UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

FLÁVIA CHRISTIANE DO NASCIMENTO REGIS

INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO:
a generalização de padrões

Belo Horizonte
2017

FLÁVIA CHRISTIANE DO NASCIMENTO REGIS

INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO:
a generalização de padrões

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Strictu Sensu* em Educação e Docência, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação e Docência.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki

Área de concentração: Educação Matemática

Belo Horizonte
2017

R337i
T

Regis, Flávia Christiane do Nascimento, 1978-

Introdução do pensamento algébrico: a generalização de padrões / Flávia Christiane do Nascimento Regis. - Belo Horizonte, 2017.
164 f., enc, il..

Dissertação - (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientadora : Teresinha Fumi Kawasaki.
Bibliografia : f. 147-150.
Apêndices: f. 151-164.

1. Educação -- Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino -- Teses. 3. Logica simbolica e matematica -- Estudo e ensino -- Teses. 4. Algebra abstrata -- Estudo e ensino -- Teses. 5. Raciocínio -- Estudo e ensino -- Teses. 6. Reconhecimento de padrões -- Estudo e ensino -- Teses. 7. Professores de matematica -- Formação – Teses
I. Título. II. Kawasaki, Teresinha Fumi, 1960-. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD - 510.07

Catalogação da Fonte: Biblioteca da FaE/UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

Introdução ao pensamento algébrico: A generalização de padrões

FLÁVIA CHRISTIANE DO NASCIMENTO REGIS

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 23 de fevereiro de 2017, pela banca constituída pelos membros:

Teresinha Kawasaki

Prof(a). Dra.Teresinha Fumi Kawasaki - Orientadora
UFMG

Maria Cristina Costa Ferreira

Prof(a). Dra. Maria Cristina Costa Ferreira
ICEX/UFMG

Samira Zaidan

Prof(a). Dra. Samira Zaidan
FaE/UFMG

Belo Horizonte, 23 de fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho ao meu esposo Rômulo, por todo amor, cumplicidade e apoio, e aos meus filhos, Heitor e Olívia, por tornarem meus dias mais felizes.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder sabedoria e discernimento.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em todas as minhas escolhas.

Aos amigos do Promestre Deusdet, Erildo, Rubens e Renata, pelo companheirismo, em especial Erildo e Renata, por me escutar e aconselhar.

À Teresinha, pelas orientações, que sempre me fizeram pensar, e pelo apoio nos momentos de dificuldade.

Aos professores Cristina, Samira e Wagner, pelas leituras e contribuições valiosas.

Aos alunos do 8º B, pela confiança, respeito e colaboração.

Ao professor Marcelo, pelo apoio e colaboração.

À professora Cristiane, por apoiar e acreditar em minha proposta.

À supervisão e direção da escola, por abrirem as portas para a realização da pesquisa.

À Sônia, por administrar minha casa e cuidar da minha família enquanto escrevia este trabalho.

Ao grupo de pesquisa em Teoria da Atividade, pela acolhida e pelos ensinamentos.

Aos meus familiares e amigos, pela torcida e por compreenderem minhas ausências.

RESUMO

Esta pesquisa, de caráter qualitativo, teve como objetivo introduzir o pensamento algébrico em uma turma de 8º ano da rede estadual de ensino de Minas Gerais. Segundo a literatura disponível, não existe uma definição exata do que seja o *pensar algebricamente*. O pensamento algébrico pode ser observado por meio da manifestação de quatro características constituintes: i) observação de regularidades; ii) estabelecimento de relações; iii) modelação; iv) simbolização. Algumas pesquisas da década de 1990 concluíram que um possível caminho para a introdução ao pensamento algébrico na escola seria a partir do trabalho com a generalização de padrões. Com base na Teoria da Objetificação, segundo a qual o conhecimento não é adquirido nem possuído, mas posto em movimento por meio da *Atividade*, desenhamos a Atividade de Generalização de Padrões. Com a cooperação do professor da turma com a qual se realizou o trabalho de campo, fizemos intervenções na Atividade escolar pautadas em tarefas envolvendo padrões visuais, repetitivos e de crescimento, mediadas pelo uso de artefatos e do estímulo à interação social. Durante as intervenções, observamos, a partir de gravações em áudio, vídeo e registro em diário de campo, os processos de objetificação – o modo como alunos e professores recorrem aos artefatos durante os processos de ensino-aprendizagem –, analisando as ações que foram provocadas no seu decurso. Os dados analisados evidenciaram que, por meio do recurso a artefatos como linguagem oral e gestual e uso de materiais, os alunos se engajaram nas tarefas propostas, assumindo posturas investigativas durante a interação com colegas e professores, sendo possível observar, nos episódios analisados, elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Após as análises, desenvolvemos um produto educacional: um kit de provocações matemáticas para o trabalho com o pensamento algébrico, composto de uma caixa com recursos materiais e um guia com tarefas e orientações acerca de como este se torna um artefato mediador de possíveis mudanças na Atividade escolar.

Palavras-chave: pensamento algébrico; generalização de padrões; processos de objetificação; Educação Matemática.

ABSTRACT

This qualitative research aimed to introduce algebraic thinking in an 8^{th} grade classroom of the state education network in Minas Gerais, Brazil. According to the available literature, there is no exact definition of algebraic thinking. Algebraic thinking can be observed through the manifestations of four constituent features: i) observation of regularities; ii) establishment of relationships; iii) modeling; iv) symbolization. Some researches from the 1990s concluded a possible way to introduce algebraic thinking at schools would be through working with the generalization of patterns. Based on the Theory of Objectification, in which knowledge is not acquired or possessed, but set in motion through Activity, we draw the pattern Generalization Activity, and with the cooperation of the teacher of the class with which the field work was conducted, interventions in the school Activity were made. The latter were based on tasks involving actions directed to the observation of visual patterns, repetitive sequences and growth, mediated by the use of artifacts and stimulus to social interaction. During the interventions, we observe, in audio and video recordings, as well as field journaling, the processes of objectification – the ways students and teachers turn to artifacts during the teaching-learning processes –, analyzing the actions provoked during their course. The analysis showed that, through the use of artifacts, such as oral and sign language and materials, students engaged in the tasks proposed, assuming investigative positions, and it was possible to observe, in the analyzed episodes, characterizing aspects of the algebraic thinking. After the analysis, we develop an educational product: a kit of provocations to work with the algebraic thinking, composed of a box with material resources and a guide with tasks and orientations about how this kit becomes a mediator artifact of potential changes in the school Activity.

Keywords: algebraic thinking; generalization of patterns; Objectification Processes, Mathematics Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este texto apresenta os dados, assim como as experiências vivenciadas em uma pesquisa de mestrado profissional – realizada entre março de 2015 e setembro de 2016 –, que teve como objetivo introduzir o pensamento algébrico em uma turma de 8º ano de uma escola da rede estadual de ensino.

Lecionando para o ensino fundamental, em especial para o 8º ano, durante quase toda minha trajetória docente, o trabalho com a álgebra me inquietava, por ser baseado na manipulação de expressões algébricas de maneira mecânica e sem significado, situação que vivenciei não apenas como professora, mas também como aluna ao longo de toda a minha formação.

Ao ingressar como docente na formação de professores, surpreendi-me com uma proposta de discutir o pensamento algébrico durante a disciplina intitulada "Prática de Ensino". O pensamento algébrico se caracteriza por um modo de pensar analiticamente acerca de indeterminações (LINS; GIMENEZ, 1997); (RADFORD, 2010a) por meio de quatro elementos: i) percepção de regularidades; ii) estabelecimento de relações; iii) modelação e iv) simbolização.

Até então, em minha formação (inicial e continuada) em Matemática, não havia tido contato com propostas em que o ensino de álgebra não fosse baseado no domínio da linguagem algébrica. Ao elaborar a ementa da disciplina referida, a leitura de alguns autores, como Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), incutiu em mim a curiosidade em pesquisar sobre o ensino de álgebra, em especial sobre o pensamento algébrico.

Identifiquei-me com a perspectiva de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), ao explicarem que, historicamente no ensino de álgebra, há uma relação de subordinação entre pensamento e linguagem algébrica. Lins e Gimenez (1997), por seu turno, afirmam que há uma cultura enraizada na qual, ao se falar em ensino de álgebra, há uma relação direta com conteúdos, em que o transformismo algébrico (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) assume papel de destaque. De maneira análoga, estes destacam que há diversas concepções acerca da álgebra e das finalidades de seu ensino que influenciam diretamente o seu papel, que enfatiza a aquisição da linguagem e o domínio de técnicas operatórias.

Usiskin (1995) corrobora as ideias dos autores citados ao afirmar que o ensino de álgebra está diretamente relacionado à concepção que se tem sobre o que a define. Nesse sentido, ele atribui a ela quatro papeis: (i) generalizadora da aritmética; (ii) meio para resolver problemas; (iii) forma de estabelecer relações entre grandezas variáveis e (iv) estudo de estruturas matemáticas. Na linha de Usiskin, os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (BRASIL, 1998), assim como Ponte (2006), afirmam que o desenvolvimento do pensamento algébrico será efetivo se as diferentes concepções de álgebra forem trabalhadas ao longo de toda a trajetória escolar do aluno.

O trabalho com generalização de padrões é apontado como um dos caminhos para introdução do pensamento algébrico (RADFORD, 2011b); (VALE; PIMENTEL, 2011). Durante o processo de generalização, é possível ter contato com elementos caracterizadores do pensamento algébrico, sendo possível atribuir sentido ao símbolo (VALE; PIMENTEL, 2011), além do exercício da comunicação e de atitudes exploratórias e investigativas.

Fundamentadas[1] no conceito de Atividade[2] enquanto um conjunto de ações intencionais dirigidas a um objeto, concebemos artefatos e planejamos intervenções na Atividade escolar, delineando assim a Atividade de Generalização de Padrões, que tem como objeto o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse sentido, buscamos responder à seguinte questão de investigação: *de que forma o uso de artefatos influencia as ações dos sujeitos envolvidos nas intervenções?*

Apresento em seguida, em 5 capítulos, o trabalho desenvolvido: no primeiro, apresento as reflexões acerca dos elementos que motivaram esta pesquisa; no segundo, os pressupostos teóricos utilizados para delinear nossa proposta de intervenção; no terceiro, descrevo a metodologia utilizada na elaboração das intervenções realizadas, o contexto e os participantes da pesquisa; no quarto, detalho e analiso os processos por meio dos quais o pensamento algébrico começou a se tornar uma possibilidade para os alunos, com base nas ideias de Radford (2008, 2010, 2011, 2015); e no quinto e último capítulo, trago o processo de desenvolvimento de um kit de provocações matemáticas, produto educacional resultante desta pesquisa.

[1] Neste texto, o uso da primeira pessoal do singular – “eu” – referir-se-á à autora do texto e o uso da primeira pessoa do plural – “nós” – à autora e a professora orientadora da pesquisa.

[2] “Atividade”, com inicial maiúscula, (e não “atividade”) fará aqui referência à Teoria da Atividade. Para melhor entendimento, ver Capítulo 2, “Pressupostos teóricos”.

CAPÍTULO 1

Motivação para a pesquisa: os desafios de aprender e ensinar álgebra

Neste capítulo, apresento um pouco de minha trajetória como estudante e professora, descrevendo um pouco da "minha história com a álgebra" e as reflexões acerca da minha prática que motivaram esta pesquisa.

1.1 ÁLGEBRA: MINHAS EXPERIÊNCIAS COMO ESTUDANTE

Minha experiência com a álgebra começou ainda como estudante, no 8º ano (antiga 7ª série) do ensino fundamental. Ao estudar pela primeira vez polinômios, produtos notáveis e fatoração, enfrentei muitas dificuldades com essa nova linguagem nas aulas de matemática. Até então, era uma aluna com bom desempenho na disciplina e estas dificuldades causaram em mim um certo choque. Apesar disso, neste ano, fui aprovada em matemática, mas apenas com a média necessária.

O fato me causou certo estranhamento, pois, até então, era uma aluna que tinha domínio dos conceitos matemáticos. Sabia efetuar com astúcia as operações e resolver problemas relacionados com números e sempre tirava boas notas. Quando me deparei com o que Lins e Gimenez (1997) denominam "cálculo com letras", achei muito diferente do que estava acostumada a fazer com números. Não conseguia ver sentido naquela proposta e, hoje, vejo que os mesmos autores citam esse momento da introdução da álgebra escolar como "o mais severo corte (momento de seleção) da educação matemática escolar" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 9).

Porém, na época, para ser aprovada, eu me dediquei e fiz muitos exercícios que envolviam o dito cálculo com letras. A partir de então, na minha visão de aluna de 8º ano e posteriormente de ensino médio, a aula de matemática se resumia a assistir às demonstrações, acompanhar exemplos ou o passo a passo da resolução de problemas e fazer muitos exercícios para fixar o conteúdo, sempre com muitas "letras".

Foi nessa cultura que fui aprendendo a gostar da "nova" matemática e retomar o bom desempenho de antes, o que posteriormente me levou a ingressar no curso de licenciatura em Matemática da PUC-MG. O que pensava exatamente era "sou boa em cálculos" (inclusive com "letras") e, portanto, ser professora de matemática foi a profissão que julguei ser para mim a mais adequada.

Como aluna da graduação, no entanto, percebi o quanto essa cultura de ser "boa em matemática" estava relacionada à habilidade de lidar com os conteúdos, principalmente com os cálculos, e não necessariamente com a compreensão dos primeiros. Embora estivesse em um curso de formação inicial de professores de matemática, pude perceber que nem sempre eu utilizava o simbolismo algébrico "para abreviar o plano de resolução de uma situação problema" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89).[3] Em alguns momentos, vivi situações em que, frente a um dado problema em linguagem corrente, nem sempre conseguia, por exemplo, traduzi-lo para a linguagem matemática (mais especificamente, para a linguagem algébrica).

Também observei que o mesmo acontecia com outros colegas do curso de licenciatura. Essa percepção era latente no caso do trabalho com expressões algébricas, especialmente polinômios, produtos notáveis e fatoração. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 89) explicam que a linguagem algébrica é "um instrumento facilitador na simplificação de cálculos, devido à capacidade transformacional das expressões simbólicas em outras mais simples que lhes são equivalentes". Dessa forma, para nós, alunos em formação, utilizar a linguagem algébrica para expressar um problema, por vezes, se tornava um dificultador na simplificação dos cálculos, pois não éramos acostumados a utilizá-la com a finalidade de abreviar a solução de um problema. O que acontecia era percorrermos um longo caminho manipulando expressões algébricas para encontrar um único resultado, inexistindo, nesse percurso, outros meios de expressar o pensamento acerca do problema proposto.

Nesse sentido, praticar exercícios foi toda a minha experiência com álgebra como estudante, até mesmo na graduação. Uma pergunta recorrente entre os alunos era: "em que contexto "não escolar" aplicaríamos conteúdos como cálculo, álgebra abstrata e análise? "

Na época, tínhamos a consciência de que a progressão no curso não nos preparava para a docência, pois os conteúdos constituintes do currículo do ensino básico não apenas não eram discutidos, mas também, em alguns momentos, representavam fonte de dificuldades para muitos estudantes.

O que orientava as práticas dos estudantes de licenciatura em Matemática não eram os conhecimentos de matemática e de outras áreas para o ensino básico. Naquele grupo de licenciandos do qual fiz parte, tinha destaque o estudante que tivesse bom desempenho em Geometria, Funções e, principalmente, a partir do 4º período, os que se sobressaíam em

[3] "Na verdade, a linguagem simbólico-formal cumpre, a partir de um certo momento, um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico abstrato, uma vez que ela fornece um simbolismo conciso por meio do qual é possível abreviar o plano de resolução de uma situação problema, o que possibilita dar conta da totalidade da estrutura da situação. " (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 89)

Álgebra linear, Álgebra Moderna, Análise, Estatística e os 5 períodos de Cálculo Diferencial e Integral.

Havia certo consenso entre nós que, para "sobrevivermos" a tais disciplinas, a habilidade com expressões algébricas e funções era fundamental. Porém, ao mesmo tempo que, com o avanço do curso, nos envolvíamos ainda mais com essas estruturas, chegava o momento de cursar as disciplinas de Estágio Supervisionado.

Durante o estágio, acompanhei efetivamente turmas de 6º e 7º ano (antigas 5ª e 6ª séries). Após cursar 2 períodos de estágio supervisionado, comecei a lecionar matemática para o ensino fundamental, tendo assim início minhas experiências com turmas de 8º ano.

Desde então, passei a perceber a diferença entre "o que ensinava" e "o que aprendia", mas sem espaço para discussões a esse respeito ou muito questionamento.

1.2 MINHAS EXPERIÊNCIAS COM O ENSINO DE ÁLGEBRA

Em 2004, ainda como estudante, comecei a lecionar matemática no ensino fundamental na condição de professora substituta e durante curtos períodos, na maioria das vezes. Em 2005, fui designada para um contrato de um ano na escola em que sou hoje professora concursada e onde esta pesquisa foi desenvolvida. Neste ano, lecionaria para as antigas 5ª e 7ª séries (atuais 6º e 8º anos). Era a primeira vez que assumiria turmas por um longo e contínuo período de tempo, o que me deu a chance de fazer um planejamento de aulas para todo o ano letivo.

Na ocasião, fiquei muito satisfeita e, ao mesmo tempo, um pouco apreensiva no que se refere aos conteúdos que deveriam ser ministrados, aos recursos didáticos e às estratégias metodológicas que seriam empregados. Ao fazer o planejamento para o 8º ano, consultei livros didáticos e as proposições curriculares do estado de Minas Gerais, Conteúdo Básico Comum (CBC, 2005), entre outros. Observei que a proposta para se trabalhar a álgebra no 8º ano não era muito diferente de quando eu havia cursado o ensino fundamental:

- expressões algébricas;
- classificação em monômios, binômios, trinômios e polinômios;
- graus de polinômios;
- operações com polinômios;
- produtos notáveis e fatoração.

E foi dessa forma – e nessa sequência – que ensinei álgebra aos meus alunos naquele ano, pois, apesar de sentir que havia algo errado, eu não tinha uma proposta alternativa para o ensino do conteúdo.

No início de 2006, me graduei e permaneci nessa mesma escola, mas, dessa vez, já como professora concursada.[4] Durante os primeiros anos lecionando para o 8º ano, não me preocupava se os alunos atribuíam ou não significado a todos aqueles procedimentos que lhes ensinava, pois eu mesma não via significado em todos eles. Eu não tinha em mente um argumento que justificasse ensiná-los. Aquilo de que eu tinha, de fato, consciência – e reforçava para os alunos – era de que, no futuro, os produtos notáveis e as técnicas de fatoração lhes seriam úteis para resolver alguns problemas dentro da matemática.

Desse modo, ensinava expressões e manipulações algébricas exatamente como os livros didáticos e o CBC sugeriam. Na minha concepção, os conteúdos principais a serem ensinados para o 8º ano seriam os produtos notáveis e a fatoração de expressões algébricas. Assim, o trabalho com os polinômios, a meu ver, era um pré-requisito, e somente praticando as operações com polinômios é que o aluno entenderia produtos notáveis. Enfatizava isso, pois, até durante a minha graduação, foi esta a importância que conheci ser atribuída a esses temas.

Então, tal qual vivenciei como aluna, apostava nas extensas listas de exercícios para treinar meus alunos na habilidade de manipular expressões algébricas. Porém, já nos primeiros anos, percebi que, quando se deparavam com os produtos notáveis, não conseguiam efetuar os cálculos. Era como se eles não tivessem feito tantos exercícios com expressões algébricas e polinômios. Para muitos alunos, era como se aquele fosse outro conteúdo, totalmente diferente.

Comecei então a buscar estratégias para melhorar minhas aulas. Essa inquietação partira de mim ao ver que alunos interessados e motivados nas aulas de matemática não conseguiam fazer os exercícios com expressões algébricas. Na verdade, quando iniciava o “cálculo algébrico”, como era denominado em alguns livros didáticos, a relação dos alunos com a matemática mudava.

No QUADRO 1, a seguir, cito exemplos muito comuns de formas equivocadas de manipulações algébricas que encontrava no meu dia a dia como professora.

[4] Fui aprovada no concurso para magistério do estado no ano de 2004.

QUADRO 1

Exemplos de dificuldades com as quais me deparei no dia a dia como professora

$3x + 2x + 4y + y = 10xy$: soma de todos os termos, não fazendo distinção entre as variáveis;
$3x^2 = 6x$: multiplicação do coeficiente pelo expoente, gerando um novo coeficiente;
$x^2 \cdot x^3 = x^6$: multiplicação dos expoentes entre si.

Fonte: Elaboração própria, 2016.

Conjecturava que, no caso dos alunos estigmatizados como "aqueles com dificuldades", isso acontecia por causa da sua defasagem em relação aos números e às operações. Mas, e quanto aos alunos que sempre se destacaram nas aulas de matemática? Aqueles que sempre tiveram bom desempenho e interesse, além de habilidades notáveis para o trabalho com números e operações? O que ocorria com eles quando, ao toparem com as letras, perdiam o interesse no conteúdo ou não conseguiam aprender? O que estava por trás da facilidade em trabalhar com números que se transfigurava em dificuldade diante das letras?

Essas questões nortearam a minha busca por leituras e o ingresso no curso de especialização em Educação Matemática da PUC-MG, no ano de 2007. A especialização foi significativa no sentido de proporcionar reflexões acerca de questões sociais, afetivas e cognitivas que permeiam a rotina escolar, além do trabalho com tecnologias, resolução de problemas e, principalmente, recurso à história da matemática. Apesar de meu interesse no ensino de álgebra, desenvolvi meu trabalho final sobre a "dificuldade com a divisão" de alunos de 5ª série. Sendo assim, para a álgebra, continuei sem horizontes, buscando sempre, em propostas curriculares, sites, livros didáticos e jogos, fazer com que os alunos aprendessem a lidar com expressões algébricas.

