usamos as notas de I. Fuentes [11] como referência principal.

4.2 Horizonte de eventos e sub-regiões do espaço-tempo

Observando a transformação de coordenadas entre o referencial inercial e o referencial acelerado

$$t(\tau, \xi) = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\tau), \quad x(\tau, \xi) = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\tau),$$

percebemos que podemos invertê-la, quando esta for restrita à sub-região acessível ao referencial acelerado. Encontrando a transformação inversa

$$\xi(t, x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2(x^2 - t^2))$$

percebemos que a coordenada espacial $\xi \in (0, \infty)$. A região $\xi = 0$ representa um horizonte de eventos relativo ao referencial acelerado. A parte do espaço-tempo onde $\xi < 0$ não é acessível ao referencial acelerado. Como queremos saber o comportamento do campo, presente em todo o espaço-tempo, mas visto pelo referencial acelerado, então precisamos retirar do estado completo a parte inacessível a ele. Fazemos isso usando a operação do traço parcial apresentada no primeiro capítulo.

Se quisermos descrever a parte não acessível ao referencial (τ, ξ) podemos usar outro sistema $(\bar{\tau}, \bar{\xi})$ dado pela transformação

$$t(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = \frac{1}{a} e^{a\bar{\xi}} \sinh a\bar{\tau} \quad x(\bar{\tau}, \bar{\xi}) = -\frac{1}{a} e^{a\bar{\xi}} \cosh a\bar{\tau}$$

onde a nova coordenada espacial $\bar{\xi} \in (-\infty, 0)$ e ela representa um referencial com aceleração na direção oposta ao do referencial (τ, ξ) .

O sistema de coordenadas (τ, ξ) cobre um quarto do espaço-tempo com a restrição $|t| < x$ e chamaremos essa sub-região de região I. O sistema de coordenadas $(\bar{\tau}, \bar{\xi})$ também cobre um quarto do espaço-tempo com a restrição $|t| < -x$ e chamaremos essa sub-região de região II.

É importante notar que essas duas regiões são independentes entre si e a outra metade do espaço-tempo, conhecida como universo degenerado de Kasner, não interessa para o problema proposto.

4.3 Expansão do campo escalar

Nesta seção apresentaremos a expansão do campo escalar nas coordenadas do referencial inercial e do referencial acelerado deixando explícita a independência entre as regiões I e II. No referencial inercial a expansão do campo é escrita como

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi|k|}} \left(a_k e^{-i(kx+|k|t)} + a_k^\dagger e^{i(kx+|k|t)} \right).$$

Podemos reescrever a expansão do campo separando os limites de integração positivos e negativos, para evitar o uso da função módulo. Se também fizermos a usual mudança de coordenadas para as coordenadas do cone de luz

$$u = t - x \quad v = t + x,$$

a expansão fica equivalentemente reescrita como

$$\phi(u, v) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi|k|}} \left(a_{-k} e^{-iku} + a_{-k}^\dagger e^{iku} + a_k e^{-ikv} + a_k^\dagger e^{ikv} \right)$$

e assim podemos separar o campo em duas partes

$$\phi(u, v) = \phi_-(u) + \phi_+(v)$$

onde

$$\phi_+(v) = \int_0^\infty dk (a_k f_k + a_k^\dagger f_k^*); \quad f_k(v) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-ikv}.$$

Na expansão do campo nas coordenadas do referencial acelerado precisamos deixar explícita qual sub-região do espaço-tempo está sendo considerada. Da mesma maneira, fazemos a mudança de coordenadas para as coordenadas do cone de luz

$$\mu = \tau - \xi \quad \nu = \tau + \xi \quad \bar{\mu} = \bar{\tau} - \bar{\xi} \quad \bar{\nu} = \bar{\tau} + \bar{\xi}.$$

