

TESE DE DOUTORADO

**MOMENTO OCULTO EM SISTEMAS QUÂNTICOS E SUA
RELAÇÃO COM O MOMENTO DA LUZ NA MATÉRIA**

Juvenil Siqueira de Oliveira Filho
Orientador: Prof. Pablo Lima Saldanha

Tese apresentada à Universidade Federal de
Minas Gerais, como requisito parcial para a
obtenção do grau de doutor em FÍSICA.

BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS - BRASIL
Junho de 2016

“Os homens simplificam o mundo pela linguagem e pelo pensamento, e assim eles têm certezas; e ter certezas é a mais poderosa volúpia neste mundo, muito mais poderosa que o dinheiro, o sexo e o poder reunidos. A renúncia a uma verdadeira inteligência é o preço a pagar por ter certezas, e é sempre uma reserva invisível no banco da nossa consciência. A esse respeito, eu prefiro ainda os que não se cobrem com o manto da razão e afirmam a ficção da sua crença. Ou seja, um crente em que a sua fé não seja nada além da crença e não uma presunção sobre a verdade das coisas reais.” [1]

(Martin Page)

“Se você quer que sua jornada seja longa e deseja levar um vida livre de ilusões propagadas ou adotadas por você, então lhe sugiro aprender a reconhecer e evitar os sintomas do fanático e da pessoa que ‘sabe’ que está certa. [...] O que lhe proponho é um debate permanente com aqueles que pensam que possuem o que não pode ser possuído. [...] Cuidado com o irracional, por mais sedutor que ele seja. Evite o ‘transcendente’ e todos os que o convidarem a se subordinar ou anular. Não confie na compaixão; prefira a dignidade para você e para os outros. Não tema ser considerado arrogante ou egoísta. Olhe todos os experts como se eles fossem mamíferos. Nunca seja um espectador da injustiça e da estupidez. Procure o debate ou a discussão por eles mesmos; o tórumo fornecerá muito tempo para o silêncio.” [2]

(Christopher Hitchens)

“Nós vamos morrer, e isso nos torna afortunados. A maioria das pessoas nunca vai morrer, porque nunca vai nascer. As pessoas potenciais que poderiam estar no meu lugar, mas que jamais verão a luz do dia, são mais numerosas que os grãos de areia da Arábia. Certamente esses fantasmas não nascidos incluem poetas maiores que Keats, cientistas maiores que Newton. Sabemos disso porque o conjunto das pessoas possíveis permitidas pelo nosso DNA excede em muito o conjunto de pessoas reais. Apesar dessas probabilidades assombrosas, somos eu e você, com toda a nossa banalidade, que aqui estamos... Nós, uns poucos privilegiados que ganharam na loteria do nascimento, contrariando todas as probabilidades, como nos atrevemos a choramingar por causa do retorno inevitável àquele estado anterior, do qual a enorme maioria jamais nem saiu?” [3]

(Richard Dawkins)

Resumo

Em um trabalho recente, Mansuripur apresentou um aparente paradoxo que parecia implicar que a força de Lorentz seria incompatível com a relatividade especial e com a conservação do momento. Porém foi mostrado que tal paradoxo desaparece se for levado em conta o momento oculto do sistema. Assim sendo, a validade da força de Lorentz está condicionada à existência do momento oculto.

O momento oculto é um efeito relativístico que aparece, por exemplo, quando um dipolo magnético está sujeito a um campo elétrico. Esse efeito faz com que o dipolo tenha momento linear mesmo estando parado, daí a denominação momento oculto. Até recentemente só existiam modelos clássicos para o momento oculto e, por isso, não se sabia se a força de Lorentz também seria válida em sistemas quânticos. Na primeira parte desta tese, com o propósito de verificar a validade da força de Lorentz em sistemas quânticos, consideramos um átomo de hidrogênio com momento de dipolo magnético devido ao estado orbital do elétron submetido a um campo elétrico externo. Calculamos o valor esperado do momento relativístico do elétron usando teoria de perturbação, mostrando que este é compatível com o momento oculto e, por conseguinte, com a validade da força de Lorentz em sistemas quânticos.

Existe um dilema famoso, conhecido como debate Abraham-Minkowski, sobre qual é a expressão para a densidade de momento de uma onda eletromagnética quando ela penetra em um meio material. Existem várias abordagens distintas para o tratamento deste problema, as mais famosas sendo as de Abraham e Minkowski. Na segunda parte desta tese, apresentamos as implicações do conceito de momento oculto para o debate Abraham-Minkowski. Em particular, mostramos como que o modelo adotado para os dipolos elétricos e magnéticos do material estão associados com a presença ou não de momento oculto nesses dipolos. Consideramos modelos em que os dipolos podem se dever a cargas elétricas ou magnéticas, bem como a correntes elétricas ou magnéticas. Mostramos então como que isso afeta a expressão que deve ser usada para a parte eletromagnética do momento da onda no meio, cada modelo correspondendo a uma expressão distinta.

Abstract

In a recent paper, Mansuripur presented an apparent paradox that seemed to imply that the Lorentz force is incompatible with special relativity and momentum conservation. However, it was shown that this paradox disappears if one takes into account the hidden momentum of the system. Therefore, the validity of the Lorentz force is conditioned to the existence of hidden momentum.

The hidden momentum is a relativistic effect that appears, for example, when a magnetic dipole is subject to an electric field. This effect may cause the dipole to have a nonzero linear momentum even if it is not moving. Until recently there were only classic models to hidden momentum and therefore it was not known whether the Lorentz force would be also valid in quantum systems. In the first part of this thesis, with the aim of checking the validity of the Lorentz force in quantum systems, we consider a hydrogen atom with magnetic dipole moment due to the orbital state of the electron subjected to an external electric field. We calculate the expected value of the relativistic momentum of the electron by using perturbation theory, showing that it is compatible with the hidden momentum, and therefore with the validity of the Lorentz force on quantum systems.

There is a famous dilemma, known as Abraham-Minkowski debate, about what is the expression for the momentum density of an electromagnetic wave when it penetrates into a material medium. There are several different approaches to the treatment of this problem, the most famous being the Abraham and Minkowski ones. In the second part of this thesis, we show the implications of the concept of hidden momentum for the Abraham-Minkowski debate. In particular, we show that the models for the electric and magnetic dipoles of the medium are associated with the presence or absence of hidden momentum in the system. We consider models in which the dipoles can be due to electric or magnetic charges as well as electric or magnetic currents. We show how the dipole models affect the expressions that should be used for the electromagnetic part of the wave momentum in the medium, with each model corresponding to a different expression.

Agradecimentos

“O mundo que eu desejaria ver seria livre da virulência das hostilidades grupais e capaz de perceber que a felicidade de todos deve derivar da cooperação, e não da rivalidade. Eu desejaria ver um mundo em que a educação se destinasse à liberdade mental, e não ao aprisionamento da mente dos jovens em uma armadura rígida de dogmas calculados para protegê-los, ao longo da vida, dos golpes e evidências tendenciosas. O mundo precisa de corações abertos e mentes abertas, e isso não pode derivar de sistemas rígidos, sejam eles velhos ou novos.” Bertrand Russell [4].

Antes de iniciar os agradecimentos, fiz uma brevíssima descrição dos meus dois primeiros anos de doutorado, principalmente por causa de um acontecimento trágico, inesperado, marcante e atípico: o falecimento da minha orientadora, a professora Maria Carolina Nemes.

No início de 2012, comecei a pesquisa de doutorado sob supervisão da pesquisadora Maria Carolina Nemes. A ideia inicial do nosso trabalho era tentar definir relações de complementaridade para experimentos de fenda única e dupla com duas partículas idênticas, não-idênticas, emaranhadas e não-emaranhadas. As relações de complementaridade que iríamos buscar provavelmente envolveriam as funções visibilidade, previsibilidade, concorrência e distinguibilidade. Ademais, no caso de experimentos com partículas idênticas passando através da fenda dupla, tentaríamos separar os efeitos de interferência provenientes da fenda dupla dos oriundos da indistinguibilidade das partículas idênticas. Este último objetivo do nosso trabalho foi alcançado com sucesso, mas o resto ficou incompleto.

Continuamos estudando sistemas com partículas idênticas emaranhadas e não-emaranhadas até meados de 2013. Como não estávamos obtendo resultados satisfatórios, aos poucos fomos migrando para outros temas que não estão relacionados com partículas idênticas, mas sim com relações quantitativas do Princípio de Complementaridade de Bohr.

Agradecimentos

No dia 29/05/2013, meu coorientador, Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio, me enviou um e-mail dizendo que seria justo se retirássemos a coorientação dele do nosso trabalho porque a pesquisa estava adquirindo uma tendência levemente experimental. Meu novo coorientador, que também foi aluno da Maria Carolina Nemes, era o Romeu Rossi Júnior. Eu já conhecia o Romeu, pois ele sempre participava das nossas reuniões de grupo, e já havia me ajudado bastante, mesmo antes de ter se tornado meu coorientador oficial.

Ainda em 2013, selecionamos alguns dos resultados que havíamos obtido até o momento e começamos a escrever um trabalho intitulado “Quantum Properties of a Which-Way Detector”, que foi publicado em 2015 [5]. Nesse trabalho, exploramos as propriedades quânticas de um detector de caminho (“which-way detector”) através de três versões de um experimento de fenda dupla. Primeiramente, obtivemos relações de complementaridade para o detector quântico. Em seguida, mostramos como o arranjo experimental poderia ser alterado de modo a fazer com que através de uma única medida da posição sobre a tela, poderíamos obter um apagamento quântico. Por fim, mostramos como construir um estado de superposição de “onda” e “partícula”. Não vou delongar sobre esse trabalho aqui porque o tema de pesquisa desta tese não tem a ver com o assunto explorado em [5]. Terminamos de escrever esse trabalho dois dias antes do trágico falecimento da minha orientadora, Maria Carolina Nemes, que ocorreu no dia 14 de dezembro de 2013. Desnecessário dizer o quanto isso me afetou. Pode parecer exagero para quem não conheceu a Carolina, mas, apesar da breve convivência que tivemos de apenas dois anos, ela já havia se tornado muito importante para mim. Tenho certeza de que quem trabalhou com ela concordará comigo sobre o fato de que ela era, no mínimo, extremamente cativante. A empolgação da Carolina estimulava os seus orientandos. Na verdade, acho que os estudantes dela eram mais do que orientados: eram fãs.

No dia 22/01/2014, mudei de orientador. Meu novo orientador é o pesquisador Pablo Lima Saldanha. Nesse dia, nos encontramos e o Pablo fez uma apresentação sobre seus temas atuais de pesquisa. Me interessei bastante pelos temas sobre Momento Oculto em Sistemas Quânticos e pelo Debate Abraham-Minkowski, que são os assuntos principais desta tese. Fim da descrição dos meus dois primeiros anos de doutorado. Voltemos agora ao principal objetivo do capítulo inicial desta da tese, que é agradecer às pessoas que fizeram parte da minha trajetória.

A parte de agradecimentos é certamente uma das mais importantes para mim. Não quero passar a impressão de que esse trabalho tenha sido produzido com a participação de poucas pessoas. Obviamente, em relação às partes técnicas, esse trabalho foi realizado basicamente por mim e pelo meu orientador, Pablo Lima Saldanha, que

Agradecimentos

me ajudou imensamente. Todavia, não posso deixar de agradecer às pessoas que foram importantes para mim, principalmente durante os últimos anos (entre 2014 e 2016), que foi o período em que esse trabalho foi produzido. Dito isso, darei início aos agradecimentos. Agradeço...

Ao Allysson, meu irmão, pelo apoio de sempre, pelas risadas, pelas conversas interessantes, pelas idas ao sítio e por ter sido meu melhor amigo desde a data do seu nascimento. Enfim, por ter dado mais significado à minha vida, tornando-a muito mais agradável. Sua existência é uma das grandes responsáveis pela minha felicidade. Obrigado por tudo.

À Lady, minha mãe, pelo apoio incondicional, pelo carinho e pela imensa dedicação. Parabéns por ter executado a tarefa tão difícil de ser mãe e pai ao mesmo tempo de uma maneira tão primorosa. Desnecessário dizer que eu jamais teria chegado até aqui sem o seu apoio. Muito obrigado!

À Manu, meu amor, por todo apoio, carinho e dedicação e, principalmente, por ter trazido ainda mais significado à minha vida neste último ano. Você mudou bastante a minha maneira de enxergar o amor.

Ao Jáder e ao Mário Carlos, meus queridos amigos de infância que ainda são grandes amigos.

Ao Gabriel, pelas conversas sempre agradáveis e pelas noites de Mario Kart em Viçosa.

Ao Fabiano, Bim, pela ótima convivência que tivemos nos últimos anos em que morei em BH.

Ao Davidson, pelas conversas interessantes e pelas histórias engraçadas. É sempre bom saber que existem outras pessoas que às vezes “fracassam miseravelmente” (D. R. Viana).

À Stephanie, por ser uma amiga tão dedicada e por ter tido relativo sucesso na tarefa desafiadora de me tornar uma pessoa um pouco mais sociável.

À minha avó, Sebastiana, pela companhia de todas as tardes em sua casa, pela paciência com minhas bagunças e pelas nossas conversas sobre a Bíblia que certamente contribuíram para que eu me tornasse ainda mais descrente.

Ao meu avô, Antônio, pela ótima convivência, pelas pescarias inesquecíveis, e por me ensinar que existem atalhos mais longos do que o trajeto normal.

Aos meus primos e primas, principalmente à Paulinha (Comel), ao Rafael (+) e ao Bim (Li), que também são meus amigos desde que passei a ter consciência de que estou no mundo. Muito obrigado pelos ótimos momentos que passamos juntos.

À Maria, ao Felipe, ao Gustavo e ao Marcos (testa), principalmente pela ótima companhia durante os últimos anos em que morei em Viçosa.

Agradecimentos

Ao Rafael Drummond e ao João Joel pela amizade.

Ao Diego, chá, pelas mentiras bem contadas, pelas risadas e por vários momentos agradáveis.

Ao Alberto e ao Erik, por terem sido meus discípulos durante o tempo em que morei em BH.

Aos meus tios e tias, pela ótima convivência que tivemos desde que nasci.

Ao meu pai, pelos bons momentos que tivemos juntos, principalmente quando eu era criança.

À Loiva, pelas conversas agradáveis que tivemos no final do ano passado e por ser a mãe do meu amor.

Ao Vilmar, meu mais novo companheiro de pescaria, pelos toques de bola na “cara do gol”, pelas conversas interessantes e, claro, por ser o pai do meu amor.

Aos meus companheiros de república: Eduardo, Joãozinho, Luciano, Ananias e Thonimar.

À Shirley Maciel da Silva e à Juliana Brito, por me ajudarem na busca de artigos e livros na biblioteca da Física da UFMG.

À Carolina Nemes, pelo entusiasmo, pela humildade e por ter me ensinado a trabalhar como Físico. Os dois anos que convivemos juntos modificaram a maneira como vejo a Física e a ciência em geral. Muito obrigado, Carol. Você faz muita falta.

Ao Marcos Sampaio e ao Romeu Rossi, por terem sido excelentes coorientadores e por tudo que me ensinaram sobre Física.

Ao Pablo, meu orientador, pela paciência, pelos conselhos e pelos ensinamentos sobre Física. Sua disposição de me orientar após a morte trágica da Carolina foi essencial para aumentar meu ânimo naquele momento em que pensei seriamente na possibilidade de desistir. Muitíssimo obrigado.

Ao Zezinho, ao Dagoberto e ao José Geraldo, por tudo que me ensinaram durante nossas reuniões de grupo na UFMG e no CEFET.

Aos professores de Física do CFP-UFRB, que me receberam muito bem: Eider, Sergio, Alberto, Rafael, Glênon, Orahcio e Willien.

Aos estudantes do CFP-UFRB.

Aos seguranças do CFP, em especial, ao Bel.

Ao Hitch, meu companheiro das últimas semanas, por ter deixado meus dias mais alegres apesar do total desinteresse pelo que tenho a dizer.

Aos professores que participaram da banca de defesa da minha tese: Carlos Henrique Monken, Ubirajara Agero Batista, Paulo Américo Maia Neto e Daniel Augusto Turolla Vanzella. Muitíssimo obrigado pelas correções, críticas e sugestões.

Agradecimentos

Agradeço também àqueles que influenciaram bastante minha visão de mundo: Christopher Hitchens, Richard Dawkins, Bertrand Russell, Steven Pinker, Voltaire, Arthur Schopenhauer, Friedrich Nietzsche, René Descartes, Albert Einstein, Karl Popper, Marcelo Gleiser, David Hume, Sam Harris, Charles Darwin, Carl Sagan, Thomas Nagel, John Stuart Mill, Daniel Dennett, Sócrates, Peter Medawar, Leandro Karnal, Brian Greene, Immanuel Kant, Tim Minchin, Leonard Mlodinow, Steven Weinberg, George Carlin, Leonard Susskind, Lucrecio, Luc Ferry, Stephen Hawking, Michael Shermer, Emil Cioran, Confúcio, Ayaan Hirsi Ali, Douglas Adams, Richard Feynman, Isaac Asimov, André Comte-Sponville, Sêneca, Clóvis de Barros, André Cancian, Desidério Murcho, A. C. Grayling, Lawrence Krauss, H. L. Mencken e James Randi.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução e Motivação	2
2 A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?	7
2.1 Apresentação do Paradoxo de Mansuripur	8
2.2 Momento Oculto	11
2.2.1 Comentários Finais Sobre o Momento Oculto	15
2.3 Resolução do Paradoxo de Mansuripur	18
3 Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio	20
3.1 Átomo de Hidrogênio	21
3.2 Átomo de Hidrogênio na Presença de um Campo Elétrico Constante e Uniforme	22
3.3 Cálculo do Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio na Presença de um Campo Elétrico Constante e Uniforme	29
4 O Debate Abraham-Minkowski	37
4.1 Argumentos que Favorecem a Formulação de Minkowski	39
4.2 Argumentos que Favorecem a Formulação de Abraham	40
4.3 Experimentos Propostos e Realizados	41
4.4 Solução Eventual do Debate Abraham-Minkowski	48
4.5 Interpretação Física dos Diferentes Momentos	50
5 Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski	53
5.1 Equações de Maxwell Considerando a Existência de Cargas e Correntes Magnéticas	53

Agradecimentos

5.2	Relação entre o Modelo para o Meio Material e a Densidade de Momento Eletromagnético	55
5.2.1	Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Cargas Elétricas e Dipolos Magnéticos Formados por Cargas Magnéticas	57
5.2.2	Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Cargas Elétricas e Dipolos Magnéticos Formados por Correntes Elétricas	59
5.2.3	Meio Material Constituído por Dipolos Elétricos Resultantes de Correntes Magnéticas e Dipolos Magnéticos Originários de Correntes Elétricas	60
5.2.4	Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Correntes Magnéticas e Dipolos Magnéticos Decorrentes de Cargas Magnéticas	62
6	Conclusões	65
	Referências Bibliográficas	67

Capítulo 1

Introdução e Motivação

“Cada peça ou parte da Natureza é sempre uma aproximação da verdade completa, ou do que podemos conhecer da verdade completa. De fato, tudo o que sabemos é uma espécie de aproximação, porque sabemos que ainda não conhecemos todas as leis. Portanto, as coisas são aprendidas apenas para serem desaprendidas ou, mais provavelmente, corrigidas.” Richard Feynman [6].

O objetivo principal da primeira parte desta tese, que compreende os capítulos 2 e 3, é verificar se existe momento oculto em sistemas quânticos e se, por conseguinte, a força de Lorentz é válida nesses sistemas. Mas, para começar, o que é momento oculto? De acordo com a Eletrodinâmica Clássica, cargas e correntes elétricas produzem campos elétricos e magnéticos que, quando combinados, podem possuir momento eletromagnético [7–25]. Pergunta: será que é possível construir um sistema com cargas elétricas estáticas e correntes elétricas estacionárias que possui momento eletromagnético não-nulo? A resposta é sim [18]. Todavia, sabemos que momento está associado com movimento e por isso parece estranho que um sistema estático carregue momento total não-nulo [18]. E, realmente, esse tipo de coisa não acontece. Existe um teorema, conhecido como Teorema do Centro de Energia, provado no Apêndice A desta tese, que afirma que se o centro de energia de um sistema fechado e localizado ¹ está em repouso, então o momento total do sistema deve ser nulo. Isso significa que um sistema com cargas elétricas estáticas e correntes elétricas estacionárias que possui momento eletromagnético não-nulo também deve possuir algum outro tipo de momento, de modo

¹Por sistema localizado, queremos dizer que as fontes dos campos elétrico e magnético do sistema - as densidades de carga e corrente elétricas - estão confinadas em uma região particular do espaço, ou seja, elas não se estendem até o infinito.

Capítulo 1. Introdução e Motivação

a fazer com que o momento total do sistema seja nulo. Este outro momento é conhecido como momento oculto [7–25], que é um efeito intrinsecamente relativístico. Apesar de surgir frequentemente em contextos eletromagnéticos, o momento oculto não tem a ver com eletrodinâmica; é um efeito puramente mecânico.

De acordo com alguns modelos para dipolos magnéticos [11, 18], quando estes estão na presença de um campo elétrico externo, devido a um efeito relativístico, os momentos de dipolo magnéticos adquirem um momento linear ortogonal à direção do campo elétrico aplicado e do momento de dipolo magnético. O nome momento oculto está associado com o fato de o momento de dipolo magnético adquirir momento linear mesmo estando em repouso.

Em 2012, Mansuripur afirmou [26] que a força de Lorentz seria incompatível com a relatividade especial e com a conservação do momento e concluiu que a força de Lorentz deveria ser abandonada. Seu argumento foi exemplificado através de um sistema físico no qual um dipolo magnético não sofria torque devido ao campo de uma carga elétrica em um sistema referencial particular, mas em outros referenciais aparecia um torque quando a força de Lorentz era usada para efetuar os cálculos. Porém, foi mostrado em [27] que tal paradoxo não aparecia se fosse levado em conta o momento oculto possuído pelo dipolo magnético na presença do campo elétrico produzido pela carga pontual. Portanto a solução do paradoxo de Mansuripur depende da consideração do momento oculto do sistema, de forma que a validade da força de Lorentz implica na existência de momento oculto no sistema. No capítulo 2 desta tese discutimos o conceito de momento oculto e tratamos o paradoxo de Mansuripur, bem como sua solução.

Até recentemente só existiam modelos clássicos para o momento oculto [11, 18]. Uma vez que o momento de dipolo magnético contido em sistemas quânticos (como átomos ou elétrons) não pode ser descrito através de circuitos clássicos transportando corrente elétrica, ficou o questionamento sobre se a Lei de Força de Lorentz também seria válida em sistemas quânticos. Com o propósito de investigar essa questão, no capítulo 3 desta tese, consideramos um átomo de hidrogênio com momento magnético devido ao estado orbital do elétron, submetido a um campo elétrico externo. Calculamos, nessa situação, através da teoria de perturbação, o valor esperado do momento linear relativístico para o elétron no referencial do seu centro de massa, em primeira ordem. Uma vez que encontramos um valor esperado para o momento oculto conciliável com a força de Lorentz, concluímos que esta é compatível com sistemas quânticos. Os resultados obtidos nesse trabalho, publicados na referência [25], correspondem à primeira verificação da existência de momento oculto em um sistema quântico.

Capítulo 1. Introdução e Motivação

A segunda parte desta tese, que compreende os capítulos 4 e 5, está intimamente ligada a um debate famoso (conhecido como debate Abraham-Minkowski, por motivos que ficarão óbvios a seguir) sobre qual é a expressão para a densidade de momento de uma onda eletromagnética quando ela penetra em um meio material. Sabemos que a luz é formada por campos eletromagnéticos que oscilam no espaço e no tempo, de modo que, quando ela penetra em um meio transparente, seus campos interagem com as cargas do meio, podendo trocar momento e energia com estas, concomitantemente as cargas do meio podem modificar os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética. Assim sendo, o problema se torna muito complicado e existem várias abordagens distintas para o tratamento do mesmo. Os primeiros tratamentos para este problema são os de Abraham e Minkowski, daí o motivo de este dilema ser conhecido como debate Abraham-Minkowski [28–86].

Em meios materiais não-dispersivos, que são caracterizados pela independência da resposta do material com a frequência das ondas eletromagnéticas, a densidade de energia u e o fluxo de energia \vec{S} da luz podem ser escritos como $u = \vec{E} \cdot \vec{D}/2 + \vec{B} \cdot \vec{H}/2$ e $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ [20], em que \vec{E} e \vec{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético da luz, $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ é o deslocamento elétrico, com \vec{P} sendo a polarização do material, e $\vec{H} \equiv \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, com \vec{M} sendo a magnetização do material; ademais, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Tanto a formulação de Minkowski [28] quanto a de Abraham [29–31] concordam com as definições anteriores para a densidade de energia e para o fluxo de energia. Entretanto, as duas formulações não estão de acordo em relação à definição da densidade de momento linear da luz. A abordagem de Minkowski assume que a densidade de momento da luz em um meio material é $\vec{P}_{Min} = \vec{D} \times \vec{B}$. Em contrapartida, a formulação de Abraham considera que a densidade de momento da luz em um meio material é $\vec{P}_{Abr} = \vec{E} \times \vec{H}/c^2$ [58].

Em um material linear isotrópico não-magnético (no qual a polarização \vec{P} do material pode ser escrita como $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, em que χ_e é a susceptibilidade elétrica do material), tal que $E = vB$, com $v = c/n$ sendo a velocidade da luz no material, c a velocidade da luz no vácuo, E o módulo do campo elétrico, B o módulo do campo magnético, e $n = \sqrt{1 + \chi_e}$ o índice de refração do material, a densidade de energia de uma onda eletromagnética plana dentro do material é igual a $\epsilon_0 E^2 n^2$. Por outro lado, os módulos das densidades de momento linear de Minkowski e de Abraham são dados, respectivamente, por $\epsilon_0 E^2 n^3/c$ e $\epsilon_0 E^2 n/c$. Portanto, a razão entre os módulos das densidades de momento e de energia nas formulações de Minkowski e Abraham são, respectivamente, n/c e $1/(nc)$.