Ao inserir diversos recursos didáticos em minhas aulas, um deles foi recorrer à geometria: percebi que os alunos não estabeleciam conexão entre esses dois campos (geometria e álgebra). Evitei, assim, usar a geometria como recurso, pois o trabalho com áreas, por exemplo, não fazia sentido para os alunos, até mesmo por terem tido pouco contato com a geometria em sua vida escolar. Além disso, retornar para as expressões algébricas – fórmulas – parecia trazer ainda mais dificuldades, já que, após o trabalho com áreas e perímetros, os mesmos erros eram ainda cometidos pelos alunos.

Interessei-me em ler mais sobre a história da álgebra e comecei a utilizá-la como recurso em minhas aulas. A partir de então, passei a introduzi-la no 8º ano como generalizadora da aritmética. Dizia aos alunos que todo o percurso vivido por eles até o 8º ano com números seria agora substituído por letras. Agora, as letras poderiam representar qualquer número.

Dessa forma, comecei a trabalhar o conceito de variável. Visto que, em breve, os alunos se confrontariam com o conceito de incógnita nas equações, comecei a explorá-lo em paralelo, para que eles percebessem a diferença entre um e outro. Fazia também muitas referências a sequências numéricas (como as de múltiplos, por exemplo) e ao trabalho com a tradução de uma expressão em linguagem corrente para a linguagem algébrica.

Nessa tentativa de fazer com que os alunos entendessem o que agora eu concebia como uma linguagem capaz de traduzir toda e qualquer situação relativa a números e operações, passei a trabalhar mais no sentido de ouvi-los. Pude verificar, assim, que muitos alunos resolviam problemas ou expressões de forma oral, e que sua dificuldade residia mais em colocar a solução no papel.

Diante disso, além de tentar compreender os erros dos alunos, em linguagem escrita simbólica, comecei a valorizar outras formas de expressão, como a já mencionada linguagem oral e as resoluções escritas, onde observava eles lançarem mão de procedimentos alternativos aos algoritmos pré-estabelecidos.

Contudo, apesar de meus esforços, estava desassossegada em meio a tantas questões para investigar e poucos resultados satisfatórios. No trabalho com equações, verifiquei que, por meio do recurso de balanças, por exemplo, muitos alunos com severas dificuldades as resolviam com facilidade. Porém, na hora de formalizar, isto é, pedir que as resoluções fossem feitas no caderno, os mesmos alunos se comportavam como se fosse a primeira vez que resolviam uma equação.

Foi aí que, em 2014, assumi um contrato de um ano como professora na Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG).

Durante o primeiro semestre deste ano, assumi, no curso de licenciatura em Matemática, as disciplinas Prática de Ensino e Estágio Supervisionado. Era uma realidade nova e desafiadora, pois, na minha formação, não tive muitas disciplinas relacionadas à Educação. Na época da licenciatura, me interessei muito por psicologia da educação e história da matemática. Na especialização, essas áreas continuaram sendo de meu interesse e, portanto, recorri aos breves estudos e anotações que tinha a respeito desses assuntos para poder iniciar o meu planejamento da disciplina Prática de Ensino. Retomando estudos anteriores e buscando novas fontes, trabalhei no primeiro semestre com novas tendências metodológicas no ensino de matemática.

A álgebra, motivo constante de minhas inquietações, estava sendo trabalhada em uma turma de 2º período, para a qual lecionava Prática de Ensino II. A disciplina não tinha uma ementa pré-definida, e o coordenador do curso pediu que eu trabalhasse História da Educação Matemática com a turma. Dado que os alunos estavam também cursando a disciplina Álgebra e funções, decidi "unir o útil ao agradável" e trabalhar aspectos relativos ao ensino de álgebra. Apresentei métodos alternativos de resolução de equações, como completamento de quadrados, regra da falsa posição e método de Viéte. Trabalhei a visualização geométrica dos produtos notáveis e métodos antigos de realizar operações, alternativos aos algoritmos tradicionais.

Assim como eu ao longo de toda a minha formação, os alunos não conseguiam estabelecer conexões entre os métodos estudados e as regras que utilizavam, a exemplo do método de completar quadrados, que poderia dispensar a memorização da fórmula de resolução da equação do 2º grau. Os licenciandos se mostraram bastante resistentes e, por vezes, tinham dificuldades em compreender "aquela álgebra" que estava sendo proposta. Ao levar problemas, pedia que os resolvessem aplicando os métodos estudados, assim como o convencional, para que pudéssemos comparar as maneiras de resolução de uma equação.

Nesse contexto, o que mais me surpreendeu foi quando, ao propor um problema em linguagem escrita corrente – que seria resolvido por meio de uma equação do 2º grau –, os licenciandos não conseguiram estabelecer um plano de resolução, ainda que em linguagem natural ou oral.

Nas outras turmas em que lecionava, a situação não era diferente. Os alunos se queixavam, no 3º período, do Cálculo Diferencial e Integral, e no primeiro, dos Fundamentos de Aritmética e Álgebra. Com relação à disciplina Estágio Supervisionado, no primeiro semestre, não houve encontros com as turmas, dado à reorganização da disciplina (que deixava de ser presencial e passava para o regime de plantão).

Diante dessa demanda, o coordenador do curso propôs que, no semestre seguinte, eu trabalhasse os pensamentos algébrico, geométrico e aritmético com os licenciandos. Foi então que tive a oportunidade de ler Fiorentini, Miorim e Miguel (1992; 1993), Lins e Gimenez (1997), e Ponte *et al.* (2006; 2009), autores que consideram a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico em sala de aula.

Ao conhecer as diferentes concepções de Atividade[5] e educação algébrica, na esteira de Fiorentini, Miorim e Miguel (1992; 1993) e Lins e Gimenez (1997), propus discussões a

[5] Para Lins e Gimenez (1997, p. 137), "a atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra".

esse respeito em minhas turmas da licenciatura em Matemática. Pude constatar que a concepção de álgebra de muitos licenciandos era o trabalho com as letras e que a minha prática pedagógica em relação à álgebra ainda estava muito atrelada ao domínio de um conteúdo. Eu estava, portanto, ainda dentro de uma perspectiva letrista (LINS; GIMENEZ, 1997), apresentando aos alunos abordagens facilitadoras com a finalidade de que adquirissem destreza na manipulação de símbolos.

Esta constatação acerca da natureza da minha prática e o vislumbre de novas possibilidades para minhas ações foi fundamental para que eu decidisse me aprofundar na relação entre pensamento e linguagem algébrica, a fim de compreendê-la e modificar minha prática como professora.

Ainda sem muito aporte teórico, trabalhei sequências numérico-figurativas na turma de 3º período, com a qual havia trabalhado no 2º os métodos alternativos de resolução de equações e que, no momento, estava cursando a disciplina de Geometria Analítica. Durante o trabalho com sequências numérico-figurativas, muitos licenciandos apresentaram dificuldades para perceber regularidades nas sequências, que os ajudariam a elaborar uma fórmula. A maioria elaborava a fórmula a partir de tentativa e erro, de modo que, em suas resoluções, não estava presente o processo de generalização, ou seja, perceber que nas sequências de crescimento havia uma relação entre a posição das figuras na sequência e a organização dos elementos na figura, e que tal relação auxiliaria na elaboração de uma fórmula.

Preocupava-me com a formação daqueles licenciandos para o exercício da profissão na Escola Básica, visto que já acompanhava alguns deles na supervisão do estágio. Em nossas discussões, havia uma grande predisposição, por parte de muitos alunos, para o trabalho com material concreto, visto muitas vezes como “a solução” para quase todos os problemas relativos ao ensino e à aprendizagem de matemática. Por outro lado, apesar da constante reflexão acerca de minha prática e das novas possibilidades, o modo como deveria direcionar minhas ações não estava totalmente claro. Pude perceber isso durante o trabalho com sequências. Faltava algo de minha parte para fazer com que os alunos percebessem os padrões e caminhassem rumo à generalização. Assim surgiu meu interesse em cursar o Mestrado Profissional, para melhor compreender e refletir acerca das questões relativas ao ensino e aprendizagem da álgebra, em particular sobre o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assim, o aprofundamento nas leituras e as discussões por mim conduzidas na disciplina Prática de Ensino contribuíram para que eu buscasse a elaboração de propostas de ensino em que eu pudesse trabalhar as diferentes concepções de álgebra (USISKIN, 1995). O objetivo de seu ensino, na minha concepção, não poderia mais ser apenas o domínio da linguagem algébrica, mas o desenvolvimento do pensamento algébrico e a capacidade de usar a álgebra para resolver problemas.

Essa trajetória reflexiva culminou com a elaboração de um pré-projeto de pesquisa e posteriormente com meu ingresso no curso de Mestrado Profissional da Universidade Federal de Minas Gerais, pelo programa de Pós-graduação em Educação e Docência, no primeiro semestre de 2015.

Nessa perspectiva, ao final do primeiro ano de curso, após revisão bibliográfica, reelaborei o projeto de pesquisa, com base nas propostas de Radford (2008; 2010; 2011; 2013; 2014 e 2015) e Vale e Pimentel (2011). Durante as orientações, eu e minha orientadora concebemos artefatos e propusemos intervenções didáticas com o objetivo de introduzir o pensamento algébrico em uma turma de 8º ano da rede estadual de ensino de Minas Gerais, a partir da análise dos possíveis impactos destas intervenções na Atividade escolar, provocando ou intensificando as ações dos sujeitos envolvidos.

CAPÍTULO 2

Uma perspectiva para o ensino de álgebra: a generalização de padrões

Apresento neste capítulo os estudos que guiaram a elaboração de nossa proposta de pesquisa. Para tanto, o dividi em 6 seções:

- 2.1 O pensamento algébrico;
- 2.2 O ensino de álgebra e suas diversas concepções;
- 2.3 A relação entre pensamento e linguagem algébrica;
- 2.4 A generalização de padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico;
- 2.5 Mas o que é um padrão?;
- 2.6 As ideias norteadoras da nossa proposta.

2.1 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Nas proposições curriculares para o ensino básico de Minas Gerais – Conteúdo Básico Comum (CBC) –, a álgebra perpassa todo o ensino fundamental II, sendo que, no 8º ano, espera-se que o aluno tenha adquirido a competência de utilizar a linguagem algébrica para resolver problemas. Antes disso, a proposta é que ele tenha contato com situações em que seja levado a refletir acerca das propriedades relacionadas aos números e às operações, reconheça padrões e ganhe alguma familiaridade com o processo de generalização.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), consta que o principal objetivo do ensino de álgebra, durante todo o ensino fundamental, é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse sentido, o pensamento algébrico se caracterizaria por:

- observação de regularidades;
- estabelecimento de relações;
- modelação de situações-problema;
- estudo de estruturas matemáticas.

João Pedro da Ponte, Neusa Branco e Ana Matos (2009), em um material elaborado para orientação de professores no âmbito do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007), em Portugal, afirmam que o pensamento algébrico está ligado não apenas à álgebra, mas à aritmética, à geometria e a outras áreas do conhecimento, argumentando que

> (...) o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Também em Portugal, Isabel Vale e Teresa Pimentel (2011), ao trabalharem um projeto no âmbito do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2007), criticam o ensino de álgebra com a finalidade de trabalhar a habilidade de resolver equações. As autoras defendem que o objetivo do ensino de álgebra deva caminhar rumo ao desenvolvimento do sentido do símbolo e por meio do processo de generalização, componentes essenciais do pensamento algébrico (VALE; PIMENTEL, 2011).

No Canadá, Luis Radford (2010a) buscou compreender a natureza do pensamento algébrico, como surgia e se desenvolvia nos alunos e também a compreensão e enfrentamento das dificuldades em seu afloramento. Em pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem de álgebra envolvendo alunos e professores, destacou-se a relevância do pensamento algébrico, definindo-o como uma forma particular de reflexão, *sui generis* por se constituir de 3 elementos que se inter-relacionam: indeterminação, analiticidade e a maneira de representar seus objetos (RADFORD, 2010a).

De modo sucinto, a indeterminação "é própria de objetos algébricos, tais como incógnitas, variáveis e parâmetros" (RADFORD, 2010a, p.39). A analiticidade está relacionada à possibilidade de manipulação do desconhecido usando propriedades e operações. A maneira de representação dos objetos, por sua vez, diz respeito ao tipo de representação. "Incógnitas, variáveis e outros objetos algébricos só podem ser representados indiretamente, por meio de construções baseadas em signos" (RADFORD, 2010a, p. 39), que podem ser não apenas letras, mas gestos, linguagem oral, uso de objetos (RADFORD, 2009).

Aqui no Brasil, Dario Fiorentini, Maria Ângela Miorim e Antônio Miguel (1993) destacaram os elementos caracterizadores do pensamento algébrico como a "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativa de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993, p. 87). Em concordância com Ponte, Branco, Matos (2006), afirmam que, assim definido, o pensamento algébrico ganha contornos que o tornam presente nas mais diversificadas situações, dentro e fora da matemática:

> O modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993, p. 88).

Rômulo Lins e Joaquim Gimenez (1997) caracterizam o pensamento algébrico como um modo de pensar genericamente acerca da aritmética, com base em 3 características principais:

- *aritmeticismo*, que seria a produção de significados para números e operações;
- *internalismo*, ou o trabalho com as propriedades relativas a números e operações;
- *analiticidade*, que se relaciona com a capacidade de trabalhar com números indeterminados.

Há uma aproximação entre os autores anteriormente citados, ao definirem pensamento algébrico como integrador dos diversos campos da matemática, e o fato de este prescindir de uma linguagem simbólica para se expressar e se manifestar. Convergem também ao explicitar o caráter múltiplo dos símbolos e a relevância de um trabalho com a álgebra que conduza o aluno, gradativamente, à apropriação da linguagem algébrica com significado.

2.2 O ENSINO DE ÁLGEBRA E SUAS DIVERSAS CONCEPÇÕES

A definição acerca do que seja pensar algebricamente não é consensual (RADFORD, 2010b) ;(LINS; GIMENEZ, 1997). Lins e Gimenez (1997) problematizam que há um consenso acerca do que são "coisas" da álgebra. Estas – isto é, os aspectos que são de seu domínio – seriam as equações, funções e cálculos com expressões algébricas, remetendo para uma concepção enraizada de uma álgebra escolar, e que está diretamente relacionada a conteúdos. Na verdade, a álgebra é algo maior: trata-se de um campo da matemática que está presente nas mais diversas situações em que ocorre a indeterminação (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Usiskin (1995), na mesma linha dos autores citados, afirma que o ensino de álgebra está relacionado com a concepção que se tem do que ela é. Lins e Gimenez (1997) concordam com Usiskin ao dizer que um professor que pensa que a resolução de uma equação só acontece por meio do uso de símbolos, provavelmente irá priorizar isso em sua abordagem com seus alunos. Usiskin sistematizou a relação entre as diferentes concepções de álgebra e suas finalidades para o ensino, como se vê no quadro a seguir:

QUADRO 2

A relação entre as diversas concepções da álgebra e a utilização das variáveis

Concepção da álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin, 1995, p. 20

Minha experiência docente comprova tal afirmação, pois a maneira como ensinava e elaborava minhas intervenções exprimiam o que eu acreditava ser a finalidade do ensino de álgebra, indo ao encontro de Usiskin (1995) ao afirmar que "as *finalidades da Álgebra* são determinadas por, ou relacionam-se com *concepções diferentes da Álgebra* que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos *usos das variáveis*" (USISKIN, 1995, p. 13, grifos do original).

Nesse sentido, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) também mostraram em seus estudos que, historicamente, o ensino de álgebra esteve atrelado às diferentes concepções acerca da atividade algébrica, sendo que, na maioria dessas concepções, seu ensino se concentra no trabalho com a linguagem algébrica como prioridade, revelando assim o entendimento dominante sobre a álgebra, em que o pensamento algébrico aparece subordinado à linguagem:

> De fato, todas essas concepções de Educação Algébrica tomam como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída. Em todos esses casos, o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao "transformismo algébrico" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

Lins e Gimenez (1997) corroboram esta compreensão ao mencionar que, no Brasil, a maioria das propostas curriculares e livros didáticos apresentam uma noção de álgebra como o “cálculo com letras”.

Nessa perspectiva, os PCN (BRASIL, 1997) sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico será efetivo se as diferentes concepções de álgebra forem trabalhadas ao longo de toda a trajetória escolar do aluno.

Buscamos, então, desenvolver uma proposta de ensino segundo a perspectiva de que a álgebra deve levar os alunos a pensar de forma genérica, por meio da percepção de regularidades, desenvolvimento do pensamento analítico e estabelecimento de relações.

2.3 A RELAÇÃO ENTRE PENSAMENTO E LINGUAGEM ALGÉBRICA

Durante o meu percurso escolar, e posteriormente como docente no ensino fundamental, observei que os livros didáticos traziam os tópicos “Cálculo Algébrico”, ou “Introdução ao cálculo algébrico”, como a abordagem inicial para se trabalhar álgebra. Embora as equações fossem apresentadas na 6ª série (hoje 7º ano) e já houvesse um trabalho com quantidades desconhecidas, era na sétima série que se ouvia a palavra álgebra pela primeira vez.

Diante disso, uma dificuldade apontada por pesquisadores é a relação de subordinação do pensamento à linguagem algébrica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), de tal forma que a aquisição da linguagem passa a ser o objetivo do ensino de Álgebra, se tornando um conteúdo. Estudos de Fiorentini, Miorim, Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Radford (1997) tiveram como questão de investigação a relação entre pensamento e linguagem algébrica e quando, e em qual etapa da escolaridade, introduzir o pensamento algébrico.

Os PCN (BRASIL, 1998) destacam que uma maneira de se atingir o objetivo do ensino de álgebra, que é o desenvolvimento do pensamento algébrico, seria trabalhar as suas diversas concepções de modo que o símbolo possa assumir diversos papeis. Dessa maneira, por meio desses diversos usos do símbolo, o aluno tem a possibilidade de atribuir sentido à linguagem algébrica.

Nesse sentido, Ponte (2006) afirma que o domínio da linguagem algébrica é um componente do pensamento algébrico, mas alerta que ela deve fazer sentido para quem a utiliza:

> Podemos então dizer que o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar

> com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido do símbolo" (*symbol sense*), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas (PONTE, 2006, p. 8).

Radford (2014) estabelece uma relação entre pensamento e linguagem algébrica ao afirmar que o desenvolvimento do pensamento algébrico é o processo de tomada de consciência da síntese codificada sobre diferentes modos de pensar acerca de números conhecidos e desconhecidos, utilizando-se as operações e os sinais de igualdade e desigualdade de forma analítica. Em outras palavras, a linguagem algébrica, hoje já codificada, é resultado de processos históricos pelos quais os diversos modos de pensar (gestos, linguagem oral, escrita) acerca da indeterminação foram sendo moldados culturalmente.

Historicamente, tem sido comum a linguagem algébrica ser a finalidade do ensino de álgebra, reduzindo-o ao simples manipular das letras e à aprendizagem de regras de transformação de expressões. Ainda nessa perspectiva, Radford (2011) afirma que

> (...) a linguagem algébrica emergiu como uma ferramenta técnica e posteriormente evoluiu socioculturalmente a um nível de ser considerado como um objeto matemático. Normalmente, no currículo moderno, a linguagem algébrica aparece desde o início como um objeto matemático *em si* (RADFORD, 2011, p. 149, grifo do original).

A apropriação da linguagem é importante no sentido de que ela é um meio de fazer cálculos de maneira mais rápida e de organizar o pensamento. O alerta para o trabalho com a álgebra está no fato de, nessa relação entre pensamento e linguagem, considerar-se que o pensamento algébrico necessita da linguagem para se desenvolver (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Nesse sentido, a priorização da linguagem em relação ao pensamento algébrico desconsidera que, historicamente, nem sempre o pensamento contou com a linguagem simbólica como forma de expressão, quer dizer, a atividade algébrica passou por fases (RADFORD, 2011a); (LINS; GIMENEZ, 1997), a saber:

- retórica, na qual o pensamento era expresso apenas por palavras;
- sincopada, por meio de abreviações;
- simbólica, com a introdução de símbolos.

Assim, a atual linguagem algébrica, que levou séculos para se constituir e sempre esteve relacionada a contextos históricos e culturais, da forma como é trabalhada nos dias atuais, ou seja, apenas para a aquisição da habilidade de resolver equações supõe

> (...) uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da Álgebra (estudo de funções e da variação em geral) (PONTE, 2006, p. 7).

É importante salientar que, para que tais aspectos sejam levados em conta no ensino de álgebra, este não precisa ser necessariamente introduzido a partir da manipulação de letras, o que muitas vezes não tem sentido para o aluno. Explorar outros sistemas de significação como ações, gestos e artefatos pode contribuir para a reflexão, de maneira progressiva, dos estudantes, sobre os saberes histórica e culturalmente constituídos (RADFORD, 2011a).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) concluem que a relação entre pensamento e linguagem algébrica não deva ser de subordinação, mas de ordem dialética, de modo que no ensino de álgebra deve-se ter atenção aos elementos caracterizadores do pensamento algébrico e suas diversas formas de expressão, que podem ser a linguagem natural, aritmética, geométrica ou a linguagem simbólica própria da álgebra.

Lins e Gimenez (1997) propõem uma educação algébrica que proporcione aos alunos a capacidade de atribuir significado para a álgebra e de pensar algebricamente, de tal forma que “o desenvolvimento de habilidades “técnicas” (domínio de técnicas manipulativas, por exemplo) deve ser uma consequência desses dois pontos” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 152).