Desaparecendo com a função módulo, separando o campo em duas partes

$$\phi(\mu, \nu, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \phi_-(\mu, \bar{\mu}) + \phi_+(\nu, \bar{\nu})$$

e usando somente a parte ϕ_+ , escrevemos

$$\phi_+(\nu, \bar{\nu}) = \int_0^\infty dk \left[\theta(v) \left(b_k^I g_k(\nu) + b_k^{I\dagger} g_k^*(\nu) \right) + \theta(-v) \left(b_k^{II} g_k(\bar{\nu}) + b_k^{II\dagger} g_k^*(\bar{\nu}) \right) \right];$$

$$g_k(\nu) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-ik\nu}.$$

Onde θ é função degrau de Heaviside. As coordenadas do cone de luz se relacionam por

$$u = -\frac{1}{a} e^{-a\mu}, \quad v = \frac{1}{a} e^{a\nu}.$$

As bases de funções $\{f_k, f_k^*\}$ e $\{g_k, g_k^*\}$ são soluções completas da equação de onda $\partial^\mu \partial_\mu \phi = 0$ com respeito ao produto escalar

$$(\phi, \psi) = i \int_{\Sigma} \left(\phi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \phi^* \right) d\Sigma^\mu.$$

Onde Σ é uma hipersuperfície tipo espaço e $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ e n^μ é um vetor unitário normal a hipersuperfície Σ .

Como as bases são completas, podemos escrever uma base em termos da outra. Para a região I escrevemos

$$\theta(v)g_l(\nu) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \left(\alpha_{lk}^I e^{-ik\nu} + \beta_{lk}^I e^{ik\nu} \right)$$

e para a região II

$$\theta(-v)g_l(\bar{\nu}) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \left(\alpha_{lk}^{II} e^{-ik\nu} + \beta_{lk}^{II} e^{ik\nu} \right)$$

onde α_{lk}^I e β_{lk}^I são coeficientes de Bogolyubov correspondentes à região I e α_{lk}^{II} e β_{lk}^{II} são coeficientes de Bogolyubov correspondentes à região II.

É importante notar que os coeficientes apresentados no segundo capítulo não são exatamente os mesmos apresentados aqui. Isso se deve ao fato de que estamos usando uma construção um pouco diferente da usada anteriormente. Esses coeficientes se relacionam por

$$\alpha_{lk}^I = \alpha_{kl}^* \quad \beta_{lk}^I = -\beta_{kl}^*.$$

4.4 Transformação entre bases de funções

As transformações entre as bases de funções são dadas pelos coeficientes de Bogolyubov que são simplesmente projeções entre essas bases. Para escrever a relação entre as bases é necessário calcular a forma dos coeficientes mas primeiro começamos calculando algumas propriedades do produto escalar

$$\begin{aligned} (\phi, \psi) &= (\psi, \phi)^*; \\ (\phi^*, \psi) &= -(\psi^*, \phi); \\ (\phi^*, \psi^*) &= -(\psi, \phi) \\ (a\phi, \psi) &= a^*(\phi, \psi) \\ (\phi, a\psi) &= a(\phi, \psi) \end{aligned}$$

onde ϕ e ψ são funções e a é uma constante.

Para calcular o coeficiente de Bogolyubov α_{lk}^I multiplicamos a equação

$$\theta(v)g_l(\nu) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \left(\alpha_{lk}^I e^{-ikv} + \beta_{lk}^I e^{ikv} \right)$$

por $\frac{1}{2\pi} e^{ik'v}$ e integramos em v :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} \theta(v)g_l(\nu(v))e^{ik'v} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \left(\alpha_{lk}^I e^{-i(k-k')v} + \beta_{lk}^I e^{i(k+k')v} \right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dv}{2\pi} g_l(\nu(v))e^{ik'v} &= \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \left(\alpha_{lk}^I \delta(k-k') - \beta_{lk}^I \delta(k+k') \right) \\ &= \frac{\alpha_{lk'}^I}{\sqrt{4\pi k'}}. \end{aligned}$$

