

UFMG

**Teoria dos jogos evolucionários e o  
surgimento da cooperação: dinâmicas  
inovativas e jogos mistos**

por

**Marco Antonio Amaral**

Tese submetida como requisito para  
obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: Jafferson Kamphorst Leal da Silva.

Co-orientador: Lucas Lages Wardil.

no

**Instituto de Ciências Exatas**

**Departamento de Física**

Março 2017

*“There must be some coercive power to compel men equally to the performance of their covenants by the terror of some punishment greater than the benefit they expect by the breach of their covenant...”*

Thomas Hobbes, *The Leviathan*

*“Exploration is in our nature. We began as wanderers, and we are wanderers still. We have lingered long enough on the shores of the cosmic ocean. We are ready at last to set sail for the stars.”*

Carl Sagan

UFMG

## *Resumo*

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

por Marco Antonio Amaral

O surgimento e a manutenção da cooperação entre indivíduos é uma questão em aberto, que toca desde áreas como a biologia evolutiva até a economia. A estrutura matemática da teoria de jogos descreve adequadamente o dilema que surge quando um indivíduo se vê dividido entre o altruísmo – no qual ele se sacrifica pelo grupo – e o egoísmo – no qual trai seus pares em benefício próprio. Neste trabalho, estudamos primeiramente como a cooperação se comporta diante de flutuações nas percepções de ganho em dinâmicas imitativas. Descobrimos que a cooperação aumenta na presença de flutuações, indicando uma robustez diante das inevitáveis flutuações presentes na natureza. Em seguida, estudamos dois novos modelos de atualização de estratégias inspirados no modelo de Ising da física da matéria condensada: o modelo “win-stay-lose-shift” com aspiração dinâmica e o modelo de Logit inovativo. Em ambos os modelos fizemos uma caracterização completa da evolução da cooperação em populações estruturadas em redes através das técnicas de Monte Carlo e equação mestra. Os resultados obtidos foram semelhantes aos obtidos em experimentos recentes com humanos, em particular a independência dos resultados com relação à topologia da rede.

**Palavras-chave:** Teoria de jogos. Dilema do Prisioneiro. Dinâmica de populações. Sistemas complexos.

UFMG

# *Abstract*

Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Física

by [Marco Antonio Amaral](#)

How cooperation emerges among individuals is still an open question, and it reaches disciplines as different as evolutionary biology and economy. The mathematical framework of game theory is a good way to approach the dilemma of being altruistic – and sacrifice for the group – or being selfish – and betray the other for a benefit. In this work we study how cooperation behaves in the presence of payoff fluctuations in imitative dynamics. We found that cooperation flourishes in the presence of such fluctuations, showing a strong stability in face of inevitable environment fluctuations. We also propose two new strategy update models inspired by the Ising model; the win-stay-lose-shift model with dynamical ambition and the innovative Logit model. We characterized the population dynamics of such models extensively, using Monte Carlo dynamics and the master equation approach. We found that innovative models have similar results to recent experiments with humans, mainly regarding their independence of the interaction topology.

**Keywords:** Game Theory. Prisoner's Dilemma. Population Dynamics. Complex Systems.

# *Agradecimentos*

Agradeço a todos que me ajudaram a chegar até aqui,

A CNPq e CAPES pela ajuda financeira,

Aos orientadores Jafferson, Lucas pelos ensinamentos e estímulos constantes,

Ao supervisor Matjaz Perc por todo o apoio e ajuda durante o período no exterior,

Aos colegas de curso pela ajuda nos momentos pesados, pela pausa do cafezinho e conversas no laboratório,

Aos amigos que me apoiaram e ajudaram a permanecer nesse caminho,

A Sengaya,

A minha família que sempre me ajudou e insistiu para que eu completasse esse sonho. . .

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>ix</b>
<b>Abreviações</b>	<b>x</b>
<b>Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Referenciais teóricos</b>	<b>6</b>
2.1 Teoria dos jogos e o problema da cooperação . . . . .	6
2.2 Dinâmica de populações e jogos evolucionários . . . . .	15
2.3 Física estatística e problemas atuais . . . . .	21
<b>3 Métodos</b>	<b>24</b>
3.1 Equação mestra e soluções aproximadas . . . . .	24
3.2 Simulações de Monte Carlo . . . . .	28
<b>4 Resultados</b>	<b>31</b>
4.1 Jogos mistos . . . . .	31
4.1.1 Equação mestra e campo médio . . . . .	32
4.1.2 Simulações de Monte Carlo . . . . .	37
4.2 Benefícios da heterogeneidade de payoffs . . . . .	42
4.3 O modelo <i>Win-Stay-Lose-Shift</i> . . . . .	50
4.3.1 Equação mestra e campo médio . . . . .	52
4.3.2 Simulações de Monte Carlo . . . . .	56

---

4.4	Redes triangulares e modelo de Logit . . . . .	63
4.4.1	Equação mestra e campo médio . . . . .	66
4.4.2	Simulações de Monte Carlo . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Aproximação de pares</b>	<b>83</b>
<b>B</b>	<b>Algoritmo de Krapivsky-Redner</b>	<b>88</b>
<b>C</b>	<b>Artigos publicados</b>	<b>90</b>
<b>D</b>	<b>Exemplo de programa</b>	<b>132</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>135</b>

# Lista de Figuras

2.1	Espaço de parâmetros $T - S$ . . . . .	10
2.2	$\rho$ em função do tempo para a equação do replicador . . . . .	20
2.3	Imagens do artigo pioneiro de Nowak e May . . . . .	22
3.1	Diagrama com evolução básica da população . . . . .	26
4.1	Espaço de parâmetros $T$ e $S$ contendo duas matrizes de payoff $G_1$ e $G_2$ . . . . .	32
4.2	a) $\rho$ em função de $T$ para dois jogos. b) Evolução temporal de $\rho$ para cada um dos jogos . . . . .	37
4.3	Evolução temporal de $\rho$ para 3 jogos simples . . . . .	38
4.4	a) $\rho$ em relação a $T$ para jogos simples e o jogo misto correspondente. b) Gráfico para o modelo com jogos de tipos diferentes . . . . .	39
4.5	Diferença da fração de cooperadores do jogo misto para o jogo médio em função de $\Delta S$ . . . . .	40
4.6	$\rho$ em relação a $T$ para diversas intensidades de ruído $\delta$ . . . . .	41
4.7	$\rho$ em função de $T$ para heterogeneidade pequena ( $\Delta S < 0.2$ ) . . . . .	44
4.8	Diferença da fração de cooperação entre o jogo misto ( $\rho$ ) e o jogo médio ( $\rho_m$ ) como função da heterogeneidade . . . . .	46
4.9	Mapa de cores representando o aumento absoluto de cooperação entre o jogo misto e o jogo médio em dependência da heterogeneidade e de $T$ . . . . .	46
4.10	Fração da cooperação ( $\rho$ ) em dependência com $\Delta S$ . . . . .	47
4.11	Histograma apresentando a fração de cooperadores que jogaram, em média, $\langle G_1 \rangle$ vezes o jogo $SD$ . . . . .	48
4.12	Fração total de cooperadores em função de $T$ para a rede quadrada e heterogeneidade . . . . .	49
4.13	Nível da cooperação no estado estacionário em função de $T$ para o modelo WSLS . . . . .	56
4.14	Evolução temporal da fração de cooperadores na aproximação de campo médio . . . . .	57
4.15	Fração de cooperadores como função de $T$ para simulações de Monte Carlo no modelo WSLS . . . . .	58
4.16	Fração de cooperadores e o payoff médio da rede como função de $T$ . . . . .	58
4.17	Fração de cooperadores para todo o plano $T - S$ . . . . .	59
4.18	Instantâneos típicos das redes após atingido o estado estacionário para o modelo de imitação e WSLS . . . . .	60
4.19	Mecanismo típico do modelo WSLS . . . . .	61
4.20	Fração da cooperação como função de $T$ para topologias diferentes . . . . .	62

---

4.21	Exemplo de frustração na rede triangular . . . . .	65
4.22	Configuração de frustração total mínima na rede triangular . . . . .	66
4.23	Fração de cooperadores no estado estacionário como função de $T$ . . . . .	69
4.24	Evolução de Monte Carlo da fração de cooperadores do modelo de Logit e de imitação . . . . .	69
4.25	Fração de cooperadores no estado estacionário como função de $T$ . . . . .	70
4.26	$\rho$ como função de $T$ , em simulações de Monte Carlo na rede quadrada para os três modelos estudados . . . . .	71
4.27	Diagrama mostrando a fração de cooperadores para todo o plano $T - S$ . . . . .	72
4.28	Fração de cooperadores no estado estacionário como função de $S$ , na rede quadrada para o modelo de Logit e de imitação . . . . .	72
4.29	Fração de cooperadores no estado estacionário para a parametrização $T = 2 - S$ no modelo de Logit na rede triangular . . . . .	73
4.30	Nível de frustração, $\phi$ , em função de $T - S$ no quadrante $SD$ . . . . .	74
4.31	Retratos típicos das redes para o modelo de Logit e de imitação . . . . .	75
4.32	Principais mecanismos que mantém a estabilidade das estruturas hexagonais . . . . .	76
4.33	Fração de cooperação ao longo da parametrização $T = 1 + r$ , $S = 1 - r$ para diversas topologias . . . . .	77
A.1	Estrutura focal analisada na aproximação de pares . . . . .	84
A.2	Exemplos dos três processos básicos pelo qual o agrupamento pode mudar seus links . . . . .	85

# Lista de Tabelas

2.1	Sequência de estratégias usadas entre TFT e um jogador com estratégia aleatória. . . . .	14
2.2	Sequência de estratégias usadas entre WSLS e um jogador com estratégia aleatória. . . . .	15

# Abreviações

<b>Abreviação</b>	<b>Significado</b>
HG	Jogo da harmonia ( <i>Harmony Game</i> no original)
SD	Jogo do deslizamento de neve ( <i>Snow-Drift</i> no original)
SH	Jogo da caça ao cervo ( <i>Stag-Hunt</i> no original)
PD	Jogo de dilema do prisioneiro ( <i>Prisoners Dillema</i> no original)
C	Cooperador
D	Desertor
MCS	Passo de Monte Carlo ( <i>Monte Carlo Step</i> no original)
ESS	Estratégia evolucionariamente estável ( <i>Evolutionary Stable Strategy</i> no original)
EDO	Equação diferencial ordinária
AA	Modelo Assíncrono Absoluto
AN	Modelo Assíncrono Normalizado
SA	Modelo Síncrono Absoluto
SN	Modelo Síncrono Normalizado
WSLS	Estratégia permanece na vitória, muda na derrota ( <i>Win-Stay-Lose-Shift</i> no original)
TFT	Estratégia de olho-por-olho e dente-por-dente ( <i>Tit-For-Tat</i> no original)

# Símbolos

Símbolo	Significado
$\rho$	Fração de cooperadores na população
$T$	Parâmetro de tentação ( <i>Temptation</i> no original)
$R$	Parâmetro de recompensa ( <i>Reward</i> no original)
$P$	Parâmetro de punição ( <i>Punishment</i> no original)
$S$	Parâmetro de derrota ( <i>Sucker</i> no original)
$\Delta S$	Heterogeneidade de payoff no parâmetro $S$
$k$	Parâmetro de irracionalidade
$G$	Matriz de payoff
$w$	Probabilidade de que se jogue o jogo 1 ( $G_1$ )
$u_i$	Payoff do sítio $i$
$p(\Delta u_{ij})$	Probabilidade de que o sítio $i$ troque de estratégia, imitando $j$
$\{s\}$	Conjunto que descreve os estados de cada indivíduo na população
$W(\{s\} \rightarrow \{s\}')$	Taxa de transição global do estado $\{s\}$ para o estado $\{s\}'$
$w_{ij}$	Taxa de transição individual do sítio no estado $i$ para o estado $j$
$\binom{N}{n}$	Coefficientes binomiais

*A Ana, Maria e Antônio*

# Capítulo 1

## Introdução

Ao cooperar, um indivíduo sujeita-se a pagar um custo para beneficiar outrem. Em um mundo onde espécies são moldadas pela competição, e somente os mais aptos sobrevivem, como a cooperação pode surgir e se manter estável? Segundo a revista *Science*, essa é uma das 100 grandes questões em aberto na ciência [1]. Apesar de a cooperação mútua ser benéfica para os envolvidos, em um cenário altamente competitivo, como o da evolução natural, a traição leva a um benefício individual maior. Ainda assim, a cooperação é um dos fenômenos mais recorrentes na natureza, seja entre insetos sociais, como as formigas [2], passando por interações inter-espécies como abelhas e flores [3], até em sociedades humanas [2, 4–6]. Essa questão é tão conflitante que levou Darwin a considerá-la um dos maiores desafios em sua teoria [7]. De fato, a evolução agressiva do mutualismo entre espécies pode levar ao resultado final do parasitismo, quando um dos indivíduos “descobre” como manter seus benefícios sem ter que ajudar seu hospedeiro [8].

Em uma análise mais aprofundada, encontramos níveis de cooperação ainda mais intrínsecos. A relação essencial de nossas células com a mitocôndria é, possivelmente, uma das formas de cooperação mais importantes na evolução da vida [9, 10]. Em um arcabouço mais abrangente, foi a cooperação entre organismos unicelulares que levou ao primeiro grande salto evolutivo, criando organismos multicelulares [11]. Mesmo assim, de um ponto de vista estritamente lógico, o problema persiste: por que a natureza não é um mar de traidores, com indivíduos buscando somente o máximo de benefício próprio?

Tal problema tem sido muito estudado e encontrou uma formulação matemática natural a partir do surgimento da teoria dos jogos clássica [12–16], enunciada por von Neumann em 1928 [17], e futuramente ampliada e popularizada por John Nash, em

1951 [18, 19]. Nessa área da matemática aplicada, criou-se pela primeira vez um campo com foco quantitativo para resolução de problemas de conflito estratégicos entre seres racionais. Dentro da teoria de jogos, o problema do dilema social foi, provavelmente, o que mais obteve atenção, captando a essência da dificuldade de se manter a cooperação num sistema competitivo [4, 7].

Em um jogo do tipo dilema, um grupo se beneficia coletivamente quando todos cooperam, mas para um indivíduo é mais lucrativo trair os cooperadores, aproveitando os benefícios do coletivo sem precisar arcar com os custos de ajudar seus iguais. O dilema central surge quando todos os indivíduos, ao perceberem isso, tornam-se traidores, gerando a chamada “tragédia dos comuns” [20], quando a comunidade inteira colapsa com a extinção da cooperação. De fato, a importância da teoria de jogos foi tão grande na resolução matemática de conflitos estratégicos, que é atribuída a ela, e especificamente a von Neumann, diversas estratégias militares usadas durante a guerra fria [21]. Sendo que a mais famosa destas foi a política de destruição mútua garantida (ou *M.A.D.* no original), na qual EUA e URSS buscaram ter um estoque nuclear capaz de destruir o mundo inteiro, eles próprios inclusos [22]. Desde seus primórdios, a teoria já previa matematicamente que a melhor decisão em um cenário competitivo era trair o outro competidor, o que estava em conflito com o observado na natureza.

Em busca de desenvolver melhor tais ideias, e tentando entender as escolhas estratégicas que a seleção natural criou, Maynard Smith incorporou em 1973 a teoria de jogos à dinâmica evolutiva de populações, dando origem à teoria dos jogos evolucionários [12–16, 23]. Associando o ganho de cada indivíduo à sua capacidade de “reprodução”, tem-se que estratégias bem sucedidas espalham-se na população com uma frequência maior. Do ponto de vista matemático tal abordagem é ainda mais interessante, visto que o payoff de cada estratégia não é necessariamente único, mas depende da quantidade de jogadores que adotam cada tipo diferente de estratégia na população. Desse modo, a população de jogadores evolui no tempo, com a fração das estratégias atingindo pontos fixos ou mesmo oscilações estáveis [12, 20, 24]. Nesse contexto, as rotas que levam à cooperação são temas frequentes de estudo, visto que na maioria destes modelos a deserção é o único estado absorvente.

Essa nova perspectiva evolucionária deu origem a diversas análises e pontos de vista, mas, ainda assim, tais modelos continuavam a prever que a melhor estratégia seria a deserção na maioria dos casos [12, 23]. Somente na década de 90, em uma abordagem totalmente inovadora, Nowak e May [25] introduziram modelos e técnicas classicamente associados a física, para a modelagem da teoria dos jogos evolucionários.

Em especial, o uso de redes e grafos para representar as interações entre indivíduos gerou resultados muito importantes na área, tendo feito a cooperação emergir e se manter estável mesmo em cenários altamente competitivos. A presença de estrutura espacial, com os indivíduos localizados nos nodos da rede e interagindo somente com os seus vizinhos, possibilita aos cooperadores unirem-se em ilhas compactas no meio de um mar de traidores, dando suporte uns aos outros e sobrevivendo. Tal fenômeno é chamado reciprocidade espacial [26, 27] e deu uma nova inspiração à área, incentivando diversos modelos e ferramentas de física estatística a serem aplicados no campo. Com isso, uma corrida por novos modelos surgiu, com diversos mecanismos de reciprocidade tendo sido propostos para explicar o surgimento da cooperação, como a reciprocidade direta e indireta [24, 28–30], seleção de parentes [31, 32] e espacial [25, 33–35], jogos voluntários [36–38], heterogeneidades [39–50], difusão e mobilidade [51–54], modelos co-evolucionários [55–60] e ligações direcionadas [61]. Para um resumo mais completo da diversidade de modelos propostos nos últimos 20 anos sugerimos o artigo de revisão de Szabo et al [20].

Essa grande quantidade de modelos pode parecer surpreendente. Mas é importante frisarmos como a teoria dos jogos evolucionários é relativamente recente. Essa teve seu início na década de 30 como uma ferramenta matemática para análise exclusiva da economia, num contexto estático de dois jogadores. A associação de tal teoria com biologia e evolução de comportamentos instintivos surgiu apenas na década de 70. O próprio conceito de ideias e estratégias sujeitadas à evolução natural foi proposto e amplamente divulgado no fim da década de 70, com Richard Dawkins e o conceito de "meme"[10]. Apartir daí começou a desenvolver-se matematicamente a noção de que ideias e comportamentos podem se espalhar culturalmente, estando sujeitos a seleção natural e pressões do ambiente.

Nesse contexto, a teoria dos jogos evolucionários ainda é uma ciência muito nova, que, como tal, está tateando no escuro em busca de modelos mais gerais. Na definição de Thomas Kuhn, podemos dizer que essa área ainda está no nível pré-paradigmático, onde a proposição de hipóteses e modelos chega a ser quase somente fenomenológica [62], sem um modelo matemático geral. Devido a isso, vemos que, apesar da quantidade de modelos específicos, o problema da cooperação ainda é uma questão em aberto que gera debates instigantes dentro de diversas áreas.

A maioria dos modelos propostos nos últimos anos eram baseados somente na biologia evolutiva, devido às evidentes questões históricas. Estratégias, ou comportamentos animais, eram modelados como espécies, reproduzindo-se proporcionalmente

à sua aptidão, simulando um processo de nascimento-morte [12, 20]. Essas são chamadas dinâmicas imitativas, pois cada estratégia aumenta sua frequência na população unicamente através do processo de “reprodução”, na qual a prole herda, ou imita, a estratégia de seu antecessor. Em escalas de tempo de milhares de anos, esses modelos fazem sentido. A maioria dos animais não tomam decisões estratégicas baseadas em cognição, mas em instintos profundamente enraizados em seus comportamentos que evoluíram ao longo dos anos [12, 23]. Porém, isso não é sempre o caso, e existem sistemas que podem basear a mudança de estratégia em outras dinâmicas como, por exemplo, humanos tomando decisões estratégicas. Nesse caso, a tomada de decisões é baseado em dinâmicas cognitivas, e não somente imitativas. Quando os jogadores são capazes de analisar a situação e tomam decisões baseados em análises estratégicas, a modelagem biológica direta de estratégias nem sempre é a mais correta [63, 64]. Afinal, um jogador racional poderá mudar espontaneamente de estratégia ao analisar a situação, em vez de somente repetir estratégias de sua vizinhança [12, 20, 65–71].

Ainda mais interessante, experimentos recentes [72–77] mostraram que os resultados de jogos entre humanos não concordam com que é previsto através de modelos de imitação, tendo mais características em comum com dinâmicas inovativas. Em tais processos, a seleção de qual estratégia será usada depende de escolhas cognitivas do indivíduo. Nesse contexto, a matemática que descreve tais dinâmicas é semelhante à encontrada em termodinâmica de sistemas magnéticos, como a dinâmica de Glauber [78–80]. Nosso trabalho visa contribuir para a expansão da área de teoria dos jogos evolucionários com a introdução de modelos e ferramentas classicamente usados em física estatística.

Devido à grande quantidade de modelos já propostos na área, e a sua interdisciplinaridade, decidimos focar em dois pontos específicos durante a pesquisa: a análise de flutuações estatísticas nas dinâmicas e a introdução de modelos clássicos de física em teoria dos jogos evolucionários. Como base para o primeiro ponto, nós analisamos como a dinâmica do sistema se modifica caso as percepções dos jogadores quanto aos ganhos não sejam unicamente definidas, mas sofram flutuações. Especificamente, tivemos como foco analisar o que ocorre quando existe uma mistura estatística de duas percepções diferentes na população. Quanto ao segundo ponto, tivemos como foco introduzir um modelo similar ao encontrado na física de matéria condensada, o modelo de Ising, dentro de teoria dos jogos evolucionários. Ao fazê-lo saímos da hipótese de que estratégias se reproduzem somente por imitação, analisando a dinâmica à luz de processos cognitivos onde cada indivíduo poderá mudar de estratégia espontaneamente.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentamos a seção de referenciais teóricos, onde dissertamos mais a fundo, e de maneira formal, a origem da teoria dos jogos evolucionários, suas bases em economia e biologia e, eventualmente, a introdução de métodos da física estatística para análise de diversos fenômenos. Em seguida, o capítulo 3 explica explicitamente as duas metodologias usadas em nossos experimentos: a análise da equação mestra e a dinâmica de Monte Carlo. No capítulo 4 apresentamos os dados obtidos através dos modelos propostos e a análise de seus significados. O capítulo 5 apresenta de forma resumida todos os resultados obtidos nesses trabalhos dentro do contexto geral da pesquisa. No apêndice A demonstramos mais aprofundadamente a técnica de aproximação de pares. No apêndice B explicitamos o algoritmo de Krapivsky-Redner e no apêndice C incluímos todos os artigos publicados como resultado desse trabalho. No apêndice D incluímos um código em fortran90 representativo dos programas que desenvolvemos para realizar as simulações.

# Capítulo 2

## Referenciais teóricos

### 2.1 Teoria dos jogos e o problema da cooperação

Talvez o problema mais famoso em teoria de jogos seja o dilema do prisioneiro. Esse consegue captar, de maneira matematicamente elegante, a essência do conflito entre ser egoísta e obter benefícios próprios ou ser altruísta e tentar ajudar seu parceiro. Na história típica desse problema temos dois bandidos, digamos Paulo e João, que foram presos sob suspeita de um roubo. Porém as provas são insuficientes para prendê-los. Ambos estão isolados um do outro, e o promotor dá a eles as seguintes alternativas: trair seu parceiro, confessando o crime, ou ficar calado. Caso Paulo e João fiquem ambos calados, a investigação poderá prendê-los por apenas 2 anos, mas eventualmente precisará soltá-los por falta de provas. Caso Paulo resolva ficar calado, mas João o traia, confessando o crime de ambos, Paulo ficará na prisão por 10 anos, enquanto João será solto imediatamente. Porém caso ambos se traiam mutuamente, os dois confessando o crime, ambos pegarão 5 anos de cadeia. Considerando que eles não podem se comunicar, e não sabem o que o outro fará, qual a melhor atitude?

O dilema surge do paradoxo ao notar que a melhor opção para João e Paulo é cooperarem mutuamente, ficando somente 2 anos presos. Porém, ao pensar em cooperar, João imediatamente nota que se Paulo tiver certeza de sua cooperação, irá traí-lo para sair livre imediatamente. Assim João decide trair Paulo. O raciocínio é simétrico, levando ambos a se traírem devido à desconfiança, causando o pior cenário possível para ambos. Esse tipo de dilema é justamente o utilizado no cálculo quanto a delações premiadas, ou outros esquemas em que a polícia concede benefícios a criminosos que delatem seus comparsas. Nesse caso, a cooperação equivale a ficar em silêncio perante o promotor, e a

deserção equivale a confessar o que eles fizeram. Matematicamente, podemos criar uma matriz identificando quantos anos de cadeia João (ou Paulo) terá que cumprir dependendo de sua ação e a ação de seu parceiro:

João \ Paulo	Coopera	Deserta
Coopera	2 , 2	10 , 0
Deserta	0 , 10	5 , 5

Essa matriz nos diz quantos anos de prisão cada estratégia recebe contra cada outra estratégia possível (o primeiro número é relativo a João e o segundo a Paulo) e recebe o nome de matriz de ganho (mais comumente chamada matriz de *payoff* na literatura estrangeira e nacional). Aqui os números apresentados equivalem aos anos de cadeia de cada um, porém o mais comum é representar nessa matriz números positivos, indicando benefícios ganhos pelo jogador. Note que a matriz de payoff é idêntica tanto para João, quanto para Paulo. Jogos desse tipo são chamados simétricos, já que ambos jogadores possuirão os mesmos ganhos, dado que usem as mesmas estratégias. Nós focaremos estritamente nesse tipo de jogo.

Apesar de sua aparente simplicidade, o jogo do dilema do prisioneiro é uma boa analogia matemática para a origem da cooperação, tendo sido pesquisado em áreas tão diversas quanto sociologia, biologia e física [6, 10, 12, 20, 34, 67, 81–86]. O dilema do prisioneiro é um jogo intrigante, mas ele não se resume somente a uma metáfora quanto a prisões. Utilizando-se dele como base matemática, pode-se mostrar que diversas situações encaixam-se nesse modelo, como por exemplo, a análise de risco entre motoristas em cruzamentos [87, 88], interações de competição entre vírus bacteriófagos [89, 90], o dilema entre quebrar ou não o contrato social dentro de interações humanas [91–94], a interação de cooperação/competição entre células saudáveis e células cancerígenas [95–100], caminhos bioquímicos conflitantes para a geração de energia (ATP), [101], o sistema de reprodução de amebas sociais [102], a alocação de funções em insetos sociais [103], etc. Um bom resumo de diversos outros sistemas que podem ser matematicamente descritos pelo dilema do prisioneiro pode ser encontrado em [12, 20, 104]

Dá-se o nome de *jogo em forma normal* um jogo qualquer em que todas as estratégias possam ser descritas de maneira discreta, obtendo seus respectivos payoffs em um conjunto finito (ou dito de um forma mais simples, um jogo que possa ser descrito por uma matriz  $n$  dimensional finita). Esse tipo de representação de um jogo é muito útil pois nos possibilita usar diversas ferramentas matemáticas objetivas. De maneira formal,

podemos descrever completamente um jogo de forma normal com um conjunto finito de  $M$  jogadores, um vetor contendo todas as  $N$  estratégias disponíveis para cada jogador  $\{s\} = s_1, s_2, \dots, s_N$  e por fim as relações  $G_{ij}(n, m)$  que darão o payoff do jogador  $i$  ao usar estratégia  $n$  contra a estratégia  $m$  de outro jogador  $j$ . A maioria dos jogos estudados na literatura [20] possui o mesmo conjunto de estratégias disponíveis para todos jogadores, de modo a haver somente um conjunto  $\{s\}$  para todos jogadores. Além disso, a maioria dos jogos tratados em teoria dos jogos evolucionários é simétrico, pois considera-se não haver distinção entre um jogador e outro.

O jogo em forma normal pode ter seu payoff escrito de uma maneira simples, por uma matriz  $G(n, m)$ , que dá o ganho obtido ao se usar a estratégia  $n$  contra a estratégia  $m$ , independente de qual seja o jogador. Notamos que na formulação original de economia, o payoff é também chamado de utilidade [105, 106], uma função genérica que diz quantitativamente qual foi a percepção de ganho do jogador (seja este ganho objetivamente mensurável ou não). Evidentemente, existem diversas críticas ao se estabelecer de maneira quantitativa uma percepção subjetiva, como a utilidade [107–110]. Este ponto é uma de nossas motivações iniciais para analisar o que ocorre quando tal percepção não possui um valor exato, mas flutua em torno de uma média.

A teoria de jogos clássica lida com uma gama enorme de outros tipos de jogos que não seguem a forma normal. Em nosso trabalho, focamos unicamente em jogos simétricos de forma normal e que ocorrem somente entre dois jogadores a cada interação. Todos os casos de populações interagentes que apresentaremos ocorrem via várias interações de pares consecutivas em cada rodada do jogo. Nesse caso, podemos generalizar a matriz de payoff entre dois jogadores, que possuem somente as estratégias de cooperar ( $C$ ) ou desertar ( $D$ ) como uma matriz  $G$  [12, 20, 55]:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix}, \end{array} \quad (2.1)$$

onde  $T$  é o parâmetro de tentação para se trair um cooperador (*Temptation* no original),  $R$  é a recompensa pela cooperação mútua (*Reward* no original),  $P$  a punição pela traição mútua (*Punishment* no original) e  $S$  o que se recebe ao cooperar com um traidor (*Sucker* no original). Na coluna vertical temos a estratégia usada pelo jogador em questão enquanto na linha horizontal temos a de seu oponente. Essa generalização da matriz de payoff é útil por nos permitir organizar outros jogos do tipo dilema, além do dilema do prisioneiro, de uma maneira fácil e principalmente por nos permitir correlacionar

matematicamente jogos de dilema através dessas variáveis. Especificamente para o dilema do prisioneiro, a hierarquia de tais parâmetros é  $T > R > P > S$ , ou seja, o melhor ganho ocorre ao se trair um cooperador, o segundo melhor ganho envolve a cooperação mútua, a punição é a terceira melhor situação e a pior situação de todas é ser traído. Vemos que, como o pior payoff envolve ser traído, a estratégia mais segura é sempre trair, o que garante que nunca se receba o pior payoff ( $S$ ), mas somente  $P$  na pior das hipóteses (e na melhor das hipóteses  $T$ ). Seguindo a lógica, o dilema do prisioneiro prevê que todo jogador deve trair incondicionalmente seus parceiros, na análise clássica.

Ao parametrizarmos  $R = 1$ ,  $P = 0$  e  $T \in [0, 2]$ ,  $S \in [-1, 1]$ , podemos obter um espaço de parâmetros em  $T - S$  muito útil, com outros 3 jogos do tipo dilema e um quarto jogo trivial. A figura 2.1 nos mostra tal diagrama, onde o jogo do dilema do prisioneiro,  $PD$  (*prisoner's dilemma* no original) situa-se no segundo quadrante. No primeiro quadrante temos o jogo do deslizamento de neve,  $SD$  (*snow-drift* no original), que é conhecido como jogo de anti-coordenação e possui  $T > R > S > P$ . Uma das formas de ilustrar esse jogo é a seguinte: temos dois motoristas que foram bloqueados por um deslizamento de neve no meio da estrada. As estratégias são: cooperar e sair do carro para limpar a neve, ou trair e esperar no carro até que o outro faça o trabalho. Em tal dilema, temos novamente que a cooperação mútua é boa, pois os motoristas dividirão o trabalho de limpar a neve e ambos chegam em casa, apesar de cansados. Ainda melhor que a recompensa pela cooperação mútua, é o ganho ao se trair um cooperador, pois este terá todo o trabalho da limpeza enquanto o traidor irá para casa descansado (e o que foi traído chegará em casa, porém muito cansado). A diferença essencial desse jogo está no fato de que  $S > P$ , ou seja, a pior hipótese é que ambos se traiam, recebendo  $P$ . Nesse caso nenhum dos dois motoristas sai do carro para limpar a neve e ambos acabam passando a noite na rodovia esperando o outro limpar a neve. O nome anti-coordenação é evidente, pois nesse tipo de jogo a melhor opção é sempre fazer o oposto do que seu oponente faz. Se ele limpar a neve, você fica no carro descansando, mas caso ele se recuse a limpar, então é melhor para você ser explorado e limpar a neve. No terceiro quadrante do diagrama  $T - S$  temos o jogo oposto, chamado de caça ao cervo,  $SH$  (*stag-hunt* no original), que é um jogo de coordenação. Nesse caso  $R > T > P > S$ , ou seja, o melhor payoff ocorre quando ambos cooperam e o pior ocorre quando se é traído. Nesse jogo, caso os jogadores escolham cooperar com o outro, ambos se unem e conseguem caçar um cervo (que é a melhor caça possível). Se ambos escolhem a traição, cada um caça por conta própria, obtendo somente uma lebre cada um (uma caça mediana). Porém se um jogador resolve cooperar, caçando o cervo, e o outro o trai, caçando a lebre, o primeiro não consegue abater o cervo sozinho e volta para casa sem

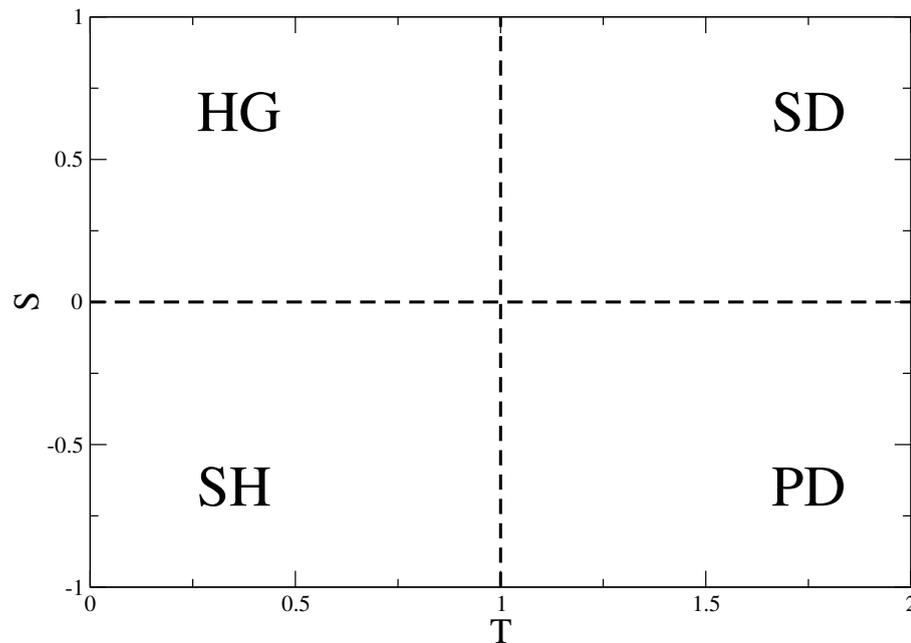


FIGURA 2.1: Espaço de parâmetros  $T - S$ , mantendo-se fixo  $R = 1$  e  $P = 0$ . Quatro jogos podem ser bem definidos dessa maneira, o jogo da harmonia ( $HG$ ), jogo da caça ao cervo ( $SH$ ), jogo do deslizamento de neve ( $SD$ ) e o dilema do prisioneiro ( $PD$ ).

refeição, obtendo o pior resultado. Nesse jogo a pior situação é cooperar e ser traído pelo parceiro, porém, diferente do dilema do prisioneiro, a recompensa pela cooperação supera o ganho ao se trair um cooperador. A escolha mais lógica, é sempre fazer o mesmo que seu oponente. Se ele caçar o cervo, você só tem a ganhar ao acompanhá-lo. Mas se ele escolher caçar uma lebre por conta própria, o melhor a fazer é também sair sozinho para caçar uma lebre. Apesar de tais decisões parecerem óbvias quando analisadas dessa maneira, frisamos que os jogadores tomam decisões simultaneamente, sem o conhecimento prévio do que o oponente fará. Por fim, no quarto quadrante temos o jogo usualmente chamado de jogo da harmonia,  $HG$  (*harmony game* no original), onde a solução é trivial pois independente do que ocorra, a melhor opção sempre é cooperar. Para o leitor interessado, uma revisão mais aprofundada dentro de teoria clássica dos jogos pode ser vista em [20, 53, 111, 112], incluindo diversos outros jogos e situações.

Um dos conceitos mais importantes na teoria de jogos clássica é o equilíbrio de Nash [18, 113]. Esse é descrito como o conjunto de estratégias escolhidas de maneira que nenhum dos jogadores ganhará mais ao mudar sua estratégia (dado que tudo o mais se mantenha igual). Se aplicarmos esse conceito ao jogo de dilema do prisioneiro, vemos que, caso ambos cooperem, qualquer um dos dois poderá aumentar seu payoff ao trair o colega. Note que caso João traia Paulo, João não aumentará seu payoff mudando de estratégia para a cooperação. Porém, Paulo tem a ganhar ao mudar de cooperador para

traidor. O único equilíbrio de Nash é a traição mútua, mesmo que essa seja, em geral, pior para ambos. Formalmente, definimos o equilíbrio de Nash como o conjunto de estratégias  $\{s\}^*$  tal que, para qualquer jogador  $i$ , o payoff,  $u_i\{s\}^*$ , ao adotar tal estratégia é maior do que ao se adotar qualquer outra estratégia  $\{s\}$ , dado que todos os outros jogadores também adotem a estratégia que seja parte do conjunto do equilíbrio de Nash,  $\{s\}^*$ :

$$\forall i, j, \forall s_i \neq s_i^* : u_i(s_i^*, s_j^*) \geq u_i(s_i, s_j^*) . \quad (2.2)$$

O conceito de equilíbrio de Nash é sutil, e capta bem o dilema da cooperação. Nem sempre o equilíbrio de Nash implica o estado em que todos tenham o maior payoff. Porém ele garante que uma vez nesse estado, ninguém terá incentivo a mudar de estratégia. No exemplo do dilema do prisioneiro, se ambos se traem mutuamente, o payoff de qualquer um ao mudar de estratégia para cooperador somente irá piorar. Numa perspectiva da física, o conjunto de estratégias definido pelo equilíbrio de Nash é semelhante, mas não idêntico, a um ponto fixo na dinâmica do sistema, onde uma vez que se esteja em tal ponto, não há nenhuma tendência de sair.

Outro fato sutil é que o equilíbrio de Nash trata do conjunto de estratégias  $\{s\}^*$  que os jogadores adotam. Isso significa que nem sempre o equilíbrio de Nash envolverá ambos jogadores escolhendo a mesma estratégia. No jogo abaixo, por exemplo, o equilíbrio de Nash é o conjunto de estratégias  $\{C, D\}$ , sendo  $C$  referente ao jogador 1 e  $D$  ao jogador 2:

$$\begin{array}{cc} 1 \setminus 2 & C & D \\ C & (4, 4) & (5, 5) \\ D & (2, 2) & (3, 3) \end{array} . \quad (2.3)$$

Note que o jogo acima não é simétrico entre os jogadores. O payoff do jogador 1 caso ele escolha  $C$  e seu oponente escolha  $D$  é  $u_1(C, D) = 5$ . Porém, o payoff do jogador 2 caso ele escolha  $C$  e o jogador 1 escolha  $D$  é  $u_2(C, D) = 2$ .

O conceito de Equilíbrio de Nash não se resume a jogos de apenas uma rodada, mas pode ser aplicado a jogos sequenciais, onde jogadores acumulam os payoffs de rodadas passadas. Suponha  $n$  rodadas de um jogo em sequência, podemos estabelecer algoritmos, ou “meta-estratégias” [20], que digam como o jogador deve se comportar durante as  $n$  rodadas. O caso mais simples é evidentemente o da cooperação incondicional, ou deserção incondicional (usualmente chamadas na literatura de *ALLC* e *ALLD*). Nesses casos é fácil ver que o payoff de um jogador *ALLC* contra um *ALLD* será simplesmente  $nS$ . Porém, a partir de tais ideias podemos supor o conceito de estratégia mista. Nessa,

o jogador jogará  $C$  com uma frequência  $w$  e  $D$  com frequência  $(1 - w)$ . Supondo que o jogador 2 seja um cooperador incondicional (*ALLC*), o payoff médio do jogador 1 será  $u_1 = wR + (1 - w)T$ . O teorema de Nash [18, 20] nos garante que qualquer jogo, por mais complexo que seja, possuirá ao menos um equilíbrio de Nash, se permitirmos estratégias mistas. Esse é um dos teoremas mais importantes em teoria dos jogos clássica, nos garantindo que mesmo em jogos muito complexos, é possível achar uma “resolução” do jogo. Boa parte da teoria clássica de jogos lida com tais problemas.

Porém dentro do dilema do prisioneiro, mesmo permitindo-se que o jogador use de uma estratégia mista, a traição pura ainda é o único equilíbrio de Nash [20]. Podemos expandir a matriz de jogo do dilema do prisioneiro para incluir a estratégia mista  $s_w$ , na qual o jogador jogue com frequência  $w$  a estratégia  $C$  e  $(1 - w)$  a estratégia  $D$ . Assim seu ganho médio é  $u_c$  contra a estratégia  $C$ ,  $u_d$  contra  $D$  e  $u_w$  contra ela própria. O ganho de um jogador  $D$  contra a estratégia mista é  $u'_d$  e o ganho de um jogador  $C$  contra ela é  $u'_c$  onde:

$$u_c = wR + (1 - w)T, \quad (2.4)$$

$$u_d = wS + (1 - w)P, \quad (2.5)$$

$$u'_c = wR + (1 - w)S, \quad (2.6)$$

$$u'_d = wT + (1 - w)P, \quad (2.7)$$

$$u_w = Tw(1 - w) + Rw^2 + P(1 - w)^2 + Sw(1 - w). \quad (2.8)$$

A nova matriz de payoff que contenha as duas estratégias puras mais a estratégia mista será:

$$\begin{array}{c|ccc} 1 \setminus 2 & C & D & s_w \\ \hline C & R & S & u'_c \\ D & T & P & u'_d \\ s_w & u_c & u_d & u_w \end{array}, \quad (2.9)$$

Lembrando que, aqui, estamos mostrando somente o payoff do jogador 1, já que o jogo é simétrico para o jogador 2. Na hierarquia do dilema do prisioneiro  $T > R > P > S$ , logo, vemos que a combinação  $\{D, D\}$  é o equilíbrio de Nash considerando-se somente a submatriz composta de  $C$  e  $D$ . Porém, usando as equações para o payoff da estratégia mista, caso o jogador 2 escolha  $D$ , a melhor estratégia do jogador 1 ainda sim é escolher

$D$ , pois como  $S < P$  e  $(1 - w) < 1$ , temos que  $u_d = wP + (1 - w)S < P$ . O caso é análogo para o jogador 2 que também tem como incentivo escolher  $D$ .

Outra forma de obtermos tal resultado para jogos sequenciais envolve a indução finita. Intuitivamente é de se esperar que, permitindo-se uma sequência do jogos, a cooperação seria a estratégia mais eficiente no dilema do prisioneiro, pois essa acumulará um maior payoff ao longo do tempo, comparada a deserção incondicional. Ainda sim, mesmo supondo uma sequência finita de jogadas, o equilíbrio de Nash para o dilema do prisioneiro ainda é a traição incondicional. Suponha uma série finita de  $n$  jogos, com uma sequência qualquer de estratégias adotada pelo jogador 1 em cada turno  $\{s\} = s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n$ . Independentemente do histórico de tal jogo, e de quais estratégias o jogador 2 escolheu, a estratégia mais racional para a última jogada será a traição, visto que não haverá novas interações, logo não há medo de retaliação pela traição. Note que, pelo menos para a última rodada, já sabemos que  $T$  é um equilíbrio de Nash. Isso significa que independente das escolhas do jogador 2, a sequência de escolhas mais lógica para o jogador 1 é  $\{s\} = s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, T$ . vemos que se  $s_n = T$  sempre, a mesma lógica é válida para  $s_{n-1}$ , já que temos certeza da traição na última rodada. Por indução finita, toda a sequência  $\{s\}$  deverá ser composta por  $T$ . Mesmo com tais generalizações a deserção ainda é o equilíbrio de Nash.

Pensando na questão de qual deveria ser a melhor sequência de estratégias em tais jogos, Robert Axelrod organizou em 1980 o primeiro torneio de estratégias (hoje em dia chamados de torneios de Axelrod). Em tal torneio, ele estabeleceu uma matriz de payoff descrevendo o dilema do prisioneiro, com somente duas estratégias puras possíveis,  $C$  ou  $D$ . O foco de tais torneios não era no conceito estático de equilíbrio de Nash, mas sim qual sequência de estratégias poderia obter o melhor payoff acumulado contra outras sequências específicas. Axelrod pediu a cientistas, economistas e matemáticos do mundo inteiro que submetessem algoritmos de decisões de estratégia para o torneio, de modo que cada algoritmo enfrentaria cada um dos outros durante 200 jogos sequenciais, numa espécie de campeonato virtual. Os algoritmos variaram dos mais simples, como por exemplo escolher  $C$  ou  $D$  de maneira totalmente aleatória, até algoritmos altamente sofisticados, que analisavam todo o histórico de estratégias do oponente para escolher qual das duas estratégias seria jogada.

Ao fim do campeonato, dos 14 algoritmos enviados, um dos mais simples obteve o maior payoff acumulado entre todos, o chamado Tit-For-Tat (olho-por-olho e dente-por-dente numa tradução livre), submetido pelo psicólogo Anatol Rapoport. Este algoritmo começava a sequência de estratégias cooperando e fazia com o oponente exatamente

TABELA 2.1: Sequência de estratégias usadas entre TFT e um jogador com estratégia aleatória.

Estratégia\Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TFT	C	C	D	D	C	D	C	C	C	D
Aleatório	C	D	D	C	D	C	C	C	D	D
Payoff (TFT)	R	S	P	T	S	T	R	R	S	P

o que o oponente havia feito com ele na última rodada. Como exemplo, mostramos na tabela 2.1 uma sequência de rodadas entre um jogador que utilize o TFT contra um jogador que escolha aleatoriamente entre  $C$  e  $D$ . Na última linha temos também o payoff, daquela rodada, do jogador TFT.

Os torneios fizeram muito sucesso, sendo que um segundo torneio de Axelrod foi organizado logo em seguida, tendo 62 novos algoritmos escritos. E, novamente, o algoritmo TFT foi o campeão. Tais torneios poderiam ter sido uma mera curiosidade dentro da teoria dos jogos, não fosse o fato de que um modelo dentro de teoria dos jogos passou a apresentar cooperação de longo prazo no dilema do prisioneiro, o TFT. Esse algoritmo conseguia obter em jogos sequenciais um ganho idêntico ou superior a estratégias desertoras, mas, ao mesmo tempo, ele manteria a cooperação num ambiente cooperativo, já que suas escolhas eram recíprocas às decisões dos outros jogadores. Tais torneios foram um dos pontos iniciais para entender como a cooperação poderia surgir a partir da reciprocidade.

Dentro de tais torneios sequenciais, a estratégia TFT foi alvo de diversos estudos para descobrir como ela poderia manter um payoff alto, e ao mesmo tempo manter a colaboração viva entre jogadores. Diversas variações desta surgiram com o tempo [12], mas em 1993 Nowak propôs um novo algoritmo que viria a ter um desempenho semelhante ou melhor que a estratégia TFT, o modelo de “permanecer na vitória e mudar na derrota”, WSLS (*win-stay-lose-shift* no original, também chamada de estratégia de Pavlov) [114]. Essa nova regra não conta com a reciprocidade direta de fazer ao oponente o que este fez ao jogador. No lugar disso, a estratégia WSLS estabelece um parâmetro universal, geralmente chamado de aspiração, que é considerado como estado de “vitória”. Sempre que o indivíduo está nesse estado, o sítio repete a mesma estratégia. Sempre que o indivíduo não está no estado de vitória, este irá trocar sua estratégia. Em seu artigo original, o estado considerado “vitória” era dado tanto pelo payoff  $T$  quanto  $R$ , enquanto o jogador se considerava no estado de derrota quando recebia  $S$  ou  $P$ . Dentro do dilema do prisioneiro, isso significa que o valor numérico que dividia tais estados, a aspiração

TABELA 2.2: Sequência de estratégias usadas entre WSLS e um jogador com estratégia aleatória.

Estratégia\Rodada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
WSLS	C	C	D	C	C	D	D	D	D	C
Aleatório	C	D	D	C	D	C	C	C	D	D
Payoff (WSLS)	R	S	P	R	S	T	T	T	P	S

do jogador, era que seu payoff fosse igual ou maior que  $R$ . Na tabela 2.2 mostramos um exemplo da estratégia WSLS clássica contra o mesmo jogador aleatório da tabela 2.1.

Numa comparação com a tabela 2.1, vemos que o payoff total obtido nessa sequência é maior para a estratégia WSLS. Apesar de esse ser um caso particular, ele contém a essência do porque a estratégia WSLS é tão boa ou melhor que a TFT na maioria das vezes. Enquanto a TFT é recíproca, punindo o oponente traidor com traição e cooperando com o oponente cooperador, a estratégia WSLS consegue se beneficiar do oponente sem tornar o jogo uma sequência de traições. A WSLS consegue manter a colaboração com um colaborador, mas poderão ocorrer situações em que o oponente colabora e a estratégia WSLS deserta. Nesses casos ela obtêm  $T$ , mas diferente da TFT que passaria a colaborar, a WSLS manterá desertando, pois o valor  $T$  é acima de sua aspiração. Estudaremos mais afundo a estratégia WSLS no capítulo 4.

Os torneios de Axelrod foram a base para pensar em jogos sequenciais do ponto de vista de algoritmos, em vez de somente estratégias simples como cooperar indefinidamente. Porém, enquanto os torneios de Axelrod começavam a ser estudados na década de 80, de maneira independente, Maynard Smith começava a fundação do que seria conhecido como teoria de jogos evolucionários, uma área que focava em como populações de estrategistas poderiam mudar e evoluir com o tempo.

## 2.2 Dinâmica de populações e jogos evolucionários

Fora do contexto de economia e matemática, a pergunta sobre como a cooperação surge e se mantém entre espécies era uma grande questão em biologia evolutiva na década de 70. Foi tentando entender como populações de animais irracionais chegavam a comportamentos complexos de cooperação mútua, que Maynard Smith desenvolveu as bases da teoria dos jogos evolucionários [23]. Para isso, ele deixou de lado o foco clássico no resultado da interação única entre dois jogadores, e passou a analisar a

dinâmica global de uma população de estrategistas interagindo entre si. Note que essa era uma situação semelhante aos torneios de Axelrod, mas ao invés da análise microscópica, Maynard utilizou-se de equações de dinâmicas de população, típicas da biologia evolutiva. Nessas, as espécies reproduziam-se com taxas determinadas por sua aptidão, que era um parâmetro fixo em geral. Com uma nova abordagem na área, Maynard Smith associou o payoff médio de cada estratégia como sendo sua aptidão, simulando assim um processo de dinâmica evolutiva entre estratégias. Note que nesse modelo a aptidão de cada espécie passa a depender da frequência relativa de todas as outras espécies. Isso permitiu abordar a aptidão como algo dinâmico, ao invés de um parâmetro fixo para cada espécie. Com isso se desenvolveu a matemática necessária para analisar como populações de estrategistas poderiam interagir entre si e multiplicar, gerando um processo de seleção natural entre estratégias.

Do ponto de vista formal, podemos expandir a teoria de jogos para populações de jogadores a partir do conceito de jogos sequenciais e estratégias mistas. Primeiramente, supomos que existe um número muito grande de jogadores interagindo entre si, existe somente uma matriz de payoff simétrica para todos jogadores (todos os indivíduos são equivalentes) e, a cada rodada, todos os agentes jogam todos entre si com igual probabilidade (não há uma estrutura espacial na rede). A partir de tais suposições, podemos definir uma população de  $N$  jogadores, cada um podendo escolher, a cada jogada, uma das possíveis estratégias do conjunto  $\{s\} = s_1, s_2, \dots, s_n$ . Seja  $N_i$  o número total de jogadores que jogam a estratégia  $s_i$ , podemos definir o vetor  $\vec{\rho} = (N_1/N, N_2/N, \dots, N_n/N)$ , que contém as frequências com que cada estratégia  $s_i$  ocorre na população. Será útil para nós definir o vetor da estratégia  $\vec{s}_i$  como sendo um vetor unitário cujo  $i$ -ésimo componente é 1, e todos os outros são zero. Assim podemos obter qual seria o payoff médio da estratégia  $s_i$  (que inclusive pode ser uma estratégia mista) caso ela jogue contra uma população definida por  $\vec{\rho}$ :

$$u(s_i, \vec{\rho}) = \vec{s}_i \cdot G \cdot \vec{\rho}. \quad (2.10)$$

Onde  $G$  é simplesmente a matriz de payoff do jogo. Tal equação é, de certa forma, equivalente à técnica de campo médio em física. O jogador que adota a estratégia  $i$  recebe um payoff equivalente a ter jogado contra todos os outros jogadores da rede, em média. Note também que a equação (2.10) implica que o efeito de se jogar contra uma população que esteja na configuração  $\vec{\rho}$  é idêntico a se jogar infinitamente contra um único jogador, que use a estratégia mista com frequências dadas por  $\vec{\rho}$ . A partir disso, podemos desenvolver melhor o equilíbrio de Nash para populações de jogadores

interagindo entre si. Este é definido como o perfil de estratégias  $\vec{\rho}^*$ , tal que

$$\vec{\rho}^* \cdot G \cdot \vec{\rho}^* \geq \vec{\rho} \cdot G \cdot \vec{\rho}^*, \quad \forall \vec{\rho}. \quad (2.11)$$

Ou seja, o payoff médio da configuração de equilíbrio,  $\vec{\rho}^*$ , ao jogar contra ela mesma, é maior do que contra qualquer outra configuração que não seja a de equilíbrio. Como no caso do jogo único, isso não implica que tal payoff seja sempre o maior possível, mas significa que uma vez que a população esteja na configuração de equilíbrio de Nash, nenhum dos jogadores tem incentivo a mudar de estratégia, pois essas ofereceriam invariavelmente um payoff menor.

A partir da ideia de populações jogando em um equilíbrio de Nash, Maynard Smith também desenvolveu em 1973 o conceito de estratégia evolucionariamente estável (ESS, Evolutionary Stable Strategy no original) [23]. Uma estratégia evolucionariamente estável é um perfil de estratégias,  $\vec{r}'$ , tal que a população será resistente à invasões de outras estratégias. Esse conceito foi cunhado por Smith ao tentar aplicar teoria de jogos em biologia evolutiva, para estabelecer os motivos das distribuições de estratégias (ou comportamentos) encontrados em populações biológicas serem resistentes a invasões de mutantes. Formalmente, estabelecemos tal conceito da seguinte maneira: suponha que a maior parte  $(1 - \epsilon)$  de uma população utiliza-se de um perfil de estratégias  $\vec{r}'$ , e uma fração infinitesimal  $(\epsilon)$  use um perfil qualquer de estratégias  $\vec{r}$  (nesse contexto  $\vec{r}$  é considerado uma estratégia invasora, ou mutante). O perfil de estratégias da população total é  $\vec{\rho} = (1 - \epsilon)\vec{r}' + \epsilon\vec{r}$ . Consideramos o perfil  $\vec{r}'$  como ESS se, para qualquer perfil invasor  $\vec{r}$  (que esteja em uma frequência abaixo de  $\epsilon$ ), a estratégia  $\vec{r}'$  tenha um ganho estritamente superior àquele obtido contra a estratégia invasora:

$$\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{\rho} > \vec{r} \cdot G \cdot \vec{\rho}. \quad (2.12)$$

A equação acima é melhor entendida se abirmos seus termos, de modo a obter:

$$\vec{r}' \cdot G \cdot [(1 - \epsilon)\vec{r}' + \epsilon\vec{r}] > \vec{r} \cdot G \cdot [(1 - \epsilon)\vec{r}' + \epsilon\vec{r}], \quad (2.13)$$

$\Rightarrow$

$$(1 - \epsilon)(\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{r}' - \vec{r} \cdot G \cdot \vec{r}') + \epsilon(\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot G \cdot \vec{r}') > 0. \quad (2.14)$$

Desse modo obtemos duas condições intuitivas para estabelecer se  $\vec{r}'$  é um equilíbrio evolucionariamente estável. O primeiro termo da equação (2.14) é simplesmente a condição de equilíbrio de Nash:

$$\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{r}' \geq \vec{r} \cdot G \cdot \vec{r}' \quad \forall \vec{r}. \quad (2.15)$$

Tal equação diz que uma estratégia que seja ESS deve obter um payoff maior ou igual contra ela própria, do que qualquer outra estratégia. Já o segundo termo é chamado condição de estabilidade, e ocorre para o caso de um equilíbrio de Nash não-estrito, ou seja, quando a equação (2.15) é uma igualdade. Isso implicaria  $\vec{r} \neq \vec{r}'$  e ainda assim  $\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{r}' = \vec{r} \cdot G \cdot \vec{r}'$ . Nesse caso necessitamos que:

$$\vec{r}' \cdot G \cdot \vec{r} > \vec{r} \cdot G \cdot \vec{r}. \quad (2.16)$$

Assim, o ESS deve ser pelo menos um equilíbrio de Nash, ou caso a estratégia invasora  $\vec{r}$  seja tão boa quanto  $\vec{r}'$  contra o perfil ESS, então  $\vec{r}'$  deve pelo menos ter um ganho maior contra  $\vec{r}$  do que  $\vec{r}$  contra ela mesma. Note que o ESS garante que, caso surja uma pequena fração mutante ( $\epsilon$ ) de outra estratégia qualquer, essa não terá um payoff maior que a estratégia evolutivamente estável, e caso seus payoffs sejam iguais, pelo menos a estratégia mutante não poderá se tornar dominante, pois ela não tem um bom payoff contra si mesma.

Novamente voltamos ao caso do dilema do prisioneiro para exemplificar tal conceito. A estratégia da deserção incondicional ( $\vec{D}$ ) possui um payoff  $u'_w = Tw + P(1 - w)$  contra a estratégia mista  $\vec{s}_w$ , que coopera com uma frequência  $w$  e deserta com frequência  $(1 - w)$ . Vemos que  $\vec{D}$  é um perfil de estratégia ESS pois

$$\vec{D} \cdot G \cdot \vec{D} \geq \vec{s}_w \cdot G \cdot \vec{D}, \quad (2.17)$$

$$P > wS + (1 - w)P, \quad (2.18)$$

satisfazendo a equação (2.15).

A partir das ideias de Maynard Smith, a associação de teoria dos jogos com a teoria evolucionária ganhou força e novos estudos seguiram, no sentido de determinar como uma população de jogadores mudaria seu perfil de estratégias com o tempo. Para que se estabeleça formalmente tal conexão, precisamos determinar então qual a dinâmica será obedecida pelo sistema, ou seja, quais regras serão utilizadas para que a população atualize suas estratégias com o passar do tempo. Nesse sentido, um dos modelos mais

estudados, e com diversos usos em biologia evolutiva, é a equação do replicador, proposta por Taylor e Jonker em 1978 [115]. Essa dinâmica, usualmente associada a biologia, parte da hipótese intuitiva de que o crescimento per capita de uma determinada espécie ( $\dot{\rho}_i/\rho_i$ ) é proporcional à diferença de aptidão (também chamado de *fitness*) de tal espécie em relação a aptidão média da população total:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i(\phi_i - \bar{\phi}) . \quad (2.19)$$

Onde  $\dot{\rho}_i$  é a derivada temporal da fração da população da espécie  $i$ ,  $\phi_i$  é a aptidão dessa e  $\bar{\phi}$  a aptidão média de toda a população. Em teoria de jogos evolucionários associamos o ganho médio da estratégia  $s_i$  a sua aptidão, uma suposição que equivale dizer que estratégias bem sucedidas irão ser imitadas com maior frequência por jogadores racionais. Em um contexto puramente biológico, isso implica que indivíduos utilizando uma estratégia bem sucedida tenderão a deixar mais descendentes. Assim a equação do replicador aplicada a jogos evolucionários se torna:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i(\vec{s}_i \cdot G \cdot \vec{\rho} - \vec{\rho} \cdot G \cdot \vec{\rho}) . \quad (2.20)$$

Sendo que aqui  $\rho_i = N_i/N$  é a fração de estrategistas utilizando-se da  $i$ -ésima estratégia dentro da população total. De acordo com as hipóteses assumidas, a dinâmica do replicador é baseada em indivíduos imitando estratégias bem sucedidas, ou seja, ela é não inovativa, no sentido de que jogadores nunca escolherão estratégias que não existam naquela população espontaneamente. Essa diferenciação será importante em breve, quando introduziremos modelos inovativos advindos de dinâmicas da física estatística.