Capítulo 1. Introdução e Motivação

Em termos de um único fóton de frequência angular ω , que possui energia total igual a $\hbar\omega$ no vácuo (em que \hbar é a constante de Planck dividida por 2π), o módulo do momento linear desse fóton dentro de um material de índice de refração n é igual a $\hbar\omega n/c$ na formulação de Minkowski e $\hbar\omega/(nc)$ na de Abraham. Isso significa que quando um fóton penetra em um material linear seu momento aumenta de acordo com a formulação de Minkowski mas, em conformidade com a descrição de Abraham, seu momento diminui. Esse aparente paradoxo gerou um debate há mais de cem anos atrás que permanece vivo até hoje [58, 67, 72]. Ao longo desse tempo, diversos experimentos foram realizados com o intuito de se entender a questão [32, 34, 37, 40, 41, 43, 53, 62, 81]. Todavia, alguns aparentemente concordavam com a formulação de Abraham para o momento eletromagnético [40, 41, 62] e outros com a expressão de Minkowski [32, 34, 37, 43, 53], de forma que o debate persistia.

A conclusão eventual [36] deste dilema é que a densidade de momento da luz não está plenamente descrita se não considerarmos a densidade de momento material do meio no qual ela se propaga. Isto posto, qualquer formulação que considerar somente a parte eletromagnética do sistema é incompleta. Em síntese: existem diversas formas diferentes de definir as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia das ondas eletromagnéticas quando estas estão submersas em um meio material. Para uma descrição completa do sistema, além das grandezas associadas à luz, não podemos nos esquecer de levar em conta as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia do material. A divisão entre os valores das grandezas físicas associadas às duas partes que formam o sistema, a parte eletromagnética e a parte material, é sempre arbitrária, porém, se levarmos em conta corretamente todos os termos, todas as formulações levam às mesmas previsões experimentais.

Recentemente tem sido discutido que os momentos de Minkowski e de Abraham estão associados, respectivamente, aos momentos canônico e cinético da luz [67, 73]. Uma discussão sucinta do debate Abraham-Minkowski é feita no capítulo 4 desta tese.

No capítulo 5, investigamos quais modelos para o meio material estão associados a cada definição da parte eletromagnética do momento de uma onda eletromagnética em um meio material, bem como a conexão do conceito de momento oculto com o debate Abraham-Minkowski. A existência do momento oculto depende do modelo adotado para os momentos de dipolo da matéria. Quando o modelo para o momento de dipolo é um circuito transportando corrente, na presença de um campo externo, o sistema pode possuir momento oculto. Por outro lado, se considerarmos que o momento de dipolo é gerado por cargas, mesmo na presença de um campo externo, o sistema não possui momento oculto. Sendo assim, o momento eletromagnético também será distinto para cada modelo, uma vez que o momento total do sistema deve ser conservado [18, 19].

Capítulo 1. Introdução e Motivação

Consideramos modelos gerais em que os dipolos podem ser resultados de cargas elétricas ou magnéticas, bem como de correntes elétricas ou magnéticas. Desse modo, para cada modelo de dipolo pode ou não haver momento oculto, de forma que, como o momento oculto é um momento material, a parte eletromagnética do momento de uma onda eletromagnética no meio depende do modelo adotado para os dipolos do meio. No caso em que consideramos que dipolos elétricos se devem a cargas elétricas e dipolos magnéticos se devem a correntes elétricas, com a força eletromagnética dada pela força de Lorentz, a densidade de momento eletromagnético deve ter a forma $\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$. Portanto essa também é uma forma relevante para o momento da onda no meio por ser a derivada de um modelo mais natural para os dipolos do meio, além das expressões de Abraham e Minkowski. Um artigo com os resultados obtidos está em fase de preparação.

No capítulo 6 desta tese, fizemos uma síntese dos resultados obtidos e apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

“O esforço para compreender o Universo é uma das poucas coisas que elevam a vida humana um pouco acima do nível da farsa e lhe dá um pouco da beleza da tragédia.”
Steven Weinberg [87].

Em meados do século *XIX*, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879), unificou as expressões matemáticas que descrevem fenômenos elétricos e magnéticos através de um conjunto de equações que ficaram conhecidas como Equações de Maxwell [17, 21, 88]. O arcabouço teórico que sustenta o Eletromagnetismo Clássico se resume às Equações de Maxwell ¹, que descrevem como os campos elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}) são gerados por densidades de carga elétrica (ρ_e) e de corrente elétrica (\vec{J}_e), e podem ser escritas como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

¹É necessário sublinhar que, como acontece com qualquer equação diferencial, para obtermos soluções para as Equações de Maxwell, precisamos suplementá-las por condições de contorno que são dependentes de cada sistema físico particular.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

em companhia da Lei de Força de Lorentz, que descreve como os campos elétrico e magnético exercem força sobre as densidades de carga elétrica e de corrente elétrica, e que é dada por

$$\vec{f}_L = \rho_e \vec{E} + \vec{J}_e \times \vec{B}, \quad (2.5)$$

em que \vec{f}_L é a densidade de força de Lorentz, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Recentemente, Masud Mansuripur publicou um artigo intitulado “Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation” [26], na respeitável revista *Physical Review Letters*, no qual afirmara oferecer evidência teórica incontestável da incompatibilidade entre a Lei de Força de Lorentz, dada pela equação (2.5), que é um dos cinco pilares que sustentam o Eletromagnetismo Clássico, com um princípio fundamental da relatividade especial ² e que, por esse motivo, tal lei deveria ser abandonada. A revista *Science* publicou um comentário de uma página sobre o assunto [89], e depois de quase um ano foram publicados quatro “comments” [27, 90–92] na *Physical Review Letters*. Vários autores [27, 90–95] salientaram que como a Lei de Força de Lorentz pode ser escrita na forma manifestamente covariante, ela é obrigatoriamente consistente com a relatividade especial e, ademais, identificaram o equívoco cometido por Mansuripur [26]: ele ignorou o momento oculto, que é um efeito relativístico que pode fazer com que um dipolo magnético possua momento linear na presença de um campo elétrico mesmo estando parado.

Neste capítulo, apresentaremos o paradoxo de Mansuripur [26], explicaremos o conceito de momento oculto, e resolveremos o paradoxo de Mansuripur usando o modelo de Ampère para o dipolo magnético ³.

2.1 Apresentação do Paradoxo de Mansuripur

Primeiramente, vamos apresentar o paradoxo de Mansuripur numa forma simplificada: considere um sistema físico composto por um dipolo magnético (\vec{m}_0) na presença de um campo elétrico uniforme na direção x visto a partir de dois referenciais inerciais, S (laboratório) e S' (próprio) (figura 2.1). O referencial S' está se movendo

²Tal princípio afirma que as leis da Física se aplicam em todos sistemas referenciais inerciais [17].

³Nesse caso, o momento de dipolo magnético é gerado por um circuito transportando corrente elétrica.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

com velocidade $\vec{V} = V\hat{x}$ em relação ao referencial S e em $t = t' = 0$ as origens dos dois referenciais se encontravam no mesmo ponto do espaço. No referencial S' , o dipolo magnético ($\vec{m}_0 = m_0\hat{z}' = m_0\hat{z}$) está localizado no ponto $(d, 0, 0)$ e existe um campo elétrico externo constante e uniforme $\vec{E}' = E\hat{x}' = E\hat{x}$ em todo o espaço. Assim sendo, no referencial próprio, o torque (\vec{N}') sobre \vec{m}_0 é zero, pois o campo magnético $\vec{B}' = 0$ e $\vec{N}' = \vec{m}_0 \times \vec{B}'$.

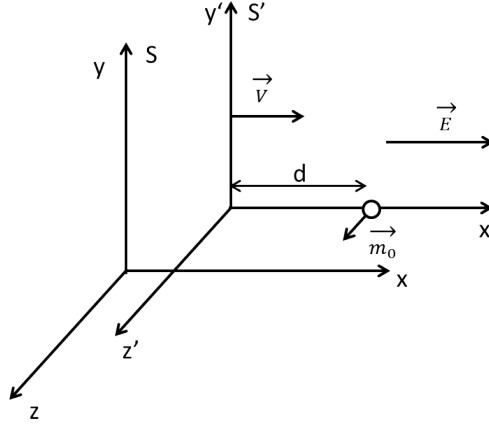


Figura 2.1: Dipolo magnético ($\vec{m}_0 = m_0\hat{z}' = m_0\hat{z}$) na presença de um campo elétrico externo constante e uniforme nos referenciais inerciais S' (próprio) e S (laboratório).

As relações entre os campos elétrico e magnético vistos pelos referenciais S e S' podem ser escritas como [96]

$$\vec{E} = \gamma \left(\vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\vec{V}}{c} \cdot \vec{E}' \right) \frac{\vec{V}}{c}, \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \gamma \left(\vec{B}' + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{E}' \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\vec{V}}{c} \cdot \vec{B}' \right) \frac{\vec{V}}{c}, \quad (2.7)$$

em que $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz, \vec{V} é a velocidade com que o referencial S' se move em relação a S e c é a velocidade da luz no vácuo. Usamos aspas simples nas grandezas medidas no referencial próprio (S') para diferenciá-las das grandezas observadas no referencial S .

Considerando o caso específico do sistema representado na figura 2.1, no qual $\vec{E}' = E\hat{x}$ e $\vec{B}' = 0$, os campos elétrico e magnético medidos pelo referencial S são dados, respectivamente, por

$$\vec{E} = E\hat{x} \text{ e } \vec{B} = 0. \quad (2.8)$$

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

Similarmente aos campos elétrico e magnético, a magnetização (\vec{M}) e a polarização (\vec{P}) de um meio material também se transformam como um tensor antissimétrico de ordem 2 sob transformações de Lorentz. Isso é essencial para a covariância das equações de Maxwell em meios materiais. Consequentemente, o que é visto como magnetização ou polarização em um determinado referencial S pode ser visto como uma mistura de polarização e magnetização em outro referencial S' que esteja se movendo com velocidade \vec{V} em relação ao primeiro e vice-versa. Isto posto, de modo geral, os vínculos entre a polarização e a magnetização de um material observados pelos referenciais S e S' podem ser escritos como [24]

$$\vec{P} = \gamma \left(\vec{P}' + \frac{\vec{V}}{c^2} \times \vec{M}' \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\vec{V}}{c} \cdot \vec{P}' \right) \frac{\vec{V}}{c}, \quad (2.9)$$

$$\vec{M} = \gamma \left(\vec{M}' - \vec{V} \times \vec{P}' \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\vec{V}}{c} \cdot \vec{M}' \right) \frac{\vec{V}}{c}. \quad (2.10)$$

No sistema representado pela figura 2.1, do ponto de vista do referencial S' , temos apenas um dipolo magnético \vec{m}_0 localizado na posição $(d, 0, 0)$ e orientado na direção z . Assim sendo, a magnetização e a polarização deste sistema, observadas no referencial S' , podem ser escritas como

$$\vec{M}'(x', y', z') = m_0 \delta(x' - d) \delta(y') \delta(z') \hat{z} \quad (2.11)$$

e

$$\vec{P}'(x', y', z') = 0, \quad (2.12)$$

em que δ é a função Delta de Dirac. Desse modo, as mesmas grandezas, só que vistas a partir do referencial S , podem ser obtidas substituindo-se as equações (2.11) e (2.12) nas expressões gerais dadas pelas equações (2.9) e (2.10) e, levando-se em conta que $\vec{V} = V \hat{x}$, $x' = \gamma(x - Vt)$, $y' = y$, $z' = z$ e $\delta(ax) = \delta(x)/a$, obtemos que

$$\vec{M}(x, y, z, t) = m_0 \delta(x - Vt - d/\gamma) \delta(y) \delta(z) \hat{z} \quad (2.13)$$

e

$$\vec{P}(x, y, z, t) = -m_0 \frac{V}{c^2} \delta(x - Vt - d/\gamma) \delta(y) \delta(z) \hat{y}. \quad (2.14)$$

Finalmente, para obtermos os momentos de dipolo magnético \vec{m} e elétrico \vec{p} do sistema exibido na figura 2.1, visto pelo referencial S , basta integrarmos as equações (2.13) e (2.14) em todo o volume τ do sistema, ou seja,

$$\vec{m} = m_0 \hat{z} \int_{\tau} \delta(x - Vt - d/\gamma) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = m_0 \hat{z} \quad (2.15)$$

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

e

$$\vec{p} = -m_0 \frac{V}{c^2} \hat{y} \int_{\tau} \delta(x - Vt - d/\gamma) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = -m_0 \frac{V}{c^2} \hat{y}. \quad (2.16)$$

Dessa forma, mostramos que um dipolo magnético orientado na direção $+z$ que está em “movimento” na direção $+x$, adquire um momento de dipolo elétrico, \vec{p} , dado pela equação (2.16). Por conseguinte, do ponto de vista do referencial S , a presença do dipolo elétrico sob a ação do campo elétrico externo gera um torque dado por

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} = \frac{V m_0 E}{c^2} \hat{z}. \quad (2.17)$$

Visto que o torque total é nulo no referencial próprio (S') e diferente de zero no referencial do laboratório (S), Mansuripur [26] concluiu que a Lei de Força de Lorentz é incompatível com a relatividade especial e mostrou que se a equação de força de Einstein-Laub fosse usada no lugar da equação de força de Lorentz como lei fundamental da Natureza, tal paradoxo desapareceria. Isto posto, Mansuripur propôs a substituição da força de Lorentz pela de Einstein-Laub como lei fundamental da Natureza. Esse é o paradoxo de Mansuripur.

Uma vez que a resolução deste aparente paradoxo envolve o conceito de momento oculto, antes de apresentá-la, explanaremos tal conceito através de um sistema físico simples que possui momento oculto [17, 19, 21]: um circuito fechado transportando corrente elétrica estacionária na presença de um campo elétrico constante e uniforme.

2.2 Momento Oculto

O momento oculto foi descoberto a quase 50 anos atrás [7–24], e até a publicação do nosso trabalho [25] só existiam modelos clássicos para o momento oculto. Tal momento é proveniente de um efeito relativístico que pode fazer com que um dipolo magnético tenha momento linear na presença de um campo elétrico externo mesmo se o dipolo estiver em repouso. Esse é um fenômeno muito curioso, uma vez que tendemos a associar momento com movimento e por isso parece estranho que um sistema em repouso tenha momento. A seguir, apresentaremos uma breve descrição do conceito de momento oculto baseada em um exemplo clássico [17, 19, 21].

Considere um circuito retangular fechado transportando uma corrente elétrica estacionária ⁴. Após a aplicação de um campo elétrico uniforme e constante, $\vec{E} = E\hat{x}$, as partículas serão aceleradas no segmento do lado esquerdo do circuito e desaceleradas no segmento do lado direito deste (veja a figura 2.2). Assim, como a corrente do circuito

⁴Imagine a corrente elétrica como um feixe de partículas não-interagentes com cargas positivas. Como as partículas não interagem entre si, elas se movem livremente através do circuito.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

($I = \lambda V$, em que I é a corrente do circuito, λ é a densidade linear de carga e V é a velocidade das partículas que constituem a corrente elétrica) é estacionária, ou seja, não há partículas carregadas se acumulando em nenhum lugar do circuito, concluímos que $\lambda_1 V_1 = \lambda_2 V_2 = \lambda_3 V_3 = \lambda_4 V_4$. Dessa forma, nos segmentos do circuito em que as partículas se movem mais lentamente a densidade de partículas deve ser maior, e nos segmentos do circuito em que as partículas se movem mais rapidamente a densidade de partículas deve ser menor, pois $I = \lambda V$. Pergunta: qual é o momento linear clássico total de todas as cargas do circuito representado pela figura 2.2?

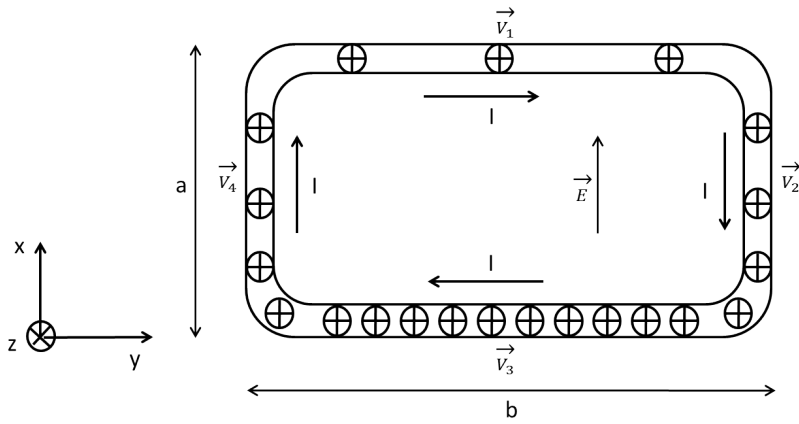


Figura 2.2: Circuito fechado percorrido por uma corrente elétrica estacionária I , formada por um conjunto de partículas não-interagentes com cargas positivas, na presença de um campo elétrico externo constante e uniforme $\vec{E} = E\hat{x}$.

Supondo que todas as partículas têm a mesma massa (M) e a mesma carga (q), o momento linear clássico total é dado pela soma dos momentos lineares clássicos de todas as partículas presentes no circuito [17, 19, 21]:

$$\vec{p}_{cl} = M \left[(N_1 V_1 - N_3 V_3) \hat{y} + \hat{x} \int_0^a \left(\frac{\lambda_4(x)}{q} V_4(x) - \frac{\lambda_2(x)}{q} V_2(x) \right) dx \right], \quad (2.18)$$

em que N_i é o número total de partículas no segmento i e V_i é a velocidade de uma partícula no segmento i , com $i = 1, 2, 3$ e 4 . Note que nos segmentos 2 e 4, o número de partículas depende da posição x , pois elas estão sendo desaceleradas e aceleradas. Tendo em vista que $\lambda_i V_i = \lambda_j V_j$, temos que $N_1 V_1 = N_3 V_3$ e $\lambda_2(x) V_2(x) = \lambda_4(x) V_4(x) \forall x \in [0, a]$. Assim sendo, substituindo as expressões anteriores na equação (2.18), obtemos que $\vec{p}_{cl} = 0$. Este resultado faz todo sentido, pois o circuito não está em movimento! Mas... e se agora quisermos calcular o momento linear relativístico total de todas as partículas contidas do circuito?

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

Sabemos que o momento linear relativístico de uma partícula de massa M é dado por $\vec{p}_{rel} = M\gamma\vec{V}$, com $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, em que \vec{V} é a velocidade da partícula em relação a algum referencial inercial e c é a velocidade da luz no vácuo. Desse modo, o momento linear relativístico total do circuito é dado por [17, 19, 21]

$$\begin{aligned}\vec{p}_{rel} &= M \left[(N_1V_1\gamma_1 - N_3V_3\gamma_3) \hat{\mathbf{y}} + \frac{\hat{\mathbf{x}}}{q} \int_0^a [\lambda_4(x)V_4(x)\gamma_4(x) - \lambda_2(x)V_2(x)\gamma_2(x)] dx \right] \\ &= M (N_1V_1\gamma_1 - N_3V_3\gamma_3) \hat{\mathbf{y}},\end{aligned}\quad (2.19)$$

em que $\gamma_i = (1 - V_i^2/c^2)^{-1/2}$, com $i = 1, 2, 3$ e 4 . Como $\lambda_2(x)V_2(x) = \lambda_4(x)V_4(x)$ e $\gamma_2(x) = \gamma_4(x)$, o segundo termo da direita da equação (2.19) é nulo. Entretanto, apesar de $N_1V_1 = N_3V_3$, sabemos que $\gamma_1 > \gamma_3$, visto que a velocidade das partículas no segmento 1 é maior do que a do segmento 3. Portanto, $\vec{p}_{rel} = M(N_1V_1\gamma_1 - N_3V_3\gamma_3)\hat{\mathbf{y}} = MN_1V_1(\gamma_1 - \gamma_3)\hat{\mathbf{y}}$. Já que $N_1V_1 = \lambda_1(b/q)V_1 = I(b/q)$, o momento linear relativístico total do circuito pode ser escrito como [17, 19, 21]

$$\vec{p}_{rel} = \frac{MIb}{q}(\gamma_1 - \gamma_3)\hat{\mathbf{y}},\quad (2.20)$$

em que I é a corrente elétrica do circuito.

Quando uma partícula se desloca através de toda a extensão do segmento 4, a variação da energia cinética desta ($\Delta K = K_f - K_i = Mc^2(\gamma_1 - \gamma_3)$) é igual ao trabalho realizado sobre a mesma pela força elétrica:

$$Mc^2(\gamma_1 - \gamma_3) = \int_0^a q\vec{E} \cdot \hat{\mathbf{x}}dx = qEa.\quad (2.21)$$

Resolvendo a equação (2.21) para $\gamma_1 - \gamma_3$ e substituindo o resultado na equação (2.20), obtemos que

$$\vec{p}_{rel} = \frac{IabE}{c^2}\hat{\mathbf{y}}.\quad (2.22)$$

Tendo em vista que o momento de dipolo magnético do circuito é definido como $\vec{m}_0 = Iab(\hat{\mathbf{z}})$ ⁵, a expressão para o momento linear relativístico total do circuito pode ser escrita como [17, 19, 21]

$$\vec{p}_{rel} = \vec{p}_{oc} = \frac{1}{c^2}\vec{m}_0 \times \vec{E}.\quad (2.23)$$

A equação (2.23) afirma que um dipolo magnético (formado por uma corrente elétrica) na presença de um campo elétrico externo pode possuir momento oculto,

⁵Nesse caso, o momento de dipolo magnético do sistema é gerado por um circuito fechado transportando corrente elétrica. Tal modelo é conhecido como modelo de Ampère para o dipolo.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

mesmo quando o dipolo não está em movimento! Como o dipolo está em repouso, em conformidade com o Teorema do Centro de Energia, deve haver outro momento no sistema (que, nesse caso, é o momento eletromagnético) para contrabalancear o momento oculto, de modo a fazer com que o momento total do sistema seja nulo (para mais detalhes sobre o Teorema do Centro de Energia veja o Apêndice A desta tese). Posteriormente, discutiremos sobre como o momento do campo eletromagnético contrabalança o momento oculto, de modo a satisfazer o Teorema do Centro de Energia.

Para generalizar a equação (2.23), repare que as energias da partícula no início e no final do segmento 4 são, respectivamente, $W_3 = Mc^2(\gamma_3 - 1) + q\Phi_3$ e $W_1 = Mc^2(\gamma_1 - 1) + q\Phi_1$, em que $q\Phi_3$ e $q\Phi_1$ são as energias potenciais da partícula no início e no final do segmento 4. Uma vez que a energia total da partícula não varia ao longo do circuito, $W_3 = W_1 \Rightarrow (\gamma_1 - \gamma_3)Mc^2 = -q(\Phi_1 - \Phi_3)$. Substituindo essa última expressão na equação (2.20), obtemos que [18, 19]

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{I}{c^2}b(\Phi_1 - \Phi_3)\hat{\mathbf{y}} = -\frac{I}{c^2} \oint \Phi d\vec{l}, \quad (2.24)$$

em que a integral deve ser realizada sobre o circuito fechado e $d\vec{l}$ é um comprimento infinitesimal na direção e no sentido da corrente I . De modo similar à equação (2.24), as expressões para o momento oculto (\vec{p}_{oc}) no caso de correntes superficiais e volumétricas são dadas, respectivamente, por [19]

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi \vec{K} dA \quad (2.25)$$

e

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi \vec{J} d\tau, \quad (2.26)$$

em que \vec{K} e \vec{J} são, respectivamente, as densidades superficial e volumétrica de corrente elétrica.

É importante deixar claro que existem outros modelos clássicos para o momento oculto, além do que foi descrito acima [11, 18]. Os modelos mais conhecidos para o momento oculto são: um gás de partículas carregadas forçado a se mover dentro de um tubo neutro (modelo que foi descrito nesta seção) e um líquido incompressível eletricamente carregado forçado a se mover dentro de um tubo neutro na presença de um campo elétrico externo. Nesse caso, o mecanismo responsável pela existência do momento oculto é diferente do mecanismo do modelo anterior. No caso de um líquido incompressível eletricamente carregado forçado a se mover dentro de um tubo neutro na presença de um campo elétrico externo, a existência do momento oculto está associada

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

com o fato de que um líquido se movendo sob alta pressão possui um momento maior do que o mesmo líquido se movendo sob baixa pressão ⁶.

2.2.1 Comentários Finais Sobre o Momento Oculto

Nesta subseção, vamos demonstrar que para uma distribuição isolada e localizada de cargas elétricas estáticas e correntes elétricas estacionárias, na presença de campos elétricos e magnéticos estáticos ⁷, $\vec{p}_{em} + \vec{p}_{oc} = 0$, em que \vec{p}_{em} é o momento do campo eletromagnético [18, 19]. Iniciaremos pela expressão do momento oculto possuído por uma densidade volumétrica de corrente elétrica (\vec{J}) (equação (2.26)): $\vec{p}_{oc} = -(1/c^2) \int \Phi \vec{J} d\tau$.

Usando a Lei de Ampère no caso estático ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$) para substituir a densidade de corrente (\vec{J}) na expressão do momento oculto, obtemos que

$$\vec{p}_{oc} = -\epsilon_0 \int \Phi (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\tau. \quad (2.27)$$

O integrando da equação (2.27) pode ser escrito de outra forma se usarmos a seguinte identidade vetorial [17]

$$\Phi (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{\nabla} \Phi). \quad (2.28)$$

Tendo em mente que no caso estático o campo elétrico é igual a menos o gradiente do potencial (isto é, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$), podemos substituir a equação (2.28) na expressão (2.27) com o intento de obter a seguinte expressão:

$$\vec{p}_{oc} = -\epsilon_0 \int \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{B}) d\tau + \epsilon_0 \int (\vec{B} \times \vec{E}) d\tau. \quad (2.29)$$

Como $\int \vec{\nabla} \times (\Phi \vec{B}) d\tau = \oint \Phi \vec{B} \times \hat{n} dA$, em que \hat{n} é a direção do vetor normal à superfície de integração, segue que ⁸

$$\begin{aligned} \vec{p}_{oc} &= -\epsilon_0 \oint \Phi \vec{B} \times \hat{n} dA + \epsilon_0 \int (\vec{B} \times \vec{E}) d\tau \\ &= \epsilon_0 \int (\vec{B} \times \vec{E}) d\tau = -\vec{p}_{em}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

⁶Este efeito é puramente relativístico [18].

⁷Por campos estáticos, queremos dizer que estes não dependem explicitamente do tempo.