2.4 A GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

A década de 1990 foi marcada por estudos entre os quais podemos citar os de Bednarz, Kieran e Lee (1996), em que o ensino de álgebra esteve em evidência. A caracterização do pensamento algébrico, a relação entre pensamento e linguagem e o momento de se introduzir a álgebra na escola foram algumas das ideias discutidas por pesquisadores nesse período e ainda o são atualmente (RADFORD, 2009).

Com relação ao momento de introdução da álgebra, Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1992; 1993) defendem que não há justificativa para o ensino tardio da álgebra, tal qual consta nas propostas curriculares elaboradas no fim da década de

1990 (BRASIL, 1998), (NCTM, 2000).[6] Tais propostas sugeriram que a álgebra deveria ser ensinada ainda nas séries iniciais, com a intenção de levar os alunos a desenvolverem o pensamento algébrico e, de forma gradativa, apropriarem-se da linguagem algébrica.

A generalização de padrões foi, e ainda tem sido, objeto de estudo de pesquisadores (VALE; PIMENTEL, 2011); (RADFORD, 2011b); (MASON, 1996), sendo apontada como um meio de se desenvolver o pensamento algébrico no sentido de proporcionar o trabalho com os elementos caracterizadores do pensamento algébrico, como observação de regularidades, estabelecimento de relações e generalização de propriedades acerca de números e operações (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Além disso, o trabalho com padrões abre caminho para o exercício da comunicação, poder de argumentação, elaboração de hipóteses e justificativas, sendo considerado, assim, um tema que pode assumir um caráter transversal no currículo, pois promove a integração entre álgebra, geometria e aritmética. Nesse sentido, acontece também a preparação para o tema funções, ao se explorar o estabelecimento de relações entre grandezas (VALE; PIMENTEL, 2011).

2.5 MAS O QUE É UM PADRÃO?

De acordo com Vale e Pimentel (2011), estamos diante de um padrão se podemos detectar regularidades. A regularidade é a percepção de que algo se repete, e de modo previsível. O termo padrão é amplo e pode ser utilizado se há a percepção de regularidades em sons, cores, formas, arranjos de números ou figuras, e não apenas em padrões visuais, como os observados em tecidos e obras de arte.

De acordo com Kate Devlin, citada por Vale e Pimentel (2011), a busca por padrões tem sido uma função da matemática nos dias atuais. Nas propostas curriculares (BRASIL, 1998), (ME, 2007),[7] (NCTM, 2000),[8] a sugestão é que o trabalho com padrões perpasse todo o ensino básico, de forma gradativa e desde as séries iniciais. Vale e Pimentel (2011) sugerem que os padrões sejam vistos como algo a mais do que simples recreação ou passatempo:

> Os padrões vão muito mais além da exploração de situações de repetição e do campo da geometria. A sua riqueza reside na transversalidade, tanto ao nível de conteúdos como das capacidades que promove nos estudantes de qualquer nível e também na

[7] Programa de Matemática para o Ensino Básico.
[8] National Council of Theachers of Mathematics.

> forte ligação com a resolução de problemas, com atividades de exploração e investigação (VALE; PIMENTEL, 2011, p. 10).

O trabalho com padrões proporciona o estabelecimento de relações, observação de variáveis em contraste com aspectos invariantes e conduz ao processo de generalização, o que, ainda segundo Vale e Pimentel (2011), são os principais componentes do pensamento algébrico. Além disso, a comunicação e a elaboração de justificativas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Radford (2011b) reforça que o trabalho com padrões, especialmente as sequências de crescimento, levam o aluno, de forma progressiva, a atribuir significado às tarefas propostas e ao simbolismo algébrico.

Nessa perspectiva, o trabalho com padrões favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, que, para Vale e Pimentel (2011), implica compreender e analisar uma situação-problema, aplicando procedimentos formais de maneira consciente, por meio do processo de simbolização, modelação e estabelecimento de relações: “ A realização de tarefas que envolvem o estudo de padrões ajuda os alunos a perceber a ‘verdadeira’ noção de variável, que, para a maioria, é apenas vista com um número desconhecido.” (VALE; PIMENTEL, 2011, p. 16).

Concordamos com as autoras quando dizem que o objeto de estudo da álgebra não deve ficar restrito à resolução de equações e ao domínio de técnicas. Para tanto, julgamos relevantes propostas de ensino que permitam aos alunos, em situações exploratórias, buscar regularidades, estabelecer relações, exercer sua comunicação e a capacidade de generalização (VALE; PIMENTEL, 2011).

2.6 AS PROPOSTAS PARA O TRABALHO COM PADRÕES QUE FUNDAMENTARAM NOSSA PROPOSTA

2.6.1 A proposta de Isabel Vale e Teresa Pimentel

Motivadas pelas sugestões de introdução precoce da álgebra no currículo e pela necessidade capacitação de professores, diante da elaboração da Nova Proposta para o Ensino Básico em Portugal (ME, 2007), Isabel Vale e Teresa Pimentel desenvolveram uma pesquisa longitudinal.

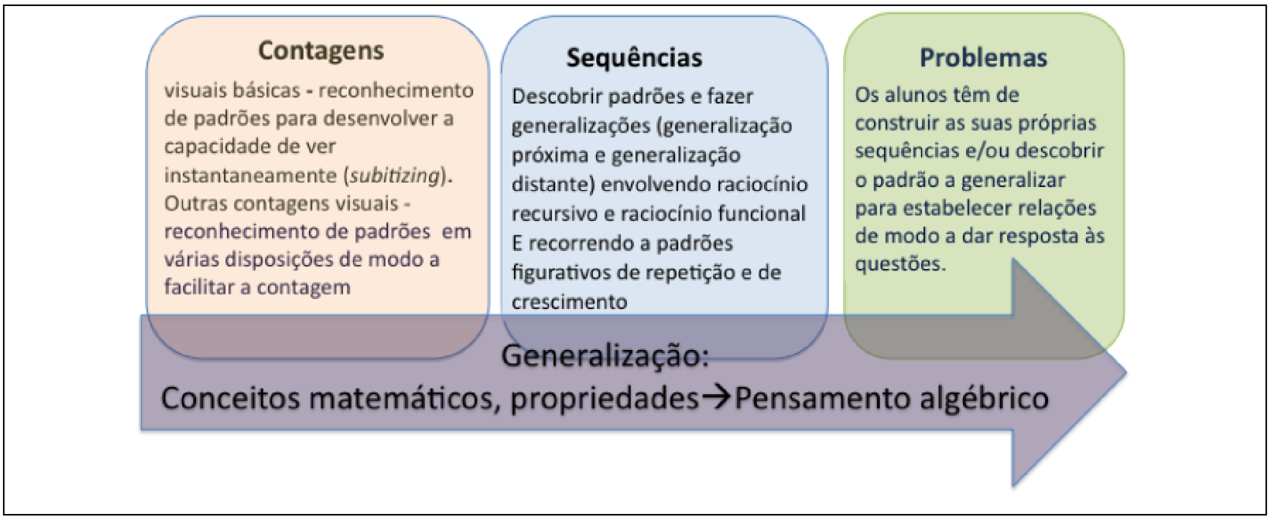
Assim, no contexto desse novo programa, as pesquisadoras e seus colaboradores desenvolveram o projeto “Padrões” durante o período de 2007 a 2010. Tal projeto propôs o trabalho com padrões, em contextos diversificados, com o objetivo de aprofundar conceitos matemáticos por meio da abordagem de resolução de problemas.

O trabalho com padrões promove o desenvolvimento da capacidade de generalização, principal componente do pensamento algébrico, e a exploração da generalização em contextos visuais/figurativos, que permite a transição do pensamento aritmético para o algébrico, dando significado à generalização, sem a obrigatoriedade do uso de variáveis ou fórmulas (VALE; PIMENTEL, 2011).

A equipe de estudiosos elaborou, então, um conjunto de tarefas envolvendo padrões em contextos figurativos com a finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. As tarefas foram desenvolvidas a partir de imagens, desenhos, figuras geométricas e materiais manipuláveis, e seguiram a estrutura descrita no quadro a seguir:

QUADRO 3

A estrutura das tarefas da pesquisa de Vale e Pimentel



Fonte: VALE, 2006, p. 6.

As tarefas foram desenvolvidas com alunos do ensino básico, especialmente os de 6 a 11 anos, num programa de formação continuada. No decurso da pesquisa, verificou-se:

- a emergência da generalização, essência do pensamento algébrico;
- a atribuição de significado, por parte dos alunos, a conteúdos matemáticos, com desenvolvimento da habilidade de resolução de problemas;
- melhoria na comunicação, representação, raciocínio e estabelecimento de conexões.

De acordo com as pesquisadoras, esse trabalho deve ser progressivo e perpassar todo o ensino básico. Por isso, a sugestão é que a exploração do tema se inicie nas séries iniciais, a partir de contagens visuais, nas quais aluno possa desenvolver estratégias de contagem rápida e percepção visual. Além disso, o trabalho com expressões numéricas pode contribuir para o estabelecimento de relações numéricas.

As sequências, por sua vez, devem, de preferência, ser introduzidas com as figurativas, com recurso a materiais manipuláveis. As sequências permitem a mobilização de tópicos matemáticos e o exercício da comunicação. Além disso,

> as tarefas apresentadas em contextos figurativos são um bom ponto de partida para o pensamento algébrico baseado na generalização de padrões e contribuem, também, para a construção de outros conhecimentos matemáticos: contagens, cálculo mental, propriedades e relações nas operações, escrita de expressões numéricas e equivalência de várias expressões (VALE; PIMENTEL, 2011, p. 36).

Nas sequências repetitivas, a ordenação prepara o aluno para as sequências de crescimento, além do exercício da comunicação, presente em todo trabalho de observação de padrões. Além disso, há a possibilidade de se observarem regularidades diferentes, cabendo ao professor estimular a explicitação de todas, de modo que sejam explicadas pelos alunos e que o padrão observado seja generalizado. A identificação do motivo de repetição nas sequências repetitivas

> (...) é importante pois permite que os alunos organizem seu pensamento e façam a distinção entre os padrões de repetição e os de crescimento, pelo que se deve ser trabalhada. Na verdade, é necessária essa identificação para que se faça distinção plena entre o padrão apresentado e o seguinte, em que há um crescimento de uma das partes do motivo inicial (VALE; PIMENTEL, 2011, p. 20).

Nas sequências de crescimento, cada termo é obtido em relação a uma mudança no termo anterior, de modo previsível. As diferentes maneiras de explicar e generalizar o padrão observado podem levar a diferentes tipos de expressões algébricas, sendo possível então o trabalho com equivalências rumo à elaboração de expressões algébricas com significado.

As pesquisadoras assumem que, em uma proposta abrangente, englobando todo o ensino básico, há o risco da inadequação das tarefas, que podem se tornar fáceis ou difíceis demais, de acordo com o contexto. Afirmam que tal dificuldade pode ser minimizada se as propostas seguirem uma abordagem de resolução de problemas, com apresentação do problema, resolução, discussão e sistematização (VALE; PIMENTEL, 2011).

Diante dos resultados de suas pesquisas, as autoras puderam constatar que o trabalho com padrões pode motivar professores e alunos, ao propor uma aula de matemática em que os conteúdos possam ser explorados de forma criativa e com significado.

2.6.2 A proposta de Luis Radford

Em 1997, após a reformulação do currículo da cidade de Ontário, no Canadá, seguindo a orientação de introduzir a álgebra com o tema generalização de padrões em sequências numérico-figurativas, Luis Radford conduziu uma pesquisa longitudinal com alunos de 7 e 8 anos em escolas participantes de um projeto que envolveu professores, alunos e licenciandos, com vistas à implementação do novo currículo (RADFORD, 2011b).

Além de questões relacionadas à demanda institucional relacionada ao currículo, Radford (2010a) buscou compreender a natureza do pensamento algébrico, sua definição e como representar os objetos referentes ao conhecimento algébrico. De acordo com o autor, em outras áreas, como aritmética e geometria, há outras maneiras de se representarem esses objetos. Em álgebra, há a ênfase em usar letras para essa representação, o que nem sempre caracteriza que o aluno está em uma atividade algébrica.

Os trabalhos do pesquisador estiveram centrados inicialmente na análise do discurso de alunos, em que, por meio de linguagem natural, Radford avaliava o modo como estes atribuíam sentido à linguagem algébrica para o trabalho com generalização de padrões (RADFORD, 2000). Posteriormente, diante da natureza complexa do pensamento algébrico, ele se dedicou a analisar como tarefas envolvendo a generalização de padrões poderia desenvolver esse pensamento.

Radford (2010a) afirma que o núcleo da generalização de um padrão é perceber algo geral no particular, expressando isso, algebricamente, por meio de símbolos. O autor (2008) reforça que o uso de símbolos nem sempre significa a presença de pensamento algébrico e problematiza o que então diferenciaria a generalização algébrica da aritmética. Segundo ele, em campo algébrico é que podemos trabalhar, de forma analítica, com a indeterminação. Assim, Radford (2008) fala em 3 etapas de generalização algébrica:

- identificação de uma *comunalidade*, ou seja, detectar, em uma sequência, uma comunhão local. A comunhão local é a percepção da regularidade em alguns termos. Essa percepção deve possibilitar a separação, de forma consciente, entre variantes e invariantes;

- generalização da comunhão entre todos os termos;
- elaboração de um esquema, regra ou expressão direta, que permita encontrar qualquer termo da sequência.

Nesse sentido, nem toda generalização é algébrica. Radford (2013) chama a atenção para as estratégias de indução, que podem ser confundidas com as de generalização. Na indução, o aluno pode chegar a uma fórmula, por meio do processo de tentativa e erro, mas não consegue elaborar uma expressão direta que lhe forneça o termo desconhecido. Com uma estratégia recursiva em que o aluno lança mão dos termos anteriores para determinar o seguinte, ele pode, indutivamente, chegar a um esquema. Sendo assim, é possível que aluno esteja trabalhando em campo aritmético, mesmo utilizando símbolos (RADFORD, 2008).

O que diferencia uma generalização algébrica de uma aritmética é que, na generalização algébrica, há um modo de lidar com o que muda e o que varia, intencionalmente, no sentido de elaborar um esquema para encontrar elementos da sequência que estão fora do alcance visual e que não pode ser obtido por meio de contagem (RADFORD, 2010b).

Assim, o papel do professor é mediar e atualizar os modos de ver do aluno, no sentido de conduzi-lo à distinção entre os aspectos relevantes, que levem à generalização. Assim, é importante o trabalho inicial com alguns termos na sequência, mas, em seguida, solicitar termos distantes, a fim de que o aluno seja levado a buscar estratégias e generalizar.

Durante as tarefas que envolvam percepção das regularidades, o professor deve intervir, variando o uso de artefatos como gestos, palavras, desenhos, material manipulável, etc. (RADFORD, 2013). Ao usar diversos tipos de recursos, estará propiciando ao aluno a oportunidade de tomar consciência da regularidade e chegar a um padrão, relacionando a posição do termo na sequência com a figura correspondente.

Radford (2010a) afirma que a expressão da generalidade, ou seja, o modo de o sujeito expressar suas percepções acerca das regularidades observadas, possibilita a identificação de camadas de generalidade, que se relacionam com o artefato utilizado. Assim, o autor (2010a) classifica generalização algébrica em 3 tipos:

- *factual*: a expressão do padrão observado é feita por meio de um esquema operacional, de modo que o aluno determina os termos distantes a partir desse esquema, mas com exemplos numéricos;

- *contextual*: a expressão se dá por meio de uma regra explícita, sem o uso de números particulares. É comum expressões como “a figura a seguir” ou “sempre” para designar que aquela regra é válida para qualquer termo;
- *simbólica*: nesta etapa da generalização, a expressão é feita com símbolos. Aqui, o aluno decide acerca do uso de símbolos para representar o esquema elaborado, com sinais, números e variáveis.

Radford (2010b) salienta que a generalização algébrica pode ocorrer por meio de gestos, mas isso não é suficiente. A generalização pode ser estimulada com o recurso a outros artefatos, como linguagem oral ou escrita, rumo à generalização utilizando símbolos matemáticos.

Em suas pesquisas, Radford (2008; 2010a) observou que o trabalho com generalização de padrões em sequências numérico-figurativas não é algo simples para alunos que tiveram pouco ou nenhum contato com tarefas dessa natureza. Em estudos com alunos de 13 e 14 anos (RADFORD, 2010a), ao propor tarefas envolvendo sequências numérico-figurativas, ele verificou que os alunos, além de perceber regularidades diferentes, não percebiam padrões na organização espacial delas, valorizando apenas aspectos numéricos.

As discussões acerca do que ocorria em sala de aula eram feitas em um grupo de pesquisa da Universidade de Laurentian, composto por professores, licenciandos e o professores das classes participantes da pesquisa. Nestas, os professores regentes das classes explicitavam suas concepções e participavam da elaboração das tarefas propostas no currículo. As aulas eram gravadas e transcritas pelos pesquisadores com a ajuda do professor e analisadas no grupo de pesquisa.

Durante esses trabalhos, Radford analisou quais procedimentos os estudantes empregavam para completar sequências crescentes, buscando, por meio dessas tarefas, disponibilizar, em exemplos concretos, a relação entre o trabalho com sequências e o desenvolvimento do pensamento algébrico. O pesquisador observou, ao longo do trabalho, que estudantes de 7 e 8 anos se engajaram em tarefas envolvendo generalizações de padrões em sequências, desenvolvendo estratégias formais de generalização, com uso de notações simbólicas (RADFORD, 2011a).

Já em uma pesquisa com adolescentes de 13 e 14 anos que já tinham contato com o simbolismo algébrico, mas pouca familiaridade com atividades que envolviam generalização de padrões em sequências, Radford (2013) concluiu que nem sempre eles chegavam a uma generalização algébrica, ainda que tivessem utilizado uma fórmula para expressar o padrão observado. Assim, Radford (2008) chama a atenção do papel do professor, argumentando que, ao introduzir a generalização como um caminho de iniciação ao pensamento algébrico, é importante saber diferenciar generalizações algébricas e aritméticas, para que o trabalho esteja de fato conduzindo o aluno ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.7 A ATIVIDADE DE GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Nesta seção, discorro sobre as ideias que nortearam a elaboração da nossa proposta de intervenção, voltada para o contexto de uma escola pública em que os alunos que já haviam tido contato com a linguagem algébrica, mas não a utilizavam para resolver problemas. O que fundamenta essas ideias é a perspectiva histórico-cultural da Teoria da Atividade (TA), em que *Atividade* significa um conjunto de ações intencionais dirigidas a um objeto, em um ambiente coletivo, que influenciará diretamente o seu curso.

2.7.1 Breve histórico da Teoria da Atividade

A Teoria da Atividade tem suas raízes na teoria histórico-cultural de Vygotsky, que usou o conceito de mediação para explicar os processos de desenvolvimento psicológico. Este conceito é fundamental para a compreensão da relação entre sujeito e objeto do conhecimento. Nas teorias chamadas estruturalistas, a relação entre sujeito e objeto acontece sem a influência da cultura na qual este sujeito está inserido. Para Vygotsky, a relação entre sujeito e objeto é diferente. O sujeito utiliza objetos, sistemas de signos e instrumentos presentes na cultura, os artefatos, em sua relação com o objeto. Assim, a relação que antes era uma interação direta, passa a ser mediada pelos artefatos. Nesse contexto,

> a inserção dos artefatos culturais nas ações humanas foi revolucionária, no sentido em que a unidade básica de análise superou a separação entre o indivíduo cartesiano e a estrutura social intocável. O indivíduo já não podia mais ser compreendido sem os seus meios culturais, e a sociedade já não podia ser entendida sem a agência de indivíduos que usam e produzem artefatos, o significado que os objetos deixaram de ser apenas um material para a formação do sujeito como o foram para Piaget. Objetos tornaram-se entidades culturais e o objeto orientador de ação tornou-se a chave para entender a psique humana (ENGESTROM, 2015, p. 14).

Todavia, ainda que o conceito de mediação estivesse presente nas ideias de Vygotsky, em seus estudos, ele ainda tinha o foco de análise centrada no sujeito (ENGESTROM, 2015), sem considerar o modo de produção dos artefatos, os quais eram permeados por relações sociais e carregavam consigo uma história de uso, própria da cultura em que foram produzidos.

Aleksey Nikolaevich Leont'ev, que fez parte do grupo de pesquisa que Vygotsky liderava, deu continuidade aos seus estudos sendo o principal representante da chamada segunda geração da Teoria da Atividade, discutindo amplamente o conceito de *Atividade*:

> Por esse termo, designamos apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem como o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. (...) Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar essa atividade, isso é, o motivo (LEONT`EV, 2001, p. 68).

Assim, a Atividade é um processo por meio do qual o sujeito, motivado por uma necessidade em relação a um objeto, age de modo intencional para satisfazer essa necessidade. Essa ação, que aconteceu mediada pelo uso de signos e instrumentos, transforma a relação que existia entre este sujeito e o objeto. Kawasaki (2008) ilustra as características da Atividade:

> Historicamente, a atividade humana desenvolveu-se a partir de suas formas mais elementares, como por exemplo, "saciar a fome". Para suprir tal necessidade biológica, a atividade humana consistia na caça ou na coleta, na qual o alimento é o *objeto* (*motivo*) para o qual a atividade (caça ou coleta) é *orientada*. Tal atividade, que tinha como objetivo "saciar a fome", desenvolveu-se (*mudou*) na medida em que seres humanos aprimoraram suas estratégias de caça e de coleta por meio de criação de ferramentas que passam a *mediar* tal atividade. Assim, seres humanos se reorganizam, se transformam, de acordo com as regras da natureza e desenvolvimento de sua própria história e cultura (KAWASAKI, 2005, p. 96, grifos do original).