Utilizando a equação do replicador para o nosso exemplo do dilema do prisioneiro, temos que existem somente duas estratégias puras,  $C$  e  $D$ . Logo o vetor  $\vec{\rho} = \{\rho_c, \rho_d\}$  poderia ter somente duas dimensões, contendo as frações de jogadores cooperadores e de desertores. Mas como estamos lidando com frações da população total temos a vantagem de que  $\rho_c + \rho_d = 1$ , logo, podemos especificar toda a população somente com uma variável, que chamaremos simplesmente de  $\rho$ , a fração de cooperadores na população total. Nesse caso, temos que o payoff médio de um cooperador e de um desertor são, respectivamente:

$$u_c = R\rho + S(1 - \rho) , \quad (2.21)$$

$$u_d = T\rho + P(1 - \rho) . \quad (2.22)$$

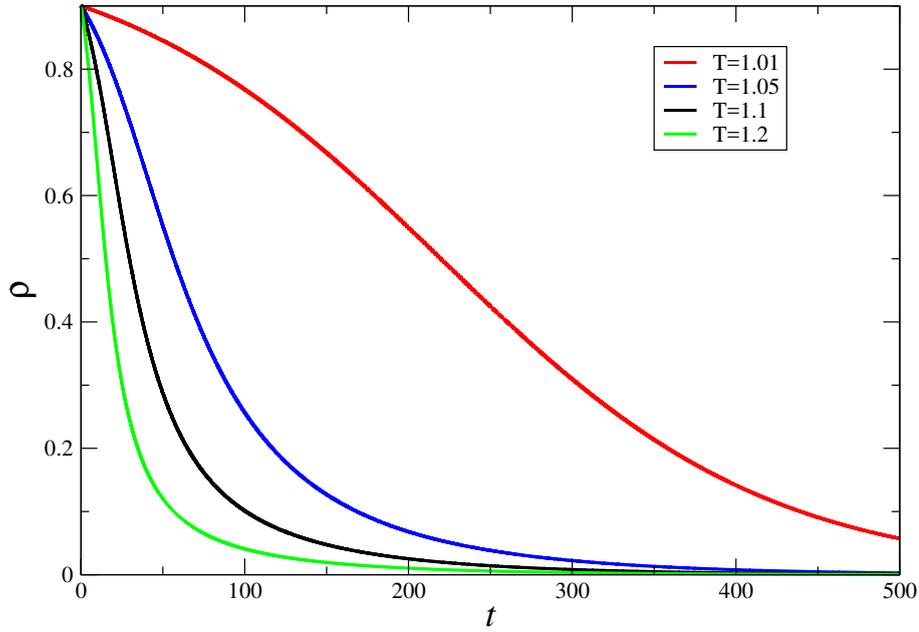


FIGURA 2.2: Frações de cooperadores na população,  $\rho$ , em função do tempo obtidas a partir da resolução da equação do replicador no dilema do prisioneiro. Utilizamos aqui  $R = 1, P = 0, S = -0.01$  e diversos valores de  $T$ .

Lembrando que pela hierarquia do jogo  $PD$ ,  $T > R > P > S$ , isso implica que  $u_d > u_c$ . O payoff, médio de toda a população é dado por

$$\bar{u} = \rho u_c + (1 - \rho) u_d, \quad (2.23)$$

assim a dinâmica do replicador é dada por:

$$\dot{\rho} = \rho (u_c - \bar{u}) = \rho(1 - \rho)(u_c - u_d). \quad (2.24)$$

Como as frações da população são sempre positivas, e  $u_c - u_d < 0$ , a derivada temporal de  $\rho$  sempre será negativa. Vemos que em uma dinâmica de populações dada pela regra da imitação, a cooperação sempre tenderá a zero, pois o payoff médio de um cooperador ao interagir com toda a população sempre é menor do que o de um desertor. A figura 2.2 mostra as frações de cooperadores da população ao resolvermos a equação (2.24) numericamente, através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem [116, 117]. Mesmo em modelos evolutivos a deserção completa é o único destino da população. Em todas as análises de teoria dos jogos até agora a traição supera a cooperação como estratégia.

## 2.3 Física estatística e problemas atuais

A física estatística oferece uma base metodológica adequada para se estudar sistemas de muitas partículas. A partir de interações simples entre as unidades do sistema, padrões complexos podem emergir. A cooperação é um desses efeitos e surge como um fenômeno coletivo no qual grupos de cooperadores se ajudam mutuamente. Esse fenômeno foi verificado primeiramente em 1992, por Nowak e May, ao introduzirem uma abordagem totalmente nova nessa área, utilizando redes de contatos e grafos para designar ligações específicas entre indivíduos da população [25]. Uma das hipóteses para a obtenção dos payoffs na seção anterior era a de que o jogador interagia igualmente com todos os indivíduos, e obtinha assim um payoff médio, o equivalente às aproximações de campo médio da área de física. Em termos de biologia evolutiva, tais equações representam as espécies num nível macroscópico. A partir do momento em que a dinâmica da população deixou de ser descrita num nível de campo médio, com todos interagindo igualmente entre si, os indivíduos passaram a ser considerados como jogadores espacialmente separados, interagindo somente com uma porção delimitada de outros jogadores. Através disso, Nowak e May conseguiram criar cenários onde, finalmente, a cooperação poderia surgir e se manter estável durante a dinâmica. Esse efeito se deu devido à chamada reciprocidade espacial, onde cooperadores tendem a se juntar em ilhas de cooperação em um mar de desertores. Devido ao suporte mútuo, a cooperação poderia sobreviver mesmo cercada de desertores. Além disso foram descobertos padrões espaciais emergentes nessas primeiras análises, com figuras muito semelhantes a caleidoscópios, apresentando uma grande complexidade. A figura 2.3 mostra alguns dos padrões observados nesses primeiros artigos, que tratavam especificamente de redes quadradas.

Com a descoberta de que estruturas espaciais poderiam dar suporte à cooperação, rapidamente diversos modelos de dinâmicas em redes passaram a ser propostos, iniciando a ligação da teoria de jogos evolucionários com as dinâmicas tipicamente encontradas em física estatística, como por exemplo, spins em uma rede cristalina. Nesse tipo de análise, deixamos de lado a dinâmica de populações que descreve a população a partir de uma equação macroscópica. No lugar disso partimos de uma análise microscópica de cada indivíduo, nos focamos na probabilidade individual de que um sítio mude sua estratégia. Desse modo, a teoria dos jogos evolucionários pode ser analisada de um ponto de vista inteiramente focado na equação mestra, que será discutida mais a fundo no próximo capítulo. Isso nos possibilita o uso de diversas técnicas de física estatística para obtenção de resultados analíticos, como o uso de aproximação de pares para descrever uma população espacialmente estruturada em uma rede. De fato, foi

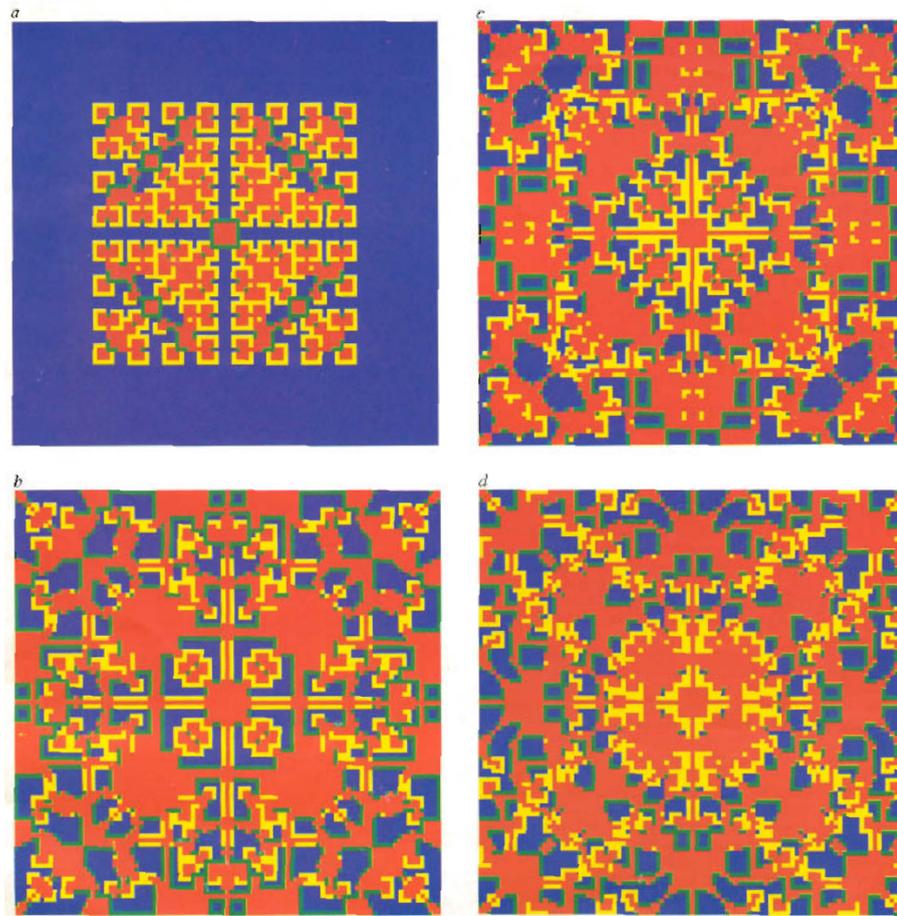


FIGURA 2.3: Imagens do artigo pioneiro de Nowak e May, com as primeiras simulações de jogos espacialmente distribuídos em uma rede quadrada. As cores azul e vermelho representam cooperadores e desertores, enquanto as cores amarelo e verde representam sítios que mudaram de estratégia de  $D$  para  $C$  e sítios que mudaram de  $C$  para  $D$  respectivamente. Figura reproduzida da referência [25].

através de tais métodos que pesquisas recentes passaram a analisar em teoria dos jogos evolucionários características como transições de fase [111, 118–120], expoentes críticos [20, 80, 121, 122] e percolação [53, 123, 124].

Tais análises eventualmente levaram ao uso de técnicas numéricas para a simulação em nível de sítios individuais, quando não era possível a obtenção de resultados analíticos. Em especial, a simulação de Monte Carlo passou a ser extensivamente utilizada nos últimos 20 anos para descrever comportamentos de populações que utilizem taxas de transição, ou grafos de conexão, demasiado complexos para que se possa obter resultados analíticos através da equação mestra. Em tais simulações o payoff e a taxa de transição são calculados numericamente para cada sítio individual da população, de modo a obter a dinâmica total. A análise através da equação mestra e o modelo numérico de Monte

Carlo foram técnicas fundamentais em nossa pesquisa, estes serão discutidos na seção de métodos.

Por fim, chegamos no estado atual da pesquisa em teoria dos jogos evolucionários. Os modelos espaciais introduzidos por Nowak deram origem a uma gama de novos mecanismos que beneficiam a cooperação, o que gerou diversos resultados nos últimos anos. Porém, a maior parte destes havia se focado nas bases de biologia evolutiva, onde os processos eram imitativos. Somente nos anos mais recentes a tecnologia permitiu experimentos em larga escala com humanos [20, 66, 72–77, 125]. Destes, uma boa parte sugere que a cooperação entre pessoas pode surgir através de mecanismos diferentes da imitação [67–71, 126]. Em especial, existem indícios de que as taxas de transição entre estratégias que vemos nos experimentos são inovativas. Dentro desse contexto, é interessante notar que regras de atualização baseadas em modelos da física estatística, como o modelo de Ising, poderiam ser pontos de partida interessantes para tais análises.

# Capítulo 3

## Métodos

### 3.1 Equação mestra e soluções aproximadas

Para estudarmos as dinâmicas de jogos do ponto de vista de física estatística, iniciamos a análise de nossos modelos baseando-nos na equação mestra. Para isso supomos que a dinâmica da população pode ser descrita como diversos indivíduos mudando sua estratégia em intervalos de tempo discretos, de acordo com alguma taxa individual. Note que, independentemente do modelo usado, em geral podemos dividir a dinâmica de jogos evolucionários em duas partes: a fase de jogo e a fase de atualização da estratégia. A primeira delas envolve a obtenção do payoff ( $u_i$ ) de cada indivíduo, através da matriz de payoff do modelo ( $G$ ). Como citado anteriormente, estudamos somente modelos em que as interações ocorrem em pares e existe somente duas estratégias: cooperação ou deserção. Desse modo o payoff total de cada indivíduo sempre será calculado como a soma dos payoffs obtidos entre cada interação com seus vizinhos, dado pela matriz bidimensional (2.1). Evidentemente os parâmetros dessa matriz irão variar entre cada jogo analisado.

Uma vez que se tenha os payoffs dos jogadores para aquela rodada, ocorre a fase de atualização de estratégia. Nessa etapa os sítios poderão mudar sua estratégia de acordo com alguma regra específica de atualização de estratégia, geralmente baseada no valor total do payoff do sítio e de seus vizinhos. As taxas de transição individuais,  $w_{ij}$ , de cada sítio podem ser obtidas ao se calcular a probabilidade por unidade de tempo com a qual cada jogador mudará sua estratégia  $i$  para a estratégia  $j$ . Obtemos essas taxas a partir da probabilidade,  $p(\Delta u_{ij})$ , de que o jogador mude sua estratégia  $i$  para a estratégia  $j$ , em um intervalo discreto de tempo. O modelo mais tradicional para a atualização

de estratégia em teoria dos jogos evolucionários é o de imitação. Isso se deve a esse modelo ser diretamente mapeado no processo de nascimento-morte, típico da biologia evolutiva [13]. Nesse modelo, o jogador  $i$  escolhe aleatoriamente um de seus vizinhos,  $j$ , e compara seu payoff com o do outro. O indivíduo copiará a estratégia do outro com uma determinada probabilidade,  $p(\Delta u_{ij})$ , que será uma função da diferença de payoff entre os dois ( $u_j - u_i$ ). Duas das funções de probabilidade mais tradicionais para a atualização de estratégia são a imitação proporcional e a distribuição de Fermi-Dirac. Na imitação proporcional temos que,

$$p(\Delta u_{ij}) = \max[(u_j - u_i), 0]/b , \quad (3.1)$$

onde  $b$  é uma constante de normalização, equivalente ao payoff máximo que pode ser obtido. Outro modelo recentemente introduzido é a distribuição de Fermi-Dirac, utilizado amplamente em física estatística [20, 80]:

$$p(\Delta u_{ij}) = 1 / \left( 1 + e^{-(u_j - u_i)/k} \right) , \quad (3.2)$$

onde  $k$  mede a “irracionalidade” do jogador. Esse parâmetro se relaciona com a possibilidade dos jogadores eventualmente cometerem ações que diminuam seu payoff. Mas ele também é importante para evitar que a dinâmica de Monte Carlo acabe congelando-se em estados de meta-estáveis (o que seria equivalente a ficar parada em mínimos locais de energia). Em geral  $k$  possui um valor no intervalo  $[0.001, 0.3]$  para simular uma chance pequena, mas não nula, de que o jogador cometa decisões ilógicas [12, 20]. Em nossas pesquisas, variamos o valor de  $k$  de 0.01 a 1, não havendo grande mudanças no comportamento, a menos que explicitamente dito o contrário. Uma vez que as etapas de jogo e de atualização de estratégia ocorram, o processo se repete, calculando-se o novo payoff, após os indivíduos terem atualizado suas estratégias. Essa é a base para o processo que dá origem a dinâmica evolutiva das estratégias. Como vemos, ela tem semelhanças com processos de evolução natural biológicos, e em geral o foco deste é justamente o estado estacionário do sistema. Um diagrama simplificado do processo é mostrado na figura 3.1.

Regras de atualização que se baseiam na imitação são consideradas “não-inovativas”, devido às estratégias não poderem surgir espontaneamente, a menos que se introduzam mutações na população. Todo sítio precisa de um “doador” para receber uma estratégia nova, e uma vez extinta a estratégia nunca retornará [12, 20, 68]. Isso faz sentido quando a estratégia representa um comportamento instintivo de uma espécie, em dinâmicas

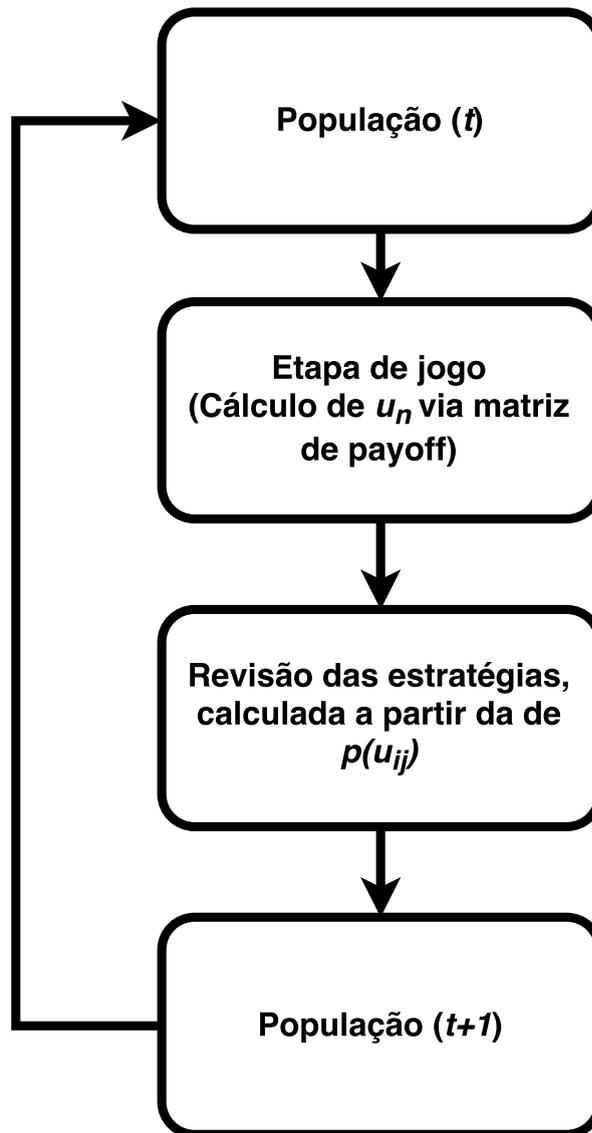


FIGURA 3.1: Princípio básico de qualquer dinâmica de populações em teoria dos jogos evolucionários. Em geral, o que mudará é o tipo de regra de atualização ou qual rede de interações específica a ser utilizada.

evolutivas, mas, por vezes não é uma boa descrição para comportamentos sociais em humanos (que podem mudar de estratégias por meios cognitivos, em escalas de tempo muito menores) [66, 67, 69–71, 75–77]. De fato, é de se esperar que novos comportamentos possam surgir, e que pessoas mudem de estratégias sem a necessidade estrita de haver alguém a quem copiar, o que parece ser o caso segundo experimentos recentes com pessoas [72–74, 125]. Devido a isso, nós também analisamos estratégias inovativas, onde o sítio poderá escolher uma estratégia que não pertença a sua vizinhança na etapa de atualização. Estas serão descritas em detalhes nas seções 4.3 e 4.4 onde foram estudadas com maior profundidade.

Evidentemente a equação mestra, em geral, não é analiticamente solúvel. Porém, a metodologia usual em teoria dos jogos evolucionários envolve utilizar versões simplificadas desta para se analisar sistemas específicos. Em nossa pesquisa, a partir da equação mestra usaremos sucessivas aproximações para introduzir uma estrutura espacial na rede. Começamos analisando o caso da população totalmente conectada, realizando a aproximação de campo-médio, e a partir disso desenvolvemos a aproximação de pares. Com isso poderemos analisar redes regulares como quadrada e triangular de maneira analítica e verificarmos as consequências dos modelos que propomos. A resolução explícita de tal equação será feita no capítulo 4, onde determinamos qual topologia de conexões e qual regra de atualização de estratégia será usada para cada caso específico.

Para a obtenção da equação mestra do caso geral, começamos a partir do vetor  $\{s\}$ , que nos dá o estado de cada indivíduo em uma população. Com isso, podemos mapear o processo sequencial dessa população de indivíduos trocando de estratégias através de uma cadeia Markoviana [20]. Nesse caso, o sistema como um todo mudaria seu estado  $\{s\}$  para um novo estado  $\{s'\}$  de acordo com a taxa  $W(\{s\} \rightarrow \{s'\})$ .

A partir da escolha do modelo a ser utilizado, podemos então estabelecer quais serão as taxas de transição globais,  $W(\{s\} \rightarrow \{s'\})$ , da respectiva equação mestra. Abaixo procedemos com o exemplo do jogo clássico do dilema do prisioneiro em um grafo totalmente conectada. Nesse caso, a equação mestra é:

$$\frac{d}{dt}P(\{s\}, t) = \sum_{\{s'\}} \left[ P(\{s'\}, t)W(\{s'\} \rightarrow \{s\}) - P(\{s\}, t)W(\{s\}, \rightarrow \{s'\}) \right]. \quad (3.3)$$

Sendo  $P(\{s\}, t)$  a probabilidade de que a população esteja na configuração de estratégias  $\{s\}$  em um dado momento  $t$ . As taxas  $W(\{s\} \rightarrow \{s'\})$  descrevem a probabilidade de que o sistema inteiro mude para o novo estado. Supondo que a cada intervalo de tempo somente um sítio possa mudar seu estado, podemos então utilizar as taxas individuais de transição de cada sítio ( $w$ ), de modo que:

$$W(\{s\}, \rightarrow \{s'\}) = \sum_{i,j} n_i w(i \rightarrow j; \{s\}) \delta_{\{n\}, \{n'\}^{ij}}. \quad (3.4)$$

Aqui a somatória dupla é realizada sobre todos os sítios  $i, j$  e  $n_i$  é o número total de sítios jogando a estratégia  $i$ ,  $w$  é a taxa individual de transição de  $i$  para  $j$  e  $\delta_{\{n\}, \{n'\}^{ij}}$  é a função delta de Kronecker. O termo  $\{n'\}^{ij}$  é definido como o estado da população que

difere de  $\{n\}$  em uma troca unitária, de um sítio  $i$  mudando para  $j$  [20, 127]:

$$\{n'\}^{ij} = \{n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N\}. \quad (3.5)$$

Através disso podemos trabalhar somente com taxas de transição individuais ( $w_{ij}$ ), em vez de calcular a taxa de transição de toda a população,  $W(\{s\}, \rightarrow \{s'\})$ . A partir de tal análise, para cada modelo específico, pode-se então obter uma equação diferencial ordinária (EDO) que determina a dinâmica do sistema. Note que a EDO é obtida por princípios microscópicos, em vez de hipóteses macroscópicas, como foi o caso da análise por dinâmica de populações.

Ao tratar do dilema do prisioneiro com somente duas estratégias possíveis, temos que  $s_i = C$  ou  $s_i = D$  para cada sítio. Utilizando a aproximação de campo médio, podemos usar  $P(\{s\})$  para obter a probabilidade de que a população possua uma fração  $\rho$  de sua população no estado  $C$ . E por consequência uma fração  $(1 - \rho)$  no estado  $D$ . Desse modo, usamos a equação mestra de  $P(\{s\})$  para obter a equação dinâmica da população  $\rho(t)$ :

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)W_{(D \rightarrow C)} - \rho W_{(C \rightarrow D)}, \quad (3.6)$$

sendo que a taxa  $W_{(D \rightarrow C)}$  indica a frequência com a qual um sítio típico muda sua estratégia de  $D$  para  $C$ , por unidade de tempo [20]. Caso haja estruturas espaciais na população, a taxa de transição global  $W$  será dada por um somatório de todas as taxas possíveis. Isso é feito no capítulo 4 e no apêndice A, para a aproximação de um e dois vizinhos.

## 3.2 Simulações de Monte Carlo

Para confrontar os resultados previstos pela aproximação de campo médio, utilizamos o método complementar de dinâmica de Monte Carlo [128, 129]. Note que, em geral, para resolvermos a equação mestra utilizamos simplificações locais, que deixam de considerar efeitos de correlação espacial ao simplificar a topologia da rede [130–132]. Desse modo a comparação de resultados das duas metodologias é muito importante para suprir as deficiências específicas de cada técnica.

Simulações de Monte Carlo em jogos são semelhantes às usadas em modelos de física estatística. Primeiramente criamos uma rede de conexões entre os indivíduos na topologia desejada, o que definirá qual jogador será vizinho de quem. Então geramos

uma distribuição inicial de estratégias, dando a cada sítio uma estratégia  $C$  ou  $D$  com igual probabilidade. Utilizamos sempre condições homogêneas, com as estratégias aleatoriamente distribuídas. A partir dessas condições iniciais, realizamos sucessivos passos de Monte Carlo até o sistema atingir um estado estacionário dinâmico, quando podemos obter médias temporais de valores que caracterizem o sistema, como por exemplo a fração média de cooperadores ( $\rho$ ) ou o payoff total médio da população.

O passo de Monte Carlo consiste em duas etapas: a etapa de jogo e a de atualização de estratégias. Na etapa de jogo obtemos o payoff de cada sítio da rede. Isso é feito para cada indivíduo, ao colocá-lo para jogar contra cada um de seus vizinhos, obtendo seu respectivo ganho utilizando-se da matriz de payoff  $G$ . Note que o payoff de cada interação é somado, dando a cada sítio um payoff total, por rodada, igual a soma de cada interação que ele teve. Desse modo, a cada rodada o payoff total do jogador  $i$  será:

$$u_i = \sum_{j \in \{\Omega_i\}} G(s_i, s_j), \quad (3.7)$$

onde  $s_i$  é a estratégia do sítio  $i$  e a soma é realizada somente nos sítios que estão dentro da vizinhança  $\{\Omega_i\}$  do sítio  $i$ . Também é importante lembrar que todos os payoffs são zerados no início de cada passo de Monte Carlo, ou seja, os jogos analisados não possuem memória. Após isso temos a fase de atualização de estratégias, onde os sítios têm a chance de mudarem de estratégia, mediante determinadas probabilidades. Nessa etapa, escolhemos um sítio  $i$ , de maneira aleatória ou sequencial (tal escolha define se o protocolo de Monte Carlo é considerado assíncrono ou síncrono). O sítio  $i$  poderá atualizar sua estratégia com a probabilidade determinada pela regra específica de atualização de estratégia a ser usada,  $p(u_i)$ . Essa probabilidade dependerá do payoff total do sítio e possivelmente do payoff de seus vizinhos.

Um passo de Monte Carlo (*MCS*) é definido como a repetição desse processo de atualização  $N$  vezes, sendo  $N$  o número de indivíduos na rede. No protocolo assíncrono, sorteamos  $N$  sítios aleatoriamente a cada passo. A cada sítio sorteado, seu payoff (e o de seus vizinhos) é calculado e sua estratégia é atualizada instantaneamente. No protocolo síncrono não há sorteio, ao contrário, calcula-se o payoff de cada sítio de toda a rede. Em seguida realizamos a varredura de toda a rede de maneira sequencial, calculando quais sítios mudarão de estratégia e realizando tal mudança de uma só vez na rede inteira ao fim do passo. Como frisamos anteriormente, a probabilidade de atualização não é uma função padrão e a literatura possui inúmeras regras diferentes propostas como por exemplo “imitar o melhor”, “imitação proporcional”, “permanece na vitória, muda na

derrota (*Win-Stay-Lose-Shift* no original)”, “olho-por-olho e dente-por-dente (*Tit-For-Tat* no original)”, etc [20]. Também frisamos aqui que, em geral, o protocolo síncrono e assíncrono geram resultados semelhantes na maioria das aplicações de Monte Carlo, porém certos sistemas (principalmente os que possuem fortes correlações temporais) podem ter resultados diferentes. Para um estudo detalhado desse método, sugerimos [20, 128, 129]. Adicionamos no apêndice D um exemplo mínimo funcional dos códigos que utilizamos para gerar a dinâmica de Monte Carlo, bem como o link para uma pasta pública contendo outros exemplos.

É importante fazermos uma diferenciação quanto às estratégias e as regras de atualização. Por ser uma área recente, a literatura ainda possui alguns termos conflitantes. Nesse trabalho sempre trataremos por regra de atualização a função que dá a probabilidade de que o sítio mude sua estratégia. Um conceito interessante usado por Szabó em [20] é o de que as regras de atualização de estratégia podem ser consideradas como “meta-estratégias”, algoritmos que ditam para cada sítio qual estratégia deverá ser utilizada. Em nossos sistemas todos os sítios utilizarão a mesma regra de atualização de estratégia, e essa é fixa em cada modelo, apesar de testarmos regras diferentes para modelos diferentes.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Jogos mistos

O ponto inicial de nossa pesquisa foi a análise das flutuações dos parâmetros dos jogos utilizados. Considerando que na natureza a determinação de qual jogo se está jogando é subjetiva [133–135], e muitas vezes difere entre cada jogador, propusemos uma análise usando o modelo de jogos mistos [49]. Nesse contexto, indivíduos podem jogar, a cada interação, um entre dois jogos diferentes previamente estabelecidos de maneira aleatória. Considerando a parametrização introduzido na figura 2.1, nas quais se fixa os valores  $R = 1$  e  $P = 0$ , a matriz de ganho do jogo é definido por dois parâmetros:  $G = (T, S)$ . Portanto, a mistura de jogos significa que existirão agora duas matrizes de payoff,  $G_1 = (T_1, S_1)$  e  $G_2 = (T_2, S_2)$ , e elas serão usadas em cada interação com probabilidades  $w$  e  $1 - w$ , respectivamente. Mais especificadamente, a matriz a ser utilizada é sorteada a cada nova interação entre jogadores.

Com isso, criamos a possibilidade de que o jogo, em cada interação, possa variar temporalmente entre dois valores, representando as pequenas diferenças individuais e temporais que podem surgir devido a inúmeras flutuações extrínsecas aos jogadores. Um exemplo clássico de percepção diferente de ganhos/riscos envolve a análise das apostas na bolsa de valores entre um momento de crise e um momento de alta na economia [47, 49, 136].

O objetivo nesse primeiro trabalho foi analisar os efeitos das flutuações na evolução da cooperação no sistema, focando em responder à questão: quão robusto é o sistema mediante tais flutuações? Pensando nisso, comparamos a dinâmica de um sistema em

que os indivíduos jogam  $G_1$  e  $G_2$  de forma mista (controlada pela probabilidade  $w$ ) com um sistema que jogue um único jogo simples, que é o jogo médio equivalente, dado pela matriz  $G_m = (G_1 + G_2)/2$ . Isso nos garante um espaço de parâmetros que possuirá dois jogos bem definidos com um ponto médio entre ambos, que representa o jogo médio  $G_m$ . Isso pode ser visualizado na figura 4.1.

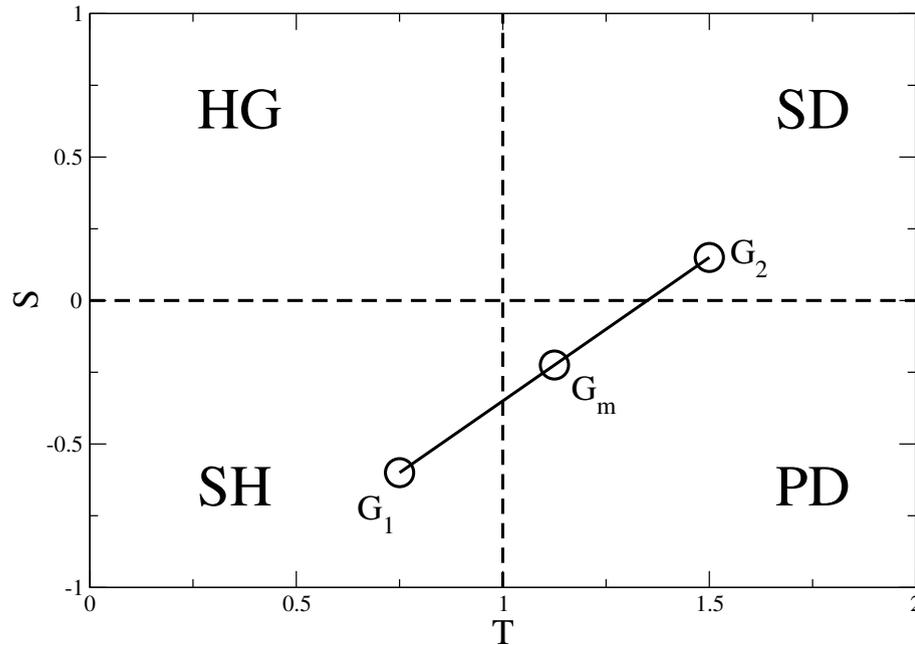


FIGURA 4.1: Espaço de parâmetros  $T$  e  $S$  contendo duas possíveis matrizes de payoff  $G_1$  e  $G_2$ . Para qualquer par de matrizes escolhido, podemos encontrar uma matriz que esteja no ponto médio entre as duas. Note que o jogo médio não precisa sequer estar na mesma categoria dos jogos a que pertencem  $G_1$  e  $G_2$ .

### 4.1.1 Equação mestra e campo médio

Como descrito no capítulo 3, o processo evolucionário dos sistemas estudados é dividido em duas partes: a fase de jogo e a fase de atualização de estratégia. Para os jogos mistos, o payoff coletado de cada interação dependerá de qual matriz de jogo foi usada naquela interação e naquele intervalo de tempo. Ou seja, para cada par de indivíduos, em cada etapa da dinâmica, sorteamos se será usada a matriz  $G_1 = (T_1, S_1)$  com probabilidade  $w$  ou a matriz  $G_2 = (T_2, S_2)$  com probabilidade  $1 - w$ . A cada nova rodada, todas as matrizes serão re-sorteadas. Nós utilizamos dois modelos clássicos de regra atualização de estratégias e comparamos seus resultados. A regra de imitação proporcional, equação (3.1) [20, 80]:

$$p(\Delta u_{ij}) = \max[(u_j - u_i), 0]/b \text{ ,}$$

e a regra imitação ponderada pela distribuição de Fermi-Dirac (3.2) [20, 137, 138],

$$p(\Delta u_{ij}) = 1 / \left( 1 + e^{-(u_j - u_i)/k} \right) .$$

Onde  $u_i$  é o payoff do sítio  $i$  e  $k$  mede a irracionalidade. O objetivo principal da comparação entre essas duas regras foi analisar o efeito da não-linearidade inerente a regra de Fermi-Dirac da imitação. Frisamos que, apesar da regra de imitação proporcional utilizar da função *max*, ela ainda é proporcional para diferenças positivas de payoff.

Começamos o estudo da equivalência entre o jogo misto e o jogo médio usando a equação mestra, como em (3.3). Note que o modelo possui uma “distribuição” de jogos entre indivíduos,  $G_1$  ou  $G_2$ . Definimos então  $P(\{s\}, \{g\}, t)$  como a probabilidade de encontrarmos o sistema em uma determinada configuração de estratégias  $\{s\}$  e em determinada configuração de jogos entre indivíduos  $\{g\}$  em um dado momento  $t$ :

$$\frac{d}{dt}P(\{s\}, \{g\}, t) = \sum_{\{s'\}, \{g'\}} \left[ P(\{s'\}, \{g'\}, t)W(\{s'\}, \{g'\} \rightarrow \{s\}, \{g\}) - P(\{s\}, \{g\}, t)W(\{s\}, \{g\} \rightarrow \{s'\}, \{g'\}) \right] . \quad (4.1)$$

Aqui  $\{s\} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  é o conjunto de variáveis que descreve a estratégia de cada indivíduo da população ( $C$  ou  $D$ ) e  $\{g\} = \{g_{12}, g_{13}, \dots\}$  é a distribuição dos jogos entre pares de indivíduos ( $g_{12}$  indica qual jogo o sítio 1 e 2 jogam entre si). A probabilidade de transição de um estado para o outro é  $W(\{s\}, \{g\} \rightarrow \{s'\}, \{g'\})$ , e dependerá de inúmeras particularidades do modelo, como o jogo a ser jogado, qual a regra de imitação utilizada e a geometria das ligações da população. Evidentemente não conseguimos resolver tal sistema de equações diferenciais analiticamente de maneira geral. No entanto, podemos estabelecer certas condições para as quais o jogo médio será igual ao jogo misto.

Vamos supor que (i) a distribuição de estratégias  $\{s\}$  é estatisticamente independente da distribuição de matrizes de jogos  $\{g\}$ . Essa é uma suposição razoável, visto que a percepção do ganho em cada jogo usualmente é um fator extrínseco às decisões de estratégia do indivíduo. Dessa maneira podemos escrever que  $P(\{s\}, \{g\}, t) = P(\{s\}, t)P(\{g\})$ . Para simplificar a notação usaremos  $s$  e  $g$  no lugar de  $\{s\}$  e  $\{g\}$ . A

equação mestra se torna:

$$P(g) \frac{d}{dt} P(s, t) = \sum_{s', g'} \left[ P(s', t) P(g') W(s', g' \rightarrow s, g) - P(s, t) P(g) W(s, g \rightarrow s', g') \right]. \quad (4.2)$$

Notando que o valor médio de uma função  $f$  sobre uma série de configurações  $\{g\}$  é  $\langle f \rangle_g = \sum_g f P(g)$  podemos somar ambos os lados da equação em  $g$ . Além de eliminar  $P(g)$  do lado esquerdo, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(s, t) &= \sum_{s', g} P(s', t) \left[ \sum_{g'} P(g') W(s', g' \rightarrow s, g) \right] \\ &- \sum_{s', g'} P(s, t) \left[ \sum_g P(g) W(s, g \rightarrow s', g') \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Note que as quantidades dentro dos colchetes são os valores médios de  $W$  sobre as configurações  $g$  ( $g'$ ). Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(s, t) &= \sum_{s'} P(s', t) \left\langle \sum_g W(g', s' \rightarrow g, s) \right\rangle_{g'} \\ &- \sum_{s'} P(s, t) \left\langle \sum_{g'} W(g, s \rightarrow g', s') \right\rangle_g. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Notamos agora que todas as taxas são independentes do jogo a ser sorteado na próxima interação. Desse modo a soma sobre todos os possíveis jogos futuros dentro da média leva somente a uma constante finita  $\kappa$ . Essa irá depender da topologia da rede e de quantos jogos diferentes o sítio  $i$  pode jogar com seus vizinhos, mas para redes regulares ela será igual para todos os sítios, podendo ser absorvida na constante do tempo. Em outras palavras:

$$\left\langle \sum_g W(g', s' \rightarrow g, s) \right\rangle_{g'} = \kappa \langle W(g', s' \rightarrow s) \rangle_{g'}. \quad (4.5)$$

Agora, vamos supor que (ii): As taxas de transição são lineares na diferença de payoff. Essa segunda suposição somente é válida se usarmos regras de imitação lineares. Desse ponto em diante, nossa aproximação não descreve sistemas que usem regras de imitação não-lineares como a equação (3.2) necessariamente, no entanto veremos que o comportamento de ambas pode ser muito semelhante. Adicionando tal suposição

podemos chegar em uma forma mais simples da equação:

$$\frac{d}{dt}P(s, t) = \sum_{s'} P(s', t)W(s' \rightarrow s; G_m) - \sum_{s'} P(s, t)W(s \rightarrow s'; G_m) , \quad (4.6)$$

onde  $G_m$  é a matriz de payoff do jogo médio equivalente. Tal equação mostra que, obedecidas as duas hipóteses, a evolução temporal de um jogo misto é igual à evolução temporal de seu jogo médio equivalente. É importante mencionar que tal desenvolvimento pode ser facilmente generalizado para sistemas com mais que dois jogos mistos. Supondo  $\theta_g = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{g,k}$ , onde  $w_k$  é a probabilidade de jogar o jogo  $G_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), nós podemos ver que o argumento se mantém. A única diferença é que agora o jogo médio será  $G_m = \sum_{k=1}^n w_k G_k$ . Este é um resultado interessante, visto que populações de jogadores são sistemas complexos, onde não se esperaria, a priori, um resultado de que a mistura de dois parâmetros resultasse na dinâmica semelhante à do parâmetro médio.

Vemos isso claramente ao realizarmos a aproximação de campo médio, onde cada indivíduo obtém um payoff médio equivalente a jogar com todos os outros jogadores da rede. Para o dilema do prisioneiro simples, com um jogo, temos que, de acordo com a equação (2.24):

$$\dot{\rho} = \rho(u_c - \bar{u}) = \rho(1 - \rho)(u_c - u_d) . \quad (4.7)$$

Porém, para o caso do jogo misto com duas matrizes de payoff, o valor médio de  $u_c$  e  $u_d$  não será dado pela equação (2.21). Suponha que a população utilize  $G_1$  com frequência  $w$  e  $G_2$  com frequência  $(1 - w)$ . Utilizando a aproximação de campo médio na qual o payoff médio de cada sítio é dado pela interação média dele com o restante da população, temos que:

$$u_c = w(R_1\rho + S_1(1 - \rho)) + (1 - w)(R_2\rho + S_2(1 - \rho)) , \quad (4.8)$$

$$u_d = w(T_1\rho + P_1(1 - \rho)) + (1 - w)(T_2\rho + P_2(1 - \rho)) . \quad (4.9)$$

Note porém que como a aproximação de campo médio considera que todos sítios interagem igualmente com a média da população, isso resulta no payoff médio ser linear nos parâmetros das matrizes de payoff  $G_1$  e  $G_2$ . Isso equivale a dizermos que o jogo utiliza uma matriz de payoff equivalente  $G_m = wG_1 + (1 - w)G_2$ , dada pela média das

duas:

$$u_c = \rho (wR_1 + (1 - w)R_2) + (1 - \rho) (wS_1 + (1 - w)S_2) = R_m \rho + S_m (1 - \rho), \quad (4.10)$$

$$u_d = \rho (wR_1 + (1 - w)R_2) + (1 - \rho) (wP_1 + (1 - w)P_2) = T_m \rho + P_m (1 - \rho). \quad (4.11)$$

Desse modo, vemos que a equação dinâmica para a aproximação de campo médio no caso de jogos mistos é equivalente a equação para o jogo simples composto da média de ambos jogos.

Porém, em um jogo estruturado em uma rede e que utilize regras de cópia de estratégia usuais (i.e. distribuição de Fermi-Dirac, copiar o melhor, melhor resposta miópica, etc [20]) dificilmente as duas hipóteses são satisfeitas. Ainda sim o resultado acima é um forte indicador de que jogos mistos podem se comportar como o jogo médio, pelo menos para limites que se aproximem das hipóteses necessárias. Para estudar tais casos demos continuidade a nossas análises, refinando mais o modelo de dinâmica de população tentando resolver a aproximação de pares, que considera uma população infinita, porém estruturada em uma rede quadrada. Para isso se expande a equação dinâmica inicial, e no lugar da evolução temporal de um sítio focal, resolvemos exatamente dois sítios focais, ligados a outros seis vizinhos que serão resolvidos por aproximações sucessivas. Tal método deve ser resolvido numericamente pois nos leva a  $2^8$  equações diferenciais ordinárias individuais. No apêndice A encontra-se como desenvolvemos as equações de pares e as modificamos para incluírem jogos mistos. Usamos um algoritmo de Runge-Kutta de 4ª ordem [116, 117] para obter o comportamento das populações nesse caso, como visto na figura 4.2. Nessa, podemos observar o comportamento do jogo simples  $G_1$  e  $G_2$  bem como o jogo médio simples  $G_m$ , que tem o resultado entre os dois jogos como o esperado. O jogo misto composto por  $G_1$  e  $G_2$ , jogados com igual probabilidade, é mostrado na figura como  $G_x$ . Fica evidente que a evolução de um sistema misto é bem próxima a evolução de um sistema de um jogo médio, principalmente para tempos grandes. Tal semelhança, no entanto, se mantém somente quando os jogos mistos estão próximos um do outro no espaço de parâmetros.

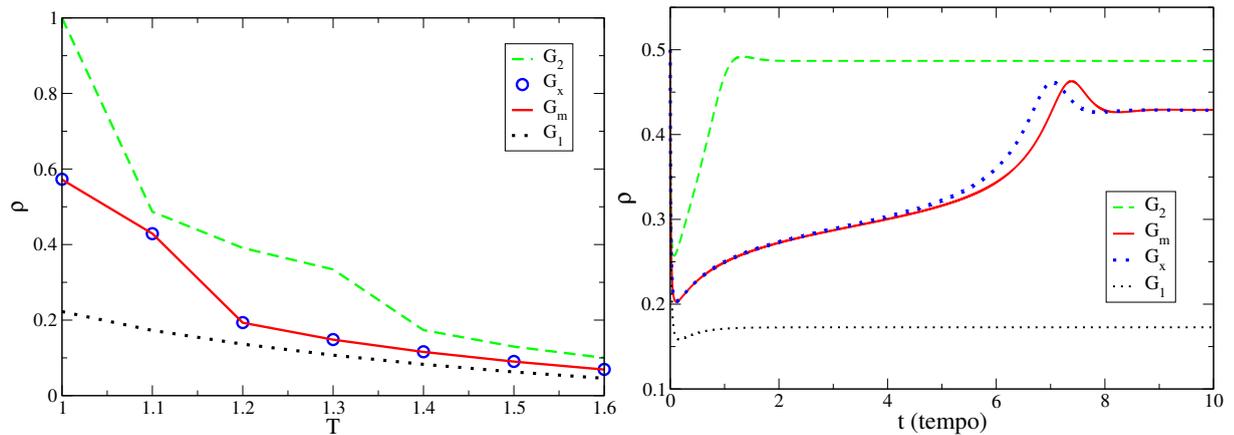


FIGURA 4.2: a) Comportamento dos cooperadores em relação ao parâmetro  $T$  para dois jogos diferentes,  $G_1(S_1 = -0.1)$  e  $G_2(S_2 = 0.1)$ , seu jogo médio,  $G_m(S_m = 0)$ , e o equivalente ao modelo de jogo misto  $G_x$  onde joga-se  $G_1$  e  $G_2$  com igual probabilidade. b) Evolução temporal da fração de cooperadores para cada um dos jogos citados anteriormente com  $T = 1.1$ . Para tempos longos o jogo médio (Vermelho) se comporta como o jogo misto (Azul). Dados analiticamente obtidos através da integração da equação mestra com aproximação de pares.

### 4.1.2 Simulações de Monte Carlo

O próximo passo foi testar jogos mistos em modelos espacialmente estruturados, usando simulações do tipo Monte Carlo. Note que em tais sistemas, ambas hipóteses anteriores são quebradas. A distribuição de estratégias terá uma forte correlação com o jogo a ser jogado entre vizinhos e as taxas de transição usadas não serão lineares ao usarmos a distribuição de Fermi-Dirac. Para o modelo de jogos mistos, realizamos simulações com diferentes matrizes de payoff representando diferentes jogos ( $SD$ ,  $SH$  e  $PD$ ) em redes do tipo quadrada, com condições de contorno periódicas e também em redes do tipo livre de escala. A interação ocorre entre primeiros vizinhos, e utilizamos os protocolos de atualização síncrono e assíncrono. As simulações foram feitas em redes contendo entre  $N = 10^4$  e  $2.5 \times 10^4$  indivíduos. Todas as quantidades foram obtidas com médias em 20 configurações iniciais diferentes, após no mínimo  $10^3 - 10^4$  passos de Monte Carlo. Podemos resumir o processo de Monte Carlo para jogos mistos da seguinte maneira:

1. Criamos as ligações entre os sítios de acordo com a topologia da rede;
2. Distribuímos de forma homogênea as estratégias entre os sítios;
3. Sorteamos, entre cada ligação de dois sítios, uma das duas matrizes  $G_1$  ou  $G_2$ ;
4. Calculamos o payoff total da rede;

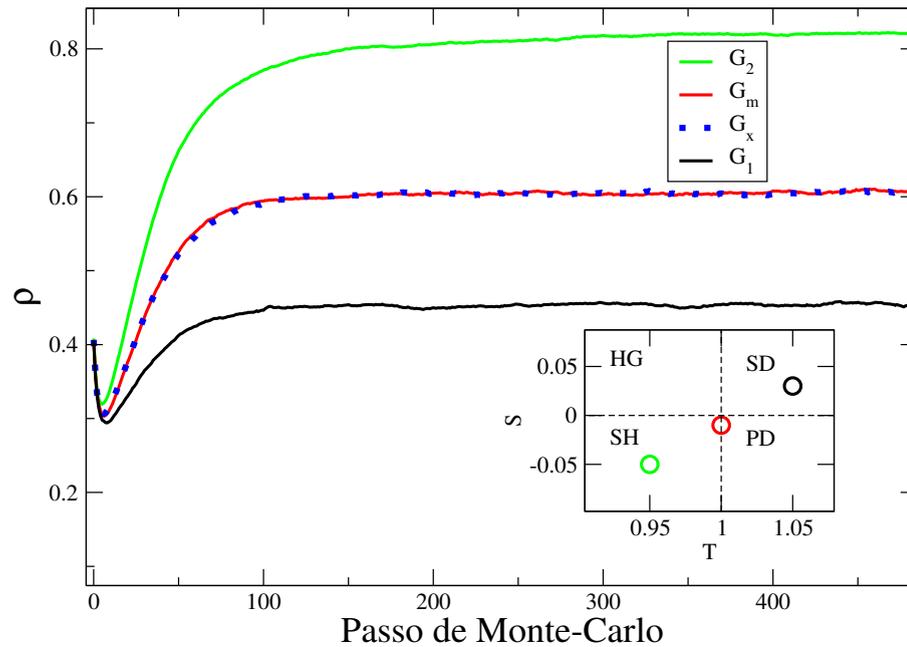


FIGURA 4.3: Evolução temporal da fração de cooperadores para 3 jogos simples ( $G_1 = (1.05, 0.03)$ ,  $G_2 = (0.95, -0.05)$  e  $G_m = (1, -0.01)$ ) e para o jogo misto,  $G_x$ , composto de  $G_1$  e  $G_2$ . Após uma etapa de transiente, as populações atingem um estado estacionário na qual o jogo misto se comporta como o médio. Dados obtidos através de simulação de Monte Carlo.

5. Atualizamos as estratégias dos sítios de maneira síncrona ou assíncrona;
6. Repetimos a partir do passo 3 até o estado estacionário.

É importante notar que existe uma sutileza no modelo assíncrono. Como nesse modelo atualizamos a estratégia de cada sítio de maneira instantânea, devemos também recalcular o payoff dele assim que sua estratégia é atualizada. Isso significa que a cada vez que a estratégia é atualizada, devemos re-sortear qual matriz de jogo ele utilizará com cada um de seus 4 vizinhos, e fazer o cálculo do novo payoff do sítio e de seus vizinhos.

A figura 4.3 mostra um exemplo típico do processo de transiente na qual a população sai de um estado inicial e através de sucessivos passos de Monte Carlo, chega a um estado estacionário, na qual serão obtidas médias das grandezas relevantes. Na figura temos os dados de dois jogos simples ( $G_1$  e  $G_2$ ), o jogo médio equivalente ( $G_m$ ) e o jogo misto ( $G_x$ ), composto de  $G_1$  e  $G_2$ . Vemos que o jogo médio e o misto se comportam muito semelhantemente. Os parâmetros usados para cada jogo são mostrados no gráfico menor.

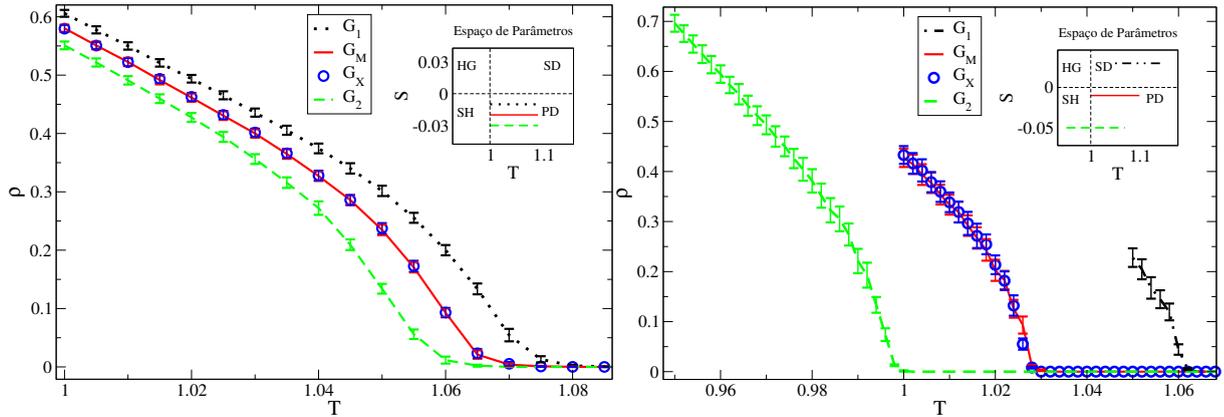


FIGURA 4.4: a) Comportamento da fração de cooperadores  $\rho$  em relação a  $T$  para dois jogos simples  $G_1$  e  $G_2$ , seu jogo médio,  $G_m$ , e o jogo misto correspondente ( $G_x$ ) em uma simulação de Monte Carlo com atualização assíncrona e regra de Fermi-Dirac. Aqui  $N = 10^4$ ,  $G_m(S = -0.02)$ ,  $G_1(S = -0.01)$  e  $G_2(S = -0.03)$ . b) Mesmo gráfico para o modelo síncrono com os jogos simples sendo de tipos diferentes. Aqui  $G_1(S = 0.02)$  é um *SD*,  $G_2(S = -0.05)$  é do tipo *SH* e o jogo médio  $G_m(S = -0.01)$  é o *PD*. A mistura de dois jogos diferentes ainda se comporta como *PD*, mesmo que este tipo de jogo não seja efetivamente jogado em momento algum.

Em relação ao comportamento da fração de cooperadores em função de  $T$  conseguimos bons resultados. Estes concordam com as equações dinâmicas, como pode ser visto na figura 4.4. O jogo misto, de fato, se comporta como o jogo médio para vários valores dos parâmetros de payoff. Nós rodamos diversas outras simulações em várias regiões do diagrama  $T - S$ , todos concordaram com o resultado geral mostrado aqui.

Prosseguimos nossa análise para verificar até que limites o jogo misto se comporta de maneira igual ao jogo médio. Se fixarmos um valor para o parâmetro  $T$ , podemos estabelecer  $\Delta S = |S_1 - S_2|/2$ , esse valor nos indica o quão afastados os dois jogos estão de seu ponto médio. Note que quando  $\Delta S = 0$  os jogos são idênticos. Analisamos como a fração de cooperação varia em função de  $\Delta S$ , conforme os dois jogos,  $G_1$  e  $G_2$ , se afastam simetricamente do jogo médio. A figura 4.5 mostra a diferença da fração de cooperação entre o jogo misto ( $\rho$ ) e seu equivalente jogo médio ( $\rho_0$ ), para vários valores de  $\Delta S$  usando a regra de imitação proporcional (3.1) e a regra de imitação de Fermi-Dirac (3.2). Usamos aqui  $G_1 = (T_1, S_1) = (1.04, S)$  e  $G_2 = (1.04, -S)$ . Vemos que a semelhança não se mantém para valores grandes de  $\Delta S$ , do mesmo modo como no caso analítico da equação mestra. Note também que a diferença aumenta mais rapidamente na regra não-linear.

Frisamos que, de acordo com a figura 4.5, a diferença de cooperação entre o jogo misto e o médio tende a ser positiva, e aumentar de valor com a diferença entre os jogos. É interessante relacionar isso com o efeito de jogos assimétricos descoberto por Perc et

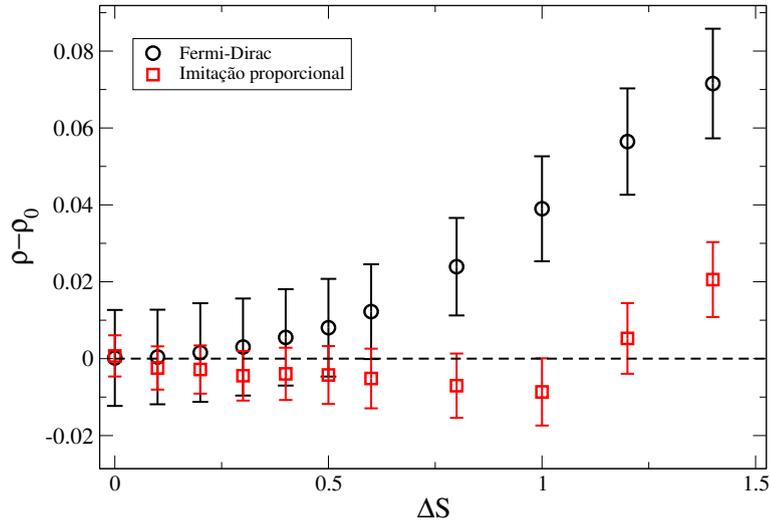


FIGURA 4.5: Diferença da fração de cooperadores do jogo misto para o jogo médio ( $\rho - \rho_0$ ) em função da diferença entre os parâmetros dos jogos mistos ( $\Delta S$ ) para o modelo de Fermi-Dirac e Imitação proporcional. Usamos aqui  $G_1 = (T_1, S_1) = (1.04, S)$  e  $G_2 = (1.04, -S)$ . Pequenas diferenças passam a surgir conforme jogos mistos se afastam do jogo médio.

al [136], em que a “heterogeneidade” dos jogos (o equivalente a nosso parâmetro  $\Delta S$ ) aumenta o nível de cooperação. Isso nos indicou o caminho para uma nova linha de pesquisa, sobre como a diferença entre jogos (ou heterogeneidade de payoff) pode ser benéfica para a cooperação.

Também estudamos os jogos mistos em redes complexas para verificar qual influência a topologia de conexões poderia ter em tal modelo [12, 20, 139–141]. Usamos o algoritmo de Krapivsky-Redner [142] (que é descrito no apêndice B), gerando redes do tipo livre de escala com  $N = 10^4$  indivíduos e conectividade média 2.7. Para nossa surpresa os efeitos não se alteraram, e o jogo misto se manteve semelhante ao jogo médio para valores pequenos de  $\Delta S$ . A topologia não aparenta ter influência forte nas semelhanças entre jogo misto e médio nessas condições. Tal topologia será estudada mais a fundo no próximo capítulo.

Ainda nessa linha, tentamos tornar a flutuação do payoff o mais semelhante a um ruído de fundo, para verificarmos o quanto a dinâmica é robusta a tais perturbações. Novamente, do ponto de vista experimental, tais flutuações são esperadas como percepções diferentes entre jogadores e diferentes condições ambientais nas quais os jogos se repetem. Partindo dessa premissa, simulamos um modelo no qual a matriz de jogo  $G(T, S)$  pode ter flutuações aleatórias, de média zero, tanto em  $T$  quanto em  $S$ . Para isso, a cada interação entre dois jogadores a matriz de jogo tem somado a seus parâmetros duas variáveis aleatórias independentes,  $Y \in [-\delta, \delta]$ ,  $\langle Y \rangle = 0$ . A distribuição de  $Y$

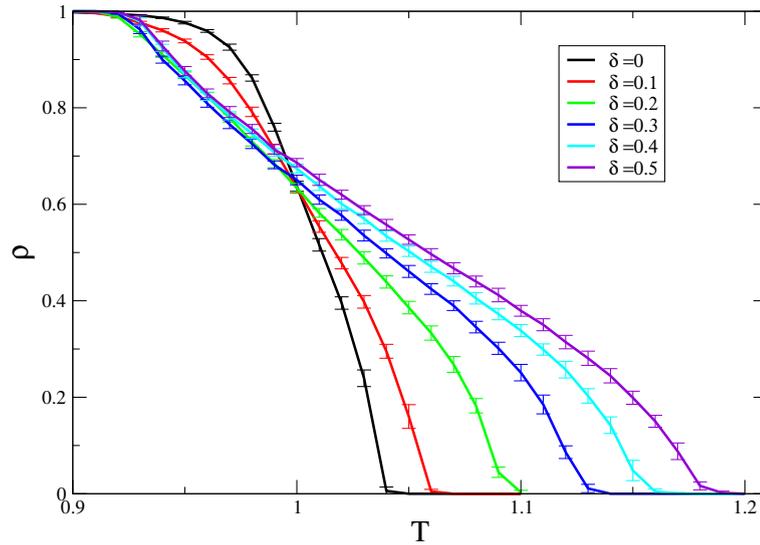


FIGURA 4.6: Fração de cooperadores  $\rho$  em relação a  $T$  para diversas intensidades de ruído ( $\delta$ ). Usamos aqui  $S = 0$ . Para pequenos valores de  $\delta$  o comportamento ainda é semelhante ao caso sem ruído. Mas conforme adicionamos uma perturbação de maior amplitude, a dinâmica passa a diferir cada vez mais, principalmente para  $T > 1$ . Note também que a cooperação parece se beneficiar do ruído.