⁸ A integral de superfície do lado direito da primeira linha da equação (2.30) é nula quando a integração é realizada em todo o espaço, pois estamos considerando uma distribuição de corrente elétrica localizada.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

Isso mostra que o momento total de um sistema fechado e localizado, formado por cargas elétricas estáticas e correntes elétricas estacionárias, é nulo, ou seja, $\vec{p}_{oc} + \vec{p}_{em} = 0$. É importante salientar que esse resultado está de acordo com o Teorema do Centro de Energia, uma vez que este exige que quando o centro de energia de um sistema isolado e localizado estiver em repouso, o momento total do sistema deve ser nulo.

Em geral, o momento oculto possui as seguintes características fundamentais [19]:

- Apesar de surgir frequentemente em contextos eletromagnéticos, não tem a ver com eletrodinâmica; é um efeito puramente mecânico.
- É intrinsecamente relativístico.
- Geralmente aparece em sistemas com partes internas em movimento. É importante destacar que nem sempre um sistema físico que possui momento de dipolo magnético na presença de um campo elétrico externo possui momento oculto! A existência do momento oculto depende do modelo adotado para o dipolo magnético. No caso em que o modelo para o dipolo magnético é um circuito transportando corrente elétrica (conhecido como modelo de Ampère) - com partes internas em movimento -, o sistema pode ter momento oculto; todavia, se considerarmos que o dipolo magnético é gerado por duas cargas magnéticas pontuais (conhecido como modelo de Gilbert) - sem partes internas em movimento-, o sistema não possui momento oculto [94].

Para finalizarmos esta subseção, antes de voltarmos ao paradoxo de Mansuripur, calculamos o momento oculto e o momento eletromagnético de um sistema constituído por um dipolo elétrico (que possui momento de dipolo elétrico $\vec{p} = p\hat{y}$) formado por duas cargas elétricas iguais, de sinais opostos e separadas, no centro de uma casca esférica de raio R , uniformemente carregada com densidade de carga σ , girando com velocidade angular constante, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ (veja a figura 2.3).

A densidade de corrente elétrica resultante do giro da casca esférica uniformemente carregada, \vec{K} , e o potencial elétrico gerado pelo dipolo elétrico, Φ , podem ser escritos como

$$\vec{K} = \sigma (\vec{\omega} \times \vec{R}) = \sigma\omega R\hat{\phi} \quad (2.31)$$

e

$$\Phi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \sin\theta \sin\phi}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.32)$$

em que $\hat{\phi} = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi$.

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

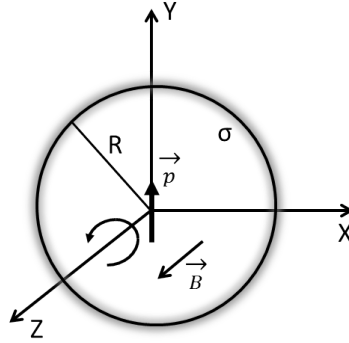


Figura 2.3: Dipolo elétrico no centro de uma casca esférica uniformemente carregada girando com velocidade angular constante em torno do eixo z .

Dessa forma, o momento oculto do sistema pode ser obtido através da equação (2.25):

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{oc} &= -\frac{1}{c^2} \int_A \Phi \vec{K} dA \\
 &= -\frac{1}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{p \sin\theta \sin\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) (\sigma\omega R [-\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi]) R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
 &= \frac{\mu_0 p \sigma \omega R \hat{x}}{3} = \frac{\vec{p} \times \vec{B}}{2},
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

em que $\vec{B} = 2\hat{z}\mu_0\sigma R\omega/3$ é o campo magnético dentro da casca esférica.

Por outro lado, o campo elétrico produzido pelo dipolo elétrico em todo o espaço é dado por

$$\vec{E} = \frac{[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\vec{p}\delta^3(\vec{r})}{3\epsilon_0}. \tag{2.34}$$

Os campos magnéticos gerados pela casca esférica giratória, dentro e fora desta, podem ser escritos, respectivamente, como

$$\vec{B}(r < R) = B\hat{z} \tag{2.35}$$

e

$$\vec{B}(r > R) = \frac{3\mu_0(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3}, \tag{2.36}$$

em que $\vec{m} = 4\pi\sigma R^4\omega\hat{z}/3$ é o momento de dipolo magnético produzido pela casca esférica.

O momento eletromagnético total dos campos é dado pelo soma do momento eletromagnético contido dentro e fora da casca. Isto posto, o momento eletromagnético dentro da casca esférica é igual a

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{int} &= \epsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{B} (r < R) dV \\
&= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\vec{p} \delta^3(\vec{r})}{3\epsilon_0} \right] \times \hat{z} \vec{B} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\
&= -\frac{\vec{p} \times \vec{B}}{3},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e o momento eletromagnético fora da casca esférica é dado por

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{ext} &= \epsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{B} (r > R) dV \\
&= \epsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right] \times \left[\frac{3\mu_0 (\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}}{4\pi r^3} \right] r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi \\
&= -\frac{\vec{p} \times \vec{B}}{6}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Portanto, o momento eletromagnético total pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{em} &= \vec{p}_{int} + \vec{p}_{ext} \\
&= -\frac{\vec{p} \times \vec{B}}{2},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

que, como era de se esperar (equação (2.30)), é igual ao negativo do momento oculto (equação (2.33)) do sistema, ou seja, $\vec{p}_{em} = -\vec{p}_{oc}$.

A seguir, usaremos o conceito de momento oculto para resolver o aparente paradoxo de Mansuripur.

2.3 Resolução do Paradoxo de Mansuripur

Nesta seção, exibiremos a resolução do paradoxo de Mansuripur baseado na referência [27]. Outras abordagens levam ao mesmo resultado [90–94].

Vimos na seção precedente que o momento oculto do sistema representado na figura 2.2 é dado pela equação (2.23). Assim, o momento oculto (\vec{p}_{oc}) do sistema representado pela figura 2.1, visto a partir do referencial próprio (S'), considerando que o momento de dipolo é gerado pelo modelo de Ampère, com $\vec{m}_0 = m_0 \hat{z}$ e $\vec{E} = E \hat{x}$, é dado por

$$\vec{p}_{oc} = \frac{m_0 E}{c^2} \hat{y}. \tag{2.40}$$

Capítulo 2. A Força de Lorentz é Incompatível com a Relatividade Especial?

Nesse caso específico, visto que $\vec{p}_{oc} \cdot \vec{V} = 0$ e as componentes ortogonais não são afetadas pelas transformações de Lorentz, o momento oculto medido pelo referencial S é estritamente igual ao momento oculto medido pelo referencial S' (dado pela equação (2.40)). Dessa forma, como a distância ($\vec{r} = \vec{r}(t)$) entre a origem do referencial S e o momento de dipolo magnético (fixo no referencial S') varia com o tempo, o momento angular oculto medido no referencial S também o faz, pois $\vec{L}_{oc}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}_{oc}$. Já no referencial S' , o momento angular ($\vec{L}'_{oc} = \vec{r}' \times \vec{p}_{oc}$) não depende do tempo, pois $\vec{r}' (= d\hat{x})$ e \vec{p}_{oc} não dependem do tempo. Em vista disso, as variações de momento angular medidas nos referenciais S' e S , são, respectivamente,

$$\frac{d\vec{L}'_{oc}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}' \times \vec{p}_{oc}] = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\vec{L}_{oc}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{p}_{oc} = V\hat{x} \times \hat{y} \frac{m_0 E}{c^2} = \frac{Vm_0 E}{c^2} \hat{z}, \quad (2.42)$$

em que $d\vec{r}(t)/dt = V\hat{x}$.

Observe que a variação do momento angular no referencial S (equação (2.42)) é estritamente igual ao torque total obtido na equação (2.17), ou seja, o torque resultante sobre o dipolo é igual a taxa de variação do momento angular causada pelo movimento de um objeto que possui momento oculto, de tal modo que não há aceleração angular do dipolo e, por conseguinte, não há paradoxo com o uso da força de Lorentz. Em outras palavras, o fato de o torque total do sistema ser diferente de zero (no referencial S) faz com que haja um aumento no momento angular oculto do sistema, embora nada esteja girando. Isso nos leva a separar o momento angular em dois tipos diferentes: manifesto (\vec{L}_{man} , que está associado com uma rotação real) e oculto ($\vec{L}_{oc}(t)$, que não está relacionado com uma rotação real). Isto posto, o torque total sobre o sistema (visto pelo referencial do laboratório, S) pode ser dividido em duas partes:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}_{man}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{oc}(t)}{dt}. \quad (2.43)$$

Observe que $d\vec{L}_{man}/dt = 0$, já que não há nada girando e $d\vec{L}_{oc}(t)/dt \neq 0$, pois $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e existe momento oculto (\vec{p}_{oc}) no sistema. Sendo assim, concluímos que a força de Lorentz é compatível com a relatividade especial. Note, contudo, que a solução do paradoxo de Mansuripur depende da existência de momento oculto no sistema. Dessa forma, concluímos que a validade da força de Lorentz implica na existência de momento oculto no sistema.

Capítulo 3

Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

*“This is a song in defence of the fence
A little sing along, a anthem to ambivalence
The more you know, the harder you will find it
To make up your mind, it doesn't really matter if you find
You can't see which grass is greener
Chances are it's neither
and either way it's easier
To see the difference when you're sitting on the fence.”* The Fence - Tim Minchin.

Como já foi afirmado nesta tese, até recentemente só havia modelos clássicos para o momento oculto [7–24]. Assim sendo, tendo em vista que a validade da Lei de Força de Lorentz está condicionada à existência de momento oculto, como foi discutido no capítulo 2, é legítimo questionar se tal lei é válida em sistemas quânticos (como átomos), já que os momentos magnéticos atômicos não são originários de correntes clássicas. A fim de responder essa questão, usamos a teoria de perturbação para investigar se um átomo de hidrogênio com momento magnético devido ao momento angular orbital do elétron na presença de um campo elétrico externo tem momento oculto. Calculamos o momento oculto do sistema usando dois métodos diferentes, confirmando sua existência e a consequente validade da Lei de Força de Lorentz neste sistema quântico. Nosso trabalho, publicado na referência [25], corresponde à primeira verificação da existência de momento oculto em um sistema quântico.

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

Na seção 2.2, vimos que um sistema clássico formado por um momento de dipolo magnético ($\vec{m}_0 = m_0 \hat{z}$) gerado por um circuito transportando corrente elétrica, na presença de um campo elétrico externo uniforme e constante ($\vec{E} = E \hat{x}$) na direção ortogonal à do momento de dipolo magnético, possui momento oculto ($\vec{p}_{oc} = m_0 E \hat{y} / c^2$). Como o átomo de hidrogênio em um estado com momento angular orbital diferente de zero, na presença de um campo elétrico externo uniforme, constante e ortogonal ao momento angular orbital do átomo seria um sistema quântico análogo, esperamos que tal sistema tenha momento oculto. Na próxima seção, elaboraremos uma brevíssima revisão sobre o átomo de hidrogênio [97–101] e, em seguida, calcularemos o momento oculto deste e faremos uma análise crítica do resultado obtido ¹.

3.1 Átomo de Hidrogênio

“No momento em que se pensa ter compreendido tudo, se adquire no rosto uma expressão assassina de alguma coisa. Não há como compreender tudo. No edifício do pensamento não encontrei nenhuma categoria na qual pousar a cabeça. Em contrapartida, que belo travesseiro é o Caos!” Emil Cioran [102].

A equação de Schrödinger independente do tempo para o átomo de hidrogênio livre ², na representação de coordenadas, pode ser escrita como [97]

$$\hat{H}_0 \psi_{nlm}(\vec{r}) = E_n \psi_{nlm}(\vec{r}), \quad (3.1)$$

em que o hamiltoniano do sistema (\hat{H}_0) é dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - e\hat{V}(r), \quad (3.2)$$

em que \hat{p} é o operador momento linear, E_n é a energia do sistema correspondente à função de onda $\psi_{nlm}(\vec{r})$, m_e é a massa do elétron e $\hat{V}(r) \equiv e/(4\pi\epsilon_0 r)$ é o operador potencial coulombiano.

¹Em nosso trabalho, levamos em conta apenas o momento magnético orbital do elétron, que é proveniente do movimento deste em torno do núcleo atômico, ou seja, não levamos em conta o momento angular de spin do elétron.

²Estamos considerando que a massa do elétron é muito menor do que a massa do próton (aproximação em que o próton possui massa infinita). Isso equivale a considerar que o próton está fixo no centro do átomo e que o elétron se movimenta em torno do primeiro.

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

Os autovalores e as autofunções da equação (3.1) são, respectivamente,

$$E_n = -\frac{m_e}{2\hbar^2 n^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2, \text{ com } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

e

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.4)$$

em que

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (3.5)$$

são os harmônicos esféricos ³ e

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^l e^{-r/(na_0)} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right) \quad (3.6)$$

forma a solução geral para a equação radial, que envolve os polinômios associados de Laguerre ⁴, onde $a_0 = (4\pi\epsilon_0\hbar^2)/(m_e e^2)$ é o raio de Bohr, e é o módulo da carga elementar do elétron, m_e é a massa do elétron e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. As funções definidas pelas expressões (3.5) e (3.6) são normalizadas do seguinte modo:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |Y_l^m(\theta, \phi)|^2 \sin\theta d\theta d\phi = 1 \quad (3.7)$$

e

$$\int_0^\infty r^2 |R_{nl}(r)|^2 dr = 1. \quad (3.8)$$

3.2 Átomo de Hidrogênio na Presença de um Campo Elétrico Constante e Uniforme

Nosso objetivo principal neste capítulo é calcular o momento oculto do átomo de hidrogênio na presença de um campo elétrico constante e uniforme na direção x . Porém, antes disso, a fim de compreender a dinâmica do nosso sistema, calculamos alguns observáveis deste após a aplicação do campo elétrico.

³Os harmônicos esféricos, $Y_l^m(\theta, \phi)$, formam a solução geral (que é uma combinação linear de todos os harmônicos esféricos) da parte angular da equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio livre.

⁴ $L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right)$ é um polinômio de grau $(n+l) - (2l+1) = n-l-1$.

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

O hamiltoniano total do sistema após a aplicação do campo elétrico ($\vec{E} = E\hat{x}$) pode ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - e\hat{V}(r) + eE\hat{x}, \quad (3.9)$$

em que E é o módulo do campo elétrico externo, $\hat{V}(r)$ é o operador potencial coulombiano e e é o módulo da carga elementar do elétron.

Para encontrarmos as autofunções do sistema após a aplicação do campo elétrico externo, precisamos resolver a seguinte equação:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E_{nlm}|\psi\rangle. \quad (3.10)$$

Visto que não sabemos como obter a solução exata para a equação (3.10), obtivemos uma solução aproximada para a mesma através da Teoria de Perturbação Degenerada Independente do Tempo [97–101, 103].

A Teoria de Perturbação Não-Degenerada Independente do Tempo nos permite calcular os efeitos de termos adicionais no hamiltoniano de um sistema que já conhecemos a solução [97–101, 103]. O hamiltoniano de ordem-zero com solução exata obedece à seguinte equação de autovalor:

$$\hat{H}_0|\psi_{nlm}^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_{nlm}^{(0)}\rangle, \quad (3.11)$$

em que $\hat{H}_0 \equiv \hat{p}^2/(2m_e) - e\hat{V}(r)$ e $E_n^{(0)} = E_n$ (equação (3.3)).

O sistema é perturbado através da adição de um novo termo no hamiltoniano, a saber

$$\hat{H}' \equiv eE\hat{x}, \quad (3.12)$$

e a equação de Schrödinger independente do tempo é dada pela equação (3.10), com

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'. \quad (3.13)$$

As correções de primeira ordem para a energia ($E_{nlm}^{(1)}$) e para o vetor de estado ($|\psi_{nlm}^{(1)}\rangle$) são [97–101, 103]:

$$E_{nlm}^{(1)} = \langle \psi_{nlm}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{nlm}^{(0)} \rangle \quad (3.14)$$

e

$$|\psi_{nlm}^{(1)}\rangle = \sum_{n'} \sum_{l'} \sum_{m'} \frac{\langle \psi_{n'l'm'}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{nlm}^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)}} |\psi_{n'l'm'}^{(0)}\rangle, \quad \text{com } |\psi_{nlm}\rangle \approx |\psi_{nlm}^{(0)}\rangle + |\psi_{nlm}^{(1)}\rangle, \quad (3.15)$$

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

em que o somatório deve ser feito sobre todos os valores permitidos da tríade (n', l', m') ⁵ tais que $(n', l', m') \neq (n, l, m)$.

Note que essa Teoria de Perturbação não é válida para estados degenerados em energia, pois, nesse caso, o denominador da equação (3.15) seria nulo. Tendo em vista que estamos desconsiderando as estruturas fina e hiperfina, a energia do átomo de hidrogênio livre só depende do número quântico principal (n) . Desse modo, para cada valor de n , existem n^2 estados degenerados em energia, isto é, com mesma energia de ordem zero. Assim sendo, o átomo de hidrogênio livre só possui um autoestado não-degenerado em energia: o estado fundamental, $|\psi_{100}\rangle$. Todavia, o estado fundamental do átomo de hidrogênio livre não é um estado de nosso interesse, pois o momento angular orbital deste é nulo. Portanto, como queremos obter a correção (em primeira ordem) para um vetor de estado com momento angular orbital não-nulo na direção z do átomo de hidrogênio, precisamos usar a Teoria de Perturbação Degenerada [103].

Vamos explicar brevemente a Teoria de Perturbação Degenerada a partir de um exemplo simples envolvendo o átomo de hidrogênio. Suponha que o estado inicial do átomo de hidrogênio livre seja $|\psi_{nlm}^{(0)}\rangle \equiv |\psi_{211}^{(0)}\rangle$. Na figura 3.1 temos um gráfico da superfície com $|\psi|^2$ constante, em que ψ é a função de onda para o estado $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$. Esse é um estado quadruplicamente degenerado ($n^2 = 2^2 = 4$) do hamiltoniano não-perturbado (\hat{H}_0), pois os estados $|\psi_{200}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{210}^{(0)}\rangle$ e $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ possuem a mesma energia de ordem zero ($E_2^{(0)}$). Dessa forma, vemos que se $\langle\psi_{200}^{(0)}|\hat{H}'|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ ou $\langle\psi_{21-1}^{(0)}|\hat{H}'|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ ou $\langle\psi_{210}^{(0)}|\hat{H}'|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ são diferentes de zero, a equação (3.15) não pode ser aplicada, pois o denominador desta é nulo para estados degenerados em energia. Entretanto, note que qualquer combinação linear dos estados $|\psi_{200}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{210}^{(0)}\rangle$ e $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ também é um autoestado com a mesma energia de ordem zero ($E_2^{(0)}$). Assim, se escolhermos um conjunto de estados ortogonais ($\langle\eta_\alpha^{(0)}|\eta_\beta^{(0)}\rangle = 0, \forall \alpha \neq \beta$, com $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$)

$$|\eta_\alpha^{(0)}\rangle = c_{\alpha 200}|\psi_{200}^{(0)}\rangle + c_{\alpha 21-1}|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle + c_{\alpha 210}|\psi_{210}^{(0)}\rangle + c_{\alpha 211}|\psi_{211}^{(0)}\rangle, \quad (3.16)$$

tais que

$$\langle\eta_\alpha^{(0)}|\hat{H}'|\eta_\beta^{(0)}\rangle = 0 \text{ se } \alpha \neq \beta, \quad (3.17)$$

podemos usar o mesmo procedimento descrito anteriormente na Teoria de Perturbação Não-Degenerada, pois sempre que o denominador da expressão (3.15) for nulo, o numerador também o será. Desse modo, a base “correta” que devemos escolher para fazer a expansão é aquela que diagonaliza \hat{H}' no subespaço gerado pelos vetores degenerados $|\psi_{200}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{210}^{(0)}\rangle$ e $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$. Em outras palavras, devemos escolher uma base tal que $\langle\eta_\alpha|\hat{H}'|\eta_\beta\rangle = 0$ se $\alpha \neq \beta$ e $E_{\eta_\alpha}^{(0)} = E_{\eta_\beta}^{(0)} = E_2^{(0)}$, para $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$.

⁵Sabemos que os valores permitidos para n', l', m' são: $n' = 1, 2, 3, \dots, \infty$, $l' = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e $m' = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

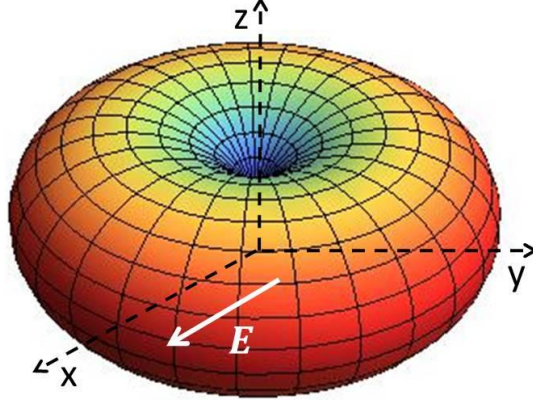


Figura 3.1: Nuvem eletrônica de um átomo de hidrogênio que está inicialmente no estado não-perturbado $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ na presença de um campo elétrico externo $\vec{E} = E\hat{x}$. A figura representa uma superfície com valor constante de $|\psi_{211}^{(0)}(\vec{r})|^2$, em que $\psi_{211}^{(0)}(\vec{r})$ é a função de onda para este estado não-perturbado.

Diagonalizar o operador \hat{H}' no subespaço formado pelos vetores $|\psi_{200}^{(0)}\rangle, |\psi_{21-1}^{(0)}\rangle, |\psi_{210}^{(0)}\rangle$ e $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$ se resume a encontrar os autovalores e os autovetores da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_{200}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{200}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{200}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{21-1}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{200}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{210}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{200}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{211}^{(0)} \rangle \\ \langle \psi_{21-1}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{200}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{21-1}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{21-1}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{21-1}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{210}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{21-1}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{211}^{(0)} \rangle \\ \langle \psi_{210}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{200}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{210}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{21-1}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{210}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{210}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{210}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{211}^{(0)} \rangle \\ \langle \psi_{211}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{200}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{211}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{21-1}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{211}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{210}^{(0)} \rangle & \langle \psi_{211}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{211}^{(0)} \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Os autovetores normalizados ($|\eta_\alpha^{(0)}\rangle$) da matriz acima, com seus respectivos autovalores ($E_{\eta_\alpha}^{(1)}$), podem ser escritos como

$$|\eta_1^{(0)}\rangle = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{2}|\psi_{200}^{(0)}\rangle - |\psi_{21-1}^{(0)}\rangle + |\psi_{211}^{(0)}\rangle \right], \quad E_{\eta_1}^{(1)} = -3a_0eE, \quad (3.19)$$

$$|\eta_2^{(0)}\rangle = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2}|\psi_{200}^{(0)}\rangle - |\psi_{21-1}^{(0)}\rangle + |\psi_{211}^{(0)}\rangle \right], \quad E_{\eta_2}^{(1)} = 3a_0eE, \quad (3.20)$$

$$|\eta_3^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle + |\psi_{211}^{(0)}\rangle \right], \quad E_{\eta_3}^{(1)} = 0, \quad (3.21)$$

$$|\eta_4^{(0)}\rangle = |\psi_{210}^{(0)}\rangle, \quad E_{\eta_4}^{(1)} = 0, \quad (3.22)$$

em que $E_{\eta_\alpha}^{(1)}$ é a correção de primeira ordem na energia para o estado $|\eta_\alpha^{(0)}\rangle$, com $\alpha = 1, 2, 3$ e 4 .

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

Assim, na presença da perturbação \hat{H}' , o conjunto de estados $|\psi_{200}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{21-1}^{(0)}\rangle$, $|\psi_{210}^{(0)}\rangle$ e $|\psi_{211}^{(0)}\rangle$, divide-se entre os estados $|\eta_1(t)\rangle$, $|\eta_2(t)\rangle$, $|\eta_3(t)\rangle$ e $|\eta_4(t)\rangle$, os quais, até a primeira ordem, são dados por

$$|\eta_\alpha(t)\rangle = [|\eta_\alpha^{(0)}\rangle + |\eta_\alpha^{(1)}\rangle] e^{-i(E_2^{(0)} + E_{\eta_\alpha}^{(1)})t/\hbar}, \text{ com } \alpha = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \quad (3.23)$$

e

$$|\eta_\alpha^{(1)}\rangle = \sum_{n' \neq 2} \sum_{l'} \sum_{m'} \frac{\langle \psi_{n'l'm'}^{(0)} | \hat{H}' | \eta_\alpha^{(0)} \rangle}{E_2^{(0)} - E_{n'}^{(0)}} |\psi_{n'l'm'}^{(0)}\rangle. \quad (3.24)$$

Uma vez que pretendemos estudar a dinâmica do nosso sistema na presença da perturbação \hat{H}' , precisamos evoluir o estado inicial deste. Para isso, é conveniente escrever seu estado inicial (normalizado) na base formada pelos vetores $|\eta_1^{(0)}\rangle$, $|\eta_2^{(0)}\rangle$, $|\eta_3^{(0)}\rangle$ e $|\eta_4^{(0)}\rangle$ do seguinte modo:

$$|\psi_{211}^{(0)}\rangle = \frac{1}{2} |\eta_1^{(0)}\rangle + \frac{1}{2} |\eta_2^{(0)}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\eta_3^{(0)}\rangle. \quad (3.25)$$

Supondo que a perturbação tenha sido aplicada no tempo $t = 0$, o estado evoluído do sistema para $t > 0$ pode ser escrito como

$$|\psi_{211}(t)\rangle = \frac{1}{2} [|\eta_1^{(0)}\rangle + |\eta_1^{(1)}\rangle] e^{\frac{3ia_0eEt}{\hbar}} + \frac{1}{2} [|\eta_2^{(0)}\rangle + |\eta_2^{(1)}\rangle] e^{\frac{-3ia_0eEt}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{2}} [|\eta_3^{(0)}\rangle + |\eta_3^{(1)}\rangle], \quad (3.26)$$

em que o termo $e^{-iE_2^{(0)}t/\hbar}$ fora absorvido por se tratar de uma fase global e $|\eta_1^{(0)}\rangle$, $|\eta_2^{(0)}\rangle$, $|\eta_3^{(0)}\rangle$ e $|\eta_\alpha^{(1)}\rangle$ (com $\alpha = 1, 2, \text{ e } 3$) são dados, respectivamente, pelas equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.24).