Leont'ev estrutura a Atividade em três níveis hierárquicos:

> (...)a estrutura de toda atividade comporta três níveis hierárquicos: no primeiro nível está a própria atividade, direcionada a um motivo; no segundo nível temos as ações, direcionadas a objetivos específicos; e no terceiro nível vêm as operações ou rotinas, que são os meios de concretização das ações, sendo este o nível de base. As ações dos sujeitos que se realizam na atividade, são provocadas/desencadeadas pelo motivo da atividade e também são direcionadas ao seu objeto (...) (DAVID; TOMAZ, 2015, p. 1289).

A segunda geração da Teoria da Atividade avançou em relação à primeira quando Leont'ev usou o conceito de *ações individuais* em um contexto de *atividade coletiva*, abrindo espaço para questões relativas aos modos e às relações de produção, até então não contemplados na primeira geração (ENGESTRÖM, 2015).

Uma análise mais detalhada das interações em uma atividade coletiva, com as contradições da atividade, provocadas pela diversidade cultural, tornou-se um desafio para a terceira geração da Teoria da Atividade que se propõe hoje a "(...) desenvolver ferramentas conceituais para entender as redes de interação dentro de sistemas de atividade, o diálogo, e múltiplas perspectivas e vozes" (ENGESTROM, 2015).

A proposta da pesquisa por ora apresentada nesta dissertação foi observar e analisar a "Atividade de Generalização de Padrões", que teve como objeto o desenvolvimento do pensamento algébrico, realizada durante as aulas de matemática de uma turma do 8º ano de uma escola pública. Nesse contexto, implementei uma série de tarefas matemáticas relacionadas à generalização de padrões, e pensamos e desenhamos as tarefas, bem como um kit de artefatos que, em nosso ponto de vista, pode mediar, provocar ou intensificar as ações em sala de aula. Nosso interesse foi observar as ações que o uso destes artefatos poderia provocar.

2.7.2 A teoria da objetificação do conhecimento de Luis Radford

Para fundamentar as análises relativas às estratégias de generalização dos alunos, busquei as ideias de Luis Radford, que iniciou suas pesquisas na década de 1990, período marcado por discussões pertinentes ao caráter social da aprendizagem propostas por Bussi (1991), Lerman (1992) e Boero *et al.* (1995), até então, pouco comuns na área de Educação Matemática. Nos últimos anos, este autor alicerça seus estudos em perspectivas histórico-culturais, mais especificamente na Teoria da Atividade.

Inicialmente, os estudos de Radford estiveram centrados no modo como a linguagem algébrica desenvolvia a capacidade de generalização dos estudantes. Posteriormente, apoiado na teoria histórico-cultural de Vygotsky, apropriou-se do conceito de Atividade (LEONT'EV, 1978), porém com um foco investigativo diferente, isto é, que valoriza a ação na prática discursiva de professores e alunos, de modo que

> (...) a prática discursiva é vista como sujeita à ação conjunta de alunos e professores. Há, portanto, um reposicionamento teórico dos conceitos de base, que passam a priorizar a ação sobre a palavra. A palavra pode, sem dúvida, ser vista como ação. Mas nem toda ação é palavra (RADFORD, 2014, p. 134, trad. minha).[9]

[9] "(...) la práctica discursiva es vista como supeditada a la acción conjunta de los alumnos y profesores. Hay, pues, un reposicionamiento teórico de los conceptos de base en el cual viene a primar la acción sobre la palabra. La palabra puede, sin duda, ser vista como acción. Pero no toda acción es palabra." (RADFORD, 2014, p. 134)

Nessa perspectiva, o autor afirma que ação e discurso não estarão subordinados um ao outro (RADFORD, 2014), e centra suas análises no papel exercido pelas ações de estudantes e de professores a fim de que os objetos matemáticos se tornem objetos de sua consciência. Dessa maneira, o sujeito, a partir de sua ação, mediada por artefatos (signos, linguagem, objetos) e da interação social, toma consciência de um saber historicamente constituído.

A aprendizagem então é considerada uma prática social,[10] e não a simples transmissão do conhecimento pelo professor, com consequente aquisição por parte do aluno, numa relação de causa e efeito. Isso implica reconhecer que a maneira como os alunos aprendem está relacionada "a suas realidades culturais e aos conceitos historicamente formados que eles encontraram em seu ambiente" (RADFORD, 2011a, p. 318).

Em outro artigo, Radford (2015a) define os objetos do conhecimento como a síntese codificada de modos de pensar histórica e culturalmente constituídos, ou seja, formas de fazer e pensar que são colocadas em movimento por meio da Atividade, as quais, segundo ele, não são simples de serem percebidas pelo sujeito:

> Para que um objeto do conhecimento se torne um objeto do pensamento e da consciência, ele tem de ser posto em movimento. Tem que adquirir determinações culturais; isto é, tem de adquirir conteúdo e conexões em um processo de contraste com outras coisas, tornando-se assim cada vez mais e mais concreto. E a única maneira pela qual conceitos podem adquirir determinações culturais é através de atividades específicas (RADFORD, 2015-a, p. 139, trad. minha).[11]

Assim, o conhecimento é possibilidade de agir de modos culturalmente moldados e codificados. A partir destas possibilidades de ações para tornar o objeto do conhecimento um objeto da consciência, é que a atividade de aprendizagem ocorre.

Radford (2011a) aponta para a problemática atual da educação, cuja matriz é o entendimento equivocado de que o indivíduo constrói o seu próprio conhecimento. Essa concepção, segundo o autor, prescinde de dois fatores: um relativo à diversidade na sala de aula, e outro, ao reconhecimento do professor como um sujeito culturalmente mais experiente e que pode conduzir o aluno a formas de atribuir significado aos objetos de conhecimento da cultura. E é nesta perspectiva que Radford define *objetificação* como "dotar de significado os objetos conceituais que o aluno encontra em sua cultura" (RADFORD, 2011a, p. 323).

[10] "Prática social – o que nos escritos de Leont'ev é mencionado pelo termo técnico *atividade* – é o lugar da emergência do pensamento humano, do ser e da consciência." (RADFORD, 2011a, p. 226, grifo do autor)

[11] "(…) for an object of knowledge to become an object of thought and consciousness, it has to be set in motion. It has to acquire cultural determinations; that is, it has to acquire content and connections in a process of contrast with other things, thereby becoming more and more concrete. And the only manner by which concepts can acquire cultural determinations is through specific *activities*." (RADFORD, 2015a, p. 139)

Somente com a participação dos sujeitos em práticas sociais é possível entrar em contato com a cultura material, ou seja, os artefatos culturais (objetos, instrumentos, signos, linguagem etc.) (RADFORD, 2011).

A objetificação é um processo em que o conhecimento pode ou não ser atingido mediante sua atualização. De acordo com Radford (2014) é por meio de atividades específicas que esta atualização ocorre. E, nessa situação, cabe ao professor, pela utilização de diversos artefatos culturais e enquanto um sujeito que já se apropriou do conhecimento historicamente constituído, propor essas atividades, bem como explorar e potencializar os artefatos culturais que os estudantes possuem, rumo ao contato, de forma progressiva, com maneiras de pensar sistematizadas e historicamente constituídas.

Desse modo, artefatos mediam a aprendizagem, ao proporcionar o contato com o conhecimento produzido na cultura, mas não atuam sozinhos, sendo a interação social necessária para que a aprendizagem ocorra, pois

> os objetos não conseguem esclarecer a inteligência histórica que está embutida neles. Isto requer que eles sejam utilizados em atividades bem como no contato com outras pessoas que saibam "ler" essa inteligência e nos ajudem a adquiri-la (RADFORD, 2011, p. 324).

A interação em sala de aula promove, além da compreensão de conceitos matemáticos, a criação de um espaço de desenvolvimento de subjetividades solidárias, reflexivas e responsáveis. A esse processo Radford (2014) chamou *subjetificação*, definindo-o como o conjunto de "(...) processos mediante os quais os sujeitos se posicionam em práticas culturais e transformam-se (*sic*) em sujeitos únicos. A subjetificação é o processo histórico de formação do eu" (RADFORD, 2014, p. 142, trad. minha).[12]

Para a teoria da objetificação, a educação não fica restrita apenas ao ensinar e ao aprender, mas também a ser com a presença do outro, ou seja, *aprender a ser*. Nesta perspectiva,

> objetificação e subjetificação na verdade deveriam ser vistas como dois processos mutuamente constitutivos que levam o aluno a se envolver com as formas culturais de pensar e uma sensibilidade nas questões de relação interpessoal, pluralidade, inclusão e outras características principais do eu comunitário (RADFORD, 2011a, p. 334).

[12] "(...) procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo," (RADFORD, 2014, p. 142)

No caso da aprendizagem de álgebra, a introdução da linguagem, apenas como uma sequência de signos, substituindo os números por letras, pode não proporcionar aos alunos a reflexão sobre maneiras de pensar historicamente constituídas.

2.7.3 Os processos de objetificação na Atividade de Generalização de Padrões

Na Atividade de Generalização de Padrões, o pensamento algébrico é uma possibilidade. O propósito do professor, ou seja, o objeto da Atividade é fazer com que os alunos pensem algebricamente, mobilizando em suas ações os elementos que o caracterizam, de maneira a familiarizar os sujeitos com modos de pensar acerca de quantidades desconhecidas (RADFORD, 2015b).

Nesse sentido, há uma contradição inerente a esta Atividade. Há uma assimetria epistemológica entre alunos e professor, pois este direciona suas ações para atingir o objeto da atividade, mas os alunos não. Estes, por seu turno, direcionam suas ações a outros objetos, como agradar o professor, praticar exercícios, passar de ano etc.

Desse modo, ainda que os alunos não conheçam os objetivos de generalizar padrões, não há impedimentos para que se engajem e busquem resolver as tarefas propostas pelo professor, recorrendo a generalizações aritméticas (RADFORD, 2015b).

Assim, o professor não pode esperar, *a priori*, que os alunos generalizem algebricamente, ignorando assim as estratégias por eles desenvolvidas. Os diversos modos de ver as regularidades em uma sequência e resolver as tarefas geram conflitos que podem ser resolvidos ou intensificados (RADFORD, 2015a).

Dentro desta perspectiva, os *processos de objetificação* são valiosas ferramentas de análise no estudo da aprendizagem, concebida como processo e não como um produto, por procurar "(...) estudar as maneiras pelas quais os alunos se tornam progressivamente conscientes de formas culturalmente constituídas de pensar e agir e, enquanto subjetividades em formação, professores e alunos se posicionam em práticas matemáticas" (RADFORD, 2015a, p. 553, trad. minha).[13]

Nesta pesquisa, desenhamos a Atividade de Generalização de Padrões e, com a cooperação do professor regente da turma, fizemos intervenções na Atividade escolar, pautadas em tarefas envolvendo ações direcionadas à observação de padrões visuais,

[13] "(…) study the manners by which the students become progressively aware of historically and culturally constituted forms of thinking and acting, and how, as subjectivities in the making, teachers and students position themselves in mathematical practices." (RADFORD, 2015a, p. 553)

sequências repetitivas e de crescimento, mediadas pelo uso de artefatos e estímulo à interação social, com o objetivo de introduzir o pensamento algébrico.

No próximo capítulo, descrevo o contexto, os participantes e a metodologia da pesquisa.

CAPÍTULO 3
Metodologia

Neste capítulo, apresento o objetivo deste estudo, o método de pesquisa utilizado, o contexto e os participantes.

Reflexões sobre a minha prática trouxeram a necessidade de que eu voltasse o olhar para o desenvolvimento de um trabalho que contribuísse para a melhoria do ensino de álgebra em sala de aula. Nesse sentido, nossa proposta de pesquisa se alia à reflexão de que "(...) a pesquisa é um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito" (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 60).

Os autores apontam ainda que

> qualquer que seja a alternativa de pesquisa a ser seguida, a pertinência, a relevância e o sucesso de uma investigação dependem, de um lado, do conhecimento de estudos anteriores, sobre o mesmo tema ou problema e das leituras teóricas e, de outro, das reflexões e experiências práticas em torno desse tema (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 61).

Nessa perspectiva, iniciei este trabalho com um breve levantamento bibliográfico para escrita do projeto de pesquisa, com a finalidade de compreender o posicionamento de autores da área de Educação Matemática a respeito do ensino de álgebra e resultados de pesquisas recentes e definir claramente o objeto de estudo e o método de pesquisa.

Optei por desenvolver uma proposta alternativa a um trabalho com foco no transformismo algébrico (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993), ao explorar a linguagem algébrica como uma forma analítica de pensar sobre indeterminações, mas valorizando outras maneiras de expressão e pensamento, como linguagem oral e gestual, desenhos e outros tipos de material concreto.

De acordo com Radford (2015b), "o poder de persuasão de uma investigação depende da capacidade de persuasão dos procedimentos" (RADFORD, 2015b, p. 158). A compreensão da sala de aula como um ambiente complexo e extremamente sensível a questões sociais, culturais e históricas, direcionou minhas escolhas para um método de caráter qualitativo com foco em "um modelo fenomenológico no qual a realidade é enraizada nas percepções dos sujeitos; o objetivo é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através (*sic*) de números" (BENTO, 2012, p. 1).

Os sujeitos da investigação foram os estudantes de uma turma de 8º do ensino básico da rede estadual de ensino de Minas Gerais, e o objeto de análise, as ações intensificadas ou provocadas pelo uso de artefatos durante a Atividade de Generalização de Padrões delineada. Para tanto, propus 6 intervenções didáticas na Atividade de sala de aula do professor regente da turma, inspirada nas ideias de Engestrom (2015), Radford (2010a), Vale e Pimentel (2011).

Os PCN (BRASIL, 1998) pontuam que o objetivo do ensino de álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, por meio de situações que o levem a "utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos" (BRASIL, 1998, p. 76).

Ao final do ensino fundamental, espera-se que o aluno desenvolva a competência de resolver situações- problema que envolvam equações de 1º e 2º grau, tendo consciência das propriedades da igualdade empregadas, atribuindo assim significado ao cálculo algébrico efetuado. Para o desenvolvimento de tais competências, as habilidades de abstração e generalização tornam-se ferramentas fundamentais (BRASIL,1998).

Pesquisadores como Radford (2007), Vale e Pimentel (2011), Ponte, Branco e Matos (2009) mostraram que propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas a partir da observação de regularidades em sequências pode contribuir para um ensino de álgebra baseado na construção de significados, e não com ênfase no simbolismo em detrimento do desenvolvimento do pensamento algébrico (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993).

Assim, as tarefas desenvolvidas durante as intervenções envolveram o trabalho com padrões visuais, sequências repetitivas e numérico-figurativas, que tiveram como objetivos:

- continuar a representação dos termos de uma sequência a partir dos termos dados;
- descrever os termos de acordo com sua ordem;
- compreender a relação entre ordem e termo para encontrar termos mais distantes, percebendo a relação entre a sequência de figuras e uma sequência numérica;
- expressar essa relação em linguagem natural (generalizar);
- representar o termo geral da sequência numérica em associação com a sequência de figuras;
- determinar o termo geral da sequência numérica a partir de uma fórmula.

Desenvolvi as tarefas em 2 ou 3 aulas de 50 minutos para cada tarefa proposta, sendo que, para algumas delas, utilizei mais 2 ou 3 aulas para discussão/correção. A intervenção foi dirigida por mim com a participação/intervenção do professor e os alunos organizados individualmente ou em grupo, de modo a facilitar a socialização e a comunicação entre alunos/professor/pesquisadora durante as tarefas.

Como recursos didáticos, utilizei imagens reproduzidas em papel A4, apresentações em PowerPoint, clips, mosaicos de madeira, palitos, pedras de resina coloridas e fios de nylon.

A partir de observações, registro em diário de campo e gravações em áudio e vídeo, identifiquei conflitos e tensões que orientaram mudanças nos artefatos e possíveis mudanças nas ações dos sujeitos dentro da Atividade de Generalização de Padrões.

3.1 CONTEXTO E PARTICIPANTES

A escola estadual na qual a pesquisa foi realizada pertence à Superintendência Regional de Ensino B. De acordo com a Lei Delegada nº 180, de 20/01/2011, a rede estadual de ensino se divide em 3 superintendências regionais de ensino, que têm por finalidade "(...) exercer, em nível regional, as ações de supervisão técnica, orientação normativa, cooperação e de articulação e integração Estado e Município em consonância com as diretrizes e políticas educacionais" (MINAS GERAIS, 2011, p. 14).

Localizada na região oeste de Belo Horizonte, a escola atende, em 3 turnos, os níveis fundamental, médio e EJA. Possui um espaço físico privilegiado, com 2 prédios de 2 pavimentos cada, 20 salas distribuídas entre salas de aula, laboratórios e sala de multimídia, biblioteca, além de sala de reuniões, cantina, auditório e quadra coberta. A escola é tradicional na região por receber alunos de várias localidades e ser a única a ofertar o ensino médio. As turmas de 8º ano recebem alunos na faixa etária de 13 a 15 anos e que ainda não ingressaram no mercado de trabalho. Estes alunos residem, em sua maioria, em um grande aglomerado da região. A escolha por esta escola se justifica por ser a instituição onde atuo, desde 2005, como professora de educação básica. Em 8 destes 11 anos de regência, lecionei em turmas de 8º ano, vivenciando, dessa forma, a grande dificuldade que os alunos apresentavam ao iniciar o trabalho com a linguagem algébrica.

A experiência adquirida nesta escola me autoriza dizer que o turno da tarde é um turno marcado por incivilidades, que

> (...) não são necessariamente comportamentos ilegais no sentido jurídico. No entanto, elas consistem em infrações à ordem estabelecida que ocorrem na vida cotidiana. Mesmo não sendo aparentemente graves, são atos – como agressões verbais, xingamentos, atos de indisciplina, abuso de poder etc. –, elas têm um potencial de desorganização da ordem coletiva e das referências de sentido individuais destruindo laços sociais, fomentando um sentimento de insegurança, fragilizando instituições, afetando a experiência e a confiança no outro (ABRAMOWAY, 2005, p. 80).

Embora esses atos não sejam considerados graves, por não colocarem em risco a integridade física das pessoas, o desempenho escolar pode ser diretamente afetado por eles (ABRAMOWAY, 2005). Além disso, a instabilidade com respeito à frequência dos alunos e a pouca participação da família são fatores que podem contribuir para a falta de interesse dos alunos pelos estudos, dificultando, assim, o trabalho docente. De acordo com Nogueira (2006), “inúmeras pesquisas vêm demonstrando a influência positiva, sobre o desempenho acadêmico, do envolvimento parental na escolaridade dos filhos, o que contribuiria, a termo, para a redução das taxas de evasão e de repetência” (NOGUEIRA, 2006, p. 157).

O perfil das turmas de 8º ano é de alunos que, mesmo com dificuldades de aprendizagem, como as citadas anteriormente, estão conseguindo progredir nos estudos. A escola possui baixo desempenho nas avaliações sistêmicas. De acordo com dados do Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública (SIMAVE) (2013),[14] que ocorre anualmente e avalia alunos dos ensinos fundamental (5º e 9º ano) e médio (3º ano), o desempenho obtido em álgebra para o 9º ano do ensino fundamental nesta escola ainda se encontra abaixo do esperado, ou seja, estamos no nível intermediário, com 238,7 pontos na escala de proficiência média, enquanto o nível recomendado é acima de 300 pontos. A escala de proficiência

> (...) foi desenvolvida com o objetivo de traduzir medidas em diagnósticos qualitativos do desempenho escolar. Ela orienta, por exemplo, o trabalho do professor com relação às competências que seus alunos desenvolveram, apresentando os resultados em uma espécie de régua onde (*sic*) os valores obtidos são ordenados e categorizados em intervalos ou faixas que indicam o grau de desenvolvimento das habilidades para os alunos que alcançaram determinado nível de desempenho (MINAS GERAIS, 2013, p. 20).

Em álgebra, as habilidades desenvolvidas durante o ensino fundamental são avaliadas ao final do 9º ano no SIMAVE-PROEB, por meio da competência em resolver situações problema que envolvam equações de 1º e 2º graus. A experiência docente e os resultados observados/vivenciados me trouxeram a reflexão acerca de minha própria prática.

[14] A partir de 2015, o SIMAVE inseriu avaliações intermediárias, no 7º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio, para acompanhamentos e intervenções que possam melhorar o desempenho nas avaliações que ocorrem nas séries subsequentes.

Mais do que o trabalho em desenvolver habilidades, visando à competência em resolver equações, apresentar a álgebra no 8º ano como generalizadora da aritmética e treinar expressões algébricas não foi suficiente para atingir os objetivos esperados para seu ensino, que é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo Ponte, citado por Fiorentini, Miguel e Miorim (1993 p. 87), "a Álgebra deve levar os alunos a pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente e estabelecer relações entre grandezas variáveis".

No ano de 2016, em que a pesquisa de campo foi realizada, a escola contava com 2 turmas de 8º ano (8º A e 8º B). No primeiro dia de observações, assisti às aulas nas 2 turmas. A escolha pelo 8º B se deu por uma razão: no dia 17 de fevereiro, data marcada para o início das observações, na turma 8ºA, havia 42 alunos matriculados. O espaço físico da sala de aula no qual a turma tinha sido alocada não permitia que alunos nem professor circulassem de forma confortável, o que inviabilizaria a proposta de trabalhar em grupo. Em contrapartida, a turma 8º B possuía apenas 25 alunos matriculados, o que facilitaria a intervenção e coleta de dados.

A justificativa para tal diferença era a presença, no 8º B, de "Túlio",[15] um aluno com dificuldades de locomoção. Devido à ausência de rampas de acesso às salas de aula, a turma foi acomodada em uma sala onde antes funcionava o laboratório de física e química. Com a mudança de espaço, a turma ficou organizada em 4 grandes mesas que pertenciam ao antigo laboratório, o que facilitou nossa posterior intervenção no contexto das atividades em grupo.