é uniforme. Assim, a cada interação, a matriz de payoff de fato terá  $T + Y_1$  e  $S + Y_2$  como parâmetros. Aqui,  $\delta$  é o parâmetro de controle, que nos dá a força da perturbação. Evidentemente, para  $\delta = 0$  não haverá ruído nos parâmetros. Os resultados desse modelo podem ser vistos na figura 4.6.

Vemos que a flutuação estatística de ambos parâmetros pode afetar o resultado da dinâmica, apesar de que pequenas flutuações ainda mantêm o sistema qualitativamente semelhante ao sistema não perturbado. É interessante ver que o efeito das flutuações parece ser mais acentuado principalmente após  $T = 1$ , e que nesse ponto exatamente as flutuações quase não tem efeito, mesmo para valores grandes de  $\delta$ . Notamos, novamente, o curioso fato de que apesar das flutuações serem aleatórias e tanto somarem quanto subtraírem do payoff, a cooperação parece se beneficiar de valores maiores de flutuações. A partir de  $T = 1$  vemos que quanto maior a amplitude das flutuações, maior o alcance de valores em  $T$  na qual a cooperação sobrevive. Também é importante notar que se deve ter cuidado ao aumentar muito o valor das flutuações, já que estes podem criar payoffs que saiam do espaço de parâmetros classicamente analisado ( $T \in [0, 2]$ ,  $S \in [-1, 1]$ ). Como exemplo, um jogo do tipo  $SD$  que tenha  $G(1.6, 0.6)$  e com flutuação de amplitude  $\delta = 0.5$ , poderá, para alguns eventos aleatórios, sair do espaço de parâmetros estabelecido previamente.

O estudo de jogos mistos foi produtivo, confirmando nossa hipótese de que as

dinâmicas previstas pela teoria dos jogos evolucionários são robustas mediante pequenas flutuações estatísticas no payoff percebido por indivíduos. Esse resultado é importante ao se falar do quão robustas são as previsões da teoria dos jogos evolucionários, dado que os riscos e benefícios percebidos por indivíduos são subjetivos e não parâmetros matematicamente definidos. Tais pontos foram confirmados tanto no nível analítico, para casos específicos, quanto no nível numérico para simulações de Monte Carlo em diferentes topologias e regras de atualização de estratégias. Por fim, tais análises nos indicaram um interessante caminho de pesquisa quanto à heterogeneidade de payoff e sua influência na dinâmica.

## 4.2 Benefícios da heterogeneidade de payoffs

Prosseguindo o estudo de jogos mistos, nos focamos no efeito da diferença quantitativa entre o jogo 1 e o jogo 2 [47]. Mais precisamente, para um valor de  $T$  fixo, analisamos como dois jogos que possuam  $S_1$  e  $S_2$  se comportam comparados ao jogo médio que tenha  $S_m = (S_1 + S_2)/2$ . Desse modo a distância linear dos jogos até o jogo médio no diagrama de parâmetros é  $\Delta S = (S_1 - S_2)/2$ , que nós consideramos como a heterogeneidade de payoff. Focamos na mistura do jogo de dilema do prisioneiro com o jogo  $SD$  devido a estes serem os jogos do tipo dilema mais estudados na literatura, e que rendem resultados mais diversos e interessantes [12, 20]. O modelo geral analisado nessa seção ainda é o mesmo que na seção anterior: selecionamos um sítio  $e$ , para calcular seu payoff, sorteamos uma matriz de jogo para cada interação com seus vizinhos. Seu payoff total é a soma de todos os payoffs. Após o cálculo do payoff de toda a rede, atualizamos as estratégias e re-sorteamos as matrizes de jogo.

Para a análise da dinâmica de tal sistema, utilizamos o algoritmo de Monte Carlo (com o protocolo síncrono e assíncrono), como no estudo anterior, e a regra de atualização de estratégia utilizada foi unicamente a distribuição de Fermi-Dirac, equação (3.2). Nessa etapa da pesquisa passamos a analisar tanto redes quadradas e livre de escala como também as redes aleatórias. Em especial, em redes não-regulares o número de vizinhos de cada sítio pode variar, o que resulta na chamada “heterogeneidade topológica” [130, 141, 143]. Para conseguir filtrar os resultados desse tipo de efeito, analisamos dois modelos de payoff para redes complexas. No modelo de payoff absoluto, o ganho do

sítio  $i$  é a soma do payoff obtido em cada interação de sua vizinhança  $\Omega_i$ :

$$u_i = \sum_{j \in \{\Omega_i\}} G(s_i, s_j), \quad (4.12)$$

onde  $s_i \in \{C, D\}$  é a estratégia do jogador  $i$  e  $G(s_i, s_j)$  é o payoff de  $i$  quando as estratégias  $s_i$  e  $s_j$  são adotadas. Já o modelo de payoff normalizado assume que é custoso a um jogador manter diversas conexões [144]. Assim seu payoff total é dividido pelo número de vizinhos que este possui:

$$u_i = \frac{\sum_{j \in \{\Omega_i\}} G(s_i, s_j)}{v_i}, \quad (4.13)$$

sendo  $v_i$  o número de vizinhos diretos que o jogador  $i$  possui. No modelo de payoff absoluto, a heterogeneidade topológica tem o efeito pronunciado, devido a sítios com muitos vizinhos (super-nodos) terem um payoff total muito maior do que o da média na rede, influenciando muito a dinâmica. Já no modelo normalizado, tal heterogeneidade é suprimida, já que o payoff é dividido pelo número de vizinhos de cada sítio [139, 145]. Ainda assim, os sítios com muitos vizinhos permanecem importantes na rede, devido a influenciarem uma quantidade muito maior de vizinhos.

Desse modo, analisamos um total de quatro modelos diferentes (a combinação de protocolos síncrono ou assíncrono junto aos payoffs absolutos ou normalizados) aplicados a três diferentes topologias (redes quadradas, livre de escala e aleatórias). Essa variedade de modelos nos permitiu analisar profundamente a robustez dos resultados da heterogeneidade, provando que esses persistem em diversos modelos. Frisamos que os resultados que apresentaremos possuem variações quantitativas entre cada modelo, mas é interessante notar que as propriedades qualitativas gerais da heterogeneidade de payoff se mantiveram em todos modelos.

Para as simulações utilizamos cerca de  $7 \times 10^4$  passos de Monte Carlo até que o sistema atinja o estado estacionário. Então tiramos as médias dos valores sobre  $3 \times 10^3$  passos, utilizando 100 configurações iniciais diferentes. Devido a natureza não-regular das redes tipo livre de escala, necessitamos de uma quantidade bem maior de indivíduos, passos de Monte Carlo e principalmente número de configurações iniciais diferentes para obtermos dados com pequenas barras de erros. Ainda assim as flutuações são bem maiores do que as obtidas em redes regulares. Notamos que especificamente os modelos de payoff absoluto possuem maior tempo até o estado estacionário devido a flutuações intrínsecas, que geram estados metaestáveis de longa vida.

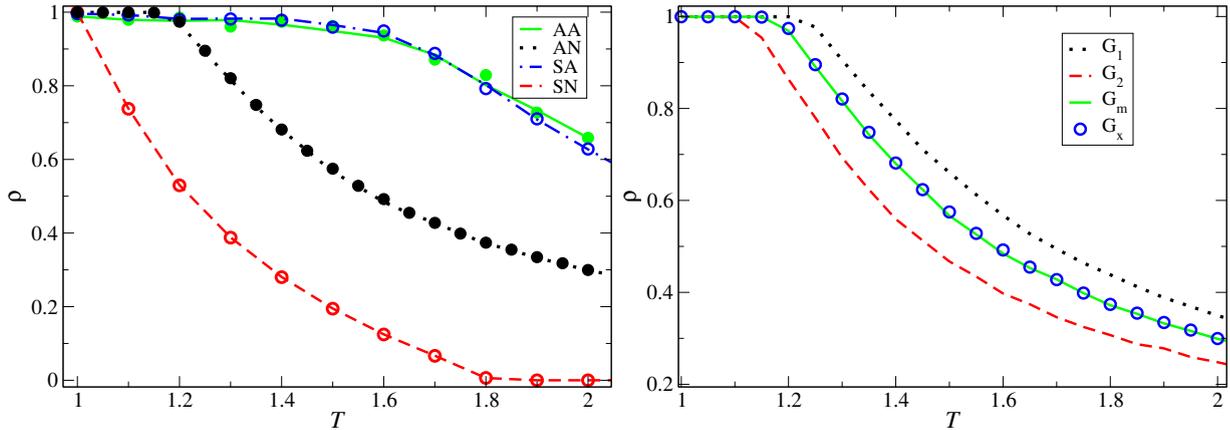


FIGURA 4.7: Fração de cooperadores em função de  $T$  para heterogeneidade pequena ( $\Delta S < 0.2$ ) na rede livre de escala. Na esquerda apresentamos os resultados para os modelos: Assíncrono Absoluto (AA), Assíncrono Normalizado (AN), Síncrono Absoluto (SA) e Síncrono Normalizado (SN), sendo os jogos mistos representados por símbolos e o jogo médio simples pelas linhas. Os parâmetros utilizados foram  $S_1 = 0.1$ ,  $S_2 = -0.1$  e  $S_m = 0$  para AA, SA e AN. O modelo SN usou  $S_1 = 0.5$ ,  $S_2 = 0.3$  e  $S_m = 0.4$ . A direita temos o modelo assíncrono normalizado em detalhes. O jogo misto é composto de dois jogos diferentes ( $S_1 = -0.1$  e  $S_2 = -0.5$ ) e o jogo médio simples possui  $S_m = -0.3$ .

Estudamos inicialmente valores pequenos de heterogeneidade, i.e.  $\Delta S < 0.2$ . Nesse caso, o resultado obtido é geral para todos os modelos estudados, e o jogo misto se comporta como jogo médio. A parte esquerda da figura 4.7 mostra a fração de cooperadores em função de  $T$  na rede do tipo livre de escala para os quatro modelos: Assíncrono Absoluto (AA), Assíncrono Normalizado (AN), Síncrono Absoluto (SA) e Síncrono Normalizado (SN). As linhas representam o jogo médio simples, enquanto os pontos representam os jogos mistos. Eles possuem valores quase idênticos, dentro de cada modelo, para pequenos valores de heterogeneidade. A parte direita da figura 4.7 mostra os resultados para o modelo assíncrono normalizado em detalhes, contendo tanto o jogo misto e médio quanto as curvas do jogo 1 e do jogo 2. Note que, mesmo com os modelos possuindo comportamentos amplamente diferentes, o jogo misto equivale ao jogo médio em cada um deles. Uma revisão extensa das propriedades de cada um desses modelos para jogos simples pode ser visto em [20].

Nós verificamos que além da fração de cooperadores, o payoff médio da rede também é o mesmo para o jogo misto e médio. Como em outros modelos de heterogeneidade diversa [136, 146], a adição de jogos altruístas junto a jogos egoístas não mudou o payoff médio. Isso entra em contraste com outros mecanismos propostos na literatura como a punição, onde o aumento da cooperação se dá às custas da queda no payoff geral [147]. Ainda usando o algoritmo de Krapivsky-Redner realizamos as mesmas medidas para

redes aleatórias e de super-nodo (onde a maioria dos sítios está ligada a pouquíssimos sítios centrais). Vimos que a equivalência do jogo misto e médio se manteve em todos estes para heterogeneidades pequenas. A análise de tais modelos confirma o que havíamos estudado em redes quadradas e o que foi visto na literatura para populações no grafo completamente conectado e em anéis [49, 148]. É interessante notar que a dinâmica do sistema é dependente de diversos fatores como topologia, valor de irracionalidade, regra de atualização da estratégia, dentre outros [20, 34, 111, 139–141, 149–151], porém o efeito encontrado da semelhança entre jogos mistos e médios permanece de maneira robusta mediante todas essas variações. O único fato que aparentemente altera tal conexão é o quão afastados os jogos estão no diagrama de parâmetros, a heterogeneidade de payoff. Vendo isso, damos continuidade a pesquisa estudando o que ocorre para valores grandes de heterogeneidade.

Medimos quantitativamente a heterogeneidade através de  $\Delta S$ , sendo que para  $\Delta S = 0$  temos que  $G_1 = G_2 = G_m$ . Caso o jogo misto fosse equivalente ao jogo médio para qualquer situação, a variação de  $\Delta S$  seria irrelevante. Nós encontramos resultados interessantes, no entanto, mostrando que conforme  $\Delta S$  aumenta, a cooperação tende a surgir em maior quantidade. A figura 4.8 mostra como a diferença de cooperadores entre o jogo misto e o jogo médio se comporta conforme aumentamos a heterogeneidade, dado um valor fixo de  $T$ , para redes do tipo livre de escala. Note que apesar do aumento de  $\Delta S$  significar que o jogo 1 se torna mais “fraternal” (já que  $S_1$  tem valores mais positivos), igualmente o jogo 2 se torna mais “egoísta” na mesma medida. No entanto, a cooperação parece obter uma vantagem de tal mecanismo que a deserção não consegue usufruir. A direita da figura 4.8 temos os efeitos da heterogeneidade para redes do tipo aleatórias. Novamente, vemos que a heterogeneidade é benéfica à cooperação nos modelos estudados. Mais ainda, o efeito positivo é ainda mais acentuado que em redes livre de escala.

A figura 4.8 mostra o efeito da heterogeneidade para um valor fixo de  $T$ . Prosseguimos nossa análise criando um mapa de cores bidimensional para analisar como a cooperação varia com  $T$  para diversos valores de heterogeneidade. A figura 4.9 mostra o aumento relativo  $(\rho - \rho_m)$  de cooperação em dependência com  $T$  e  $\Delta S$  para redes livre de escala (topo) e aleatórias (abaixo). Apesar de a heterogeneidade beneficiar a cooperação, esse aumento não é trivial, e existem valores “ótimos” de  $T$  onde o sistema mais se beneficia de  $\Delta S$ . Especificamente para o modelo assíncrono normalizado, a cooperação pode aumentar em até 0.15 para  $T = 1.45$  na rede livre de escala e 0.3 na aleatória.

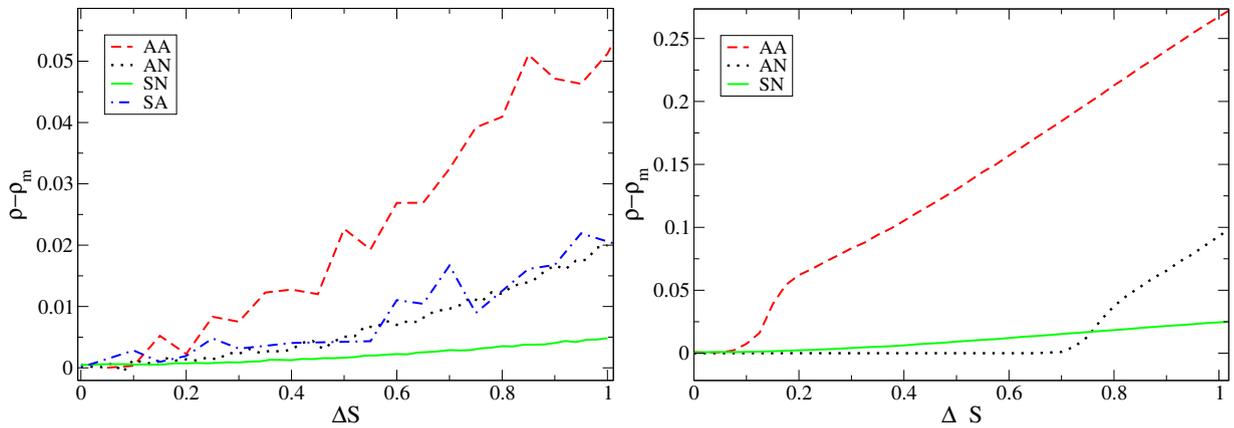


FIGURA 4.8: Diferença da fração de cooperação entre o jogo misto ( $\rho$ ) e o jogo médio ( $\rho_m$ ) como função da heterogeneidade em redes livre de escala (esquerda) e aleatórias (direita). Aqui usamos  $S_m = 0$  e  $T = 1.7$  para a rede livre de escala e  $T = 1.8$  para a aleatória. O jogo 1 é do tipo  $SD$  e o jogo 2 é um dilema do prisioneiro. A cooperação se beneficia da heterogeneidade em proporções diferentes para cada modelo.

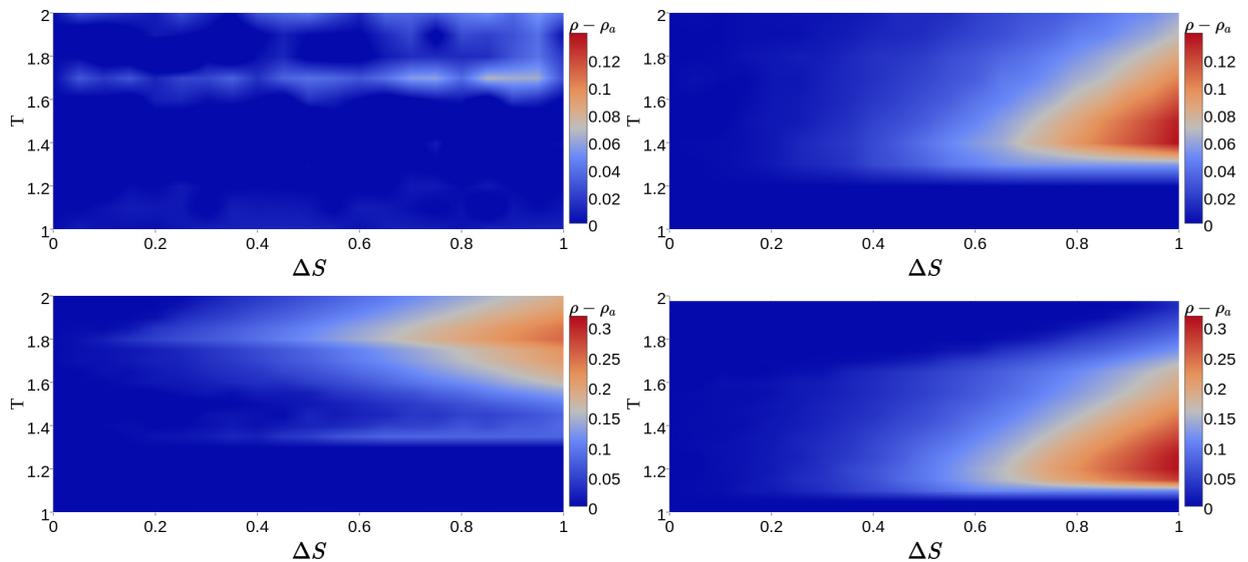


FIGURA 4.9: Mapa de cores representando o aumento absoluto de cooperação entre o jogo misto e o jogo médio em dependência da heterogeneidade e de  $T$  para redes livre de escala (topo) e aleatórias (abaixo). Modelo assíncrono absoluto (esquerda) e modelo assíncrono normalizado (direita). O mapa, e os valores ótimos de  $T$ , são dependentes do modelo escolhido. Em especial, os ganhos na rede aleatória são até 2 vezes maiores que na rede livre de escala.

Mesmo para redes quadradas, estudadas anteriormente, o efeito da heterogeneidade se provou interessante. Como vemos na figura 4.10, grandes valores de  $\Delta S$  aumentam a cooperação no modelo assíncrono. Mas ainda mais interessante é notar que para o modelo síncrono, a cooperação ressurgiu mesmo após o limite de  $T$  para o qual ela já havia sido extinta.

Para investigar quais mecanismos geram o aumento da cooperação devido à heterogeneidade, passamos a estudar quais assimetrias a dinâmica apresenta. Para isso, criamos um histograma descrevendo o número de vezes médio,  $\langle G_1 \rangle$ , que os cooperadores da rede jogaram o jogo  $G_1$  (SD) numa rede quadrada. Aqui usamos o jogo médio tendo  $S = 0$ , de modo que o jogo 1 sempre é mais cooperativo ( $S > 0$ ) e o jogo 2 mais competitivo ( $S < 0$ ). A figura 4.11 apresenta esse histograma, onde no eixo vertical temos a fração de cooperadores que jogaram em média  $\langle G_1 \rangle$  vezes o jogo 1. Claramente se selecionamos o jogo 1 com a mesma frequência que o jogo 2, tal histograma deveria ser simétrico. Em especial ele deve ser uma distribuição binomial onde pouquíssimos jogadores terão jogado em média 0 ou 4 vezes o jogo 1, uma pequena fração terá jogado o jogo 1 uma ou três vezes, e a maioria da população terá jogado o jogo 1 metade das vezes e o jogo 2 metade das vezes.

Notamos que, de fato se  $\Delta = 0$  isso acontece, e o histograma é uma distribuição binomial (note, porém, que o histograma não está normalizado aqui). Porém conforme

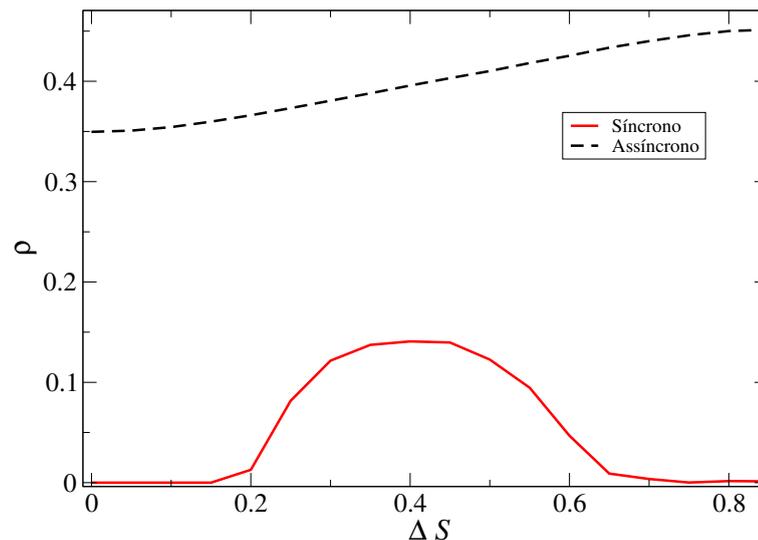


FIGURA 4.10: Fração da cooperação ( $\rho$ ) em dependência com  $\Delta S$  para a rede quadrada e  $T = 1.04$  (valor de extinção da cooperação no modelo síncrono). No modelo assíncrono a cooperação se beneficia da heterogeneidade normalmente. Note que no modelo síncrono, mesmo após a extinção da cooperação, certos valores de heterogeneidade permitem que essa ressurgja.

aumentamos a heterogeneidade de payoff, uma assimetria começa a surgir entre os cooperadores que jogam mais frequentemente o jogo  $SD$  (que é mais cooperativo). As linhas tracejadas da figura 4.11 servem de guia para comparar a fração com que se joga uma ou três vezes o jogo  $SD$ . Fica claro que, conforme a heterogeneidade de payoff cresce, uma quantidade maior de cooperadores passa a interagir via o jogo  $SD$  com maior frequência que o jogo  $PD$ . No gráfico usamos  $T = 1.02$ , mas este resultado se manteve para diversos parâmetros. Apesar de tudo, tal assimetria é muito pequena se comparada a população total. Nos resta descobrir o que leva tal assimetria a surgir.

Esse tipo de contagem, feito acima, nos permite dividir a população entre a fração de cooperadores que joga mais frequentemente o  $SD$  ( $\rho_+$ ) ou o  $PD$  ( $\rho_-$ ), onde ignoraremos a parcela que joga em média ambos os jogos com igual frequência. Como a possibilidade de cada sítio escolher  $G_1$  ou  $G_2$  é  $1/2$  em cada uma de suas quatro interações, o esperado é que ambas populações sejam iguais, caso não houvessem correlações. No entanto, o que descobrimos é que existe justamente uma pequena assimetria, na qual jogadores que interagiram mais pelo jogo  $SD$  tendem a se tornar cooperadores mais frequentemente, enquanto que jogadores que interagiram mais pelo jogo  $PD$  não tem tendência maior a serem desertores. Esse efeito é resultado direto da correlação espacial entre o jogo sorteado e a escolha do estado do sítio, uma violação direta da hipótese ii) que havíamos

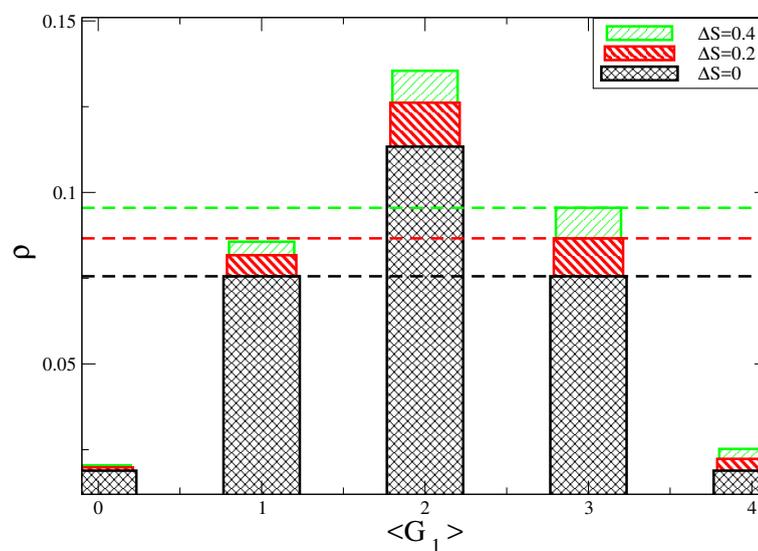


FIGURA 4.11: Histograma apresentando a fração de cooperadores que jogaram, em média,  $\langle G_1 \rangle$  vezes o jogo  $SD$ . Para uma heterogeneidade nula ( $\Delta = 0$ ) vemos a distribuição binomial, como esperado. Porém conforme aumentamos esse parâmetro, uma assimetria passa a surgir, com os cooperadores tendendo a jogar, em média, o jogo mais cooperativo. As linhas tracejadas servem de guia para a visualização de tal assimetria. Aqui usamos  $T = 1.02$ , mas esse efeito foi observado para diversos parâmetros.

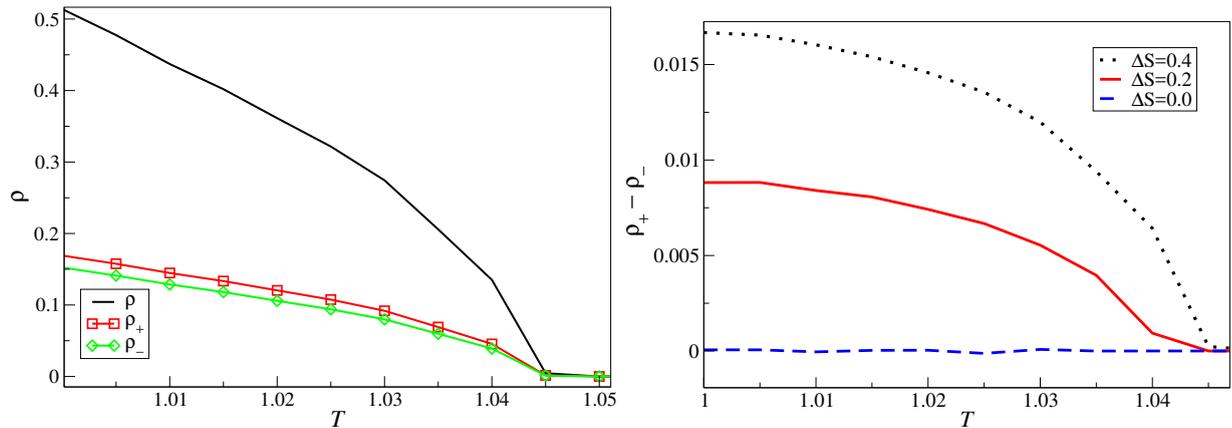


FIGURA 4.12: Na esquerda temos a fração total de cooperadores em função de  $T$  para a rede quadrada e heterogeneidade  $\Delta = 0.4$  e as frações de cooperadores que jogam frequentemente jogos cooperativos ( $\rho_+$ ) ou jogos competitivos ( $\rho_-$ ). Vemos que existe uma assimetria entre as duas populações. A direita, temos a diferença da população de cooperadores jogando  $SD$  ( $\rho_+$ ) e jogadores do dilema do prisioneiro ( $\rho_-$ ) conforme  $T$  aumenta para diversas heterogeneidades. Note que a diferença de populações aumenta com a heterogeneidade.

suposto no estudo de jogos mistos inicialmente. Vemos isso na figura 4.12, que mostra as diferentes populações de cooperadores, e como tal assimetria existe entre jogadores de  $PD$  ou  $SD$ . Em outras palavras, os jogadores espontaneamente seguem um fluxo de cooperação na qual sítios que joguem mais  $SD$  tenderão a ser cooperadores. Porém o inverso não ocorre para desertores. Esse efeito cria o aumento na cooperação, sem que a deserção aumente.

Tal assimetria é intrínseca ao modelo de jogos de dilema e envolve uma retroalimentação positiva, na qual somente cooperadores podem se beneficiar. Jogadores que jogam  $SD$  mais frequentemente tenderão a se tornar cooperadores devido ao alto valor de  $S$ . No entanto, jogadores que jogam frequentemente o  $PD$  não possuem semelhante incentivo a se tornarem desertores, já que valores muito negativos de  $S$  não influenciarão o payoff de ilhas de desertores. Em média, todos os sítios jogarão ambos os jogos com igual frequência. No entanto, as pequenas flutuações estatísticas locais (i.e. raros eventos em que um sítio jogue várias vezes o mesmo jogo) irão cumulativamente levar o sistema a uma quantidade maior de cooperadores. Nossos resultados estão de acordo com outras pesquisas que analisaram o efeito de outros tipos de assimetria na evolução de redes, em especial a heterogeneidade de outras condições como topologia, escalas temporais e regras de imitação [41, 136, 146].

Ao estudar jogos mistos em redes aleatórias, livre de escala e quadradas através de diferentes protocolos de Monte Carlo, conseguimos confirmar a robustez dos resultados

anteriores acerca de pequenos valores para heterogeneidade. Mais ainda, descobrimos novos fenômenos interessantes, para valores altos de heterogeneidade, principalmente relacionados ao aumento da cooperação. Descobrimos que tais efeitos surgem devido a assimetrias intrínsecas entre cooperadores e desertores e também estão de acordo com outros efeitos de heterogeneidade pesquisados em outros modelos. Tais resultados seguem em acordo com as linhas mais recentes, que concordam que a heterogeneidade, independentemente de sua origem, tende a ajudar cooperadores devido a processos assimétricos de retroalimentação [39–45, 50, 152–157].

### 4.3 O modelo *Win-Stay-Lose-Shift*

Após os estudos bem sucedidos com jogos mistos, e a eventual familiaridade desenvolvida com processos de teoria dos jogos evolucionários, decidimos focar nas semelhanças que tais modelos possuem com modelos clássicos da física estatística. Mais especificamente, procuramos encontrar modelos, dentro de jogos, que se assemelham ao modelo de Ising [79]. A associação da dinâmica de Glauber usada em algoritmos de Monte Carlo com jogos que seguem a regra de atualização de Fermi-Dirac, equação (3.2), é a mais evidente. Porém, na dinâmica de Glauber, um spin tende a mudar de estado baseado unicamente na minimização de energia. Já nos modelos estudados até aqui, um sítio somente poderia copiar a estratégia de um vizinho. Esse nunca mudaria espontaneamente de estado sem que haja um “doador” de estratégia.

Focando nessa questão, começamos a investigar os chamados modelos inovativos [48]. É importante diferenciarmos aqui jogos inovativos de jogos com mutação. Em modelos não-inovativos, como os que utilizam dinâmicas de imitação, as regras de atualização da estratégia permitem que os indivíduos somente copiem estratégias de sua vizinhança. No entanto, é possível adicionar mutações aleatórias dentro de tais modelos, permitindo que novas estratégias surjam espontaneamente, porém, devido exclusivamente à mutação. Já em jogos inovativos, a própria regra de atualização de estratégia permite que os jogadores escolham qualquer estratégia possível no modelo, independentemente de quais estratégias existam em sua vizinhança. Note também que também é possível adicionar mecanismos de mutação a modelos inovativos.

Dentro de modelos inovativos, um dos mais famosos é a chamada estratégia de “permaneço na vitória, muda na derrota”, que chamaremos aqui WSLS (*Win-Stay-Lose-Shift* no original) [12, 24, 75, 77, 114, 158, 159]. Nesse modelo, o jogador possui um valor

absoluto chamado “aspiração” (também de ambição). Se seu payoff está acima de sua aspiração, ele continuará repetindo a mesma estratégia indefinidamente. Caso o payoff caia abaixo dessa aspiração, ele mudará de estratégia. Em um WSLS inovativo, o sítio irá mudar para qualquer outra estratégia existente no jogo, independentemente de haver ou não um vizinho usando tal estratégia. Frisamos que os modelos estudados até aqui foram todos não-inovativos. O sítio que revisava a sua estratégia sempre precisa de um vizinho “doador” para copiar a estratégia. Isso se justifica historicamente em teoria de jogos devido a dinâmicas imitativas modelarem bem a evolução de comportamentos em animais, que reproduzem determinados fenótipos através de suas crias [12, 160, 161]. De fato, é possível mapear tais modelos em processos de nascimento-morte e eles representam bem a evolução natural de comportamentos [13, 69, 135, 162]. Por outro lado, dinâmicas inovativas descrevem melhor sistemas onde exista surgimento espontâneo de novas estratégias, como por exemplo em sistemas onde ocorre a análise cognitiva da situação [12, 20, 68, 163]. Dados experimentais recentes jogaram uma nova luz sobre o assunto, mostrando que dinâmicas inovativas conseguem descrever bem o comportamento de humanos em jogos de dilema [66, 67, 72–77, 126]. Tais experimentos indicam que os modelos clássicos usados em dinâmicas evolutivas talvez não sejam os melhores para descrever interações humanas, onde cada indivíduo pode mudar espontaneamente de estratégia baseado em decisões cognitivas e estímulos ambientais, não necessitando de um “doador” para mudar sua estratégia [20, 69–71, 125].

Porém, o modelo WSLS usualmente é estudado a partir da perspectiva de que a aspiração é um parâmetro externo. Baseando-nos no modelo de Ising, nós propusemos que a aspiração seja uma característica emergente. Especificamente, propomos que cada sítio tome como aspiração individual o payoff médio de seus vizinhos mais próximos, tentando ter um ganho igual ou superior a eles para se sentir “satisfeito”. Matematicamente isso é o similar ao que ocorre no tratamento de campo médio dos modelos ferromagnéticos, onde um spin tende a se alinhar com o campo magnético médio gerado por seus vizinhos [78, 79, 164]. Ainda mais importante, é o significado disso do ponto de vista de teoria de jogos. Cada indivíduo mede sua “satisfação” olhando o ganho dos seus pares, e não através de algum parâmetro estático global. Em outras palavras, é intuitivo pensar que as ambições de alguém caem quando ele vê que todos ao seu redor estão ganhando pouco. E, inversamente, suas ambições devem subir quando todos seus pares estão ganhando muito. Desse modo, o valor da aspiração é individual, e ao mesmo tempo ele é dinâmico, evoluindo junto com a rede sem que seja necessário ajustar externamente seu valor. Nosso objetivo aqui foi analisar a dinâmica do modelo proposto ao compará-lo com os modelos não-inovativos.

Para o modelo proposto, alteramos a probabilidade de que o sítio copie a estratégia de seu vizinho, usualmente dada pela distribuição de Fermi-Dirac (3.2), para que agora o sítio  $i$  atualize sua estratégia e mude para outra (independentemente das estratégias presentes em sua vizinhança) com probabilidade:

$$p(\Delta u_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u}-u_i)/k}}. \quad (4.14)$$

Onde  $\bar{u}$  é o payoff médio na vizinhança de  $i$ . No caso analisado existem somente duas estratégias, logo, o sítio mudará para a estratégia oposta com probabilidade  $p(\Delta u_i)$ . Apesar da equação (4.14) ser quase idêntica à equação (3.2), veremos que o fato da dinâmica se tornar inovativa, e a comparação ocorrer com a média dos vizinhos, irá alterar drasticamente a dinâmica do sistema. Frisamos que existem somente duas estratégias em nosso modelo,  $C$  e  $D$ . Diferente dos trabalhos clássicos [165], aqui consideramos dinâmica de WSLS como uma regra de atualização de estratégia, e não uma estratégia “pura” em si. Para estudar esse novo modelo, primeiramente desenvolvemos a aproximação de campo médio da equação mestra. Fazemos inicialmente o desenvolvimento para o caso mais simples de uma população no grafo totalmente conectada e em seguida utilizamos a aproximação de primeiros vizinhos para estudar uma rede quadrada. Com isso, conseguimos obter resultados analíticos para grandes valores de  $T$  e  $k \rightarrow 0$  além de resultados numéricos para  $T$  e  $k$  gerais.

### 4.3.1 Equação mestra e campo médio

Considere um sítio focal  $i$  em uma população totalmente conectada. Ele interagirá com todos os outros sítios, podendo estar no estado  $C$  ou  $D$ . Seja  $\rho$  a probabilidade de que tal sítio esteja no estado  $C$ . Através da aproximação de campo médio, obtemos que:

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)W_{+(D \rightarrow C)} - \rho W_{-(C \rightarrow D)}, \quad (4.15)$$

sendo  $\dot{\rho}$  a derivada temporal de  $\rho$  e  $W_+$  ( $W_-$ ) a taxa de transição do sítio para  $C$  ( $D$ ), dado que ele esteja em  $D$  ( $C$ ). Nessa aproximação, podemos obter o payoff médio de um cooperador  $\bar{u}_c$  (ou de um desertor  $\bar{u}_d$ ). Da mesma forma, conseguimos o payoff médio de toda a população ( $\bar{u}$ ). As taxas de transição serão

$$W_+ = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u} - \bar{u}_d)/k}}, \quad (4.16)$$

$$W_- = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u} - \bar{u}_c)/k}}. \quad (4.17)$$

No caso do dilema do prisioneiro fraco, temos  $R = 1$  e  $S = P = 0$ . Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \rho^2 R + (1 - \rho)^2 P + \rho(1 - \rho)(T + S) = \\ &= \rho^2 + \rho(1 - \rho)T, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\bar{u}_c = \rho R + (1 - \rho)S = \rho, \quad (4.19)$$

$$\bar{u}_d = \rho T + (1 - \rho)P = \rho T. \quad (4.20)$$

Substituindo tais expressões na equação de taxas (4.15), temos:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1 - \rho}{1 + e^{-(\rho^2(1-T))/k}} - \frac{\rho}{1 + e^{-(\rho(\rho-1)(1-T))/k}}. \quad (4.21)$$

Nessa aproximação, todos sítios estão igualmente conectados, de modo que não existem efeitos de correlação espacial. A figura 4.13 mostra os resultados da integração dessa equação (usando-se o integrador de Runge-Kutta de 4ª ordem [116, 117]) junto a aproximação de primeiros vizinhos, e os resultados das simulações de Monte Carlo.

Desenvolveremos então a aproximação de primeiros vizinhos, que introduz uma estruturação espacial fraca na população, e depois comentaremos os resultados da figura 4.13. Para considerar a rede quadrada, devemos usar o mesmo tipo de aproximação [20, 162, 166] usado em jogos mistos. Nesse caso passamos a definir a probabilidade de um sítio focal  $i$  se tornar  $C$  ou  $D$  de acordo com o estado de sua vizinhança. Nessa aproximação, calcularemos exatamente o payoff desse sítio e de seus primeiros vizinhos. Usamos a aproximação de grafo completamente conectado somente para o cálculo dos vizinhos de segunda ordem. Assim, para calcular as taxas de transição precisamos considerar todas as combinações possíveis de vizinhança na rede quadrada, i.e. :

$$W_{\pm} = \sum_{n=0}^4 \binom{4}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(4-n)} P_{\pm}(u_i, \bar{u}), \quad (4.22)$$

onde  $n$  é o número de vizinhos cooperadores em dada configuração de vizinhança. O termo  $\binom{4}{n}$  são os coeficientes binomiais para as maneiras de se distribuir  $n$  cooperadores

entre 4 sítios vizinhos (por exemplo, a configuração  $\{CDDD\}$  pode ser repetida de 4 formas diferentes, enquanto  $\{CCCC\}$  ocorre apenas de uma maneira). O termo  $\rho^n(1 - \rho)^{4-n}$  pesa a probabilidade de que tal configuração ocorra. Por fim,  $P_{\pm}(u_i, \bar{u})$  é a probabilidade, em dada configuração, de que o sítio focal se torne um cooperador ( $P_+$ ) ou um desertor ( $P_-$ ). Essa probabilidade é a única parte da equação que será dependente do processo de atualização de estratégia escolhido (imitação ou WSLS). Note que os payoffs  $u_i$  e  $\bar{u}$  dependem de cada configuração. Lembramos que a solução da equação dinâmica (4.15) para o modelo de imitação é um resultado conhecido da literatura [12, 20], diferentemente do resultado que apresentamos aqui para o modelo WSLS proposto.

Considerando uma vizinhança com  $n$  cooperadores, o payoff do sítio focal é  $u_i = nT$  caso ele seja  $D$  e  $u_i = n$  caso seja  $C$ . Já para o cálculo de  $\bar{u}$  precisamos do payoff de cada vizinho. Assumindo a probabilidade de cada vizinho ser um cooperador como  $\rho$ , temos que se  $i$  é um desertor, o payoff de um vizinho cooperador é em média  $3\rho$  (zero da interação com o sítio  $i$  mais três interações de segunda ordem). De forma análoga, um vizinho desertor receberia em média  $3T\rho$ . Dessa forma o payoff médio dos vizinhos é:

$$\bar{u}_{\Omega} = \frac{1}{4} [n3\rho + (4 - n)3T\rho] = \frac{3}{4}(n\rho + 4T\rho - nT\rho). \quad (4.23)$$

Assim

$$P_+ = \frac{1}{1 + e^{-[T(12\rho - 3n\rho - 4n) + 3n\rho]/4k}}, \quad (4.24)$$

e

$$P_- = \frac{1}{1 + e^{[T(3n\rho + n - 4 - 12\rho) - 3n\rho + 3n]/4k}}. \quad (4.25)$$

O ponto fixo da dinâmica pode ser encontrado analiticamente no limite racional, i.e.  $k \rightarrow 0$ :

$$P_{\pm} = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{u} - u_f > 0, \\ 1/2 & \text{se } \bar{u} - u_f = 0, \\ 0 & \text{se } \bar{u} - u_f < 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Assim as taxas de transição (4.22) se tornam polinômios, facilitando a resolução analítica. No limite para grandes valores de  $T$  a diferença  $\bar{u} - u_f$  pode ser calculada explicitamente, de modo que encontramos:

$$P_- = \begin{cases} 1 & \text{se } n < 3, \\ 0 & \text{se } n = 0 \text{ e } \rho \neq 1. \end{cases} \quad (4.27)$$

e

$$P_+ = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \text{ e } \rho > 4/9, \\ 0 & \text{se } n = 1 \text{ e } \rho < 4/9, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (4.28)$$

Simplificando a equação (4.15) para  $k \rightarrow 0$  e grandes valores de  $T$ , temos

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)^5 - \rho(1 - \rho)[(1 - \rho)^3 + 4\rho(1 - \rho)^2 + 6\rho^2(1 - \rho) + 3\rho]. \quad (4.29)$$

A resolução numérica dessa equação para  $\dot{\rho} = 0$  possui pelo menos um ponto fixo estável em  $\rho^* \approx 0.209$ , o que significa que deve haver coexistência de cooperação e deserção mesmo para grandes valores de  $T$ . Esse resultado é interessante do ponto de vista da sobrevivência da cooperação e veremos que os modelos numéricos, mesmo que não sejam quantitativamente iguais, concordarão qualitativamente com essa característica. Frisamos também que estudos com outras regras inovativas também encontraram resultados semelhantes relacionados a sobrevivência da cooperação para grandes valores de tentação ( $T$ ) [68, 167, 168].

Nós prosseguimos para a integração numérica da equação (4.21), para qualquer valor de  $T$  e  $k$ . Usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem obtemos os resultados da figura 4.13. Note que os dados para “Monte Carlo médio” é relacionado a simulação numérica de Monte Carlo onde a aspiração é o payoff médio de toda a rede, em vez de somente dos primeiros vizinhos. O resultado principal a ser notado é que duas características dos modelos para a aproximação analítica e simulações numéricas são semelhantes; 1) a existência de um nível basal de cooperação, mesmo para  $T$  grande e 2) pontos de inflexão em regiões muito próximas em  $T \approx 0.6$ . Para testar a robustez dos resultados também analisamos simulações em que o raio de “comparação” de payoff variava continuamente desde os 4 primeiros vizinhos até a comparação ser com a média da rede inteira, tornando a simulação de Monte Carlo mais semelhante a solução analítica do caso totalmente conectado. Todos os resultados se mantiveram semelhantes qualitativamente, apesar de pequenas variações na curvatura dos dados. Observando os resultados apresentados na figura 4.13, vemos que o modelo WSLS inovativo possui características robustas, em especial a sobrevivência da cooperação para valores grandes de  $T$ . Tais resultados são intrinsecamente diferentes de dinâmicas não-inovativas, que se caracterizam por transições abruptas entre regimes do tipo cooperação-deserção, com um valor de transição de  $T$  bem definido para a extinção dessa. Isso se dá devido a mecanismos microscópicos

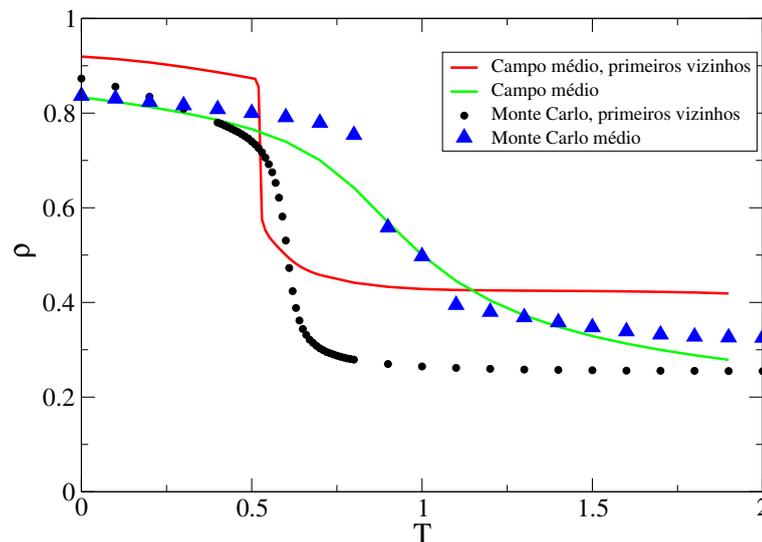


FIGURA 4.13: Nível da cooperação no estado estacionário em função de  $T$  para o modelo WLS. As previsões analíticas da equação de campo médio apresentam qualitativamente as características observadas nas simulações de Monte Carlo. “Monte Carlo médio” se refere a aspiração sendo o payoff médio de toda a rede. Vemos também que o ponto de inflexão dos modelos e o nível basal de cooperação é mantido em todas as dinâmicas.

inerentes a dinâmicas inovativas, que permitem a cooperação ressurgir mesmo em um ambiente dominado pela deserção. Estudaremos tais mecanismos abaixo.

A figura 4.14 mostra que nossas simulações são robustas em relação às condições iniciais da distribuição de cooperadores, atingindo sempre o mesmo estado estacionário (dado que se use os mesmos parâmetros). Essa característica é muito importante, visto que nem todos os modelos possuem tal robustez, o que torna o estado estacionário mal definido em certos casos [51, 53, 68, 169].

Note que a aproximação de campo médio é uma técnica em que os resultados usualmente discordam quantitativamente dos obtidos em simulações numéricas de Monte Carlo com populações estruturadas, devido a suas limitações inerentes. É interessante ver que, nesse caso, ambos resultados concordam em relação às características do sistema.

### 4.3.2 Simulações de Monte Carlo

Para as simulações de Monte Carlo, usamos somente o procedimento assíncrono nessa parte da pesquisa. O valor da irracionalidade foi fixado em  $k = 0.1$ , utilizamos  $10^4 - 10^5$  passos de Monte Carlo até o estado estacionário e realizamos as médias sobre os últimos 1000 MCS sobre 10 – 20 configurações iniciais diferentes. As medidas

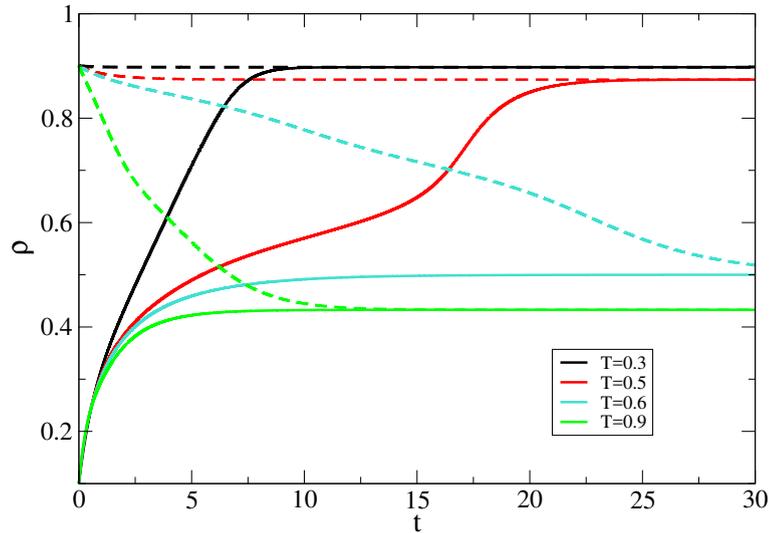


FIGURA 4.14: Evolução temporal da fração de cooperadores na aproximação de campo médio. O gráfico apresenta conjuntos de curvas que partem de condições iniciais diferentes. O resultado final é independente das condições iniciais.

foram feitas com  $10^4$  indivíduos localizados em uma rede quadrada, a menos que dito o contrário.

Começamos nossa análise comparando os resultados do modelo WSLs com os do modelo clássico de imitação para o dilema do prisioneiro fraco, ( $S = 0$ ), como mostrado na figura 4.15. Em contraste com o modelo de imitação, que possui uma transição de regime abrupta em  $T_c = 1.04$  [20], o modelo WSLs apresenta um declínio suave e contínuo da cooperação, para um valor final não-nulo. Note também que a fração de cooperação no modelo WSLs é menor para valores pequenos de  $T$  quando comparada ao modelo clássico não-inovativo.

Prosseguimos analisando qual o payoff médio de cada sítio,  $\langle u \rangle$ , e qual a aspiração média dos cooperadores ( $\phi_c$ ) e desertores ( $\phi_d$ ), como visto na figura 4.16. Note primeiramente as linhas contínuas, que indicam a fração de cooperadores e o payoff médio. Diferente dos modelos clássicos de imitação, o payoff médio da população não cai conforme  $T$  aumenta. Pelo contrário, mesmo com a queda da população de cooperadores, o ganho médio continua a aumentar continuamente. Modelos de imitação contam com ilhas de cooperadores para manter viva a cooperação, o que inevitavelmente faz com que o ganho médio da rede diminua cada vez mais com o aumento de  $T$ , pois os desertores interagem somente entre si, recebendo  $P = 0$ . Como veremos a frente, no modelo WSLs proposto, a rede se organiza de maneira homogênea, de modo que desertores interajam com cooperadores e ganhem  $T$ , o que faz o payoff médio aumentar. Mas ao mesmo tempo os cooperadores não são extintos para altos valores de  $T$ , evitando a catástrofe

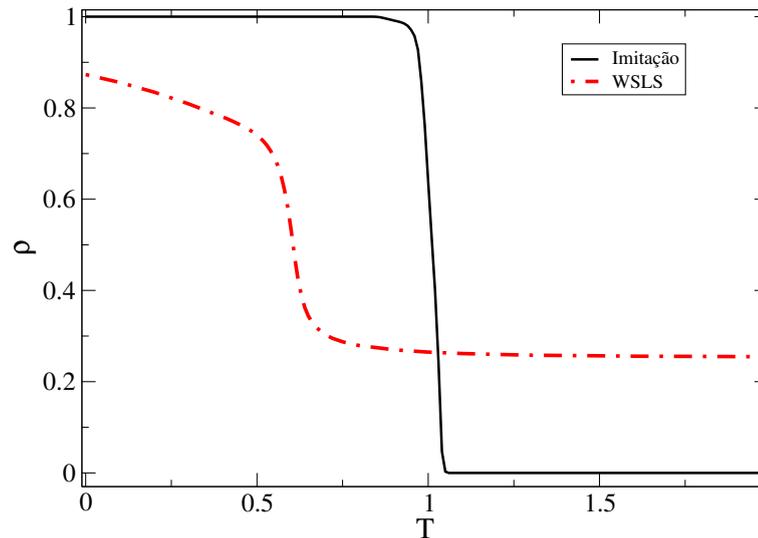


FIGURA 4.15: Fração de cooperadores como função de  $T$  para simulações de Monte Carlo no modelo WSL e de imitação na rede quadrada. Os parâmetros foram  $S = 0$  e  $k = 0.1$ . A cooperação nunca chega a zero no modelo WSL, mesmo para altos valores de  $T$ .

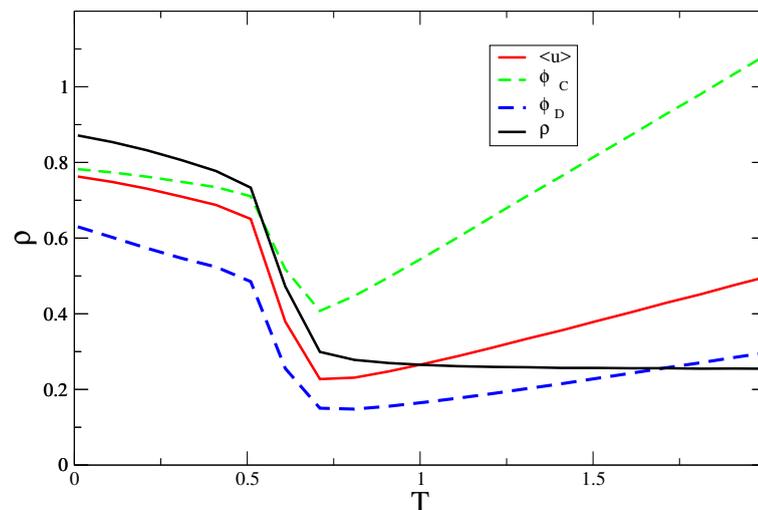


FIGURA 4.16: Fração de cooperadores ( $\rho$ ) e o payoff médio da rede,  $\langle u \rangle$ , como função de  $T$ , representados nas linhas contínuas, para simulações de Monte Carlo no modelo WSL. As linhas tracejadas indicam a aspiração média da população de cooperadores ( $\phi_c$ ) e desertores ( $\phi_d$ ). Os parâmetros foram  $S = 0$  e  $k = 0.1$ . Apesar da queda da cooperação, o ganho médio de toda a população continua aumentando com  $T$ . Ambas aspirações aumentam com  $T$ , apesar de cooperadores terem sempre uma aspiração maior que a de desertores.

dos comuns onde todos se trairiam. O segundo conjunto de curvas da figura 4.16 nos mostra o valor médio das aspirações de cooperadores e desertores. As aspirações de ambos também aumentam com  $T$ , apesar de que a aspiração dos cooperadores sempre é superior a aspiração dos desertores. Como veremos a seguir isso se deve ao fato de que desertores tem como vizinhos cooperadores, e vice-versa, nesse modelo.

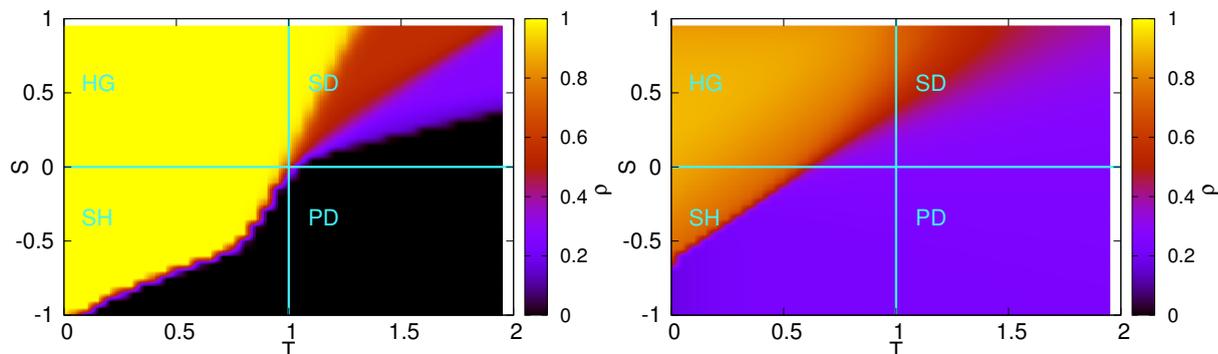


FIGURA 4.17: Fração de cooperadores (escala de cores) para todo o plano  $T - S$ . No modelo de imitação (esquerda) existe unicamente cooperação no quadrante  $HG$ , uma divisão bem definida no quadrante  $SH$ , graduações de coexistência em  $SD$  e pouquíssima cooperação para uma fração do quadrante  $PD$ , com a extinção ocorrendo em  $T_c \approx 1.04$ . Para o modelo WLSL (direita) o comportamento é totalmente diferente, com a coexistência em todos os quadrantes, apesar de em menor nível que no modelo de imitação para o caso  $HG$ . A dinâmica inovativa é eficiente em manter a coexistência de estratégias para todos os valores de  $T$  e  $S$ .

A figura 4.17 mostra os níveis de cooperação de ambos modelos para todo o diagrama  $T - S$ . Como esperado [111], o modelo de imitação apresenta cooperação total no quadrante  $HG$  e na metade do quadrante  $SH$ , deserção total na outra metade deste e na maior parte do quadrante  $PD$  e uma graduação de coexistência no quadrante  $SD$ . O comportamento do modelo proposto é totalmente diferente do caso imitativo, com a coexistência de estratégias dominando todos os quadrantes, mesmo que em graduações diferentes. Para nenhum parâmetro existe a dominância total de qualquer estratégia.