A partir de $|\psi_{211}(t)\rangle$ calculamos numericamente ⁶ o valor esperado dos operadores posição ⁷:

$$\langle x(t) \rangle \approx -a_0 \left\{ \frac{E}{ke/a_0^2} \right\} \left(155 + 24 \cos \left[\frac{6a_0eEt}{\hbar} \right] \right), \quad (3.27)$$

$$\langle y(t) \rangle = -3a_0 \text{sen} \left[\frac{3a_0eEt}{\hbar} \right], \quad (3.28)$$

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad (3.29)$$

⁶Todos os cálculos numéricos realizados neste trabalho foram feitos usando o programa *Wolfram Mathematica 9.0*.

⁷Nos cálculos de todos os observáveis consideramos o somatório em n' dos autovetores $|\eta_1^{(1)}\rangle$, $|\eta_2^{(1)}\rangle$ e $|\eta_3^{(1)}\rangle$ até $n' = 20$, visto que quanto maior o valor de n' menor é a contribuição para a soma dada pela equação (3.24). Ademais, definimos $\langle A(t) \rangle \equiv \langle \psi_{211}(t) | \hat{A} | \psi_{211}(t) \rangle$.

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

e do momento linear:

$$\langle p_x(t) \rangle = 0, \quad (3.30)$$

$$\langle p_y(t) \rangle \approx -\frac{\hbar}{a_0} \left\{ \frac{E}{ke/a_0^2} \right\} 8.271 \cos \left[\frac{3a_0 e E t}{\hbar} \right], \quad (3.31)$$

$$\langle p_z(t) \rangle = 0, \quad (3.32)$$

em que consideramos somente os termos até a primeira ordem em E ⁸; a_0 é o raio de Bohr, e é o módulo da carga elementar do elétron, E é o módulo do campo elétrico aplicado, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ e m_e é a massa do elétron.

A fim de compreender a dinâmica do elétron do átomo de hidrogênio na presença do campo elétrico externo $\vec{E} = E\hat{x}$, construímos gráficos de $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$ e $\langle p_y(t) \rangle$ em função de t (figuras (3.2) e (3.3)).

Repare que o valor esperado da posição do elétron na direção do campo elétrico aplicado é negativo (equação (3.27)), pois ele tende a se mover no sentido oposto ao do campo elétrico externo. Além do mais, $\langle x(t) \rangle$ oscila harmonicamente com uma frequência igual a $6a_0 e E/\hbar$ em torno de um valor negativo, com uma amplitude proporcional ao campo elétrico aplicado, $\langle y(t) \rangle$ oscila harmonicamente com uma frequência igual a $3a_0 e E/\hbar$ em torno do centro do átomo, com uma amplitude igual a $3a_0$ e $\langle z(t) \rangle = 0$. Não obstante, como era de se esperar, considerando apenas termos até a primeira ordem em E , segue que $m_e \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = \langle p_x(t) \rangle$, $m_e \frac{d\langle y(t) \rangle}{dt} \simeq \langle p_y(t) \rangle$ ⁹ e $m_e \frac{d\langle z(t) \rangle}{dt} = \langle p_z(t) \rangle$.

Também calculamos o valor esperado dos operadores momento angular orbital ($\langle \vec{L}(t) \rangle = \langle \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) \rangle$):

$$\langle L_x(t) \rangle = 0, \quad (3.33)$$

$$\langle L_y(t) \rangle = 0, \quad (3.34)$$

$$\langle L_z(t) \rangle = \hbar \cos \left[\frac{3a_0 e E t}{\hbar} \right], \quad (3.35)$$

⁸Para que a Teoria de Perturbação seja válida, os elementos de matriz do operador \hat{H}' (na base formada pelos autoestados de \hat{H}_0 , $\{|\psi_{nlm}^{(0)}\rangle\}$) devem ser muito menores do que a separação entre os níveis de energia dos autoestados de \hat{H}_0 ; isso equivale a dizer que $\left\{ \frac{E}{ke/a_0^2} \right\} \ll 1$.

⁹ $m_e \frac{d\langle y(t) \rangle}{dt} / \langle p_y(t) \rangle \simeq 1.09$. O cálculo de $m_e \frac{d\langle y(t) \rangle}{dt}$ é mais preciso do que o de $\langle p_y(t) \rangle$, pois o primeiro não envolve o uso da correção (em primeira ordem) para o vetor de estado perturbado e, nas palavras do Griffiths: "I should warn you that whereas perturbation theory yields surprisingly accurate energies, the wave functions are notoriously poor" [98].

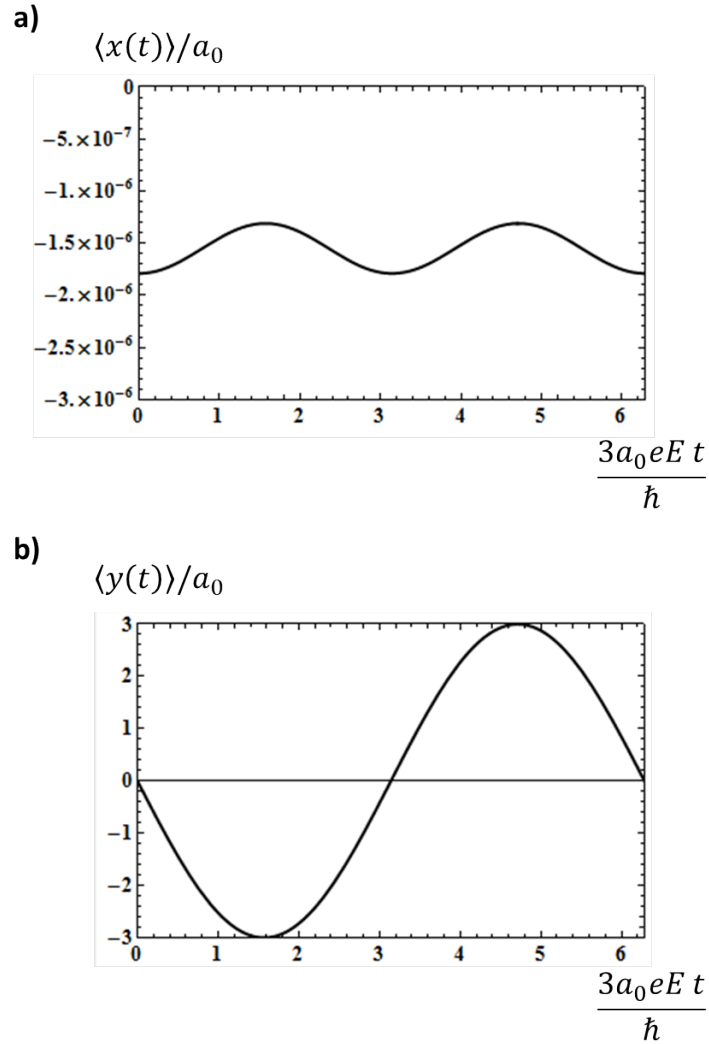


Figura 3.2: Os gráficos **a)** e **b)** representam, respectivamente, $\langle x(t) \rangle / a_0$ e $\langle y(t) \rangle / a_0$ em função de $3a_0 e E t / \hbar$. Na construção do gráfico **a)** consideramos que $\frac{E}{ke/a_0^2} = 10^{-8}$.

e do torque ($\langle \vec{N}(t) \rangle = \langle \vec{r}(t) \times (-eE\hat{x}) \rangle$):

$$\langle N_x(t) \rangle = 0, \quad (3.36)$$

$$\langle N_y(t) \rangle = 0, \quad (3.37)$$

$$\langle N_z(t) \rangle = -3eEa_0 \text{sen} \left[\frac{3a_0 e E t}{\hbar} \right]. \quad (3.38)$$

Sabendo que a força coulombiana (que é uma força central) não contribui para a existência de uma variação temporal do valor esperado do momento angular orbital

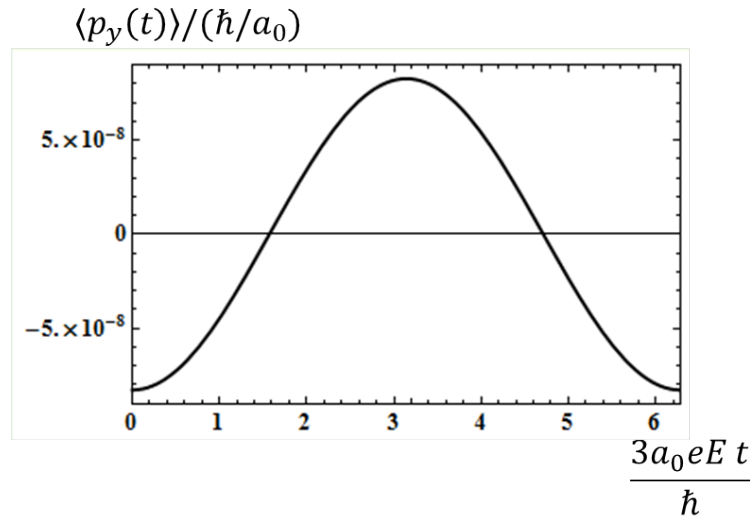


Figura 3.3: O gráfico da figura acima ilustra o comportamento de $\langle p_y(t) \rangle / (\hbar/a_0)$ em função de $3a_0 e E t / \hbar$. Na construção deste gráfico consideramos que $\frac{E}{ke/a_0^2} = 10^{-8}$.

do elétron do átomo de hidrogênio, a única força que pode contribuir para isso é a que está associada à perturbação \hat{H}' , a saber: $\vec{F}_{\hat{H}'} = -eE\hat{x}$. Novamente, como era de se esperar, $\frac{d\langle L_x(t) \rangle}{dt} = \langle N_x(t) \rangle$, $\frac{d\langle L_y(t) \rangle}{dt} = \langle N_y(t) \rangle$ e $\frac{d\langle L_z(t) \rangle}{dt} = \langle N_z(t) \rangle$ (figura 3.4).

3.3 Cálculo do Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio na Presença de um Campo Elétrico Constante e Uniforme

Considere que o átomo de hidrogênio esteja inicialmente em um estado não-perturbado $|\psi_{nlm}^{(0)}\rangle$, em que n , l e m representam, respectivamente, o número quântico principal, o número quântico orbital e o número quântico magnético em unidades de \hbar . Uma vez que o momento de dipolo magnético do nosso sistema está na direção z e o campo elétrico aplicado está na direção x , através de uma analogia com o caso clássico, esperamos que haja momento oculto somente na direção y ¹⁰. Quando o campo elétrico externo está presente, o estado do sistema no tempo $t = 0$ pode ser escrito como¹¹

¹⁰Calculamos o momento oculto nas direções x e z e verificamos que ambos são estritamente iguais a zero.

¹¹Veja a equação (3.15).

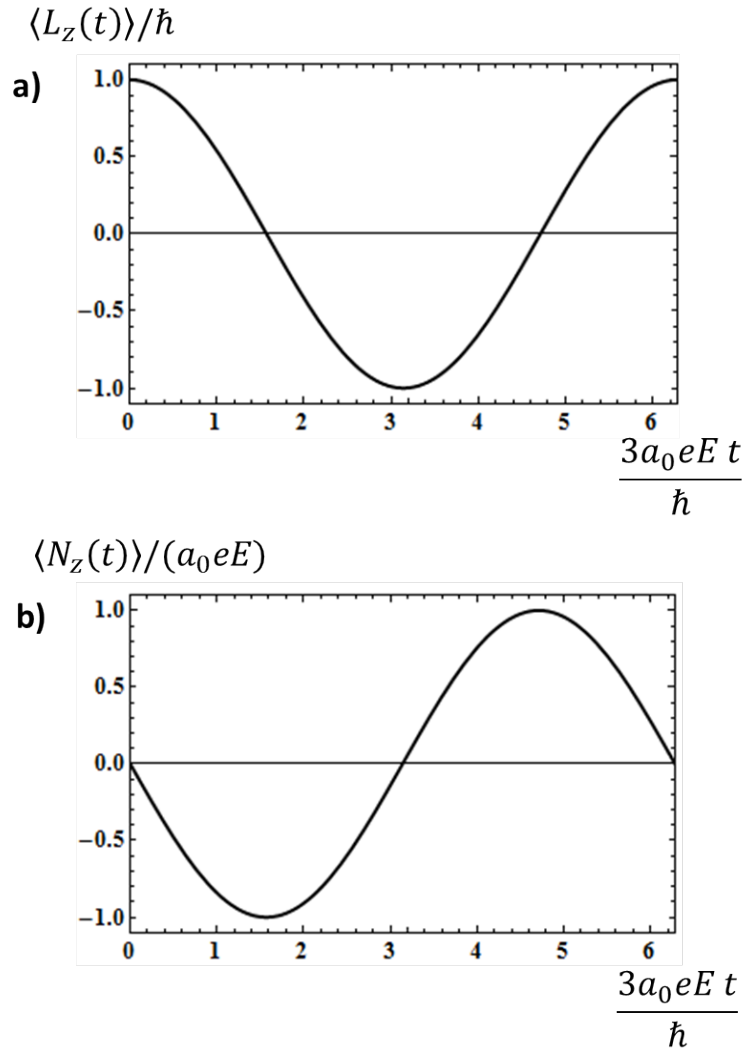


Figura 3.4: Gráfico a): $\langle L_z(t) \rangle / \hbar$ em função de $3a_0 e E t / \hbar$. Gráfico b): $\langle N_z(t) \rangle / (a_0 e E)$ em função de $3a_0 e E t / \hbar$.

$$|\psi_{nlm}\rangle \approx |\psi_{nlm}^{(0)}\rangle + \sum_{n' \neq n} \sum_{l'} \sum_{m'} \frac{\langle \psi_{n'l'm'}^{(0)} | \hat{H}' | \psi_{nlm}^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)}} |\psi_{n'l'm'}^{(0)}\rangle, \quad (3.39)$$

em que $|\psi_{n'l'm'}^{(0)}\rangle$ são os autoestados do hamiltoniano não-perturbado \hat{H}_0 . A equação (3.39) pode ser obtida através de equações gerais (isto é, equações válidas para um estado qualquer do tipo $|\psi_{nlm}\rangle$) análogas às expressões (3.23), (3.24) e (3.26) considerando o tempo $t = 0$.

A seguir, calculamos o momento oculto para diversos estados da forma da equação (3.39) usando dois métodos distintos. No primeiro, computamos o valor esperado do operador momento relativístico no referencial de repouso do centro de massa da

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

nuvem eletrônica. No segundo, usamos uma analogia quântica da equação (2.26), transformando \vec{J} e Φ em operadores. Ao mostrarmos que estes dois métodos fornecem resultados não-nulos e muito próximos para o momento oculto de estados quânticos diferentes, provamos a existência do momento oculto neste sistema quântico. Atribuímos as pequenas diferenças entre os valores obtidos pelos dois métodos à inacurácia da Teoria de Perturbação que empregamos [98]. Consideramos $t = 0$ em todos os nossos cálculos.

O estado (3.39) não é um autoestado do hamiltoniano (3.13), por isso, como foi visto na subseção anterior, os valores esperados de vários operadores dependem do tempo. O momento oculto do sistema é igual ao momento relativístico quando o momento clássico deste é nulo. Por essa razão, é mais fácil realizar os cálculos no referencial de repouso do centro de massa da nuvem eletrônica S' . Todavia, o operador momento não-relativístico \hat{p} é definido no referencial de repouso do próton S , onde o centro de massa da nuvem eletrônica tem uma velocidade (não-relativística) na direção y dada por $\langle \psi_{nlm} | \hat{p} | \psi_{nlm} \rangle / m_e = v_c \hat{y}$, em que m_e é a massa do elétron e o operador momento associado à derivada espacial é o momento não-relativístico, uma vez que a teoria de Schrödinger é não-relativística. As componentes x e z desta velocidade são nulas para todos os estados quânticos testados. Transformando o operador relativístico correspondente $\hat{P} = \hat{\gamma} \hat{p}$ (com $\hat{\gamma} = [1 - \hat{p}^2 / (m_e c^2)]^{-1/2}$) do referencial S para S' , a componente y é $\hat{P}'_y = \hat{\gamma} \hat{p}_y - \hat{\gamma} m_e v_c$ para $v_c \ll c$, em que c é a velocidade da luz no vácuo. Assim sendo, considerando apenas os termos de segunda ordem em \hat{p} na expansão em séries de Taylor de $\hat{\gamma}$, obtemos que a componente y do momento oculto é dada por

$$p_{oc}^{(1)} \equiv \frac{1}{2m_e^2 c^2} \langle \psi_{nlm} | (\hat{p}_y - m_e v_c) \hat{p}^2 | \psi_{nlm} \rangle, \quad (3.40)$$

em que o superescrito “(1)” foi usado para rotular o momento oculto calculado a partir do valor esperado do operador momento relativístico. As componentes x e z do momento oculto calculadas com este método são nulas para todos os estados quânticos testados. A seguir, usaremos o superescrito “(2)” para rotular o momento oculto calculado pelo segundo método.

No nosso segundo método de calcular o momento oculto, usamos a analogia quântica da equação (2.26). A densidade de corrente elétrica \vec{J} pode ser escrita como $\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho \vec{p} / M$, em que ρ é a densidade de carga elétrica, \vec{v} é a velocidade dessa porção de carga, \vec{p} é o seu momento não-relativístico e M é a sua massa. A densidade de carga da nuvem eletrônica pode ser associada à $-e |\psi_{nlm}(\vec{r})|^2$, em que $-e$ é a carga do elétron, $\psi_{nlm}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \psi_{nlm} \rangle$ é a função de onda associada ao mesmo. Dessa forma, o análogo quântico da equação (2.26) para a componente y do momento oculto é um

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

valor esperado da forma

$$p_{oc}^{\prime(2)} \equiv \frac{e}{2m_e c^2} \int \psi_{nlm}(\vec{r}')^* \left[\hat{\Phi}' \hat{p}'_y + \hat{p}'_y \hat{\Phi}' \right] \psi_{nlm}(\vec{r}') d^3 r'. \quad (3.41)$$

Novamente, as componentes x e z do momento oculto calculadas com este método são nulas para todos estados quânticos testados. Os parâmetros e operadores acima estão no referencial S' , correspondente ao centro de massa da nuvem eletrônica. Considerando que a velocidade $v_c \hat{y}$ deste referencial em relação ao referencial S que corresponde ao referencial de repouso do próton é não-relativística, podemos considerar as transformações $\vec{r}' \approx \vec{r}$, $d^3 r' \approx d^3 r$, $\hat{\Phi}' \approx \hat{\Phi} = e/(4\pi\epsilon_0 r) - E\hat{x}$, $\hat{p}'_y \approx \hat{p}_y - m_e v_c = -i\hbar\partial/\partial y - m_e v_c$.

Com o intuito de fornecer uma interpretação física para a equação (3.41), vamos reescrevê-la como uma soma de dois termos distintos, cada um deles correspondendo a uma situação física particular, de modo que, quando somados, resultam no momento oculto do nosso sistema calculado através do segundo método. Com esse propósito em mente, vamos escrever $p_{oc}^{\prime(2)}$ da seguinte forma:

$$p_{oc}^{\prime(2)} = p_{oc}^{\prime(2a)} + p_{oc}^{\prime(2b)}, \quad (3.42)$$

com

$$p_{oc}^{\prime(2a)} \equiv -\frac{eE}{m_e c^2} \langle \psi_{nlm} | \hat{x} \hat{p}'_y | \psi_{nlm} \rangle = -\frac{m\mu_B E}{c^2} \quad (3.43)$$

e

$$p_{oc}^{\prime(2b)} \equiv -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 c^2} \langle \psi_{nlm} | \frac{1}{r} \hat{p}'_y + \hat{p}'_y \frac{1}{r} | \psi_{nlm} \rangle, \quad (3.44)$$

em que $\mu_B \equiv e\hbar/(2m_e)$ é o magneton de Bohr. É importante sublinhar que $p_{oc}^{\prime(2a)}$ foi calculado exatamente e $p_{oc}^{\prime(2b)}$ foi computado numericamente.

O primeiro termo do lado direito da equação (3.42), $p_{oc}^{\prime(2a)}$, está associado a uma situação física análoga a do circuito fechado transportando corrente elétrica da seção 2.2. Um modelo clássico para o átomo de hidrogênio consiste em uma partícula com carga elétrica positiva (o próton) fixa no centro do átomo com uma partícula de carga negativa (o elétron) orbitando em torno do primeiro. A partir deste ponto de vista (limitado), podemos imaginar o elétron como uma partícula carregada descrevendo uma órbita fechada em torno do próton. Uma vez que o elétron possui carga elétrica e está em movimento, podemos associar a ele uma corrente elétrica. Dessa forma, do ponto de vista clássico, a órbita do elétron seria semelhante ao caminho percorrido por uma corrente elétrica dentro um circuito fechado, como o da figura 2.2. Na seção 2.2, vimos que um circuito fechado transportando corrente elétrica possui momento de dipolo magnético ($\vec{m}_0 = m_0(\hat{z})$). De modo similar, o elétron que orbita em torno do próton no átomo de hidrogênio possui momento de dipolo magnético orbital na direção z (μ_z), a saber:

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

$$\mu_z = -m\mu_B, \quad (3.45)$$

em que m é o número quântico magnético.

Para completar a analogia, repare que na região onde está o circuito elétrico descrito na seção 2.2, existe um campo elétrico externo constante e uniforme ($\vec{E} = E\hat{x}$), que faz com que tal circuito possua um momento oculto igual a $\vec{m}_0 \times \vec{E}/c^2 = \hat{y}m_0E/c^2$ (equação (2.23)). Analogamente, existe um campo elétrico constante e uniforme aplicado ($\vec{E} = E\hat{x}$) na região em que o elétron descreve sua órbita, fazendo com que este possua um momento oculto (associado com essa situação física) igual a $\mu_z\hat{z} \times \hat{x}E/c^2 = -\hat{y}m\mu_BE/c^2$, que é igual ao resultado obtido na equação (3.43).

O segundo termo do lado direito da equação (3.42), $p_{oc}'^{(2b)}$, está associado com o momento de dipolo elétrico do átomo, causado pelo campo elétrico externo, $\vec{E} = E\hat{x}$. Como estamos considerando a aproximação na qual o próton possui uma massa muito maior do que a do elétron (aproximação em que o próton possui massa infinita), a aplicação do campo elétrico externo só afeta o movimento do elétron, ou seja, o próton permanece fixo no centro do átomo e o centro de massa da nuvem eletrônica se desloca em relação a ele.

Vimos que o valor esperado da posição do elétron na direção x é negativo (equação (3.27)), porque ele tende a se mover no sentido oposto ao do campo elétrico aplicado. Por conseguinte, é esperado que haja um momento de dipolo elétrico no átomo na direção positiva do eixo x . Esse momento de dipolo elétrico, juntamente com o momento de dipolo magnético do elétron na direção z (μ_z), é responsável pela existência de outra contribuição para o momento oculto do elétron.

Como os dois métodos que usamos para calcular o valor esperado do momento oculto do elétron na direção y são válidos, presumimos que $p_{oc}'^{(1)} = p_{oc}'^{(2)}$. Desse modo, usando as equações (3.40), (3.42), (3.43) e (3.44), a igualdade anterior pode ser escrita como

$$\frac{p_{oc}'^{(2b)} - p_{oc}'^{(1)}}{\mu_BE/c^2} = m. \quad (3.46)$$

Com o intuito de verificar a validade da expressão (3.46), calculamos numericamente os valores de $(p_{oc}'^{(2b)} - p_{oc}'^{(1)})c^2/(\mu_BE)$ para diversos estados quânticos e, em seguida, construímos uma tabela ¹² e um gráfico com os valores obtidos de $(p_{oc}'^{(2b)} - p_{oc}'^{(1)})c^2$

¹²Na tabela que exibiremos a seguir, mudamos a notação dos estados quânticos: $|\psi_{nlm}\rangle$ foi definido como $|\psi_{n,l,m}\rangle$ a fim de evitar ambiguidades, pois, por exemplo, o estado $|\psi_{13121}\rangle$ possui os números quânticos $n = 13$, $l = 12$ e $m = 1$ ou $n = 131$, $l = 2$ e $m = 1$? Quando usamos a notação que separa os números quânticos por vírgulas essa ambiguidade desaparece.

Capítulo 3. Momento Oculto em um Átomo de Hidrogênio

$/(\mu_B E)$ para vários estados quânticos em função de m (veja a tabela 3.1 e a figura 3.5). No gráfico 3.5, plotamos os valores de $\left(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}\right) c^2 / (\mu_B E)$ para estados quânticos diferentes com o número quântico m variando desde -5 até 5 . A linha reta é a predição proveniente da equação (3.46). Observe que há uma excelente concordância entre os valores obtidos para o momento oculto através dos dois métodos. Atribuímos às pequenas diferenças à imprecisão do método da Teoria de Perturbação na determinação das funções de onda do sistema [98].

	$\left(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}\right) c^2 / (\mu_B E)$	m
$ \psi_{13,12,-5}\rangle$	-4.998	-5
$ \psi_{11,7,-4}\rangle$	-3.944	-4
$ \psi_{6,5,-3}\rangle$	-2.986	-3
$ \psi_{12,8,-2}\rangle$	-1.976	-2
$ \psi_{3,1,-1}\rangle$	-0.982	-1
$ \psi_{1,0,0}\rangle$	0.000	0
$ \psi_{2,1,1}\rangle$	0.872	1
$ \psi_{9,2,2}\rangle$	1.844	2
$ \psi_{8,4,3}\rangle$	2.898	3
$ \psi_{5,4,4}\rangle$	3.962	4
$ \psi_{7,6,5}\rangle$	4.988	5

Tabela 3.1: Tabela com os valores de $\left(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}\right) c^2 / (\mu_B E)$ e de m para diversos estados quânticos, no tempo $t = 0$. Todos os números da tabela são adimensionais. Ademais, o valor máximo de n' para a contribuição de primeira ordem em E do vetor de estado do sistema (veja a equação (3.15)) foi $n'_{max} = 20$.

Agora considere o átomo de hidrogênio no estado $|\psi_{3,1,-1}\rangle$ sob influência de um campo elétrico externo dado por $\vec{E} = E(\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)$. Nessa situação temos que $\left(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}\right) = -(\mu_B E / c^2) \cos \theta$ considerando apenas termos até a primeira ordem em E , o qual pode ser associado novamente à $\vec{\mu} \times \vec{E} / c^2$. Mais uma vez, como era de se esperar, as componentes x e z do momento oculto são nulas. Na figura 3.6 os pontos pretos representam os valores numéricos obtidos para $\left(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}\right) c^2 / (\mu_B E)$ para nove ângulos θ diferentes e a curva contínua corresponde à expressão esperada $-\cos \theta$. Novamente, há uma excelente concordância.