Vale ressaltar que Túlio, de 13 anos, é portador de Distrofia Muscular de Duchene, uma miopatia progressiva que acomete toda musculatura corporal. O aluno, que parou de andar aos 9 anos de idade, agora está perdendo a força muscular nos membros superiores, e por isso tem apresentado dificuldades para escrever. Segundo relatos de sua família, além da fraqueza nos braços, Túlio possui severas dificuldades com as atividades de leitura, escrita e cálculos matemáticos. Possivelmente em virtude de tudo isso, o aluno aparenta pouca disposição para estar em sala de aula e cumprir as tarefas propostas.

O professor regente da turma, "Marcelo", atua há 10 anos na educação básica e leciona em 2 escola públicas (uma na rede estadual e outra na municipal), compondo o quadro de professores efetivos de ambas. Nesta escola, o professor esteve sob regime de designação por um breve período em 2013, retornando, após nomeação, no ano de 2015. Eu e o professor já nos conhecíamos, pois fomos colegas de graduação no curso de licenciatura em

[15] Em conformidade com os preceitos éticos da pesquisa acadêmica, nesta dissertação, usamos nomes fictícios para preservar a identidade dos participantes da pesquisa.

Matemática, no período de 2002 a 2006, e nos reencontramos como colegas de trabalho em 2015. Devido a essa proximidade, obtive total apoio do professor no que diz respeito à disponibilização das aulas para a realização da pesquisa.

A coleta de dados da pesquisa foi marcada pela infrequência dos alunos. Havia aqueles que passavam um mês ou mais sem ir à escola, sendo que a composição da turma era diferente a cada dia de intervenção. Assim, em cada tarefa desenvolvida, tive alunos que a iniciaram em uma aula e não terminaram em outra, assim como alunos que iniciaram a tarefa em momentos diferentes dos demais.

Acresce a esse fato que, como citado anteriormente, a rotina escolar sofre muito com os atos de incivilidade por parte dos alunos, e que ocorrem tanto em sala de aula como fora dela, nas proximidades da escola. Eram constantes as reclamações dos professores em virtude das turmas cheias demais e dos alunos que perturbavam as aulas. Assim, a equipe coordenadora elaborou estratégias para enfrentar essas dificuldades. Duas delas foram relevantes e afetaram diretamente a rotina dos 8º anos e, consequentemente, a pesquisa aqui abordada. A primeira delas foi o retorno do 8º B para uma sala de aula regular, o que retirou a turma do mencionado laboratório. A condução das aulas na sala-laboratório vinha sendo criticada pela equipe de professores diante do comportamento dos alunos que entravam e saiam de sala quando queriam, atrapalhavam as aulas com conversas em volume de voz elevado, xingamentos e brincadeiras. Houve, assim, uma pressão para que a turma ocupasse uma sala de aula tradicional, com carteiras individuais, pois, segundo os professores, esta disposição impediria o comportamento inadequado de alguns alunos, que, em grupo, eram os maiores causadores de tumulto. Os professores também alegaram que a sala com carteiras individuais possibilitaria fazer o mapa de sala, definindo os lugares a serem ocupados pelos alunos, desfazendo, desse modo, os grupos que atrapalham as aulas. Com isso, passou-se a retirar os alunos excedentes do 8º ano A e remanejá-los para o 8º ano B. Por fim, o 8º B passou a contar com 35 alunos na lista de presença.

A segunda mudança relevante para a pesquisa foi o fato de Túlio ter passado a ser acompanhado individualmente por “Cristiane”, professora responsável pela biblioteca, permanecendo na sala de laboratório, deixando de assistir, assim, às aulas junto com sua turma. Desse modo, o aluno passou a receber dos professores todas as tarefas e orientações, sob a condução de Cristiane. Apesar dessas mudanças, continuei desenvolvendo a pesquisa no 8º B. Fiz o possível para ministrar o máximo de tarefas no espaço em que Túlio ficava para que este tivesse acesso não apenas às atividades, mas à aula de matemática na companhia de seus pares. Assim, Túlio poderia se engajar na atividade matemática com a utilização de outras formas de expressão para além da escrita, o que facilitaria ainda mais sua inclusão.

Delineados o contexto e os participantes da pesquisa, sigo apresentando os procedimentos desenvolvidos.

3.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Após autorização da direção da escola para a realização da pesquisa e aprovação do projeto[16] junto ao Comitê de Ética na Pesquisa da UFMG (COEP), iniciei a pesquisa de campo.

Antes de iniciar a pesquisa de campo, estive na escola para conversar com o professor, expondo os objetivos da proposta. Além disso, apresentei-lhe o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)[17] e também pedi que verificasse, sem prejudicar seu planejamento de aulas, a disponibilidade de dias e horários para o desenvolvimento da pesquisa.

Após a aprovação do professor, iniciamos a primeira etapa da pesquisa de campo em que apenas observei as aulas de Marcelo. Devido ao contexto em que a pesquisa se desenvolveu, julguei prudente observar algumas aulas sem fazer nenhum registro, a fim de minimizar, tanto quanto possível, qualquer possibilidade de perturbá-las, tendo em vista as já existentes dificuldades em sua dinâmica. Tal atitude proporcionaria um contato informal com a turma para que os alunos se acostumassem com a presença de dois professores em sala. Foi a primeira vez que a escola recebeu uma pesquisadora, e isso causou certa curiosidade e agitação por parte dos alunos da turma e também de outras, já que nem mesmo a presença de estagiários é comum na rotina da instituição.

Após essa fase inicial, enviei aos pais dos alunos uma carta-convite, em que, de maneira simples e explicativa, informava-os acerca do projeto de pesquisa e dos procedimentos que seriam adotados nos próximos meses. Posteriormente, distribuí os TCLE, direcionados aos pais e os termos de assentimento livre e esclarecido (TALE) direcionados aos alunos que os assinaram de pronto.[18] Contudo, obter as assinaturas dos TCLE por parte dos pais ou responsáveis pelos alunos foi uma dificuldade enfrentada na pesquisa, que estendeu muito a primeira etapa de observações sem registros de áudio e vídeo. Muitos alunos

[16] Projeto aprovado junto ao Comitê de Ética de acordo com o parecer 1.393.385, de 22 de janeiro de 2016.
[17] Ver Apêndice C.
[18] Ver Apêndices A e B.

perderam os TCLE; outros disseram que os pais concordavam, mas que não era preciso assinar; e outros simplesmente, em tom de brincadeira, argumentavam estar com o termo na mochila, não assumindo o compromisso de apresentá-lo ao responsável. Chamou minha atenção ainda o fato de que alunos argumentavam não trazer o termo assinado devido a problemas de relacionamento familiar.

Em função dos remanejamentos constantes entre os alunos do 8º A e 8º B, durante algumas semanas, reenviei os TCLE aos pais de novos alunos que ingressavam na turma. Além disso, os alunos infrequentes foram recebendo os termos à medida que compareciam às aulas, sendo que alguns receberam o TCLE apenas após 2 meses do início da pesquisa.

Diante de tais dificuldades, solicitei orientações à direção da escola, mas sem sucesso, já que esta argumentou (e eu mesma o reforço, baseado em minha experiência) que convocar os pais para uma reunião seria inviável, dada a já comentada ausência das famílias no ambiente escolar.

Assim, com a ajuda do professor Marcelo, entreguei, em diversas ocasiões, cópias dos termos aos alunos e, diariamente, reforçávamos a importância do retorno dos documentos para o andamento dos trabalhos. Em várias aulas, destinamos um tempo para explicar como seria a pesquisa, o motivo, objetivos e como coletaríamos os dados. Diante disso, ao final, conseguimos 17 TCLE assinados, sendo que em 1 deles o responsável desautorizou a participação do aluno na pesquisa. Para evitar problemas, os dados referentes a este aluno e a outros que não entregaram os TCLE serão omitidos nesta dissertação.

A segunda etapa da pesquisa consistiu nas intervenções didáticas por nós planejadas com base nas propostas de Vale e Pimentel (2011) e Radford (2010). Estas aconteceram em diversos locais dentro da escola: sala de aula, sala de recursos multimídia e laboratório de física e química, de acordo com o horário e disponibilidade do professor Marcelo.

3.3 OS ENCONTROS E A COLETA DE DADOS

Como dito anteriormente, o início da pesquisa se deu com as observações sem registros áudio ou videográficos, em prol de um primeiro contato informal com a turma. Após essa aclimatação, comecei a observar as aulas do professor Marcelo, deixando os registros em diário de campo para o momento em que tivéssemos em mãos o maior número possível de TCLE assinados.

Assim, de um modo geral, a coleta de dados foi feita a partir de observações e gravações em áudio e vídeo, registros escritos em diário de campo e transcrições das aulas gravadas. Na parte inicial, em fevereiro e início de março de 2016, até receber a autorização das famílias, apenas registrei pontos importantes em meu diário de campo durante as aulas. Ao final de cada aula, efetuava o relato completo no diário de campo. De posse das autorizações, a partir de 10 de março, iniciei a coleta de dados com gravações em áudio de meu aparelho celular e filmagens realizadas com uma câmera digital, conduzidas na maioria das vezes pelo professor Marcelo. Ao final de cada intervenção, transcrevia as filmagens de vídeo e gravações de áudio e fazia também o relato no diário de campo. Durante as intervenções, eu e o professor Marcelo interagíamos com os grupos e eu conduzia as discussões.

Com relação aos registros produzidos pelos alunos, disponibilizei para cada um deles um caderno de anotação das tarefas referentes à pesquisa, que planejava entregar e recolher diariamente. Porém, esses cadernos foram utilizados apenas nas 2 primeiras atividades, pois fui alertada pelo professor Marcelo que as turmas ainda não estavam totalmente constituídas. Assim, para evitar situações em que nem todos os alunos contassem com o caderno para registro, aguardei até a definição final da turma, para que pudesse então providenciar novos cadernos para os alunos remanejados. Isso, porém, aconteceu somente em meados de junho e, com o decorrer da pesquisa, alterei o modo de registro das atividades, que foi reavaliado e prescindiu do uso dos cadernos.

Assim, descritos o contexto no qual a pesquisa se desenvolveu, o perfil dos participantes e procedimentos de pesquisa seguidos, apresento, no próximo capítulo, o desenvolvimento das intervenções.

CAPÍTULO 4

As intervenções na Atividade escolar

A partir do trabalho envolvendo padrões, em consonância com as ideias de Vale e Pimentel (2011), propusemo-nos a elaborar tarefas que pudessem provocar processos de generalização, visando também ao desenvolvimento da criatividade, autonomia, curiosidade e espírito investigativo nos alunos, proporcionando-lhes oportunidades de se comunicarem e explicitarem suas ideias e raciocínios.

Julgamos necessário, antes de iniciar o trabalho com generalização de padrões em sequências numérico-figurativas, aplicar 2 tarefas com padrões em contextos visuais e 2 com sequências repetitivas. Tal necessidade se justificava pela inexperiência dos alunos com atividades envolvendo sequências. Por meio dessas atividades, promovemos um contato gradativo deles com tarefas envolvendo percepção de regularidades, exercício de comunicação, manipulação de materiais concretos e atividades em grupo, abordagens com que não possuíam familiaridade, de acordo com relatos do professor Marcelo, que os acompanha desde o 7º ano.

Após esse trabalho inicial de exposição dos alunos a alguns padrões visuais, em que foram provocados a observar, perceber e explicitar regularidades em obras de arte e mosaicos, partimos para tarefas envolvendo sequências repetitivas e de crescimento. As sequências repetitivas trabalhadas ofereceram aos alunos a oportunidade de perceber e identificar o motivo de repetição, explicitando-o por meio de linguagem oral, exercendo assim a comunicação. Além disso, puderam estabelecer relações numéricas que extrapolaram os algoritmos, abrindo caminho para outras estratégias de contagem e organização do pensamento e para a experiência com as sequências de crescimento (VALE; PIMENTEL, 2011).

No trabalho com as últimas, os alunos, já familiarizados em algum grau com os padrões, sentiram-se mais à vontade para comunicar suas ideias e argumentar acerca das estratégias utilizadas durante as atividades. Fundamentada nas ideias de Radford (2010a), analisei como os alunos perceberam o que há de comum nas primeiras figuras, associando essa organização com as posições dos termos em uma sequência numérica. Analisei também quais estratégias foram mobilizadas para obter termos próximos e distantes e formular uma regra de formação de um termo qualquer dessa sequência.

Ressalto ainda que tais tarefas foram desenvolvidas em duplas, trios ou grupos, sendo, portanto, mediadas pela interação social e pelo uso de artefatos.

Procuramos criar, com isso, um ambiente em que os alunos pudessem entrar em contato com objetos, linguagem oral, escrita e gestual, de modo que esses artefatos mediassem a percepção das regularidades e a explicitação da regra geral daquela sequência. Radford (2010a) afirma que a percepção da regularidade ocorre por meio de atividades envolvendo recursos de naturezas multissemióticas, ou seja, artefatos culturais como gestos, fala, desenhos e materiais concretos. A presença do professor, nesse caso, é fundamental, ao disponibilizá-los ao aluno.

Radford (2011a) sustenta ainda que os artefatos são importantes no processo de aprendizagem, mas não atuam sozinhos. A dimensão social exercerá papel fundamental. De acordo com o autor, a sala de aula é um espaço onde estão inseridos diferentes valores sociais e culturais, o que afeta diretamente a forma de os indivíduos agirem e perceberem a atividade matemática. Em razão disso,

> (...) a sala de aula não pode ser vista como um espaço fechado, voltado para si mesmo, onde o conhecimento e as regras de interação são negociadas a partir do zero. De fato, todo o conhecimento e as regras de interação social têm toda uma história cultural por trás delas e, portanto, preexistem à interação que tem lugar na sala de aula (RADFORD, 2011a, p. 325).

Nesse sentido, a interação social, na perspectiva do autor,

> (...) desempenha um papel diferente. Ao invés de executar uma função meramente adaptativa – uma que seja catalisadora ou facilitadora –, a interação é consubstancial à aprendizagem. Deste modo, vemos que o mundo material e a dimensão social desempenham um papel fundamental na aprendizagem (RADFORD, 2011a, p. 325).

Explicitadas as ideias norteadoras da intervenção didática proposta, faço a seguir a descrição das tarefas desenvolvidas.

4.1 O INÍCIO DA PESQUISA

Iniciei as observações no dia 17 de fevereiro de 2016, uma quarta-feira. Como assinalei anteriormente, optei por não fazer muitas anotações nos primeiros dias para não chamar a atenção dos alunos, a fim de que se acostumassem com a minha presença em sala. Assim, relato apenas os pontos mais importantes que observei nestes dias e que podem contribuir para a compreensão do contexto no qual a pesquisa se desenvolveu.

O planejamento para o 8º ano seguia os descritores do Currículo Básico Comum (CBC). O professor Marcelo não me apresentou seu planejamento do bimestre, como eu havia solicitado, mas, nas primeiras aulas em que estive presente, expôs aos alunos o conteúdo programático do bimestre, que continha os seguintes tópicos:

- expressões algébricas;
- monômios;
- operações com monômios;
- polinômios.

No mês de março, período da primeira intervenção didática, os estudantes já estavam trabalhando durante as aulas com polinômios e, em tese, a linguagem algébrica e nomenclaturas das expressões já lhes eram familiares.

Foge ao escopo desta pesquisa o relato minucioso das observações iniciais, uma vez que não era meu objetivo principal avaliar o modo como os alunos trabalhavam com a linguagem algébrica em seu cotidiano escolar, no sentido de diagnosticar dificuldades.

O objetivo das intervenções foi implementar as propostas de Vale e Pimentel (2011) e Radford (2010a), estudiosos que, em seus respectivos países, voltaram-se para públicos diferentes do que eu tinha na escola em questão. Ainda que em Portugal e no Canadá a proposta com generalizações permeasse todo o ensino básico, iniciando-se nas primeiras etapas da escolarização, instigou-me bastante a ideia de aplicá-la aqui no Brasil, cuja realidade educacional é, histórica e culturalmente, totalmente distinta, para os anos finais do ensino fundamental. Foi um desafio a decisão de como essa proposta seria colocada em prática, já que, originalmente, era voltada para as séries iniciais. Por outro lado, Radford (2008) havia implementado o trabalho com sequências em uma turma de 9º ano sem familiaridade com esse tipo de tarefa, assim como os alunos do 8º ano em que esta pesquisa se desenvolveu.

Veloso (2012) trabalhou atividades com sequências, calcadas também nas ideias de Radford, com alunos de 6º ano, em uma escola da rede privada de Belo Horizonte cujos alunos ainda não haviam tido contato com a linguagem algébrica. Durante a realização das tarefas, a autora observou processos de objetificação no trabalho com generalização de padrões em sequências.

No entanto, dada a realidade da escola onde foi realizada a pesquisa, não seria simples implementar a proposta nos moldes de Veloso, que desenvolveu em 7 encontros uma proposta de ensino contemplando sequências de crescimento, com alunos que já tinham o hábito de fazer as tarefas propostas, participar e se posicionar em discussões – considerando também as boas condições de infraestrutura da escola e apoio familiar de que esse público desfrutava. Podemos inferir que a diferença entre o contexto em que realizei a pesquisa e o de Veloso começou a se manifestar já na participação das famílias no projeto, com a demora para obter as assinaturas dos TCLE (que atrasou o início da coleta de dados), além das questões anteriormente relatadas, como atos frequentes de incivilidade e a infrequência por parte dos alunos. Ao contrário de Veloso (2012), que se deparou com a dificuldade em realizar a pesquisa e ainda cumprir o calendário e o currículo, dado que era a regente da turma, foi-me concedida total liberdade da parte do professor regente para desenvolver o projeto em suas aulas.

Com o particular intuito de amenizar as dificuldades, iniciei as intervenções com algumas “tarefas-piloto”, para que os alunos criassem familiaridade com padrões. Assim, foi objetivo das 2 primeiras tarefas chamar a atenção dos estudantes para o projeto que se iniciaria e, em certa medida, observar suas reações e atitudes, pois já se fariam presentes nas tarefas, ainda que de maneira sutil, os elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

A seguir, relato as intervenções didáticas realizadas:

TABELA 1
Cronograma de tarefas

Datas	Tarefa	Número de aulas[19]
10, 11 e 17/03	Reconhecendo padrões nas obras de Escher	3
01/04	Descobrindo padrões em mosaicos	2
08, 14 e 15/04	Canecas	3
29/04, 06 e 12/05	Oficina de bijuterias	3
29/08	Clips	1
31/08 e 02/09	Os comboios de polígonos	2

Fonte: Elaboração própria, 2016.

4.2 AS INTERVENÇÕES DIDÁTICAS

As intervenções didáticas foram compostas de 6 tarefas, aplicadas nas datas listadas na Tabela 1. Apresento a seguir a descrição dos dados coletados durante as intervenções.

[19] As aulas têm a duração de 50 minutos.

4.2.1 Reconhecendo padrões nas telas de Escher

Esta intervenção foi desenvolvida durante os dias 10, 11 e 17 de março de 2016, e tinha como objetivo estimular a percepção de regularidades visuais nas obras de Mauritus C. Escher e a comunicação entre os alunos. Para isso, selecionamos 4 telas do artista gráfico holandês:




FIGURA 1A - Conchas e estrelas-do-mar; FIGURA 1B - Peixes, lagartos e patos; FIGURA 1C - Borboletas. FIGURA 1D - Limite circular IV.

Fonte: ESCHER, 2016.

Como recursos didáticos, elaboramos uma apresentação em PowerPoint, com as imagens (Figuras 1A, 1B, 1C, 1D) e folhas de papel A4 com cópias das figuras 1A e 1B em preto e branco para colorir. A proposta incluía apresentar as imagens, discutir sensações e percepções dos alunos em concomitância com a atividade de colorir as figuras. Não foram realizadas atividades de colorir com as figuras 1C e 1D. O tempo para discutir as duas primeiras figuras prolongou-se além do esperado.

No dia 10 de março, havia 19 alunos presentes e, no 5º horário, eu e o professor Marcelo os convidamos para se dirigirem até a sala de multimídia. Os alunos ficaram bastante eufóricos e agitados, pois, na escola, é muito comum os professores usarem essa sala para exibição de filmes. Eles nos perguntaram se assistiriam a um filme. Disse-lhes que não, sendo indagada em seguida se iria lhes apresentar tarefas em que teriam que copiar. Disse-lhes mais uma vez que não e que fariam uma atividade um pouco atípica. Em geral, os alunos se interessam bastante por desenvolver atividades em locais diferentes da sala de aula dentro da escola. Em minha experiência, sempre tive o hábito de levar minhas turmas para outros espaços, como pátio, biblioteca e sala de informática, para desenvolver atividades, obtendo sempre um retorno positivo por parte dos alunos.

Previamente, neste mesmo dia, havia organizado as mesas e cadeiras em grupos de 4, deixando sobre as mesas cadernos já identificados para os registros dos alunos presentes. Ao entrarem, entusiasmaram-se bastante ao ver um caderno para cada um, com seus nomes nas capas. Além disso, havia sobre as mesas lápis de cor, cola e tesoura para o desenvolvimento da tarefa. Os alunos ficaram curiosos para saber o que fariam e o propósito destes materiais. Não é comum que as turmas desta escola levem ou tenham acesso a material escolar diversificado. A maioria leva apenas canetas, lápis n. 2, borracha e um caderno de 200 folhas, em que geralmente fazem as anotações de todas as disciplinas. A escola também não costuma disponibilizar material para empréstimos ou doações àqueles alunos que não têm condições de comprar. Em razão disso, pude perceber a satisfação por parte de alguns alunos, que se sentiram importantes por serem recebidos em tais condições para uma aula de matemática.