Observando o comportamento global do modelo WLSL sendo tão diferente do modelo de imitação, passamos a investigar quais mecanismos locais poderiam gerar isso. Apesar do método de Monte Carlo ser inerentemente estatístico, sendo confiável somente através de valores médios [128], a análise de “fotos” instantâneas da rede pode nos dar informações importantes sobre os micromecanismos que levam ao comportamento global. Com base nisso apresentamos na figura 4.18 dois retratos instantâneos da rede em ambos modelos para uma combinação de parâmetros que faz as duas possuírem a mesma fração média de colaboradores ( $\rho = 0.25$ ). A diferença na organização espacial é evidente. Enquanto no modelo de imitação os cooperadores se organizam em ilhas para se ajudarem (como o esperado [20]), no modelo WLSL um padrão quase homogêneo e totalmente diferente emerge espontaneamente. Aqui, é interessante notar que estudos com outros modelos, também inovativos, encontraram padrões semelhantes a um xadrez de cooperadores e desertores [69, 112, 168, 170–173]. Tais imagens sugerem que o

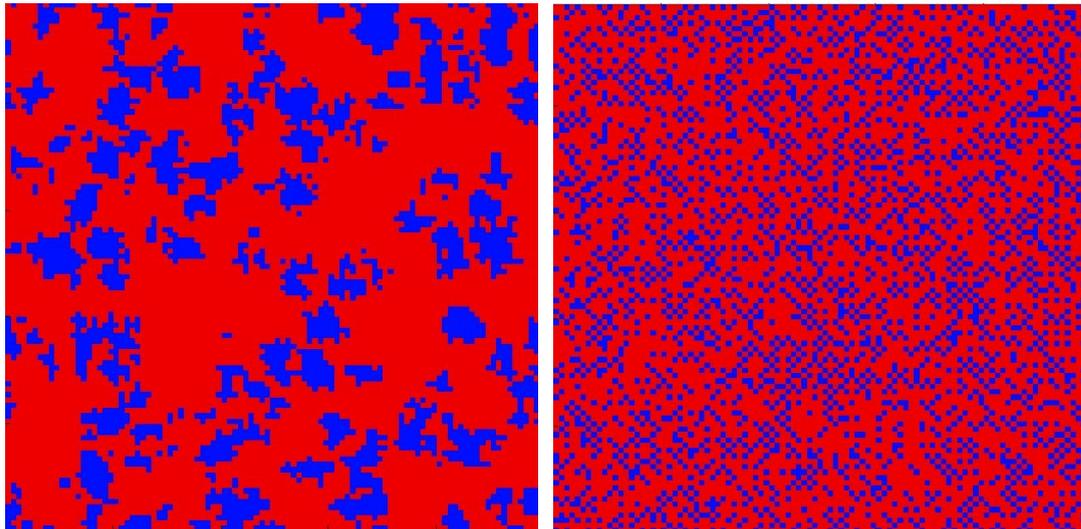


FIGURA 4.18: Instantâneos típicos das redes após atingido o estado estacionário para o modelo de imitação (esquerda) e WSLS (direita), cooperadores são azul escuro e desertores vermelho claro. Vemos claramente que a distribuição espacial é diferente nos dois modelos, em especial o modelo WSLS não conta com a reciprocidade espacial, já que os cooperadores ficam homoganeamente distribuídos. Note que ambas redes possuem  $\rho \approx 0.25$  e  $S = -0.01$ , sendo  $T = 1.023$  para a imitação e  $T = 1.1$  para WSLS.

mecanismo por trás da sobrevivência da cooperação em processos inovativos é diferente do que existe na reciprocidade espacial.

Para investigar os mecanismos que levam à formação de tais padrões analisamos o caso determinístico,  $k \rightarrow 0$ , usando  $S = 0$  para simplificação. Desse modo cada indivíduo muda de estratégia caso  $u_i < \bar{u}$  ou a mantém caso contrário. No caso de um cooperador cercado por desertores, vemos que a cooperação irá se espalhar para os segundos vizinhos, e não para seus primeiros como ocorre no modelo clássico. Isso pode ser visto na figura 4.19. Como o payoff do indivíduo central é inferior ao payoff médio de seus vizinhos, ele irá se tornar  $D$ . Porém, ao mesmo tempo, seus segundos vizinhos também terão um payoff menor que a média de seus vizinhos, se tornando  $C$ . Em outras palavras, o que mantém a cooperação nesse sistema é a própria ganância dos traidores, que faz com que estes mudem de estratégia quando qualquer vizinho traidor tenha um payoff maior que o seu próprio. Ao mesmo tempo esse mecanismo também leva ao fenômeno de que cooperadores não formem ilhas, mas se espalhem homoganeamente pela rede.

Nossos resultados sugerem que a promoção da cooperação no modelo WSLS não está associado a reciprocidade espacial, como nos casos típicos de imitação [25, 33, 35, 174]. Testamos a robustez dessa conclusão variando a topologia de interação. Redes livre

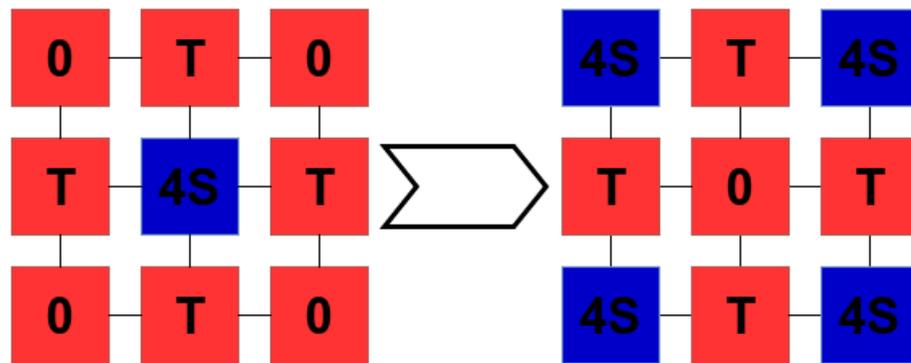


FIGURA 4.19: Cooperador (azul escuro) cercado por desertores (vermelho claro) na versão determinística da dinâmica WLS. Apesar do indivíduo central se tornar desertor, seus segundos vizinhos se tornam cooperadores devido ao seu payoff estar abaixo da média dos desertores que exploram o sítio central.

de escala [175, 176] são famosas por promoverem a cooperação ao aumentarem o efeito da reciprocidade espacial quando usamos o payoff absoluto [130, 139, 141, 143, 145]. Nossa ideia é que se a reciprocidade espacial não tem grandes efeitos no modelo WLS, o uso de redes livre de escala não deveria mudar drasticamente a cooperação encontrada. Novamente usamos o algoritmo de Krapivsky-Redner [142] para criar redes com  $10^4$  nodos, sendo que  $S = 0$ .

A figura 4.20 mostra a comparação dos resultados para redes quadradas e redes livre de escala com payoff absoluto, equação (4.12), e normalizado, equação (4.13). Sob a regra de imitação, o efeito que a rede livre de escala tem na a cooperação é amortecido ao se normalizar o payoff, mas ainda sim a rede livre de escala tende a favorecer a cooperação mais que a rede quadrada [20, 34, 111, 130, 139, 141, 143, 149–151, 175]. Como esperávamos, a rede livre de escala tem pouco efeito na cooperação quando o modelo usado é o WLS, reforçando nossa conclusão de que a reciprocidade espacial deixa de ser importante nesse caso.

Com isso, obtivemos algumas características importantes da dinâmica WLS. Vimos que, se a motivação de indivíduos é ser no mínimo tão bem sucedidos quanto seus vizinhos, a cooperação poderá surgir e se manter em coexistência com a deserção. Tal resultado foi analisado tanto por aproximação de campo médio quanto simulações numéricas, e conseguimos descrever o mecanismo local que faz a cooperação se manter, bem como emergir globalmente num padrão espacial característico e homogêneo. Note que isso implica que a dinâmica da rede é relativamente independente da topologia, se comparada a regra de imitação. Uma das principais características encontradas foi que a cooperação permanece presente na rede, mesmo para altos valores de  $T$ , devido a tais mecanismos. Esse trabalho destaca quão importante é a escolha do modelo correto

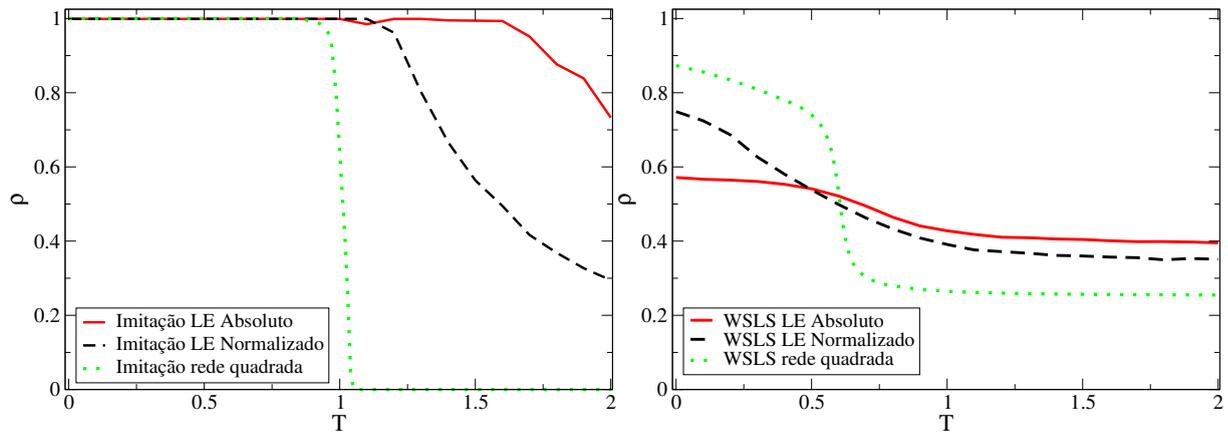


FIGURA 4.20: Fração da cooperação como função de  $T$  para topologias diferentes: rede quadrada, livre de escala (LE) com payoff absoluto e com payoff normalizado. Para o modelo de imitação (esquerda) vemos que a topologia altera drasticamente os resultados, em especial havendo aumento de cooperação no modelo livre de escala. Já para o modelo WLS (direita) as diversas topologias têm pouco efeito na cooperação.

de atualização da estratégia, já que uma pequena alteração nesse, pode resultar em dinâmicas totalmente diferentes. Note que a evolução de comportamentos em animais, em geral, é bem descrita por dinâmicas imitativas, onde o comportamento é repassado a prole e este evolui em escalas de tempo enormes [12, 161]. No entanto, este não é sempre o caso quando tentamos modelar comportamentos em entes racionais, que podem mudar espontaneamente de estratégia em escalas de tempo muito curtas, como humanos tomando decisões em interações sociais [177–181].

Por fim, notamos que trabalhos teóricos recentes com outros modelos inovativos também encontraram certa independência com a topologia [68, 167]. Ainda mais importante, experimentos recentes com humanos deram indícios de que a dinâmica do sistema pode ser independente da rede de interações quando os agentes são pessoas [20, 66, 72–77]. Frisamos que tais experimentos são muito recentes, e essas conclusões vão de encontro com a base clássica de teoria dos jogos evolucionários, estabelecida na década de 80, onde a cooperação vem de dinâmicas de imitação e se beneficia principalmente de reciprocidade espacial [12, 20, 25]. Isso se deve principalmente ao fato de que, classicamente, a evolução de estratégias era vista sob o prisma da dinâmica de populações biológicas, descrita por equações de imitação [13, 20, 68]. Essa discrepância entre experimentos e teoria nos motivou a analisar mais profundamente os modelos inovativos.

## 4.4 Redes triangulares e modelo de Logit

Dando continuidade a nossa investigação das semelhanças entre jogos e modelos clássicos da física estatística, introduzimos o modelo de Ising de maneira semelhante ao que ocorre em sistemas magnéticos. Ao considerarmos o modelo WSLS, demos um importante passo na associação de modelos físicos, deixando de lado a hipótese biológica de que estratégias mudam somente devido a imitação. E de maneira interessante, vimos que experimentos recentes com humanos também indicaram, de maneira independente, que os modelos inovativos podem representar comportamentos quando modelamos seres racionais.

Porém, no modelo WSLS o sítio focal altera sua estratégia comparando seu payoff com a média de seus vizinhos. Se associamos a energia ao payoff, e a estratégia de um sítio ao estado de spin de uma partícula, notamos que a conexão dos dois modelos ainda não é completa. Isso ocorre porque, para modelos magnéticos, a simulação de Monte Carlo de uma partícula faz com que ela mude de estado comparando sua energia atual com a energia que ela própria teria caso mudasse de estado. Ao tentar introduzir esse tipo de raciocínio em teoria de jogos [46], descobrimos fortuitamente que tal modelo já existia em teoria clássica dos jogos, mas sem utilizar a distribuição de Fermi-Dirac e sendo imitativo. Em dinâmicas chamadas regra de Logit (também conhecida como “*myopic best-response*” [170]) o sítio focal calcula seu payoff e muda de estratégia com uma probabilidade linearmente dependente da diferença entre seu payoff atual ( $u_i$ ) e seu payoff futuro, caso ele mudasse de estratégia ( $u_{i*}$ ). Utilizamos essa ideia inicial, porém com a distribuição de Fermi-Dirac e permitindo o sítio mudar para uma estratégia que não esteja presente em sua vizinhança. Desse modo, a probabilidade de um sítio  $i$  mudar para a estratégia oposta a atual é:

$$p(\Delta u_i) = \frac{1}{1 + e^{-(u_{i*} - u_i)/k}} \cdot \quad (4.30)$$

Essa probabilidade torna a dinâmica de Monte Carlo similar a usada na dinâmica de Glauber para modelos de Ising 2D [78–80]. Porém, é importante frisar que o modelo de teoria de jogos, como um todo, ainda possui diferenças com um sistema físico de spins, logo efeitos não triviais podem surgir. Note que no modelo de Ising a minimização de energia em uma interação de pares minimiza a energia dos dois spins. Já no jogo, a interação entre dois indivíduos pode resultar na maximização do payoff de um sítio enquanto o outro tem seu payoff minimizado. De fato, dependendo estrutura da matriz

de payoff, a interação entre um par de indivíduos pode levar ao ganho mútuo, em uma diferença de payoff zero ou mesmo na perda mútua de payoff. A consequência disso é que, enquanto a minimização da energia de uma partícula significa que a energia do sistema é minimizado, quando um indivíduo maximiza seu payoff, frequentemente o payoff total do sistema não precisará seguir tal comportamento [80]. Vemos isso mais claramente se tentarmos associar a energia de uma partícula no modelo de Ising ao payoff de um jogador. A matriz de payoff típica (2.1) é repetida abaixo:

$$\begin{array}{cc} & C & D \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \end{array}.$$

Se associarmos uma suposta “matriz de energia” de um spin em um material de constante de acoplamento  $J$  submetido a um campo magnético  $B$ , teremos:

$$\begin{array}{cc} & \uparrow & \downarrow \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} & \begin{pmatrix} -J - B & J - B \\ J + B & -J + B \end{pmatrix} \end{array}. \quad (4.31)$$

Equacionando as duas matrizes temos uma série de relações que poderiam ser válidas, a priori, ( $-J - B = R$ ,  $J - B = S$ ,  $J + B = T$ , e  $-J + B = P$ ). Porém, ao analisarmos os requisitos para jogos do tipo dilema, vemos que não é possível haver igualdade. Especificamente, pegamos como exemplo o jogo  $SD$  ( $T > R > S > P$ ), isso nos daria

$$J + B > 0, \quad 0 > J \quad \text{e} \quad J > B, \quad (4.32)$$

o que não é possível. Tais inconsistências obrigatoriamente aparecem em outros dilemas justamente porque a essência de um jogo do tipo dilema é a assimetria dos parâmetros de sua matriz de payoff. Tal assimetria é inexistente numa “matriz de energia” de um sistema físico (a energia da configuração  $\uparrow\downarrow$  deve ser a mesma da configuração  $\downarrow\uparrow$ ). Desse modo, conseguimos demonstrar que, apesar de haverem associações intuitivas a modelos de cooperação como sendo ferromagnetos e anti-coordenação como sendo anti-ferromagnetos [20, 69, 111, 126, 170–173, 182, 183], essas são somente generalizações. Os modelos não são totalmente semelhantes, de modo que fenômenos totalmente distintos poderão surgir.

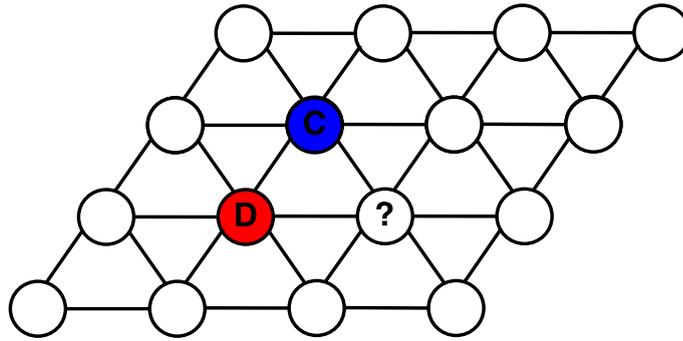


FIGURA 4.21: Exemplo de frustração na rede triangular. Os sítios  $C$  e  $D$  conseguem estar em estados opostos entre si, mas qualquer terceiro sítio que interaja com ambos terá que repetir uma das estratégias, ficando frustrado.

A partir desse ponto, procuramos analisar se fenômenos não triviais de sistemas magnéticos podem ter análogos em teoria de jogos. Ao associarmos o jogo de  $SD$  (um jogo classicamente considerado como anti-coordenação) com o modelo de antiferromagnetismo, podemos estudar o efeito da frustração topológica. Em sistemas magnéticos, esse fenômeno ocorre quando dois spins tem a tendência a se alinharem de maneira antiparalela entre si [78, 184]. Em um par de sítios não haverá problema, mas se um terceiro sítio tentar interagir com ambos, ele inevitavelmente ficará com uma de suas ligações frustrada, pois deverá assumir o mesmo estado de um dos sítios vizinhos. De igual modo, no jogo  $SD$  a melhor estratégia é sempre fazer o oposto de seu vizinho, o que nem sempre é possível em uma rede triangular. Essa frustração é ilustrada na figura 4.21.

Outros trabalhos já estudaram a frustração do jogo  $SD$  em redes quadradas, onde um padrão xadrez muito robusto emerge espontaneamente [20, 68, 69, 72–74, 112, 123, 126, 170–173, 182]. Isso se deve justamente ao fato de a rede quadrada permitir perfeitamente que todos os sítios façam o oposto de todos seus vizinhos, ao organizarem-se com um padrão xadrez. Porém, nada havia sido feito dentro de redes triangulares, que apresentam essa frustração topológica intrínseca.

Cabe aqui revisar rapidamente as propriedades principais das redes triangulares. Nessa, dois sítios sempre terão um terceiro vizinho mútuo. Apesar de parecer um detalhe trivial, isso significa que é impossível uma configuração em que os sítios sempre estejam no estado oposto de todos seus vizinhos. Para cada par de sítios com estratégias diferentes  $C$  e  $D$ , um terceiro vizinho sempre precisará estar imitando no mínimo um dos dois como mostrado na figura 4.21. Esse fato gera a chamada frustração topológica [184], que é inerente à rede. Desse modo a configuração de mínima frustração possível, num cenário ideal, envolve distribuir um tipo de estado (digamos  $C$ ) no nodo central de um hexágono

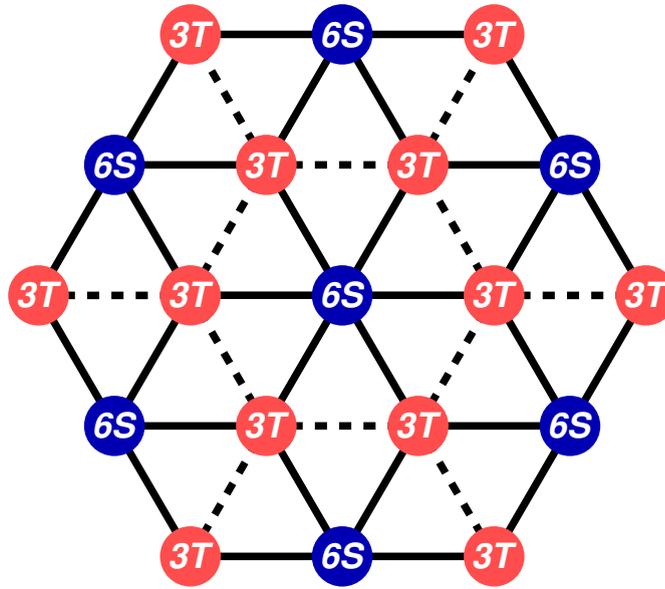


FIGURA 4.22: Configuração de frustração total mínima na rede triangular. Cooperadores (azul) são cercados por desertores (vermelho), minimizando sua frustração. Enquanto isso desertores tem metade de suas conexões frustradas. Ligações frustradas são representadas por linhas tracejadas e ligações otimizadas por linhas contínuas.

e o outro tipo (por exemplo  $D$ ) ao redor deste, formando um padrão semelhante a favos de mel. Isso pode ser visto na figura 4.22. Note que nessa configuração específica, os sítios  $C$  não possuem nenhuma conexão frustrada, mas os sítios  $D$  possuem frustração em metade de suas conexões. Em sistemas físicos, tal fenômeno gera diversos mínimos de energia globais, e uma entropia residual, que podem dar origem a diversos fenômenos não triviais, como vidros de spin e monopolos magnéticos [184, 185]. Esperamos encontrar fenômenos igualmente interessantes ao aplicar tais modelos para jogos.

#### 4.4.1 Equação mestra e campo médio

Começamos estudando a aproximação de campo médio de primeiros vizinhos para esse modelo. Como anteriormente, usamos  $S = 0$  para simplificação. A dinâmica do sistema é dada por:

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)W_{+(C \rightarrow D)} - \rho W_{-(D \rightarrow C)}, \quad (4.33)$$

sendo  $W_{\pm}$  a probabilidade do sítio central mudar de estado para  $C$  ( $D$ ). Nós obtemos  $\binom{N}{n}$  configurações de vizinhança diferentes, sendo que agora  $N$  é 4 para a rede quadrada

e  $N = 6$  para a rede triangular, assim:

$$W_{\pm} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} P_{\pm}(u_i, u_{\Omega}) . \quad (4.34)$$

Sendo  $n$  o número de vizinhos cooperadores em determinada configuração e  $\binom{N}{n}$  os coeficientes binomiais, como no caso do WSLS. Enquanto  $n$  varia no somatório,  $N$  permanece constante para cada tipo de rede específico. Os demais termos são análogos ao caso WSLS. Para o modelo de Logit usamos que:

$$P_{\pm}(u_i, u_{\Omega}) = \frac{1}{1 + e^{-(u^* - u_i)/k}} . \quad (4.35)$$

Um das vantagens analíticas do modelo de Logit é que as probabilidades dependem somente do payoff de  $i$ , fazendo com que as equações possam ser simplificadas. Se o sítio central é  $D$  ( $C$ ), a diferença de payoff para qualquer configuração será:

$$(u^* - u_i)_{D \rightarrow C} = n(1 - T) , \quad (4.36)$$

$$(u^* - u_i)_{C \rightarrow D} = n(T - 1) . \quad (4.37)$$

Usando  $A = (1 - T)/k$  para simplificar, obtemos:

$$P_{\pm}(u_i, u_{\Omega}) = \frac{1}{1 + e^{\mp nA}} . \quad (4.38)$$

Substituindo esse termos nas taxas de transição,

$$W_{\pm} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} \frac{1}{1 + e^{\mp nA}} . \quad (4.39)$$

Abrindo-as explicitamente dentro da equação (4.33) temos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & (1 - \rho) \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \frac{\rho^n (1 - \rho)^{(N-n)}}{1 + e^{-nA}} \\ & - \rho \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \frac{\rho^n (1 - \rho)^{(N-n)}}{1 + e^{+nA}} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Apesar de parecer complexa, a expressão acima pode ser simplificada:

$$\dot{\rho} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} \times \left[ (1 - \rho) \frac{1}{1 + e^{-nA}} - \rho \frac{1}{1 + e^{+nA}} \right], \quad (4.41)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\rho} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} \times \left[ \frac{1}{1 + e^{-nA}} - \rho \left( \frac{1}{1 + e^{-nA}} + \frac{1}{1 + e^{nA}} \right) \right]. \quad (4.42)$$

Desse modo a equação dinâmica para o modelo de Logit se torna:

$$\dot{\rho} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{-n(1-T)}{k}}} - \rho \right). \quad (4.43)$$

Podemos encontrar numericamente quais os pontos fixos desta EDO ao fazer  $\dot{\rho} = 0$ , o que resulta em um polinômio de 6 ordem. Esse terá pelo menos uma raiz no intervalo de  $0 < \rho^* < 1$ , sendo essa um ponto fixo estável. Isto é independente de  $T$ , o que implica, como no modelo WSLs, que deve haver coexistência de cooperação mesmo para valores grandes de tentação. Novamente usamos um integrador de Runge-Kutta de 4ª ordem para obter o comportamento geral da equação (4.33), como mostrado na figura 4.23. Nessa, comparamos os resultados da aproximação de campo médio com a dinâmica de Monte Carlo, e vemos que ambos concordam qualitativamente.

#### 4.4.2 Simulações de Monte Carlo

Para as simulações de Monte Carlo utilizamos aqui somente o protocolo assíncrono, com  $N = 10^4$  indivíduos em cada rede e  $10^4 - 10^5$  MCS's até o estado estacionário. Frisamos aqui que o modelo de Logit possui um tempo de transiente curto, e flutuações pequenas quando comparado ao modelo clássico de imitação. Isto pode ser visto na figura 4.24 para 4 diferentes combinações de parâmetros que nos evidenciam melhor as diferenças durante o tempo de transiente entre os dois modelos. No caso do modelo de Logit, por possuir maiores flutuações inerentes, os sítios rapidamente mudam de estado até atingirem a configuração estável de maneira mais rápida que o modelo de imitação.

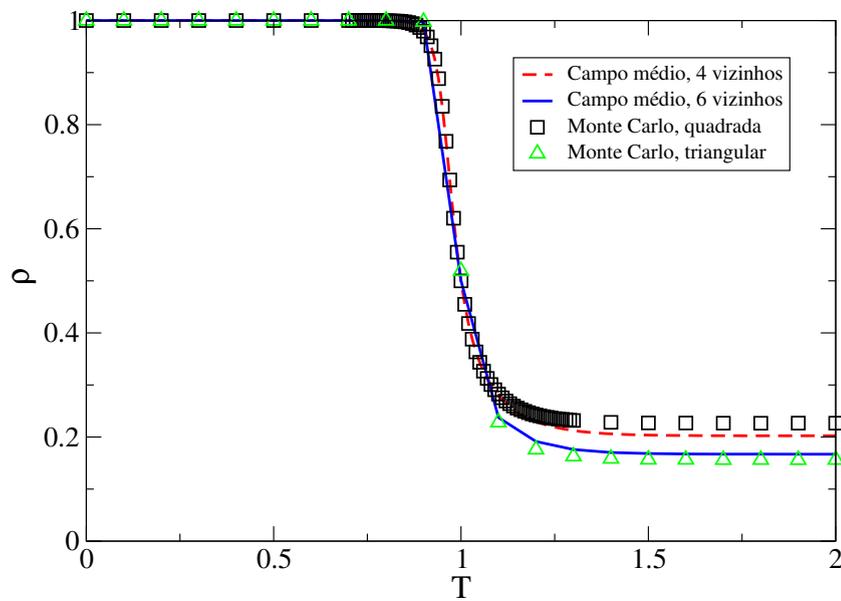


FIGURA 4.23: Fração de cooperadores no estado estacionário como função de  $T$ . Os resultados de Monte Carlo (símbolos) e da equação de campo médio (linhas) concordam qualitativamente para ambas topologias.

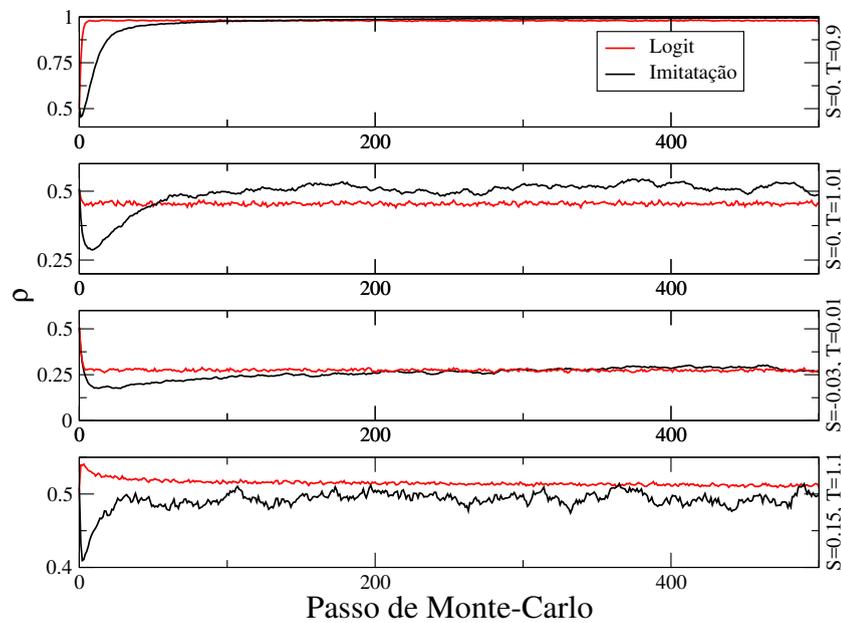


FIGURA 4.24: Evolução de Monte Carlo da fração de cooperadores do modelo de Logit e de imitação. Mostramos aqui 4 conjuntos de parâmetros  $(T, S)$  diferentes;  $((0.9, 0), (1.01, 0), (0.01, -0.03)$  e  $(1.1, 0.15))$  na rede quadrada. Após um período de transiente, as populações atingem um estado estacionário. O modelo de Logit chega rapidamente a este estado, e com menores flutuações que o modelo de imitação.

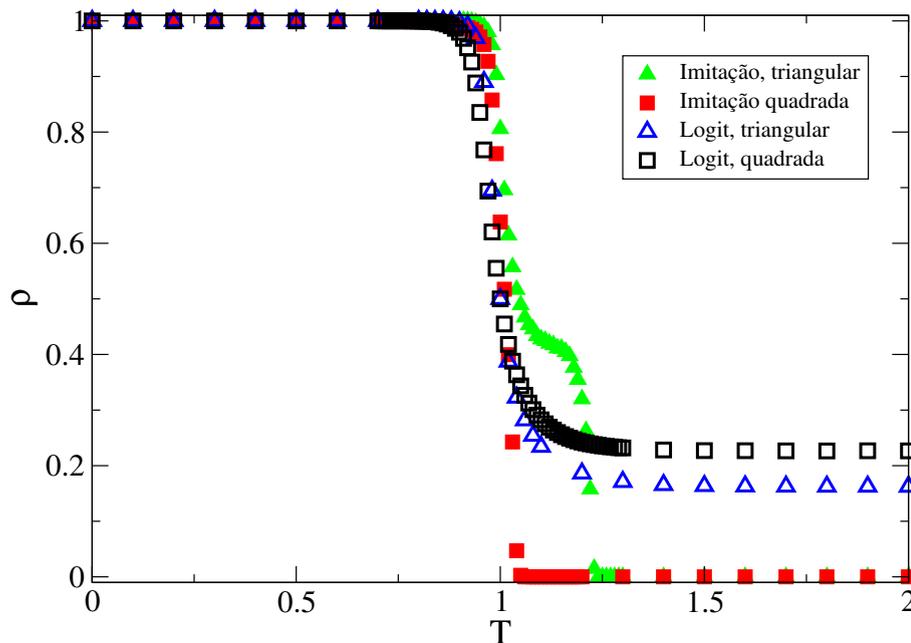


FIGURA 4.25: Fração de cooperadores no estado estacionário como função de  $T$  para  $S = 0$  em simulações de Monte Carlo. A diferença entre o modelo de Logit e de imitação é mais pronunciado após  $T > 1$ .

Começando com  $S = 0$ , comparamos o modelo de Logit com o modelo imitativo, como pode ser visto na figura 4.25. Existe uma queda brusca na cooperação (diferente do modelo WSLs) na mesma região em que o modelo de imitação possui uma transição de fase [20, 111]. Isso ocorre em ambas topologias estudadas. Também é possível notar que existe um nível basal de cooperação, apontando para um comportamento geral em modelos inovativos.

Da mesma forma que no modelo WSLs, o modelo de Logit também consegue fazer o ganho médio global aumentar conforme  $T$  aumenta, mesmo com a cooperação decaindo. A figura 4.26 mostra a fração de cooperação,  $\rho$ , e o respectivo payoff médio global,  $\langle u \rangle$ , de todos os modelos estudados até agora para a rede quadrada. Para melhor visualização dos resultados, o payoff médio de todos os modelos é dividido por 4 para que os gráficos fiquem em uma escala semelhante. Note, no entanto, que apesar da fração máxima de cooperação ser 1, o ganho médio máximo de um sítio pode ir até  $T$ . O aumento no payoff parece ser uma característica comum em modelos que conseguem espalhar homoganeamente os cooperadores e desertores [69, 112, 170–173].

Vemos na figura 4.27 a fração de cooperação para todo o espaço de parâmetros  $T-S$  para os modelos de imitação e Logit tanto na rede quadrada quanto na rede triangular. Os resultados são muito semelhantes nos quadrantes  $HG$ ,  $SH$  e  $PD$ . A maior diferença ocorre justamente no quadrante  $SD$ , onde existe um jogo de anti-coordenação. Enquanto

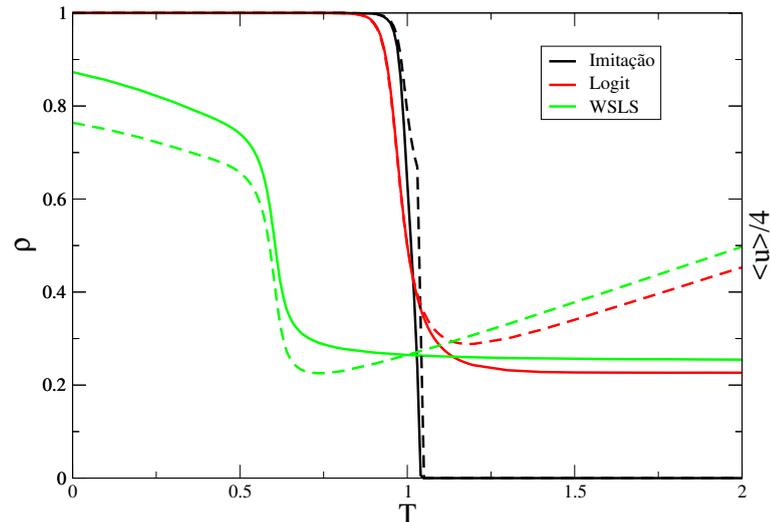


FIGURA 4.26: Fração de cooperadores no estado estacionário ( $\rho$ ) como função de  $T$ , para  $S = 0$ , em simulações de Monte Carlo na rede quadrada para os três modelos estudados até agora. As linhas tracejadas representam o payoff médio global,  $\langle u \rangle$ , de cada modelo (dividido por 4 para melhor visualização). Os modelos inovativos conseguem fazer o ganho global aumentar mesmo havendo queda da cooperação conforme  $T$  aumenta, diferente do modelo imitativo.

a dinâmica de imitação não parece ter grandes variações devido à diferença de topologia, vemos que no modelo de Logit esse quadrante apresenta diferenças interessantes. Em específico, existe uma região homogênea e independente de  $T$  ou  $S$  para a rede quadrada, onde a cooperação se mantém em 50% (estudado em [170–172]). Já no caso da rede triangular essa região parece se dividir espontaneamente em duas áreas divididas pela linha diagonal  $S = T + 1$ .

Podemos analisar o platô de cooperação constante que o modelo de Logit apresenta na região  $SD$  ao fixarmos o valor de  $T$  e variarmos o parâmetro  $S$ , varrendo uma linha vertical no espaço de parâmetros. Assim podemos enxergar o quanto a cooperação consegue penetrar na região  $PD$  em comparação com o modelo de imitação. A figura 4.28 mostra a fração de cooperadores em função de  $S$  na rede quadrada para os modelos de Logit e de imitação, para 3 valores distintos de  $T$ . Note como os resultados para o modelo de imitação são dependentes do valor de  $T$ , com a cooperação diminuindo para os valores maiores de  $T$ . Em nenhum dos casos imitativos a cooperação consegue penetrar na região  $PD$ . Já para o modelo de Logit, a cooperação parece independe do valor de  $T$ . Além disso conseguimos ver aqui, quantitativamente, que a cooperação penetra uma grande região do  $PD$ , sendo extinta em  $S = -0.2$ .

Na região  $SD$ , o modelo Logit para a rede triangular possui dois platôs distintos, com a cooperação em  $\rho \approx 0.35$  abaixo da diagonal e  $\rho \approx 0.65$  acima desta. Analisando

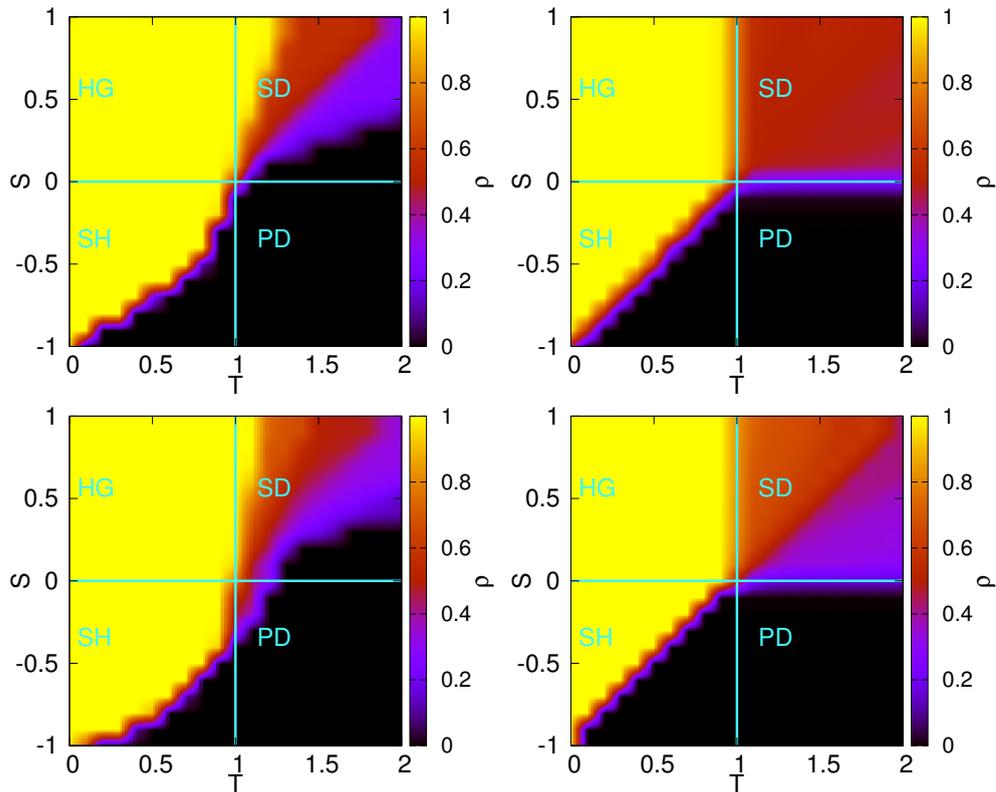


FIGURA 4.27: Diagrama mostrando a fração de cooperadores (escala de cores) para todo o plano  $T - S$ . As imagens no topo mostram os resultados da rede quadrada e as na parte de baixo a rede triangular. A coluna da esquerda contém o modelo de imitação enquanto a coluna da direita mostra o modelo de Logit. No modelo de Logit, vemos uma região homogênea na rede quadrada para o jogo  $SD$ . Essa se desfaz em dois platôs claramente separadas, ao utilizarmos a topologia triangular.

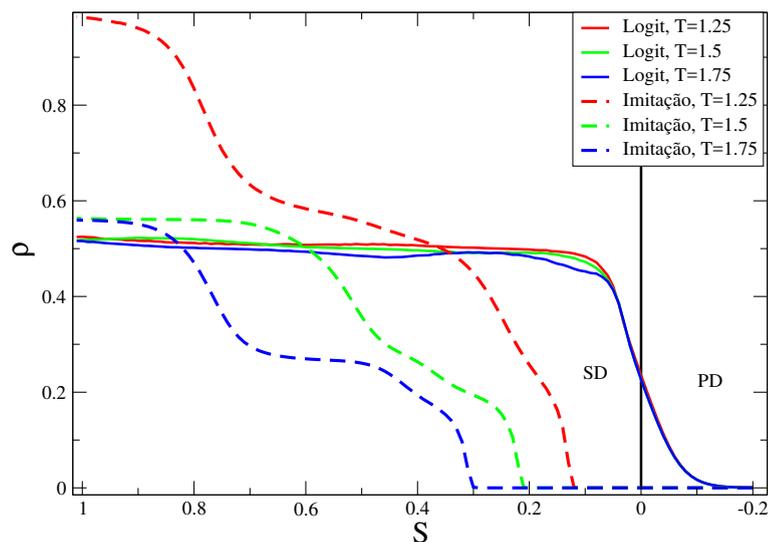


FIGURA 4.28: Fração de cooperadores no estado estacionário ( $\rho$ ) como função de  $S$ , em simulações de Monte Carlo na rede quadrada para o modelo de Logit e de imitação. A cooperação parece independer de  $T$  e  $S$  no modelo de Logit dentro da região  $SD$ , e essa ainda consegue penetrar até  $S = -0.2$  na região do dilema do prisioneiro.

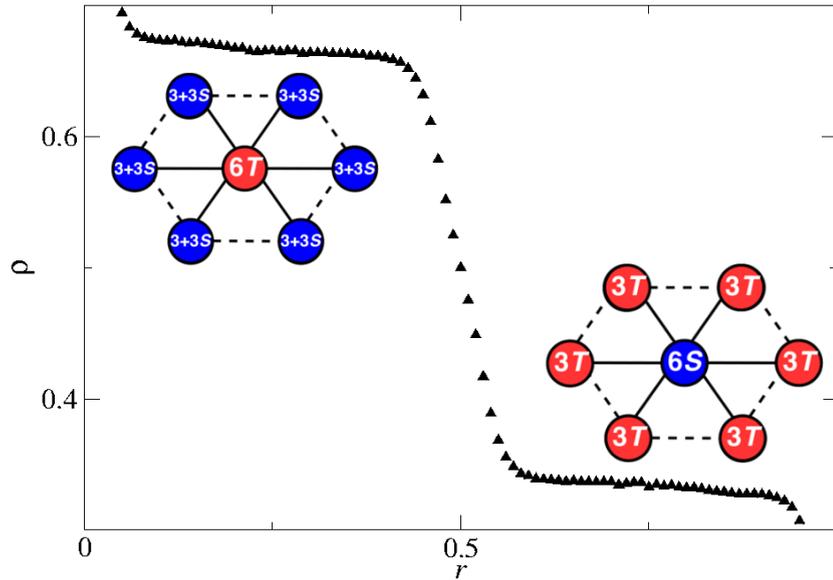


FIGURA 4.29: Fração de cooperadores no estado estacionário para a parametrização  $T = 2 - S$  no modelo de Logit na rede triangular. Variamos os parâmetros através de  $r$ , onde  $T = 1 + r$  e  $S = 1 - r$ . No lugar do estado homogêneo apresentado pela rede quadrada vemos dois platôs claramente divididos. As imagens ilustram os padrões de estratégias em cada um dos regimes.

o caso de mínima frustração apresentado na figura 4.22, vemos que este possuiria tais valores de cooperação/deserção se repetíssemos infinitamente o padrão. Suponha células hexagonais com um sítio central  $D$  rodeado por sítios  $C$ . Em cada uma dessas células temos 6  $C$ 's, mas cada um faz parte de 3 células hexagonais distintas. Assim, a fração  $\rho$  para o caso infinito é calculada como a fração de cooperadores de cada célula ponderado pelo número de células que são divididos por estes:

$$\rho = \frac{6/3}{6/3 + 1} = \frac{2}{3} . \tag{4.44}$$

O cálculo para o caso de  $C$  cercado de  $D$ 's é análogo e nos dá justamente que  $\rho = 1/3$ , frações muito próximas do valor encontrado para os dois platôs da figura 4.27. O sistema apresenta somente um dos dois estados, dependendo dos parâmetros  $T - S$ . Na figura 4.29 mostramos a fração de cooperadores ao parametrizarmos  $T$  e  $S$  de modo a seguir a linha perpendicular a divisão, i.e.  $T = 2 - S$ . Vemos claramente que os platôs são bem divididos e o papel de  $C$  e  $D$  se invertem na estrutura espacial, como mostrado na figura 4.29.

O modelo de Logit leva a rede ao estado de menor frustração, o que coincide com o maior payoff total da população. Para estudar melhor tal fenômeno quantificamos a frustração como  $\phi$ , a fração de ligações do mesmo tipo na rede (seja  $CC$  ou  $DD$ ).

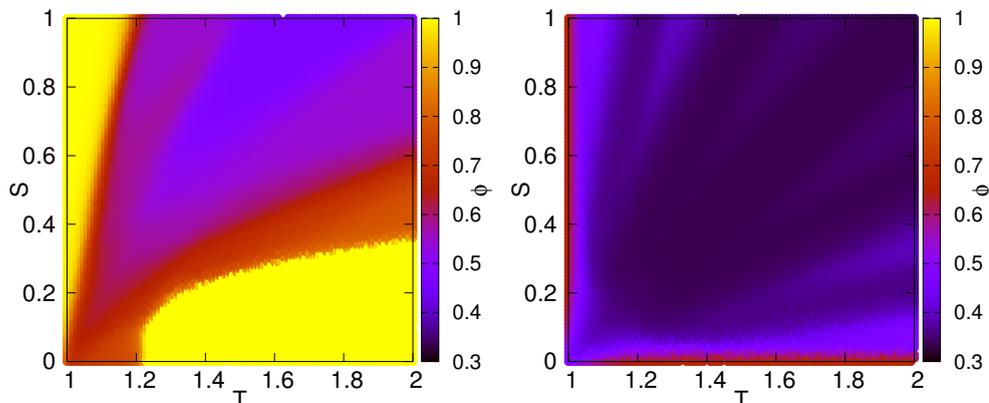


FIGURA 4.30: Nível de frustração,  $\phi$ , em função de  $T - S$  no quadrante  $SD$ . A esquerda temos o modelo de imitação e a direita o de Logit. O modelo de Logit leva o sistema para o mínimo de frustração espontaneamente.

Note que fora da região  $SD$  a frustração deixa de fazer sentido. Essa também é uma boa medida da homogeneidade da rede, sendo 1 para o estado totalmente dominado por uma estratégia e 0 para um estado em que haja uma mistura homogênea de duas estratégias, como o padrão xadrez. No entanto, na rede triangular a frustração mínima possível é  $1/3$ . A figura 4.30 mostra os níveis de frustração na região  $SD$  para a rede triangular no modelo de imitação e Logit. Como esperado o modelo de Logit leva a uma frustração muito baixa (35%) e homogênea para todo o quadrante, mesmo que a fração de cooperação seja diferente entre o platô superior e o inferior da linha  $T = S - 1$ . Já o modelo de imitação não consegue levar a rede a um estado de menor frustração, tendo valores mínimos de até 60%, e chegando facilmente a 100% em alguns pontos.

Para tornar nossas afirmações mais robustas, apresentamos imagens instantâneas das redes no estado estacionário para a região de  $SD$ . A figura 4.31 mostra retratos típicos das redes quadrada e triangular para ambas regras. A diferença na organização espacial é evidente, com a regra da imitação gerando agrupamentos compactos de cooperadores enquanto a regra de Logit tende a espalhá-los homogeneamente. Especificamente na rede quadrada, forma-se o padrão xadrez, como estudado em [69, 112, 168, 170–173]. Para a rede triangular, vemos que as formações hexagonais que previmos na figura 4.22 surgem para minimizar a frustração. Essas são padrões emergentes, nenhum parâmetro ou influência externa foi introduzida no modelo para que tais padrões de longo alcance se formassem.

A partir disso, analisamos qual o mecanismo microscópico que gera tais padrões. Vemos na figura 4.32 A) uma distribuição de estratégias em que o sítio central está cercado por sítios opostos. Veja que a mudança de estratégia é improvável no modelo

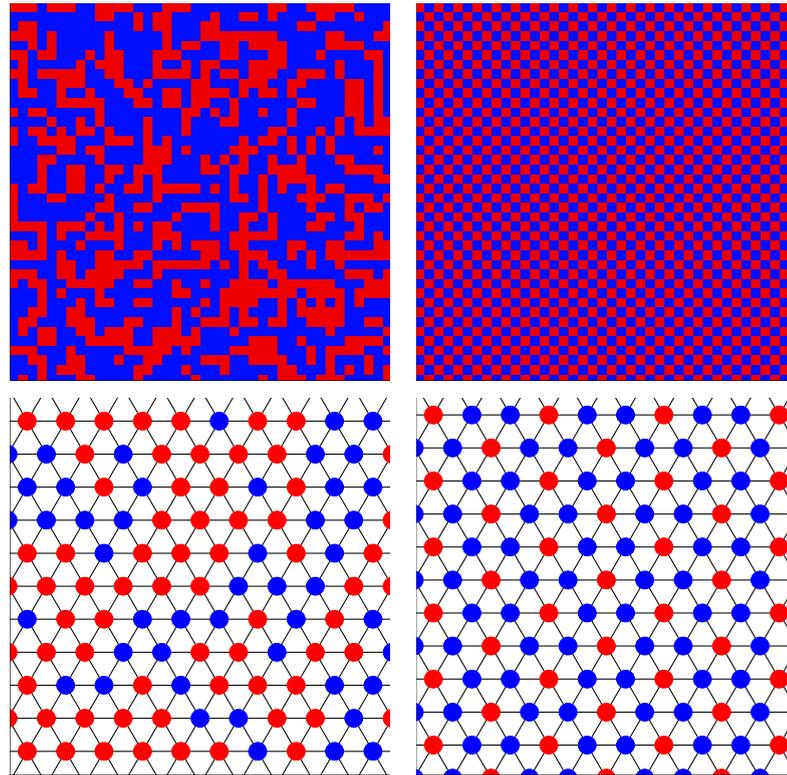


FIGURA 4.31: Retratos típicos das redes estudadas para o modelo de Logit (coluna da direita) e de imitação (coluna da esquerda). No topo vemos as redes quadradas enquanto abaixo as redes triangulares. Usamos como parâmetros  $T = 1.2$  e  $S = 0.5$ .

de Logit, tornando essa configuração estável. O análogo também é verdadeiro caso invertamos os papéis de  $C$  e  $D$ . Note, no entanto, que os indivíduos situados no vértice do hexágono possuem metade de suas ligações frustradas. Analisamos a chance destes trocarem de estratégia na figura 4.32 B), onde vemos que a diferença de payoff deste sítio, caso mude de estado, é significativa. Especificamente, o sítio possui como diferença de payoff  $3(S + 1 - T)$ . Esse valor se torna positivo, ou negativo, ao cruzar a linha  $S = T - 1$ , que é justamente a linha que divide os dois platôs observados na figura 4.27. Os sítios frustrados têm um papel fundamental na inversão da rede hexagonal, ditando, de acordo com os parâmetros  $T - S$ , qual tipo de estratégia ficará no centro do hexágono. Para  $T < S + 1$  os cooperadores têm um payoff melhor, permitindo que eles se satisfaçam estando nos vértices do hexágono com ligações frustradas, resultando num grande número total de cooperadores. Já para  $T > S + 1$  o inverso ocorre, com desertores ficando acomodados nos vértices, já que seu payoff aumentará com  $T$ .

É importante lembrar que na rede triangular existe uma frustração inerente, independentemente da organização espacial. Enquanto isso, na rede quadrada é possível atingir frustração zero com o padrão xadrez. Agora relacionamos esses dois extremos

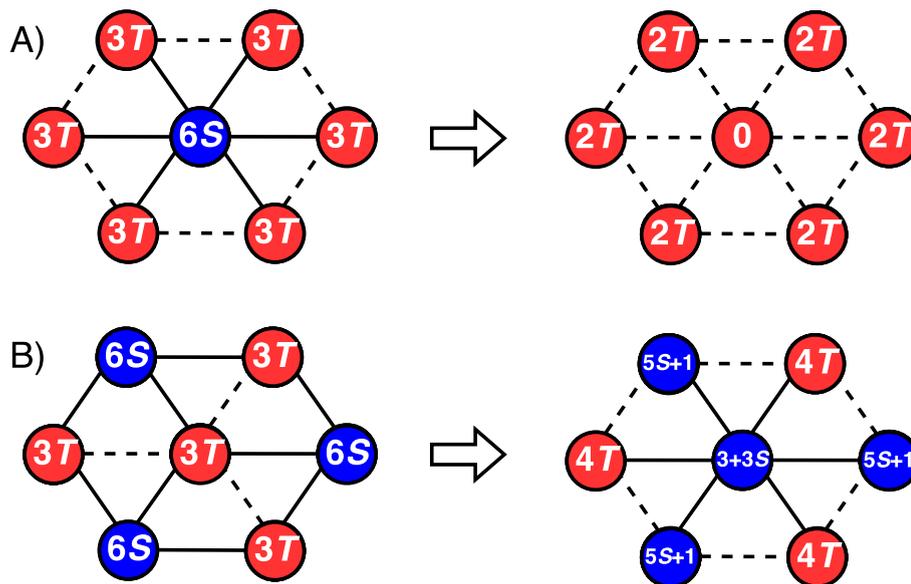


FIGURA 4.32: Principais mecanismos que mantêm a estabilidade das estruturas hexagonais. A) Um cooperador cercado por desertores é uma configuração muito estável, a mudança resultaria em uma diferença de payoff de  $-6S$ . B) Um desertor no vértice de um hexágono. A diferença de payoff, caso mude de estratégia, é  $3(S - T + 1)$ . Se  $S > T - 1$  a chance de tal mudança é alta. Note que essa expressão é o que define os dois platôs observados na figura 4.27.

continuamente, através de um processo de deformação da rede triangular. Se removemos da rede triangular todas as ligações diagonais dos sítios em uma direção somente, obtemos exatamente a rede quadrada. Pensando nisso realizamos simulações em redes que possuem uma fração  $X$  dessas ligações diagonais removidas. Evidentemente para  $X = 0$  obtemos a rede triangular e  $X = 1$  a rede quadrada. É importante frisar que dentro de cada simulação a topologia da rede permanece inalterada.

A figura 4.33 mostra a fração de cooperação resultantes desse processo para vários valores de  $X$ , seguindo a parametrização típica  $T = 2 - S$ . Conforme  $X$  aumenta, os dois platôs desaparecem, dando lugar a curvas suaves. Apesar disso, o estado homogêneo de 50% de cooperação só é obtido quando  $X = 1$ . A ordem de longo alcance que gera os padrões hexagonais desaparece assim que a rede triangular perde uma fração mínima de suas ligações.

Vimos que, em contraste com os modelos anteriores, a regra de Logit na rede triangular gera padrões espaciais específicos. Esses tendem a minimizar a frustração, gerando duas fases separadas na região  $SD$ . Conseguimos identificar os mecanismos microscópios que geram tais padrões e verificamos sua robustez. Vimos novamente que a escolha da regra de atualização da estratégia pode alterar drasticamente a dinâmica do sistema, sendo uma escolha muito importante ao se tentar modelar sistemas reais.

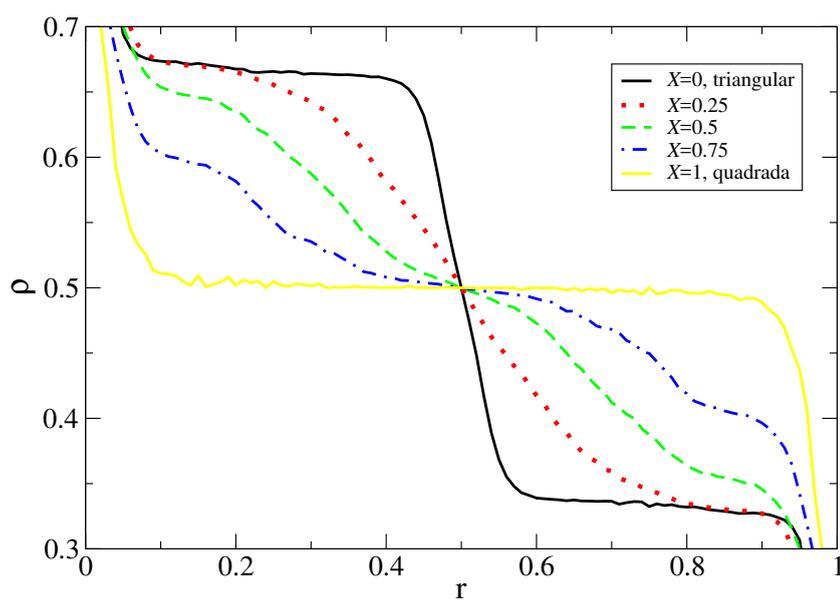


FIGURA 4.33: Fração de cooperação ao longo da parametrização  $T = 1 + r$ ,  $S = 1 - r$  para diversas topologias. O parâmetro  $X$  mede a fração de conexões diagonais da rede triangular removidos. A transição abrupta na cooperação da rede triangular é afetada pela remoção de ligações.

# Capítulo 5

## Conclusão

O problema da cooperação é uma questão interdisciplinar ainda em aberto, que já foi atacada por áreas tão diferentes quanto economia e biologia evolutiva. Afinal, se a evolução natural (bem como as interações sociais) tendem a selecionar somente os indivíduos mais aptos, colocando-os em perpétua competição, como a cooperação estável surgiria? No cerne da questão, está o seguinte problema: o que leva um indivíduo a sujeitar-se a um custo a fim de gerar benefícios a outrem? Apesar de abundar na natureza, seja entre parentes, espécies ou mesmo inter-espécies, a cooperação não é a escolha mais racional, ou que dá melhores resultados do ponto de vista estritamente matemático. Desse modo, a questão permanece em aberto. Apesar de modelos específicos conseguirem criar a emergência da cooperação, uma teoria geral e abrangente que modela tal fenômeno ainda não surgiu. Em espécies mais simples, a seleção de parentesco consegue explicar de forma relativamente satisfatória a evolução do comportamento cooperativo. O problema maior surge na espécie humana, devido ao imenso grau de complexidade dos aspectos cognitivos/psicológicos e da vida social. Isso se torna ainda mais evidente a luz de experimentos recentes, usando o dilema do prisioneiro entre humanos, onde se viu que os modelos até então usados em biologia evolutiva não concordam com o comportamento de pessoas quando competindo entre si. Nesses casos a cooperação surge, mas por mecanismos ainda desconhecidos, que geram resultados e comportamentos diferentes dos observados em animais irracionais. Devido à falta de uma teoria unificadora, essa questão vem sendo analisada de uma forma quase fenomenológica, com novos modelos e mecanismos sendo propostos e testados frequentemente. Tal fato deu origem a diversas abordagens interdisciplinares para descreverem essas situações.

Utilizamos em nossa pesquisa os métodos e ferramentas da física estatística para abordar o surgimento da cooperação sob a perspectiva da teoria dos jogos evolucionários. A partir de tal abordagem, pensamos uma população como um sistema de muitas partículas, cuja evolução temporal é probabilística. Em especial, nos focamos na análise da equação mestra, e simulações numéricas de Monte Carlo. No primeiro caso, seguimos a abordagem de áreas estatísticas ao modelar a evolução das tomadas de decisões de uma população como um processo Markoviano. Definindo taxas de transição entre estados, e regras que nos dão a probabilidade de mudanças de comportamento, obtemos a dinâmica global do sistema. Já no método de Monte Carlo usamos a simulação numérica amplamente utilizada em física estatística para obter quantidades médias de grandezas relevantes na população, através de uma abordagem no nível microscópico.