Retornando ao antigo nome das variáveis sem linha, escrevemos o coeficiente

$$\alpha_{lk'}^I = \sqrt{4\pi k'} \int_0^\infty \frac{dv}{2\pi} g_l(\nu(v))e^{ik'v},$$

mas

$$g_l(\nu(v)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi l}} (av)^{-\frac{i}{a}}.$$

Logo,

$$\alpha_{lk}^I = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{l}} \int_0^\infty dv (av)^{-\frac{i}{a}} e^{ikv}.$$

Essa integral diverge quando $v = 0$. No entanto, queremos saber o limite de distribuição dessa integral e para isso fazemos o uso da teoria de variáveis complexas para contornar o pólo divergente. Primeiro mudamos a função de v para $v + i\epsilon$:

$$\int_0^\infty dv \left(a(v + i\epsilon) \right)^{-\frac{i}{a}} e^{ik(v+i\epsilon)}$$

que não diverge mais quando $v = 0$. Agora fazemos a mudança de variáveis

$$x = -ikv \quad dv = \frac{i}{k} dx$$

e usamos que $i = e^{i\pi/2}$. Quando ϵ tende a zero

$$\alpha_{lk}^I = \frac{ie^{\frac{\pi l}{2a}}}{2\pi\sqrt{kl}} \left(\frac{a}{k} \right)^{-\frac{i}{a}} \int_0^\infty x^{-\frac{i}{a}} e^{-x} dx.$$

Relembrando a forma integral da função gama

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx$$

escrevemos o coeficiente de Bogolyubov numa forma interessante

$$\alpha_{lk}^I = \frac{ie^{\frac{\pi l}{2a}}}{2\pi\sqrt{kl}} \left(\frac{a}{k}\right)^{-\frac{il}{a}} \Gamma\left(1 - \frac{il}{a}\right).$$

Fazendo um cálculo semelhante a esse podemos encontrar os outros coeficientes de Bogolyubov

$$\beta_{lk}^I = -\frac{ie^{-\frac{\pi l}{2a}}}{2\pi\sqrt{kl}} \left(\frac{a}{k}\right)^{-\frac{il}{a}} \Gamma\left(1 - \frac{il}{a}\right);$$

$$\alpha_{lk}^{II} = -\frac{ie^{\frac{\pi l}{2a}}}{2\pi\sqrt{kl}} \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{il}{a}} \Gamma\left(1 + \frac{il}{a}\right);$$

$$\beta_{lk}^{II} = \frac{ie^{-\frac{\pi l}{2a}}}{2\pi\sqrt{kl}} \left(\frac{a}{k}\right)^{\frac{il}{a}} \Gamma\left(1 + \frac{il}{a}\right).$$

E então observamos que os coeficientes nas regiões I e II têm as relações

$$\beta_{lk}^{II} = -e^{-\frac{\pi l}{a}} \alpha_{lk}^{I*},$$

$$\beta_{lk}^I = -e^{-\frac{\pi l}{a}} \alpha_{lk}^{II*}.$$

Agora nos interessa encontrar uma nova base de funções $\{F_k, G_k\}$ tal que elas sejam funções de frequência puramente positiva, ou seja, essas funções devem conter somente os modos e^{-ikv} . A maneira de obter essas funções é fazendo uma combinação linear entre as bases das duas regiões de forma que o termo que acompanha os modos e^{ikv} seja zero. Usando as combinações

$$F_l(v) = \theta(v)g_l(v) + e^{-\frac{\pi l}{a}}\theta(-v)g_l^*(\bar{v}),$$

$$G_l(v) = \theta(-v)g_l(\bar{v}) + e^{-\frac{\pi l}{a}}\theta(v)g_l^*(v),$$

encontramos que

$$F_l(v) = \left(1 - e^{-\frac{2\pi l}{a}}\right) \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \alpha_{lk}^I e^{-ikv}$$

$$G_l(v) = \left(1 - e^{-\frac{2\pi l}{a}}\right) \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi k}} \alpha_{lk}^{II} e^{-ikv}$$

como desejávamos.