Após os primeiros minutos, para que os alunos se acomodassem em grupos e ambientassem com o material e o espaço, pedi-lhes que ouvissem atentamente o que tinha para lhes dizer. Falei, de forma breve, sobre o meu trabalho, minhas motivações e objetivos e também sobre o caráter das tarefas que desenvolveríamos juntos. Expliquei que os cadernos fariam parte dos registros escritos da pesquisa e que eles seriam recolhidos ao final de todas as tarefas.

FIGURA 1A - Conchas e estrelas-do-mar

Fonte: ESCHER, 2016.

Iniciei uma apresentação de slides com uma breve biografia de Escher e, em seguida, projetei a primeira tela *Conchas e estrelas-do-mar* (FIGURA 1A). A reação dos alunos foi surpreendente. Quando visualizaram a imagem, usaram expressões como:

Que doido!
Que desenho diferente!
Que viaaaagem...!

Perguntei-lhes imediatamente por que achavam aquilo. O que estavam vendo naquela imagem? Alguns alunos disseram:

Uma coisa muito doida!
Eu não vejo nada!

Já outros prontamente disseram:

Vejo estrelas-do-mar e conchas!

Nesse momento, em que alguns alunos começaram a dizer que viam estrelas-do-mar e conchas, os demais, que haviam afirmado não enxergar nada, começaram a procurar o que os colegas haviam afirmado ver. Iniciou-se assim um ciclo de discussões para legitimar ou contestar o que os colegas viam. Aproveitei esse momento para lhes pedir que colorissem a cópia da imagem reproduzida em folhas de papel A4, na expectativa de que o ato de colorir pudesse intensificar suas percepções. Os alunos pegaram os lápis de cor e imediatamente começaram a colorir, observando atentamente a tela e utilizando as mesmas cores da imagem original. Pedi que observassem e tentassem colorir de maneira semelhante à imagem original e que registrassem, por escrito e verbalmente, o que estavam visualizando, e que sempre comparassem as novas impressões com as da primeira vez que olharam para a tela.

Os alunos se envolveram bastante com a tarefa de colorir e, inicialmente, as cores foram o principal atributo que lhes chamou a atenção. O tempo gasto por eles foi maior do que eu esperava, o que me deixou um pouco apreensiva quanto ao curso da tarefa. Para que esta não perdesse o foco inicial – a percepção de regularidades visuais e comunicação dos diferentes modos de ver –, eu e o professor Marcelo pedimos que os alunos falassem, em voz alta, o que viam, atitude que fez com que muitos alunos se mobilizassem para legitimar ou contestar a regularidade observada pelo colega.

Eles disseram:

Alguns parecem um caracol!
Vejo conchas com formato de flor!

Vejo as estrelas-do-mar em cima!
Tem uma flor no meio!

Percebendo que alguns alunos começaram a identificar algumas regularidades e relações, perguntei:

Uma flor?

Um aluno disse:

Sim, feita de caracol.

Essas primeiras observações começaram a dar espaço a outras, como:

As conchas no meio parecem um cata-vento!
Parece uma concha fechada!

Uma aluna, referindo-se às estrelas-do-mar unidas em grupos de 4, com conchas no meio, disse:

Debaixo daquelas coisas laranjas parece um sol!

Esta mesma aluna se referiu à união de 4 figuras de outra maneira:

Todos os negócios é igual! [e apontando para as conchas unidas] *Só as estrelas que não.*

A intervenção teve uma duração média de 40 minutos. Ao se aproximar o horário de saída, os alunos ficaram agitados e, percebendo tal comportamento, pedi-lhes que guardassem as folhas dentro de seus cadernos, para recolhê-los. Informei que continuaríamos a tarefa no dia seguinte e que ficaria responsável por guardar os cadernos e as folhas que estavam colorindo. Muitos alunos não queriam parar de colorir e perguntaram se teriam mais desenhos como aqueles para colorir. Argumentaram que haviam gostado muito. Eu disse que sim, que havia mais desenhos. Os alunos então pediram para vê-los. Mostrei-lhes as outras imagens, que acharam muito interessantes.

Como os alunos já estavam envolvidos na tarefa de verbalizar as relações e regularidades observadas, ao verem as outras imagens, iniciou-se rapidamente uma discussão acerca do que viam, e muitos foram até a imagem projetada no quadro branco para mostrar suas visões. Embora muitos estivessem na frente da imagem projetada e a discussão bastante produtiva, já era o final do horário, e disse-lhes que continuaríamos na próxima aula.

Ao final, não foi possível efetuar registros escritos, devido ao número de alunos envolvidos na discussão (a qual tentei, de certa forma, estimular) e do grande envolvimento deles com a ação de colorir.

No episódio descrito, os diferentes modos de ver dos alunos e as discussões ocorridas podem ser analisados com a ajuda de Radford (2011c), que atribuiu às diferenças de perspectivas entre os alunos o papel de transformar a interação em um fenômeno em que pensar sobre as regularidades observadas se dá de modo coletivo, a partir do confronto de pontos de vista. A mobilização dos artefatos, como o ato de colorir e a expressão das regularidades por meio da fala, permitiu que a observação de processos de objetificação fosse vivenciada por alguns alunos ao se aproximarem do objeto da Atividade de Generalização, que é pensar algebricamente a partir da manifestação de um de seus componentes, no caso, a percepção de regularidades.

Na sexta-feira, 11 de março de 2016, demos prosseguimento à tarefa. Ao chegar à sala de multimídia, pedi aos alunos que começassem registrando suas observações no caderno de campo, já que, na aula anterior, o envolvimento com a tarefa de colorir a imagem tomou a maior parte do tempo. Muitos queriam apenas colorir e não interagiam com os demais colegas do grupo para debater a imagem exibida. Por isso, dessa vez dei prioridade aos registros escritos, mas, ainda assim, colorir e verbalizar foram as ações com que os alunos mais se envolveram, isto é, a escrita foi mais uma vez relegada.

FIGURA 1B - Peixes, lagartos e patos

Fonte: ESCHER, 2016.

Apresentei o slide com a tela *Peixes, lagartos e patos*, mas, desta vez, sem entregar no início a cópia em preto e branco para colorirem, a fim de privilegiar a verbalização. Pedi então aos alunos que exprimissem em palavras tudo que aquela imagem lhes transmitia, tarefa que foi bastante interativa. Nesse dia, estavam presentes 16 alunos, e eles recorreram à projeção para apontar diretamente na imagem projetada no quadro tudo o que estavam vendo. Teve início uma discussão acerca das impressões de cada um. A turma ficou bastante eufórica, e a regularidade, que havia de imediato chamado a atenção da grande maioria, foi a união das faces dos animais. Isso divertiu muito os alunos, que afirmaram que os animais “se beijavam”. Alguns viam apenas os lagartos (chamados pela maioria de “tartarugas”) e outros já tinham observado que o mesmo acontecia com todos na figura. Em meio aos risos e brincadeiras, estimulei as discussões, apoiada na observação da aluna “Dayane” sobre as tartarugas se beijando:

> **Flávia:** *Ela achou que as tartarugas estão se beijando!*
> **Dayane:** *Olha aqui pro cê vê, oh! Olha aqui!* [Dayane vai ao quadro e lá observa mais um pouco a imagem] *Um símbolo cabuloso, véio!*

Os alunos começam a rir e alguns afirmam se tratar do símbolo da paz. “Luciane” observou que os lagartos formavam um círculo, e contestou a opinião dos colegas:

> **Luciane:** *Oh, minha filha! Que símbolo da paz, menina! É uma correntinha!*
> **Dayane:** [Legitimando o símbolo da paz visto pelos colegas, argumenta com Luciane]: *É uma bola assim...* [mostra os lagartos unidos no quadro] *e uma ligação que eu te mostrei ali, oh!* [e aponta para os 3 patos, que parecem dividir o círculo formado pelos lagartos]

Expressões como as de Luciane e Dayane, em um primeiro momento, podem parecer totalmente sem sentido, de modo que diríamos que as alunas não perceberam regularidade naquela imagem, passando longe do objetivo de um professor de matemática ao propor esse tipo de tarefa, que esperaria que o aluno descrevesse sofisticadamente as regularidades, por já ter em mente o que o aluno deveria ver. Num primeiro momento, foi esta a minha impressão. Valorizei a intensa comunicação suscitada pela tarefa, mas não dei atenção aos modos de ver de Dayane e Luciane.

Entretanto, Mason (1996) afirma que o estudante é capaz de reconstruir a generalidade, mas de modo totalmente inapropriado, por valorizar aspectos diferentes dos do professor. Nesse sentido, Dayane e Luciane perceberam as regularidades e detectaram padrões que se repetiam nas imagens, cada uma à sua maneira. Caberia a mim – a responsável pela intervenção e, portanto, ciente dos objetivos da tarefa – dar-lhes tempo para que pudessem refinar o modo de expressar suas percepções, apresentando-lhes ainda novas tarefas, em que pudessem generalizar e expressar esta generalidade.

Após a discussão entre os alunos, entreguei-lhes a imagem reproduzida em papel A4 para colorirem, de modo que ficaram envolvidos nesta tarefa. O ritmo de cada aluno era bastante diferente. Percebi que ainda havia alguns iniciando a tarefa relativa à primeira tela, enquanto outros já terminavam a segunda, o que causou um certo tumulto.

Ao final do horário, muitos alunos ainda não haviam terminado de colorir as imagens e ainda não haviam efetuado registros no caderno de campo. Assim como no primeiro dia, a tarefa de colorir foi priorizada pelos alunos. Ela certamente proporcionou, para alguns, a experiência da observação e elaboração de afirmações acerca do que viam, enquanto outros se detiveram apenas em colorir e, de tão entretidos, não interagiram com os colegas e professores no momento da discussão. Diante disso, eu e o professor Marcelo decidimos, na tarefa seguinte, não apresentar de início as cópias para os alunos terminarem de colorir e iniciar diretamente as discussões.

Retornei à escola no dia 17 de março de 2016, quinta-feira, no 3º horário. Eu e Marcelo já havíamos combinado continuar as atividades com as telas de Escher, mas o professor não compareceu à escola devido a problemas de saúde. Como não sabia de sua ausência, assumi a turma e levei os alunos para a sala de multimídia, onde projetei a tela *Limite Circular IV*, de Escher:

FIGURA 1D - Limite circular IV

Fonte: ESCHER, 2016.

Nas tarefas anteriores, as telas eram coloridas e, por isso, para mim, fazia sentido pedir aos alunos que as colorissem e depois explicitassem suas ideias a respeito da imagem projetada. A obra em questão é preta e branca, o que não justificava, a meu ver, a necessidade de colorir. Desse modo, apenas a reproduzi em papel A4, para que, em dupla, os alunos pudessem observar a imagem e explorar as regularidades. A expectativa foi que, ao lidar com os padrões nas 2 primeiras telas trabalhadas e nas discussões, os alunos começassem a desenvolver um olhar mais aguçado para a imagem, que representa um fractal. Porém, ao trabalhar apenas com a tela em sua totalidade, sem manipular as partes que a compunham, por meio do ato de colorir, os alunos tiveram mais dificuldades. Foram comuns manifestações como *não estou vendo nada*, ou *são morcegos e anjos*. Na tarefa anterior, os alunos se comportaram da mesma maneira ao visualizar a obra, porém, ao colorirem, paravam diversas vezes e aventavam novas possibilidades de leitura para aquelas figuras. Diante disso, pedi que, em dupla, respondessem no caderno como aquela imagem era formada, para que pudessem analisar a cópia da imagem em papel A4. Oito alunos responderam o que viam, mas praticamente todos observaram que a imagem tinha morcegos e anjos. Com relação à disposição deles em cada sequência, ainda que eu tivesse pedido que atentassem para ela, poucos alunos notaram tal disposição.

Nesta tarefa, em oposição à anterior, não houve um processo de manipular as partes que compunham o desenho e, em dados momentos, retomar o desenho em sua totalidade para discussão e validação de hipóteses dos alunos, colegas e professora. Os alunos se mostraram desinteressados pela tarefa, fazendo brincadeiras, sendo difícil trazê-los para uma discussão acerca dos padrões observados na imagem. Percebi uma grande diferença entre as tarefas anteriores, em que tinham que colorir, e a última, *Limite Circular IV*. Os alunos argumentaram ser uma imagem confusa e difícil, demonstrando pouco interesse.

Refletindo sobre essas tarefas, Mason (1996) me ajudou a compreender a dificuldade dos alunos quando interpretaram a tela *Limite Circular IV* como algo totalmente diferente do que estavam fazendo. Mais uma vez, o autor explica que, ao elaborar uma tarefa ou exemplo relativo a um assunto ou conteúdo, as experiências de professores e alunos são completamente diferentes. Desse modo, para mim, todas as telas se referiam a um único objetivo, que era a percepção de regularidades em padrões visuais, ou seja, havia para mim um contexto geral que inter-relacionava as telas de Escher. Já para os alunos, cada uma daquelas tarefas era um caso particular, ou seja, (ainda) não tinham consciência de que as telas de Escher tinham uma concepção em comum e de que estas lhes eram apresentadas para a exploração de regularidades – padrões visuais.

Essa experiência me provocou quanto à importância da comunicação e da valorização de outros modos de expressão por parte de alunos e professores. O previsto era que os alunos fizessem registros no caderno, mas eles se mostraram muito resistentes em escrever. Por outro lado, dar-lhes liberdade para levantarem, verbalizarem, ainda que isso causasse certo tumulto na sala, contribuiu bastante para que muitos saíssem da posição de observadores e emitissem suas opiniões, frente aos colegas.

Ao final da tarefa, foi possível perceber que colorir as imagens ajudou muitos alunos a perceberem as regularidades e as respectivas regras de formação (VALE, 2006). Durante a ação de colorir, os alunos experimentaram mudanças quanto às suas formas de ver as regularidades, expressas nos momentos de discussão, quando puderam explicar suas percepções (RADFORD, 2010) para colegas e professores.

4.2.2 Descobrindo padrões em mosaicos

Ainda com a finalidade de oferecer um contato progressivo dos alunos com situações em que pudessem explorar regularidades e exercer sua comunicação, elaboramos a intervenção "Descobrindo padrões em mosaicos", mais uma vez explorando o aspecto visual, mas agora com a possibilidade de manipulação do material. O objetivo desta tarefa foi reconhecer o motivo de repetição que dá origem à organização das figuras e estimular a comunicação e o trabalho em grupo.

Os recursos disponibilizados foram: (i) uma apresentação de slides, na qual mostrei vários mosaicos montados (FIGURA 2) para que os alunos reconhecessem as partes que os compunham e (ii) kits com 100 peças de madeira coloridas cada, para montagem dos mosaicos. As peças que compunham os mosaicos eram triângulos e quadriláteros coloridos. Os mosaicos trabalhados estão expostos na FIGURA 2.

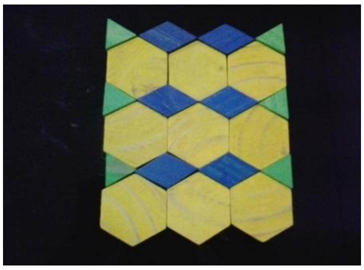
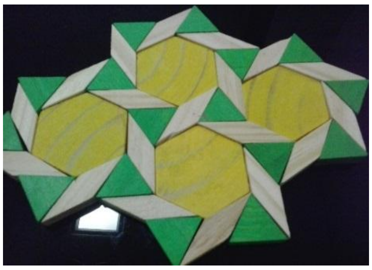


FIGURA 2A



FIGURA

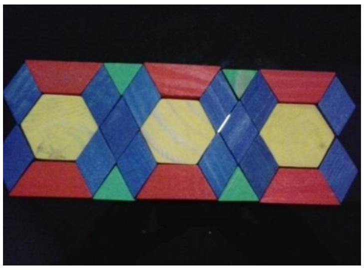


FIGURA 2C

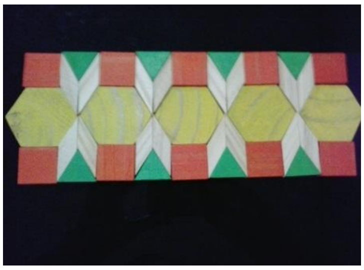


FIGURA 2D

FIGURA

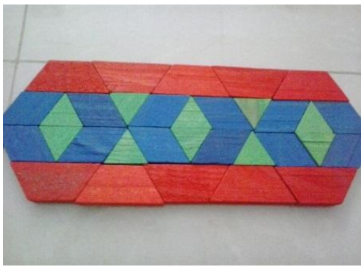


FIGURA 2F

FIGURA 2 - Mosaicos

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Infelizmente, tivemos vários imprevistos para iniciar essa intervenção. Inicialmente, estive na escola no dia 23 de março para aplicar a tarefa, mas não fui bem-sucedida. Neste dia, o professor estava doente, e fui sozinha para a sala. Entretanto, logo no início, fui surpreendida por uma queda de energia, devido a uma forte chuva. Combinei então com o professor Marcelo que voltaria no dia 30 de março, quando ele retornaria ao trabalho. Porém, neste dia, devido a problemas relativos ao repasse de verbas para a merenda escolar, não havia comida para oferecer aos alunos, e a escola os dispensou após o 3º horário, às 15 horas e 30 minutos. No dia seguinte, a escola aderiu ao movimento de paralisação do SINDUTE (Sindicato Único dos Trabalhadores em Educação). Em minha experiência, já sabia que interrupções das aulas acontecem com certa frequência na escola pública.

No dia 1 de abril, confirmei o prosseguimento das tarefas com o professor Marcelo e tive a sua autorização para finalmente iniciar os trabalhos no 3º horário. A escola passava por dificuldades em completar seu quadro de professores e, com isso, os alunos estavam tendo muitos horários vagos, de maneira que, neste dia, teriam um 4º horário vago, para o qual reservei a sala de multimídia. Desse modo, sabendo da necessidade de um professor para ficar com a turma, aliada à necessidade de continuação das tarefas, ofereci-me para estender, sempre que possível o horário da minha intervenção, caso a turma do 8º ano B estivesse sem professor.

Entrei no 3º horário na turma e, juntamente com o professor Marcelo, convidei os alunos para se dirigirem à sala de multimídia. O dia foi tumultuado, pois eles já haviam tido o 2º horário vago. Ao chegarmos à sala, os alunos encontraram as mesas dispostas para o trabalho em grupos de 5 e um mosaico geométrico de madeira em cada mesa, já se ambientando e manipulando o material.

Iniciei projetando os slides de alguns mosaicos (FIGURA 2) e explorei oralmente as regularidades que poderíamos observar. Neste dia, eu e o professor Marcelo tivemos muita dificuldade em conseguir a atenção dos alunos, pois estes ficaram muito envolvidos com as peças, brincando com o material e disputando-o. Como a escola não dispõe de materiais desta natureza – jogos, palitos, tangram e mosaicos –, quando usados em sala de aula, eles costumam atrair bastante a atenção dos alunos e deixá-los eufóricos, o que pode causar certa confusão. Sabendo disso, pedi que se mantivessem reunidos em grupo para explorar as peças do mosaico. Embora se sentissem atraídos por esse tipo de material, os alunos facilmente se distraíam, e mantê-los focados e engajados na proposta da tarefa foi um desafio.

Não conseguindo iniciar uma discussão com os alunos, escrevi no quadro “Descreva, com suas palavras, a imagem que se repete”, e pedi, para cada mosaico que eu projetasse no quadro, que os alunos o observassem, reproduzissem na mesa com as peças de madeira e anotassem a questão no caderno de registros. Elaborei-a com a intenção de que os alunos se envolvessem mais com a observação do padrão que se repetia, e não apenas com a montagem dos mosaicos.

A disponibilização de um jogo de mosaico em cada mesa (aproximadamente 100 peças), embora fosse proposital, com o objetivo de estimular a colaboração entre os membros do grupo nas montagens sugeridas, deu resultados adversos: apenas um deles trabalhou, de fato, em grupo; em outros, os alunos montavam o mosaico individualmente; houve grupos em que todos queriam montar o seu e, dessa forma, depois que o colega fazia o seu, desmontavam-no rapidamente e o remontavam à sua maneira; e, finalmente havia grupos em que 1 ou 2 alunos se engajavam e os demais se dispersavam em outras atividades alheias à aula (por exemplo, usando o celular).

Durante a montagem, somente 5 alunos descreveram as imagens observadas. Dentre as descrições, foi possível constatar que alguns alunos observaram as imagens, relacionando-as a alguma imagem conhecida, como sol, letra etc. Já outros descreveram quais figuras geométricas se repetiam a cada imagem, talvez não observando que imagem elas formavam.

FIGURA 3 - Aluno reproduzindo um mosaico apresentado

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

FIGURA 4 - Alunos em grupo reproduzindo os mosaicos individualmente

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Em minha percepção imediata, a aula foi muito agitada e os alunos não demonstraram muito interesse. Após o recreio, no 4º horário, voltei com a turma para a sala, dessa vez, sem a presença do professor. Os alunos estavam arredios, pois aquele horário não era destinado para aulas de matemática. Eles queriam ficar na quadra da escola. Muitos não retornaram e outros se comportaram entrando e saindo de sala, em tom de brincadeira. Tentei ajudar os grupos que ali estavam a perceber as regularidades, mostrando as partes que compunham os mosaicos, mas a atividade pareceu pouco desafiadora e cansativa.

Fazendo uma reflexão sobre este dia, assim como na primeira intervenção, observei que, para os alunos, os objetivos da tarefa não eram claros. Para eles, as 2 tarefas realizadas

(Escher e Mosaicos) não tinham relação alguma entre si. Mason (1996) afirma que, até que o aluno perceba um exemplo do professor como exemplo de algo mais geral, estes parecem sem significado. A ausência de um direcionamento, por escrito, de modo que os alunos pudessem conhecer previamente o que seria ser feito, pareceu ser um fator que dificultou o entendimento deles da real intenção da tarefa proposta. Ainda que se envolvessem com as telas de Escher, muitos deles viam aquele momento apenas como recreação. Assim, decidi não prosseguir com a tarefa dos mosaicos e, com o aprendizado que as dificuldades trouxeram, planejar como seria a próxima intervenção.