O primeiro problema que abordamos foi o impacto de flutuações nas percepções de ganhos entre os jogadores, o que se traduziu como flutuações estatísticas nos parâmetros que definem o ganho do jogo. Tal análise teve inspiração no fato de que a teoria dos jogos conta com parâmetros de payoff subjetivos, ao lidar com interações entre indivíduos, algo difícil de ser quantificado. Nesse sentido, buscamos descobrir inicialmente se dinâmicas clássicas manteriam suas previsões quando indivíduos tivessem percepções de ganho ligeiramente diferentes entre si. Os resultados dessa primeira análise foram surpreendentemente positivos, mostrando que o sistema mantém sua evolução média mesmo que existam duas matrizes de payoff distintas sendo usadas aleatoriamente. Isso não era esperado, dado que em um sistema complexo, raramente a evolução da componente média de um parâmetro é igual à evolução da mistura de dois parâmetros. Em termos práticos esse resultado é interessante, pois, nem sempre podemos medir quantitativamente qual o ganho percebido em uma interação (com raras exceções como, por exemplo, jogos estritamente monetários). Nesse contexto, torna-se difícil dizer qual o valor quantitativo exato percebido por cada indivíduo, mas nossos resultados nos dão confiança de dizer que a evolução média do sistema deve ser robusta a tais flutuações, contanto que essas oscilem em torno de um valor médio. Por fim, nossa análise gerou um interessante resultado ao analisarmos o que ocorre para grandes desvios do valor médio. Notamos que a dinâmica do jogo misto passa a diferir da dinâmica do jogo médio (como o esperado para grandes flutuações), porém tal diferença se dá em favor da cooperação. Isso serviu como guia para o próximo passo em nossa pesquisa.

Vendo esse fenômeno, passamos a estudar o efeito de grandes flutuações na matriz de payoff. Chamamos de heterogeneidade de payoff a diferença entre as matrizes de payoff dos jogos diferentes. Ao estudar como a dinâmica da rede variava para grandes

heterogeneidades, percebemos que a cooperação sempre se beneficiava desta, mesmo que uma grande heterogeneidade implicasse a presença de jogos nos quais o egoísmo fosse mais favorecido. Nesse ponto, passamos a estudar diversas topologias de rede como a livre de escala e rede aleatória, e vimos que o efeito do benefício da heterogeneidade é muito robusto, se mantendo para diversas topologias, diferentes valores de irracionalidade e protocolos de atualização. Em nossos modelos, a cooperação sempre se beneficia de uma maior heterogeneidade. Analisamos os mecanismos que geram tal fenômeno e descobrimos uma assimetria intrínseca no sistema, onde cooperadores conseguem se beneficiar a longo prazo do jogo fraternal, enquanto desertores não colhem benefícios de longo prazo no jogo egoísta. Tais resultados são ainda mais interessantes à luz de outras pesquisas com heterogeneidades de fontes diversas (como heterogeneidade de interações, topológica, temporal, etc) que mostram que a cooperação se beneficia de heterogeneidades, independente da origem destas [39–45, 50, 152–157].

Após obter maior familiaridade com a teoria evolutiva de jogos, passamos à próxima etapa de nossa pesquisa: criar uma ponte entre modelos físicos e teoria de jogos evolucionária. Para isso, passamos a estudar as dinâmicas inovativas, onde a mudança de estratégia de um sítio não depende da cópia da estratégia de vizinhos, mas pode ocorrer espontaneamente. Apesar de parecer um detalhe trivial, tal mudança gera grandes alterações nos resultados esperados para dinâmicas imitativas. Já do ponto de vista físico, vemos que o modelo inovativo é ainda mais semelhante a modelos clássicos da física estatística como o Ising. Para iniciar tais análises, estudamos a regra de atualização de estratégia usualmente chamada “*win-stay-lose-shift*”, onde o sítio mudará seu estado somente se seu payoff ficar abaixo de um determinado valor de aspiração. O modelo clássico WSLS usa a aspiração como um parâmetro global fixo, enquanto nossa proposta foi criar um modelo com aspiração dinâmica, onde cada sítio terá uma aspiração individual, igual à média do payoff de seus vizinhos. A partir disso, obtivemos resultados de aproximações analíticas e simulações numéricas consistentes, mostrando que tal modelo cria um nível mínimo de cooperação, o qual persiste mesmo para grandes valores de tentação. Não somente isso, mas o diagrama da cooperação em todo o espaço de parâmetros se torna totalmente diferente dos modelos clássicos de imitação, com a cooperação coexistindo sempre. Mediante tais resultados, analisamos os mecanismos microscópicos que levam a tais fenômenos e descobrimos como a cooperação se espalha através de segundos vizinhos no modelo proposto, gerando uma população homogeneamente distribuída. Tal configuração espacial é oposta aos mecanismos clássicos de sustentação da cooperação, i.e. reciprocidade espacial, onde cooperadores somente sobrevivem ao formar ilhas compactas em meio a mares de desertores. Confirmamos

nossas suposições analisando topologias de rede do tipo livre de escala, que amplificam muito o efeito da reciprocidade espacial. Vimos que em nosso modelo tais topologias não afetam a dinâmica da população profundamente. Isso é ainda mais interessante ao notarmos experimentos recentes com humanos, onde se viu que a dinâmica nesse caso era também independente da topologia de interações [20, 66, 72–77]. Ao se comparar a dinâmica inovativa com dinâmica de imitação, as diferenças observadas nos mostram a grande importância na escolha da regra de atualização de estratégia.

Continuamos nossa associação de modelos físicos clássicos ao estudar a regra de atualização de Logit, comparando-a ao modelo de imitação. Nessa, o sítio compara seu payoff atual com seu payoff caso mudasse para a estratégia oposta, e, com base nisso, calcula sua probabilidade de mudança (na qual usamos a distribuição de Fermi-Dirac). Além de ser um modelo inovativo, esse é similar às dinâmicas usadas em simulações de Monte Carlo para o modelo de Ising. Baseando-nos em fenômenos não triviais como os gelos de spin, introduzimos a topologia da rede triangular em nossa dinâmica de jogos. Tal topologia possui uma frustração inerente, caso os sítios tendam a estar no estado oposto de seus vizinhos. Isto ocorre pois para cada par de sítios que escolham estratégias opostas, sempre haverá um terceiro sítio em comum que terá uma de suas ligações frustrada (sendo obrigado a imitar um dos dois sítios iniciais). Essa frustração inerente foi estudada principalmente no quadrante do jogo de deslizamento de neve, um jogo clássico de anti-coordenação. Vimos que a frustração inerente faz com que padrões espaciais complexos emergjam espontaneamente na rede, organizando cooperadores e desertores em estruturas hexagonais. Tais estruturas se provaram muito robustas. Isso ocorre para todo o quadrante  $SD$ , porém com uma inversão dos papéis de  $C$  e  $D$  exatamente em uma linha diagonal que divide o espaço de parâmetros em dois platôs bem definidos. Estudamos os mecanismos microscópicos que levam a tal emergência, e descobrimos que a dinâmica de Logit leva o sistema ao estado de menor frustração possível (e conseqüentemente maior payoff), deixando sítios com grande payoff localizados nos vértices dos hexágonos (locais que possuem grande frustração) e deixando os sítios de menor payoff no centro desse (local com frustração zero). Também analisamos o efeito de uma frustração topológica fracionária, ao deformarmos continuamente a rede triangular na rede quadrada. Vimos que a ordem de longo alcance dos padrões hexagonais logo se desfaz com a mínima perturbação da topologia triangular, voltando a existir como padrão xadrez somente quando obtemos novamente a rede quadrada.

Em suma, podemos dizer que nosso estudo foi focado na aplicação de ferramentas

de física estatística na área de teoria dos jogos evolucionários. Tal abordagem foi frutífera ao nos mostrar detalhes interessantes quanto às dinâmicas clássicas e as misturas de jogos. Tivemos sucesso ainda maior ao introduzir modelos usuais de física nesses problemas, obtendo resultados que concordam com experimentos recentes e mostrando a importância de dinâmicas inovativas, que tem muito em comum com modelos termodinâmicos. Tais estudos resultaram na publicação de quatro artigos, que se encontram anexados no apêndice C. Nesse sentido, acreditamos ser cada vez mais produtivo a inter-contextualização dessas áreas, permitindo que ferramentas e conhecimentos de uma, fluam para a outra, e vice-versa. Esperamos que tais resultados possam incentivar pesquisas futuras em teoria dos jogos evolucionários e sua associação com diversas áreas da física e biologia.

# Apêndice A

## Aproximação de pares

As aproximações de campo médio usadas para resolver de forma aproximada a equação mestra (2.24) desconsideram efeitos espaciais, pois, assume-se que todos os jogadores interagem igualmente entre si. Para adicionarmos os efeitos de estrutura espacial em primeira ordem, precisamos alterar tal suposição. O modo mais simples de realizar isso é através da aproximação de pares [20, 80, 131, 166]. Nessa, iremos calcular as probabilidades de transição entre estados de um pequeno agrupamento de sítios, no lugar de apenas um sítio. No caso da rede quadrada, suponha dois sítios vizinhos,  $i$  e  $j$ . Esses terão respectivamente a vizinhança  $(x, y, z$  e  $u, v, w)$  como mostrado na figura A.1. Podemos calcular exatamente o payoff dos sítios focais  $i$  e  $j$  ao supormos os estados de seus vizinhos, enquanto o payoff de cada vizinho pode ser calculado pela aproximação de campo médio.

A dinâmica do sistema é descrita pela equação mestra (3.3). No caso da aproximação de pares, não iremos quebra-la somente na soma de transições individuais de sítios, mas, no lugar disso analisaremos as probabilidades de transição do agrupamento como um todo. Nesse caso, ao invés de usarmos  $P(\{s\}, \{g\}, t)$  como a variável principal, usamos a probabilidade de que a ligação entre os sítios esteja em determinado estado, i.e.,  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  (onde  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser  $C$  ou  $D$ ). As variáveis  $W(\{s\}, \{g\} \rightarrow \{s\}', \{g\}')$  são as taxas com a qual cada ligação muda de um estado para o outro ( $cd \rightarrow cc$  por exemplo). Note também que, para o caso de somente uma matriz de payoff, temos  $\{g\} = \{g\}'$ . Isso nos dá três EDO's acopladas que indicam as taxas de transições entre estados das

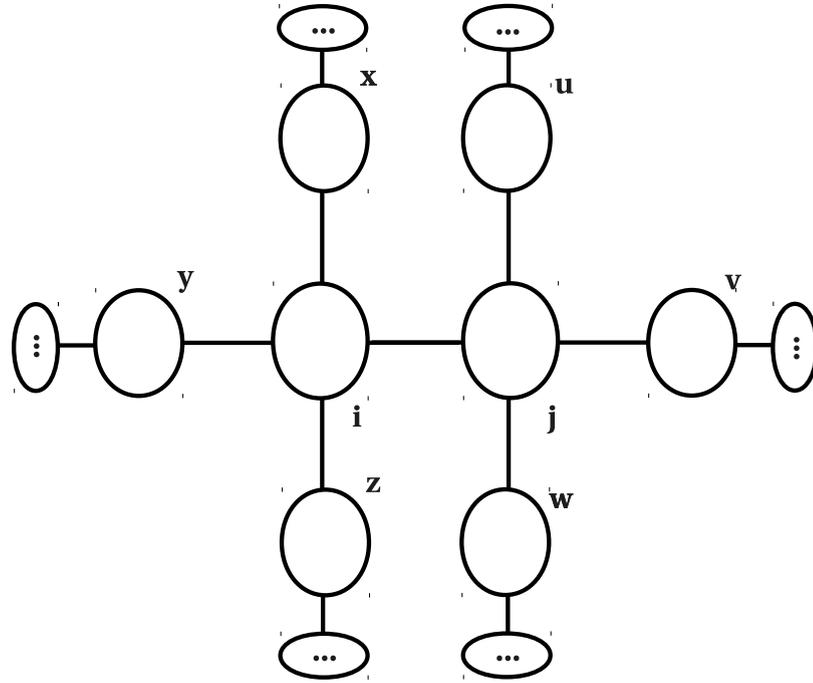


FIGURA A.1: Estrutura focal analisada na aproximação de pares. Apesar de todas as sete conexões poderem ter seus payoffs calculados exatamente, a interação dos segundos vizinhos com o restante da rede é feita pela aproximação de campo médio. Cada sítio pode ser  $C$  ou  $D$  e cada conexão pode estar no estado  $\Gamma_{cc}, \Gamma_{cd}$  ou  $\Gamma_{dd}$ .

ligações:

$$\dot{\Gamma}_{cc} = \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cd)W_{cd \rightarrow cc}\{k\} - P(\{k\}; cc)W_{cc \rightarrow cd}\{k\} , \quad (\text{A.1a})$$

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{cd} = & \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cc)W_{cc \rightarrow cd}\{k\} + P(\{k\}; dd)W_{dd \rightarrow cd}\{k\} \\ & - P(\{k\}; cd)W_{cd \rightarrow cc}\{k\} - P(\{k\}; cd)W_{cd \rightarrow dd}\{k\} , \end{aligned} \quad (\text{A.1b})$$

$$\dot{\Gamma}_{dd} = \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cd)W_{cd \rightarrow dd}\{k\} - P(\{k\}; dd)W_{dd \rightarrow cd}\{k\} . \quad (\text{A.1c})$$

Onde  $\{k\}$  é a configuração do agrupamento,  $P(\{k\}; \alpha\beta)$  é a probabilidade de que o sistema seja encontrado na configuração  $\{k\}$ , dado que exista pelo menos uma conexão do tipo  $\alpha\beta$  e o somatório ocorre sobre cada configuração possível que permita tais transições. A soma ocorre sobre cada estado possível do agrupamento, apesar de que em certos estados a taxa  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$  poderá ser zero. Usamos as restrições do sistema para reduzir tais equações a somente duas EDO's. Especificamente, temos que  $\Gamma_{cc} + \Gamma_{cd} + \Gamma_{dd} = 1$ ,  $\rho_c = \Gamma_{cc} + \Gamma_{cd}/2$  e  $\rho_c + \rho_d = 1$ . Cada taxa  $W$  é calculada ao se contar todas as transições possíveis do sistema, ponderando-as pela probabilidade de transição

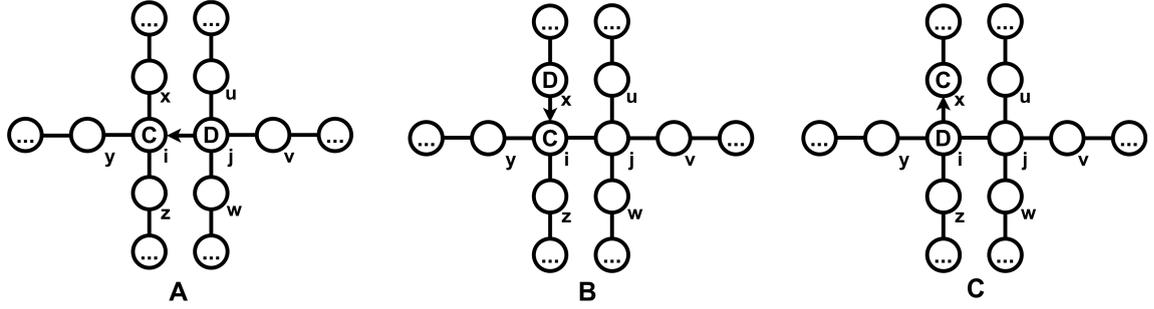


FIGURA A.2: Exemplos dos três processos básicos pelo qual o agrupamento pode mudar seus links de  $\Gamma_{cd}$  para  $\Gamma_{dd}$ . A imagem é somente um exemplo, usando o processo  $W_{cd \rightarrow dd}$ . Cada uma das outras taxas  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$  terá tres processos similares, usando  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  para os devidos valores de  $C$  e  $D$ .

$p(u_{ij})$ . Frisamos que as mudanças de estado entre as ligações são contadas em todo o agrupamento, e não somente nas ligações dos sítios focais  $i$  e  $j$ . De maneira geral, cada termo da EDO é composta por 3 partes diferentes:

$$P(\{k\}; \alpha\beta)W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta} . \quad (\text{A.2})$$

Esses termos representam os únicos processos possíveis que podem mudar efetivamente as ligações do agrupamento através de uma interação:  $A$ ) um dos sítios focais copia a estratégia do outro sítio focal,  $B$ ) um dos sítios focais copia a estratégia de um dos vizinhos de segunda ordem e  $C$ ) um dos vizinhos de segunda ordem copia a estratégia de um dos sítios focais. Essa divisão de processos pode ser vista na figura A.2. Cada um dos três processos tem uma forma geral que depende somente dos dois sítios que estão interagindo, enquanto o restante da rede poderá variar (i.e.  $\alpha, \beta$  sendo fixados como  $C$  ou  $D$ , dependendo da respectiva taxa  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$ )

$$A_{(i=\alpha, j=\beta)} = \sum_{x,y,z} \sum_{v,w,u} \eta_{\beta} \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{ij}) , \quad (\text{A.3a})$$

$$B_{(i=\alpha, x=\beta)} = 3 \sum_{y,z} \sum_{v,w,u} \sum_j \eta_{\beta} \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{ix}) , \quad (\text{A.3b})$$

$$C_{(i=\beta, x=\alpha)} = 3 \sum_{y,z} \sum_{v,w,u} \sum_j \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{xi}) . \quad (\text{A.3c})$$

Note que multiplicamos por 3 os termos  $B$  e  $C$  para ponderar o número de repetições equivalentes da mesma configuração que podem ocorrer no agrupamento. Aqui  $\eta_{\beta}$  é o número de vizinhos do sítio que estejam no mesmo estado que este (i.e. o número de ligações que efetivamente irá mudar caso o sítio mude de configuração). O valor de  $\eta_{\beta}$  é sempre 1 para o processo  $C$ , já que ele sempre muda somente uma ligação

do agrupamento. A quantidade dentro dos colchetes nos da a probabilidade de que o agrupamento inteiro esteja na configuração  $\{k\} = (x, y, z, v, w, u, i, j)$ . Por fim,  $p(\Delta u_{ab})$  é escolhida de acordo com a regra de atualização de estratégia específica a ser usada no modelo. Essa nos da a probabilidade (dado que o agrupamento esteja em determinada configuração) de que o determinado sítio,  $a$ , copie a estratégia do sítio  $b$ , de acordo com sua diferença de payoff  $\Delta u_{ab}$ . O payoff de cada sítio focal é calculado como  $u_i = G(i, x) + G(i, y) + G(i, z) + G(i, j)$ . Já o payoff dos vizinhos de segunda ordem é dado pela aproximação de campo médio em três de suas ligações, assim:

$$\bar{u}_c = S + \rho_d^3(3S) + 3\rho_d^2\rho_c(2S + R) + 3\rho_d\rho_c^2(S + 2R) + \rho_c^3(3R) , \quad (\text{A.4a})$$

$$\bar{u}_d = T + \rho_d^3(3\rho) + 3\rho_d^2\rho_c(2\rho + T) + 3\rho_d\rho_c^2(\rho + 2T) + \rho_c^3(3T) . \quad (\text{A.4b})$$

Sendo  $\bar{u}_c$  o payoff médio do vizinho de segunda ordem caso ele seja cooperador e o sítio focal um desertor ( $\bar{u}_d$  se refere a possibilidade oposta).

Analicamente, a contagem de cada possibilidade de mudança de estado de cada sítio do agrupamento nos dará  $2^8$  termos individuais a serem somados na EDO. Apesar disso, as formas fechadas que determinados para as taxas ao usar os termos  $A$ ,  $B$  e  $C$  nos permitem escrever tais termos em forma de somatórios. Isso torna simples resolver tal EDO numericamente para todos os termos de  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$ .

Especificamente, para o caso de jogos mistos, temos duas matrizes de payoff ( $G_1$  e  $G_2$ ) que podem ser jogadas aleatoriamente em cada interação. Nesse caso, recontamos todos os estados possíveis do agrupamento considerando todas as configurações  $\{g\}$  que as ligações podem assumir com os determinados jogos. Como os jogos influenciarão somente o payoff dos sítios, e não sua estrutura espacial, isso equivale a mudar a função  $p(u_{\alpha\beta})$  para uma soma ponderada sobre os possíveis payoffs dos sítios em questão,  $\sum_{\{g\}} f_g(u_{\alpha\beta})$ . A soma ocorre em cada vizinho de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Cada sítio possui 4 ligações que poderão variar entre uma matriz ou a outra, o que leva a  $2^6$  possibilidades diferentes de configurações para todo o agrupamento. Porém, a vantagem da forma fechada que encontramos para as taxas é que essa é covariante em  $\Gamma$ , de modo que as considerações anteriores para o caso de um jogo simples não são violadas. Desse modo usamos a média de  $\{g\}$  sobre a sua distribuição de probabilidade  $\Theta(g)$ :

$$W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}(\{k\}; f) \Rightarrow \sum_{\{g\}} \Theta(g) W'_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}(\{k\}; f_g) . \quad (\text{A.5})$$

---

Ao realizarmos tal alteração, obtemos a EDO necessária para descrever os jogos mistos em uma aproximação de pares de primeiros vizinhos, que poderá ser resolvida através do método de Runge-Kutta.

# Apêndice B

## Algoritmo de Krapivsky-Redner

Para criar as redes complexas do tipo livre de escala e aleatórias, usamos o algoritmo de Krapivsky-Redner [142], um tipo de algoritmo de crescimento de rede com redirecionamento (*GNR* no original). Podemos resumir o algoritmo da maneira seguinte:

1. Cria-se um agrupamento inicial de  $m_0$  sítios. Cada um possui duas ligações de ancestralidade, uma com seu próximo vizinho e uma com o anterior;
2. Um novo sítio  $i$  é criado e ele se liga aleatoriamente com um sítio  $j$  do agrupamento com probabilidade homogênea;
3. Com uma probabilidade fixa  $r$ , a ligação entre o novo sítio  $i$  e o sítio  $j$  é redirecionada para o sítio ancestral do sítio  $j$ ;
4. Essa ligação define quem será o ancestral de  $i$ , que agora faz parte do agrupamento;
5. Repete-se o processo de criação de ligação, e sorteio de redirecionamento, para que o sítio  $i$  tenha duas ligações de ancestralidade;
6. Repete-se a partir do passo 2, até que  $N$  sítios tenham sido criados e conectados ao agrupamento.

Este algoritmo nos permitiu gerar redes suficientemente grandes sem o problema do longo tempo computacional, necessário ao algoritmo usual de Barabasi-Albert (*Preferential Attachment* no original) [176]. Diferentemente do algoritmo de Barabasi-Albert, não precisamos calcular probabilidades de ligação ( $P(n_k)$ ), a cada passo para cada vértice do grafo, isso torna a criação da rede complexa muito mais rápida. No

lugar disso, a rede cresce de uma maneira que, naturalmente, a estrutura complexa irá surgir. Isso ocorre devido ao passo extra de redirecionamento de ligações. Apesar da ligação de cada sítio ser redirecionada com uma probabilidade constante  $r$  (que é um parâmetro do algoritmo), o fato de que o redirecionamento ocorre para o sítio ancestral acaba criando um efeito em cascata. Ao repetir-se tal processo, naturalmente uma estrutura do tipo rede complexa emerge. Ajustando o parâmetro  $r$  do algoritmo, podemos criar redes totalmente aleatórias ( $r = 0$ ), do tipo livre de escala como no algoritmo de Barabasi-Albert ( $r = 0.5$ ) e super-nodo, *superhub* no original, ( $r = 1$ ).

# **Apêndice C**

## **Artigos publicados**

## Cooperation in two-dimensional mixed-games

This content has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text.

2015 J. Phys. A: Math. Theor. 48 445002

(<http://iopscience.iop.org/1751-8121/48/44/445002>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 200.130.19.155

This content was downloaded on 10/06/2016 at 19:17

Please note that [terms and conditions apply](#).

# Cooperation in two-dimensional mixed-games

Marco A Amaral<sup>1</sup>, Lucas Wardil<sup>2</sup> and Jafferson K L da Silva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP 30161-970, Belo Horizonte—MG, Brazil

<sup>2</sup> Department of Mathematics, University of British Columbia, 1984 Mathematical Road, Vancouver B.C., V6T1Z2, Canada

E-mail: [marcoantonio.amaral@gmail.com](mailto:marcoantonio.amaral@gmail.com)

Received 6 July 2015, revised 10 September 2015

Accepted for publication 16 September 2015

Published 15 October 2015



CrossMark

## Abstract

Evolutionary game theory is a common framework to study the evolution of cooperation, where it is usually assumed that the same game is played in all interactions. Here, we investigate a model where the game that is played by two individuals is uniformly drawn from a sample of two different games. Using the master equation approach we show that the random mixture of two games is equivalent to play the average game when (i) the strategies are statistically independent of the game distribution and (ii) the transition rates are linear functions of the payoffs. We also use Monte-Carlo simulations in a two-dimensional lattice and mean-field techniques to investigate the scenario when the two above conditions do not hold. We find that even outside of such conditions, several quantities characterizing the mixed-games are still the same as the ones obtained in the average game when the two games are not very different.

Keywords: game theory, mixed games, cooperation, prisoners dilemma

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

## 1. Introduction

How is it possible for cooperation to exist in a system dominated by competitive and self-interested individuals? This is one of the big open questions in science [1]. It becomes more interesting when we realize that cooperation is not exclusively a human phenomena, it exists between different animal species [2], within very organized insect societies and amongst kin [3]. If we generalize cooperation, using the framework of game theory, even between cells

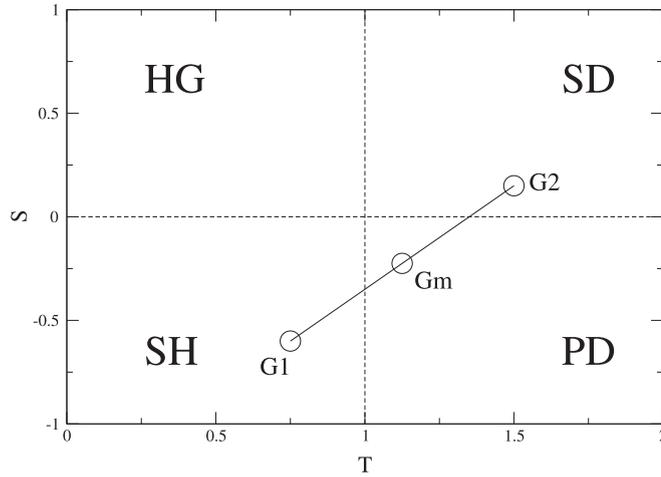
and RNA the concept can be used to model the emergence of organization in more complex and efficient forms [4, 5].

In competitive systems it would be reasonable to think that selfish behaviour would be the best choice of strategy, so how can cooperation spontaneously emerge? Evolutionary game theory is often used to analyze such questions, specifically using the so called dilemma games [6, 7]. In such games players can cooperate to obtain a payoff, but there's a temptation to betray the cooperator and get a better payoff.

One of the simplest cases in game theory is the two-player game with only two possible strategies. Each player can choose either to cooperate ( $C$ ) or to defect ( $D$ ) in each round. Although one player can interact with many other players, each round is played only by two individuals. The payoff matrix,  $G = (T, R, P, S)$ , represents how much the players gain from a single game and is normally stated as: if both cooperated they receive  $R$  (Reward), if both defected they receive  $P$  (Punishment) and if they chose different strategies the defector receives  $T$  (Temptation) and the cooperator receives  $S$  (Sucker). These four parameters can describe different games [6, 8–10], being the Prisoners Dilemma (PD) the most canonical case, where  $T > R > P > S$ . This means that the best payoff is to defect when someone tries to cooperate with you. But if the whole population starts to defect the total payoff is lower than of a cooperating population. The Snow-Drift game (SD) happens when  $T > R > S > P$ . Observe that in this case it is worst when both players defect. This is a common game in animal contests where the damage of escalating conflicts is usually higher than being exploited [11]. The Stag-Hunt (SH) happens when  $R > T > P > S$ . Now it is better to imitate your opponent. This game can describe the behaviour of cooperative associations, where one can exploit the other, but the best results are achieved by cooperation [12]. The last case is the Harmony-Game (HG), characterized by  $R > T$  and  $S > P$ . In this case it is always better to cooperate.

The evolution of cooperation in well-mixed populations can be described by mean-field equations, like the replicator equation [6]. It predicts that cooperation cannot survive, a conclusion that does not seem to happen in nature [6, 8, 13]. Many mechanisms have been proposed to explain the survival of cooperation: direct and indirect reciprocity [13–16], volunteering [17], coevolution [9], spatial selection [18], multi-level and kin selection [3]. The essential feature of these mechanisms is that cooperators interact more often between themselves than with defectors. For example, spatial reciprocity happens when individuals are located in the vertices of a graph and can interact only with their neighbours. Cooperators spontaneously form clusters of cooperation that survive in a sea of defectors for a wide range of parameters [6]. Most models assume that only one game is repeatedly played in all interactions. However, there is nothing *a priori* precluding the coexistence of different games in a population. For example, players can have different perceptions of the rewards, giving rise to a multi-game scenario. In this case, individuals play asymmetric games, where the payoff matrix of one player is different from the payoff matrix of his co-player [19, 20]. Here, we study a model where different payoff matrices are randomly assigned to each interaction—the *mixed-game model* [10]. Different from the multi-game model, here the game is symmetric, that is, in each round both players use the same payoff matrix.

The mixed-game model is presented in the next section. In section 3 we develop the master equation approach for mixed-games. We show that these equations are identical to the ones where the evolution is driven by a single game with the payoff given by the average of the two games (average game), when particular conditions hold. In section 4 we use Monte-Carlo simulations to investigate the evolution of the cooperators for mixed-games in a two-dimensional lattice. We also analyze how robust is the result of one cooperative game if there is a chance of a more selfish game be played and compare the mixed-game model to the



**Figure 1.** Parameter space in  $T$  and  $S$  for the possible payoff matrices. Using  $R = 1$  and  $P = 0$  we have the four games (HG, SD, PD, SH) well defined in each quadrant. For every two single games (SH =  $G_1$ , and SD =  $G_2$ , for example) there will be a mean game that is in the medium point between the two games. This mean game can be a totally different game (PD), as is shown in the example above.

average game. The relation of the master equation with the replicator equation is discussed in appendix A. Appendix B contains the development of the pair-approximation model used to study the mixed-games. Finally, we present our conclusions in the last section.

## 2. The model

We simulate the evolution of cooperation in populations structured on two-dimensional square lattices with first neighbour interactions and periodic boundary conditions. Initially, each individual is assigned to one strategy ( $C$  or  $D$ ) with equal probability. The strategies determine the payoff obtained on pairwise interactions. We choose to parametrize  $R = 1$ ,  $P = 0$ ,  $T \in [0, 2]$  and  $S \in [-1, 1]$  to obtain an useful parameter space that contains all four games (HG, SH, PD and SD), as can be seeing in figure 1. By doing so we can analyze how the fraction of cooperators in the stationary state,  $\rho(t \rightarrow \infty)$ , is affected by such parameters and if there is any phase transition.

The evolutionary process of mixed-games is composed of two parts: the game phase and the imitation phase. In the *game phase* each individual plays one round of a game with each one of his four neighbours and the payoff obtained in each interaction is added to the cumulative payoff of each player. The games to be played are randomly assigned to each interaction:  $G_1 = (T_1, S_1)$  with probability  $w$  or  $G_2 = (T_2, S_2)$  with probability  $1 - w$ . In the *imitation phase*, individuals may update their strategy by imitating the strategy adopted by more successful neighbours: the focal individual  $i$  randomly chooses one neighbour  $j$  to copy his strategy with probability  $p(\Delta u_{ij})$ , depending on the payoff difference  $\Delta u_{ij} = u_j - u_i$ , where  $u_i$  is the cumulative payoff of player  $i$ . For the strategy update probabilities, we use the Fermi–Dirac and the proportional imitation rule [6, 21]:

$$p(\Delta u_{ij}) = 1 / (1 + e^{-(u_j - u_i)/K}) \quad (1)$$

$$p(\Delta u_{ij}) = \max[(u_j - u_i), 0]/b, \quad (2)$$

respectively. The parameter  $b$  is a normalizing factor and  $K$  is the parameter controlling the strength of selection pressure on strategies [8].

The game and the imitation phases can be implemented synchronously, partially asynchronously, or totally asynchronously [8, 22]. In the *synchronous protocol*, in each Monte Carlo step (MCS) the cumulative payoffs are set to zero, games are randomly and independently assigned to each one of the interactions, and the cumulative payoff of every player is calculated. Then all players simultaneously proceed to the imitation phase. In the *totally asynchronous protocol* the cumulative payoffs are set to zero, a randomly chosen focal player and his four neighbours play randomly and independently assigned games with their respective neighbours, the cumulative payoff of these five players is calculated, and, finally only the focal player proceeds to the imitation phase. This process is repeated until all nodes have equal chance to update their strategies at least once—this defines one MCS. In the *partially asynchronous protocol*, the games that each player will play with its neighbour are assigned only once at the beginning of each MCS—as in the synchronous protocol—and then strategies are updated asynchronously. In this work, all protocols yields the same qualitative results.

We measure the cooperation level as the average number of cooperators  $\rho$  in the stationary state. We compare the evolution of cooperation in the mixed-game case to the case where only the average game  $G_m = \langle G \rangle = wG_1 + (1 - w)G_2$  is played and to the cases where only  $G_1$  or  $G_2$  is played.

### 3. Master equation approach

Perhaps the first interesting question is about the equivalence between the mixed-games and the average game. In this section we investigate such equivalence for the asynchronous update. Obviously we are unable to solve the master equation exactly. However, we are able to establish conditions that allow us to show this equivalence. These conditions are : (i) the strategies are statistically independent of the game distribution and (ii) the transition rates are linear functions of the payoffs. The main result of this section can be used as a guideline for more general problems.

At each time,  $t$ , a system is characterized by the strategy configuration  $\{s\} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ , where  $s_i$  is the strategy of player  $i$ , and by the game assignment configuration  $\{g\} = \{g_{12}, g_{13}, \dots\}$ . The variable  $g_{ij}$  is uniformly distributed over the discrete set of values  $\{1, 2\}$ , determining which one of the two games,  $G_1$  or  $G_2$ , are to be played in the interaction between player  $i$  and its next neighbour  $j$ . Note also that each link  $i, j$  is statistically independent of the other links. Let  $P(\{s\}, \{g\}, t)$  be the probability to find the mixed-game system in the configuration  $\{s\}$  and  $\{g\}$  at time  $t$ . The time evolution of this system is given by

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(\{s\}, \{g\}, t) = & \sum_{\{s'\}, \{g'\}} P(\{s'\}, \{g'\}, t)W(\{s'\}, \{g'\} \rightarrow \{s\}, \{g\}) \\ & - P(\{s\}, \{g\}, t)W(\{s\}, \{g\} \rightarrow \{s'\}, \{g'\}), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $W(\{s'\}, \{g'\} \rightarrow \{s\}, \{g\})$  is the transition rate from the state  $(\{s'\}, \{g'\})$  to  $(\{s\}, \{g\})$ . If the initial game assignment probability distribution is the stationary distribution  $\Theta = \prod_{ij} \theta(g_{ij})$ ,  $\Theta$  is independent of time. Here we have that  $\theta(g) = w\delta_{g,1} + (1 - w)\delta_{g,2}$ .

Supposing the condition (i) that the strategy variables  $\{s\}$  are statistically independent of the game variables  $\{g\}$ , we can write that  $P(\{s\}, \{g\}, t) = P(\{s\}, t)P(\{g\})$ . To simplify the notation, from now on we write  $s$  and  $g$  instead of  $\{s\}$  and  $\{g\}$ . The master equation can now be written as

$$P(g) \frac{d}{dt} P(s, t) = \sum_{s', g'} P(s', t) P(g') W(s', g' \rightarrow s, g) - P(s, t) P(g) W(s, g \rightarrow s', g'). \tag{4}$$

The mean value of a function  $f$  averaged over all game configurations is  $\langle f \rangle_g = \sum_g f P(g)$ . Using this, we can sum in  $g$  in both sides of equation (4) to obtain that

$$\frac{d}{dt} P(s, t) = \sum_{s', g} P(s', t) \left[ \sum_{g'} P(g') W(s', g' \rightarrow s, g) \right] - \sum_{s', g'} P(s, t) \left[ \sum_g P(g) W(s, g \rightarrow s', g') \right].$$

Since the quantities inside square brackets are the averaged values of  $W$  over  $g(g')$  we have that

$$\frac{d}{dt} P(s, t) = \sum_{s'} P(s', t) \left\langle \sum_g W(s', g' \rightarrow s, g) \right\rangle_{g'} - \sum_{s'} P(s, t) \left\langle \sum_{g'} W(s, g \rightarrow s', g') \right\rangle_g. \tag{5}$$

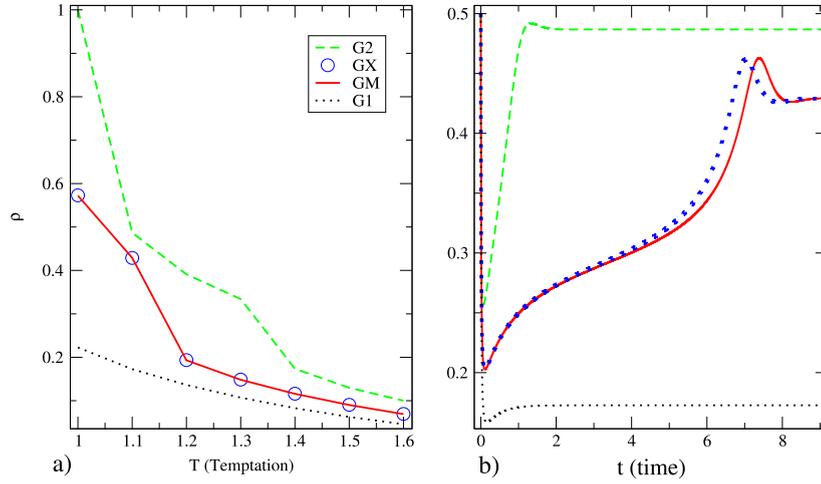
The transition rates  $W$  will be obtained from each microscopical rule (proportional imitation, Fermi–Dirac, copy the best, etc), and will depend on the payoff differences ( $\Delta u_{ij}$ ) of neighbouring sites, topology of the lattice and the copy mechanism. Since the dynamical process in a time step, in our model, always involves only one site, for example site  $i$ , copying the strategy of a neighbour, say  $j$ , all the transition rates in which the new  $g'$  has a link that is not connected to site  $i$  are null. Moreover all these rules are explicitly independent of the future game to be played, making the summation inside the averages lead to a finite constant  $\kappa$  that will only depend on the geometry of the lattice and on some aspects of the microscopic model. It follows that

$$\left\langle \sum_g W(s', g' \rightarrow s, g) \right\rangle_{g'} = \kappa \langle W(g', s' \rightarrow s) \rangle_{g'}. \tag{6}$$

Notice that for simplicity we hide  $\Delta u_{ij}$  from the transition rates  $W(s', g' \rightarrow s, g; \Delta u_{ij})$  variables, although it depends on it. In regular lattices  $\kappa$  is the same constant for every site and can be absorbed in the time variable and we get

$$\frac{d}{dt} P(s, t) = \sum_{s'} P(s', t) \langle W(g, s' \rightarrow s) \rangle_g - \sum_{s'} P(s, t) \langle W(g, s \rightarrow s') \rangle_g. \tag{7}$$

If we use condition (ii), that the update rules are linear on the payoff, the average over the transition rules will become simply the the transition rates of the average payoff, namely



**Figure 2.** Integration of the mean-field, pair-approximation, ODE by a Runge–Kutta algorithm. (a) Phase transition of the stationary state value of cooperators in different single games ( $G_1$ ,  $G_2$  and  $G_m$ ) and the mixed-game ( $G_x$ ).  $G_m(S_m = 0)$  is the mean game of  $G_1(S_1 = -0.1)$  and  $G_2(S_2 = 0.1)$ ,  $G_X$  is the model where both  $G_1$  and  $G_2$  are played with equal probability. (b) Time evolution of cooperators for each game, here  $T = 1.1$ . Although the mixed-game behaves differently for small times, the fraction of cooperators in the stationary state is similar.

$$\langle W(s', g' \rightarrow s, g; \Delta u_{ij}) \rangle_g = W(s', g' \rightarrow s, g; \langle \Delta u_{ij} \rangle_g). \quad (8)$$

Using this relation in equation (7), we obtain that

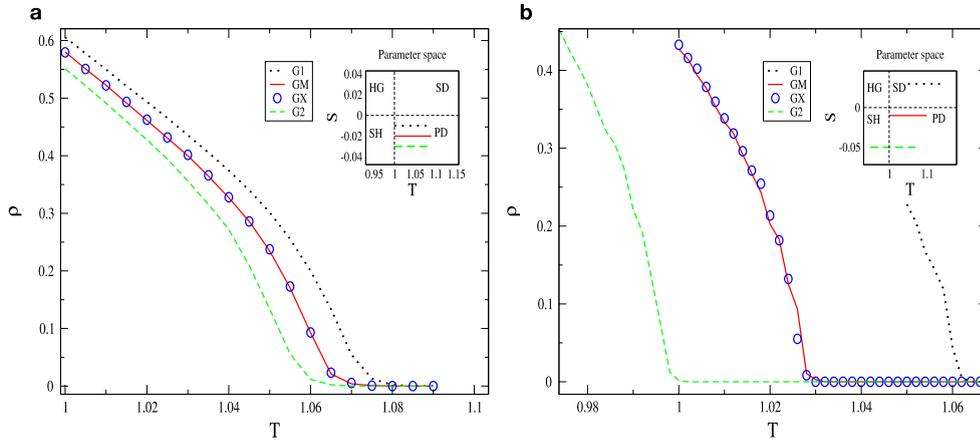
$$\frac{d}{dt}P(s, t) = \sum_{s'} P(s', t) W(s' \rightarrow s; \langle G \rangle) - \sum_{s'} P(s, t) W(s \rightarrow s'; \langle G \rangle), \quad (9)$$

where  $\langle G \rangle$  stands for the average payoff matrix. This equation implies that the time evolution of the configuration probability in a mixed-game with asynchronous update is equal to the time evolution of a single game [6] with the transition rates evaluated by using the average payoff matrix. Note that this equation also describes the classical evolution of a single game if we use the appropriate transition rates.

It is worth mentioning that this result also holds for more general game assignment distributions. Supposing that  $\theta_g = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{g,k}$ , where  $w_k$  is the probability of play the game  $G_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), we can easily see that the argument remains the same. The only difference is that the average payoff matrix is now given by  $\langle G \rangle = \sum_{k=1}^n w_k G_k$ .

We emphasize that equation (9) was obtained by assuming that the variables  $\{s\}$  and  $\{g\}$  are not correlated, condition (i). Also the equivalence between the average and the mixed-games only holds for the master equation as long as the transitions rates are linear in the payoff, condition (ii).

In appendix A we expand the replicator equation model to include mixed-games. The numerical solution of the master equation can be refined into more accurate models that consider spacial interactions. Appendix B shows the classic pair approximation [21, 23] and how we expanded it to include mixed-games in a square lattice. Our numerical solution shows that the mixed-game is equivalent to the mean game. But in the pair approximation this only



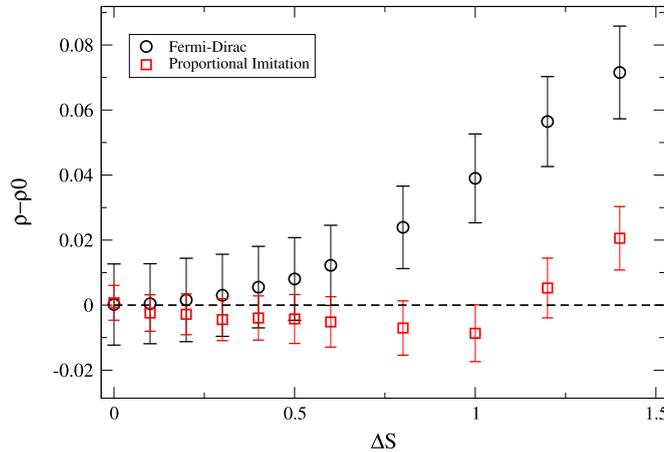
**Figure 3.** (a) Phase transition of cooperators in different PD games for an asynchronous model,  $L = 100$ .  $G_m(S = -0.02)$  is the mean game of  $G_1(S = -0.01)$  and  $G_2(S = -0.03)$ ,  $G_X$  is the model where both  $G_1$  and  $G_2$  are played. (b) Phase transition in different games for a synchronous model,  $L = 200$ . Here  $G_1(T > 1.05, S = 0.02)$  is a SD game,  $G_2(T > 0.95, S = -0.05)$  a SH and the mean game  $G_m(T > 1, S = -0.01)$  is a PD. The mix of those two different games still behaves as a PD.

holds as long as the parameters ( $T$  and  $S$ ) of the mixed-games are close enough from the mean game. The obtained results are shown in figure 2.

#### 4. Monte Carlo simulations

Let us now study the mixed-game model with populations structured in a two-dimensional square lattice. Since the variables  $g_{ij}$  defining the game between sites  $i$  and  $j$  obeys the stationary probability distribution  $\Theta = \prod_{ij} \{w\delta_{g_{ij},1} + (1 - w)\delta_{g_{ij},2}\}$ , they are independent of the strategy's variables. On the other hand, the probability of  $s_i$  and  $s_j$  have particular values,  $(C, C)$  for example, depends if the game between them is  $G_1$  or  $G_2$ . Therefore condition (i) is not obeyed. Moreover, the transitions rates are not linear when we use the payoffs defined by equations (1) and (2). This implies that condition (ii) is also not obeyed. To investigate the effect of breaking conditions (i) and (ii), we performed Monte-Carlo simulations on the square lattice. Simulations were performed on lattices with sizes ( $L$ ) ranging from  $100 \times 100$  to  $500 \times 500$ . All quantities were averaged over 20 initial conditions and left to thermalize for at least 3000 MCS for each run. It turns out that if the difference between  $G_1$  and  $G_2$  is small, the evolution of cooperation in a mixed-game is equivalent to the average game  $G_m$ , as shown in figure 3. Interestingly, figure 3(b) shows that cooperation may thrive in the presence of disadvantageous payoff matrix values as long as the average game is a favourable one. Notice that the mixed-game behaves as the mean game even when the two games are of different kinds, as shown in figure 3(b), where  $G_1$  is a SD and  $G_2$  is SH game.

Figure 4 shows the difference between the fraction of cooperators for the mixture of games  $G_1 = (1.04, S)$  and  $G_2 = (1.04, -S)$  and the fraction of cooperation for the corresponding average game  $G_m$ . If the difference between the games  $G_1$  and  $G_2$  grows, then the equivalence no longer holds. Hence, our simulations suggest that, even if the update rules are nonlinear, the equivalence between average and mixed-game may hold as long as the



**Figure 4.** Difference in the cooperation from the mean game and mixed-games versus the difference from the parameter  $S_1$  and  $S_2$ . The dashed line corresponds to the mean game value of cooperation, squares point the data from the proportional imitation model and circles the Fermi–Dirac. Until  $\Delta = 1$  the proportional imitation model just fluctuates around the mean game value, while the Fermi–Dirac progressively rises. The cooperators differences are of  $10^{-2}$  order.

difference between the games  $G_1$  and  $G_2$  is small. Nevertheless, the fraction of cooperation differs at most 0.1. The small deviations contrast with the results obtained in [19, 20], where the authors modelled multi-games as a result of different perceptions of the interactions. In their paper the games are asymmetric, meaning that the interface between cooperators and defectors can be beneficial for cooperators, strengthening even more the expansion of cooperation clusters. In our model, the symmetric games are randomly assigned every time step and the two players always have the same perception of the game. Hence, the cooperators on the interface can thrive only if the average game is cooperative.

It is well known that network topology may affect the evolution of strategies [6, 7, 24–26]. Hence, we also studied the effect of scale-free complex networks on the evolution of mixed games. We used the Redner–Krapivsky algorithm [27] to create networks of  $N = 10^4$  individuals and ran the Monte-Carlo simulations for 100 different network configurations. Like in the square lattice, we observed that both the mixed and the mean game are equivalent in terms of the final fraction of cooperation.

## 5. Conclusion

We investigated under which circumstances the evolution of cooperation in the mixed-game model is equivalent to play a single game defined as the average between the two games in the mixed-game model. Using a master equation approach we showed that the time evolution of a mixed-game with asynchronous update is equivalent to the average game if the transition rates are linear in the payoff and if there are no correlations between the game played and the state of the player. Using both synchronous and asynchronous Monte-Carlo simulations in the square lattice, we investigated the effects of (i) nonlinear update rules and of (ii) correlations between the strategy and game assignment variables. We found that, as long as the differences between the two games are small, the mixed-game and the average game are equivalent. We

showed also that assigning different games to interactions is not the same as to say that individuals have different asymmetric perceptions of the interaction.

## Acknowledgments

The authors thank to CNPq and FAPEMIG, Brazilian agencies.

## Appendix A

We now derive the replicator equation for mixed-games. Suppose an infinite population of strategists where everybody interacts with everybody. Associating the mean payoff of a strategy with its capability of ‘reproduction’ we can obtain mean field equations for the dynamics of the strategy population. The most simple cases comes without considering spatial effects and using just a single game being played. The replicator equation for this model can be written [6, 28] in terms of games as

$$\dot{x}_i = x_i [f_i(\vec{x}) - \phi(\vec{x})]. \quad (\text{A1})$$

Here  $x_i$  is the fraction of players using strategy  $i$  (in our case  $C$  or  $D$ ),  $f_i(\vec{x})$  can be regarded as the mean payoff of strategy  $i$ , and  $\phi(\vec{x})$  is the population average payoff. This mean field dynamics can be mapped into a master equation of a Markovian chain [6] that represents each player changing its state using some transition rule. It follows that

$$\dot{x}_i = \sum_j [x_j \omega_{ji}(\vec{x}) - x_i \omega_{ij}(\vec{x})]. \quad (\text{A2})$$

Here  $\omega_{ij}(\vec{x})$  is the individual transition rate of a player from state  $i$  to  $j$ , and can be obtained from the microscopic rule that states how one site copies the strategy of another. Many different microscopical rules have been proposed, such as imitate the best, best response, Fermi–Dirac probability and proportional imitation rule. As can be expected, each one of this rules changes the results of the replicator dynamics, leading to different final result. The most common cases are the Maynard–Smith and Taylor–Johnsen equations [29, 30] which can be obtained from the proportional imitation and Moran process microscopical rules [6].

Now we generalize this result to mixed-games. Being able to play two different games at each interaction, the payoff matrix  $G$ , will be now a statistical quantity, with mean value  $G_m$ . This leads to a change in the transition rates of the model, where the microscopic rule now depends on a probability distribution ( $\Theta$ ) of games being played. Although we are changing the game being played, the replicator equation still maintain their dependence with the payoff (i.e.  $f_i(\vec{x})$ ). If we average the replicator equation in the game assignment variables, we obtain that

$$\langle \dot{x}_i \rangle_g = \left\langle \sum_j [x_j \omega_{ji}(\vec{x}) - x_i \omega_{ij}(\vec{x})] \right\rangle_g = \sum_j [x_j \langle \omega_{ji}(\vec{x}) \rangle_g - x_i \langle \omega_{ij}(\vec{x}) \rangle_g]. \quad (\text{A3})$$

If we use any transition rule that is linear in  $G$ , this will lead  $\langle \omega_{ij}(\vec{x}) \rangle = \omega_{ij}(\vec{x}; \langle G \rangle)$  that is equivalent to playing the mean game  $G_m = wG_1 + (1 - w)G_2$ . This description agrees with the one obtained from equation (9). Note that these results are also valid if we use the more general game distribution  $\theta_g = \sum_{k=1}^n w_k \delta_{g,k}$ .

## Appendix B.

The simplest way to describe a repeated game is by using a mean-field approximation. Here it is supposed that all individuals play with all other players in an infinite population. By doing this one can expect to obtain the mean payoff of a cooperator ( $u_c$ ) or defector ( $u_d$ ) using the payoff matrix and the abundance of other defectors or cooperators. In this simple model we have:

$$u_c = R\rho_c + S\rho_d, \quad (\text{B1})$$

$$u_d = T\rho_c + P\rho_d, \quad (\text{B2})$$

where  $\rho_c$  and  $\rho_d$  are the fraction of cooperators and defectors of the population. Inserting these payoffs in the replicator equation (A1) as the fitness of each strategy, we obtain the time evolution of such strategies as predicted by a mean-field approximation. This framework does not account for spacial effects such as lattices topologies or number of neighbours and results in a scenario where only one specie survives, depending on the parameters. There is no coexistence. Notice that in this model the payoff is a linear function of the parameters, so it is equivalent to play a mean game  $G_m$  and averaging the payoffs of two mixed-games  $G_1$  and  $G_2$ .

The simplest way to take into account the lattice is by using the pair-approximation [6, 21, 23, 31]. Here we no longer suppose that all individuals are connected to everyone else. Instead we use a square lattice with interaction between the first neighbours and analyze a cluster of two focal sites ( $i$  and  $j$ ) and their nearest next neighbours ( $x, y, z$  and  $u, v, w$ ) as it is shown in figure B1. Sites  $i$  and  $j$  have their payoff calculated exactly as they play games with cluster sites, while the neighbouring sites have an exact payoff calculated with  $i$  or  $j$  and the other three games (the second neighbours sites) payoffs are calculated by a mean value using a one site approximation.

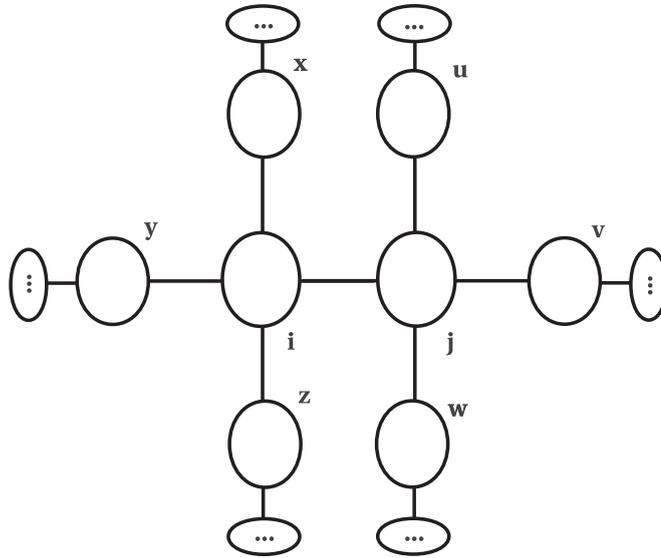
To obtain the dynamics for this system we use the master equation (3). Now, instead of using  $P(\{s\}, \{g\}, t)$  as the main variable, we use the probability that a connection between two sites is in the current state  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  ( $\alpha$  and  $\beta$  can be  $C$  or  $D$  in this case).  $W(\{s\}, \{g\} \rightarrow \{s'\}, \{g'\})$  become the rates that each link changes from one state to another ( $cd \rightarrow cc$  for example). And we further simplify for the single game case ( $\{g\} = \{g'\}$ ). Later we analyze the mixed-game models. This gives us three coupled ODE's that states how the fraction of possible connections in the cluster evolves:

$$\dot{\Gamma}_{cc} = \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cd) W_{cd \rightarrow cc} \{k\} - P(\{k\}; cc) W_{cc \rightarrow cd} \{k\}, \quad (\text{B3})$$

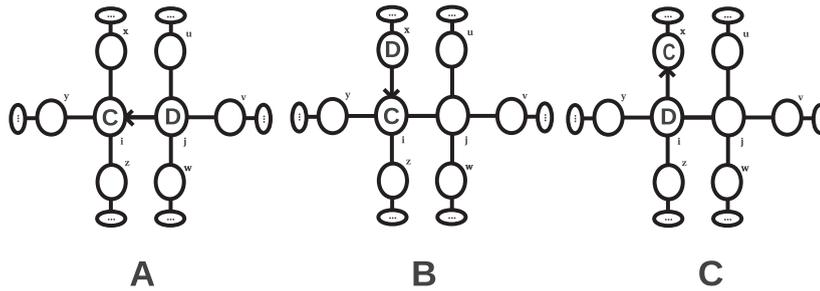
$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{cd} = & \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cc) W_{cc \rightarrow cd} \{k\} + P(\{k\}; dd) W_{dd \rightarrow cd} \{k\} \\ & - P(\{k\}; cd) W_{cd \rightarrow cc} \{k\} - P(\{k\}; cd) W_{cd \rightarrow dd} \{k\}, \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

$$\dot{\Gamma}_{dd} = \sum_{\{k\}} P(\{k\}; cd) W_{cd \rightarrow dd} \{k\} - P(\{k\}; dd) W_{dd \rightarrow cd} \{k\}. \quad (\text{B5})$$

Here  $\{k\}$  is the configuration which describes the sites strategies,  $P(\{k\}; \alpha\beta)$  is the probability that the system is found in configuration  $\{k\}$ , given that exists at least one connection of the type  $\alpha\beta$  and the summation occurs over every possible configuration that allows each one of the given transitions. The summation occurs over every possible cluster state, although in certain states the rate  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$  that a pair can change is zero. We use the system constrains to reduce the problem to the resolution of only two ODE's, namely  $\Gamma_{cc} + \Gamma_{cd} + \Gamma_{dd} = 1$ ,  $\rho_c = \Gamma_{cc} + \Gamma_{cd}/2$  and  $\rho_c + \rho_d = 1$ . Each rate  $W$  is calculated by counting every possible transition of the system from one state to the other and weighting it



**Figure B1.** The cluster structure used in the mean field-calculations. Although all seven main connections can give exact payoff between the sites, the second order neighbours (shown here as ‘...’) payoffs needs to be calculated as a mean value using one site approximation. All sites can be either C or D and each connection can be in the states  $\Gamma_{cc}$ ,  $\Gamma_{cd}$  and  $\Gamma_{dd}$ .



**Figure B2.** Example of the three process that can change any link  $\Gamma_{cd}$  to  $\Gamma_{dd}$  in the cluster. Notice that this figure is just an example using process for the rate  $W_{cd \rightarrow dd}$ . Each of the other rates  $W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta}$  have three similar process, exchanging  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  for the appropriate C or D.

by the transition probability  $p(u_{ij})$ . Notice that as we look for changes in the links, not only  $i$  and  $j$  can change, but any of the seven links composing the cluster. In a broad sense each term in the ODE’s is composed of only three terms:

$$P(\{k\}; \alpha\beta)W_{\alpha\beta \rightarrow \gamma\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}. \tag{B6}$$

These terms represent the only possible processes that can change the links of the cluster in one interaction: (A) the focal site copies the strategy of the other focal site, (B) the focal site copies the strategies of a second order neighbour, (C) the second order neighbour copies the strategy of focal site. This can be seen in figure B2. These processes have a general form that depends on the two sites that will remain fixed in the summation (i.e.  $\alpha$ ,  $\beta$  being fixed C or D

depending on each rate  $W_{\alpha\beta\rightarrow\gamma\beta}$  )

$$A_{(i=\alpha,j=\beta)} = \sum_{x,y,z,v,w,u} \eta_\beta \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{ij}), \quad (\text{B7})$$

$$B_{(i=\alpha,x=\beta)} = 3 \sum_{y,z,v,w,u} \sum_j \eta_\beta \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{ix}), \quad (\text{B8})$$

$$C_{(i=\beta,x=\alpha)} = 3 \sum_{y,z,v,w,u} \sum_j \left[ \frac{\Gamma_{ix}\Gamma_{iy}\Gamma_{iz}}{\Gamma_i^3} \Gamma_{ij} \frac{\Gamma_{ju}\Gamma_{jv}\Gamma_{jw}}{\Gamma_j^3} \right] p(\Delta u_{xi}). \quad (\text{B9})$$

Here we multiplied by three the terms  $B$  and  $C$  to account for the number of equivalent repetitions of the same configuration that can occur due to symmetries.  $\eta_\beta$  is the number of neighbours of the current site in the same state as the site being copied (i.e. the number of links that will change if the current site changes its configuration).  $\eta_\beta$  is always one for the  $C$  process, as it always changes just one link in the cluster. The quantity inside the square brackets gives the probability that the entire cluster will be in a given configuration  $\{k\} = (x, y, z, v, w, u, i, j)$ . Lastly  $p(\Delta u_{ab})$  is given by the chosen microscopic transition rule, and gives the probability (given such configuration of the cluster) that the selected site ( $a$ ) will copy its neighbour's ( $b$ ) strategy, based on their payoff differences  $\Delta u_{ab}$ . The payoff of any focal site is easy to be exactly obtained as  $u_i = G(i, x) + G(i, y) + G(i, z) + G(i, j)$  ( $G$  is the game matrix). For the payoff of any neighbouring site  $x, y$  or  $z$  we need to get the mean payoffs using a one site approximation, namely

$$\bar{u}_c = S + \rho_d^3(3S) + 3\rho_d^2\rho_c(2S + R) + 3\rho_d\rho_c^2(S + 2R) + \rho_c^3(3R), \quad (\text{B10})$$

$$\bar{u}_d = T + \rho_d^3(3\rho) + 3\rho_d^2\rho_c(2\rho + T) + 3\rho_d\rho_c^2(\rho + 2T) + \rho_c^3(3T). \quad (\text{B11})$$

Here  $\bar{u}_c$  is the mean payoff when the neighbour site is a cooperator and the focal site is a defector, and  $\bar{u}_d$  is the payoff of the opposite situation.