Os resultados expressos nas figuras 3.5 e 3.6 confirmam a existência de momento oculto no sistema, como requerido para garantir a validade da Lei de Força de Lorentz no limite quântico. Isso significa que as equações para a força e para o torque sobre um

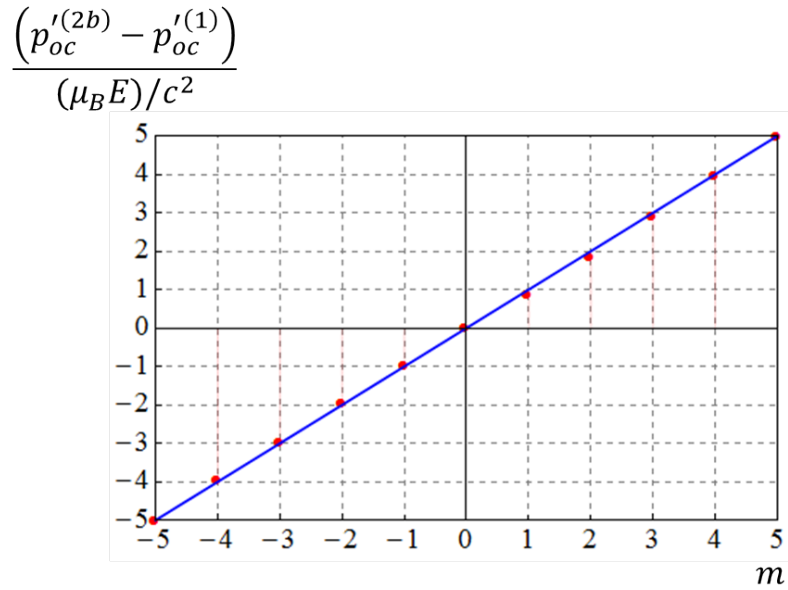


Figura 3.5: A linha reta é $y = m$ e os pontos vermelhos representam os valores de $(p'_{oc}{}^{(2b)} - p'_{oc}{}^{(1)}) c^2 / (\mu_B E)$ para os seguintes estados quânticos $|\psi_{n,l,m}\rangle : \{n, l, m\} = \{13, 12, -5\}, \{11, 7, -4\}, \{6, 5, -3\}, \{12, 8, -2\}, \{3, 1, -1\}, \{1, 0, 0\}, \{2, 1, 1\}, \{9, 2, 2\}, \{8, 4, 3\}, \{5, 4, 4\}, \{7, 6, 5\}$.

dipolo magnético quântico com momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ devido ao momento angular orbital de partículas quânticas tem a mesma forma da força e do torque sobre um dipolo magnético clássico com o mesmo momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$.

É importante ressaltar que levamos em conta apenas o momento angular orbital do elétron, isto é, desconsideramos o spin do elétron para computar o momento de dipolo magnético atômico e o momento oculto do sistema. Será que um elétron com momento de dipolo magnético devido ao spin, sob influência de um campo elétrico aplicado, possui momento oculto? Não podemos responder essa questão através do método que temos usado até então, já que não existe um modelo físico para a origem do spin em termos do movimento das partes constituintes do elétron.

Por fim, em suma, o que fizemos nesta seção foi usar a Teoria de Perturbação com intuito de calcular o momento oculto do átomo de hidrogênio na presença de um campo elétrico externo quando o momento de dipolo magnético deste é devido exclusivamente ao momento angular orbital do elétron. Usamos dois métodos diferentes para calcular o momento oculto do átomo de hidrogênio e obtivemos os mesmos resultados, evidenciando assim a existência de momento oculto no sistema e a conseqüente validade da Lei de Força de Lorentz em sistemas quânticos. Os resultados aqui apresentados foram publicados na referência [25].

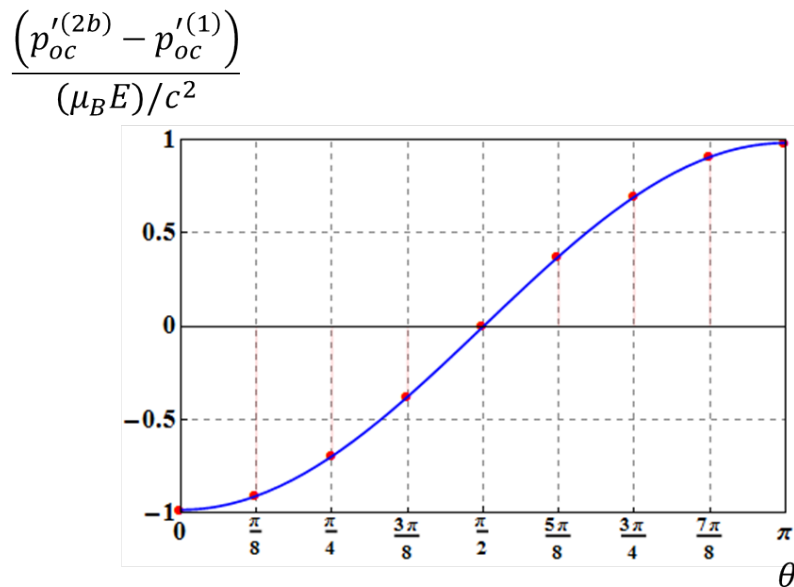


Figura 3.6: A curva $y = -\cos \theta$ e os pontos vermelhos representam os valores de $(p_{oc}^{(2b)} - p_{oc}^{(1)}) c^2 / (\mu_B E)$ para o estado quântico $|\psi_{3,1,-1}\rangle$ perturbado pelo campo elétrico $\vec{E} = E (\hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta)$ para nove valores diferentes de θ .

Capítulo 4

O Debate Abraham-Minkowski

“Dou boas-vindas a todo conhecimento que me chega com uma marreta. Marreto tudo aquilo que me é apresentado para verificar sua consistência. Se se esfacela diante de meus olhos, penso: eis um grande castelo de sonhos erigido por criaturas frágeis. Se subsiste, dou-lhe boas vindas como mais um cômodo na morada onde habita meu pensamento. Não importa que a realidade desmorone sobre minha cabeça ante minhas próprias investidas autodestrutivas - a autocrítica, para mim, sempre será uma austeridade imprescindível. Nisso está a honestidade.” André Cancian, [104].

Nosso objetivo neste capítulo é discutir sobre um debate que teve início na primeira década do século *XX*. Tal debate tem em seu cerne a seguinte questão: quais são as expressões para as densidades de energia e de momento de uma onda eletromagnética quando ela penetra em um meio material linear (como a água, o plástico ou o vidro)? Sabemos que uma onda eletromagnética é formada por campos elétrico e magnético que oscilam no espaço e no tempo, assim, quando ela penetra em um meio transparente, seus campos interagem com as cargas do meio, podendo trocar momento e energia com estas, concomitantemente as cargas do meio podem modificar os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética. Assim sendo, o problema se torna muito complicado e existem várias abordagens distintas para o tratamento do mesmo. Os primeiros tratamentos para este problema são os de Abraham e Minkowski, daí o motivo de este debate ser conhecido como debate Abraham-Minkowski [28–86].

Todo meio material é formado por um conjunto discreto de átomos ou moléculas e estes, por sua vez, são compostos por partículas (como prótons, nêutrons e elétrons). Apesar da natureza discreta da matéria, usaremos, de agora em diante, uma consideração conhecida como Aproximação de Meios Materiais Contínuos. Tal aproximação é

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

válida quando os comprimentos de onda λ das ondas eletromagnéticas que permeiam o meio são muito maiores do que a distância típica d entre os átomos ou as moléculas que constituem este. Nesse caso, a despeito da natureza discreta dos átomos ou das moléculas, podemos descrever o comportamento das partículas que formam o meio material através de grandezas contínuas, como a densidade de dipolos elétricos e magnéticos do material, conhecidas, respectivamente, como polarização \vec{P} e magnetização \vec{M} do meio [21, 96]. Além destas duas grandezas contínuas associadas às repostas do meio aos campos elétrico e magnético das ondas eletromagnéticas, é comum definirmos outras duas, a saber: o deslocamento elétrico \vec{D} e a indução magnética \vec{H} , que estão relacionados com os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} médios ¹, e com a polarização e a magnetização do material através das seguintes equações: $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e $\vec{H} \equiv \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$.

Em meios materiais não-dispersivos, que são caracterizados pela independência da resposta do material com a frequência das ondas eletromagnéticas, a densidade de energia u e o fluxo de energia \vec{S} da luz podem ser escritos como $u = \vec{E} \cdot \vec{D}/2 + \vec{B} \cdot \vec{H}/2$ e $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ [20]. Tanto a formulação de Minkowski [28] quanto a de Abraham [29–31] concordam com as definições anteriores para a densidade e para o fluxo de energia. Entretanto, as duas formulações não estão de acordo em relação à definição da densidade de momento linear da luz. As abordagens de Minkowski e de Abraham assumem que a densidade de momento linear da luz em um meio material pode ser escrita, respectivamente, como [58]

$$\vec{P}_{Min} = \vec{D} \times \vec{B} \text{ e } \vec{P}_{Abr} = \vec{E} \times \vec{H}/c^2. \quad (4.1)$$

Em um material dielétrico linear isotrópico (tal que $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, em que χ_e é a susceptibilidade elétrica do material) não-magnético (ou seja, no qual $\vec{M} = 0$), tal que $E = vB$, com $v = c/n$ sendo a velocidade da luz no material, c a velocidade da luz no vácuo e $n = \sqrt{1 + \chi_e}$ o índice de refração do material, a densidade de energia de uma onda eletromagnética plana dentro do material é igual a $\epsilon_0 E^2 n^2$. Por outro lado, os módulos das densidades de momento linear de Minkowski e de Abraham são dados, respectivamente, por $\epsilon_0 E^2 n^3/c$ e $\epsilon_0 E^2 n/c$. Portanto, a razão entre os módulos das densidades de momento e de energia nas descrições de Minkowski e Abraham são, respectivamente, n/c e $1/(nc)$.

¹As médias espaciais dos campos elétrico e magnético, da polarização e da magnetização do meio, são feitas em volumes L^3 cujas dimensões L são muito maiores do que as distâncias interatômicas ou intermoleculares típicas d e, concomitantemente, muito menores do que os comprimentos de onda λ característicos da radiação eletromagnética que interage com o material. Em suma, $\lambda \gg L \gg d$.

Em termos de um único fóton de frequência angular ω , que possui energia total igual a $\hbar\omega$ no vácuo (em que \hbar é a constante de Planck dividida por 2π), o módulo do momento linear desse fóton dentro de um material de índice de refração n é igual a $\hbar\omega n/c$ na formulação de Minkowski e $\hbar\omega/(nc)$ na de Abraham. Isso significa que quando um fóton penetra em um material linear seu momento aumenta de acordo com a formulação de Minkowski mas, em conformidade com a descrição de Abraham, seu momento diminui. Esse aparente paradoxo gerou um debate há mais de cem anos atrás que permanece vivo até hoje [58,67].

A seguir apresentaremos argumentos teóricos e resultados experimentais que parecem favorecer ora a formação de Minkowski, ora a de Abraham.

4.1 Argumentos que Favorecem a Formulação de Minkowski

Um argumento a favor da descrição de Minkowski pode ser explicado com o auxílio da dualidade onda-partícula da luz [55,78]. Quando a luz se comporta como onda, podemos caracterizá-la através de sua frequência ν e do seu comprimento de onda λ . Durante cada período $\tau = 1/\nu$, a onda se move por uma quantidade λ determinada pela sua velocidade v no meio em que ela se propaga: $\lambda = v\tau = (c/n)\tau$, em que n é o índice de refração do meio material e c é a velocidade da luz no vácuo. Quando a luz se comporta como partícula, cada quantum de luz possui uma energia $E = h\nu = h/\tau$. Uma vez que a relação de de Broglie afirma que o momento p da luz está relacionado com o comprimento de onda desta através da equação $p = h/\lambda$, substituindo $\lambda = (c/n)\tau$ com $\tau = h/E$ na relação de de Broglie, obtemos que $p = (E/c)n$, corroborando a formulação de Minkowski.

Outro argumento a favor da descrição de Minkowski pode ser elaborado a partir de uma análise teórica do experimento de difração de uma única fenda [20,61,67]. Nesse experimento, a largura do máximo central da figura de difração pode ser estimada através do princípio de incerteza de Heisenberg, $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Supondo que a fenda esteja localizada no plano xy e que a largura desta na direção x seja Δx , o princípio de incerteza requer que $\Delta p_x \approx \hbar/\Delta x$. Inicialmente, considere que todo o sistema esteja no vácuo. Dessa forma, considerando que o momento linear na direção z de um fóton que passa através da fenda seja $p_z = \hbar\omega/c$, a abertura angular $\Delta\theta$ do pico central de difração é da ordem de $\Delta p_x/p_z \approx c/(\omega\Delta x)$.

Agora suponha que todo o sistema esteja imerso em um material linear com índice de refração n . Nesse caso, a abertura angular do pico central de difração é di-

retamente proporcional ao comprimento de onda da luz no material λ_n , que é igual λ_0/n , em que λ_0 é o comprimento de onda da luz no vácuo. Como a existência do material linear não modifica a largura da fenda, a expressão para Δp_x permanece inalterada. Assim sendo, a diminuição da abertura angular é compatível com um aumento do momento linear do fóton na direção z pelo mesmo fator, ou seja, p_z passa a ser igual a $n\hbar\omega/c$ (favorecendo a formulação de Minkowski), pois, com essa consideração, $\Delta p_x/p_z \approx c/(n\omega\Delta x)$, o que corrobora com a observação de que a abertura angular do pico central de difração diminui por um fator n quando este experimento é realizado dentro de um material linear ². Se tivéssemos usado a formulação de Abraham para o momento de um fóton dentro do meio material, teríamos concluído que a abertura angular aumenta por um fator n , o que contraria o resultado esperado.

Por fim, em [86] os autores mostraram por primeiros princípios que o momento transferido de um fóton para um espelho quântico é proporcional ao índice de refração do meio em que o espelho está imerso, favorecendo assim a descrição de Minkowski.

4.2 Argumentos que Favorecem a Formulação de Abraham

Um argumento a favor da formulação de Abraham pode ser sustentado utilizando-se como base a fórmula de equivalência entre massa e energia de Einstein: $E = mc^2$ [55, 78]. Através dessa equação, podemos atribuir uma massa $m = E/c^2$ para a luz e, como o momento cinético clássico p de uma partícula de massa m é igual a mv , substituindo $v = c/n$ na equação anterior, obtemos que o momento da luz pode ser escrito como $p = E/(nc)$, o que corrobora com a formulação de Abraham.

Outro argumento a favor da descrição de Abraham advém do seguinte experimento de pensamento de Einstein [33]. Considere um experimento no qual um único fóton de frequência ω penetra em um bloco de comprimento L e massa M uniformemente distribuída em todo o seu volume, que está inicialmente em repouso e é formado por um material transparente que possui índice de refração n [33, 67]. Suponha que as duas extremidades do bloco possuam películas perfeitamente anti-refletoras, com intuito de desprezar quaisquer forças de recuo. Ademais, assuma que não há dispersão nem absorção no interior do bloco, que o fóton possua energia igual a $\hbar\omega$ e viaje na direção z com velocidade igual a c no vácuo. Dessa forma, a energia inicial do sistema é dada pela soma da energia inicial do fóton com a energia de repouso do bloco, isto é, $\hbar\omega + Mc^2$. Como o fóton viaja pelo espaço vazio com a velocidade da luz c e dentro do

²Um argumento similar pode ser aplicado ao caso da difração de fenda dupla [46].

bloco com velocidade $v = c/n$, a diferença entre o tempo que ele gasta para atravessar uma distância L dentro do bloco e no vácuo é $L/v - L/c = (n - 1)L/c$. Isso significa que ao sair do bloco o fóton percorre uma distância $(n - 1)L$ menor do que a que ele percorreria se estivesse viajando durante o mesmo intervalo de tempo através do vácuo. Para compensar esse atraso do fóton, o bloco desloca-se por uma distância Δz enquanto o fóton estava dentro dele, em conformidade com o requerimento de que o centro de energia de um sistema isolado se move com velocidade constante [?, 67]. Esse requerimento implica que [35] $\Delta z M c^2 = \hbar \omega (n - 1)L$, ou seja, $\Delta z = \hbar \omega (n - 1)L / (M c^2)$. Observe que, como era de se esperar, se o meio material for o próprio vácuo, isto é, se $n = 1$, o deslocamento do bloco será nulo. Além do mais, o deslocamento do bloco depende apenas da razão entre a energia do fóton e a energia do bloco, do comprimento do bloco e do índice de refração do meio.

Para deslocar-se por uma distância Δz durante o intervalo de tempo Δt em que o fóton permaneceu dentro do material ($\Delta t = L/v = nL/c$, em que v é a velocidade do fóton dentro do bloco), o bloco ganhou um momento linear igual a $M\Delta z/\Delta t = (1 - 1/n)\hbar\omega/c$ ³. Assim sendo, como o momento total do sistema se conserva e o momento linear inicial do fóton é igual a $\hbar\omega/c$, o momento linear deste dentro do bloco deve ser igual a $\hbar\omega/(nc)$, favorecendo assim a formulação de Abraham [33, 67].

De acordo com o que já foi apresentado neste capítulo, vimos que existem argumentos teóricos que sustentam tanto a formulação de Minkowski quanto a de Abraham, o que nos leva a pensar que uma discussão puramente teórica não é suficiente para decidirmos qual das duas formulações é a correta (se é que alguma delas o é), ou que há enganos sutis em algumas dessas análises, como no caso do paradoxo de Mansuripur. Com isso em mente, na próxima seção, tentaremos resolver essa discórdia através da descrição detalhada de alguns dos experimentos que têm sido propostos e realizados sobre este tema [32, 34, 37, 40, 41, 43, 53, 62, 81].

4.3 Experimentos Propostos e Realizados

“O que observamos não é a própria natureza, mas a natureza exposta ao nosso método de investigação.” Werner Heisenberg [105].

Em um experimento realizado em 1951 [32], Jones mediu a pressão de radiação da luz em um espelho submerso em sete líquidos dielétricos com índices de refração

³Observe que o bloco estará em movimento apenas quando o fóton estiver dentro dele.

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

diferentes, variando desde 1.33 (água) até 1.63 (bissulfeto de carbono). O objetivo deste experimento foi investigar qual é a relação entre a pressão de radiação da luz e o índice de refração do meio material. Um esquema da montagem deste experimento pode ser visto na figura 4.1. Um sistema de resposta rápida foi usado com o intuito de discriminar entre o efeito da pressão de radiação, o qual é imediato, e efeitos térmicos, os quais demoram mais tempo para aparecer. O espelho (que foi revestido de Ródio para aumentar sua reflexão e também para evitar manchas na sua superfície) submerso no líquido foi iluminado simultaneamente na mesma direção e em sentidos opostos com luz ao longo de A e A', e depois na direção de B e B'. A deflexão do espelho causada pela pressão de radiação dos feixes de luz foi mensurada inicialmente quando o tubo estava cheio de ar e depois quando o tubo estava parcialmente preenchido com cada um dos sete líquidos. Medidas da razão entre a posição angular da fibra de torção quando ela estava submersa nos líquidos e no ar foram realizadas e, dentro dos limites de acurácia deste experimento, Jones concluiu que este parecia confirmar a expectativa teórica de que a pressão de radiação aumenta proporcionalmente ao índice de refração do líquido, supostamente favorecendo a formulação de Minkowski. Experimentos subsequentes foram realizados por Jones e colaboradores [34, 43] utilizando-se basicamente a mesma ideia do experimento descrito anteriormente, porém com técnicas experimentais mais avançadas e, por conseguinte, com resultados mais precisos e confiáveis, e as conclusões obtidas foram basicamente as mesmas: a pressão de radiação aumenta proporcionalmente ao índice de refração do meio material. Entretanto, por serem muito complexos, esses experimentos estão abertos a múltiplas interpretações possíveis [61]. Mansuripur argumentou [59] que os experimentos de Jones e colaboradores [32, 34, 43] teriam favorecido a descrição de Abraham se eles tivessem usado um espelho que não revertesse a fase da onda refletida (isto é, um espelho formado por um condutor magnético perfeito). Por outro lado, Kemp e Grzegorzcyk mostraram que mesmo nesse caso a formulação de Minkowski seria sustentada [75]. Por fim, Gordon [39] e Loudon [49] chegaram aos mesmos resultados obtidos no experimento de Jones *et al.* [32, 34, 43] usando a formulação de Abraham para a densidade de momento e computando a densidade de momento da parte material através da Lei de Força de Lorentz.

Em 1908, Poynting estudou qual seria o efeito da incidência de um feixe de ondas eletromagnéticas, inicialmente no ar, sobre um meio material transparente e sem dispersão, e concluiu que deveria haver uma força na interface ar-material no sentido oposto ao do feixe incidente e, devido à conservação do momento, o momento da luz dentro do material deveria ser proporcional ao índice de refração do material [68, 106]. Por outro lado, a premissa de que o momento da luz dentro do material é inversamente proporcional ao índice de refração deste, leva à conclusão de que deve haver uma força

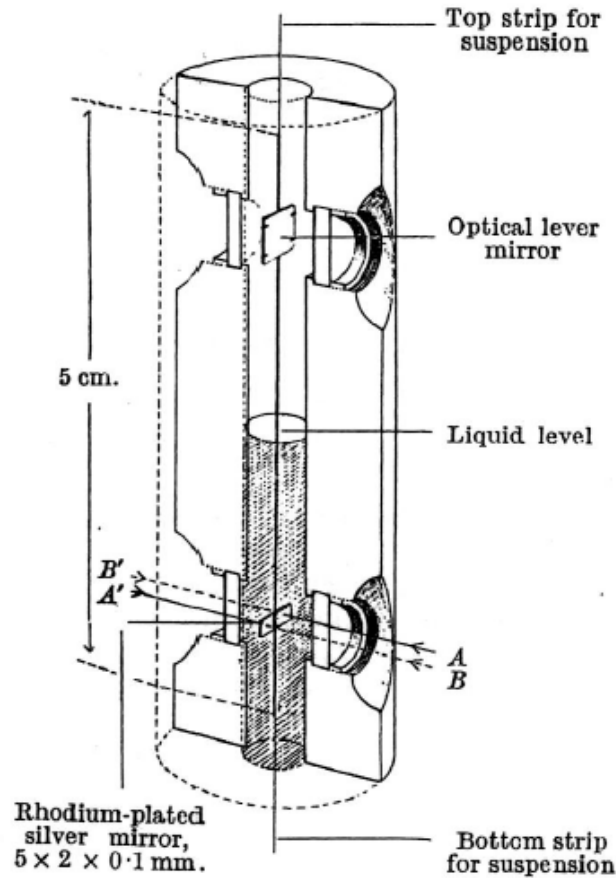


Figura 4.1: Um líquido dielétrico preenche parcialmente um tubo cilíndrico até o nível indicado na figura. Um espelho submerso no líquido é iluminado assimetricamente por dois feixes luminosos. Medindo-se a posição angular da fibra de torção pode-se determinar a relação entre a pressão de radiação da luz e o índice de refração do líquido. Esse esquema foi retirado de [32].

sobre a interface ar-material no sentido do feixe de luz incidente [38, 68]. Isto posto, no começo da década de 1970 Ashkin e Dziedzic [37] mediram a pressão de radiação sobre a superfície livre de um líquido dielétrico transparente (água) usando um pulso de luz focalizado proveniente de um laser. A montagem experimental usada por eles está esquematizada na figura 4.2. Considere que o momento da luz no ar seja igual a p_0 e que o índice de refração do material seja n . Dessa forma, segundo Poynting [68, 106], se ao penetrar no líquido o momento da luz aumentar para np_0 , em conformidade com a conservação do momento, deve haver uma força atuando na superfície ar-água fazendo-a levantar em direção ao ar, como mostrado na configuração A da figura. Em contrapartida, de acordo com um argumento utilizado por Burt e Peierls [38], se den-

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

tro da água o momento da luz diminuir para p_0/n , deve haver uma força na interface ar-água, só que no sentido contrário ao do caso anterior, abaixando a superfície da água (veja a configuração B da figura). Na configuração C da figura, o feixe se propaga no sentido contrário, da água para o ar. A partir dos efeitos de lente gerados pelas configurações A e B da figura 4.2, pode-se inferir o valor do momento da luz dentro da água. Observando que a direção e o sentido da força total na superfície ar-água devida à pressão de radiação estava de acordo com a configuração A, Ashkin e Dziedzic concluíram que o momento da luz dentro da água aumentou para np_0 , aparentemente corroborando com a formulação de Minkowski. Contudo, de acordo com cálculos efetuados por Gordon [39], Ashkin e Dziedzic deveriam ter observado uma diminuição no momento da luz dentro da água, aparentemente favorecendo a descrição de Abraham. O problema com o experimento realizado por eles foi a incidência não-uniforme do feixe de luz sobre a superfície ar-água. Esta não-uniformidade deu origem a forças laterais que curvaram e levantaram a superfície da água com uma intensidade maior do que o momento poderia empurrá-la, resultando em uma interpretação incorreta do resultado observado [39].

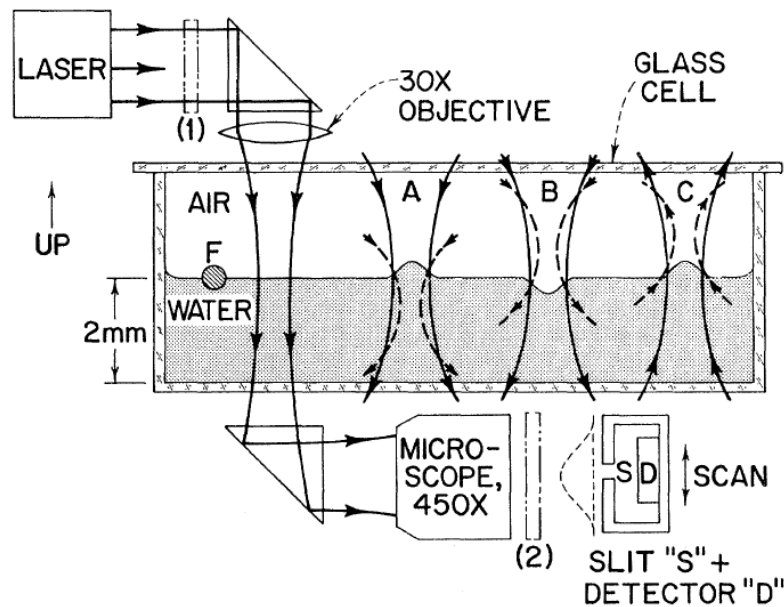


Figura 4.2: Um feixe de luz proveniente de um laser é focalizado na interface entre o ar e a água. Após atravessar o líquido, o feixe de luz é detectado e os efeitos de lente são analisados. Esse esquema foi retirado de [37].