A vantagem de encontrar essa base de funções é que, como elas são funções de frequência puramente positiva, na expansão do campo, os operadores que acompanham essas funções são operadores de aniquilação e a atuação desses operadores no estado de vácuo inercial é zero. Podemos inverter a relação entre as bases nova e antiga para obter

$$\theta(v)g_l(v) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi l}{a}}} \left(F_l(v) - e^{-\frac{\pi l}{a}} G_l^*(v) \right)$$

$$\theta(-v)g_l(\bar{v}) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi l}{a}}} \left(G_l(v) - e^{-\frac{\pi l}{a}} F_l^*(v) \right).$$

Finalmente escrevemos a expansão da parte $\phi_+(v)$ do campo nessa nova base

$$\begin{aligned} \phi_+(v) = \int_0^\infty \frac{dk}{1 - e^{-\frac{2\pi k}{\alpha}}} & \left[F_k(v) \left(b_k^I - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{II\dagger} \right) + G_k(v) \left(b_k^{II} - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{I\dagger} \right) + \right. \\ & \left. + F_k^*(v) \left(b_k^{I\dagger} - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{II} \right) + G_k^*(v) \left(b_k^{II\dagger} - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^I \right) \right]. \end{aligned}$$

Com essa expansão vemos que os operadores

$$\begin{aligned} A_k &= b_k^I - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{II\dagger} \\ B_k &= b_k^{II} - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{I\dagger} \end{aligned}$$

anulam o estado de vácuo do referencial inercial.

4.5 Estado de vácuo

Como foi mostrado no segundo capítulo, estados de vácuo do referencial inercial são vistos pelo referencial acelerado como um estado contendo partículas. Dessa maneira, podemos considerar os estados $|n\rangle_k^I$ e $|n\rangle_k^{II}$ com sendo os estados de n partículas no modo k visto pelo referencial acelerado nas regiões I e II, respectivamente. Então escrevemos o estado de vácuo no modo k como

$$|0\rangle_k = \sum_n A_n |n\rangle_k^I |n\rangle_k^{II},$$

onde A_n é o coeficiente que queremos encontrar. Para isso usamos que

$$\left(b_k^I - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{II\dagger} \right) |0\rangle_k = 0$$

e relembramos a atuação dos operadores de partículas nos estados de partículas

$$\begin{aligned} b_k^I |n\rangle_k^I &= \sqrt{n} |n-1\rangle_k^I \\ b_k^{I\dagger} |n\rangle_k^I &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k^I \\ b_k^{II} |n\rangle_k^{II} &= \sqrt{n} |n-1\rangle_k^{II} \\ b_k^{II\dagger} |n\rangle_k^{II} &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k^{II}. \end{aligned}$$

Daí

$$\left(b_k^I - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} b_k^{II\dagger} \right) \sum_n A_n |n\rangle_k^I |n\rangle_k^{II} = 0$$

e encontramos a fórmula de recorrência

$$A_{n+1} - e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} A_n = 0.$$

Logo encontramos a dependência de n do coeficiente

$$A_n = A_0 \left(e^{-\frac{\pi k}{\alpha}} \right)^n.$$

Daí

$$|0\rangle_k = A_0 \sum_n \left(e^{-\frac{\pi k}{a}} \right)^n |n\rangle_k^I |n\rangle_k^{II}.$$

Exigindo que o estado $|0\rangle_k$ esteja normalizado podemos encontrar A_0 pois $\langle 0|_k|0\rangle_k = 1$. Segue que

$$A_0 = \sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi k}{a}}}.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\cosh r = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi k}{a}}}}$$

concluimos que

$$\sinh r = \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2\pi k}{a}} - 1}} \quad \tanh r = e^{-\frac{\pi k}{a}}.$$