The counting of every possibility of a site changing its strategy is complicated and give rise to about  $2^8$  separated terms. Nonetheless, after determining a closed form for  $A, B$  and  $C$  for every rate  $W$ , it is a simple computational task to obtain all terms of  $W_{\alpha\beta\rightarrow\gamma\beta}$ . By doing so we obtain two coupled ODE's that can be numerically solved. We emphasize that this kind of mean-field results were already obtained in the literature [6, 21, 23, 31].

Returning to the mixed-game problem, we used two possible games ( $G_1$  and  $G_2$ ) being played at each interaction. To insert this in the mean-field model with cluster approximation we have now to reconsider all the possible site payoffs. Instead of having just one payoff matrix being used for each interaction, we now have several different matrix weighted by their probability. This means that we have to sum over all the possible payoffs obtained with each site's neighbour in each game. It is equivalently, in our rate terms  $W$ , to change the payoff function  $p(u_{\alpha\beta})$  into a sum over all possible games  $\left(\sum_{\{g\}} f_g(u_{\alpha\beta})\right)$  between the sites to be considered and its neighbours. It is important to notice however that the summation occurs over every neighbour of  $\alpha$  and  $\beta$  as the payoff of each site is determined by the sum of games played with every neighbour.

As each of the two sites being considered for each rate  $W$  have four neighbours, this give rise to  $2^6$  possibilities of different game configurations on the cluster. Notice however that the ODE's remains covariant as  $\Gamma$  and the symmetry constants do not explicitly depend on the

game being played. We can average over  $\{g\}$ , a vector that gives the configuration of each game being played, using its probability distribution  $\Theta(g)$ . By doing so we obtain the new rates

$$W_{\alpha\beta\rightarrow\gamma\beta}(\{k\}; f) \Rightarrow \sum_{\{g\}} \Theta(g) W'_{\alpha\beta\rightarrow\gamma\beta}(\{k\}; f_g). \quad (\text{B12})$$

Making this change in the ODE and using a fourth order Runge–Kutta integration, we obtained the numerical results displayed in figure 2. Notice that as the payoff of each site depends on four other neighbours we need to consider every configuration of games being played by the sites in each term of  $W$ . This is why we cannot just sum up linearly the two different game matrices to obtain a mean payoff.

## References

- [1] Pennisi E 2005 What don't we know? *Science* **309** 93
- [2] Doebeli M and Knowlton N 1998 The evolution of interspecific mutualisms *Proc. Natl Acad. Sci.* **95** 8676–80
- [3] Traulsen A, Shores N and Nowak M A 2008 Analytical results for individual and group selection of any intensity *Bull. Math. Biol.* **70** 1410–24
- [4] Turner P E and Chao L 1999 Prisoner's dilemma in an rna virus *Nature* **398** 441–3
- [5] Szathmáry E and Maynard Smith J 1995 The major evolutionary transitions *Nature* **374** 227–32
- [6] Szabó G and Fath G 2007 Evolutionary games on graphs *Phys. Rep.* **446** 97–216
- [7] Nowak M and Sigmund K 1990 The evolution of stochastic strategies in the prisoner's dilemma *Acta Applicandae Math.* **20** 247–65
- [8] Nowak M A 2006 *Evolutionary Dynamics* (Cambridge, MA: Harvard University Press)
- [9] Perc M and Szolnoki A 2010 Coevolutionary games a mini review *Biosystems* **99** 109–25
- [10] Wardil L and da Silva J K L 2013 The evolution of cooperation in mixed games *Chaos Solitons Fractals* **56** 160–5
- [11] Rapoport A 1999 *Two-person Game Theory* (New York: Dover)
- [12] Skyrms B 2004 *The Stag Hunt and the Evolution of Social Structure* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [13] Axelrod R 1984 *The Evolution of Cooperation* (New York: Basic Books)
- [14] Sigmund K 2012 Moral assessment in indirect reciprocity *J. Theor. Biol.* **299** 25–30
- [15] Wardil L and da Silva J K L 2009 Adoption of simultaneous different strategies against different opponents enhances cooperation *Europhys. Lett.* **86** 38001
- [16] Wardil L and da Silva J K L 2010 Distinguishing the opponents promotes cooperation in well-mixed populations *Phys. Rev. E* **81** 036115
- [17] Hauert C, De Monte S, Hofbauer J and Sigmund K 2002 Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public goods games *Science* **296** 1129–32
- [18] Nowak M A and May R M 1992 Evolutionary games and spatial chaos *Nature* **359** 29
- [19] Wang Z, Szolnoki A and Perc M 2014 Different perceptions of social dilemmas: evolutionary multigames in structured populations *Phys. Rev. E* **90** 032813
- [20] Szolnoki A and Perc M 2014 Coevolutionary success-driven multigames *Europhys. Lett.* **108** 28004
- [21] Hauert C and Szabó G 2005 Game theory and physics *Am. J. Phys.* **73** 405–14
- [22] Huberman B A and Glance N S 1993 Evolutionary games and computer simulations *Proc. Natl Acad. Sci.* **90** 7716–8
- [23] Matsuda H, Ogita N, Sasaki A and Satō K 1992 Statistical mechanics of population the lattice Lotka–Volterra model *Prog. Theor. Phys.* **88** 1035–49
- [24] Szolnoki A, Perc M and Danku Z 2008 Towards effective payoffs in the prisoners dilemma game on scale-free networks *Physica A* **387** 2075–82
- [25] Albert R and Barabási A L Jan 2002 Statistical mechanics of complex networks *Rev. Mod. Phys.* **74** 47–97
- [26] Santos F C and Pacheco J M 2006 A new route to the evolution of cooperation *J. Evolutionary Biol.* **19** 726–33

- [27] Krapivsky P L and Redner S May 2001 Organization of growing random networks *Phys. Rev. E* **63** 066123
- [28] Schuster P and Sigmund K 1983 Replicator dynamics *J. Theor. Biol.* **100** 533–8
- [29] Maynard Smith J 1974 The theory of games and the evolution of animal conflicts *J. Theor. Biol.* **47** 209–21
- [30] Taylor P D and Jonker L B 1978 Evolutionary stable strategies and game dynamics *Math. Biosci.* **40** 145–56
- [31] Dieckmann U, Law R and Metz J A J 2000 *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* (Cambridge: Cambridge University Press)

**Evolutionary mixed games in structured populations: Cooperation and the benefits of heterogeneity**Marco A. Amaral,<sup>1,\*</sup> Lucas Wardil,<sup>2</sup> Matjaž Perc,<sup>3,4</sup> and Jafferson K. L. da Silva<sup>1</sup><sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP 30161-970, Belo Horizonte-MG, Brazil*<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 35400-000, MG, Brazil*<sup>3</sup>*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Koroška cesta 160, SI-2000 Maribor, Slovenia*<sup>4</sup>*CAMTP—Center for Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Maribor, Krekova 2, SI-2000 Maribor, Slovenia*

(Received 19 February 2016; published 6 April 2016)

Evolutionary games on networks traditionally involve the same game at each interaction. Here we depart from this assumption by considering mixed games, where the game played at each interaction is drawn uniformly at random from a set of two different games. While in well-mixed populations the random mixture of the two games is always equivalent to the average single game, in structured populations this is not always the case. We show that the outcome is, in fact, strongly dependent on the distance of separation of the two games in the parameter space. Effectively, this distance introduces payoff heterogeneity, and the average game is returned only if the heterogeneity is small. For higher levels of heterogeneity the distance to the average game grows, which often involves the promotion of cooperation. The presented results support preceding research that highlights the favorable role of heterogeneity regardless of its origin, and they also emphasize the importance of the population structure in amplifying facilitators of cooperation.

DOI: [10.1103/PhysRevE.93.042304](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.042304)**I. INTRODUCTION**

Evolutionary game theory [1–5] is a powerful theoretical framework for studying the emergence of cooperation in competitive settings. The concept of a social dilemma is particularly important, where what is best for an individual is at odds with what is best for the society as a whole. Probably the most-often studied social dilemma is the prisoner's dilemma game [6]. During a pairwise interaction, each player can choose either to cooperate or to defect. If both players choose to cooperate they receive the reward  $R$ , while mutual defection leaves both with the punishment  $P$ . A defector exploiting a cooperator receives the highest payoff, the temptation  $T$ , whereas the exploited cooperator receives the sucker payoff  $S$ . The typical payoff ranking for the prisoner's dilemma game is  $T > R > P > S$  [5,7,8]. Evidently, whichever strategy the opponent chooses, it is always better to defect. If both players are rational and adhere to this, they both end up with a payoff that is lower than the one they would have obtained if they had chosen to cooperate. Despite its simplicity, however, the iterated prisoner's dilemma game continues to inspire research across the social and natural sciences [9–27]. If the ranking of the payoffs is changed, other social dilemmas, such as the snowdrift game for  $T > R > S > P$ , are obtained, which has also received substantial attention in the recent past [28–34].

Although defection is the rational choice, cooperation in nature abounds. Eusocial insects like ants and bees are famous for their large-scale cooperative behavior [35], breeding in birds prompts allomaternal behavior where helpers take care for the offspring of others [36], and chief among all, we humans have recently been dubbed supercooperators [37] for our unparalleled other-regarding abilities and our cooperative drive. This fact constitutes an important challenge to Darwin's theory of evolution and natural selection, and accordingly, ample research has been devoted to the identification of mechanisms that may lead to cooperative resolutions of social

dilemmas. Classic examples reviewed in Ref. [38] include kin selection [39], direct and indirect reciprocity [40,41], network reciprocity [42], as well as group selection [43]. Diffusion and mobility have also been studied prominently [44–47], as were various coevolutionary models [8], involving network topology, noise, and aspiration [48–56], to name but a few examples. In particular, it was found that heterogeneities in the system, sometimes also referred to as diversity [57], independent of its origin, can significantly enhance cooperation levels in social dilemmas [58–66].

A key assumption behind the vast majority of existing research has been, however, that individuals play the same type of game with their neighbors during each interaction. Hashimoto [67,68] was among the first to study so-called multigames, or mixed games [69] (for earlier conceptually related work see Ref. [70]), where different players in the population might adopt different payoff matrices at different times. Considering how difficult it is to quantify someone's perception of an interaction, it is reasonable to assume that payoff values have numerical fluctuations. Moreover, there is no evidence that the perceived payoff of individuals never changes during their lifetime [71]. Based on this, it is natural to analyze games where the payoff matrices are composed of mixtures of different games at different times, as representative of the natural environment where each individual is subject to diverse stimuli. This kind of analysis of multi and mixed games could represent a new line of research in evolutionary game theory, considering the merging of various different games as statistical fluctuations. A complementary approach to the study of mixed games is the study of games on interdependent networks [72–74], where two distinct structured populations interact via dependency links using different games. A canonical example of a mixed game perspective is how the owner of a cheap car can have a very different risk perception on a highway crossing compared to the owner of a new expensive car. Recent research has revealed that this is an important consideration, which can have far-reaching consequences for the outcome of evolutionary games [71,75,76].

\*marcoantonio.amaral@gmail.com

Here we wish to extend the scope of mixed games [69,76], by studying a model where during each interaction individuals play a game that is drawn uniformly at random from an ensemble. In particular, we consider a setup with two different payoff matrices ( $G_1$  or  $G_2$ ), and we study evolutionary outcomes on the square lattice, on scale-free and on random networks. As we will show, our results strongly support preceding research that highlights the importance of heterogeneity, as well as the importance of the population structure in ensuring favorable resolutions of social dilemmas. First, however, we proceed with a more detailed description of the studied evolutionary setup.

## II. MIXED GAMES IN STRUCTURED POPULATIONS

In the mixed game model, individuals play different games during each interaction. The available strategies are cooperation ( $C$ ) and defection ( $D$ ). The games are represented by the payoff matrix

$$\begin{array}{c} C \quad D \\ C \begin{pmatrix} 1 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}, \\ D \end{array}$$

where  $T \in [0,2]$  and  $S \in [-1,1]$ . The parametrization  $G = (T, S)$  spans four different classes of games, namely the prisoner's dilemma game (PD), the snowdrift game (SD), the stag-hunt game (SH), and the harmony game (HG), as shown in Fig. 1.

The mixed game,  $G_m$ , is defined by the random mixture of two games:  $G_1 = (T, S_1)$  and  $G_2 = (T, S_2)$ . Each pair of games,  $G_1$  and  $G_2$ , have an average game,  $G_a$ , given simply by  $G_a = (G_1 + G_2)/2$ . Thus,  $T_a = T$  and  $S_a = (S_1 + S_2)/2$ . Each average game,  $G_a$ , can be formed by any combination of two games that are symmetrically distributed around it. Different mixtures that correspond to the same average single

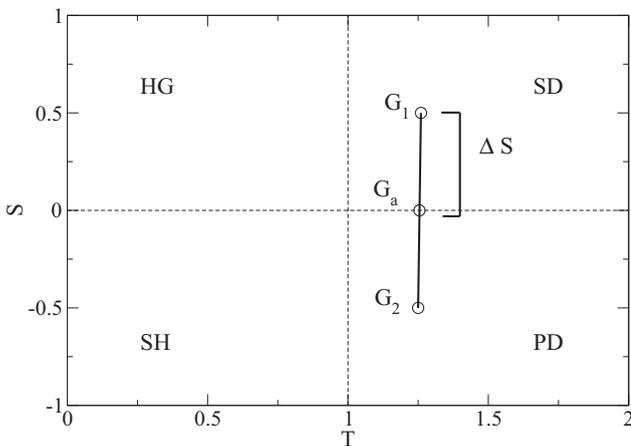


FIG. 1. Schematic presentation of the  $T$ - $S$  parameter space, as obtained if using  $R = 1$  and  $P = 0$ . The four evolutionary games are marked in their corresponding quadrants (see main text for details). Moreover, we depict graphically that for each pair of games (SD =  $G_1$  and PD =  $G_2$ , for example), there will be an average game that lies in the middle of the two. Here,  $\Delta S$  denotes how different  $G_1$  is from  $G_2$  regarding the parameter  $S$ .

game can be characterized by the distance  $\Delta S$ , and each mixed game is from the average single game, namely  $\Delta S = |S_1 - S_a| = |S_2 - S_a|$ . We consider  $\Delta S$  as a measure of the payoff heterogeneity of the mixed game. In particular,  $\Delta S$  defines how far apart  $G_1$  is from  $G_2$  in the  $T$ - $S$  parameter plane (as they are symmetric with respect to  $G_a$ ). Figure 1 illustrates this definition schematically. We have chosen to focus on the combination of the prisoner's dilemma and the snowdrift game because they are the most demanding social dilemmas, and also because these two evolutionary games have been studied most commonly in the past. We have verified that our main results remain valid also for other combinations of games on the  $T$ - $S$  parameter plane.

We used the Monte Carlo simulation procedure to obtain the dynamics of cooperation in structured populations [7]. The initial configuration is homogeneous: half of the population is  $C$  and half is  $D$ , distributed uniformly at random. For a Monte Carlo step (MCS), each player collects the payoff from all of its direct neighbors. In each pairwise interaction, we randomly choose the matrix  $G_1$  with probability  $w$ , or the matrix  $G_2$  with probability  $1 - w$ , to be the game that is played between the two players during this particular interaction. After the payoff of every site is obtained, we assume a copy mechanism that allows sites to change their strategy. The selected site,  $i$ , randomly chooses one of its neighbors  $j$ , and copies the strategy of  $j$  with probability  $p(\Delta u_{ij})$ . The probability of imitation is given by the Fermi-Dirac distribution [7]:

$$p(\Delta u_{ij}) = \frac{1}{1 + e^{-(u_j - u_i)/K}}, \quad (1)$$

where  $u_i$  is the payoff of player  $i$  and  $K$  can be interpreted as the irrationality of the players, which was taken as 0.3. We did extensive simulations varying the value of  $K$ , and we have found that all our main results remain qualitatively the same.

We studied two update rules. In the *synchronous update*, one MCS consists of the copy phase applied to every player at the same time. In the *asynchronous update*, one MCS is the repetition,  $N$  times ( $N$  is the population size), of the process of randomly choosing a player to copy one of its neighbors. We stress that biological and human processes are usually best described by the asynchronous update [77]. Nevertheless, here we present the results of the synchronous model as a comparison to some properties of the mixed games.

We run the Monte Carlo dynamics until the network achieves a stable state, where the variables fluctuate around a mean value. We average each quantity over many MCS after the stable state is reached, and then repeat the process for many independent samples [78].

The population is structured in complex networks and square lattices. The complex networks are generated with the Krapivsky-Redner algorithm [79], a type of growing network with redirection (GNR) method. We initially create a closed loop with six vertices, each one having two directed connections. Then we add a new vertex by randomly connecting it to any of the vertices from the network (growing) and then redirect the connection to the ancestor of this vertex with probability  $r$  (redirection). We repeat this process until the network achieves its final size  $N$ . Using  $r = 0.5$ , we can create a final distribution that has the properties of a scale-free network [80,81], with average connectivity degree of 2.7. The

Krapivsky-Redner algorithm is useful because it is relatively fast in computational terms and we can easily change  $r$  to obtain a random network ( $r = 0$ ).

In complex networks each player can have a different number of neighbors, which gives rise to a “topological heterogeneity” [82–84]. To analyze how the mixed games are affected by topological heterogeneity, we used two different payoff models, namely the absolute and the normalized value [85,86]. In the absolute value, the total payoff of each player  $i$  is just the sum of the payoffs obtained in the interactions with the direct neighbors, denoted as  $\{\Omega i\}$ :

$$u_i = \sum_{j \in \{\Omega i\}} G(s_i, s_j), \quad (2)$$

where  $s_i \in \{C, D\}$  is the strategy of player  $i$  and  $G(s_i, s_j)$  is the payoff of player  $i$  when strategies  $s_i$  and  $s_j$  are adopted. In the normalized payoff, the total payoff of player  $i$  is divided by the number its neighbors:

$$u_i = \frac{\sum_{j \in \{\Omega i\}} G(s_i, s_j)}{k_i}, \quad (3)$$

where  $k_i$  is number of direct neighbors of player  $i$ . The normalized payoff model works on the assumption that maintaining many connections is costly, so the payoff is reduced as you get more neighbors [87]. It is important to notice that, in the absolute payoff model, sites with many connections can achieve total payoffs much greater than the average network payoff. By using these four models (synchronous and asynchronous update rules with either absolute or normalized payoffs), applied to different interaction networks (square lattice, random, and scale-free), we are able to confirm the robustness of our results in a broad range of settings. While we do observe quantitative variations in different setups, qualitatively we always obtain the same results, which are thus robust to differences in the accumulation of payoffs, the updating protocol, and the interaction networks.

### III. RESULTS

We analyzed the mixed game model in populations structured in scale-free networks ( $r = 0.5$ ), random networks ( $r = 0.0$ ), and square lattices. The population size is with  $N = 10^4$ . We used both synchronous and asynchronous Monte Carlo update rules with absolute and normalized payoffs. The MC dynamics was run until the system reaches an equilibrium region where the fraction of cooperation fluctuates around a mean value. The mean value was calculated over  $3 \times 10^3$  MCS in the equilibrium region. The transient time needed to reach equilibrium varies:  $7 \times 10^3$  MCS for the normalized asynchronous and the normalized synchronous;  $6 \times 10^4$  MCS for the absolute asynchronous; and  $4.5 \times 10^4$  MCS for the absolute synchronous. The equilibrium average was then averaged over 100 different networks generated with the same parameters. Note that the absolute payoff models have a very long relaxation time, compared to the normalized ones. This happens because hubs can obtain huge total payoffs, even when the system is far away from the equilibrium, generating metastable states.

#### A. Small game heterogeneity

We found that for all synchronization and payoff rules studied here the final fraction of cooperators in the mixed game is the same as in the average game as long as the mixed game does not differ much from the average single game, more specifically, as long as the  $\Delta S < 0.2$ . Figure 2 shows all four models used in scale-free networks. The average game is represented by the lines and the mixed game by symbols. Here we used a mixture of prisoner’s dilemma and snowdrift ( $S_1 = 0.1$  and  $S_2 = -0.1$ ) for the normalized asynchronous, absolute asynchronous, and absolute synchronous models. The normalized synchronous used a combination of two snowdrift games ( $S_1 = 0.5$  and  $S_2 = 0.3$ ). As can be seen in the figure, the mixed game behaves as the average game for small  $\Delta$  in the four models. Figure 3 shows the asynchronous model in detail, the lines represent the single games  $G_1$ ,  $G_2$  and their average  $G_a$ , while the symbols are for the mixed game ( $G_m$ ) composed by  $G_1$  and  $G_2$ .

It is important to notice that each model exhibits different behaviors: different cooperation levels and different critical values of  $T$  for the extinction of cooperation (an extensive review can be found in Ref. [7]). We do not wish to analyze these differences, as they are well known in the literature. Instead, our goal is to analyze the effect of game heterogeneity in all models.

The average payoff is the same in the average single game and in the mixed game. As in Refs. [71,75], the addition of cooperative games together with more selfish games do not change the mean payoff. In contrast, punishment mechanisms often increases cooperation while lowering the average payoff [88]. The equivalence between the mixed game and the average single game also holds for different values of  $w$ . We also

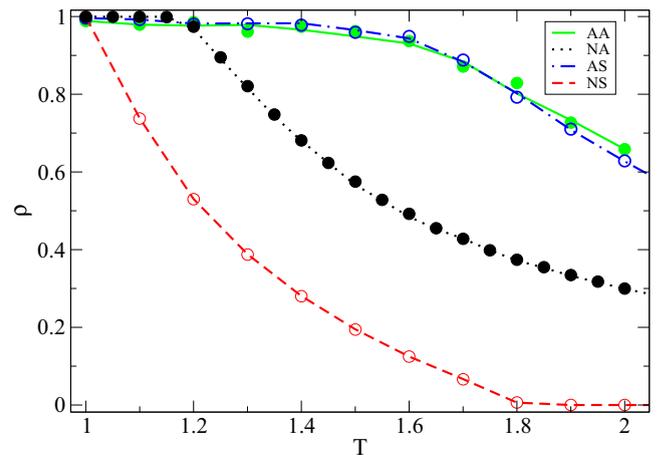


FIG. 2. Fraction of cooperation as a function of  $T$  for small-game heterogeneity. The graph shows simulation results of the mixed-game model (symbols) and the single game defined by the average game (lines) for normalized asynchronous (NA), normalized synchronous (NS), absolute asynchronous (AA), and absolute synchronous (AS). Note that the mixed game has the same behavior as the average game in each model, as long as the game heterogeneity remains small (here  $\Delta S < 0.1$ ). The parameters for AA, AS, and NA are  $S_1 = 0.1$ ,  $S_2 = -0.1$ , and  $S_a = 0$ , respectively. The NS model uses  $S_1 = 0.5$ ,  $S_2 = 0.3$ , and  $S_a = 0.4$ .

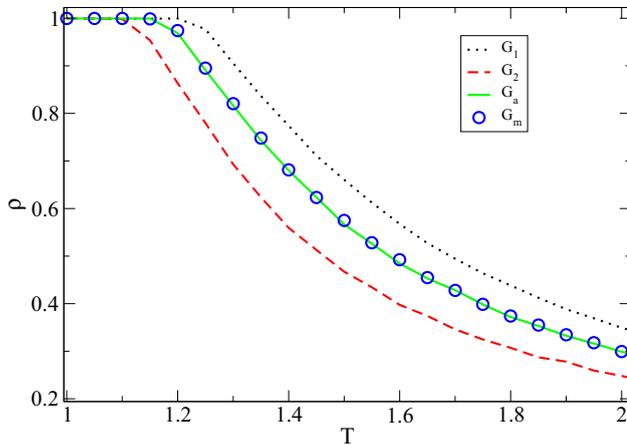


FIG. 3. Fraction of cooperation as a function of  $T$  for small game heterogeneity in the normalized asynchronous model. The mixed game is composed of two prisoner’s dilemma games. The lines represent single games with parameters  $G_1 = (T, S_1) = (T, -0.1)$  (dotted, black line),  $G_2 = (T, S_2) = (T, -0.5)$  (dashed, red line), and the average single game  $G_a = (T, -0.3)$  (continuous, green line). The mixed game,  $G_m$ , composed of  $S_1$  and  $S_2$ , is represented by the blue circle. Note that the mixed game  $G_m$  behaves as the average game  $G_a$ .

studied random networks ( $r = 0$ ) and super-hubs networks ( $r = 1.0$ ; every vertex is connected to one of the six initial nodes) [79]. For our models the main result shown in Fig. 3 still holds: the mixed game is equivalent to the average single game in the terms of the final number of cooperators and the average payoff, as long as the game heterogeneity  $\Delta S$  is small. This result reinforces what was already known for mixed games in well-mixed populations, rings, and square lattices [69,76]. We point out that the dynamic of cooperation is highly dependent on the topology [7,9,80,83,86,89–92]; nevertheless, the mixed game still behaves as the average game. It is very interesting to notice that the topology, irrationality, update rule, and copy mechanism drastically alters the final fraction of cooperators, but it seems not to change the equivalence between the average and the mixed game if heterogeneity is small. We found that the only thing that considerably changes this behavior is how distant the parameters ( $S$  or  $T$ ) are from their mean value. In the next section we proceed to study the effect of large-game heterogeneity.

**B. Large-game heterogeneity**

Game heterogeneity in the mixed game model can be measured by  $\Delta S$ . If the mixed game was equivalent to the average single game for any condition, the variation of  $\Delta S$  would be irrelevant. We found impressive results showing that game heterogeneity enhances cooperation, as shown in Fig. 4 for scale-free networks (in this case, the average game is a weak prisoner’s dilemma given by  $S_a = 0$  and  $T_a = 1.7$ ). Note that although the average game remains the same, the games  $G_1$  and  $G_2$  become more distinct as  $\Delta S$  increases. Obviously, for  $\Delta S = 0$  we get the trivial case  $G_1 = G_2 = G_a$ . It is interesting to notice that an increase in  $\Delta S$  favours cooperation despite the fact that, at the same time  $G_1$  becomes more “cooperative,”

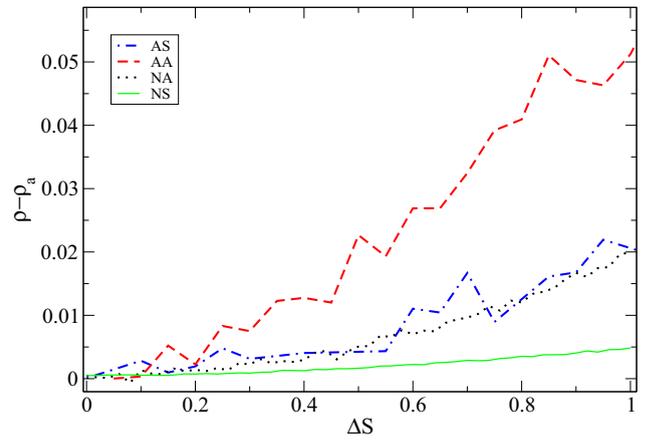


FIG. 4. Cooperation increase in mixed games ( $\rho$ ), compared to the average game ( $\rho_a$ ), as game heterogeneity increases in scale-free networks. The average game is the weak prisoner’s dilemma. Greater heterogeneity benefits cooperation, although asynchronous models seem to obtain a greater advantage. The weak prisoner’s dilemma parameters are  $S_a = 0$  and  $T = 1.7$ .

$G_2$  becomes more “selfish.” Figure 5 shows the effect of large game heterogeneity in random networks for a mixture of games in which the average game is a weak prisoner’s dilemma with  $T = 1.8$ . The effect of heterogeneity is stronger in random networks than in scale-free networks. Results from Figs. 4 and 5 show that although the final fraction of cooperation can be increased by game heterogeneity, it is highly sensitive to the model.

The enhancement of cooperation due to game heterogeneity on  $S$  happens for all values of  $T$ , as shown in Fig. 6 for scale-free networks. The increase in  $\Delta S$  benefits cooperation, but there are optimal values of  $T$  where cooperation is most promoted. For the normalized asynchronous model, a boost of 0.15 is obtained at  $T = 1.45$ . Figure 7 shows the fraction

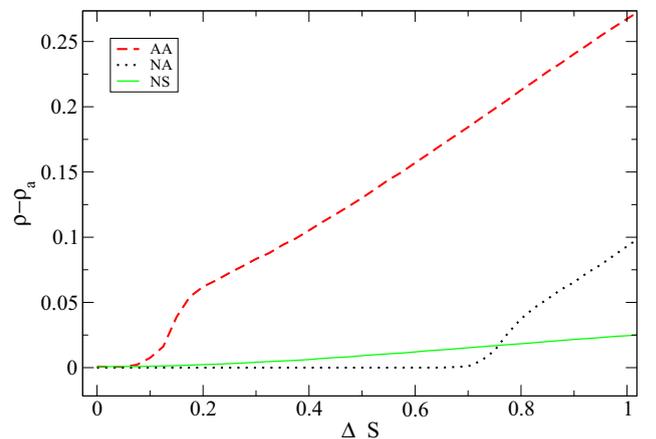


FIG. 5. Cooperation increase in mixed games ( $\rho$ ), compared to the average game ( $\rho_a$ ), as game heterogeneity increases in random networks. The behavior of each model is different from the complex networks. Nevertheless, the cooperation still benefits from the heterogeneity. We used the weak prisoner’s dilemma for the average game and  $T = 1.8$ .

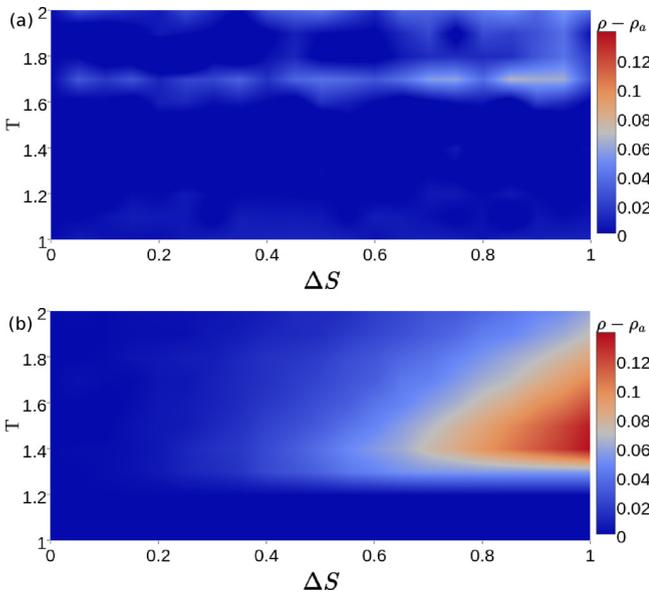


FIG. 6. Color map showing how game heterogeneity ( $\Delta S$ ) affects cooperation for various  $T$  values in the absolute asynchronous (a) and normalized asynchronous (b) scale-free network model. Each model has an optimum  $T$  value, where the evolution of cooperation is enhanced the most.

of cooperation as a function of  $T$  in random networks. The cooperation boost is of almost 0.3 in some points.

The analysis of the mixed-game model in square lattices was very surprising. For  $T$  values where cooperation usually

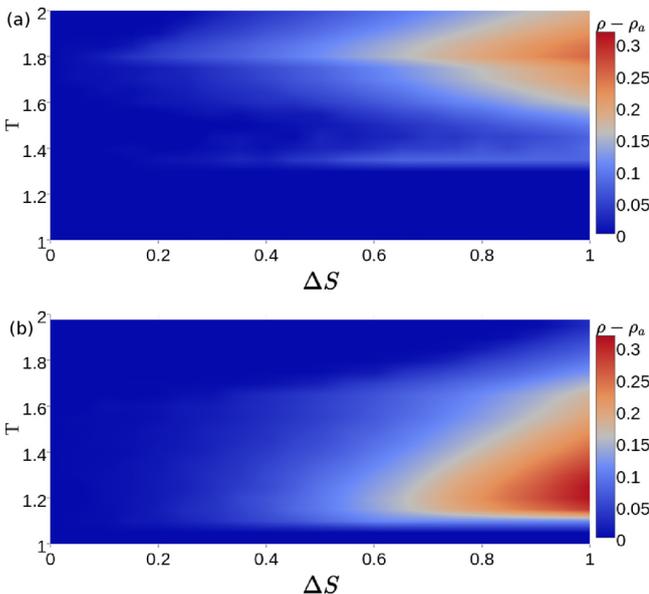


FIG. 7. Color map showing how  $\Delta S$  affects cooperation in the absolute asynchronous (a) and normalized asynchronous (b) model for different values of  $T$  in the random network. It can be seen here, comparing to the scale-free color map, how the optimum  $T$  value for increasing cooperation is highly dependent on the topology and synchronization of the model. On this points cooperation can be enhanced in even 0.3 compared to the average game.

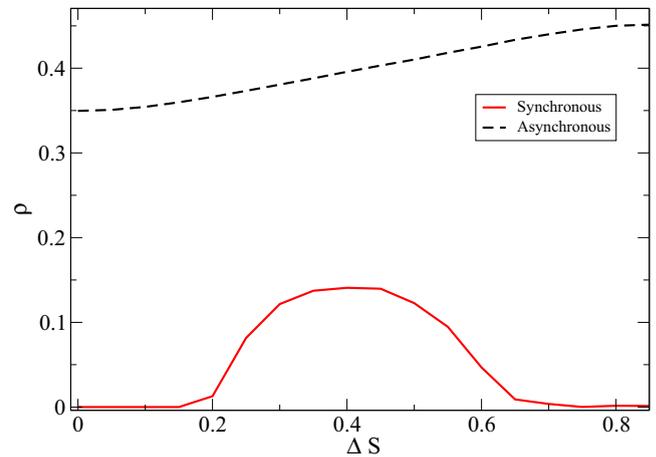


FIG. 8. Total fraction of cooperation as  $\Delta S$  increases on the square lattice using  $T = 1.04$ . The asynchronous model exhibit enhancements due to game heterogeneity, but for  $T = 1.04$  the synchronous model should have the cooperation extinct in the average game. Nevertheless, for some  $\Delta S$  values the cooperation reappears even after the extinction threshold.

survives in the average single game, we found that large game heterogeneity in  $S$  promotes cooperation in the mixed game. More interestingly, we found that for the synchronous update cooperation can spontaneously reemerge even after the critical value of cooperation extinction ( $T_c \approx 1.04$  for the synchronous model in single games [7]), as shown in Fig. 8. Game heterogeneity make the cooperation reemerge for some values in the range  $0.2 < \Delta S < 0.6$ . In scale-free and random networks, heterogeneity merely enhanced the fraction of cooperation. But in square lattices, the mixed game is totally dominated by defectors until the heterogeneity reaches 0.2, when the cooperators reemerge.

To understand how game heterogeneity promotes cooperation, we investigate asymmetries introduced by the mixture of PD and SD games on the square lattice. We analyze the histogram describing the number of times each cooperator plays  $G_1$  (SD game), or  $G_2$  (PD game), during a typical Monte Carlo step. The average game is the weak prisoner's dilemma,  $G_1$  favors cooperation ( $S > 0$ ), while  $G_2$  favors defection ( $S < 0$ ). This creates a natural separation in the population between SD ( $\rho_+$ ) and PD ( $\rho_-$ ) players. However, the separation is not fixed but changes during the evolution. By recording who plays PD and who plays the SD game, and when, we find that most players usually play both games with equal probability over time. Nevertheless, there are some differences across the population. Results presented in Fig. 9 reveal that the fraction of cooperators who play SD more often is higher than the fraction of cooperators who play PD more often. This asymmetry indicates that even if the games are randomly chosen at each step, there is a flux of cooperation towards sites where cooperation is favored. In contrast, defectors do not benefit from the PD population.

The histogram analysis indicates that cooperation enhancement is due to the intrinsic asymmetry between cooperators and defectors. Players that often play the SD game have a higher chance of becoming cooperators, even in the presence of defectors, because of the high positive value of  $S$ . Conversely,

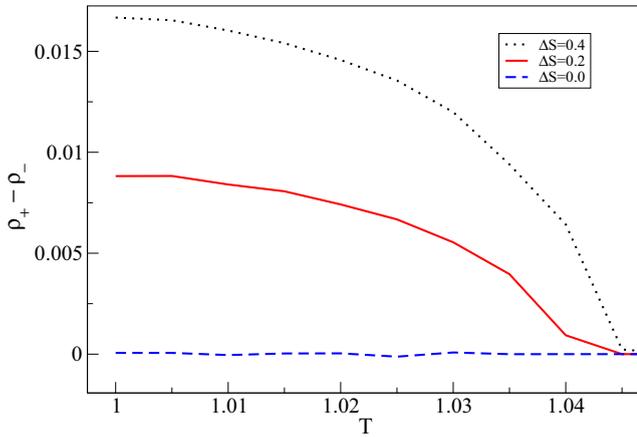


FIG. 9. Difference in the populations of cooperators playing the snowdrift ( $\rho_+$ ) and the prisoner's dilemma ( $\rho_-$ ) game as  $T$  increases for various values of  $\Delta S$ . Notice the asymmetry, where cooperators play the SD game more frequently. The difference is always positive and grows with increasing values of  $\Delta S$ .

for greater negative values of  $S$ , players that often play the PD game have no incentive to become defectors when they are surrounded by defectors (recall that the  $P$  value remains the same). In the long run, players will play PD and SD with the same frequency on average. But, locally, some players can play SD more frequently, increasing their chance to start a cooperation island. The asymmetric effect of the negative  $S$  on PD will not cause the opposite; i.e., high negative values of  $S$  does not lead to the formation of defectors clusters [61,71,75]. In time, these small islands of cooperation can grow and eventually become stable, enhancing the cooperation of the model. This is the same asymmetric effect that is observed in heterogeneous multigames [61,71,75].

#### IV. DISCUSSION

We have studied mixed games on random and scale-free networks, and on the square lattice, focusing specifically on the effect of game heterogeneity. We showed that for small heterogeneity, mixtures of randomly chosen games behave as the average single games, which agrees with previous

work using mean-field analysis for the square lattice and ring topologies [69,76]. We showed that the equivalence between the mixed game and the average single game is still valid for all various topologies, different synchronization rules, and different values of irrationality. Nevertheless, our main result is in large game heterogeneity regime, where heterogeneity breaks the equivalence between the mixed game and the average single game and enhances cooperation. In particular, the enhancement is highly sensitive to the topology and the applied updating rule used to simulate the evolutionary dynamics. On the square lattice, for example, sufficiently strong heterogeneity resurrects cooperation after the single-game extinction threshold value of  $T$ .

Interestingly, the mean-field model predicts that the mixed game should always behave as the average game [76], in contrast to what was found for the networks and the square lattice here. This further highlights the importance of population structure and how cooperation can thrive by simple mechanisms such as network reciprocity and heterogeneity. Future work could study mixed games using a normal distribution of games, instead of just two games. Based on the results presented in this paper, it seems reasonable to expect that the variance of the distribution would affect the final frequency of cooperators.

Finally, we note that our results strongly supports preceding works on how different types of heterogeneity, regardless of origin, promote cooperation [23,57–66,93–95]. While game heterogeneity does offer advantages to both cooperators and defectors, only the former can reap long-term benefits. Defectors are unable to do so because of a negative feedback loop that emerges as their neighbors become weak due to the exploitation. As we have shown, this holds true also for mixed games, and we hope that this paper will motivate further research along this line.

#### ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by the Brazilian Research Agencies CAPES-PDSE (Proc. BEX 7304/15-3), CNPq and FAPEMIG, and by the Slovenian Research Agency (Grants No. J1-7009 and No. P5-0027).

- 
- [1] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982).
  - [2] J. W. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).
  - [3] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
  - [4] M. Mesterton-Gibbons, *An Introduction to Game-Theoretic Modelling*, 2nd ed. (American Mathematical Society, Providence, RI, 2001).
  - [5] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 2006).
  - [6] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
  - [7] G. Szabó and G. Fáth, *Phys. Rep.* **446**, 97 (2007).
  - [8] M. Perc and A. Szolnoki, *BioSystems* **99**, 109 (2010).
  - [9] F. C. Santos and J. M. Pacheco, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 098104 (2005).
  - [10] L. A. Imhof, D. Fudenberg, and M. A. Nowak, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, 10797 (2005).
  - [11] Z.-X. Wu, J.-Y. Guan, X.-J. Xu, and Y.-H. Wang, *Physica A* **379**, 672 (2007).
  - [12] J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, L. M. Floría, and Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 108103 (2007).
  - [13] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **76**, 021126 (2007).
  - [14] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, and Y. Moreno, *New J. Phys.* **9**, 184 (2007).

- [15] W.-B. Du, H.-R. Zheng, and M.-B. Hu, *Physica A* **387**, 3796 (2008).
- [16] W.-B. Du, X.-B. Cao, and M.-B. Hu, *Physica A* **388**, 5005 (2009).
- [17] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, Y. Moreno, and A. Sánchez, *Europhys. Lett.* **88**, 38003 (2009).
- [18] J. Tanimoto, M. Brede, and A. Yamauchi, *Phys. Rev. E* **85**, 032101 (2012).
- [19] A. Arenas, J. Camacho, J. A. Cuesta, and R. Requejo, *J. Theor. Biol.* **279**, 113 (2011).
- [20] J. Gómez-Gardeñes, I. Reinares, A. Arenas, and L. M. Floría, *Sci. Rep.* **2**, 620 (2012).
- [21] R. J. Requejo, J. Camacho, J. A. Cuesta, and A. Arenas, *Phys. Rev. E* **86**, 026105 (2012).
- [22] A. Szolnoki and M. Perc, *Phys. Rev. E* **89**, 022804 (2014).
- [23] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **87**, 062136 (2013).
- [24] J. Tanimoto, *Appl. Math. Comput.* **263**, 171 (2015).
- [25] J. T. Matamalas, J. Poncela-Casasnovas, S. Gómez, and A. Arenas, *Sci. Rep.* **5**, 9519 (2015).
- [26] M. A. Javarone and A. E. Atzeni, *Compu. Social Networks* **2**, 15 (2015).
- [27] M. A. Javarone, *Eur. Phys. J. B* **89**, 1 (2016).
- [28] M. Sysi-Aho, J. Saramäki, J. Kertész, and K. Kaski, *Eur. Phys. J. B* **44**, 129 (2005).
- [29] W.-X. Wang, J. Ren, G. Chen, and B.-H. Wang, *Phys. Rev. E* **74**, 056113 (2006).
- [30] W.-B. Du, X.-B. Cao, M.-B. Hu, and W.-X. Wang, *Europhys. Lett.* **87**, 60004 (2009).
- [31] X.-J. Chen and L. Wang, *Europhys. Lett.* **90**, 38003 (2010).
- [32] R. A. Laird, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **22**, 1230039 (2012).
- [33] R. A. Laird, *Phys. Rev. E* **88**, 012105 (2013).
- [34] L.-L. Jiang, M. Perc, and A. Szolnoki, *PLoS ONE* **8**, e64677 (2013).
- [35] E. O. Wilson, *The Insect Societies* (Harvard University Press, Harvard, 1971).
- [36] A. F. Skutch, *Condor* **63**, 198 (1961).
- [37] M. A. Nowak and R. Highfield, *SuperCooperators: Altruism, Evolution, and Why We Need Each Other to Succeed* (Free Press, New York, 2011).
- [38] M. A. Nowak, *Science* **314**, 1560 (2006).
- [39] W. D. Hamilton, *J. Theor. Biol.* **7**, 1 (1964).
- [40] R. L. Trivers, *Q. Rev. Biol.* **46**, 35 (1971).
- [41] R. Axelrod and W. D. Hamilton, *Science* **211**, 1390 (1981).
- [42] M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
- [43] D. S. Wilson, *Am. Nat.* **111**, 157 (1977).
- [44] M. H. Vainstein and J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **64**, 051905 (2001).
- [45] M. H. Vainstein, A. T. C. Silva, and J. J. Arenzon, *J. Theor. Biol.* **244**, 722 (2007).
- [46] Z. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Sci. Rep.* **2**, 369 (2012).
- [47] M. H. Vainstein and J. J. Arenzon, *Physica A* **394**, 145 (2014).
- [48] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 258103 (2006).
- [49] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **243**, 437 (2006).
- [50] Z.-X. Wu, X.-J. Xu, Z.-G. Huang, S.-J. Wang, and Y.-H. Wang, *Phys. Rev. E* **74**, 021107 (2006).
- [51] E. Pestelacci and M. Tomassini, *Lec. Not. Comput. Sci.* **5199**, 539 (2008).
- [52] J. Tanimoto, *Physica A* **392**, 2955 (2013).
- [53] C. Biely, K. Dragosits, and S. Thurner, *Physica D* **228**, 40 (2007).
- [54] A. Cardillo, J. Gómez-Gardeñes, D. Vilone, and A. Sánchez, *New J. Phys.* **12**, 103034 (2010).
- [55] Q.-L. Dai and J.-Z. Yang, *Chin. Phys. Lett.* **27**, 040201 (2010).
- [56] M. Hetzer and D. Sornette, *PLoS ONE* **8**, e54308 (2013).
- [57] F. C. Santos, F. Pinheiro, T. Lenaerts, and J. M. Pacheco, *J. Theor. Biol.* **299**, 88 (2012).
- [58] M. Perc and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **77**, 011904 (2008).
- [59] M. Perc and Z. Wang, *PLoS ONE* **5**, e15117 (2011).
- [60] H. Fort, *Physica A* **387**, 1613 (2008).
- [61] Y. Yao and S.-S. Chen, *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **413**, 432 (2014).
- [62] A. Szolnoki, M. Perc, and G. Szabó, *Eur. Phys. J. B* **61**, 505 (2008).
- [63] P. Zhu and G. Wei, *PLoS ONE* **9**, e95169 (2014).
- [64] A. Szolnoki, J. Vukov, and G. Szabó, *Phys. Rev. E* **80**, 056112 (2009).
- [65] F. C. Santos, M. D. Santos, and J. M. Pacheco, *Nature* **454**, 213 (2008).
- [66] M. Iwata and E. Akiyama, *Physica A* **448**, 224 (2015).
- [67] K. Hashimoto, *J. Theor. Biol.* **241**, 669 (2006).
- [68] K. Hashimoto, *J. Theor. Biol.* **345**, 70 (2014).
- [69] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *Chaos Solitons Fractals* **56**, 160 (2013).
- [70] R. Cressman, A. Gaunersdorfer, and J.-F. Wen, *Int. Game Theory Rev.* **02**, 67 (2000).
- [71] Z. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Phys. Rev. E* **90**, 032813 (2014).
- [72] S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C. I. del Genio, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang, and M. Zanin, *Phys. Rep.* **544**, 1 (2014).
- [73] M. D. Santos, S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes, *Sci. Rep.* **4**, 4436 (2014).
- [74] B. Wang, Z. Pei, and L. Wang, *Europhys. Lett.* **107**, 58006 (2014).
- [75] A. Szolnoki and M. Perc, *Europhys. Lett.* **108**, 28004 (2014).
- [76] M. A. Amaral, L. Wardil, and J. K. L. da Silva, *J. Phys. A* **48**, 445002 (2015).
- [77] M. R. Frean, *Proc. R. Soc. Lond. B* **257**, 75 (1994).
- [78] B. Huberman and N. Glance, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90**, 7716 (1993).
- [79] P. L. Krapivsky and S. Redner, *Phys. Rev. E* **63**, 066123 (2001).
- [80] R. Albert and A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [81] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [82] H. Ohtsuki and M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **243**, 86 (2006).
- [83] F. C. Santos and J. M. Pacheco, *J. Evol. Biol.* **19**, 726 (2006).
- [84] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 345101 (2011).
- [85] N. Masuda, *Proc. R. Soc. B* **274**, 1815 (2007).
- [86] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku, *Physica A* **387**, 2075 (2008).

- [87] M. O. Jackson and A. Wolinsky, *J. Econ. Theor.* **71**, 44 (1996).
- [88] K. Sigmund, *Trends Ecol. Evol.* **22**, 593 (2007).
- [89] F. C. Santos, J. F. Rodrigues, and J. M. Pacheco, *Proc. R. Soc. B* **273**, 51 (2006).
- [90] M. Nowak and K. Sigmund, *Acta Appl. Math.* **20**, 247 (1990).
- [91] G. Szabó, J. Vukov, and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **72**, 047107 (2005).
- [92] C.-L. Tang, W.-X. Wang, X. Wu, and B.-H. Wang, *Eur. Phys. J. B* **53**, 411 (2006).
- [93] C. Lei, T. W. J.-Y. Jia, R. Cong, and L. Wang, *Physica A* **389**, 4708 (2010).
- [94] L. Sun, H.-X. Yang, S.-M. Chen, and Y.-S. Chen, *Int. J. Mod. Phys. C* **24**, 1250089 (2013).
- [95] W.-J. Yuan and C.-Y. Xia, *PLoS ONE* **9**, e91012 (2014).

**Stochastic win-stay-lose-shift strategy with dynamic aspirations in evolutionary social dilemmas**Marco A. Amaral,<sup>1,\*</sup> Lucas Wardil,<sup>2</sup> Matjaž Perc,<sup>3,4</sup> and Jafferson K. L. da Silva<sup>1</sup><sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP 30161-970, Belo Horizonte-MG, Brazil*<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, CEP 35400-000 MG, Brazil*<sup>3</sup>*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Koroška cesta 160, SI-2000 Maribor, Slovenia*<sup>4</sup>*CAMTP—Center for Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Maribor, Krekova 2, SI-2000 Maribor, Slovenia*

(Received 23 June 2016; published 29 September 2016)

In times of plenty expectations rise, just as in times of crisis they fall. This can be mathematically described as a win-stay-lose-shift strategy with dynamic aspiration levels, where individuals aspire to be as wealthy as their average neighbor. Here we investigate this model in the realm of evolutionary social dilemmas on the square lattice and scale-free networks. By using the master equation and Monte Carlo simulations, we find that cooperators coexist with defectors in the whole phase diagram, even at high temptations to defect. We study the microscopic mechanism that is responsible for the striking persistence of cooperative behavior and find that cooperation spreads through second-order neighbors, rather than by means of network reciprocity that dominates in imitation-based models. For the square lattice the master equation can be solved analytically in the large temperature limit of the Fermi function, while for other cases the resulting differential equations must be solved numerically. Either way, we find good qualitative agreement with the Monte Carlo simulation results. Our analysis also reveals that the evolutionary outcomes are to a large degree independent of the network topology, including the number of neighbors that are considered for payoff determination on lattices, which further corroborates the local character of the microscopic dynamics. Unlike large-scale spatial patterns that typically emerge due to network reciprocity, here local checkerboard-like patterns remain virtually unaffected by differences in the macroscopic properties of the interaction network.

DOI: [10.1103/PhysRevE.94.032317](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.032317)**I. INTRODUCTION**

Cooperation has been theoretically studied in evolutionary game theory [1–5]. The prisoner’s dilemma game [5,6] is classically used to portray the situation where it is beneficial for all members of a group to cooperate, but, whatever the others do, it is always more beneficial for the individual to defect. Due to its broad interpretation, prisoner’s dilemma inspired research in social and natural sciences alike [7–23]. In the prisoner’s dilemma game, two players can either cooperate (C) or defect (D). Mutual cooperation yields a payoff  $R$  (reward) and mutual defection yields  $P$  (punishment). If players have different strategies, the defector receives  $T$  (temptation) and the cooperator receives a small payoff  $S$  (sucker). Usually prisoner’s dilemma follows the hierarchy  $T > R > P > S$  [5,24,25]. In classical game theory, defection is the Nash equilibrium and, therefore, the rational choice. Even so, cooperation flourishes in human societies between members of the same species and in some interspecies symbiosis [26–28].

In an original approach to evolutionary game theory, Nowak studied spatially distributed populations where players copy the fittest strategy. This model showed how cooperation can exist in a sea of defectors, the so called “spatial reciprocity” mechanism—cooperators spontaneously form clusters where they support each other. After this, new mechanisms of cooperation promotion were investigated, usually based on some kind of reciprocity. Among the most studied mechanisms are kin selection [29], direct and indirect reciprocity [30,31], network reciprocity [32–34], group selection [35], and heterogeneity [25,36,37]. The most common interpretation

of these models are in terms of biological evolution, using birth-death-like dynamics to model the replication of strategies [1,38–40]: Players with higher payoff grow in population, like the selection of the fittest [1,5,24]. Dynamics where players only copy strategies previously available in the system are called *noninnovative dynamics*. On the other side, in *innovative dynamics* new strategies can arise, for example, via mutation, exploration, testing, etc. [5,24,41,42]. While non-innovative dynamics usually describe long-term evolutions, usually innovative dynamics represent situations where players can take cognitive responses to the environment, like human interactions [24,43–45].

Recent works support the idea that human interactions are strongly influenced by cognitive choices other than just copy mechanisms [43–47]. New behavior can emerge and people often change their opinions without the need of a “copy source.” In contrast to simpler species, where the evolution of strategies is basically governed by birth-death processes, in the human species strategies spread via other mechanisms as well [24,39,48,49]. For example, recent experimental results show that individuals decided the strategy in the next round in moody way [50], that is, individuals will cooperate in the next round if they have cooperated in the previous round, otherwise defection will follow. Also, experimental evidence shows that individual decisions are guided by aspiration levels [46]. So it is typical of human behavior to adopt innovative dynamics. Note that, in game theory, all possible strategies are already defined in the strategy space; hence, innovation refers to the possibility of a new strategy emerge in a monomorphic population. With this as motivation, we explore innovative dynamics in the context of evolutionary game theory.

The win-stay-lose-shift strategy (WSLS; also know as Pavlov) is an innovative strategy that relies on cognitive

\*Corresponding author: [marcoantonio.amaral@gmail.com](mailto:marcoantonio.amaral@gmail.com)

capabilities, instead of replicating process [8,43,45,51,52]. WLS was proposed in the famous Axelrod tournaments [5,6] and proved to be very efficient against others strategies in the iterated prisoner's dilemma in infinite, well-mixed populations. It performed similarly to the famous tit-for-tat and fare even better in noise environments [8]. A WLS player keeps its strategy if its payoff is above a desired level—the individual aspiration—and changes when it is below the aspiration. After the initial success in Axelrod tournament, many different WLS-like strategies have been proposed [47,53–58]. Nevertheless, the aspiration level is usually implemented as a global external parameter and the decision-making process is deterministic: players always change strategy if payoff is below the aspiration level.

Inspired by recent works that interpret aspiration as dynamic, or coevolving parameter [25,58–66], we propose a model where an individual aspiration is dynamically determined by the average payoff of its neighbors. In this way there is a variety of different aspirations that evolve spatial and temporally in the population. Specifically, this model relates to the rationale that aspiration levels tend to follow the wealth level of one's society. In the middle of a crisis, humans tend to lower what they expect to receive in interactions. On the other side, it is normal to want a higher payoff when all your peers are faring better than you. We note that previous works on WLS spatial games usually considered populations where WLS is one strategy, among others, that can be transmitted via copying mechanisms [24,42,67]. Here we consider a population where only two strategies are available—cooperation and defection—and the update rule is defined as a win-stay-lose-shift behaviors: if my payoff is below the average payoff of my neighbors then I change my strategy, otherwise I keep my current strategy. Since new strategies can emerge in monomorphic populations, this dynamics is innovative.

Our main objective here is to analyze the proposed model, comparing it to the classic version of non-innovative dynamics, highlighting what differences can arise. In the next section we define our model precisely. We also define the imitation rule, a noninnovative dynamics that is well studied in the literature, that will serve as a baseline for comparison. In Results, we study the master equation and its implications for the WLS model, as well as the Monte-Carlo numerical simulations in square and scale-free networks. We considered the most studied two-players dilemma games—prisoner's dilemma, snow-drift and stag-hunt games. Finally, we summarize our results in the Conclusion section.

## II. MATHEMATICAL MODEL

Players have only two possible strategies: cooperation (C) and defection (D). Individuals are represented by the nodes of a network and the game happens on pairwise interactions between players and their neighbors. In each interaction, players receive a payoff according to the usual payoff matrix [5,24]:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}, \end{array}$$

where  $T \in [0,2]$  and  $S \in [-1,1]$ . Note that the parametrization  $G = (T, S)$  spans four different classes of games: prisoner's dilemma (PD), snow-drift (SD), stag-hunt (SH), and harmony games (HG) [5,24,25].

The evolution of strategies is defined in two phases. First, players interact with their neighbors and accumulate the payoff obtained in each interaction. Second, players may change their strategy according to an update rule. We study in this work the win-stay-lose-shift with dynamic aspiration update rule and compare it to the classic imitation update rule.

### A. WLS with dynamic aspiration

In this update rule individuals change their strategies depending on the degree of satisfaction with their current payoff in comparison to the average payoff of their neighbors. The WLS strategy is usually defined in terms of fixed aspiration level as an external parameter [47,53–57]. Recently, papers started using heterogeneous and time-evolving aspiration levels [25,58–66]. Our model merges a probabilistic decision-making process with the concept of aspiration as the average payoff of the neighbors. In accordance with other coevolutionary models [25,59–61,64,65], we intend to make the aspiration an emerging property, intrinsic to the system. At every time step, a player is randomly selected to update its strategy. A player,  $i$ , changes its strategy—a cooperators changes to defection and a defector changes to cooperation—with probability

$$p(\Delta u_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u}-u_i)/k}}, \quad (1)$$

where  $\bar{u}$  is the average payoff of player  $i$ 's neighbors. This probability distribution, which is based on the Fermi-Dirac distribution of statistical physics, is widely used in evolutionary dynamics [68]. The parameter  $k$  measures how often players make “irrational” choices, changing strategies against the rationality prescribed by the model [24]. In the literature, usually we find  $k \in [0.001, 0.3]$  to simulate a small, but nonzero, chance of a player making mistakes (trembling hand) [5,24].

The WLS update rule has several distinct features. First, the aspiration value is not an external parameter; it is an emerging property of the system. Second, each site has its own aspiration value. Third, the aspiration is subject to temporal and spatial variations. It seems natural to determine the aspiration in terms of the neighborhood average, as people tend to lower their expectations during some global crises, while they raise the expectations when neighbors are faring better.

It is important to stress that we still have only two different strategies in the population C or D. Differently from usual works [69], here WLS is not considered a “pure” strategy, rather it is an update mechanism.

### B. Imitation update rule

As a baseline for comparison, we are going to contrast our model to the imitation update rule. In this rule, player  $i$  update its strategy by randomly choosing one of its neighbors,  $j$ , and then comparing their payoffs. Site  $i$  adopts the strategy of  $j$

with probability

$$p(\Delta u_{ij}) = \frac{1}{1 + e^{-(u_j - u_i)/k}}, \quad (2)$$

where  $u_i$  is the cumulative payoff of site  $i$ .

The imitation rule is a noninnovative dynamic [5,24], because a player can only change its strategy to the available ones in the population. This means that new strategies can never appear once extinguished (the system has absorbing states) and, most importantly, players never “explore” new strategies [5,24,42]. This update rule is thus associated with the replication dynamics [1,5,24,40] found in biological systems. The process of imitation is equivalent to local competition where death is a random, uniform process, and reproduction rates are determined by the payoffs (fitness). In this context, without mutation, extinct species never reappear.