Em 2005, Campbell *et al.* [53] utilizaram ferramentas sofisticadas de ótica atômica com o intento de medir o momento transferido de fótons para um gás de átomos. Eles realizaram o experimento (esquematizado na figura 4.3) em um condensado de

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

Bose-Einstein de átomos de Rubídio refrigerado a uma temperatura próxima a zero Kelvin em uma armadilha magnética. Campbell e colaboradores iluminaram esses átomos com um primeiro pulso de luz que dá origem a uma onda eletromagnética estacionária que interage com o gás de átomos. Esse primeiro pulso de luz desacopla um pequeno número de átomos que estavam inicialmente em um estado com momento nulo na direção vertical da figura e faz com que eles mudem para estados que possuem momentos verticais $\pm 2\hbar kn$, em que k é o vetor de onda do fóton no vácuo e n é o índice de refração do gás. Após um intervalo de tempo variável τ eles aplicaram um segundo pulso de luz, idêntico ao primeiro, e as amplitudes de probabilidade de os átomos se desacoplarem com o primeiro pulso de luz interferiram com as amplitudes de probabilidade de os átomos se desacoplarem com o segundo pulso. Os momentos transferidos para os átomos puderam ser inferidos através de uma análise das franjas de interferência resultantes, e os valores encontrados aparentemente favorecem a descrição de Minkowski. Em 2006, cálculos efetuados por Leonhardt [56] em dielétricos quânticos (tais como condensados de Bose-Einstein) mostraram que os resultados obtidos no experimento de Campbell *et al.* também poderiam ter sido interpretados utilizando-se a descrição de Abraham.

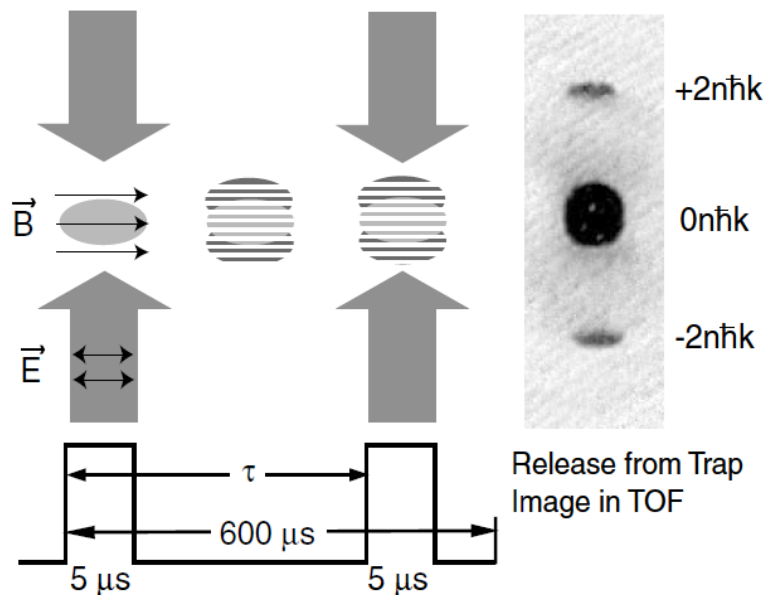


Figura 4.3: Interferômetro de Kapitza-Dirac. Esse esquema foi retirado de [53].

Existe um termo que aparece apenas na formulação de Abraham (conhecido como densidade de força de Abraham) que, por esse motivo, pode ser usado com o intento de discernir tal formulação da descrição de Minkowski [68]. Em um meio material isotrópico e homogêneo com índice de refração n , este termo pode ser escrito

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

como $(n^2 - 1)(\partial/\partial t)(\vec{E} \times \vec{H})/c^2$. Assim sendo, a densidade de força de Abraham só pode ser mensurada no caso em que os campos elétrico e/ou magnético aplicados variam com o tempo, pois, caso contrário, tal termo seria nulo. Isto posto, em 1975 Walker e colaboradores [41] realizaram experimentos em um material dielétrico não-magnético com o intuito de verificar a existência dessa força. A montagem experimental utilizada por eles está representada na figura 4.4. Em [40, 41], os autores usaram um disco de Titanato de Bário (BaTiO_3) com susceptibilidade elétrica elevada ($\chi_e \approx 3620$), suspenso por uma fibra de torção, sob a influência de um campo magnético vertical estático \vec{H} produzido por um eletroímã potente, e um campo elétrico radial dependente do tempo $\vec{E}(t)$ entre as superfícies interior e exterior do disco. Visto que $\vec{E}(t) = E(t)\hat{r}$ e $\vec{H} = H\hat{z}$, logo, a densidade de força Abraham, que é dada por $(n^2 - 1)(\partial/\partial t)(\vec{E} \times \vec{H})/c^2$, deve ser azimutal. Aproximando-se a frequência de oscilação do campo elétrico da frequência natural de oscilação do sistema, pode-se fazer com que o sistema entre em ressonância, amplificando-se assim a amplitude de oscilação deste se a força de Abraham realmente existir. Tais oscilações foram observadas através da incidência de um laser em um espelho fixo (espelho M1 da figura 4.4) no disco, e as medidas confirmaram a existência da força de Abraham, aparentemente corroborando com a descrição de Abraham. Por outro lado, Israel [42] demonstrou que é possível explicar os resultados experimentais obtidos em [40, 41] através da descrição de Minkowski.

Em um trabalho mais recente, realizado em 2008, She *et al.* [62] implementaram um experimento no qual um feixe de luz proveniente de um laser penetrou na parte superior (fixa) de um filamento de sílica (SiO_2) orientado na direção vertical e saiu pela extremidade inferior (livre) em direção a um meio contendo ar (veja a figura 4.5). O experimento foi baseado na seguinte ideia: como o filamento de sílica é sólido e flexível, sua extremidade livre seria empurrada para trás se o momento da luz dentro do filamento fosse compatível com o momento de Abraham, e puxada para frente se o momento da luz dentro do filamento fosse igual ao momento de Minkowski. Quando um pulso de laser entra no filamento, a extremidade deste se move para a esquerda e para cima, e a parte do filamento indicada pelas setas brancas se move para a direita. Quando o pulso de laser desaparece, o filamento volta ao seu estado original. Os autores filmaram o comportamento do filamento durante o intervalo de tempo em que a luz estava passando através dele e concluíram que seu deslocamento é conciliável com a formulação de Abraham. Alguns pesquisadores não ficaram satisfeitos com as conclusões dos autores e, por causa disso, ainda há uma discussão sobre as possíveis interpretações desse resultado [63–65, 69]. Além do mais, de acordo com Brevik e colaboradores [63, 81], os efeitos observados no experimento de She *et al.* podem ser explicados sem referência ao momento do fóton.

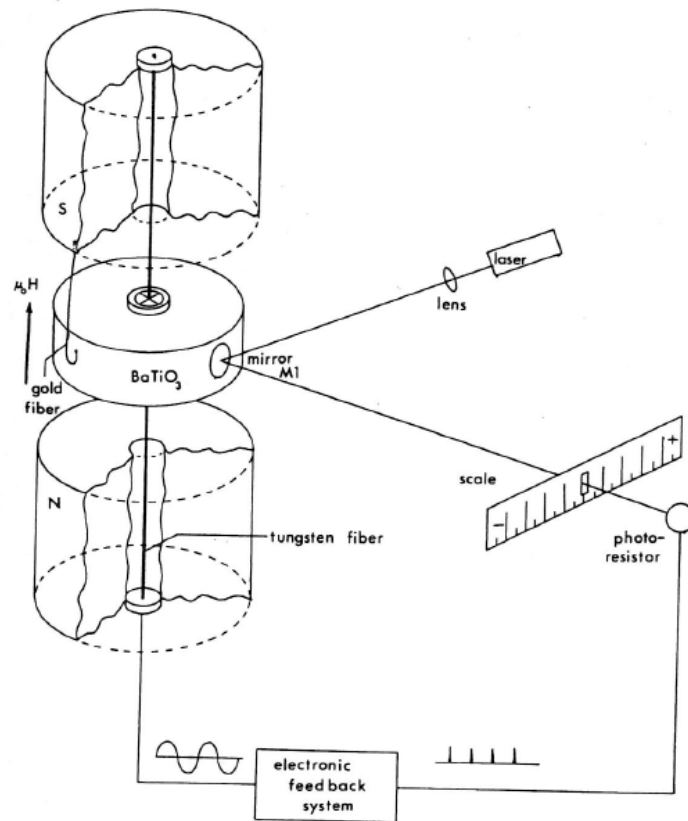


Figura 4.4: Diagrama do aparato experimental retirado de [41].

Em 2012, Brevik e Ellingsen [81] propuseram uma configuração experimental para medir a diferença entre as previsões de Abraham e Minkowski em óptica. O esquema desta configuração está na figura 4.6. Nesta proposta, um pulso de laser passa através de uma fibra óptica longa que está enrolada em torno de um cilindro feito de um material leve. De acordo com cálculos realizadas em [44] usando parâmetros realísticos, as deflexões angulares do cilindro causadas pela passagem do feixe de luz através da fibra óptica têm sentidos opostos quando calculadas através das formulações de Abraham e de Minkowski, facilitando assim a discriminação entre as duas descrições. Embora alguns experimentos tenham sido realizados recentemente com o propósito de investigar a mesma questão em escalas atômicas, experimentos macroscópicos têm sido escassos devido ao pequeno momento da luz quando comparado ao momento de corpos massivos. A grande vantagem da proposição experimental de Brevik e Ellingsen é que as deflexões angulares previstas são da ordem de $10^{-3}rad$, as quais em princípio poderiam ser medidas.

Como pudemos perceber através das interpretações dos resultados obtidos em alguns experimentos descritos neste capítulo, a complexidade da transferência de mo-

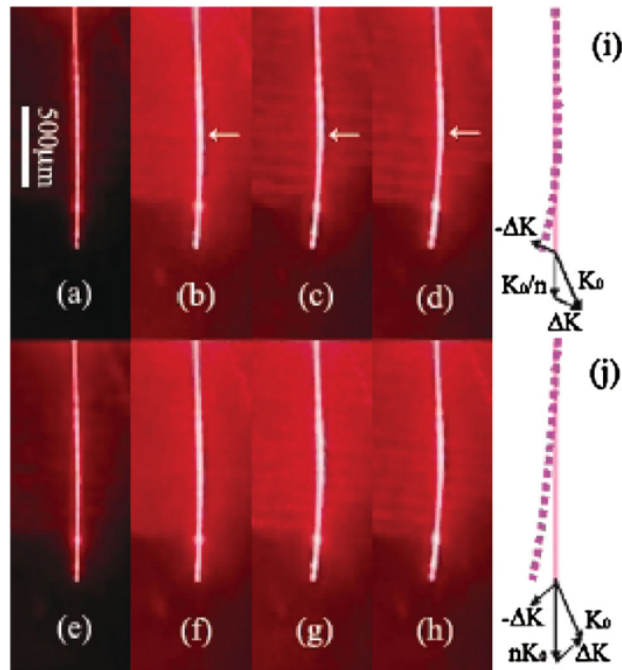


Figura 4.5: Instantâneos do vídeo que mostra o movimento do filamento de sílica causado pela força óptica sobre a extremidade inferior deste no ar, onde (a), (b), (c) e (d) são imagens do filamento 0, 1/15, 2/15 e 3/15 segundos, respectivamente, depois que um pulso de laser chega e, (e), (f), (g) e (h) correspondem ao pulso de laser seguinte. As figuras (i) e (j) do lado direito mostram o efeito de refração assimétrica relacionada, respectivamente, com o momento de Abraham (\vec{K}_0/n) e momento de Minkowski ($\vec{K}_0 n$), onde \vec{K}_0 é o momento da luz no vácuo e $\Delta\vec{K}_0$ ($-\Delta\vec{K}_0$) é a mudança no momento da luz. As linhas sólida e tracejada em (i) e (j) indicam os dois estados diferentes do filamento de sílica. Essa figura foi retirada da referência [62].

mento da luz para um meio material dielétrico obstrui a observação direta do momento desta, fazendo com que as interpretações experimentais se tornem ambíguas. Com isso em mente, na próxima seção, enunciaremos a solução eventual para o dilema Abraham-Minkowski.

4.4 Solução Eventual do Debate Abraham-Minkowski

A conclusão eventual [36] deste dilema que perdura há mais de um século, é que a densidade de momento da luz não está plenamente descrita se não considerarmos a densidade de momento material no qual ela está imersa. Isto posto, qualquer formulação que considerar somente a parte eletromagnética do sistema é incompleta.

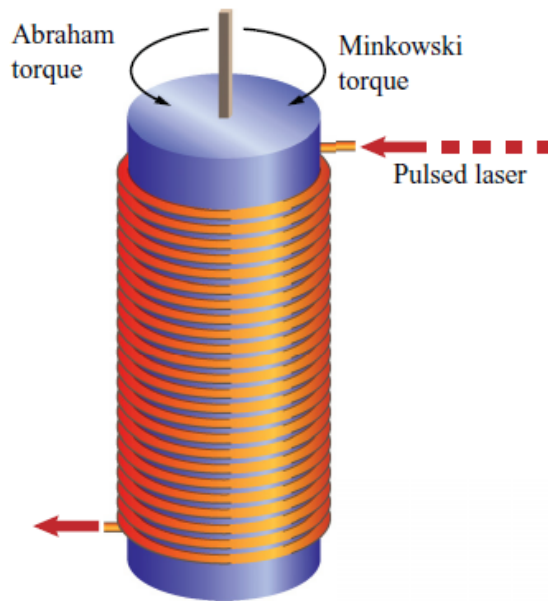


Figura 4.6: Fibra óptica longa enrolada em torno de um cilindro feito de um material leve. O sentido do torque produzido pelo pulso de luz que penetra na fibra óptica é diferente nas formulações de Abraham e Minkowski. Esse esquema foi retirado de [81].

Por outro lado, as formulações de Abraham e Minkowski são potencialmente capazes de fornecer os resultados observados. Dessa forma, o debate Abraham-Minkowski não deveria ser sobre algum tipo de consistência formal das descrições, mas sim a respeito da interpretação dos resultados obtidos. O desafio é entender em quais situações é mais conveniente utilizar uma determinada formulação em detrimento da outra ⁴ a fim de obter a interpretação do resultado obtido mais facilmente [61].

A energia e o momento totais de sistemas fechados obedecem a leis de conservação globais. Ainda que a energia e o momento eletromagnéticos não sejam geralmente conservados, um sistema fechado que inclui todas as interações necessárias dos campos com o meio material obedece a leis de conservação de energia e momento totais [76].

A conservação do centro de massa-energia do sistema estipula que o momento de Abraham representa a forma correta do momento dos campos, enquanto a maioria dos outros experimentos exhibe o momento de Minkowski como a quantidade observada para a transferência de momento em objetos submersos [76].

Nem a formulação de Abraham nem a de Minkowski são “corretas”. Ambas são incompletas. A escolha de qual formulação usar é mais uma questão de conveniência prática do que de exatidão. Em outras palavras, a pergunta sensata a ser feita é: “qual

⁴Ou melhor, das outras, pois existem diversas formulações além das de Abraham e de Minkowski [44, 58, 68, 76].

formalismo é mais conveniente em uma determinada situação?”, e não “qual descrição é mais correta?”. Quando estamos investigando o momento da luz no interior de um material, sempre precisamos levar em conta o momento do material. Assim sendo, se levamos em conta tanto a parte eletromagnética como a material do sistema, tanto a formulação de Abraham quanto a de Minkowski fornecerão as mesmas previsões experimentais [36].

Em geral, o que os resultados obtidos nos trabalhos experimentais têm nos mostrado é que a força exercida pela luz sobre um objeto que está submerso em um meio material é conciliável com o momento de Minkowski para a luz dentro de tal meio. Por outro lado, o efeito resultante sobre um meio material causado pela passagem da luz através deste é consistente com o momento de Abraham [67].

De acordo com Kemp [76], enquanto o momento de Abraham representa a forma correta da contribuição dos campos para o momento da onda, o momento de Minkowski que é mensurável em diversos experimentos, pois este representa as contribuições eletromagnética e material para o momento da onda que está se propagando.

Em suma: existem diversas formas diferentes de definir as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia das ondas eletromagnéticas quando estas estão submersas em um meio material. Para uma descrição completa do sistema, além das grandezas associadas à luz, não podemos nos esquecer de levar em conta as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia do material. A divisão entre os valores das grandezas físicas associadas às duas partes que formam o sistema, a parte eletromagnética e a parte material, é sempre arbitrária, porém, se levarmos em conta corretamente todos os termos, todas as formulações levam aos mesmos resultados.

Alguns trabalhos recentes [66, 67, 73] têm sugerido que a discriminação entre os momentos de Abraham e Minkowski está diretamente conectada com a distinção entre os momentos cinético e canônico na eletrodinâmica. Isto posto, na seção seguinte exploraremos essa conexão.

4.5 Interpretação Física dos Diferentes Momentos

Considere um objeto neutro com massa M , momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ e momento de dipolo elétrico \vec{p} , ambos medidos no referencial de repouso do objeto (rotulado como S). Suponha que tal objeto se mova com velocidade \vec{v} ⁵ em relação ao referencial S' . Assim sendo, a lagrangiana \mathcal{L} do sistema formado por esse objeto na presença dos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , do ponto de vista de um observador situado no referencial S' , é dada por

⁵Admita que $v \ll c$, em que c é a velocidade da luz no vácuo.

Capítulo 4. O Debate Abraham-Minkowski

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2}Mv^2 + \vec{\mu}' \cdot \vec{B} + \vec{p}' \cdot \vec{E}, \quad (4.2)$$

em que K e V são, respectivamente, as energias cinética e potencial do objeto, e os momentos de dipolo magnético $\vec{\mu}'$ e elétrico \vec{p}' do objeto visto pelo referencial S' podem ser escritos como ⁶

$$\vec{\mu}' = \vec{\mu} - \vec{v} \times \vec{p} \quad (4.3)$$

e

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{\mu}). \quad (4.4)$$

As equações (4.3) e (4.4) foram obtidas levando-se em conta que um dipolo elétrico em movimento adquire um momento de dipolo magnético e vice-versa [22, 24]. Substituindo essas duas relações na equação (4.2), obtemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Mv^2 + \vec{\mu} \cdot \vec{B} - (\vec{v} \times \vec{p}) \cdot \vec{B} + \vec{p} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{E}. \quad (4.5)$$

Sabemos que o momento canônico do objeto na direção i , medido pelo referencial S' , é dado por

$$(p_{can})_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = Mv_i - (\vec{p} \times \vec{B})_i + \frac{1}{c^2}(\vec{\mu} \times \vec{E})_i. \quad (4.6)$$

Tendo em mente que o momento cinético \vec{p}_{cin} de tal objeto é igual a $M\vec{v}$, a equação (4.6) pode ser reescrita como

$$\vec{p}_{cin} = \vec{p}_{can} + \vec{p} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{\mu} \times \vec{E}. \quad (4.7)$$

Assim sendo, se considerarmos um meio material formado por densidades de dipolo elétrico \vec{P} e magnético \vec{M} , as densidades de momento cinético \vec{P}_{cin} e canônico \vec{P}_{can} obedecerão à seguinte relação:

$$\vec{P}_{cin} - \vec{P}_{can} = \vec{P} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{M} \times \vec{E}, \quad (4.8)$$

em que as grandezas \vec{P} e \vec{M} também são conhecidas, respectivamente, como polarização e magnetização do material.

De acordo com a equação (4.1), a diferença entre as densidades de momento de Minkowski e de Abraham pode ser escrita como

⁶Essas expressões podem ser obtidas a partir das equações (2.9) e (2.10).

$$\begin{aligned}
 \vec{P}_{Min} - \vec{P}_{Abr} &= \vec{D} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{E} \times \vec{H}] \\
 &= (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \left[\vec{E} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \right] \\
 &= \vec{P} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{M} \times \vec{E},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

pois $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{P}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ e $c^2 \mu_0 = 1/\epsilon_0$.

Comparando as equações (4.8) e (4.9), obtemos

$$\vec{P}_{cin} + \vec{P}_{Abr} = \vec{P}_{can} + \vec{P}_{Min}. \tag{4.10}$$

A equação (4.10) revela que o momento total do sistema formado pelo meio material e pela luz pode ser dividido como a soma do momento de Abraham da luz com o momento cinético da matéria, ou como a soma do momento de Minkowski da luz com o momento canônico da matéria. Com isso em mente, podemos interpretar as densidades de momento de Abraham e de Minkowski, respectivamente, como as densidades de momento cinético e canônico da luz [67, 73]. Desse modo, o momento total do sistema (cinético ou canônico) é o único momento conservado deste [73]. Em geral, em conformidade com [67, 72, 73, 76, 80], o momento cinético de Abraham está associado com os deslocamentos globais do centro de massa de um meio, e o momento canônico de Minkowski está conectado com o movimento de objetos submersos em um meio material.

É necessário ter sempre em mente que existem duas formas distintas de momento eletromagnético, o momento cinético e o canônico [67, 73]. O momento total do sistema fechado, que é igual a soma do momento da matéria com o da luz, é conservado e, além disso, é único. Todavia, a divisão do momento total do sistema entre as partes eletromagnética e material pode ser realizada de modo a separar as partes cinética e canônica. Os momentos de Abraham e de Minkowski são, respectivamente, os momentos cinético e canônico da luz.

Barnett finalizou seu famoso trabalho de 2010 [73] observando que novos momentos rivais têm sido propostos [44] com o intuito de resolver o debate Abraham-Minkowski e que, ao demonstrar a necessidade dos dois momentos “corretos” e associá-los, de forma inequívoca às descrições de Abraham e Minkowski, podemos esperar que tal demonstração tenha removido a necessidade de novas formas rivais de momento.

No próximo capítulo, nosso objetivo é argumentar a favor da relevância de uma outra forma de densidade de momento, a saber: $\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$.

Capítulo 5

Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

“Não seria melhor enterrar minhas lágrimas na areia às margens do mar, na mais completa solidão? Nunca chorei, porém, pois as lágrimas se transformaram em pensamentos.” Emil Cioran [107].

O objetivo principal deste capítulo é investigar quais modelos para o meio material estão associados a cada definição da parte eletromagnética do momento de uma onda eletromagnética em um meio material, bem como a conexão do conceito de momento oculto com o debate Abraham-Minkowski.

5.1 Equações de Maxwell Considerando a Existência de Cargas e Correntes Magnéticas

A falta de evidências experimentais que atestem a realidade de cargas magnéticas não é uma barreira intransponível que impede o pressuposto da existência destas de uma forma puramente teórica. De fato, tal suposição já foi feita diversas vezes e, em alguns casos, os resultados teóricos obtidos através de tal consideração são bem interessantes [17, 108]. Por exemplo, em 1931, um dos físicos teóricos mais famosos do século XX, P. A. M. Dirac, mostrou que se existissem cargas magnéticas no universo, o mistério da quantização da carga elétrica seria explicado automaticamente [88].

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

Agora, com isso em mente, exploraremos as consequências da suposição da existência de monopolos magnéticos para o conceito de momento oculto.

Supondo a existência de monopolos magnéticos, as Equações de Maxwell para um sistema físico constituído por densidades de carga elétrica ρ_e e magnética ρ_m , e densidades de corrente elétrica \vec{J}_e e magnética \vec{J}_m , podem ser escritas como [12, 17, 19, 88, 109, 110]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m, \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.4)$$

em que \vec{E} e \vec{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético produzidos pela configuração de densidades de cargas e correntes do sistema, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Ademais, a equação geral para a densidade de força, que descreve como os campos elétrico e magnético exercem força sobre as densidades de carga e de corrente do sistema, será dada por [12, 17, 19, 88, 108–111]

$$\vec{f} = \rho_e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + \rho_m \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E} \right), \quad (5.5)$$

em que \vec{v} é a velocidade de um elemento carga com volume infinitesimal.

Seguindo um raciocínio completamente análogo ao que foi feito na seção 2.2, apenas trocando o campo elétrico externo $\vec{E} = E\hat{x}$ por um campo magnético externo $\vec{B} = B\hat{x}$, a corrente elétrica estacionária I por uma corrente magnética estacionária I_m , e a força de Lorentz sobre cargas elétricas por uma equação similar que é válida para cargas magnéticas (a saber: $\vec{F}_m = q_m \vec{B} - q_m \vec{v} \times \vec{E}/c^2 = q_m \vec{B}$, pois, nesse caso, o campo elétrico externo é nulo), é fácil mostrar que ¹ o momento oculto contido em um circuito fechado que transporta uma corrente magnética estacionária I_m na presença de um campo magnético externo \vec{B} pode ser escrito como

$$\vec{p}_{oc} = -\vec{p}_0 \times \vec{B}, \quad (5.6)$$

¹As demonstrações das equações (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) estão no Apêndice B desta tese.

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

em que \vec{p}_0 é o momento de dipolo elétrico do circuito que transporta uma corrente magnética I_m .

A generalização da equação (5.6) também pode ser feita através de cálculos semelhantes aos que foram feitos na seção 2.2. Assim sendo, a expressão geral para o momento oculto contido em um circuito fechado que transporta uma corrente magnética estacionária I_m , na presença de um potencial magnético Φ_m (com $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_m$), pode ser escrita como

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{I_m}{c^2} \oint \Phi_m d\vec{l}, \quad (5.7)$$

em que a integral deve ser realizada sobre o circuito e $d\vec{l}$ é um comprimento infinitesimal na direção e no sentido da corrente I_m . De modo análogo, as expressões para o momento oculto contido em sistemas que possuem densidades de corrente magnética superficial e volumétrica, na presença de um potencial magnético externo Φ_m , são dadas, respectivamente, por

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi_m \vec{K}_m dA \quad (5.8)$$

e

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi_m \vec{J}_m d\tau, \quad (5.9)$$

em que \vec{K}_m e \vec{J}_m são, respectivamente, as densidades superficial e volumétrica de corrente magnética.