4.2.3 "Canecas"[20]

A intervenção "Canecas" foi desenvolvida durante 3 aulas de 50 minutos, nos dias 8, 14 e 15 de abril de 2016. Após ter desenvolvido as tarefas "Reconhecendo padrões nas telas de Escher" e "Descobrindo padrões em mosaicos", sentimos que seria o momento para uma tarefa mais formal, utilizando a mídia/artefato "lápis e papel", mais próxima da rotina escolar dos alunos. Essa escolha se deu pelo fato de que, no decorrer das atividades com os desenhos, apesar do grande envolvimento dos alunos, pude perceber, como mencionado anteriormente, que muitos deles não reconheciam aqueles momentos como uma aula de matemática, mas como uma atividade recreativa. Com receio de os alunos não compreenderem ou se sentirem inseguros diante de algo não rotineiro, decidimos, então, propor a atividade "Canecas" (QUADRO 4), que teve como objetivos:

- perceber e identificar o motivo de repetição de uma dada sequência;
- generalizar, em linguagem oral e escrita, uma regra para encontrar termos distantes da sequência.

Como recursos didáticos, preparei uma apresentação de slides, a reprodução da tarefa em folhas de papel A4 e o caderno para registro dos alunos.

Nessa sequência, esperava-se que 2 atributos importantes fossem percebidos: o tamanho das canecas e a posição das asas. A expectativa era de que os alunos percebessem que o motivo de repetição ocorrer a cada grupo de 4 canecas, sendo um múltiplo de 4. Assim, para se determinar a posição da 84ª caneca, a mais distante da sequência, a relação a ser observada é que o grupo de 4 canecas se repetirá completamente 21 vezes até esta posição. Desse modo, a 4ª caneca será sempre grande, com asa para fora.

[20] Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 147.

QUADRO 4

Tarefa “Canecas”

CANECAS

Pedro viu sua mãe organizando a cozinha e pediu para ajudar. A mãe lhe pediu que organizasse as canecas em uma prateleira. Veja a maneira como Pedro as organizou:

Pedro dispôs as canecas de maneira especial. Qual foi ela?

Decidiu então ver se sua mãe notara a forma como as havia disposto. Tampou uma caneca e lhe perguntou:

— Como é a caneca que está tampada e como está posicionada?

— Se eu decidir colocar mais canecas assim, como estarão as próximas 3 canecas? E a 17ª caneca? Como será a 20ª?

A mãe decidiu desafiar o filho e lhe perguntou:

— Como seria a caneca colocada na 84ª posição?

E você? Como responderia as questões acima? Explique o que você pensou para respondê-las.

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 147.

Em 8 de abril de 2016, primeiro dia de desenvolvimento da tarefa, o professor Marcelo teve que participar da elaboração de uma prova com a supervisora da escola. Assim, conduzi a tarefa sozinha. Após as primeiras intervenções, percebendo a agitação dos alunos, passei a agir menos como pesquisadora, tomando decisões e intervindo em momentos de indisciplina, assumindo, em alguns momentos, o papel de professora da classe.

Iniciei projetando um slide (FIGURA 5) com a imagem das canecas e questionei o modo como estavam organizadas. A turma estava bastante agitada e apenas 4 alunos se envolveram nesta discussão. Após esse momento, distribuí folhas com a tarefa e lhes pedi que, em dupla, fizessem a atividade. Muitos alunos responderam apenas à primeira questão (“Como é a caneca que está tampada...?”) dizendo que se tratava da caneca vermelha. A maioria não se interessou em ler a tarefa, manifestando o desejo de colorir, como na atividade anterior.

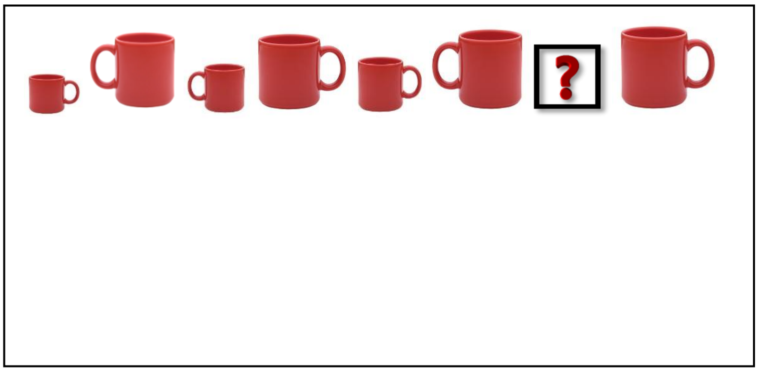


FIGURA 5 - Slide projetado com as canecas

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 147.

Pedi aos alunos uma descrição mais detalhada da caneca tampada. Eles responderam “grande”, pois as canecas grandes estavam em posições alternadas com as pequenas. Porém, não chegaram a um consenso sobre a posição das asas. Solicitei que respondessem então às próximas perguntas: “Se eu decidir colocar mais canecas assim, como estarão as próximas 3 canecas? E a 17ª caneca? Como será a 20ª?”

As posições da 17ª e da 20ª caneca foram encontradas, pela maioria dos alunos que responderam, por meio de contagem, utilizando as próprias figuras da sequência. Contavam até a 8ª e usavam o próprio desenho de novo para contar até a 17ª. Não percebi alunos continuando a sequência por meio da estratégia de desenhar as canecas até a 17ª posição.

Neste dia, não foi possível obter registros além do diário de campo, pelo fato de estar sozinha com a turma e o número de alunos dispersos, que ignoravam a tarefa, ser grande.

Até então, as discussões coletivas estavam envolvendo os alunos. Para esta tarefa, a primeira envolvendo sequências, em que as propostas apontam a relevância de momentos de discussões durante seu desenvolvimento, senti a necessidade de um envolvimento maior no sentido de ajudar na leitura e compreensão do texto, na continuação da sequência e também no estabelecimento da relação entre a sequência de figuras e uma sequência numérica. Concluí que os momentos de correção e discussão deviam ser cuidadosamente planejados, dada a cultura em que os alunos estavam imersos, na qual tinham o hábito de apenas copiar a resposta certa. Assim, decidi investir nesses momentos, com a intenção de instigar os alunos a ler, escrever, justificar suas respostas e se comunicar.

No 2º encontro relativo à tarefa “Canecas”, no dia 14 de abril de 2016, durante o 4º horário, contei com a presença do professor Marcelo. Iniciamos com a correção da tarefa, mas não com a simples “divulgação” das “respostas corretas”. Fizemos uma discussão para cada questão. Como na aula anterior, muitos alegaram já ter feito a tarefa, e eu e o professor Marcelo tivemos que argumentar muito acerca do objetivo do trabalho para conseguir atenção e comprometimento dos alunos.

Passamos 20 minutos conversando com eles, pedindo colaboração para que pudéssemos dar prosseguimento à tarefa, contextualizando-a novamente e retomando o enunciado anteriormente trabalhado:

"Pedro viu sua mãe organizando a cozinha e pediu para ajudar. A mãe lhe pediu que organizasse as xícaras em uma prateleira. Veja a maneira como Pedro as organizou:"

Pedimos que os alunos observassem atentamente o modo como as canecas estavam organizadas. Ao lhes perguntarmos, muitos responderam *pequena, grande*...

Observando que detectaram uma regularidade, pedi-lhes que começassem a elaborar o registro escrito da primeira questão, instigando-os a observar mais:

> *Pequenas e grandes...então, vamos escrever isso... Como que ele organizou? Pequenas e grandes!*

"Fábio" respondeu:

> *Uma pra esquerda, outras pra direita.*

O restante da turma não ouviu a fala do colega, que já observava as posições das asas das canecas. Insisti na pergunta:

> *Mas pequenas e grandes...elas estão de qualquer jeito?*

Nesse momento, os alunos perceberam que uma caneca pequena e uma grande não era o suficiente para descrever a organização das canecas. A turma começou a observar, e muitos, falando juntos, responderam:

> *Tá uma pra esquerda e uma pra direita.*

"David" pediu a palavra e reforçou:

> **David:** *Ó! Uma pra esquerda, uma pra direita, uma pra esquerda, uma pra direita, uma pra esquerda...*

Nesse momento percebi que a turma havia reparado na posição alternada das canecas pequenas e grandes. Alguns começaram a falar que as asas estavam orientadas para a direita ou para a esquerda, e se posicionaram em relação a essa percepção. Porém, para determinar a orientação das asas, não era suficiente perceber a orientação alternada para a esquerda ou direita. Os alunos perceberam que 2 canecas consecutivas não tinham a mesma orientação, mas não perceberam que a sequência relativa à orientação das asas não era "direita, esquerda, direita, esquerda", como haviam apontado.

Então, novamente pedi que observassem atentamente, e desenhei as canecas no quadro. Ao perguntar sobre a 7ª caneca (que estava tampada), sua descrição foi obtida alternando-se pequenas e grandes. Então perguntei acerca da orientação da asa da caneca. Os alunos iniciaram uma discussão, mas não chegaram a uma conclusão.

Nesse momento, o professor Marcelo foi ao quadro e numerou as canecas. Vimos a necessidade de os alunos completarem a sequência, mas, antes disso, mostrei aos alunos que ali havia pares de canecas (pequenas e grandes), ora com as asas orientadas para dentro, ora com as asas orientadas para fora, e que esses pares poderiam nos ajudar a descobrir o "segredo" do Pedro.

Apontei para os pares e circulei as 4 primeiras canecas, mostrando aos alunos que, a cada 4, eu teria 2 pares: um com "com asas para dentro" e outro com "asas para fora". Mas, para que os alunos utilizassem esse grupo de 4 canecas, seria necessário também que estabelecessem a relação entre a sequência numérica que usamos para numerar as canecas e as posições das mesmas. Pedi então que completassem até a 11ª caneca, com o objetivo de verificar se utilizariam esse motivo de repetição para completar a sequência ou, ao menos, a relação paridade/tamanho, que auxiliaria a determinar o tamanho da caneca.

Mas isso não aconteceu. Ao perguntar a posição da 9ª caneca, observei que os alunos utilizavam a caneca anterior para determinar a próxima. Mesmo com a sequência numérica associada, não percebiam que as canecas ímpares eram pequenas e as grandes, pares. Então, tentei estabelecer com eles essa relação:

> **Flávia:** *Então vamos pensar quais são pequenas e grandes...A 9ª é como?*
> **Alunos:** *Pequena!*
> **Flávia:** *Por quê?*
> **Roberto:** *Porque a 8ª é grande. A 9ª é pequenininha.*
> **Flávia:** *E a 10ª?*
> **Roberto:** *Grande.*
> **Flávia:** *Por quê?*

Os alunos ficaram em dúvida. Mencionei novamente o segredo, associando a cada grupo de 4 canecas 2 pares com canecas grandes e pequenas, com asas para dentro e para fora.

Perguntei pela 12ª caneca, que fechava o 3º grupo de repetição desta sequência:

> **Flávia:** *E agora? A 12ª?*
> **Roberto:** *Pra fora.*

Eu e o professor perguntamos então pela 17ª caneca. "Roberto" chamou a atenção dos colegas para descrição desta caneca, por conta de suas brincadeiras. Durante a discussão, alguns alunos estabeleceram a relação paridade/tamanho da caneca:

> **Flávia:** *Como é a 17ª?*
> **Roberto:** *Para dentro.*
> **Flávia***: Por quê?*
> **Roberto:** *Porque a 16ª é para fora.*
> **Flávia:** *Por que a 16ª é para fora?*
> **Roberto:** *Porque a 15ª é para dentro.*
> **Todos:** (Risos).

Nesse momento, apesar da brincadeira, o Roberto chamou atenção de toda a turma, que observava atentamente. Então argumentei:

> **Flávia:** *Eu quero uma resposta convincente.*
> **David:** *Eu vou ter que somar as canecas que tá pra dentro e tá pra fora.*
> **Flávia:** *Me explica melhor...somar...*

Os alunos discutiram e David se dispersou, não respondendo. Então retomei a discussão:

> **Flávia:** *Então vamos lá na 17ª. Como é que a gente vai descobrir um segredo para achar a 17ª?*
> **Luciane***: Ela é pequena.*
> **David:** *Ela é pequena e com asa pra dentro.*

Houve outra discussão acerca da orientação das asas da caneca, retomada agora pelo professor Marcelo:

> **Marcelo**: *Por que a 17ª é pequena?*
> **Felipe**: *A 17ª é pequena, virada pra fora.*
> **Roberto:** *Porque todas as pequenas são números ímpares.*
> **Marcelo:** *O Roberto falou que todas as pequenas são números ímpares. É verdade?*
> **David:** *É! 1, 3, 5, 7...*
> **Welington:** *Todas as pequenas é número ímpar.*
> **Marcelo:** *Isso é verdadeiro ou falso?*

Marcelo: *Roberto, repete a sua fala.*
Roberto: *Porque as pequenas são ímpares!*

Os alunos mostraram certa surpresa com a afirmação de Roberto, pois, até então, ninguém havia estabelecido essa relação. Alguns alunos se engajaram mais ativamente na discussão a partir daí.

O episódio referido foi surpreendente para os alunos, fazendo com que parassem e começassem a analisar atentamente a tarefa, o que, a meu ver, aconteceu por 2 motivos: (i) até então, as tarefas não pareciam "matemáticas" para os alunos, e a fala de Roberto, ao usar relações numéricas, deixou um ar de surpresa na turma, que revelava não ter pensado nisso; (ii) Roberto, Welington e David eram os alunos de quem a turma e o professor Marcelo não esperavam essa atitude, pois Roberto estava fazendo bagunça no momento e Welington e David são rotulados como alunos que possuem uma grande dificuldade em matemática.

Depois disso, a turma se engajou na tarefa, fazendo o uso das relações propostas pelos colegas:

Flávia: *Agora a gente vai para a asa então...*
Marcelo: *Agora a posição da asa.*
Felipe: *Vai ser pra dentro.*
Flávia: *Tem jeito da gente estabelecer essa relação de par ou ímpar para as asas?*
Dayane: *Tem não. Pois todas as pequenas são ímpares.*

Perguntamos a posição das asas e muitos alunos disseram ser para a direita, mas sem apresentar argumentos.

O aluno "Edson" justificou:

Edson: *É só contar aqui como se fosse 10.*

Pedimos então que Edson repetisse:

Edson: *É só contar direita esquerda até dar 17.*

Alertei Edson para o fato de que ele estava à procura de uma justificativa para a orientação das asas apenas das canecas pequenas. Além disso, ainda que ele tivesse selecionado as xícaras 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 e 17 para contar alternadamente direita e esquerda, essa regra seria inviável para canecas que ocupassem posições mais distantes. Perguntei à turma, por exemplo, qual a descrição da xícara 99ª. Os alunos responderam *pequena*. Mas, em relação à orientação da asa, não houve uma justificativa além de que contariam para dentro, para fora, para dentro, para fora..., até chegar em 99.

Voltei ao quadro e lhes disse que, para descobrirmos o segredo de Pedro, teríamos que observar o grupo de 4 canecas que havíamos circulado, pois nele havia canecas pequenas e grandes e com asas voltadas para dentro e para fora. Assim, a 17ª caneca seria a 1ª caneca de um novo (o 5º) grupo de 4 canecas, sendo, portanto, pequena e com a asa voltada para dentro. Neste dia, tivemos que interromper a discussão, pois o 4º horário havia chegado ao final.

Retomamos a correção no dia seguinte, 15 de abril, a partir do desenho da sequência de canecas numeradas e reforçando os grupos de 4 canecas. Nosso objetivo foi tentar trazer os alunos para o desafio de perceber mais regularidades naquele arranjo de canecas. Dayane e Edson se posicionaram, relacionando os grupos de 4 xícaras às posições da sequência numérica.

Continuamos usando a palavra "segredo" para o padrão a ser generalizado. Dayane argumentou que, por exemplo, a 20ª caneca seria grande, com a asa para fora pois $4 \times 5 = 20$.

Faltava descrever a 84ª caneca.

O aluno Edson a descreveu como grande, com a asa orientada para fora, e justificou:

> **Edson:** *Grande, com asa pra fora, pois 84 dá pra dividir por 4.*

Edson foi o único a formular uma justificativa para encontrar a 84ª caneca, o que, de acordo com Mason (1996), indica que o aluno estava pensando algebricamente, por ter elaborado um esquema aritmético para descrever a caneca que não poderia ser obtido a partir da contagem. Segundo Radford (2010b), isso dá indícios de uma *generalização algébrica factual.*

Mason (1996, p. 70) argumenta que "contemplar as propriedades dos números é uma forma de se afastar do envolvimento no particular, e tomar consciência dos processos". Isso deixo claro, para mim, que o ato de circular os grupos de repetição era uma estratégia à qual eu deveria estar atenta. Edson e Dayane apreenderam a generalidade, mas a maioria da turma teve dificuldades, o que é natural dado o então desconhecimento da proposta por parte deles. Vale e Pimentel (2011) afirmam que

> o objetivo último é que os alunos generalizem relações a partir de um pequeno número contável de repetições de um motivo para a continuação do padrão a um número de repetições que já não é possível contar. De qualquer modo, não se pode

> descuidar desta fase inicial de concretização, que permite ao aluno tomar contacto com a tarefa, envolver-se nela (mesmo fisicamente) e iniciar sua compreensão (VALE; PIMENTEL, 2011, p. 71).

A expressão em linguagem oral vinha desencadeando ações de posicionamento e discussão dos alunos sobre as tarefas. Contudo, era necessária uma estratégia que os fizesse perceber o motivo de repetição da sequência dada, fator determinante para o processo de generalização.

4.2.4 Oficina de bijuterias

A intervenção “Oficina de bijuterias” aconteceu em 2 etapas. A 1ª, desenvolvida em 29 de abril de 2016, no 3º horário, tinha o objetivo proporcionar aos alunos a identificação de regularidades em bijuterias.

Como a etapa consistiu na observação de padrões em bijuterias, para iniciar, preparei uma atividade em papel A4 (FIGURA 6), com imagens de bijuterias e uma peça de vestuário. Além disso, levei alguns colares para a sala (FIGURA 7), como o intuito de que os alunos os observassem. A intenção era que os alunos atentassem para as regularidades nas imagens e nos colares, de modo que comunicassem aos colegas e aos professores a maneira como eram formados.

Na 2ª etapa, desenvolvida ao longo dos dias 6, 12, 16, 17 e 18 de maio, os alunos fariam os próprios colares, sendo assim estimulados a generalizar padrões relativos a números pares e ímpares e exercitar habilidades de comunicação e formulação de hipóteses e justificativas.

4.2.4.1 A 1ª etapa da Oficina de bijuterias

Aluno(a): ____

Oficina de bijuterias

Você já parou para observar estampas de roupas ou a apresentação de bijuterias?

O que as imagens acima têm em comum?

Agora, observe a bijuteria que você tem em mãos e responda:

1) Como a pessoa que a confeccionou pensou para montá-la?

2) Que cor tem a 5ª conta?

3) Qual será a cor da 11ª?

4) Qual a cor da 34ª? Explique como você pensou para chegar a estas respostas.

FIGURA 6 - 1ª tarefa da intervenção “Oficina de bijuterias”

Fonte: Elaboração própria, 2016.

FIGURA 7 - Colares confeccionados por mim apresentados aos alunos

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

No dia 29 de abril, cheguei à escola com 20 minutos de antecedência e preparei o laboratório para receber os alunos. Pensando no aluno Túlio, que, em virtude de suas necessidades especiais, passara a fazer todas suas atividades escolares sozinho, somente com o acompanhamento de uma professora auxiliar, combinei com o professor Marcelo que todas as intervenções seriam desenvolvidas nesse espaço, para que o aluno Túlio pudesse participar.

Dirigi-me para o laboratório com alguns alunos, e o professor Marcelo ficou na sala para descer com os demais. Nesse trajeto, tive dificuldades em chegar na sala, pois muitos queriam ir beber água ou ao banheiro, enquanto outros pediam para participar de uma tarefa externa com a professora de artes. Ao finalmente acomodar os alunos na sala, tive outro imprevisto. Alunos começaram a pedir para voltar para a sua sala de aula, pois fui informada de que o professor Marcelo não desceria com alguns alunos com os quais havia ficado, devido a problemas de indisciplina. Diante desse cenário, iniciei a tarefa sozinha, e com menos da metade dos alunos.

Ao iniciar a tarefa relativa à 1ª etapa, tive bastante dificuldade, pois os alunos, embora estivessem em menor quantidade, davam a impressão de não querer estar ali. A falta de legitimidade da tarefa na opinião dos alunos foi notável.

Então, comecei a ler a folha e insistir para que participassem, lendo e respondendo às perguntas que fazia, sem obter muito retorno. Algo que sempre me incomodou muito no contexto de minha atuação como professora é o baixo interesse dos alunos em fazer as tarefas durante as aulas.

Há o discurso, prevalecente entre a maioria deles, de que “não gostam de copiar”, “não gostam de matemática”, ou “não fazem os exercícios por não saberem como”. Apresentei-lhes uma atividade pouco comum em sua realidade: folha impressa, texto, ausência de contas ou fórmulas. Além disso, a tarefa continha imagens do cotidiano, o que, ainda assim, não lhes despertou curiosidade. Ao iniciar com eles a leitura, perguntei se já haviam observado padronagens em tecidos e bijuterias. A maioria disse nunca ter observado as roupas que usa. Perguntei-me: “Será mesmo que nunca pararam para reparar em um colar ou uma blusa estampada? Ou o símbolo de uma marca?”