### III. RESULTS AND DISCUSSION

It is well known that there is a phase transition in the fraction of cooperation in square lattices with the imitation update rule: cooperation cannot survive for certain payoff parameters. In the weak prisoner’s dilemma [5,24],  $P = S = 0$ , cooperation goes to extinction above a critical value of  $T$ . In contrast, we found that in the WSLs with dynamic aspiration cooperation always survives, even for large  $T$ . To understand this result, first we are going to study the master equation for the weak prisoner’s dilemma in square lattices. We obtained analytical results for the limits of large  $T$  and  $k \rightarrow \infty$  and numerical results for general  $T$  and  $k$ . After this initial analysis, we are going to simulate the evolution of strategies in the entire parameter space, as well as in scale-free topologies.

#### A. Master equation

On a square lattice, each player interacts with its four nearest neighbors. A focal site,  $f$ , can be in two states: cooperation or defection. In a mean-field approximation we set the probability that the focal site is a cooperator equal to the population fraction of cooperators,  $\rho$ . Therefore,

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)\Gamma_{+(D \rightarrow C)} - \rho\Gamma_{-(C \rightarrow D)}, \quad (3)$$

where  $\Gamma_+$  ( $\Gamma_-$ ) is the transition rate accounting the probability that the focal player will change its strategy to C (D), given that its current strategy is D (C). We first use the simpler version of the master equation, the well-mixed approach. Here we consider that every player is connected to every other player. By doing so there is no spatial structure and we can consider the average payoff of a single cooperator,  $u_c$  (defector,  $u_d$ ), as the average payoff of all cooperators (defectors) in the population. Moreover, the average aspiration simply becomes the population average payoff ( $\bar{u}$ ). The ODE to be numerically solved uses the transition rates:

$$\Gamma_+ = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u} - u_d)/k}}, \quad (4)$$

$$\Gamma_- = \frac{1}{1 + e^{-(\bar{u} - u_c)/k}}. \quad (5)$$

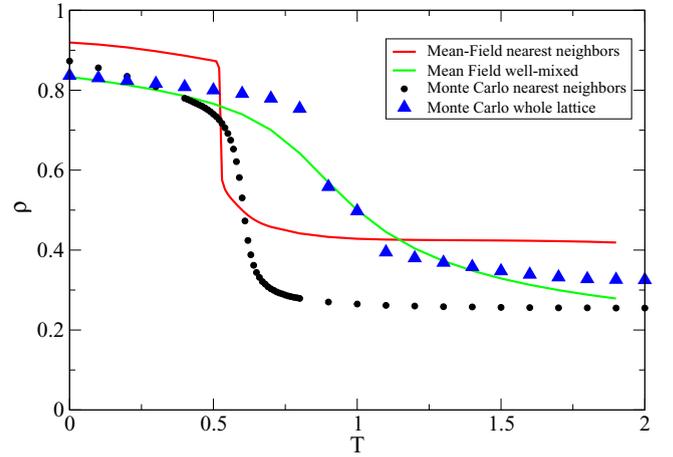


FIG. 1. Equilibrium cooperation level in dependence on  $T$  in the WSL model, as obtained with Monte Carlo simulations and the integration of the master equation (see legend). “Monte Carlo whole lattice” refers to the aspiration being equal to the average payoff of the whole lattice rather than just the nearest neighbors, thus representing results for the two limiting cases concerning the interaction range of individual players. There are small quantitative differences between the presented curves. But more importantly, we see that the inflection point of the curves and the minimum level of cooperation are both very similar in all cases, thus pointing to a good qualitative agreement and a deeper mechanism promoting this effect.

Assuming the weak prisoner’s dilemma,  $R = 1$  and  $S = P = 0$ , this gives us

$$u_d = \rho^2 R + (1 - \rho)^2 P + \rho(1 - \rho)(T + S) = \rho^2 + \rho(1 - \rho)T, \quad (6)$$

$$u_c = \rho R + (1 - \rho)S = \rho R, \quad (7)$$

$$\bar{u} = \rho T + (1 - \rho)P = \rho T, \quad (8)$$

and finally the ODE,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1 - \rho}{1 + e^{-[\rho^2(1-T)]/k}} - \frac{\rho}{1 + e^{-[\rho(\rho-1)(1-T)]/k}}. \quad (9)$$

This first approximation relates to the case where there is no spatial structure, and therefore sites cannot rely on spatial correlation effects. The results for this model are shown in Fig. 1, together with the results for other studied cases. The next step if one wishes to account for spatial effects is to consider the nearest-neighbor approximation [24,38,70]. Here we use a focal site  $i$  and define its chance of turning into a cooperator or defector. We do so by calculating exactly its payoff with the first four nearest neighbors of the square lattice. To calculate the transition rates, we consider all combinations of cooperators and defectors in the neighborhood of the focal site. The transition rates in the first neighbor approximation then become

$$\Gamma_{\pm} = \sum_{n=0}^4 \binom{4}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(4-n)} P_{\pm}(u_f, \bar{u}), \quad (10)$$

where  $n$  is the number of cooperative neighbors for each configuration. The term  $\binom{4}{n}$  is the binomial coefficient accounting different combinations of  $n$  cooperators and  $4 - n$  defectors in

a given configuration (for example, the configuration CDDD can repeat itself in four different ways, while CCCC happens only once). The term  $\rho^n(1-\rho)^{4-n}$  weighs the probability of such a configuration, with  $n$  cooperators, to happen. Finally,  $P_{\pm}(u_f, \bar{u})$  is the probability, in a given specific configuration, that the focal site will turn into a cooperator ( $P_+$ ) or a defector ( $P_-$ ). This probability is the only term that is directly dependent on the update rule chosen (Imitation or WSLs). Note that  $u_f$  and  $\bar{u}$  depend on the configuration. Since the solution for the master equation of the imitation model can be found in the literature [5,24], here we focus on the solution of the WSLs model.

The focal site compares its payoff,  $u_f$ , with the average payoff of the four neighbors. In a configuration where there are  $n$  cooperators, the focal payoff is  $u_f = nT$ . To calculate  $\bar{u}$ , we have to estimate the payoff of each neighbor first. Let us assume that the probability that a second neighbor of the focal is a cooperator is also equal to  $\rho$ . Given that the focal is a defector, a cooperative neighbor receives 0 in the interaction with the focal and receives  $3\rho$  on average in the interaction with the second neighbors. In the same way, a defective neighbor receives  $3T\rho$  on average. Thus, the average payoff of the neighbors,  $\bar{u}$ , in any configuration with  $n$  cooperators is

$$\bar{u}_{\Omega} = \frac{1}{4}[n3\rho + (4-n)3T\rho] = \frac{3}{4}(n\rho + 4T\rho - nT\rho). \quad (11)$$

Thus,

$$P_+ = \frac{1}{1 + e^{-[T(12\rho - 3n\rho - 4n) + 3n\rho]/4k}}, \quad (12)$$

and

$$P_- = \frac{1}{1 + e^{[T(3n\rho + n - 4 - 12\rho) - 3n\rho + 3n]/4k}}. \quad (13)$$

The equilibria of the master equation can be found analytically in the limit  $k \rightarrow 0$ , where players are assumed fully rational. In this limit, the fermi probabilities become

$$P_{\pm} = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{u} - u_f > 0, \\ 1/2 & \text{if } \bar{u} - u_f = 0, \\ 0 & \text{if } \bar{u} - u_f < 0, \end{cases} \quad (14)$$

and the transition rates will be just polynomial functions. In the limit of large  $T$ , the difference  $\bar{u} - u_f$  can be explicitly evaluated for each neighborhood configuration of  $n$  cooperators. Solving these polynomials we found that

$$P_- = \begin{cases} 1 & \text{if } n < 3, \\ 0 & \text{if } n = 0 \quad \text{and} \quad \rho \neq 1. \end{cases} \quad (15)$$

and

$$P_+ = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n = 1 \quad \text{and} \quad \rho < 4/9, \\ 0 & \text{if } n > 1, \end{cases} \quad (16)$$

Simplifying the master equation, Eq. (3), in the limit for  $k \rightarrow 0$  and large  $T$ , we get

$$\dot{\rho} = (1-\rho)^5 - \rho(1-\rho)[(1-\rho)^3 + 4\rho(1-\rho)^2 + 6\rho^2(1-\rho) + 3\rho]. \quad (17)$$

This equation has a stable fixed point at  $\rho^* \approx 0.209$ , which means that cooperation can coexist with defectors even for high temptation values. This is an interesting result in terms

of cooperation survival and it goes along with different approaches on innovative dynamics [21,42,71]. Note that, in Eq. (16),  $P_+ = 0$  for  $n = 1$  only if  $\rho < 4/9$ . Since  $\rho^* < 4/9$ , the analysis is consistent.

We proceed with the numerical integration of the original master equation with arbitrary parameters (any  $T$  value), using the fourth-order Runge-Kutta method. Figure 1 summarizes the results for both analytical equations (well-mixed population and nearest neighbors of the square lattice). For comparison, we also show the results of Monte Carlo simulations, which will be discussed more thoroughly in the next section. We note that in Fig. 1 “Monte Carlo whole lattice” refers to the aspiration of each site being equal to the average payoff of the whole lattice. It can be observed that the interaction topology slightly changes the results in both analytical and numerical models quantitatively, but not the main characteristics of the WSLs update rule. We also ran Monte Carlo simulations for different aspiration level ranges, varying it from just the four nearest neighbors to the whole lattice in a continuous fashion, and the results all fell between the two depicted limiting cases (the four nearest neighbors and the whole lattice) in Fig. 1. Looking at the results, we can observe that the WSLs update rule yields specific but generally valid results. Namely, there is always a minimum level of cooperation in the population even for large  $T$  values, and a smoother decline in cooperation as  $T$  increases when compared to the relatively steep and sudden transitions observed previously in imitation models (see also Fig. 3). These results are thus intrinsically different from those obtained with imitative dynamics, even in the well-mixed case and regardless of the interaction range for the determination of payoffs and aspirations. We argue that this is due to the intrinsic micromechanism present in innovative dynamics, which is of course not present in the imitation model. We will further explore these mechanisms in the next section with an analysis of the corresponding spatial patterns. Last, concerning the results presented in Fig. 1, we also point out that the Monte Carlo simulations and the numerical solutions of the master equation agree very well qualitatively.

Figure 2 shows that the system reaches a stable state independently of the initial fraction of cooperation. This is a very important feature of the proposed model, since it is well known that not every update rule will have an equilibrium state that is independent of the initial conditions [42,72–74].

The mean-field technique is a good approximation to obtain insights and confirm predictions. However, it often does not return the same results of the simulation in the structured population, some times not even qualitatively [24,75]. In our case, it is interesting to notice that the mean-field approximation correctly predicts the existence of the minimum cooperation level.

## B. Monte Carlo simulations

We use the asynchronous Monte Carlo procedure to simulate the dynamics. A random player,  $i$ , is selected and the cumulative payoff of  $i$ , as well as the payoff of the first and second neighbors of  $i$ , are calculated. Then player  $i$  decides to change its strategy based on the update probability 1 for WSLs or 2 for imitation dynamics. One Monte Carlo step (MCS) consists of this process being repeated until each

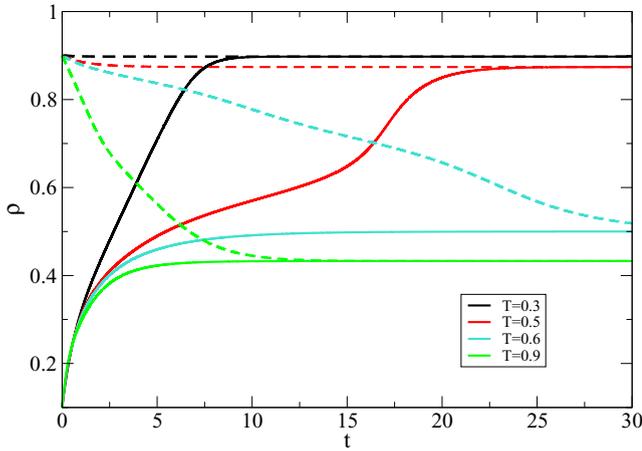


FIG. 2. Time evolution of the average cooperation level in the mean-field approximation. The graph shows two sets of curves, each obtained with different initial conditions. The system always reaches a stable state, independent of the initial condition for each value of  $T$ .

player has the chance to change its strategy. We used  $k = 0.1$  in all simulations. For a detailed discussion on Monte Carlo methods in evolutionary dynamics see Refs. [24,76–78]. In our simulations we ran the algorithm until the system reaches an equilibrium state ( $10^4$ – $10^5$  iterations) [24,79]. Then we take the averages over 1000 Monte Carlo Steps (MCS) for 10–20 different initial conditions. We use  $10^4$  individuals distributed in a square lattice, unless stated otherwise. The square lattice have periodic boundary conditions and we start with homogeneous strategy distribution (we note that for our model the initial distribution did not change the final outcome).

We start by comparing the WLSL model to the usual imitation model for the weak prisoner’s dilemma ( $S = 0$ ). Figure 3 shows the fraction of cooperation in the equilibrium,  $\rho$ , as a function of the parameter  $T$ . In contrast to the imitation

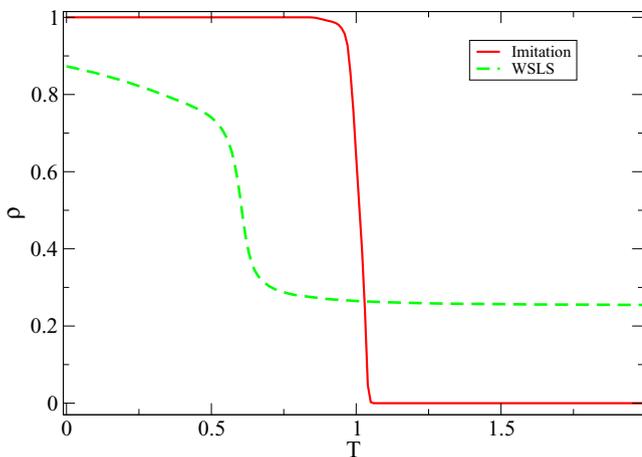


FIG. 3. Fraction of cooperators as a function of  $T$ , as obtained with Monte Carlo simulations. We used the weak prisoner’s dilemma with  $S = 0$  and  $k = 0.1$ . The behavior of WLSL is different from the imitation dynamics, especially above  $T = 1$ , where here we have a nonzero cooperation level. Note also how the WLSL has a smooth drop in  $T \simeq 0.6$ .

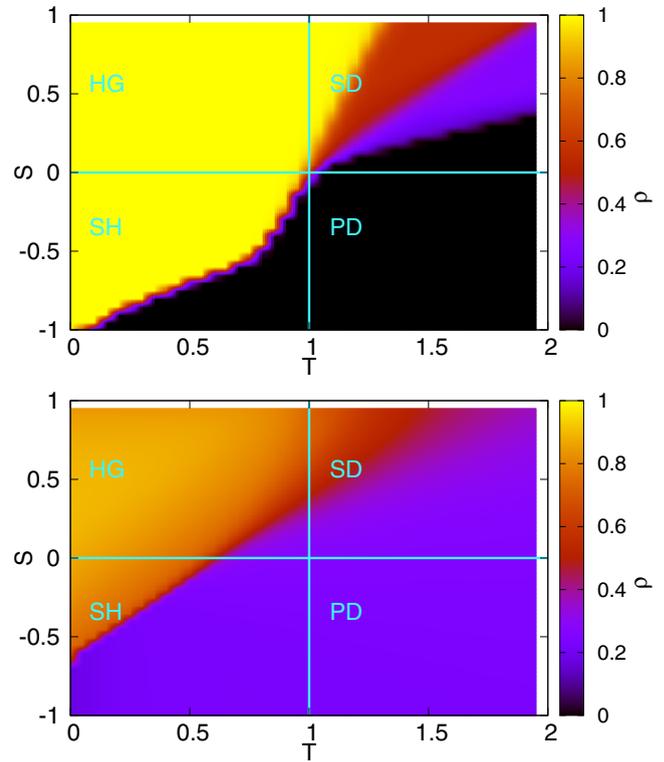


FIG. 4. Phase diagram depicting the fraction of cooperators (color bar), depending on  $S$  and  $T$  for the two different models (WLSL and imitation). In the imitation model (top), as expected, there is full cooperation in the harmony game quadrant, some coexistence in the SD quadrant, a sharp division in the SH quadrant, while most of the PD quadrant is dominated by defection, with cooperators surviving only near the weak PD regime, with  $T_c \approx 1.04$ . For the WLSL model (bottom) the cooperation is widespread everywhere, although lower than for imitation in the HG quadrant. We can see that the model is efficient in maintaining the coexistence of strategies even for high values of  $T$ .

model, which exhibits a phase transition near  $T_c = 1.04$  where cooperators are extinct [24,75], the WLSL model has a smooth drop in cooperation levels, but cooperation is not extinct, even for large  $T$ . This result agrees with the predictions of coexistence of cooperation found in our mean-field approximation. Also notice that cooperation is smaller in the WLSL model for small values of  $T$  compared to the imitation model. Recall that results for the imitation model are only for the sake of comparison in this work, since other papers study this model in depth (for a comprehensive review see Ref. [24]).

Figure 4 shows cooperation level in the entire  $T$ - $S$  plane for the imitation and the WLSL model, with cooperation represented by the color scale.

As expected, in the imitation model there is full cooperation in the HG quadrant, a mixture of full cooperation and coexistence in the SD quadrant, a sharp division of full cooperation or full defection for the SH quadrant and only defection for most of PD quadrant. The only coexistence in PD game is for small  $S$  values (around  $S = -0.01$ ) [75].

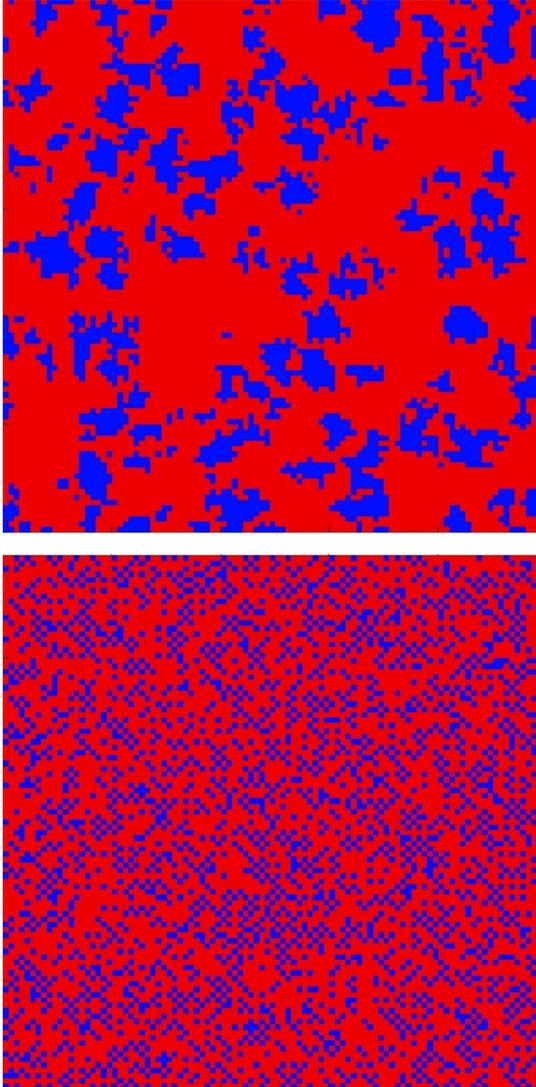


FIG. 5. Typical snapshots from the imitation (top) and WSL (bottom) models, cooperators are dark blue and defector light red. We can see different spatial organization patterns that spontaneously emerge. We depict a typical PD game where  $\rho \approx 0.25$  and  $S = -0.01$  for both models. The temptation level is imitation ( $T = 1.023$ ) and WSL ( $T = 1.1$ ).

In the WSL model we see a totally different behavior. Cooperation coexists with defectors in the entire phase diagram. More specifically, cooperation is mostly enhanced in the HG quadrant; there is a sharp division in the SH quadrant; in the SD there is a smooth variation; and in the PD quadrant cooperation has the lowest values. The interesting result is that cooperation levels are nonzero for the whole phase diagram, the lowest value around 0.2.

It is insightful to see one-frame snapshots of the square lattices after the system reaches a dynamical equilibrium. Figure 5 shows snapshots of the lattice for each model (both imitation and WSL have the same fraction of cooperation and are playing the prisoner's dilemma). Note that the spatial organization of cooperators is totally different. While in the imitation model, cooperators form islands to survive

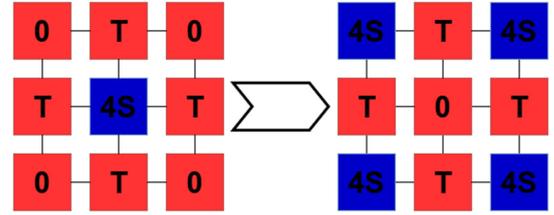


FIG. 6. Cooperator (dark blue) surrounded by defectors (light red) in the deterministic version of the WSL model. Although the focal site changes to defection, its second neighbors become cooperators due to the lower payoff when compared to the first neighbors.

(as expected) [24], in the WSL model cooperators and defectors are homogeneously distributed, forming a checkerboard-like pattern. Similar patterns for innovative dynamics were also found in Ref. [71]. Remarkably, the weak correlation present in the WSL is the cause of the success of our mean-field approximation.

To understand the microscopic mechanisms underlying the evolution of cooperation, we study the deterministic case, obtained in the limit  $k \rightarrow \infty$  and, again, we set  $S = 0$  for simplicity. We stress that simulations in this limit yield the similar results are for intermediate  $k$  values. The evolution of cooperation in the WSL model, in contrast to the imitation model, must rely on a different microscopic mechanisms to promote cooperation, as indicated by the distinct spatial organizations of strategies. Since the statistical nature of the Fermi-Dirac distribution does not allow us to obtain a simple picture of the mechanisms, we will focus on the deterministic case obtained in the limit  $k \rightarrow \infty$ , where the site definitively changes its strategy if  $u_i < \bar{u}$ , or stays the same in the opposite situation. We set  $S = 0$ , again, for simplicity.

Analyzing a cooperator surrounded by defectors, we see that cooperation spreads to the second next neighbors, instead of to its first neighbors, as can be seen in Fig. 6. Since the payoff of central site C is lower than the average payoff of its neighbors, the central site will change to a defector. But at the same time all second neighbor defectors have a payoff (zero) lower than the payoff ( $T$ ) of the first neighbors defectors, which causes the second neighbors to turn to cooperation. The basic mechanism is the greediness of defectors, surrounded by other defectors. This makes them constantly change strategy if there is at least one defector faring better. In other words, the greediness of defectors leads to their downfall. This micromechanisms also point to the curious phenomena that cooperators do not stick together in this WSL model.

Our results suggest that the effect of the WSL mechanism on cooperation is not directly related to network reciprocity, where cooperators form clusters of cooperation that provide mutual help [32–34,80]. This can be tested by varying the network topology. We therefore investigate how the models behave in scale-free networks [81,82], a well-studied case of topology that enhances cooperation [83–85]. To have a robust result, we study both the absolute payoff (the payoff of a player is just the sum of payoffs obtained in each interaction) and the normalized payoff (the absolute payoff divided by the number of neighbors) [86,87]. The networks

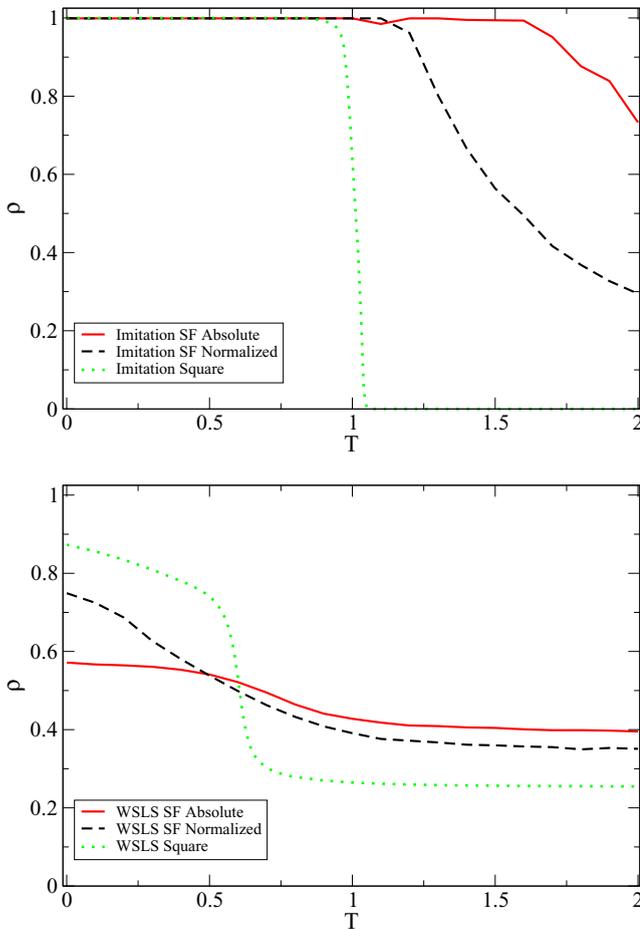


FIG. 7. Fraction of cooperation as a function of  $T$  in two different topologies: square lattice and scale-free network with absolute and normalized payoff. We see for the imitation model (top) that the scale-free network with absolute payoff highly enhances cooperation, while the normalized payoff dampens this boost to a substantial degree. The lowest cooperation is obtained on the square lattice. For the WSL (bottom) the different topologies have little effect on the evolution of cooperation.

are generated with the Krapivsky-Redner algorithm [36,88], a type of growing network with redirection (GNR) method. We used scale-free networks with  $10^4$  nodes, irrationality  $k = 0.1$ , weak PD ( $S = 0$ ), and average connectivity degree of 2.7.

In the imitation model, scale-free networks enhance cooperation when absolute payoffs are considered [86,87]. The enhancement is dampened if normalized payoff is used, but still scale-free topology favors cooperation more than square lattices [9,24,75,81,83–85,87,89–91]. Figure 7 shows the results for scale-free network and square lattice, comparing both imitation and WSL models. The effect of scale-free topology in the promotion of cooperation is much weaker in the WSL model than in the imitation model.

The study of the WSL model in scale-free networks indicates that topology has a small effect in the evolution of cooperation in the WSL model, when compared to the effect it has in the imitation model. It is an interesting result, if we take into account that topology strongly affects

imitative dynamics [9,24,75,81,84,87,89–93]. The topology independence strengthens the point that the mechanisms promoting cooperation in the WSL model relies on another source, other than spatial reciprocity. Recent works found that the system dependency on topology can be irrelevant for some innovative update rules like best response, extortion, and myopic [21,42].

Finally, our analysis reinforces the fact that network reciprocity is dependent on the kind of strategy update rule that is used, and not on the mere presence of network structure. Indeed, the replicator equation is equivalent to the Monte Carlo dynamics only when individuals change strategy by copying each other [1,24,42], and this is not the case here. In the WSL model, strategies are not replicated in the sense that they are transmitted from more successful individuals to less successful ones. Instead, the success of neighbors only influences ones decision on whether to keep or to change its own strategy.

#### IV. CONCLUSIONS

In this work we studied the win-stay-lose-shift mechanism with local average aspiration in the evolutionary game framework using the master equation and Monte Carlo analysis. The basic idea is that players aspire to be at least as wealthy as the average of their neighbors, changing strategy otherwise. Cooperative behavior always face the challenge to survive in a population of self-interest individuals, since defecting against cooperators is more profitable. However, we found that if the motivation of faring as good as the neighbors is the base of individual behavior, cooperation will emerge in coexistence with defection. This result was supported by computer simulations in the entire range of payoff parameters and was confirmed by mean-field approximations.

In imitation models, compact cooperative islands arise around seeds of successful cooperators. At the border between cooperators and defectors, the latter will do better and the islands will spread, sometimes shrink, and in general move across the network. In WSL models, successful defectors will cause an erosion of compact defector patches, since internal defectors will change their strategies due the high success of the defectors at the border. This drastically affects the whole population, causing cooperators to be homogeneously distributed in a checker-board like manner, instead of forming islands. This also results in cooperators lingering even for high values of temptation and, at the same time, defectors being always present in the population, even for strongly cooperative games like the harmony game.

The analytical predictions show a minimum cooperation level above zero, even for high temptation. The stability was reached independent of initial conditions, and we prove that the ODE have a stable equilibrium point with  $\rho^* > 0$  for large  $T$ . We tested the model using asynchronous Monte Carlo dynamics in square and scale-free lattices. Using numerical simulations for Monte Carlo we still found the basal cooperation level and independence with the initial state. Even more, cooperation is widespread through the entire  $T - S$  diagram, differently from the classical non-innovative dynamics where cooperation does not linger on the prisoners dilemma for most values of  $T$  and  $S$ . We deeply analyzed the microscopical mechanism that leads to the support of

cooperation using deterministic dynamics. We found out that in this innovative process, cooperation is transferred to the second neighbors, instead of the first ones as in copy mechanisms. This drastically affects the whole population, causing cooperators to be homogeneously distributed, instead of forming islands. This also results in cooperation lingering for high values of temptation. At the same time defectors are always present, even in strongly cooperative games like the harmony game. We studied the model on scale-free networks and found that the classical result of cooperation enhancement due to network reciprocity remained absent, further supporting the claim that innovative dynamics does not rely on such reciprocity to maintain cooperation. This is interesting, also in the light of recent research on the importance of the integration of cognitive abilities in game theoretical models [94], and the fact that human cooperation is likely more related to cognitive strategies than to effects stemming from replicator dynamics.

Last, our work highlights the relevance of the proper choice of the updating rule when modeling human behavior. While the

evolution of strategies in simpler animals over long timescales can be described by the replicator dynamics, it is not always the case when individuals have higher cognitive capacity and can make choices very fast, in timescales that are much shorter than the typical time to induce an evolutionary transition. We note that our results support preceding research on innovative dynamics, fast decision making, and intuitive cooperation [95–98], highlighting also the importance of the different updating rules. In this sense it becomes clear that one should be very careful when choosing a model to describe a real-life situation. We hope that this paper will motivate further research along this line in the near future.

#### ACKNOWLEDGMENT

This research was supported by the Brazilian Research Agencies CAPES-PDSE (Grant No. BEX 7304/15-3), CNPq and FAPEMIG, and by the Slovenian Research Agency (Grants No. J1-7009 and No. P5-0027).

- 
- [1] J. M. Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982), Vol. 25, Chap. 2.
- [2] J. M. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).
- [3] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
- [4] M. Mesterton-Gibbon, *An Introduction to Game-Theoretic Modelling*, 2nd ed., Student Mathematical Library (American Mathematical Society, Providence, RI, 2001), Vol. 11.
- [5] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics Exploring the Equations of Life* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 2006).
- [6] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
- [7] D. Fudenberg and E. S. Maskin, *Econometrica* **54**, 533 (1986).
- [8] M. A. Nowak and K. Sigmund, *Nature* **364**, 56 (1993).
- [9] F. C. Santos and J. M. Pacheco, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 098104 (2005).
- [10] Z.-X. Wu, X.-J. Xu, Y. Chen, and Y.-H. Wang, *Phys. Rev. E* **71**, 037103 (2005).
- [11] L. A. Imhof, D. Fudenberg, and M. A. Nowak, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, 10797 (2005).
- [12] F. Fu, L. H. Liu, and L. Wang, *Eur. Phys. J. B* **56**, 367 (2007).
- [13] Z.-X. Wu, J.-Y. Guan, X.-J. Xu, and Y.-H. Wang, *Physica A* **379**, 672 (2007).
- [14] J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, L. M. Floría, and Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 108103 (2007).
- [15] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **76**, 021126 (2007).
- [16] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, and Y. Moreno, *New J. Phys.* **9**, 184 (2007).
- [17] J. Poncela, J. Gómez-Gardeñes, L. M. Floría, Y. Moreno, and A. Sánchez, *Europhys. Lett.* **88**, 38003 (2009).
- [18] A. Antonioni and M. Tomassini, *PLoS ONE* **6**, e25555 (2011).
- [19] J. Tanimoto, M. Brede, and A. Yamauchi, *Phys. Rev. E* **85**, 032101 (2012).
- [20] J. Gómez-Gardeñes, C. Gracia-Lázaro, L. M. Floría, and Y. Moreno, *Phys. Rev. E* **86**, 056113 (2012).
- [21] A. Szolnoki and M. Perc, *Phys. Rev. E* **89**, 022804 (2014).
- [22] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **87**, 062136 (2013).
- [23] J. Tanimoto, *Appl. Math. Comput.* **263**, 171 (2015).
- [24] G. Szabó and G. Fáth, *Phys. Rep.* **446**, 97 (2007).
- [25] M. Perc and A. Szolnoki, *Biosystems* **99**, 109 (2010).
- [26] E. O. Wilson, *The Insect Societies* (Harvard University Press, Harvard, 1971).
- [27] A. F. Skutch, *The Condor* **63**, 198 (1961).
- [28] B. M. A. Nowak and R. Highfield, *SuperCooperators: Altruism, Evolution, and Why We Need Each Other to Succeed* (Free Press, New York, 2011).
- [29] W. D. Hamilton, *J. Theor. Biol.* **7**, 1 (1964).
- [30] R. L. Trivers, *Q. Rev. Biol.* **46**, 35 (1971).
- [31] R. Axelrod and W. D. Hamilton, *Science* **211**, 1390 (1981).
- [32] M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
- [33] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *Europhys. Lett.* **86**, 38001 (2009).
- [34] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **81**, 036115 (2010).
- [35] D. S. Wilson, *Am. Nat.* **111**, 157 (1977).
- [36] M. A. Amaral, L. Wardil, M. Perc, and J. K. L. Da Silva, *Phys. Rev. E* **93**, 042304 (2016).
- [37] M. A. Amaral, L. Wardil, and J. K. L. da Silva, *J. Phys. A* **48**, 445002 (2015).
- [38] M. Opper and S. Diederich, *Comput. Phys. Commun.* **121–122**, 141 (1999).
- [39] M. Sysi-Aho, J. Saramaki, J. Kertesz, and K. Kaski, *Eur. Phys. J. B* **44**, 129 (2004).
- [40] M. A. Nowak, *Science* **303**, 793 (2004).
- [41] S. Wang, M. S. Szalay, C. Zhang, and P. Csermely, *PLoS ONE* **3**, e1917 (2008).
- [42] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *Eur. Phys. J. B* **71**, 587 (2009).
- [43] J. Vukov, F. C. Santos, and J. M. Pacheco, *New J. Phys.* **14**, 063031 (2012).
- [44] A. Blume and U. Gneezy, *Games Econ. Behav.* **68**, 488 (2010).
- [45] E. Bonawitz, S. Denison, A. Gopnik, and T. L. Griffiths, *Cogn. Psychol.* **74**, 35 (2014).

- [46] P. S. Dalton, *Center Discussion Paper Series* **2010-23**, 1 (2010).
- [47] M. W. Macy and A. Flache, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99**, 7229 (2002).
- [48] J. Grujić, C. Fosco, L. Araujo, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *PLoS ONE* **5**, e13749 (2010).
- [49] A. Szolnoki, N.-G. Xie, C. Wang, and M. Perc, *Europhys. Lett.* **96**, 38002 (2011).
- [50] C. Wedekind and M. Milinski, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, 2686 (1996).
- [51] E. L. Thorndike, in *Animal Intelligence: Experimental Studies* (The Macmillan Company, New York, 1911), p. 328.
- [52] D. Kraines and V. Kraines, *Theor. Decis.* **26**, 47 (1989).
- [53] H.-X. Yang, Z. Rong, P.-M. Lu, and Y.-Z. Zeng, *Physica A* **391**, 4043 (2012).
- [54] X. Chen and L. Wang, *Phys. Rev. E* **77**, 017103 (2008).
- [55] X. Chen, F. Fu, and L. Wang, *Physica A* **387**, 5609 (2008).
- [56] F. Palomino and F. Vega-Redondo, *Int. J. Game Theory* **28**, 465 (1999).
- [57] J. Oechssler, *J. Econ. Behav. Organ.* **49**, 405 (2002).
- [58] W. Chen, T. Wu, Z. Li, and L. Wang, *J. Stat. Mech.* (2015) P01032.
- [59] M. Perc and Z. Wang, *PLoS ONE* **5**, e15117 (2011).
- [60] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 258103 (2006).
- [61] J. M. Pacheco, A. Traulsen, and M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **243**, 437 (2006).
- [62] Y. Liu, X. Chen, L. Zhang, L. Wang, and M. Perc, *PLoS ONE* **7**, e30689 (2012).
- [63] M. Posch, A. Pichler, and K. Sigmund, *Proc. Roy. Soc. B: Biol. Sci.* **266**, 1427 (1999).
- [64] T. Platkowski, *Appl. Math. Lett.* **22**, 1161 (2009).
- [65] Z. Wang and M. Perc, *Phys. Rev. E* **82**, 021115 (2010).
- [66] I.-K. Cho and A. Matsui, *J. Econ. Theory* **124**, 171 (2005).
- [67] M. Posch, *J. Theor. Biol.* **198**, 183 (1999).
- [68] C. Hauert and G. Szabo, *Am. J. Phys.* **73**, 405 (2005).
- [69] A. Szolnoki and M. Perc, *Sci. Rep.* **4**, 5496 (2014).
- [70] H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki, and K. Sato, *Progr. Theoret. Phys.* **88**, 1035 (1992).
- [71] H. Fort and S. Viola, *J. Stat. Mech.* (2005) P01010.
- [72] Z. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Sci. Rep.* **2**, 369 (2012).
- [73] M. H. Vainstein and J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **64**, 051905 (2001).
- [74] E. Arapaki, *Physica A* **388**, 2757 (2009).
- [75] G. Szabó, J. Vukov, and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **72**, 047107 (2005).
- [76] D. P. Landau and K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [77] K. Binder and D. K. Hermann, *Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* (Springer, Heidelberg, 1988).
- [78] K. Binder, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 487 (1997).
- [79] B. A. Huberman and N. S. Glance, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90**, 7716 (1993).
- [80] A. Szolnoki and M. Perc, *Phys. Rev. E* **84**, 047102 (2011).
- [81] K. S. Brown, C. C. Hill, G. A. Calero, C. R. Myers, K. H. Lee, J. P. Sethna, and R. A. Cerione, *Phys. Biol.* **1**, 184 (2004).
- [82] A.-L. Barabási and R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [83] H. Ohtsuki and M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **243**, 86 (2006).
- [84] F. C. Santos and J. M. Pacheco, *J. Evol. Biol.* **19**, 726 (2006).
- [85] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 345101 (2011).
- [86] N. Masuda, *Proc. Roy. Soc. B: Biol. Sci.* **274**, 1815 (2007).
- [87] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku, *Physica A* **387**, 2075 (2008).
- [88] P. L. Krapivsky and S. Redner, *Phys. Rev. E* **63**, 066123 (2001).
- [89] F. Santos, J. Rodrigues, and J. Pacheco, *Proc. Roy. Soc. B: Biol. Sci.* **273**, 51 (2006).
- [90] M. Nowak and K. Sigmund, *Acta Applic. Math.* **20**, 247 (1990).
- [91] C.-L. Tang, W.-X. Wang, X. Wu, and B.-H. Wang, *Eur. Phys. J. B* **53**, 411 (2006).
- [92] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *Phys. Rev. E* **80**, 046106 (2009).
- [93] F. C. Santos, J. M. Pacheco, and T. Lenaerts, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103**, 3490 (2006).
- [94] A. Bear and D. G. Rand, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113**, 936 (2016).
- [95] D. G. Rand, A. Peysakhovich, G. T. Kraft-Todd, G. E. Newman, O. Wurzbacher, M. A. Nowak, and J. D. Greene, *Nat. Commun.* **5**, 3677 (2014).
- [96] V. Capraro, J. J. Jordan, and D. G. Rand, *Sci. Rep.* **4**, 6790 (2014).
- [97] V. Capraro and G. Cococcioni, *Proc. Roy. Soc. B: Biol. Sci.* **282**, 20150237 (2015).
- [98] V. Capraro and G. Cococcioni, *Sci. Rep.* **6**, 27219 (2016).

**Role-separating ordering in social dilemmas controlled by topological frustration**Marco A. Amaral,<sup>1,\*</sup> Matjaž Perc,<sup>2,3</sup> Lucas Wardil,<sup>4</sup> Attila Szolnoki,<sup>5</sup> Elton J. da Silva Júnior,<sup>1</sup> and Jafferson K. L. da Silva<sup>1</sup><sup>1</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Minas Gerais, Caixa Postal 702, CEP 30161-970, Belo Horizonte-MG, Brazil*<sup>2</sup>*Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Koroška cesta 160, SI-2000 Maribor, Slovenia*<sup>3</sup>*CAMTP—Center for Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Maribor, Krekova 2, SI-2000 Maribor, Slovenia*<sup>4</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil*<sup>5</sup>*Institute of Technical Physics and Materials Science, Centre for Energy Research, Hungarian Academy of Sciences, Post Office Box 49, H-1525 Budapest, Hungary*

(Received 13 December 2016; published 7 March 2017)

“Three is a crowd” is an old proverb that applies as much to social interactions as it does to frustrated configurations in statistical physics models. Accordingly, social relations within a triangle deserve special attention. With this motivation, we explore the impact of topological frustration on the evolutionary dynamics of the snowdrift game on a triangular lattice. This topology provides an irreconcilable frustration, which prevents antcoordination of competing strategies that would be needed for an optimal outcome of the game. By using different strategy updating protocols, we observe complex spatial patterns in dependence on payoff values that are reminiscent to a honeycomb-like organization, which helps to minimize the negative consequence of the topological frustration. We relate the emergence of these patterns to the microscopic dynamics of the evolutionary process, both by means of mean-field approximations and Monte Carlo simulations. For comparison, we also consider the same evolutionary dynamics on the square lattice, where of course the topological frustration is absent. However, with the deletion of diagonal links of the triangular lattice, we can gradually bridge the gap to the square lattice. Interestingly, in this case the level of cooperation in the system is a direct indicator of the level of topological frustration, thus providing a method to determine frustration levels in an arbitrary interaction network.

DOI: [10.1103/PhysRevE.95.032307](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.032307)**I. INTRODUCTION**

The evolution of cooperation is still a major open problem in biological and social sciences [1]. After all, why should self-interested individuals incur costs to provide benefits to others? This puzzle has been traditionally studied by means of evolutionary game theory, and with remarkable success [2–6]. The prisoner’s dilemma game [6,7], for example, is the classical setup of a social dilemma. The population is best off if everybody would cooperate, but the individual does best if it defects, and that regardless of what other choose to do. In classical game theory, the Nash equilibrium of the prisoner’s dilemma game, indeed the rational choice, is thus to defect. Nevertheless, cooperation flourishes in nature, and it is in fact much more common as could be anticipated based on the fundamental Darwinian premise that only the fittest survive. Humans, ants, bees, and even different species between one another, all cooperate to a more or less great extent [8–10].

An important step forward in understanding the evolution of cooperation theoretically was to consider spatially structured populations, modeled, for example, by a square lattice, which has been done first by Nowak and May [11] who discovered network reciprocity. In spatially structured populations cooperators may survive because of the formation of compact clusters, where in the interior they are protected against the invasion of defectors. Other prominent mechanisms that support the evolution of cooperation include kin selection [12], mobility and dilution [13,14], direct and indirect reciprocity [15,16], network reciprocity [11,17–19],

group selection [20], and population heterogeneity [21–24]. In particular, research in the realm of statistical physics has shown that properties of the interaction network can have far reaching consequences for the outcome of evolutionary social dilemmas [25–37] (for reviews see Refs. [38–44]), and moreover, that heterogeneity in general, be it introduced in the form of heterogeneous interaction networks, noisy disturbances to payoffs, or other player-specific properties like the teaching activity or the propensity to acquire new links over time, is a strong facilitator of cooperation [22,37,45–63].

However, the impact of a structured population is not always favorable for the evolution of cooperation. If the interaction network links three individuals into a triangle, it may be challenging, or even impossible, to come up with a distribution of strategies that ensures everybody is best off (even if one assumes away the constraints of the evolutionary competition) [64]. In the snowdrift game, antcoordination of the two competing strategies is needed for an optimal outcome of the game. Clearly, in a triangle, if one individual cooperates and the other defects, the third player is frustrated because it is impossible to choose a strategy that would work best with both its neighbors. Similarly frustrated setups occur in traditional statistical physics, and have in fact been studied frequently in solid-state physics [65,66]. In antiferromagnetic systems, for example, spins seek the opposite state of their neighbors, and again, it is clearly impossible to achieve this in a triangle. As noted above, the snowdrift game is in this regard conceptually identical, and thus one can draw on methods of statistical physics and on the knowledge from related systems in solid-state physics to successfully study the evolutionary dynamics of cooperation in settings that constitute a social dilemma.

\*marcoantonio.amaral@gmail.com

The manifestation of topological frustration in the snowdrift game, however, can depend strongly on how the players update their strategies during the evolutionary process. In the light of recent human experiments [38,67–72], we here consider not only the generally used imitation dynamics, but also the so-called logit rule (also known as myopic dynamics) [73–75]. The latter can be considered as more innovative, allowing players to choose strategies that are not within their neighborhood if they provide a good response to the strategies of their neighbors. Although the long-term evolution in animals is best described by imitation dynamics, humans tend to be more inventive, and thus their behavior aptly described also by innovative dynamics [6,38,70–72,76–82]. Indeed, the impact of the logit rule and of closely related strategy updating protocols on the outcomes of evolutionary games on the square lattice has been studied extensively [74,79,80,83–85], but there the topological frustration is absent.

In what follows, we fill this gap by studying the snowdrift game on the triangular lattice, as well as the transition from the square to the triangular lattice, both by means of mean-field approximations and Monte Carlo simulations. Our main objective is to reveal how an inherent topological frustration affects the evolutionary outcomes. We observe fascinating honeycomb-like patterns, and we devise an elegant method to determine the level of frustration in an arbitrary interaction network through the stationary level of cooperation. Before presenting the main results, we first describe the mathematical model, and we conclude with a discussion of the wider implications of our findings.

## II. MATHEMATICAL MODEL

In our model, players have only two possible strategies, namely cooperation (C) and defection (D), and the game is played in a pairwise manner as defined by the interaction network. During each pairwise interaction players receive a payoff according to the payoff matrix [6,38],

$$\begin{matrix} & C & D \\ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (1)$$

where  $T \in [0,2]$ ,  $S \in [-1,1]$  and  $R = 1$ ,  $P = 0$ . This parametrization is useful as it spans four different classes of games, namely the prisoner’s dilemma game (PD), the snowdrift game (SD), the stag-hunt game (SH), and the harmony game (HG) [38,75,83,86]. After players collect their payoff, they may change their strategies based on a particular strategy updating rule. In this paper, we consider the logit rule and compare it with the classical imitation rule.

The logit rule is based on the kinetic Ising model of magnetism (also known as Glauber dynamics [66,87]). The site will change its strategy with probability

$$p(\Delta u_i) = \frac{1}{1 + e^{-(u_{i*} - u_i)/K}}, \quad (2)$$

where  $u_i$  is the site current payoff,  $u_{i*}$  is the site’s payoff if it changed to the opposite strategy, and the states of neighborhood remain unchanged. Finally,  $K$  is a parameter that measures the irrationality of players. In the literature,  $K$  is usually set between  $K \in [0.001,0.4]$  to simulate a small,

but nonzero, chance of making mistakes [6,38]; we set it to be 0.1. Mathematically, the model is equivalent to the statistics used in physics to describe the dynamics of spins in a Fermi–Dirac distribution and is widely used in evolutionary dynamics [88]. In the context of game theory, this kind of update rule (also known as myopic best response [74]) is regarded as a player asking himself what would be the benefits of changing his strategy (even when there is no neighbor with different strategy). This means that the logit rule is an innovative dynamic, since new strategies can spontaneously appear. Recently, the logit rule has been the focus of many works [38,67–69,74,79,80,83–85] as it leads to very different results compared to imitation models. As we see, this rule is closely related to rational analysis of a situation, instead of the reproduction of the “fittest” behavior. Although evolutionary game theory has its bases rooted in biological populations dynamics, recent works shows that the modeling of humans playing games can have more in common with innovative dynamics [67–69,79,89].

The imitation rule, or imitation dynamics, is one of the most common update rules in iterated evolutionary game theory [6,38] and is based on the concept of the fittest strategy reproducing to neighboring sites. Here we will use it as a baseline for comparison with our results. Site  $i$  will update its state by randomly choosing one of its neighbors,  $j$ , and then comparing their payoff. Site  $i$  adopts the strategy of  $j$  with probability

$$p(\Delta u_{ij}) = \frac{1}{1 + e^{-(u_j - u_i)/K}}, \quad (3)$$

where  $u_{i,j}$  is the total payoff of site  $i,j$  [90]. Note that player  $i$  can only change its strategy to the ones available in its neighborhood. This means that new strategies can never appear once extinguished and players never “explore” new strategies, which can be interpreted as a noninnovative dynamic. This model is associated with biological processes, where each strategy is regarded as a specie, and once extinguished it will never reappear [2,6,38,91]. We note that this is not always the case when modeling human interactions, who can change behaviors depending also on other external, and to a large degree unpredictable, factors. We also note that many works have shown that the strategy updating rule can have profound influence on the evolution of strategies, even changing the impact of the topology of interaction network [38,40,68,89].

### A. Triangular lattice

We make a quick review here to clarify some properties of the triangular lattice. This topology has an important property: every closed loop is composed of an even number of steps, which gives rise to frustration phenomena [65]. The snowdrift game, which is also known as antcoordination game since choosing the opposite strategy of the partner is a Nash equilibrium, is strongly affected by network inherent frustration. In square lattices, the logit rule yields a population displaying a very stable checkerboard pattern, as everyone can choose to do the opposite of all neighbors [38,74,80,85,89,92–94]. In contrast, this spatial ordering is impossible in the triangular lattice, as shown in Fig. 1. Every pair of different strategies will share at least one third neighbor that will be frustrated. This phenomenon is well explored in magnetic models, where

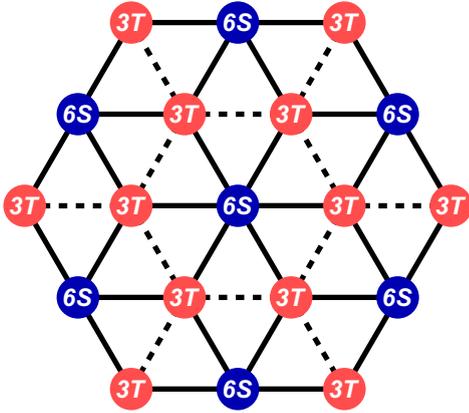


FIG. 1. The minimal frustration configuration in the triangular lattice. Every blue (dark gray) site (cooperator) receives the best payoff, although defectors, marked red (light gray), have only half of their connections leading to the best payoff. Frustrated bonds are drawn by dashed lines and bonds that maximize the payoff are drawn by full lines.

many interesting “spin-glass” phenomena can arise [65,95]. In spin models we see that the “minimum energy” configuration would be similar to the pattern shown in Fig. 1. We wish to analyze this situation in evolutionary game dynamics. One type of player is surrounded by a honeycomb structure of the opposite type, repeated infinitely for a large lattice. Notice that the central site (blue) does not have any frustrated connections, while the other type (red) is frustrated in half of its connections.

### III. RESULTS

We start showing that, mathematically, the formal relation between anticoordination games and antiferromagnetic systems [38,74,75,80,84,85,89,93,94,96] is not an identity. Let us consider a matrix for the energy of a single spin in a magnet with coupling constant  $J$  and an external magnetic field  $B$ , similar to the payoff matrix 1:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \left( \begin{array}{cc} -J - B & J - B \\ J + B & -J + B \end{array} \right) \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \quad (4)$$

The spins in the antiferromagnet ( $J < 0$ ) tend to point in the opposite direction as their neighbors, as in anticoordination games individuals tend to do the opposite of their neighbors. However, equating the payoff matrix to the energy matrix ( $-J - B = R$ ,  $J - B = S$ ,  $J + B = T$ , and  $-J + B = P$ ) and requiring the snowdrift payoff condition ( $T > R > S > P$ ) yield

$$J + B > 0, \quad 0 > J, \quad \text{and} \quad J > B, \quad (5)$$

which is a mathematical absurd. There is no combination of parameters that obey both the physical symmetry of magnetic system and the dilemma hierarchy of game theory for a general case. In other words, the magnetic system obeys a diagonal symmetry in the matrix, whereas the game theory obeys a linear hierarchy of the parameters in the matrix, both cannot be fulfilled simultaneously. It is important to stress that, although we will see many phenomena in the simulations

that are analogous to antiferromagnetism, the systems are not formally identical.

#### A. Master equation

Let us analyze the logit model using mean-field approximation at nearest-neighbor level [38,97,98]. For simplicity we set  $S = 0$  in this section. If  $T > 1$ , we have the so-called weak prisoner’s dilemma. Consider a central site  $i$  on a lattice. It interacts only with its four (square lattice) or six (triangular lattice) nearest neighbors ( $\Omega$  neighborhood). In this setup, we present the master equation for the average fraction of cooperators,  $\rho$  (note that  $\rho$  is a function of  $t$ ):

$$\dot{\rho} = (1 - \rho)\Gamma_{+(C \rightarrow D)} - \rho\Gamma_{-(D \rightarrow C)}, \quad (6)$$

where  $\Gamma_{\pm}$  is the probability for the central player to change its strategy to  $C$  ( $D$ ). We obtain  $\binom{N}{n}$  different neighborhood configurations where  $N$  is 4 for the square lattice and 6 for the triangular lattice and  $n$  is the number of cooperative neighbors for each neighborhood configuration. Therefore,

$$\Gamma_{\pm} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} P_{\pm}(u_i, u_{\Omega}). \quad (7)$$

Here,  $\binom{N}{n}$  are the binomial coefficients and weights the repetitions of identical configurations. Note that while  $n$  varies in the summation,  $N$  is fixed for each lattice type. The term  $\rho^n (1 - \rho)^{(N-n)}$  weighs the probability of such a configuration, and  $P_{\pm}(u_i, u_{\Omega})$  is the probability, in a specific configuration, that the central site will turn into a cooperator ( $P_{+}$ ) or a defector ( $P_{-}$ ). This probability is the only term that is directly dependent on the update rule chosen (logit or imitation). For the logit rule the focal site changes the state comparing its current payoff ( $u_i$ ) with its future payoff if the state was changed, ( $u^*$ ). Calculating  $P_{+}(u_i, u_{\Omega})$ , for the case where the central site is  $D$  and changes to  $C$ , we have

$$P_{+}(u_i, u_{\Omega}) = \frac{1}{1 + e^{-(u^* - u_i)/K}}. \quad (8)$$

Analytically, one of the advantages of the logit model is that the probability does not depend explicitly on the payoffs of the neighborhood  $\Omega$ . If the central site is  $D$  ( $C$ ), the payoff difference, for any configuration, will be

$$(u^* - u_i)_{D \rightarrow C} = n(1 - T), \quad (9)$$

$$(u^* - u_i)_{C \rightarrow D} = n(T - 1). \quad (10)$$

Using  $A = (1 - T)/K$  to simplify, we get

$$P_{\pm}(u_i, u_{\Omega}) = \frac{1}{1 + e^{\mp nA}}. \quad (11)$$

Remember that the solution for the master equation of the imitation model can be found in the literature [6,38,56]. The master equation for the logit model becomes

$$\dot{\rho} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \rho^n (1 - \rho)^{(N-n)} \left( \frac{1}{1 + e^{\frac{-n(1-T)}{K}}} - \rho \right). \quad (12)$$

This yields a sixth-order polynomial that analytically have at least one root in the region  $0 < \rho^* < 1$ . This is independent of  $T$ , meaning that at the nearest-neighbor level there exist

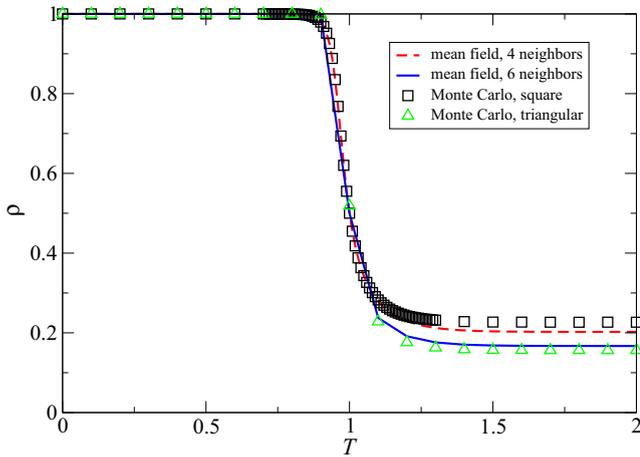


FIG. 2. The fraction of cooperators in equilibrium as a function of  $T$ . The results refer to Monte Carlo simulations (symbols) and the master equation ODE (lines) in the logit model for both lattices. Note that simulation and analytical results agree well and reproduce the main characteristic of the system, namely a nonvanishing cooperation level.

at least some minimum cooperation level independently of the value of temptation. The existence of a minimum level of cooperation is an interesting result, agreeing with other approaches on innovative dynamics that found similar results using Monte Carlo simulations and experiments with humans [67–69,74,79,84,85,99,100].

To obtain the time-independent solution of the master equation we use a fourth-order Runge-Kutta integrator. As in other models, the system reaches a stable state after some time. In our model the behavior of  $\rho(t)_{t \rightarrow \infty}$  is independent of the initial fraction of cooperation. This is an important feature, as not every update rule will have an equilibrium state independent of the initial conditions [79,86,101,102]. Figure 2 shows the cooperation level for the stable equilibrium ( $\rho(t)_{t \rightarrow \infty}$ ) as a function of  $T$ . We compare the Monte Carlo simulation (further analyzed below) with the numerical solution for the master equation in both topologies. The mean-field approach agrees with the simulation results and, most importantly, both approaches report a basal cooperation level for any  $T$ .

The mean-field technique is a good approximation to obtain insights and confirm the prediction of other methods. Even so, it does not always return the same results as in the structured population [38,75], it is only an approximation. In our case, it is interesting to notice that both methodologies (Monte Carlo and mean field) report the minimal level of cooperation that is independent of the value of temptation. This kind of basal cooperation level was also found in other studies using innovative dynamics, even with different update rules and topologies [74,84,85].

### B. Monte Carlo simulations

We use the asynchronous Monte Carlo procedure to simulate the evolutionary dynamics. First, a randomly chosen player,  $i$ , is selected. The cumulative payoff of  $i$  and of its nearest neighbors payoffs are calculated. Then player  $i$  changes its strategy based on the update probability defined

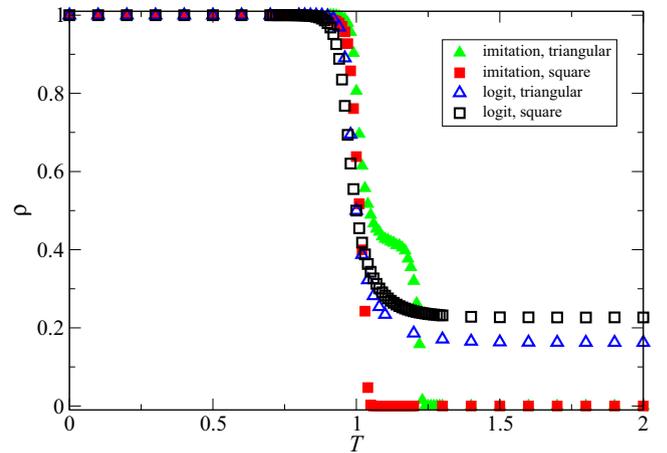


FIG. 3. The fraction of cooperators in equilibrium as a function of  $T$ , as obtained by means of Monte Carlo simulations (for  $S = 0$ ). Note that the difference between the logit and the imitation model is significant for  $T > 1$ , where the logit model exhibits a minimal cooperation level. Also note that the sharp drop in cooperation occurs in the same region.

in Eq. (2) for logit or in Eq. (3) for imitation dynamics. One Monte Carlo step (MCS) consists of this process repeated  $L^2$  times, where  $L$  is the lattice linear size (here we set  $L = 100$ ). For a detailed discussion on Monte Carlo methods in evolutionary dynamics we suggest Refs. [38,103–105]. We ran the algorithm until the equilibrium state ( $10^4$ – $10^5$  MCS's); then we average over 1000 MCS's for 10–20 different initial conditions. We used periodic boundary conditions and random, homogeneous initial strategy distribution.