Por fim escrevemos o estado de vácuo do modo k numa forma interessante

$$|0\rangle_k = \frac{1}{\cosh r} \sum_n \tanh^n r |n\rangle_k^I |n\rangle_k^{II}.$$

4.6 Par emaranhado com aceleração relativa

Nesta seção iremos considerar um estado maximamente emaranhado entre dois modos do campo escalar. A aceleração relativa entre os referenciais exige que escrevamos o estado do referencial acelerado transformado, uma vez que, devido ao efeito Unruh, o referencial acelerado vê um banho térmico que modifica o estado. Vamos considerar o seguinte estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_l |0\rangle_k + |1\rangle_l |1\rangle_k \right).$$

Para obter o estado transformado $|1\rangle_k$ atuamos o operador A_k^\dagger no estado de vácuo $|0\rangle_k$ pois $A_k^\dagger |0\rangle_k = |1\rangle_k$ e como estamos considerando o referencial acelerado na região I, escrevemos

$$|1\rangle_k = \frac{A}{\cosh r} \sum_n \tanh^n r \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k^I |n\rangle_k^{II}.$$

A constante A deve ser determinada exigindo-se a normalização do estado $|1\rangle_k$. Segue que a constante $A = \cosh^{-1} r$ para que o estado esteja normalizado $\langle 1|_k|1\rangle_k = 1$. Logo podemos escrever o estado de uma partícula no modo k no referencial acelerado como

$$|1\rangle_k = \frac{1}{\cosh^2 r} \sum_n \tanh^n r \sqrt{n+1} |n+1\rangle_k^I |n\rangle_k^{II}.$$

Daí escrevemos o vetor de estado que descreve o sistema

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cosh r} \sum_n \tanh^n r \left(|0\rangle_l |n\rangle_k^I |n\rangle_k^{II} + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r} |1\rangle_l |n+1\rangle_k^I |n\rangle_k^{II} \right).$$

A matriz densidade que descreve o sistema puro é $\eta = |\psi\rangle\langle\psi|$. No entanto, o sistema de nosso interesse não deve levar em conta a região II, inacessível ao referencial acelerado. Precisamos extrair os estados da região II para obter o estado do sistema visto pelo referencial acelerado. Fazemos isso tomando o traço parcial

$$\rho = Tr_{II}(\eta).$$

Segue que

$$\rho = \frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left[|0n\rangle\langle 0n| + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r} \left(|0n\rangle\langle 1(n+1)| + |1(n+1)\rangle\langle 0n| \right) + \frac{n+1}{\cosh^2 r} |1(n+1)\rangle\langle 1(n+1)| \right]$$

onde passamos a usar a notação condensada $|0\rangle_i |n\rangle_k = |0n\rangle$.

4.7 Correlações quânticas

Emaranhamento

Agora nos interessa saber se o estado visto pelo referencial acelerado se mantém emaranhado. Para isso usamos o critério de separabilidade desenvolvido no primeiro capítulo: se a transposição parcial $(T \otimes I)\rho$ tiver autovalores negativos então ρ está emaranhado. Calculamos

$$(T \otimes I)\rho = \frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left[|0n\rangle\langle 0n| + \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r} \left(|1n\rangle\langle 0(n+1)| + |0(n+1)\rangle\langle 1n| \right) + \frac{n+1}{\cosh^2 r} |1(n+1)\rangle\langle 1(n+1)| \right].$$

Podemos diagonalizar a matriz $(T \otimes I)\rho$ por bloco escrevendo o bloco 4x4 na base $|0n\rangle, |0(n+1)\rangle, |1n\rangle$ e $|1(n+1)\rangle$. Os elementos não-nulos desse bloco são

$$\begin{aligned} \langle 0n|(T \otimes I)\rho|0n\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r}, \\ \langle 0(n+1)|(T \otimes I)\rho|0(n+1)\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \tanh^2 r, \\ \langle 0(n+1)|(T \otimes I)\rho|1n\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r}, \\ \langle 1n|(T \otimes I)\rho|0(n+1)\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \frac{\sqrt{n+1}}{\cosh r}, \\ \langle 1n|(T \otimes I)\rho|1n\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \frac{n}{\sinh^2 r}, \\ \langle 1(n+1)|(T \otimes I)\rho|1(n+1)\rangle &= \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \frac{n+1}{\cosh^2 r}. \end{aligned}$$