5.2 Relação entre o Modelo para o Meio Material e a Densidade de Momento Eletromagnético

No capítulo 4 desta tese, vimos que há diferentes formas compatíveis de se dividir o momento de uma onda eletromagnética que se propaga dentro de um meio material em partes eletromagnética e material. Nesta seção, veremos que cada modelo para o meio material resultará em uma divisão distinta.

No capítulo 1 desta tese vimos que, em conformidade com alguns modelos para dipolos magnéticos, quando estes estão na presença de um campo elétrico externo, tais dipolos adquirem um momento ortogonal à direção do campo elétrico aplicado e da orientação do momento de dipolo. Esse momento, conhecido como momento oculto, é decorrente de um efeito puramente relativístico [7–21, 25].

Em sistemas localizados e isolados, formados por densidades de carga estáticas, densidades de corrente estacionárias e campos eletromagnéticos estáticos, tais que o

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

centro de energia dos sistemas permaneçam em repouso, a soma do momento total da matéria (\vec{p}_{mat}) com o momento total dos campos eletromagnéticos (\vec{p}_{em}) deve ser igual a zero (essa afirmação foi demonstrada no Apêndice A desta tese). Além do mais, observe que o momento oculto geralmente aparece em sistemas que possuem partes internas em movimento, pois, nesse caso, o momento relativístico total das partes internas do sistema é diferente de zero. Isso significa que nem sempre um sistema físico que possui momento de dipolo magnético na presença de um campo elétrico externo possui momento oculto!

A existência do momento oculto depende do modelo adotado para os dipolos da matéria. Quando o modelo para o dipolo magnético é um circuito transportando corrente elétrica - com partes internas em movimento -, na presença de um campo elétrico externo, o sistema pode ter momento oculto. Por outro lado, se considerarmos que o dipolo magnético é gerado por cargas magnéticas - sem partes internas em movimento-, mesmo na presença de um campo elétrico externo, o sistema não possui momento oculto. Sendo assim, o momento eletromagnético também será distinto para cada modelo, uma vez que o momento total do sistema deve ser conservado [18, 19].

A fim de verificarmos a validade da afirmação do parágrafo anterior para sistemas quânticos, mostramos no capítulo 3 [25] que um átomo de hidrogênio com momento de dipolo magnético devido ao estado orbital do elétron, sob influência de um campo elétrico externo, possui momento oculto. Isso significa que a nuvem eletrônica do átomo de hidrogênio tem momento diferente de zero no seu referencial de repouso do centro de massa devido a um efeito puramente relativístico. Esse resultado é totalmente análogo ao momento oculto de um circuito clássico que transporta uma corrente elétrica na presença de um campo elétrico externo.

Na seção 5.1, vimos que afirmações semelhantes são verdadeiras para sistemas que possuem momento de dipolo elétrico na presença de um campo magnético externo constante e uniforme. Recordando: um objeto que possui momento de dipolo elétrico e que está sob a influência de um campo magnético externo constante e uniforme, poderá possuir momento oculto apenas se o modelo adotado para o dipolo elétrico possuir partes internas em movimento, ou seja, se o dipolo elétrico for originário de uma corrente magnética.

Nas próximas quatro subseções deste capítulo, discutiremos as relações entre grandezas físicas associadas ao meio material e aos campos de uma onda eletromagnética que será onipresente no meio material. Mais explicitamente, iremos obter expressões para o momento da matéria, o momento oculto e o momento eletromagnético dos campos, para quatro modelos diferentes de meios materiais que serão descritos nas próximas subseções.

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

Em todos os quatro casos, vamos considerar que os meios materiais são formados por N partículas compostas (como átomos ou moléculas de um gás), cada uma com massa igual M_j e velocidade (não-relativística) do centro de massa igual a \vec{V}_j . Ademais, admita que cada partícula pode possuir dipolos elétrico e/ou magnético.

Suponha que a energia total do sistema (localizado e fechado) é igual a $U_{total} = U_{mat} + U_{em}$, que o momento total do sistema é igual a $\vec{p}_{total} = \vec{p}_{mat} + \vec{p}_{em}$, em que U_{mat} e U_{em} são, respectivamente, as energias material e eletromagnética, e que \vec{p}_{mat} e \vec{p}_{em} são, respectivamente, os momentos material e eletromagnético. Isto posto, uma vez que o Teorema do Centro de Energia afirma que a velocidade do centro de energia ($\vec{V}_{ce} = \vec{p}_{total}c^2/U_{total}$) de qualquer sistema fechado e localizado é constante, o fato de a energia total do sistema não variar implica que o momento total deste também permanecerá constante.

Por fim, imagine que em todas situações que serão descritas nas próximas quatro subseções, a onda eletromagnética que preenche todo o meio material seja resultante de campos eletromagnéticos aproximadamente constantes (limite quase estático) e uniformes. Por campos aproximadamente constantes, queremos dizer que o período de oscilação destes é muito maior do que os tempos característicos relativos à estrutura interna de cada partícula. Por exemplo, se usarmos o modelo de Bohr para um átomo de hidrogênio, no qual o período de revolução do elétron no seu estado fundamental é da ordem de $2\pi a_0/v_0 \approx 2\pi(0.529 \times 10^{-10}m)/(2.2 \times 10^6m/s) \approx 1.5 \times 10^{-16}s$, o período de oscilação da onda eletromagnética deve ser muito maior que esse valor. Por outro lado, por campos aproximadamente uniformes, queremos dizer que a amplitude dos campos é praticamente uniforme no volume de cada partícula.

A seguir, vamos apresentar e discutir os resultados obtidos para cada um dos quatro meios materiais que serão descritos.

5.2.1 Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Cargas Elétricas e Dipolos Magnéticos Formados por Cargas Magnéticas

Primeiramente, considere apenas uma partícula que possui momento de dipolo elétrico \vec{p}_e , formado por duas cargas elétricas de sinais opostos e separadas, e momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_m$, decorrente de duas cargas magnéticas de sinais opostos separadas, na presença de uma onda eletromagnética. Nesse caso, tal partícula não possui momento oculto, uma vez que, como já foi afirmado diversas vezes nesta tese, um sistema pode ter momento oculto apenas se possuir partes internas em movimento (como correntes elétricas e/ou magnéticas) na presença de campos magnético e/ou elétrico.

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

Desse modo, o momento oculto total da partícula que está sob influência de uma onda eletromagnética é dado por

$$\vec{p}_{oc} = 0. \quad (5.10)$$

Consequentemente, o momento total da partícula, \vec{p}_{part} , pode ser escrito como

$$\vec{p}_{part} = \vec{p}_{cin} + \vec{p}_{oc} = M\vec{V}, \quad (5.11)$$

ou seja, nesse caso, o momento total da partícula é igual ao seu momento cinético, $M\vec{V}$, em que M é a massa e \vec{V} é a velocidade do centro de massa da partícula.

No caso em que as partículas que constituem o material, que está sob influência de uma onda eletromagnética, possuem dipolos elétricos e magnéticos de acordo com os modelos desta subseção, que podem ser descritos através das funções polarização \vec{P}_e e magnetização \vec{M}_m , o momento oculto total será nulo. Então, por conseguinte, a parte material do momento da onda no meio será igual ao momento cinético total das partículas, isto é,

$$\vec{p}_{mat} = \sum_{j=1}^N M_j \vec{V}_j. \quad (5.12)$$

De acordo com o que foi discutido no capítulo anterior, o momento de Abraham \vec{p}_{Abr} está associado à parte eletromagnética do momento cinético da onda no meio [67, 73]. Tal momento pode ser escrito como

$$\vec{p}_{Abr} = \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau, \quad (5.13)$$

em que τ é o volume total do sistema, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}_m$, com \vec{E} e \vec{B} sendo, respectivamente, os campos elétrico e magnético da luz.

Assim sendo, o momento total do sistema, \vec{p}_{total} , é dado por

$$\vec{p}_{total} = \vec{p}_{mat} + \vec{p}_{Abr} = \sum_{j=1}^N M_j \vec{V}_j + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau. \quad (5.14)$$

Como o momento de Abraham está relacionado com a parte eletromagnética do momento cinético da onda, seu complemento material é o momento cinético total das partículas. Dessa forma, o momento de Abraham é compatível com o modelo para o meio material que supõe que este seja constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos formados por cargas elétricas de sinais opostos e separadas e dipolos magnéticos resultantes de cargas magnéticas de sinais opostos e separadas. É importante ressaltar que, como não existem cargas magnéticas na realidade, o modelo

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

para o meio material dessa subseção é não-físico, ou seja, não corresponde a um meio material que existe no mundo real.

5.2.2 Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Cargas Elétricas e Dipolos Magnéticos Formados por Correntes Elétricas

Desta vez, imagine que uma partícula possua momento de dipolo elétrico \vec{p}_e , formado por duas cargas elétricas de sinais opostos e separadas, e momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_e$, resultante de uma corrente elétrica, na presença de uma onda eletromagnética. Assim sendo, tal partícula possui momento oculto, já que o dipolo magnético desta é originário de uma corrente elétrica.

Nessa situação, o momento oculto da partícula que está na presença de uma onda eletromagnética é dado por

$$\vec{p}_{oc} = \frac{\vec{\mu}_e \times \vec{E}}{c^2}. \quad (5.15)$$

Dessa forma, o momento total da partícula, \vec{p}_{part} , é dado por

$$\vec{p}_{part} = M\vec{V} + \frac{\vec{\mu}_e \times \vec{E}}{c^2}, \quad (5.16)$$

isto é, o momento total da partícula é igual à soma do seu momento cinético com o momento oculto de seus constituintes.

Para um meio material formado por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos e magnéticos de acordo com o modelo desta subseção, que podem ser descritos pelas funções polarização \vec{P}_e e magnetização \vec{M}_e do material, e que estão sob influência uma onda eletromagnética, o momento oculto total do material pode ser escrito como

$$\vec{p}_{oc} = \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau. \quad (5.17)$$

Por conseguinte, a parte material do momento da onda no meio é igual à soma do momento cinético total das partículas que constituem este com o momento oculto total destas, ou seja,

$$\vec{p}_{mat} = \sum_{j=1}^N M_j \vec{V}_j + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau. \quad (5.18)$$

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

A parte eletromagnética do momento da onda deve ser igual ao momento de Abraham subtraído do momento oculto total do sistema, uma vez que, independentemente da divisão do momento total em partes material e eletromagnética, o momento total \vec{p}_{total} do sistema deve ser o mesmo, tendo em vista que a energia total (U_{total}) e a velocidade do centro de energia ($\vec{V}_{ce} = c^2\vec{p}_{total}/U_{total}$) do sistema são constantes. Dessa forma, a parte eletromagnética do momento da onda no meio pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\vec{p}_{em} &= \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau - \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau \\ &= \epsilon_0 \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau,\end{aligned}\tag{5.19}$$

em que \vec{E} e \vec{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética que se propaga no material, $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}_e)$ e τ é o volume total do sistema.

O momento da luz que é conciliável com o modelo para o material que é formado por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos produzidos por cargas elétricas e dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas, é dado pela equação (5.19), será nomeado de momento de Lorentz, pois é a contraparte eletromagnética do momento material que pode ser obtido através da Lei de Força de Lorentz [71, 77]. Nas referências [71, 77], a compatibilidade entre a consideração do momento de Lorentz para a parte eletromagnética do momento da onda no meio e a expressão da força de Lorentz para o cálculo do momento transferido para o meio é testada com sucesso em diversos exemplos. O fato de o momento de Lorentz ser mais natural, justamente por ser definido com a mesma expressão usada para o momento da luz no vácuo e, além disso, ser complementar ao momento material obtido através do uso da Lei de Força de Lorentz, faz com que, ao contrário do que afirmou Barnett em [67, 73], este também seja um momento relevante. Além do mais, ao contrário do momento de Abraham, o momento de Lorentz é compatível com um modelo para o meio material que é real, uma vez que este é constituído de dipolos elétricos formados por cargas elétricas e dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas.

5.2.3 Meio Material Constituído por Dipolos Elétricos Resultantes de Correntes Magnéticas e Dipolos Magnéticos Originários de Correntes Elétricas

Imagine uma partícula que tem momento de dipolo elétrico \vec{p}_m resultante de uma corrente magnética, e momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_e$ originário de uma corrente

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

elétrica, na presença de uma onda eletromagnética. Assim sendo, tal partícula possui momento oculto, já que os dois dipolos que constituem esta são resultantes de correntes.

Nessa situação, o momento oculto total da partícula que está sob influência da onda eletromagnética, é dado por

$$\vec{p}_{oc} = \frac{\vec{\mu}_e \times \vec{E}}{c^2} - \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (5.20)$$

em que $\vec{\mu}_e \times \vec{E}/c^2$ é o momento oculto devido ao dipolo magnético e $-\vec{p}_m \times \vec{B}$ é o momento oculto devido ao dipolo elétrico.

À vista disso, o momento total da partícula, que possui massa M e velocidade do centro de massa igual a \vec{V} , pode ser escrito como

$$\vec{p}_{part} = M\vec{V} + \frac{\vec{\mu}_e \times \vec{E}}{c^2} - \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (5.21)$$

Em um meio material constituído por um aglomerado de partículas que possuem dipolos elétricos e magnéticos de acordo com o modelo desta subseção, que podem ser descritos através das funções polarização \vec{P}_e e magnetização \vec{M}_m , na presença de uma onda eletromagnética, o momento oculto total dos constituintes das partículas que formam o meio material é dado por

$$\vec{p}_{oc} = \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau - \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau. \quad (5.22)$$

Consequentemente, a parte material do momento da onda pode ser escrita como

$$\vec{p}_{mat} = \sum_{j=1}^N M_j \vec{V}_j + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau - \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau. \quad (5.23)$$

Novamente, a parte eletromagnética do momento da onda deve ser igual ao momento de Abraham subtraído do momento oculto total do sistema, já que, independentemente da divisão do momento total em partes material e eletromagnética, o momento total \vec{p}_{total} do sistema deve ser o mesmo, tendo em vista que a energia total (U_{total}) e velocidade do centro de energia ($\vec{V}_{ce} = c^2 \vec{p}_{total}/U_{total}$) do sistema são constantes. Dessa forma, a parte eletromagnética do momento da onda no meio pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{em} &= \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau - \left\{ \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{M}_e \times \vec{E}) d\tau - \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau \right\} \\
 &= \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau + \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{M}_e) d\tau + \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau \\
 &= \epsilon_0 \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau + \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau \\
 &= \int_{\tau} (\vec{D} \times \vec{B}) d\tau \equiv \vec{p}_{Min} \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

em que \vec{E} e \vec{B} são, respectivamente, os campos elétrico e magnético da onda eletromagnética que se propaga no meio material, $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_m$ é o deslocamento elétrico, $\vec{H} \equiv \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}_e$ e τ é o volume total do sistema. Este momento (canônico) da luz é conhecido como momento de Minkowski.

Uma vez que o momento de Minkowski está relacionado com a parte eletromagnética do momento canônico da onda, seu complemento material é o momento cinético total das partículas somado com o momento oculto destas. Portanto, o momento de Minkowski é conciliável com o modelo para o meio material que supõe que este seja constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos formados por correntes magnéticas e dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas. Isto posto, note que, similarmente ao que ocorreu no meio material formado dipolos magnéticos resultantes cargas magnéticas fictícias, como não existem correntes magnéticas reais, o modelo para os dipolos elétricos dessa subseção também não corresponde aos dipolos elétricos existentes na realidade.

5.2.4 Meio Material Formado por Dipolos Elétricos Resultantes de Correntes Magnéticas e Dipolos Magnéticos Decorrentes de Cargas Magnéticas

Finalmente, considere uma partícula que possui momento de dipolo elétrico \vec{p}_m , resultante de uma corrente magnética, e momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_m$, originário de duas cargas magnéticas de sinais opostos e separadas, na presença de uma onda eletromagnética. Nessa situação, tal partícula pode ter momento oculto, visto que este pode aparecer em sistemas que possuem correntes magnéticas na presença de um campo magnético.

Diante disso, o momento oculto total da partícula na presença da onda eletromagnética pode ser escrito como

$$\vec{p}_{oc} = -\vec{p}_m \times \vec{B}, \tag{5.25}$$

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

e o momento da partícula, \vec{p}_{part} , é dado por

$$\vec{p}_{part} = M\vec{V} - \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (5.26)$$

Considerando que o material seja constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos e magnéticos de acordo com o modelo desta subsecção, que podem ser descritos através das funções polarização \vec{P}_m e magnetização \vec{M}_m , sob influência de uma onda eletromagnética, o momento oculto total do material pode ser escrito como

$$\vec{p}_{oc} = - \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau. \quad (5.27)$$

Por conseguinte, o momento total do material é dado por

$$\vec{p}_{mat} = \sum_{j=1}^N M_j \vec{V}_j - \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau. \quad (5.28)$$

Pelos mesmos motivos que foram apresentados nas duas subsecções anteriores, a parte eletromagnética do momento da onda no material pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \vec{p}_{em} &= \frac{1}{c^2} \int_{\tau} (\vec{E} \times \vec{H}) d\tau + \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{B}) d\tau \\ &= \mu_0 \int_{\tau} (\vec{D} \times \vec{H}) d\tau + \mu_0 \int_{\tau} (\vec{P}_m \times \vec{M}_m) d\tau. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Por fim, o momento dado pela equação (5.29) possui como complemento o momento material dado pela equação (5.28). Dessa forma, a parte eletromagnética do momento da onda dada pela equação (5.29) é compatível com o modelo para o meio material que considera que este seja constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos formados por correntes magnéticas e dipolos magnéticos resultantes de cargas magnéticas. Uma vez que ambos os constituintes do meio material descrito nesta subsecção são não-físicos, a expressão para a parte eletromagnética do momento da luz não é importante.

Em síntese, neste capítulo mostramos que o momento de Abraham é a parte eletromagnética do momento cinético da onda quando o meio material é constituído de dipolos elétricos decorrentes de cargas elétricas de sinais opostos e separadas e por dipolos magnéticos resultantes de cargas magnéticas (fictícias) de sinais opostos e separadas, e que o momento de Minkowski é a parte eletromagnética do momento canônico da onda quando o meio material é formado por dipolos elétricos originários de correntes magnéticas (fictícias) e por dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas. Também constatamos que o momento de Lorentz é a parte eletromagnética do

Capítulo 5. Implicações do Conceito de Momento Oculto para o Debate Abraham-Minkowski

momento da onda quando o meio material é constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos oriundos de cargas elétricas e por dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas. Argumentamos que o momento de Lorentz é o mais natural, por ser definido com a mesma expressão usada para o momento da luz no vácuo, além de ser a contraparte do momento material obtido através do uso da Lei de Força de Lorentz [71, 77]. Ademais, em contraste com momentos de Abraham e de Minkowski, o momento de Lorentz é conciliável com um modelo para o meio material que é real, ou seja, que existe na natureza. Com tudo isso em mente, ao contrário do que afirmou Barnett em [67, 73], o momento de Lorentz também é uma expressão relevante para a parte eletromagnética do momento de uma onda eletromagnética em um meio material. Um artigo com os resultados apresentados neste capítulo está em fase de preparação.

Capítulo 6

Conclusões

“Fico contente em pensar que algumas contradições continuarão contraditórias, alguns problemas nunca serão solucionados pelo equipamento do córtex cerebral humano e algumas coisas são indefinidamente não passíveis de conhecimento. Se o universo se revelar finito ou infinito, qualquer das descobertas será igualmente paralisante e impenetrável para mim. E, embora tenha conhecido muitas pessoas mais sábias e mais inteligentes do que eu, não conheço ninguém que seja sábio e inteligente o bastante para dizer o contrário.” Christopher Hitchens [112].

No capítulo 2 desta tese, apresentamos o paradoxo de Mansuripur, definimos e explicamos o conceito de momento oculto, argumentamos sobre a relação deste com a Lei de Força de Lorentz e mostramos a importância do momento oculto para resolução do paradoxo de Mansuripur e, por conseguinte, para que a Lei de Força de Lorentz seja compatível com um dos princípios fundamentais da relatividade especial, que afirma que as leis da Física se aplicam em todos sistemas referenciais inerciais. Além disso, mostramos a importância da existência do momento oculto para a validade do Teorema do Centro de Energia.

No capítulo 3, usamos a Teoria de Perturbação com objetivo de calcular o momento oculto do átomo de hidrogênio na presença de um campo elétrico externo quando o momento de dipolo magnético deste é devido exclusivamente ao momento angular orbital do elétron. Usamos dois métodos distintos para calcular o momento oculto do átomo de hidrogênio e obtivemos os mesmos resultados, evidenciando assim a existência de momento oculto no sistema e a consequente validade da Lei de Força de Lorentz em sistemas quânticos. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na referência [25].

Capítulo 6. Conclusões

No capítulo 4, fizemos uma breve revisão de alguns dos argumentos teóricos e resultados de experimentos que foram propostos e/ou realizados com o intuito de resolver o debate Abraham-Minkowski, que tem em seu cerne a questão sobre qual é a expressão correta para a densidade de momento de uma onda eletromagnética quando ela penetra em um meio material linear (como a água, o plástico ou o vidro). A conclusão eventual [36] deste dilema é que a densidade de momento da luz não está plenamente descrita se não considerarmos a densidade de momento material no qual ela está imersa. Isto posto, qualquer formulação que considerar somente a parte eletromagnética do sistema é incompleta. Em suma, há várias maneiras diferentes de definir as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia das ondas eletromagnéticas quando estas estão submersas em um meio material. Para uma descrição completa do sistema, além das grandezas associadas à luz, não podemos nos esquecer de levar em conta as densidades de energia, de momento e do fluxo de energia do material. A divisão entre os valores das grandezas físicas associadas às duas partes que formam o sistema, a parte eletromagnética e a parte material, é sempre arbitrária, porém, se levarmos em conta corretamente todos os termos, todas as formulações levam às mesmas previsões experimentais.

Finalmente, no capítulo 5, mostramos que o momento de Abraham ($(1/c^2) \int_{\tau} \vec{E} \times \vec{H} d\tau$) é a parte eletromagnética do momento cinético da onda quando o meio material é constituído de dipolos elétricos decorrentes de cargas elétricas de sinais opostos e separadas e por dipolos magnéticos resultantes de cargas magnéticas (fictícias) de sinais opostos e separadas, e que o momento de Minkowski ($\int_{\tau} \vec{D} \times \vec{B} d\tau$) é a parte eletromagnética do momento canônico da onda quando o meio material é formado por dipolos elétricos originários de correntes magnéticas (fictícias) e por dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas. Também constatamos que o momento de Lorentz ($\epsilon_0 \int_{\tau} \vec{E} \times \vec{B} d\tau$) é a parte eletromagnética do momento da onda quando o meio material é constituído por um conjunto de partículas que possuem dipolos elétricos oriundos de cargas elétricas e por dipolos magnéticos resultantes de correntes elétricas. Em contraste com momentos de Abraham e de Minkowski, o momento de Lorentz é conciliável com um modelo para o meio material que é real, ou seja, que existe na natureza. Com tudo isso em mente, concluímos que o momento de Lorentz também é uma expressão relevante para a parte eletromagnética do momento de uma onda eletromagnética em um meio material, além da expressão de Abraham, associada ao momento cinético, e a de Minkowski, associada ao momento canônico. Um artigo com os resultados apresentados neste capítulo está em fase de preparação.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Page, “*Como me Tornei Estúpido*”, Rocco (2005).
- [2] C. Hitchens, “*Cartas a um Jovem Contestador*”, Companhia das Letras (2006).
- [3] R. Dawkins, “*Desvendando o Arco-íris*”, Companhia das Letras (2000).
- [4] B. Russell, “*Por que não sou cristão*”, L&PM (2011).
- [5] J. S. Oliveira Filho, R. Rossi Jr. and M. C. Nemes, “*Quantum Properties of a Which-Way Detector*”, Phys. Scripta (Print) **90**, 035105 (2015).
- [6] R. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands “*Lições de Física*”, Bookman (2008).
- [7] W. Shockley and R. P. James, “*‘Try Simplest Cases’ Discovery of ‘Hidden Momentum’ Forces on ‘Magnetic Currents’*”, Phys. Rev. Lett. **18**, 876-879 (1967).
- [8] W. H. Furry, “*Examples of Momentum Distributions in the Electromagnetic Field and in Matter*”, Am. J. Phys. **37** 621-635 (1969).
- [9] M. G. Calkin, “*Linear Momentum of the Source of a Static Electromagnetic Field*”, Am. J. Phys. **39** 513-516, (1971).
- [10] V. Namias, “*Electrodynamics of moving dipoles: The case of missing torque*”, Am. J. Phys. **57** 171-177, (1989).
- [11] L. Vaidman, “*Torque and force on a magnetic dipole*”, Am. J. Phys. **58** (10), (1990).
- [12] D. J. Griffiths, “*Dipoles at rest*”, Am. J. Phys. **60** (11), 979-987 (1992).
- [13] V. Hnizdo, “*Hidden Momentum and the Force on a Magnetic Dipole*”, Magnetic and Electrical Separation **3**, 259-265, (1992).
- [14] E. Comay, “*Exposing ‘hidden momentum’*”, Am. J. Phys. **64**, 1028-1034 (1996).
- [15] V. Hnizdo, “*Hidden momentum of a relativistic fluid carrying current in an external electric field*”, Am. J. Phys. **65** 92-94 (1997).