Starting with the weak prisoner's dilemma ( $S = 0$ ), we compare the logit with the imitative dynamics. Figure 3 shows  $\rho$  as a function of  $T$ . The logit model has a sharp decay in cooperation, almost at the same point where the imitation model has a transition [38,75]. This is valid for both square and triangular lattices. Also, it is remarkable that for large  $T$  a minimal global value of cooperation survives, confirming the prediction of our mean field approach.

Figure 4 shows the fraction of cooperation in the entire  $T$ - $S$  plane in the imitation and logit models, for both triangular and square lattices. Notice how similar the outcomes are in the HG, PD, and SH games. The difference appears in the snowdrift game. Imitation dynamics yields similar results in both square and triangular lattices, but logit dynamics yields different results. More specifically, while in the logit model on the square lattice there is a flat plateau of 50% cooperation (deeply studied in Refs. [74,84,85]), in the triangular lattice there are basically two phases separated by a straight diagonal line ( $S = T - 1$ ). Notice that on the square lattice the whole SD region is associated with a static checkerboard pattern, corresponding to the Nash equilibrium, which is the most efficient way of increasing the population payoff, as previously stressed in Refs. [74,80,83–85,93,100]). It is also interesting to notice that for the logit model, cooperation survives independently of  $T$  for some range of  $S$  (around  $S \simeq -0.15$ ) in the PD region.

Studying the SD region for triangular lattice in the logit dynamics, we find a plateau of  $\rho \simeq 0.35$  below the diagonal

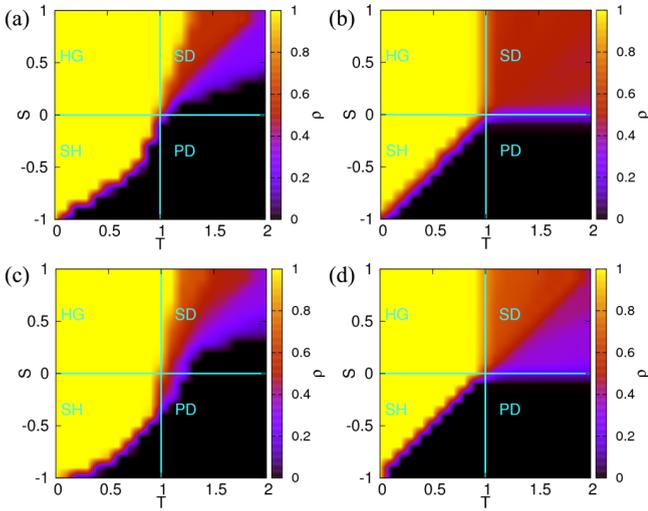


FIG. 4. Heat maps encoding the cooperation level for the whole  $T$ - $S$  plane. The top row, (a) and (b), shows results obtained on the square lattice, while the bottom row, (c) and (d), shows results obtained on the triangular lattice. The left column, (a) and (c), shows results obtained with the imitation dynamics, and the right column, (b) and (d), shows the results obtained with the logit rule. When imitation dynamics is used, there is little difference inferable that would be due to the differences in the interaction lattice. For the logit model, the level of cooperation is higher in the SD region for both topologies. Most interestingly, for the triangular lattice, we can observe two different phases that are separated by a straight line.

line and  $\rho \simeq 0.65$  above it, with minor fluctuations of  $\pm 0.05$ . We further refer to Refs. [74,84,85,93] for the analysis of the square lattice, where such plateau is also found with a single phase ( $\rho = 0.5$ ). In principle, there would be two “ground states” exhibiting a honeycomb pattern: a concatenation of cells with a central  $D$  surrounded by  $C$ 's and a concatenation of cells with a central  $C$  surrounded by  $D$ 's. Let us consider the first “ground state,” where the central site in each cell of the honeycomb configuration is a defector surrounded by six cooperators. Each one of these six cooperators is shared by three distinct cells. The fraction  $\rho$  in an infinite lattice is calculated as the fraction of cooperators in the cell, weighting each site by the number of blocks that share it. So we have

$$\rho = \frac{6/3}{6/3 + 1} = \frac{2}{3}. \quad (13)$$

The calculation for the other “ground state” is analogous, yielding  $\rho = 1/3$ . Most interestingly, the system is driven to one of the two “ground states” configurations depending on the payoff parameters. To make this point clearer, in Fig. 5 we show the fraction of cooperation for parameters along a straight line orthogonal to the line that divides the plateaus observed in the SD region. We can clearly see the two plateaus and the transition point where the roles of  $C$  and  $D$  players are exchanged, as shown in the inset of the patterns.

The logit model seems to drive the system to the maximum attainable global payoff (related to the minimum energy level). To further study this hypothesis, we quantify the frustration,  $\phi$ , defined as the fraction of frustrated links. In SD games the frustrated links are the  $CC$  and  $DD$  pairs. Note that

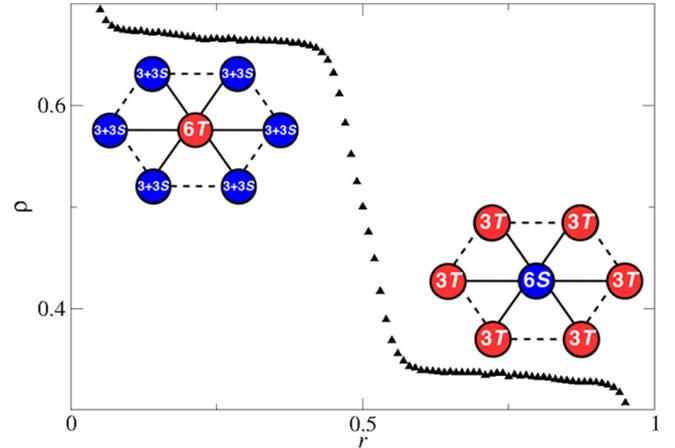


FIG. 5. The fraction of cooperators in equilibrium along the line defined by  $T = 2 - S$  in the logit model on a triangular lattice. Here the payoff values are varied via the control parameter  $r$ , where  $T = 1 + r$  and  $S = 1 - r$ . Instead of a homogeneous state, like on the square lattice, we observe two different phases with honeycomb-like spatial patterns. The insets illustrate the typical honeycomb cell that is characteristic of each phase.

our definition of frustration is a good measurement of the “homogeneity” and global spatial structure of the lattice: the frustration is 1 for any homogeneous state, regardless of the cooperation level, and can be zero, for example, in the chess board pattern configuration of cooperators and defectors on square lattices. In both “ground states” configuration of the triangular lattice, we can easily show that the frustration is equal to  $1/3$ . In Fig. 6 we compare the lattice frustration of logit and imitation rules for the SD region (frustration is meaningless outside this parameter range). The imitation model maintains a high frustration, around 60%, whereas the logit model maintains a moderate frustration, around 35%, independently of payoff values of  $T$  or  $S$ , which is very close to the analytical solution of the honeycomb structure. Note that on triangular lattices the minimum achievable frustration is  $1/3$ , as there is an inevitable topological frustration. Also note how frustration quickly rises to almost 1 in the borders of the diagram, where there is full cooperation or full defection.

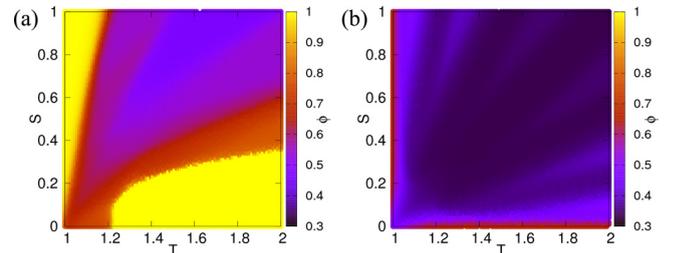


FIG. 6. The level of frustration,  $\phi$ , in the snowdrift region of the  $T$ - $S$  diagram for the imitation (a) and logit (b) strategy updating rules on the triangular lattice. The imitation model has many frustrated links, around 60%, while the logit model maintains the low and homogeneous frustration of around 35%.

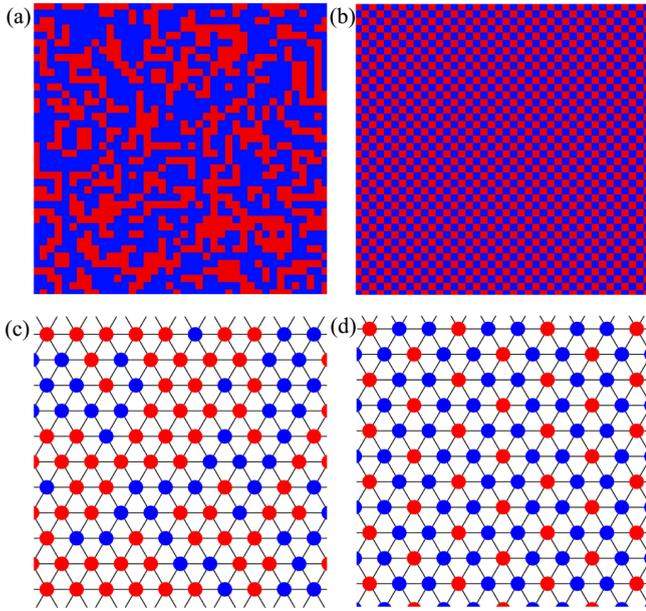


FIG. 7. Typical snapshots of the square lattice in the top row, (a) and (b), and the triangular lattice in the bottom row, (c) and (d), in the SD region. The left column, (a) and (c), shows the results for imitation model while the right column, (b) and (d), shows the results for the logit model. In the logit model on the square lattice a checkerboard pattern quickly emerges. In the logit model on the triangular lattice, on the other hand, we see the honeycomb pattern. Here we use  $T = 1.2$  and  $S = 0.5$ .

To further support our claims, we present snapshots of the lattices in dynamic equilibrium on the SD region. The Monte Carlo method is of course probabilistic, and accurate results are dependent on sufficiently large averages [38,103–105]. Even so, it is insightful to see the images of the lattice after the system has reached a dynamical equilibrium. Figure 7 shows typical snapshots of logit and imitation update rules for square and triangular lattices. It is clear the differences in spatial organization exhibited in each model. We see that in both topologies the imitation update tends to maintain cooperators in clusters, whereas the logit model tends to distribute strategies more homogeneously. Specifically, the logit model on square lattice tends to form a checkerboard pattern, a behavior that has been consistently reported in different innovative rules [74,80,83–85,93,100] and is usually attributed to the population rearranging itself to receive the highest total payoff achievable. For the triangular lattice we can see that the expected frustrated pattern illustrated in Fig. 1 indeed emerges. It is worth mentioning that it is the absence of clustering that makes the mean-field approximation a good one for the logit dynamics. Such phenomena suggests a general behavior exhibited by innovative dynamics that leads to the emergence of specific spatial structures, other than cooperation islands. We note that, while clustering has a strong effect on everyday cooperative interactions [106,107], the emergence of diluted patterns in our model suggests that some role-separating structure may also emerge in human population, where members have different roles to obtain a higher collective income.

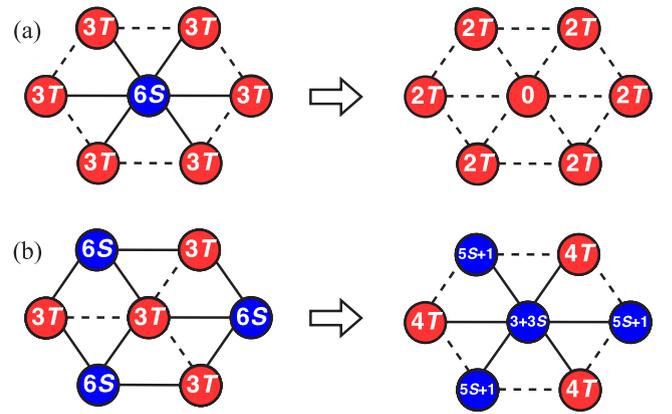


FIG. 8. Leading microscopic processes that guide pattern formation in a frustrated topology. (a) A cooperator surrounded by defectors is very stable, since the change in payoff here would be  $-6S$ . (b) Defectors in the vertices, now shown in the center, may change their strategy, depending on the parameters. The payoff difference would be  $3(S - T + 1)$ . If  $S > T - 1$  the chance that defector becomes a cooperator is high.  $S = T - 1$  is the line dividing the two phases seen in Fig. 4.

Last, we analyze the representative microscopic mechanisms that explain how strategy evolution accommodates to topological frustration. In Fig. 8(a) we present a local strategy distribution where the central site is highly unlikely to change its strategy that makes the honeycomb configuration very stable. Conceptually similar stable local distribution can be drawn where a defector is surrounded by cooperators. However, the sites around the central stable site are not fully satisfied because they have some frustrated bonds. This situation is illustrated in Fig. 8(b) where a frustrated node is in the center. Here the central site has a higher chance to change its strategy depending on the difference between  $(3T)$  and  $(3 + 3S)$ . The threshold value is at the line  $S = T - 1$ , which agrees perfectly with the border line we observed in Fig. 4. The frustrated sites have a pivotal role in the separation of phases illustrated in Fig. 5. For low  $T$  values, that is for  $S > T - 1$ , cooperators fare better than defectors, allowing them to stay in “frustrated” sites of the honeycomb configuration. This results in a large number of cooperators, as every defector will be surrounded by six cooperators ( $\rho \sim 2/3$  in the infinitely repeated limit). The opposite is also true for  $S < T - 1$ , namely, the defectors have a high payoff, allowing them to stay in the frustrated positions of the honeycomb patches. As a result, a stable cooperators will be surrounded by six defectors yielding a relatively low cooperation level ( $\rho \sim 1/3$  in the infinite limit).

We found that frustration can induce two distinct organized patterns on triangular lattices. As we noted, square lattice topology can be considered as the opposite extreme case where there is no frustrated bonds between players. We wonder how these extreme cases can be bridged by an appropriately modified topology where the frustration level can be tuned gradually. To generate such an intermediate level of inherent frustration we modify the triangular lattice by removing two diagonal connections of each site. When we alter the originally triangular lattice then the control parameter is the  $X$  fraction

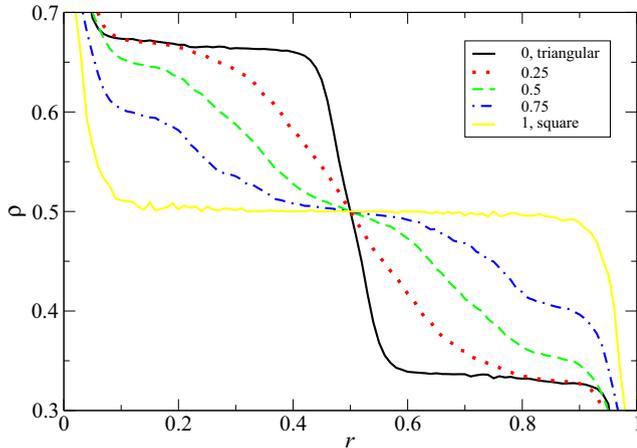


FIG. 9. The effect of link deletion on the cooperation level along the  $T = 2 - S$  line in the logit model. Here the payoff values are varied via the control parameter  $r$ , where  $T = 1 + r$ , while  $S = 1 - r$ . The topology is modified gradually where a fraction  $X$  of diagonal links are removed from a triangular lattice. Accordingly,  $X = 0$  corresponds to the triangular lattice and  $X = 1$  to the square lattice topology. If the topological frustration is mitigated by deleting just a few links, then the steep transition between ordered phases vanishes. Alternatively, when we add a tiny frustration to the interaction graph by leaving  $X = 1$  then the antiferromagnetic order disappears immediately.

of sites that have their diagonal links removed. Accordingly,  $X = 0$  corresponds to the triangular lattice, while at  $X = 1$  the resulting topology agrees with the square lattice. Note that the network remains static throughout the evolutionary process and we study how the strategy evolution may change due to the intermediate level of topological frustration.

Figure 9 shows the resulting cooperation level in dependence on the payoff values for differently frustrated topologies as characterized by the value of  $X$ . As we start mitigating the maximal frustration by increasing  $X$ , the steep transition point separating the two plateaus vanishes immediately verifying that the two ordered phases can only be observed when maximal level of frustration is present in the topology. As we increase  $X$  further then the resulting  $\rho(r)$  function will approximate the  $\rho = 0.5$  plateau only at the  $X \rightarrow 1$  limit. It simply means that the long-range antiferromagnetic order of competing strategies disappears immediately when we leave the  $X = 1$  point and introduce some frustration into the perfectly frustration-free square lattice topology. In between these extreme cases the shape of the  $\rho(r)$  function may inform us about the frustration level of the unknown interaction graph.

#### IV. DISCUSSION

In social interactions the “best response” is often challenging, especially if the interaction involves a triangle. In general, frustrated situations can arise as a consequence of the type of game played, due to specific interaction topologies, but also because of other external factors. Motivated by this phenomenon, we considered the snowdrift game on a triangular lattice where the topological frustration inhibits the expected optimal anticorrelation of strategies. By means of

master-equation approximations and Monte Carlo simulations, we have studied the logit strategy updating protocol, the classical imitation dynamics, and we have compared the evolutionary outcomes obtained on the triangular lattice, the square lattice, and on an abridged transition between the two that was achieved by randomly adding links to the next-nearest neighbors of the square lattice. Our principal interest was to reveal how topological frustration influences the strategy ordering in a spatial system.

In stark contrast to the square lattice where anticorrelation ordering can emerge, the frustrated topology of triangular lattice generates two ordered phases in the snowdrift quadrant. These states are separated by the  $S = T - 1$  line. While for low  $T$  values cooperators occupy  $2/3$  of the available sites and the rest is occupied by defectors, their roles are exchanged for high  $T$  values. In both phases the system evolves into a state which is reminiscent to a honeycomb-like pattern that helps to minimize the negative consequence of the topological frustration. We have identified the microscopic mechanisms that compose these patterns, and we have found that such formations are very stable. By comparing them with the outcome of imitation dynamics, we have found that the logit rule allows the whole system to evolve into the least frustrated strategy distribution that is achievable on each lattice, which also provides the highest population payoff. This state is reached via a strategy distribution where cooperators are less clustered comparing to the patterns constructed by imitation dynamics.

The striking difference between frustration-free (square) and frustrated (triangle) lattices raises a question on what we shall expect if the interaction graph is disordered and the level of topological frustration is unknown. What kind of behavior is expected in such a case? To clarify this, we have introduced a method that allowed us to modify the level of topological frustration gradually. Starting from a triangular lattice, we have randomly deleted a fraction of diagonal links, which decreased the frustration between neighboring bonds. If all diagonal links were deleted, then we arrive at the square lattice. We found that the two ordered phases in the snowdrift quadrant disappear as we mitigate the frustration level. On the other hand, the well-known antiferromagnetic-like checkerboard pattern observed on a square lattice, which is valid for the whole scan of the mentioned quadrant of the  $T$ - $S$  plane, evaporates immediately as we introduce a tiny frustration into the interaction topology. These phenomena highlight how frustration can drive individuals to form complex global patterns, and more importantly, how innovative dynamics can drive the system to the best, i.e., least frustrated, evolutionary outcome.

As the strategy updating rule can drastically alter population dynamics, it is important to study how different protocols deal with frustration and which kind of patterns can spontaneously emerge from the applied dynamic. This is even more interesting in the light of emergence of complexity as individuals interact. The studied logit rule model is essential to the emergence of the patterns shown here, and recent research shows the importance of integrating innovative dynamics in game theoretical models, especially since humans seem to use different rules than simply imitating the best when playing evolutionary games [67–69,79,108–111]. We hope that this paper will motivate further research along this area in the future.

## ACKNOWLEDGMENTS

This research was supported by the Brazilian Research Agencies CAPES-PDSE (Proc. No. BEX 7304/15-3), CNPq

and FAPEMIG, by the Slovenian Research Agency (Grants No. J1-7009 and No. P5-0027), and by the Hungarian National Research Fund (Grant No. K-120785).

- 
- [1] E. Pennisi, *Science* **309**, 93 (2005).
- [2] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982).
- [3] J. W. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).
- [4] J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).
- [5] M. Mesterton-Gibbons, *An Introduction to Game-Theoretic Modelling, 2nd ed.* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2001).
- [6] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 2006).
- [7] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
- [8] E. O. Wilson, *The Insect Societies* (Harvard University Press, Harvard, 1971).
- [9] A. F. Skutch, *Condor* **63**, 198 (1961).
- [10] M. A. Nowak and R. Highfield, *SuperCooperators: Altruism, Evolution, and Why We Need Each Other to Succeed* (Free Press, New York, 2011).
- [11] M. A. Nowak and R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
- [12] W. D. Hamilton, *J. Theor. Biol.* **7**, 1 (1964).
- [13] S. Alizon and P. Taylor, *Evolution* **62**, 1335 (2008).
- [14] E. A. Sicardi, H. Fort, M. H. Vainstein, and J. J. Arenzon, *J. Theor. Biol.* **256**, 240 (2009).
- [15] R. L. Trivers, *Q. Rev. Biol.* **46**, 35 (1971).
- [16] R. Axelrod and W. D. Hamilton, *Science* **211**, 1390 (1981).
- [17] F. C. Santos and J. M. Pacheco, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 098104 (2005).
- [18] F. C. Santos, J. M. Pacheco, and T. Lenaerts, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103**, 3490 (2006).
- [19] J. Gómez-Gardeñes, M. Campillo, L. M. Floría, and Y. Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 108103 (2007).
- [20] D. S. Wilson, *Am. Nat.* **111**, 157 (1977).
- [21] A. Szolnoki and G. Szabó, *EPL* **77**, 30004 (2007).
- [22] M. Perc and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **77**, 011904 (2008).
- [23] F. C. Santos, M. D. Santos, and J. M. Pacheco, *Nature* **454**, 213 (2008).
- [24] F. C. Santos, F. Pinheiro, T. Lenaerts, and J. M. Pacheco, *J. Theor. Biol.* **299**, 88 (2012).
- [25] M. G. Zimmermann, V. M. Eguíluz, and M. San Miguel, *Phys. Rev. E* **69**, 065102(R) (2004).
- [26] M. G. Zimmermann and V. M. Eguíluz, *Phys. Rev. E* **72**, 056118 (2005).
- [27] F. Fu, T. Wu, and L. Wang, *Phys. Rev. E* **79**, 036101 (2009).
- [28] W.-B. Du, X.-B. Cao, M.-B. Hu, and W.-X. Wang, *Europhys. Lett.* **87**, 60004 (2009).
- [29] S. Lee, P. Holme, and Z.-X. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 028702 (2011).
- [30] J. Gómez-Gardeñes, D. Vilone, and A. Sánchez, *Europhys. Lett.* **95**, 68003 (2011).
- [31] T. Ohdaira and T. Terano, *J. Artificial Soc. Social Simul.* **14**, 3 (2011).
- [32] J. Tanimoto, M. Brede, and A. Yamauchi, *Phys. Rev. E* **85**, 032101 (2012).
- [33] M. D. Santos, S. N. Dorogovtsev, and J. F. F. Mendes, *Sci. Rep.* **4**, 4436 (2014).
- [34] A. Pavlogiannis, K. Chatterjee, B. Adlam, and M. A. Nowak, *Sci. Rep.* **5**, 17147 (2015).
- [35] Z.-X. Wu, Z. Rong, and M. Z. Q. Chen, *Europhys. Lett.* **110**, 30002 (2015).
- [36] L. Hindersin and A. Traulsen, *PLoS Comput. Biol.* **11**, e1004437 (2015).
- [37] W. Chen, T. Wu, Z. Li, and L. Wang, *Physica A (Amsterdam)* **443**, 192 (2016).
- [38] G. Szabó and G. Fáth, *Phys. Rep.* **446**, 97 (2007).
- [39] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *Phys. Life Rev.* **6**, 208 (2009).
- [40] M. Perc and A. Szolnoki, *BioSystems* **99**, 109 (2010).
- [41] M. Perc, J. Gómez-Gardeñes, A. Szolnoki, L. M. Floría, and Y. Moreno, *J. R. Soc. Interface* **10**, 20120997 (2013).
- [42] J. M. Pacheco, V. V. Vasconcelos, and F. C. Santos, *Phys. Life Rev.* **11**, 573 (2014).
- [43] Z. Wang, L. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Eur. Phys. J. B* **88**, 124 (2015).
- [44] Z. Wang, S. Kokubo, M. Jusup, and J. Tanimoto, *Phys. Life Rev.* **14**, 1 (2015).
- [45] J. Vukov, G. Szabó, and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **73**, 067103 (2006).
- [46] M. Perc, *New J. Phys.* **8**, 22 (2006).
- [47] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **76**, 041130 (2007).
- [48] A. Szolnoki, M. Perc, and Z. Danku, *Europhys. Lett.* **84**, 50007 (2008).
- [49] A. Szolnoki, M. Perc, and G. Szabó, *Eur. Phys. J. B* **61**, 505 (2008).
- [50] L.-L. Jiang, M. Zhao, H.-X. Yang, J. Wakeling, B.-H. Wang, and T. Zhou, *Phys. Rev. E* **80**, 031144 (2009).
- [51] S. Devlin and T. Treloar, *Phys. Rev. E* **79**, 016107 (2009).
- [52] K. Shigaki, S. Kokubo, J. Tanimoto, A. Hagishima, and N. Ikegaya, *Europhys. Lett.* **98**, 40008 (2012).
- [53] O. P. Hauser, A. Traulsen, and M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **343**, 178 (2014).
- [54] W.-J. Yuan and C.-Y. Xia, *PLoS ONE* **9**, e91012 (2014).
- [55] M. Iwata and E. Akiyama, *Physica A (Amsterdam)* **448**, 224 (2015).
- [56] M. A. Amaral, L. Wardil, and J. K. L. da Silva, *J. Phys. A* **48**, 445002 (2015).
- [57] J. Tanimoto and N. Kishimoto, *Phys. Rev. E* **91**, 042106 (2015).
- [58] R.-R. Liu, C.-X. Jia, and Z. Rong, *Europhys. Lett.* **112**, 48005 (2015).
- [59] M. A. Javarone, *Eur. Phys. J. B* **89**, 42 (2016).
- [60] M. A. Amaral, L. Wardil, M. Perc, and J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **93**, 042304 (2016).

- [61] R. Matsuzawa, J. Tanimoto, and E. Fukuda, *Phys. Rev. E* **94**, 022114 (2016).
- [62] M. A. Javarone and F. Battiston, *J. Stat. Mech.* (2016) 073404.
- [63] M. A. Javarone, A. Antonioni, and F. Caravelli, *EPL* **114**, 38001 (2016).
- [64] L. Wardil and J. K. L. da Silva, *Europhys. Lett.* **86**, 38001 (2009).
- [65] M. D. Robinson, D. P. Feldman, and S. R. McKay, *Chaos* **21**, 037114 (2011).
- [66] K. Binder and D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **21**, 1941 (1980).
- [67] C. Gracia-Lázaro, J. Cuesta, A. Sánchez, and Y. Moreno, *Sci. Rep.* **2**, 325 (2012).
- [68] C. Gracia-Lázaro, A. Ferrer, G. Ruiz, A. Tarancón, J. Cuesta, A. Sánchez, and Y. Moreno, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 12922 (2012).
- [69] J. Grujić, C. Gracia-Lázaro, M. Milinski, D. Semmann, A. Traulsen, J. A. Cuesta, Y. Moreno, and A. Sánchez, *Sci. Rep.* **4**, 4615 (2014).
- [70] J. Vukov, F. Santos, and J. Pacheco, *New J. Phys.* **14**, 063031 (2012).
- [71] A. Blume and U. Gneezy, *Games Econ. Behav.* **68**, 488 (2010).
- [72] E. Bonawitz, S. Denison, A. Gopnik, and T. L. Griffiths, *Cogn. Psychol.* **74**, 35 (2014).
- [73] L. E. Blume, *Games Econ. Behav.* **11**, 111 (1995).
- [74] G. Szabó, A. Szolnoki, and L. Czakó, *J. Theor. Biol.* **317**, 126 (2013).
- [75] G. Szabó, J. Vukov, and A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **72**, 047107 (2005).
- [76] C. Wedekind and M. Milinski, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, 2686 (1996).
- [77] P. S. Dalton, *SSRN Electron. J.* **2010-23**, 1 (2010).
- [78] M. W. Macy and A. Flache, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99**, 7229 (2002).
- [79] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *Eur. Phys. J. B* **71**, 587 (2009).
- [80] M. Sysi-Aho, J. Saramäki, J. Kertész, and K. Kaski, *Eur. Phys. J. B* **44**, 129 (2005).
- [81] J. Grujić, C. Fosco, L. Araujo, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *PLoS ONE* **5**, e13749 (2010).
- [82] A. Szolnoki, N.-G. Xie, C. Wang, and M. Perc, *Europhys. Lett.* **96**, 38002 (2011).
- [83] C. P. Roca, J. A. Cuesta, and A. Sánchez, *Phys. Rev. E* **80**, 046106 (2009).
- [84] G. Szabó, A. Szolnoki, M. Varga, and L. Hanusovszky, *Phys. Rev. E* **82**, 026110 (2010).
- [85] G. Szabó and A. Szolnoki, *J. Theor. Biol.* **299**, 81 (2012).
- [86] Z. Wang, A. Szolnoki, and M. Perc, *Sci. Rep.* **2**, 369 (2012).
- [87] R. J. Glauber, *J. Math. Phys.* **4**, 294 (1963).
- [88] C. Hauert and G. Szabó, *Am. J. Phys.* **73**, 405 (2005).
- [89] C. Hauert and M. Doebeli, *Nature* **428**, 643 (2004).
- [90] G. Szabó, A. Szolnoki, and G. A. Sznaider, *Phys. Rev. E* **76**, 051921 (2007).
- [91] M. A. Nowak and K. Sigmund, *Science* **303**, 793 (2004).
- [92] W. Choi, S.-H. Yook, and Y. Kim, *Phys. Rev. E* **92**, 052140 (2015).
- [93] G. Weisbuch and D. Stauffer, *Physica A (Amsterdam)* **384**, 542 (2007).
- [94] L. E. Blume, *Games Econ. Behav.* **5**, 387 (1993).
- [95] H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Clarendon Press, Oxford, UK, 2001).
- [96] S. Galam and B. Walliser, *Physica A (Amsterdam)* **389**, 481 (2010).
- [97] H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki, and K. Sato, *Progr. Theor. Phys.* **88**, 1035 (1992).
- [98] P. Schuster and K. Sigmund, *J. Theor. Biol.* **100**, 533 (1983).
- [99] A. Szolnoki and M. Perc, *Phys. Rev. E* **89**, 022804 (2014).
- [100] H. Fort and S. Viola, *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* (2005) P01010.
- [101] M. H. Vainstein and J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **64**, 051905 (2001).
- [102] E. Arapaki, *Physica A (Amsterdam)* **388**, 2757 (2009).
- [103] K. Binder and D. K. Hermann, *Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* (Springer, Heidelberg, 1988).
- [104] K. Binder, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 487 (1997).
- [105] B. Huberman and N. Glance, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **90**, 7716 (1993).
- [106] P. Buonanno, D. Montolio, and P. Vanin, *J. Law Econ.* **52**, 145 (2009).
- [107] K. Botzen, *REGION* **3**, 1 (2016).
- [108] D. G. Rand, A. Peysakhovich, G. T. Kraft-Todd, G. E. Newman, O. Wurzbacher, M. A. Nowak, and J. D. Greene, *Nat. Commun.* **5**, 3677 (2014).
- [109] V. Capraro, J. J. Jordan, and D. G. Rand, *Sci. Rep.* **4**, 6790 (2014).
- [110] V. Capraro and G. Cococcioni, *Proc. R. Soc. B* **282**, 20150237 (2015).
- [111] A. Bear and D. G. Rand, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113**, 936 (2016).

# Apêndice D

## Exemplo de programa

O código em Fortran90 abaixo contém um exemplo funcional mínimo (MWE, minimal working example no original) dos programas utilizados para se gerar as dinâmicas de Monte Carlo. Ele envolve uma simulação na rede quadrada, com atualização assíncrona e regra de atualização de estratégia de imitação. Esse programa, bem como outros modelos contendo as regras de Logit, WSLs e outras podem ser obtidos na pasta pública localizada em:

<https://www.dropbox.com/sh/ocpnsn2gb1ss8ry/AADljRUNM8XAnMriRFrqBoWEa?dl=0>

```
1  program jogo
2  !Dilema do prisioneiro, rede quadrada, fronteira periodica,
3  !Atualizacao de estrategia de Logit, Monte Carlo assincrono
4  implicit none
5  !semente aleatoria
6  integer(4):: iy=11
7  !Parametros da simulacao
8  integer,parameter::L=100
9  real(8):: R1=1,T1=0.0d0,S1=0.0d0,P1=0.0d0
10 real(8):: dT=0.1d0,Tmax=2.0d0
11 integer,parameter :: amo=1,mcsfinal=300,mcsmin=270
12 integer :: mcs
13 real(8):: payo(0:L*L-1),rdn,rdnaux,mpay(0:1,0:1),mcvec(0:mcsfinal)
14 integer :: mjog(0:L*L-1),viz(0:L*L-1,0:3)
15 real(8)::pay,fracmedio
16 real(8)::fdm,fcme,kT,dpay, payold
17 integer :: i,j,k,g,h,m
18 kT=0.10d0
19 do j=0,L-1
20   do i=0,L-1
21     viz(i+j*L,2)=i+j*L+L
22     viz(i+j*L,0)=i+j*L-L
23     viz(i+j*L,1)=i+j*L+1
24     viz(i+j*L,3)=i+j*L-1
25     if(j==0) viz(i+j*L,0)=i+(L-1)*L
```

```

26  if (i==0)    viz (i+j*L,3)=i+(L-1)+j*L
27  if (i==L-1) viz (i+j*L,1)=i-(L-1)+j*L
28  if (j==L-1) viz (i+j*L,2)=i
29  end do
30 end do
31 Open (1,File='transi.dat')
32 Open (3,File='coop.dat')
33 do while (T1<(Tmax+dT))
34 mpay (0,0)=R1
35 mpay (1,0)=T1
36 mpay (0,1)=S1
37 mpay (1,1)=P1
38 mjog=0
39 fcme=0
40 !loop de amostras
41 k=1
42 mcvec=0
43 do while (k<=amo)
44   do j=0,L-1
45     do i=0,L-1
46       call urand(iy,rdn)
47       h=nint (rdn)
48       mjog (i+j*L)=h
49     end do
50   end do
51 !Termalizacao*****
52 fracmedio=0
53 g=0
54 fdm=0.0
55 payo=0.0
56 !Etapa de jogo*****
57 do i=0,L-1
58   do j=0,L-1
59 !Varendo a rede. cada sitio, e seus vizinhos positivos, jogam.
60     payo (i+j*L)=payo (i+j*L)+ mpay (mjog (i+j*L),mjog (viz (i+j*L,2)))
61     payo (i+j*L)=payo (i+j*L)+ mpay (mjog (i+j*L),mjog (viz (i+j*L,1)))
62     payo (viz (i+j*L,1))=payo (viz (i+j*L,1))+ mpay (mjog (viz (i+j*L,1)),mjog (i+j*L))
63     payo (viz (i+j*L,2))=payo (viz (i+j*L,2))+ mpay (mjog (viz (i+j*L,2)),mjog (i+j*L))
64     fdm=fdm+mjog (i+j*L)
65   end do
66 end do
67 Do mcs=0,mcsfinal
68   fdm=sum (mjog)
69   fdm=fdm/(L*L)
70   fdm=(1-fdm)
71   mcvec (mcs)=mcvec (mcs)+fdm
72   if (mcs>mcsmin) then
73     fracmedio=fracmedio+fdm
74     g=g+1
75   end if
76 do m=0, L*L
77   call urand(iy,rdn) !sortear o sitio aleatorio L*L vezes= 1 mcs
78   i=int (rdn*L)
79   call urand(iy,rdn)
80   j=int (rdn*L)

```

```

81   call urand(iy,rdn)
82   h=int(rdn*4)                !sorteio de vizinho aleatorio, de 0 a 3
83   call urand(iy,rdnaux)
84   dpay=(payo(viz(i+j*L,h))-payo(i+j*L))/kT
85   if (mjog(i+j*L) /= mjog(viz(i+j*L,h) ) ) then!Nao realizar conta em sitios iguais
86 !Subtrair de todos os vizinhos de i,j o payoff do jogo antigo
87   payo(viz(i+j*L,0))=payo(viz(i+j*L,0))-mpay(mjog(viz(i+j*L,0)),mjog(i+j*L))
88   payo(viz(i+j*L,1))=payo(viz(i+j*L,1))-mpay(mjog(viz(i+j*L,1)),mjog(i+j*L))
89   payo(viz(i+j*L,2))=payo(viz(i+j*L,2))-mpay(mjog(viz(i+j*L,2)),mjog(i+j*L))
90   payo(viz(i+j*L,3))=payo(viz(i+j*L,3))-mpay(mjog(viz(i+j*L,3)),mjog(i+j*L))
91   if (rdnaux <1.0d0/(1.0d0+dexp(-dpay)) )then !RegraBoltzman
92     mjog(i+j*L)=mjog(viz(i+j*L,h))
93 !renovacao total do payoff do sitio i,j
94     payo(i+j*L)= mpay(mjog(i+j*L),mjog(viz(i+j*L,0))) + &
95                 mpay(mjog(i+j*L),mjog(viz(i+j*L,1))) + &
96                 mpay(mjog(i+j*L),mjog(viz(i+j*L,2))) + &
97                 mpay(mjog(i+j*L),mjog(viz(i+j*L,3)))
98   end if
99 !Soma-se novamente o que foi subtraido dos vizinhos, com estrategia nova
100   payo(viz(i+j*L,0))=payo(viz(i+j*L,0)) + mpay(mjog(viz(i+j*L,0)),mjog(i+j*L))
101   payo(viz(i+j*L,1))=payo(viz(i+j*L,1)) + mpay(mjog(viz(i+j*L,1)),mjog(i+j*L))
102   payo(viz(i+j*L,2))=payo(viz(i+j*L,2)) + mpay(mjog(viz(i+j*L,2)),mjog(i+j*L))
103   payo(viz(i+j*L,3))=payo(viz(i+j*L,3)) + mpay(mjog(viz(i+j*L,3)),mjog(i+j*L))
104   end if
105 end do
106 end do
107 fracmedio=fracmedio/real(g)
108 fcme=fcme+fracmedio
109 k=k+1
110 end do
111 mcvec=mcvec/amo
112 write(1,*)T1,fcme/amo,S1
113 write(3,*) " "
114 do i=0, mcsfinal
115   write(3,*) i,mcvec(i)
116 end do
117 T1=T1+dT
118 end do
119 end program jogo
120 ! Rotina com receita boa para numeros aleatorios de ordem Monte Carlo
121 subroutine urand(iy,random)
122 implicit none
123 integer(4):: ia, ic, m2, iy
124 real(8),intent(out):: random
125 m2=1073741824
126 ia=843314861
127 ic=453816693
128 iy=iy*ia + ic
129 if (iy<0) then
130   iy=(iy + m2) + m2
131 end if
132 random=(0.5d0*iy)/(1.0d0*m2)
133 return
134 end subroutine urand

```

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Pennisi, [Science](#) **309**, 93 (2005).
- [2] E. O. Wilson, *The Insect Societies* (Harvard Univ. Press, Harvard, 1971).
- [3] M. Doebeli e N. Knowlton, [Proc. Natl. Acad. Sci. USA](#) **95**, 8676 (1998).
- [4] M. A. Nowak e R. Highfield, *SuperCooperators: Altruism, Evolution, and Why We Need Each Other to Succeed* (Simon and Schuster, New York, 2012).
- [5] A. F. Skutch, [Condor](#) **63**, 198 (1961).
- [6] E. Shtilerman, D. A. Kessler, e N. M. Shnerb, [J. Theor. Biol.](#) **383**, 138 (2015).
- [7] Charles Darwin, *On the Origin of Species* (John Murray, 1859).
- [8] B. J. Z. Quigley, D. Garcia Lopez, A. Buckling, A. J. McKane, e S. P. Brown, [Proc. R. Soc. B](#) **279**, 3742 (2012).
- [9] K. Henze e W. Martin, [Nature](#) **426**, 127 (2003).
- [10] R. Dawkins, *The Selfish Gene*, 34th ed. (Oxford Univ. Press, Oxford, 1976).
- [11] E. Szathmáry e J. M. Smith, [Nature](#) **374**, 227 (1994).
- [12] M. A. Nowak, *Evolutionary Dynamics Exploring the Equations of Life* (Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 2006).
- [13] J. M. Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge Univ. PressCambridge U.K., 1982).
- [14] J. W. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Cambridge, MA, 1995).
- [15] J. Hofbauer e K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1998).

- [16] M. Mesterton-Gibbons, *An Introduction to Game-Theoretic Modelling*, 2nd ed., Vol. 11 (American Mat. Society, Providence, RI, 2001).
- [17] J. v. Neumann, *Math. Ann.* **100**, 295 (1928).
- [18] J. Nash, *Ann. Math.* **54**, 286 (1951).
- [19] J. V. Neumann e O. Morgenstern, *The theory of games and economic behavior* (Princeton Univ. Press, 1947) pp. 1–33.
- [20] G. Szabó e G. Fáth, *Phys. Rep.* **446**, 97 (2007).
- [21] S. J. Heims, *John Von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death*, 1st ed. (MIT Press, Cambridge, MA, 1980).
- [22] H. D. Sokolski, *Getting MAD : Nuclear Mutual Assured Destruction, its origins and practice* (The Strategic Studies Institute, 2004).
- [23] J. M. Smith e G. R. Price, *Nature* **246**, 15 (1973).
- [24] R. Axelrod, *The Evolution of Cooperation* (Basic Books, New York, 1984).
- [25] M. A. Nowak e R. M. May, *Nature* **359**, 826 (1992).
- [26] T. Pfeiffer, C. Rutte, T. Killingback, M. Taborsky, e S. Bonhoeffer, *Proc. R. Soc. B* **272**, 1115 (2005).
- [27] K. Miyaji, J. Tanimoto, Z. Wang, A. Hagishima, e N. Ikegaya, *PLoS One* **8**, e71961 (2013).
- [28] R. L. Trivers, *Q. Rev. Biol.* **46**, 35 (1971).
- [29] R. Axelrod e W. Hamilton, *Science* **211**, 1390 (1981).
- [30] K. Sigmund, *J. Theor. Biol.* **299**, 25 (2012).
- [31] W. Hamilton, *J. Theor. Biol.* **7**, 17 (1964).
- [32] D. S. Wilson, *Am. Nat.* **111**, 157 (1977).
- [33] L. Wardil e J. K. L. da Silva, *EPL* **86**, 38001 (2009).
- [34] F. C. Santos e J. M. Pacheco, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 098104 (2005).
- [35] L. Wardil e J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **81**, 036115 (2010).

- [36] C. Hauert, S. De Monte, J. Hofbauer, e K. Sigmund, *Science* **296**, 1129 (2002).
- [37] A. Traulsen, N. Shores, e M. A. Nowak, *Bull. Math. Biol.* **70**, 1410 (2008).
- [38] M. A. Nowak, *Science* **314**, 1560 (2006).
- [39] M. Perc e A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **77**, 011904 (2008).
- [40] H. Fort, *Phys. A* **387**, 1613 (2008).
- [41] Y. Yao e S.-S. Chen, *Phys. A* **413**, 432 (2014).
- [42] P. Zhu e G. Wei, *PLoS One* **9**, e95169 (2014).
- [43] A. Szolnoki, J. Vukov, e G. Szabó, *Phys. Rev. E* **80**, 056112 (2009).
- [44] M. Iwata e E. Akiyama, *Phys. A* **448**, 224 (2016).
- [45] F. C. Santos, M. D. Santos, e J. M. Pacheco, *Nature* **454**, 213 (2008).
- [46] M. A. Amaral, M. Perc, L. Wardil, A. Szolnoki, E. J. da Silva Júnior, e J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **95**, 032307 (2017).
- [47] M. A. Amaral, L. Wardil, M. Perc, e J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **93**, 042304 (2016).
- [48] M. A. Amaral, L. Wardil, M. Perc, e J. K. L. da Silva, *Phys. Rev. E* **94**, 032317 (2016).
- [49] M. A. Amaral, L. Wardil, e J. K. L. da Silva, *J. Phys. A Math. Theor.* **48**, 445002 (2015).
- [50] F. C. Santos, F. L. Pinheiro, T. Lenaerts, e J. M. Pacheco, *J. Theor. Biol.* **299**, 88 (2012).
- [51] M. H. Vainstein e J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **64**, 051905 (2001).
- [52] M. H. Vainstein, A. T.C. Silva, e J. J. Arenzon, *J. Theor. Biol.* **244**, 722 (2007).
- [53] Z. Wang, A. Szolnoki, e M. Perc, *Sci. Rep.* **2**, 369 (2012).
- [54] M. H. Vainstein e J. J. Arenzon, *Phys. A* **394**, 145 (2014).
- [55] M. Perc e A. Szolnoki, *Biosystems* **99**, 109 (2010).
- [56] J. M. Pacheco, A. Traulsen, e M. A. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 258103 (2006).

- [57] Z.-X. Wu, X.-J. Xu, Z.-G. Huang, S.-J. Wang, e Y.-H. Wang, *Phys. Rev. E* **74**, 021107 (2006).
- [58] J. Tanimoto, *Phys. A* **392**, 2955 (2013).
- [59] A. Cardillo, J. Gómez-Gardeñes, D. Vilone, e A. Sánchez, *New J. Phys.* **12**, 103034 (2010).
- [60] M. Hetzer e D. Sornette, *PLoS One* **8**, e54308 (2013).
- [61] L. Wardil e C. Hauert, *Sci. Rep.* **4**, 1 (2014).
- [62] T. S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions* (University of Chicago Press, 1996).
- [63] D. G. Rand e M. A. Nowak, *Trends Cogn. Sci.* **17**, 413 (2013).
- [64] D. S. Viana, I. Gordo, É. Sucena, e M. A. P. Moita, *PLoS One* **5**, e8483 (2010).
- [65] C. Wedekind e M. Milinski, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, 2686 (1996).
- [66] P. S. Dalton, *SSRN Electron. J.* **2010-23**, 1 (2010).
- [67] M. W. Macy e A. Flache, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99**, 7229 (2002).
- [68] C. P. Roca, J. A. Cuesta, e A. Sánchez, *Eur. Phys. J. B* **71**, 587 (2009).
- [69] M. Sysi-Aho, J. Saramäki, J. Kertész, e K. Kaski, *Eur. Phys. J. B* **44**, 129 (2005).
- [70] J. Grujić, C. Fosco, L. Araujo, J. A. Cuesta, e A. Sánchez, *PLoS One* **5**, e13749 (2010).
- [71] A. Szolnoki, N.-G. Xie, C. Wang, e M. Perc, *EPL* **96**, 38002 (2011).
- [72] C. Gracia-Lázaro, J. A. Cuesta, A. Sánchez, e Y. Moreno, *Sci. Rep.* **2**, 325 (2012).
- [73] C. Gracia-Lazaro, A. Ferrer, G. Ruiz, A. Tarancon, J. A. Cuesta, A. Sanchez, e Y. Moreno, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109**, 12922 (2012).
- [74] J. Grujić, C. Gracia-Lázaro, M. Milinski, D. Semmann, A. Traulsen, J. A. Cuesta, Y. Moreno, e A. Sánchez, *Sci. Rep.* **4**, 4615 (2014).
- [75] J. Vukov, F. C. Santos, e J. M. Pacheco, *New J. Phys.* **14**, 063031 (2012).
- [76] A. Blume e U. Gneezy, *Games Econ. Behav.* **68**, 488 (2010).

- [77] E. Bonawitz, S. Denison, A. Gopnik, e T. L. Griffiths, *Cogn. Psychol.* **74**, 35 (2014).
- [78] K. Binder e D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **21**, 1941 (1980).
- [79] R. J. Glauber, *J. Math. Phys.* **4**, 294 (1963).
- [80] C. Hauert e G. Szabó, *Am. J. Phys.* **73**, 405 (2005).
- [81] L. A. Imhof, D. Fudenberg, e M. A. Nowak, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, 10797 (2005).
- [82] Z.-X. Wu, J.-Y. Guan, X.-J. Xu, e Y.-H. Wang, *Phys. A* **379**, 672 (2007).
- [83] J. Tanimoto, M. Brede, e A. Yamauchi, *Phys. Rev. E* **85**, 032101 (2012).
- [84] A. Arenas, J. Camacho, J. A. Cuesta, e R. J. Requejo, *J. Theor. Biol.* **279**, 113 (2011).
- [85] S. Galam e F. Jacobs, *Phys. A* **381**, 366 (2007).
- [86] K. Boun My e B. Chalvignac, *J. Econ. Psychol.* **31**, 705 (2010).
- [87] D. Helbing, M. Schönhof, H.-U. Stark, e J. A. Holyst, *Adv. Complex Syst.* **08**, 87 (2005).
- [88] M. Perc, *New J. Phys.* **9**, 3 (2007).
- [89] P. E. Turner e L. Chao, *Nature* **398**, 441 (1999).
- [90] G. Lambert, S. Vyawahare, e R. H. Austin, *Interface Focus* **4**, 20140029 (2014).
- [91] R. D. Alexander, *The Biology of Moral Systems* (Aldine de Gruyter, New York, 1987).
- [92] R. Axelrod, *Am. Polit. Sci. Rev.* **80**, 1095 (1986).
- [93] K. G. Binmore, *Game Theory and the Social Contract: Playing Fair* (MIT Press, Cambridge, MA, 1994).
- [94] R. Trivers, *Social Evolution* (Benjamin Cummings, Menlo Park, 1985).
- [95] T. Pfeiffer e S. Schuster, *Trends Biochem. Sci.* **30**, 20 (2005).
- [96] D. Basanta e A. Deutsch, in *Sel. Top. Cancer Model.*, edited by N. Bellomo, M. Chaplain, e E. de Angelis (Birkhäuser Boston, Boston, 2008) pp. 1–16.

- [97] E. Ben-Jacob, D. S. Coffey, e H. Levine, *Trends Microbiol.* **20**, 403 (2012).
- [98] I. Kareva, *PLoS One* **6**, e28576 (2011).
- [99] L. A. Bach, D. J. T. Sumpter, J. Alsner, e V. Loeschcke, *J. Theor. Med.* **5**, 47 (2003).
- [100] R. A. Gatenby e P. K. Maini, *Nature* **421**, 321 (2003).
- [101] T. Frick e S. Schuster, *Naturwissenschaften* **90**, 327 (2003).
- [102] J. E. Strassmann, Y. Zhu, e D. C. Queller, *Nature* **408**, 965 (2000).
- [103] T. Wenseleers e F. L. W. Ratnieks, *Nature* **444**, 50 (2006).
- [104] L. L. Wardil, *Mecanismos cooperativos: Adotando estratégias diferentes contra oponentes distintos no dilema do prisioneiro*, Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (2012).
- [105] G. J. Stigler, *J. Polit. Econ.* **58**, 1 (1950).
- [106] S. H. Grant e T. Van Zandt, *SSRN Electron. J.* , 342 (2007).
- [107] J. Robinson, *Economic Philosophy* (Doubleday & Company, Michigan, 1962).
- [108] W. R. Stauffer, A. Lak, e W. Schultz, *Curr. Biol.* **24**, 2491 (2014).
- [109] T. Veblen, *J. Polit. Econ.* **17**, 620 (1909).
- [110] G. J. Stigler, *Hist. Polit. Econ.* **4**, 571 (1972).
- [111] G. Szabó, J. Vukov, e A. Szolnoki, *Phys. Rev. E* **72**, 047107 (2005).
- [112] C. P. Roca, J. A. Cuesta, e A. Sánchez, *Phys. Rev. E* **80**, 046106 (2009).
- [113] J. F. Nash, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **36**, 48 (1950).
- [114] M. Nowak e K. Sigmund, *Nature* **364**, 56 (1993).
- [115] P. D. Taylor e L. B. Jonker, *Math. Biosci.* **40**, 145 (1978).
- [116] C. Runge, *Math. Ann.* **46**, 167 (1895).
- [117] U. M. Ascher e L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988).

- [118] D. Helbing e S. Lozano, *Phys. Rev. E* **81**, 057102 (2010).
- [119] L. M. Floría, C. Gracia-Lázaro, J. Gómez-Gardeñes, e Y. Moreno, *Phys. Rev. E* **79**, 026106 (2009).
- [120] A. Szolnoki e G. Szabó, *Phys. Rev. E* **70**, 037102 (2004).
- [121] M. A. Javarone, *Eur. Phys. J. B* **89**, 42 (2016).
- [122] T. Killingback e M. Doebeli, *J. Theor. Biol.* **191**, 335 (1998).
- [123] W. Choi, S.-H. Yook, e Y. Kim, *Phys. Rev. E* **92**, 052140 (2015).
- [124] H.-X. Yang, Z. Rong, e W.-X. Wang, *New J. Phys.* **16**, 013010 (2014).
- [125] C. Wedekind e M. Milinski, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **93**, 2686 (1996).
- [126] C. Hauert e M. Doebeli, *Nature* **428**, 643 (2004).
- [127] D. Helbing, *Theory Decis.* **40**, 149 (1996).
- [128] D. P. Landau e K. Binder, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [129] K. Binder, *Rep. Prog. Phys.* **60**, 487 (1997).
- [130] H. Ohtsuki e M. A. Nowak, *J. Theor. Biol.* **243**, 86 (2006).
- [131] M. van Baalen, em *Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity* (Cambridge Univ. Press, 2000) Chap. 19, pp. 359–387.
- [132] S. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **119**, 29 (2008).
- [133] H. Fort, *EPL* **81**, 48008 (2008).
- [134] R. Heinsohn e C. Packer, *Science* **269**, 1260 (1995).
- [135] M. A. Nowak e K. Sigmund, *Science* **303**, 793 (2004).
- [136] Z. Wang, A. Szolnoki, e M. Perc, *Phys. Rev. E* **90**, 032813 (2014).
- [137] E. Fermi, *Rend. Lincei* **3**, 145 (1926).
- [138] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. A* **112**, 661 (1926).
- [139] A. Szolnoki, M. Perc, e Z. Danku, *Phys. A* **387**, 2075 (2008).

- [140] R. Albert e A.-L. Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [141] F. C. Santos e J. M. Pacheco, *J. Evol. Biol.* **19**, 726 (2006).
- [142] P. L. Krapivsky e S. Redner, *Phys. Rev. E* **63**, 066123 (2001).
- [143] L. Wardil e J. K. L. da Silva, *J. Phys. A* **44**, 345101 (2011).
- [144] M. O. Jackson e A. Wolinsky, *J. Econ. Theory* **71**, 44 (1996).
- [145] N. Masuda, *Proc. R. Soc. B* **274**, 1815 (2007).
- [146] A. Szolnoki e M. Perc, *EPL* **108**, 28004 (2014).
- [147] K. Sigmund, *Trends Ecol. Evol.* **22**, 593 (2007).
- [148] L. Wardil e J. K. da Silva, *Chaos, Solitons & Fractals* **56**, 160 (2013).
- [149] F. Santos, J. Rodrigues, e J. Pacheco, *Proc. R. Soc. B* **273**, 51 (2006).
- [150] M. Nowak e K. Sigmund, *Acta Appl. Math.* **20**, 247 (1990).
- [151] C.-L. Tang, W.-X. Wang, X. Wu, e B.-H. Wang, *Eur. Phys. J. B* **53**, 411 (2006).
- [152] M. Perc e Z. Wang, *PLoS One* **5**, e15117 (2010).
- [153] A. Szolnoki, M. Perc, e G. Szabó, *Eur. Phys. J. B* **61**, 505 (2008).
- [154] C. Lei, T. Wu, J.-Y. Jia, R. Cong, e L. Wang, *Phys. A* **389**, 4708 (2010).
- [155] L. SUN, H.-X. YANG, S.-M. CHEN, e Y.-S. CHEN, *Int. J. Mod. Phys. C* **24**, 1250089 (2013).
- [156] J. Tanimoto, *Phys. Rev. E* **87**, 062136 (2013).
- [157] W.-J. Yuan e C.-Y. Xia, *PLoS One* **9**, e91012 (2014).
- [158] E. L. Thorndike, *Animal intelligence; experimental studies* (The Macmillan Company, New York, USA, 1911).
- [159] D. Kraines e V. Kraines, *Theory Decis.* **26**, 47 (1989).
- [160] J. M. Smith, *Proc. R. Soc. B* **205**, 475 (1979).
- [161] J. Maynard Smith, *J. Theor. Biol.* **47**, 209 (1974).
- [162] P. Schuster e K. Sigmund, *J. Theor. Biol.* **100**, 533 (1983).

- [163] S. Wang, M. S. Szalay, C. Zhang, e P. Csermely, *PLoS One* **3**, e1917 (2008).
- [164] K. Kawasaki, em *Phase Transitions Crit. Phenomena, Vol. 2*, editado por C. Domb e M. S. Green (Academic Press, London, 1972) pp. 443–501.
- [165] A. Szolnoki e M. Perc, *Sci. Rep.* **4**, 5496 (2014).
- [166] H. Matsuda, N. Ogita, A. Sasaki, e K. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 1035 (1992).
- [167] A. Szolnoki e M. Perc, *Phys. Rev. E* **89**, 022804 (2014).
- [168] H. Fort e S. Viola, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2005**, P01010 (2005).
- [169] E. Arapaki, *Phys. A* **388**, 2757 (2009).
- [170] G. Szabó, A. Szolnoki, e L. Czakó, *J. Theor. Biol.* **317**, 126 (2013).
- [171] G. Szabó e A. Szolnoki, *J. Theor. Biol.* **299**, 81 (2012).
- [172] G. Szabó, A. Szolnoki, M. Varga, e L. Hanusovszky, *Phys. Rev. E* **82**, 026110 (2010).
- [173] G. Weisbuch e D. Stauffer, *Phys. A* **384**, 542 (2007).
- [174] A. Szolnoki e M. Perc, *Phys. Rev. E* **84**, 047102 (2011).
- [175] K. S. Brown, C. C. Hill, G. A. Calero, C. R. Myers, K. H. Lee, J. P. Sethna, e R. A. Cerione, *Phys. Biol.* **1**, 184 (2004).
- [176] A.-I. Barabási e R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).
- [177] A. Bear e D. G. Rand, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113**, 936 (2016).
- [178] D. G. Rand, A. Peysakhovich, G. T. Kraft-Todd, G. E. Newman, O. Wurzbacher, M. A. Nowak, e J. D. Greene, *Nat. Commun.* **5**, 3677 (2014).
- [179] V. Capraro, J. J. Jordan, e D. G. Rand, *Sci. Rep.* **4**, 6790 (2014).
- [180] V. Capraro e G. Cococcioni, *Proc. R. Soc. B* **282**, 20150237 (2015).
- [181] V. Capraro e G. Cococcioni, *Sci. Rep.* **6**, 27219 (2016).
- [182] L. E. Blume, *Games Econ. Behav.* **5**, 387 (1993).
- [183] S. Galam e B. Walliser, *Phys. A* **389**, 481 (2010).
- [184] M. D. Robinson, D. P. Feldman, e S. R. McKay, *Chaos* **21**, 037114 (2011).

- [185] H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction* (Oxford University Press, Oxford, U.K., 2001).