Claramente vemos que o bloco já está diagonal na base $|0n\rangle, |1(n+1)\rangle$ e que seus autovalores são positivos. Resta calcular os autovalores do bloco 2×2 na base $|0(n+1)\rangle, |1n\rangle$. Segue que os autovalores são

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tanh^{2n} r}{4 \cosh^2 r} \left(\tanh^2 r + \frac{n}{\sinh^2 r} \pm \sqrt{\left(\tanh^2 r + \frac{n}{\sinh^2 r} \right)^2 + \frac{4}{\cosh^2 r}} \right).$$

É fácil ver que o autovalor λ_+ é positivo para todo n . Mas o autovalor λ_- é negativo para todo n . Então, pelo critério de transposição parcial, concluímos que o estado descrito por ρ visto pelo referencial acelerado se mantém emaranhado.

Para quantificar o quão emaranhado está o estado descrito por ρ calculamos a negatividade logarítmica

$$LN(\rho) = \log_2 \left(1 - 2 \sum_n \mu_n \right)$$

onde μ_n são os autovalores negativos de $(T \otimes I)\rho$. Segue que

$$LN(\rho) = \log_2 \left(\frac{1}{2 \cosh^2 r} + \sum_n \frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \sqrt{\left(\frac{n}{\sinh^2 r} + \tanh^2 r \right)^2 + \frac{4}{\cosh^2 r}} \right).$$

A figura 1 indica a negatividade logarítmica como função da aceleração a e do modo k do campo. Ao observar esse superfície vemos que se a aceleração fosse nula então o emaranhamento teria seu valor máximo 1, como era esperado pois estamos tratando de um estado de Bell. Ao aumentar a aceleração relativa dos referenciais, percebemos que o emaranhamento degrada e tende a zero no limite em que a aceleração for infinita. Para um dada aceleração fixa, o emaranhamento degrada menos quanto maior for o número de onda.

Informação mútua

A informação mútua mede as correlações totais do sistema, isto é, as correlações devido às distribuições de probabilidades clássicas e as correlações devido as amplitudes de probabilidades quânticas. Ela foi definida no primeiro capítulo como

$$I(\rho) = S(\rho^k) + S(\rho^l) - S(\rho).$$

Começamos calculando a matriz que descreve o subsistema restrito ao modo l :

$$\rho^l = Tr_k \rho = \frac{1}{2} \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \right)$$

e a entropia

$$S(\rho^l) = -Tr(\rho^l \log_2 \rho^l) = 1.$$

Em seguida calculamos a matriz que descreve o subsistema restrito ao modo k :