7. Referências Bibliográficas

- [16] V. Hnizdo, “*Hidden momentum and the electromagnetic mass of a charge an current carrying body*”, Am. J. Phys. **65** 55-65 (1997).
- [17] D. J. Griffiths, “*Introduction to Electrodynamics*”, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River (1999).
- [18] R. Bjorkquist, “*Hidden Momentum*”, A Thesis Presented to The Division of Mathematics and Natural Sciences Reed College, (2009).
- [19] D. Babson, S. P. Reynolds, R. Bjorkquist and D. J. Griffiths, “*Hidden momentum, field momentum, and electromagnetic impulse*”, Am. J. Phys. **77** (9), 826-833 (2009).
- [20] D. J. Griffiths, “*Resource Letter EM-1: Electromagnetism Momentum*”, Am. J. Phys. **80** (1), 7-18 (2011).
- [21] A. Zangwill, “*Modern electrodynamics*”, Cambridge University Press, Georgia (2012).
- [22] V. Hnizdo, “*Magnetic dipole moment of a moving electric dipole*”, Am. J. Phys. **80**, 645-647 (2012).
- [23] K. T. McDonald, www.physics.princeton.edu/mcdonald/examples/penfield.pdf.
- [24] D. J. Griffiths and V. Hnizdo, “*The torque on a dipole in uniform motion*”, Am. J. Phys. **82**, 251-254 (2014).
- [25] J. S. Oliveira Filho and P. L. Saldanha, “*Hidden momentum in a hydrogen atom and the Lorentz-force law*”, Phys. Rev. A **92**, 052107 (2015).
- [26] M. Mansuripur, “*Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation*”, Phys. Rev. Lett. **108**, 193901 (2012).
- [27] P. L. Saldanha, “*Comment on 'Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation'*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 089403 (2013).
- [28] H. Minkowski, “*Die Grundgleichungen für die electromagnetischen vorgänge in bewegten körpern*”, Nachr. Ges. Wiss. Goettingen, 53-111 (1908). Reimpresso em Math. Ann. **68**, 472-525 (1910).
- [29] M. Abraham, “*Zur Elektrodynamik Bewegter Körper*”, Rend. Circ. Mat. Palermo **28**, 1-28 (1909).

7. Referências Bibliográficas

- [30] M. Abraham, “*Sull ‘Elettrodinamica di Minkowski’*”, Rend. Circ. Mat. Palermo **30**, 33-46 (1910).
- [31] M. Abraham, “*Zur Frage der Symmetrie des electromagnetischen Spannungstensors*”, Z. Phys. 15, 537-544 (1914).
- [32] R. V. Jones, “*Radiation pressure in a refraction medium*”, Nature (London) **167**, 439-440 (1951).
- [33] N. L. Balazs, “*The Energy-Momentum Tensor of the Electromagnetic Field inside Matter*”, Phys. Rev. **91**, 408-411 (1953).
- [34] R. V. Jones and J. C. S. Richards, “*Radiation pressure in a refraction medium*”, Proc. R. Soc. London Ser. A **221**, 480-498 (1954).
- [35] O. R. Frisch, “*Take a photon...*”, Contemp. Phys. **7**, 45-53 (1965).
- [36] P. Penfield and H. A. Hauss, “*Electrodynamics of Moving Media*”, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts (1967).
- [37] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, “*Radiation Pressure on a Free Liquid Surface*”, Phys. Rev. Lett. **30**, 139-142 (1973).
- [38] M. G. Burt and R. Peierls, “*The momentum of a light wave in a refracting medium*”, Proc. R. Soc. London Ser. A **333**, 149-156 (1973).
- [39] J. P. Gordon, “*Radiation Forces and Momenta in Dielectric Media*”, Phys. Rev. A **8**, 14-21 (1973).
- [40] G. B. Walker and D. G. Lahoz, “*Experimental observation of Abraham force in a dielectric*”, Nature **253**, 339-340 (1975).
- [41] G. B. Walker, D. G. Lahoz and G. Walker “*Measurement of the Abraham Force in a Barium Titanate Specimen*”, Can. J. Phys. **53**, 2577-2586 (1975).
- [42] W. Israel, “*Relativistic effects in dielectrics: an experimental decision between Abraham and Minkowski*”, Phys. Lett. **67B**, 125-128 (1977).
- [43] R. V. Jones and B. Leslie, “*The measurement of optical radiation pressure in dispersive media*”, Proc. R. Soc. London Ser. A **360**, 347-363 (1978).
- [44] I. Brevik, “*Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor*”, Phys. Rep. **52**, 133-201 (1979).

7. Referências Bibliográficas

- [45] H. M. Lai, “*Electromagnetic momentum in static fields and the Abraham-Minkowski controversy*”, Am. J. Phys. **48**, 658-659 (1980).
- [46] I. Brevik, “*Phenomenological photons and the uncertainty principle*”, Eur. J. Phys. **2**, 37-43 (1981).
- [47] D. F. Nelson, “*Momentum, pseudomomentum, and wave momentum: Toward resolving the Minkowski-Abraham controversy*”, Phys. Rev. A **44**, 3985-3996 (1991).
- [48] V. E. Lembessis, M. Babiker, C. Baxter, and R. Loudon, “*Theory of radiation forces and momenta for mobile atoms in light fields*”, Phys. Rev. A **48**, 1594-1603 (1993).
- [49] R. Loudon, “*Theory of the radiation pressure on dielectric surfaces*”, J. Mod. Optics **49**, 821-838 (2002).
- [50] Yu. N. Obukhov and F. W. Hehl, “*Electromagnetic energy-momentum and forces in matter*”, Phys. Lett. A **311**, 277-284 (2003).
- [51] R. Loudon, “*Radiation pressure and momentum in dielectrics*”, Fortschr. Phys. **52**, 1140 (2004).
- [52] M. Mansuripur, “*Radiation pressure and the linear momentum of the electromagnetic field*”, Opt. Express **12**, 5375-5401 (2004).
- [53] G. K. Campbell, A. E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E. W. Streed, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, “*Photon Recoil Momentum in Dispersive Media*”, Phys. Rev. Lett. **94**, 170403 (2005).
- [54] M. Mansuripur, “*Radiation pressure and the linear momentum of light in dispersive dielectric media*”, Opt. Express **13**, 2245-2250 (2005).
- [55] U. Leonhardt, “*Optics: Momentum in an uncertain light*”, Nature **444**, 823-824 (2006).
- [56] U. Leonhardt, “*Energy-momentum balance in quantum dielectric*”, Phys. Rev. A **73**, 032108, (2006).
- [57] M. Buchanan, “*Minkowski, Abraham and the photon momentum*”, Nature physics **3**, 73 (2007).
- [58] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg and H. Rubinsztein-Dunlop, “*Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media*”, Rev. Mod. Phys. **79**, 1197-1216 (2007).

7. Referências Bibliográficas

- [59] M. Mansuripur, “*Radiation pressure and the linear momentum of the electromagnetic field in magnetic media*”, Opt. Express **15**, 13502-13517 (2007).
- [60] M. Mansuripur, “*Electromagnetic stress tensor in ponderable media*”, Opt. Express **16**, 5193-5198 (2008).
- [61] M. J. Padgett, “*On diffraction within a dielectric medium as an example of the Minkowski formulation of optical momentum*”, Opt. Express **16**, 25, 20864-20868 (2008).
- [62] W. She, J. Yu and R. Feng, “*Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light*”, Phys. Rev. Lett. **101**, 243601 (2008).
- [63] I. Brevik, “*Comment on ‘Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light’*”, Phys. Rev. Lett. **103**, 219301 (2009).
- [64] W. She, J. Yu and R. Feng, “*Reply to Comment by I. Brevik*”, Phys. Rev. Lett. **103**, 219302 (2009).
- [65] M. Mansuripur, “*Comment on ‘Observation of a Push Force on the End Face of a Nanometer Silica Filament Exerted by Outgoing Light’*”, Phys. Rev. Lett. **103**, 219301 (2009).
- [66] E. A. Hinds and S. Barnett, “*Momentum Exchange between Light and a Single Atom: Abraham or Minkowski?*”, Phys. Rev. Lett. **102**, 050403 (2009).
- [67] S. M. Barnett and R. Loudon, “*The enigma of optical momentum in a medium*”, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 927-939 (2010).
- [68] P. W. Milonni and R. W. Boyd, “*Momentum of Light in a Dielectric Medium*”, Adv. Opt. Phot. **2**, 519-553 (2010).
- [69] A. Hirose, “*Radiation pressure on a dielectric surface*”, Can. J. Phys. **88**, 247-252 (2010).
- [70] P. L. Saldanha, “*Interação da Luz com Meios Contínuos: Abordagens Clássica e Quântica*”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG (2010).
- [71] P. L. Saldanha, “*Division of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts*”, Opt. Express **18**, 2258-2268 (2010).

7. Referências Bibliográficas

- [72] C. Baxter and R. Loudon, “*Radiation pressure and the photon momentum in dielectrics*”, J. Mod. Opt. **57**, 10, 830-842 (2010).
- [73] S. M. Barnett, “*Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma*”, Phys. Rev. Lett. **104**, 070401 (2010).
- [74] D. H. Bradshaw, Z. Shi, R. W. Boyd and P. W. Milonni, “*Electromagnetic momenta and forces in dispersive media*”, Opt. Commun. **283**, 650-656 (2010).
- [75] B. A. Kemp and T. M. Grzegorzczuk, “*The observable pressure of light in dielectric fluids*”, Opt. Lett. **36**, 493-495 (2011).
- [76] B. A. Kemp, “*Resolution of the Abraham-Minkowski debate: Implications for the electromagnetic wave theory of light in matter*”, Journal of Applied Physics **109**, 111101 (2011).
- [77] P. L. Saldanha, “*Division of the energy and of the momentum of electromagnetic waves in linear media into electromagnetic and material parts*”, Opt. Express **18**, 2653-2657 (2011).
- [78] Z. Wang, P. Wang and Y. Xu, “*Crucial experiment to resolve Abraham-Minkowski controversy*”, Optik **122**, 1994-1996 (2011).
- [79] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg and H. Rubinsztein-Dunlop, “*Optical tweezers and paradoxes in electromagnetism*”, J. Opt. **13**, 044017 (2011).
- [80] X. Liu and G. Zhang, “*Equivalence of the Abraham momentum and the Minkowski momentum of photons in media*”, Opt. Commun. **284**, 4546-4549 (2011).
- [81] I. Brevik and S. A. Ellingsen, “*Detection of the Abraham force with a succession of short optical pulses*”, Phys. Rev. A **86**, 025801 (2012).
- [82] M. E. Crenshaw, “*Electromagnetic Momentum and Radiation Pressure derived from the Fresnel Relations*”, Opt. Express **15**, 714-725 (2015).
- [83] L. Zhang, W. She, N. Peng and U. Leonhardt, “*Experimental evidence for Abraham pressure of light*”, New J. of Phys. **17**, 053035 (2015).
- [84] K. T. McDonald, www.physics.princeton.edu/mcdonald/examples/ambib.pdf.
- [85] K. T. McDonald, <http://puhep1.princeton.edu/kirkmcd/examples/abraham.pdf>.
- [86] R. Corrêa and P. L. Saldanha, “*Photon reflection by a quantum mirror: A wavefunction approach*”, Phys. Rev. A **93**, 023803 (2016).

7. Referências Bibliográficas

- [87] S. Singh, “*Big Bang*”, Record (2006).
- [88] K. D. Machado, “*Eletromagnetismo*”, 2^a ed., Vol. 2, Editora Todapalavra, Paraná (2013).
- [89] A. Cho, “*Textbook Electrodynamics May Contradict Relativity*”, Science **336**, 404 (2012).
- [90] D. A. T. Vanzella, “*Comment on 'Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation'*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 089401-1 (2013).
- [91] M. Khorrami, “*Comment on 'Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation'*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 089404-1 (2013).
- [92] S. M. Barnett, “*Comment on 'Trouble with the Lorentz Law of Force: Incompatibility with Special Relativity and Momentum Conservation'*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 089402-1 (2013).
- [93] D. J. Cross, “*Resolution of the Mansuripur Paradox*”, arXiv: 1205.5451.
- [94] D. J. Griffiths, “*Mansuripur's paradox*”, Am. J. Phys. **81**, 570 (2013).
- [95] K. T. McDonald, <http://www.physics.princeton.edu/mcdonald/examples/mansuripur.pdf>.
- [96] J. J. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, 3rd ed., Wiley, New York (1999).
- [97] D. H. McIntyre, “*Quantum Mechanics: A Paradigms Approach*”, Person Addison-Wesley, San Francisco, (2012).
- [98] D. J. Griffiths, “*Introduction to Quantum Mechanics*”, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River (1999).
- [99] B. H. Bransden and C. J. Joachain, “*Quantum Mechanics*”, 2nd ed., Prentice Hall, London (1999).
- [100] D. R. Bes, “*Quantum Mechanics: A Modern and Concise Introductory Course*”, 2nd ed., Prentice Hall, Springer, Buenos Aires (2007).
- [101] H. J. W. Müller-kirsten, “*Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*”, British Library, Danvers (2006).

7. Referências Bibliográficas

- [102] E. M. Cioran, “*Silogismos da Amargura*”, Rocco (2011).
- [103] G. Baym, “*Lectures On Quantum Mechanics*”, Westview Press, New York (1968).
- [104] A. Cancian, “*Ateísmo e Liberdade: Uma Introdução ao Livre-Pensamento*”, Editora ateus.net (2001).
- [105] M. Shermer, “*Por que as Pessoas Acreditam em Coisas Estranhas*”, JSN (2011).
- [106] J. H. Poynting, “*Radiation Pressure*”, Phil. Mag. J. Sci. **9**, 393-406 (1905).
- [107] E. Cioran, “*Nos Cumes do Desespero*”, Hedra (2012).
- [108] A. S. Goldhaber and W. P. Trower, “*Resource Letter MM-1: Magnetic monopoles*”, Am. J. Phys. **58**, 429-439, (1990).
- [109] I. Adawi, “*Magnetic charges in special relativity*”, Am. J. Phys. **59** (5), 410-411 (1991).
- [110] W. B. Zeleny, “*Symmetry in electrodynamics: A classical approach to magnetic monopoles*”, Am. J. Phys. **59** (5), 412-415 (1991).
- [111] W. Rindler, “*Relativity and electromagnetism: The force on a magnetic monopole*”, Am. J. Phys. **57** (11), 993-994 (1989).
- [112] C. Hitchens, “*deus não é Grande*”, Ediouro (2007).
- [113] B. Russell, “*História do Pensamento Ocidental - A Aventura dos Pré-Socráticos a Wittgenstein*”, Nacional (1969).
- [114] T. T. Taylor, “*Electrodynamics Paradox and the Center-of-Mass Principle*”, Phys. Rev. **137**, 2B, 467-471 (2015).

Apêndice A - Prova do Teorema do Centro de Energia

“Não é função de uma universidade encher a cabeça dos estudantes com o maior número possível de fatos. Sua verdadeira tarefa é inculcar neles hábitos de exame crítico e a compreensão de cânones e critérios readerentes a todas as matérias. [...] Atualmente, é razoável pensar que qualquer pessoa que saiba ler poderá recolher informações numa biblioteca. É cada vez menos necessário um professor para transmitir mera informação. E por isso tanto maior é o mérito dos filósofos gregos, por terem compreendido como se deveria realizar uma genuína educação. O papel do professor é de orientar, de levar o aluno a ver por si mesmo, não o de pregar ideologias.” Bertrand Russell [113].

O Teorema do Centro de Energia afirma que “se o centro de energia de um sistema isolado e localizado encontra-se em repouso, então o momento total do sistema deve ser nulo” [18, 114]. Iremos provar essa afirmação neste apêndice.

O centro de energia (\vec{R}) de um sistema é definido como

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{U} \int_{\tau} u \vec{r} d\tau, \quad (\text{A.1})$$

em que u é a densidade de energia, $U (= \int_{\tau} u d\tau)$ é a energia total e τ é o volume total do sistema. Assim sendo, usando o fato de que energia total do sistema é constante (pois ele é fechado), e a integração é feita sobre todo o espaço, a velocidade do centro de energia deste pode ser escrita como

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{U} \frac{d}{dt} \left[\int_{\tau} u \vec{r} d\tau \right] = \frac{1}{U} \int_{\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \vec{r} d\tau. \quad (\text{A.2})$$

A densidade de energia e a densidade de momento linear (\vec{g}) do sistema estão relacionadas a partir da seguinte equação [17, 21, 96]

Apêndices

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Isolando $\partial u/\partial t$ na equação (A.3), substituindo o resultado na equação (A.2) e usando a identidade vetorial $\vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{g}) = x_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) + g_i$, com $i = x, y, z$, obtemos que

$$V_i = -\frac{c^2}{U} \left\{ \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{g}) d\tau - \int_{\tau} g_i d\tau \right\} = -\frac{c^2}{U} \left\{ \oint_A (x_i \vec{g}) \cdot d\vec{A} - \int_{\tau} g_i d\tau \right\} = \frac{c^2}{U} P_i, \quad (\text{A.4})$$

em que $\oint_A (x_i \vec{g}) \cdot d\vec{A} = 0$ (pois o sistema é localizado) e $\int_{\tau} \vec{g} d\tau \equiv \vec{P}$, em que \vec{P} é o momento total do sistema. Dessa forma, chegamos à expressão final:

$$\vec{V} = \frac{c^2}{U} \vec{P}, \quad (\text{A.5})$$

que relaciona a velocidade (\vec{V}) do centro de energia do sistema com o momento total (\vec{P}) deste. Perceba que se o centro de energia do sistema estiver em repouso ($\vec{V} = 0$), o momento total deste deve ser nulo ($\vec{P} = 0$). Ademais, se a velocidade do centro de energia do sistema for constante, o momento total deste também o será; de modo inverso, quando o momento total do sistema é conservado, a velocidade do centro de energia deste deve ser constante.

Apêndice B - Momento Oculto Contido em um Sistema Formado por Correntes Magnéticas Estacionárias

“Em geral, procuramos uma nova lei pelo seguinte processo: primeiro fazemos uma suposição. Não ria, este é o passo mais importante. Então você calcula as consequências. Compara as consequências com a experiência. Se ela divergir da experiência, a suposição estava errada. Essa declaração simples é a chave da ciência. Não importa que a sua suposição seja bela, ou que você seja muito inteligente, ou seja lá o que for. Se divergir da experiência, você está errado. E isso é tudo.” Richard Feynman [6].

Considere um circuito retangular fechado transportando uma corrente magnética estacionária. Após a aplicação de um campo magnético uniforme e constante, $\vec{B} = B\hat{x}$, as partículas serão aceleradas (desaceleradas) no segmento do lado esquerdo (direito) do circuito (veja a figura 6.1). Assim, como a corrente do circuito ($I_m = \lambda_m V$, em que I_m é a corrente magnética do circuito, λ_m é a densidade linear de carga magnética e V é a velocidade das partículas que constituem a corrente magnética) é estacionária, ou seja, não há partículas carregadas se acumulando em nenhum lugar do circuito, concluímos que $\lambda_{m1}V_1 = \lambda_{m2}V_2 = \lambda_{m3}V_3 = \lambda_{m4}V_4$. Dessa forma, nos segmentos do circuito em que as partículas se movem mais lentamente (rapidamente), a densidade de partículas deve ser maior (menor), pois $I_m = \lambda_m V_m$. Pergunta: qual é o momento linear clássico total de todas as cargas magnéticas do circuito representado pela figura?

Supondo que todas as partículas têm a mesma massa (m_m) e a mesma carga (q_m), o momento linear clássico total é dado pela soma dos momentos lineares clássicos de todas as partículas presentes no circuito:

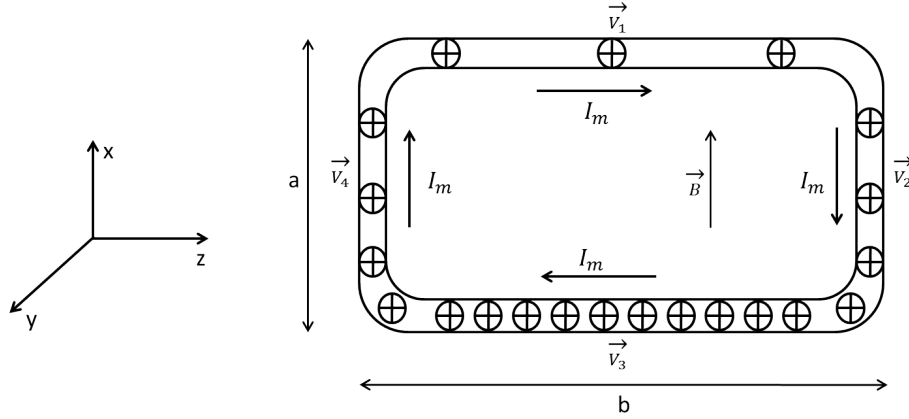


Figura 6.1: Circuito fechado percorrido por uma corrente magnética estacionária I_m , formada por um conjunto de partículas não-interagentes com cargas magnéticas positivas, na presença de um campo magnético externo constante e uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$.

$$\vec{p}_{cl} = m_m \left[(N_1 V_1 - N_3 V_3) \hat{z} + \hat{x} \int_0^a \left(\frac{\lambda_{m4}(x)}{q_m} V_4(x) - \frac{\lambda_{m2}(x)}{q_m} V_2(x) \right) dx \right], \quad (\text{A.6})$$

em que N_i é o número total de partículas no segmento i e V_i é a velocidade de uma partícula no segmento i , com $i = 1, 2, 3$ e 4 . Note que no segmento 2 (4), o número de partículas depende da posição x , pois elas estão sendo desaceleradas (aceleradas). Tendo em vista que $\lambda_{mi} V_i = \lambda_{mj} V_j$, temos que $N_1 V_1 = N_3 V_3$ e $\lambda_{m2}(x) V_2(x) = \lambda_{m4}(x) V_4(x) \forall x \in [0, a]$. Assim, substituindo as expressões anteriores na equação (A.6), obtemos que $\vec{p}_{cl} = 0$. Este resultado faz todo sentido, pois o circuito não está em movimento! Mas... e se agora quisermos calcular o momento linear relativístico total de todas as partículas contidas do circuito?

Sabemos que o momento linear relativístico de uma partícula de massa m_m é dado por $\vec{p}_{rel} = m_m \vec{V} \gamma$, com $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, em que \vec{V} é a velocidade da partícula em relação a algum referencial inercial e c é a velocidade da luz no vácuo. Isto posto, o momento linear relativístico total do circuito é dado por

$$\begin{aligned} \vec{p}_{rel} &= m_m [(N_1 V_1 \gamma_1 - N_3 V_3 \gamma_3) \hat{z} + \hat{x} \int_0^a \left(\frac{\lambda_{m4}(x)}{q_m} V_4(x) \gamma_4(x) - \frac{\lambda_{m2}(x)}{q_m} V_2(x) \gamma_2(x) \right) dx] \\ &= m_m (N_1 V_1 \gamma_1 - N_3 V_3 \gamma_3) \hat{z}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

em que $\gamma_i = (1 - V_i^2/c^2)^{-1/2}$, com $i = 1, 2, 3$ e 4 . Como $\lambda_{m2}(x) V_2(x) = \lambda_{m4}(x) V_4(x)$ e $\gamma_2(x) = \gamma_4(x)$, o segundo termo da direita da equação (A.7) é nulo. Entretanto, apesar de $N_1 V_1 = N_3 V_3$, sabemos que $\gamma_1 > \gamma_3$, visto que a velocidade das partículas no

Apêndices

segmento 1 é maior do que a do segmento 3. Portanto, $\vec{p}_{rel} = m_m(N_1V_1\gamma_1 - N_3V_3\gamma_3)\hat{z} = m_mN_1V_1(\gamma_1 - \gamma_3)\hat{z}$. Uma vez que $N_1V_1 = \lambda_{m1}(b/q_m)V_1 = I_m(b/q_m)$, o momento linear relativístico total do circuito pode ser escrito como

$$\vec{p}_{rel} = \frac{m_m I_m b}{q_m} (\gamma_1 - \gamma_3) \hat{z}, \quad (\text{A.8})$$

em que I_m é a corrente magnética total do circuito.

Quando uma partícula se desloca através de toda a extensão do segmento 4, a variação da energia cinética relativística da mesma ($\Delta K = K_f - K_i = m_m c^2(\gamma_1 - \gamma_3)$) é igual ao trabalho realizado pela força magnética ($\vec{F}_m = q_m \vec{B}$)

$$m_m c^2(\gamma_1 - \gamma_3) = \int_0^a q_m \vec{B} \cdot \hat{x} dx = q_m B a. \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo a equação (A.9) para $\gamma_1 - \gamma_3$ e substituindo o resultado na equação (A.8), obtemos que

$$\vec{p}_{rel} = \frac{I_m a b B}{c^2} \hat{z}. \quad (\text{A.10})$$

Tendo em mente que o momento de dipolo elétrico do circuito é definido como $\vec{p}_0 = (I_m a b / c^2)(\hat{y})$ ¹, a expressão para o momento linear relativístico total do circuito pode ser escrita como

$$\vec{p}_{rel} = \vec{p}_{oc} = -\vec{p}_0 \times \vec{B}. \quad (\text{A.11})$$

Para generalizar a equação (A.11), repare que a energia de uma partícula no início (final) do segmento 4 é $W_3 = m_m c^2(\gamma_3 - 1) + q_m \Phi_{m3}$ ($W_1 = m_m c^2(\gamma_1 - 1) + q_m \Phi_{m1}$), em que $m_m c^2(\gamma_3 - 1)$ ($m_m c^2(\gamma_1 - 1)$) é a energia cinética da partícula no início (final) do segmento 4 e $q_m \Phi_{m3}$ ($q_m \Phi_{m1}$) é a energia potencial da partícula no início (final) do segmento 4. Uma vez que a energia total da partícula não varia ao longo do circuito, $W_3 = W_1 \Rightarrow (\gamma_1 - \gamma_3)m_m c^2 = -q_m(\Phi_{m1} - \Phi_{m3})$. Substituindo essa última expressão na equação (A.8), obtemos que

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{I}{c^2} b (\Phi_{m1} - \Phi_{m3}) \hat{z} = -\frac{I_m}{c^2} \oint \Phi_m d\vec{l}, \quad (\text{A.12})$$

em que a integral deve ser realizada sobre o circuito fechado e $d\vec{l}$ é um comprimento infinitesimal na direção e no sentido da corrente I_m .

Por fim, as expressões para o momento oculto (\vec{p}_{oc}) no caso de correntes magnéticas superficiais e volumétricas são dadas, respectivamente, por

¹Nesse caso, o momento de dipolo elétrico do sistema é gerado por um circuito fechado transportando corrente magnética.

Apêndices

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi_m \vec{K}_m dA \quad (\text{A.13})$$

e

$$\vec{p}_{oc} = -\frac{1}{c^2} \int \Phi_m \vec{J}_m d\tau, \quad (\text{A.14})$$

em que \vec{K}_m e \vec{J}_m são, respectivamente, a densidades de corrente magnética superficial e volumétrica.