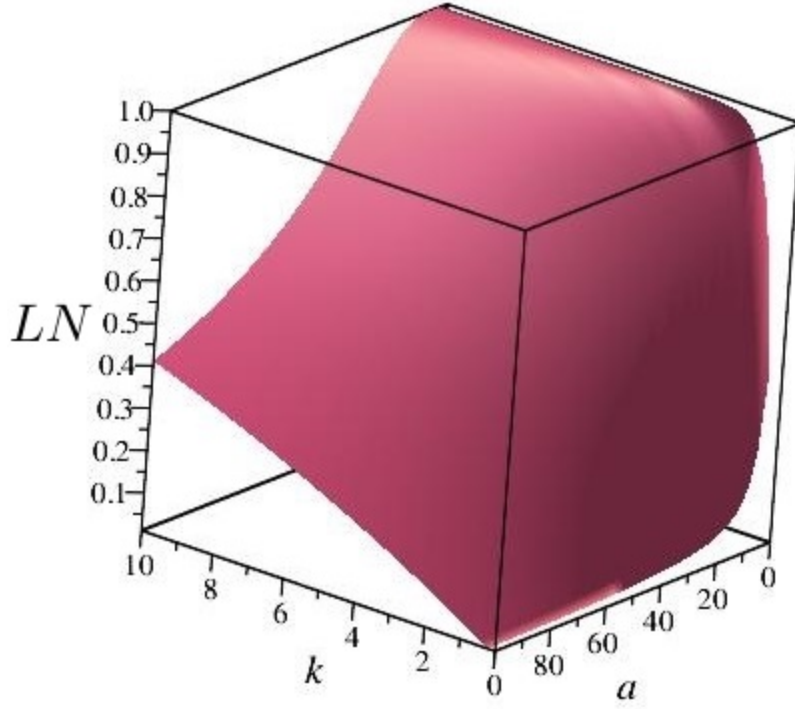


Figura 1: Superfície representando o emaranhamento em função da aceleração e do modo k do campo.

$$\rho^k = Tr_l \rho = \frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left(|n\rangle\langle n| + \frac{n+1}{\cosh^2 r} |n+1\rangle\langle n+1| \right)$$

e a entropia

$$\begin{aligned} S(\rho^k) &= -Tr(\rho^k \log_2 \rho^k) = \\ &= -\frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left(1 + \frac{n}{\sinh^2 r} \right) \log_2 \left[\frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \left(1 + \frac{n}{\sinh^2 r} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por fim calculamos a entropia do estado conjunto

$$S(\rho) = -\frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left(1 + \frac{n+1}{\cosh^2 r} \right) \log_2 \left[\frac{\tanh^{2n} r}{2 \cosh^2 r} \left(1 + \frac{n+1}{\cosh^2 r} \right) \right]$$

para obter a informação mútua

$$\begin{aligned} I(\rho) &= 1 - \frac{1}{2} \log_2 (\tanh^2 r) - \\ &= -\frac{1}{2 \cosh^2 r} \sum_n \tanh^{2n} r \left[\left(1 + \frac{n}{\sinh^2 r} \right) \log_2 \left(1 + \frac{n}{\sinh^2 r} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(1 + \frac{n+1}{\cosh^2 r}\right) \log_2 \left(1 + \frac{n+1}{\cosh^2 r}\right) \Big].$$

Seria interessante a construção de uma superfície para a informação mútua assim como foi feito para a negatividade logarítmica. Para uma análise menos detalhada, observamos os gráficos obtidos na referência [1] onde a informação mútua tem o valor 2 para aceleração nula e tende para o valor 1 quando a aceleração tende ao infinito, isso também indica que o emaranhamento degrada a medida em que a aceleração aumenta uma vez que a informação mútua mede as correlações totais do sistema.

4.8 Métrica próxima ao buraco negro

Nesta seção queremos mostrar a semelhança entre a métrica de Schwarzschild, que descreve uma massa gravitante, e a métrica de Rindler, que descreve a aceleração relativa constante. Essa semelhança está restrita ao raio do horizonte de eventos $r = 2GM$ e começamos escrevendo a métrica de Schwarzschild bidimensional

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x^2 = 8GM(r - 2GM)$ calculamos

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$$

para $r \simeq 2GM$ ou $x \simeq 0$. Vamos calcular a série de Taylor da função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 16G^2M^2}.$$

Claramente vemos que $f(0) = 0$ e calculando a primeira derivada de f em relação a x , vemos que os dois primeiros termos da série se anulam. O terceiro termo, dado pela derivada segunda de f em relação a x avaliado no ponto $x = 0$, vale

$$\frac{1}{8G^2M^2}.$$

Então escrevemos a função até segunda ordem de aproximação

$$f(x) = \frac{x^2}{16G^2M^2} + O(x^3).$$

Agora calculamos a diferencial de x para escrever a nova métrica

$$ds^2 \simeq \frac{x^2}{16G^2M^2} dt^2 - dx^2.$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis $y = x - 4GM$ obtemos a função

$$f(y) = \left(1 + \frac{y}{4GM}\right)^2$$

e, finalmente, a métrica escrita nas novas coordenadas

$$ds^2 \simeq \left(1 + \frac{y}{4GM}\right)^2 dt^2 - dy^2.$$

Comparando com métrica de Rindler não conformalmente transformada

$$ds^2 = (1 + a\chi)^2 d\tau^2 - d\chi^2$$

percebemos que, até segunda ordem de aproximação $r \simeq 2GM$, as métricas são as mesmas. Isso significa que, arbitrariamente próximo ao horizonte de eventos do buraco negro, podemos tomar as mesmas conclusões que obtivemos para a métrica de Rindler. Ou seja, se considerarmos um par emaranhado de dois modos de um campo escalar arbitrariamente próximos ao horizonte de eventos de um buraco negro; dado que um dos referenciais é inercial e segue em uma geodésica em direção ao centro do buraco, enquanto o outro, acelerando-se para evitar a queda e manter seu raio constante; então o referencial inercial vê o estado maximamente emaranhado enquanto o referencial acelerado (de raio constante) vê uma degradação do emaranhamento, devido ao efeito Hawking, dependendo de quão massivo é o buraco.

4.9 Considerações finais

Entender o emaranhamento e as propriedades da teoria quântica no contexto da relatividade é crucial tanto da perspectiva teórica quanto da perspectiva experimental. Acredita-se que o comportamento da matéria é quântico mas também relativístico. Logo, o espaço-tempo relativístico apresenta, naturalmente, um conjunto mais completo de considerações teóricas e alguns testes experimentais necessitam de tal tratamento. No contexto da álgebra de partículas, a relatividade apresenta um grande desafio pois a vasta maioria das investigações da teoria quântica consideram o espaço-tempo plano e não-relativístico. Ao considerar a dinâmica do espaço-tempo, dada pela distribuição de matéria nele contido, percebemos que o número de partículas é relativo ao movimento dos referenciais e relativo à qual evento do espaço-tempo se questiona sobre o número de partículas.

Por fim analisamos que o emaranhamento inserido no contexto da relatividade possui diferenças qualitativas em relação ao não-relativístico. De fato, o emaranhamento mostrou ser uma propriedade dependente do observador e ele degrada na perspectiva de um observador acelerado no espaço-tempo plano. Esse resultado sugere que o emaranhamento no espaço-tempo curvo não deve ser um conceito invariante, assim como não é invariante o conceito do número de partículas.

Referências

- [1] Fuentes-Schuller, I. and Mann, R.B. *Alice Falls into a Black Hole: Entanglement in non-Inertial Frames* (2005);
- [2] Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information* (2010);
- [3] Peres, A. *Quantum Theory: Concepts and Methods* (2002);
- [4] Bunge, M. *A Ghost-Free Axiomatization of Quantum Mechanics* (1967);
- [5] Piza, A. F. R. de Toledo. *Sistemas Quânticos Compostos e Emaranhamento, Sistemas Quânticos Abertos e Decoerência* (2009);
- [6] Peres, A. *Separability Criterion for Density Matrices* (1996);
- [7] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. *Separability of Mixed States: necessary and sufficient conditions* (1996);
- [8] Plenio, M. B. *The logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex* (2006);
- [9] Mukhanov, V. F. and Winitzki, S. *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds* (2004);
- [10] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics* (2001);
- [11] Fuentes, I. *Relativistic Quantum Information* (2010);
- [12] Carroll, S. *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity* (2004);
- [13] Carmeli, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory* (1982);
- [14] Crispino, L. C. B., Higuchi, A. and Matsas, G. E. A. *The Unruh effect and its applications* (2007);