Será que a resposta manifestava simplesmente o medo de se expor? Ou não querer se comunicar com a professora? Observei que, entre si, em se tratando de assuntos alheios à rotina escolar, os alunos se comunicavam bem, em linguagem própria e legitimada entre eles. Mas, para que a comunicação acontecesse com o professor ou em relação à atividade matemática, parecia haver um abismo, por vezes difícil de transpor.

Ao lhes entregar os colares, pedi que observassem e respondessem às questões. Poucos alunos leram a atividade e se empenharam em responder. Outros sequer tiveram a iniciativa de ler previamente, aguardando que eu desse uma ordem. Alguns se expressaram dizendo: “O quê que é pra fazer?”

A tarefa foi desenvolvida em aproximadamente 20 minutos, pois, além do imprevisto inicial, tive que retirar alunos de sala e solicitar a presença da vice-diretora, para continuar a tarefa. Neste dia, não consegui registrar dados em áudio. Os alunos presentes não se envolveram na tarefa e não foi possível discuti-la ao final da aula. Tendo em vista o tempo que necessitaria para a 2ª parte da atividade, dedicada à confecção dos colares, optei por encerrar a tarefa neste dia.

Observar padrões não era algo familiar aos alunos do 8º B. Interpreto que, talvez, eu tenha me adiantado em relação à expectativa de que os alunos entendessem que estávamos buscando os padrões. Contudo, assim como na tarefa envolvendo a tela *Limite Circular IV* e “Descobrindo padrões em mosaicos”, Vale e Pimentel (2011, p. 26) explicam que, em relação aos padrões visuais, ver está relacionado ao ato de “(...) decompor a figura inicial em partes que tenham significado para o aluno ”. Nessa tarefa relativa à primeira etapa da oficina de bijuterias, não houve um artefato que mediasse essa ação de decompor, como houve, por exemplo, no ato de colorir as obras de Escher.

Como se sabe, isso é uma constante na realização de tarefas escolares e processos de ensino e aprendizagem, nos quais não há um desenvolvimento linear e positivo. No Brasil, as tarefas escolares estão inseridas em contexto difícil e cheio de contradições. As condições são precárias, e é nesse ambiente que nós, professores da escola pública, nos aventuramos. Entretanto, há possibilidades.

Entre contradições, erros e acertos, continuamos a pesquisa.

4.2.4.2 A 2ª etapa da Oficina de bijuterias

A 2ª etapa da atividade "Oficina de bijuterias" foi desenvolvida nos dias 6, 12, 16, 17 e 18 de maio de 2016. O objetivo desta 2ª parte foi verificar se o aluno era capaz de: (i) reconhecer o motivo de repetição de uma sequência, por meio da percepção de regularidades; (ii) generalizar a lei de formação das sequências; e (iii) expressar-se utilizando diversos recursos semióticos (gestos, fala, desenhos, fórmulas). Os recursos didáticos empregados foram:

- pedras em resina de cores diferentes;
- fio de nylon;
- folhas para registro com as tarefas.

QUADRO 5

Oficina de bijuterias

Aluno(a):

Tarefa 1

Forme um colar com a sequência de contas: azul, branca, azul, branca. Faça isso sucessivamente, e após colocar 13 contas, responda:

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 37ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição do colar?

Tarefa 2

Agora forme o seguinte colar com a sequência: 1 conta azul e, em seguida, 2 brancas, 1 azul, 2 brancas. Faça isso sucessivamente, e após colocar 14 contas, responda:

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 36ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição no colar?

Tarefa 3

Forme agora um colar com a sequência: 1 conta azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul.

a) Explique como você continuaria esse padrão.

b) Qual a cor da 33ª pedra? Explique.

c) Que relações chamaram sua atenção nesse colar?

Tarefa 4

1) Crie um colar diferente, usando 3 cores e que siga um padrão. Elabore perguntas relacionando a posição e a cor das contas no colar. Troque com seu colega para que ele possa responder suas perguntas.

2) Invente colares e/ou pulseiras com as cores que quiser e que sigam padrões, explicitando-os.

Fonte: Adaptado de GRUCOMAT, 2016.

As tarefas 1, 2 e 3 foram desenvolvidas durante os dias 6 e 12 de maio. A tarefa 4 não foi finalizada, devido ao tempo gasto com as 3 primeiras, e os alunos se disseram cansados. Em relação a Tarefa 1, a expectativa era a de que os alunos relacionassem as cores alternadas das contas com a sequência numérica de pares e ímpares. Assim, esperávamos que, ao solicitar uma posição qualquer de uma conta, estabelecessem a relação cor/paridade.

No dia 6 de maio, tive as companhias do professor Marcelo e da professora Cristiane, a qual acompanha o aluno Túlio. Neste dia, eu e Cristiane deixamos a sala previamente organizada, com potes contendo contas azuis, verdes, brancas, amarelas e marrons, além de fios de nylon. Os alunos se envolveram bastante na tarefa de montar colares e se interessaram em responder às perguntas feitas na folha de papel que lhes foi entregue. No entanto, as respostas dadas na folha de atividades não apresentavam justificativas e, por mais que eu, Marcelo e Cristiane tentássemos suscitar discussões com a finalidade de enriquecer a elaboração das respostas, alguns alunos faziam-no apenas oralmente. Percebi que outros queriam responder logo e dar a tarefa por terminada para ficarem ociosos. Outros, ainda, queriam responder, mas somente mediante a legitimação da resposta dada por mim ou pelo professor Marcelo. Mesmo com todos esses percalços, seguimos em frente.

FIGURA 8 - Grupo de alunos montando os colares solicitados

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

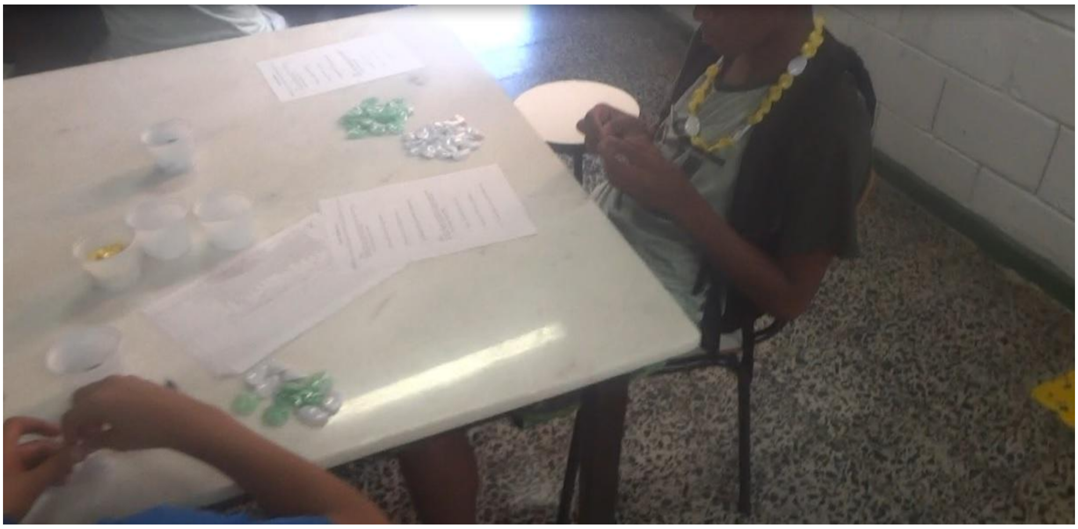


FIGURA 9 - Alunos confeccionando o colar relativo à Tarefa 1

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Apresento alguns episódios em que os alunos produziram os colares relativos às tarefas 1 e 2, que estavam relacionadas, respectivamente, a uma sequência de pedras azul, branca, azul, branca, e assim por diante, e outra com a organização azul, branca, branca, azul, branca, branca, e assim por diante. Devido à quantidade de pedras azuis, que foram insuficientes para realizar as tarefas, pedi a alguns alunos que fizessem os colares com pedras verdes e brancas.

QUADRO 6

Tarefa 1

Forme um colar com a sequência de contas: azul, branca, azul, branca. Faça isso sucessivamente e, após colocar 13 contas, responda:

a) Como poderíamos continuar o padrão?

b) Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?

c) Qual será a cor da 37ª conta? Como você sabe disso?

d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição do colar?

Fonte: Adaptado de GRUCOMAT, 2016.

Na 1ª questão, “Como poderíamos continuar com o padrão?”, um grupo, composto por 4 alunos, usou a estratégia de contagem no próprio colar, que tinha 13 pedras. Os alunos discutiam, pois, ao usar as próprias pedras enfileiradas, tiveram dúvida se contavam ou não a 13ª pedra ou a 1ª, para continuar esse padrão. Registramos o momento em percebemos a aluna “Rafaela” usando a própria sequência de 13 pedras para encontrar a 14ª e a 37ª pedras. “Ruan” adverte Rafaela quando esta afirma que a 14ª pedra é verde:

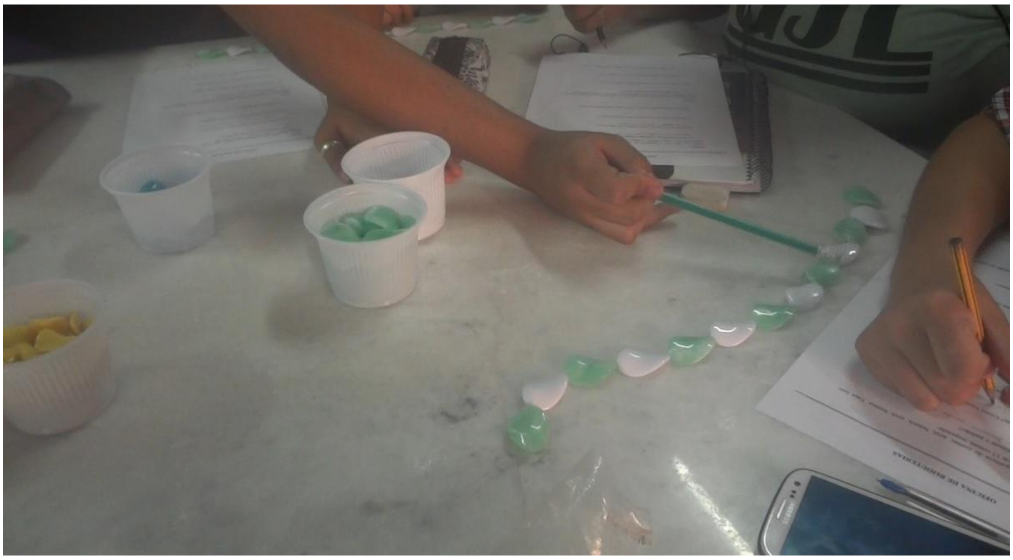


FIGURA 10 - Discussão do grupo acerca da cor da 37ª pedra

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

> **Ruan:** *Ela não volta no verde não, fia!*
> **Rafaela:** *É verde!*
> **Karla:** *Não é não, Rafaela! Olha aqui*...[aponta o lápis para a pedra verde, com o lápis] *13! A partir da branca..., 12ª voltando, 37ª verde!*
> **Rafaela:** *De que adianta cês saber se deu 37?* [referindo-se ao fato de ela ter contado com a 13ª pedra para continuar a sequência]
> **Karla:** *Contando 2 vezes a mesma pedra!*
> **Aline:** *Conta com a verde, gente!*
> **Rafaela:** *A verde sempre conta!*
> **Rafaela:** *Ô, professora, vem cá!*

É possível observar, na interação entre as alunas, a vivência dos processos de objetificação ao recorrerem aos gestos, material e à fala para atribuir significado à tarefa que estavam realizando. Ainda que os alunos Ruan, Aline e Rafaela não tivessem percebido que o par verde e branco se repetia, sendo que a cor da pedra se relacionava com sua paridade, foi possível observar o esforço dos alunos para pensar e agir em conjunto. Karla dava indícios de perceber que as pedras brancas eram pares:

Karla: *Não é não, Rafaela! Olha aqui*...[aponta o lápis para a pedra verde, com o lápis] *13! A partir da branca..., 12ª voltando, 37ª verde!*

FIGURA 11 - A intervenção de Karla

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Assim, para que Karla repensasse e pudesse ajudar os colegas, intervi no grupo apenas para colocar a possibilidade de relacionar a sequência de cores a uma sequência numérica. Parecia que a aluna já havia percebido que para continuar a sequência deveria manter a ordem verde e branca. Fiquei em dúvida quanto a isso, e decidi deixar o grupo interagir um pouco mais, para que Karla pudesse refletir, dado que ela estava se esforçando para formular explicações aos colegas, colocando seus pontos de vista, mas respeitando e ouvindo as outras opiniões.

Com relação à 2ª pergunta, "Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?", chamou nossa atenção o diálogo estabelecido com o aluno David, ao me questionar que precisava de mais pedras para completar o colar até a 20ª pedra, o que revelava que o aluno não havia prestado atenção ao enunciado:

Flávia: *Não precisa por mais que 13!*
David: *Eu já fiz! Aqui mandou por 20!*
Flávia: *Não... Qual é a cor da 20ª pedra?*
David: *Branca.*
Flávia: *Por quê?*
David: *Porque é!*
Flávia: *Mas por que você acha que ela é branca?*

O aluno não embasa com argumentos o motivo pelo qual a 20ª pedra é branca.

A 3ª pergunta pedia uma pedra mais distante: “Qual seria a cor da 37ª conta? Como você sabe disso?” Para respondê-la, “Evandro” colocou mais pedras em seu colar, até ter um com 37 pedras. Pedi que contasse em voz alta as pedras de seu colar. Depois, pedi que contasse apenas as verdes:

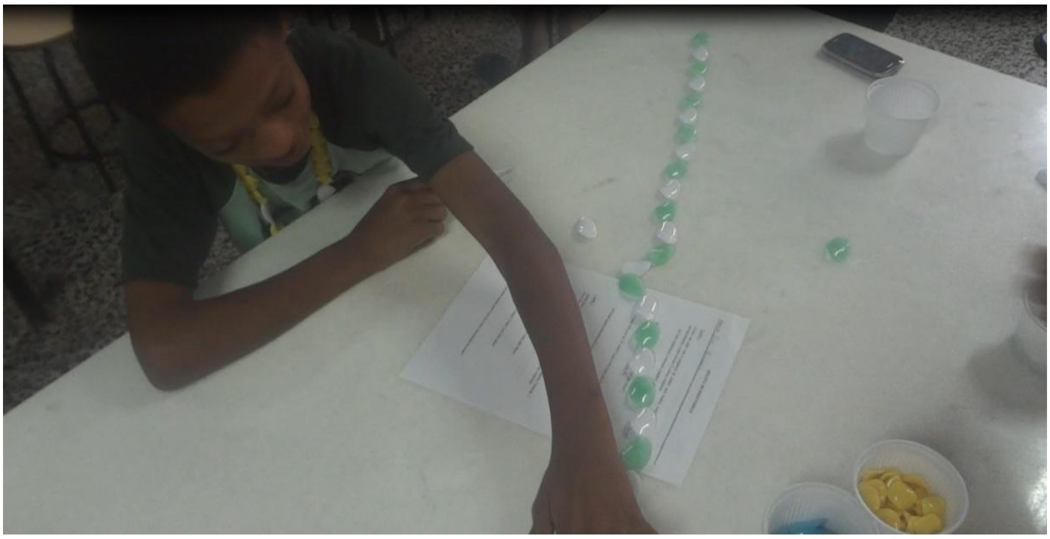


FIGURA 12 - A estratégia de Evandro para determinar a cor da 37ª pedra

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Flávia: *Você percebeu alguma coisa?*
Evandro: *Ímpar, par, ímpar, par....*
Flávia: *As verdes são...?*
Evandro: *Ímpares.*

Ainda que Evandro tenha tido acesso a essa informação, quando o professor Marcelo pediu a 100ª posição, o aluno não soube responder.

Nos 2 episódios, a postura de David e Evandro nos permite uma comparação entre suas estratégias. Vale e Pimentel (2011) afirmam que a extrapolação do simples completamento da sequência só vai ocorrer mediante a identificação do motivo de repetição. A necessidade de Evandro em usar pedras para encontrar a 37ª posição é um indício de que o aluno ainda não havia percebido o motivo de repetição, ao contrário de David, que, ao não ter mais pedras para completar o colar, afirma que a 20ª pedra seria branca.

O aluno “Sérgio” pediu que eu fosse à sua mesa para mostrar como havia pensado para encontrar a 37ª pedra:

Sérgio: *Ô professora, se contar assim...ó....tipo...o 37 é ímpar... E tipo assim ó...se fazer 1,2,3,4,...,3 é ímpar!*
Flávia: *Repete pra mim!*

> **Sérgio:** *A 37 é ímpar! E se eu contar tipo assim ó...1, 2, 3,* [Sérgio enuncia a sequência numérica, estabelecendo a sua relação com as cores, apontando para cada pedra ao mesmo tempo]*...as verdes tudo vai ser ímpar! Aí no caso aqui, a 37 vai dar ímpar!*
> **Flávia:** *Sim! Certinho!*

Nesse episódio, é possível observar o processo de objetificação vivenciado por Sérgio, ao mobilizar uma relação matemática para determinar um termo que não estava no seu campo de percepção, coordenando fala, gestos e o material para elaborar sua argumentação.

Na Tarefa 2, a discussão das alunas Karla e Aline nos chamou a atenção com relação à estratégia de utilizar o próprio colar para continuar o padrão:

QUADRO 7

Tarefa 2

Agora forme o seguinte colar com a sequência: 1 conta azul e, em seguida, 2 brancas, 1 azul, 2 brancas. Faça isso sucessivamente e, após colocar 14 contas, responda:

a) Como poderíamos continuar o padrão?
b) Qual será a cor da 20ª conta? Como você sabe disso?
c) Qual será a cor da 36ª conta? Como você sabe disso?
d) Existe alguma relação entre a cor da conta e sua posição no colar?

Fonte: Adaptado de GRUCOMAT, 2016.

> **Marcelo:** *Qual que é a dúvida?*
> **Karla:** *É que vai terminar em branca*.
> **Aline:** *É....! Tá dando uma branca aqui* [referindo-se à 14ª pedra] *e uma azul aqui* [referindo-se à 1ª].
> **Marcelo:** *Cês colocaram quantas pedras aí?*
> **Karla e Aline:** *14.*
> **Karla:** *Tem que terminar em duas brancas aqui...e uma azul aqui...se colocar mais uma branca aqui...vai ficar fora do padrão* [referindo-se a uma possível substituição da 13ª pedra, que era azul, por 1 branca].

Vale e Pimentel (2011) verificaram em seus estudos que não é claro para alguns alunos que uma sequência não tenha que terminar com o último elemento do motivo de repetição, o que explica o impasse entre Aline e Karla. Aline, a exemplo das ideias de Vale, sentiu dificuldade para colocar apenas 2 pedras, sendo que o motivo tinha 3. Já Karla apreendeu o motivo, pois se inquietou com o fato de a quantidade de termos pedido não ser múltiplo do número de elementos do padrão, mas percebeu que não poderia violar a regra.

No dia 12 de maio, demos prosseguimento ao trabalho com a Tarefa 3.

QUADRO 8
Tarefa 3

Forme agora um colar com a sequência: 1 conta azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul. a) Explique como você continuaria esse padrão. b) Qual a cor da 33ª pedra? Explique. c) Que relações chamaram sua atenção nesse colar?

Fonte: Adaptado de GRUCOMAT, 2016.

A infrequência da turma dificultou bastante a condução dessa intervenção, pois alguns alunos já estavam finalizando as tarefas, enquanto outros a iniciavam. Neste dia, eu e o professor Marcelo tivemos dificuldades com os ritmos dos alunos no desenvolvimento das tarefas. A maioria acabou se atendo aos 2 primeiros colares da Tarefa 1, que representava a sequência de pares e ímpares, e ao da Tarefa 2, que representava os múltiplos de 3. Poucos realizavam a Tarefa 3. Além disso, havia alguns que não estavam se envolvendo e tumultuando o ambiente. Com isso, poucos desenvolveram as tarefas 3 e 4.

O grupo composto pelos alunos Ruan, Karla, Aline e Rafaela foi um dos que se envolveu na Tarefa 3 e, como nas tarefas 1 e 2, destacou-se pelas interações na busca de compreensão da proposta.

O professor Marcelo, em diálogo com Ruan, busca compreender a percepção do aluno em relação à sequência:

> **Marcelo:** *Que relações te chamam atenção nesse colar? O que te chama a atenção nesse colar? Que padrão que tá rolando aqui?*
> **Ruan:** *Verde, marrom, verde, azul.*
> **Marcelo:** *Que padrão que tem nesse colar, que te chamou a atenção?*
> **Ruan:** *1 azul, 1 verde, 2 marrons, 1 verde, 1 azul, 2 marrons.*

Ao perceber que o aluno enunciava a sequência, mas não percebia o grupo de pedras que se repetiam, tentei fazer com que ele se posicionasse a fim de compreender o que percebia naquela sequência:

> **Flávia:** *Mas você acha que começa a repetir a partir de qual pedra?*

> **Ruan:** *2 marrons, 1 verde, 1 azul...* [o aluno tenta montar o motivo em sua mesa, com as pedras]

O professor Marcelo intervém, perguntando pelas 2 pedras (azul, verde), que iniciavam a sequência:

> **Marcelo:** *2 marrons, 1 verde, 1 azul? Mas e aqui no começo?*
> **Flávia:** *Começa com azul, né?*
> **Ruan:** *É!*

Karla interviu mostrando no seu colar que o grupo de repetição tinha 5 pedras e terminava em verde:

> **Karla:** *Porque essa aqui tá verde! No final aqui tá verde.*

Ruan separou o motivo que identificou como sendo com 3 pedras (azul, verde, marrom; marrom, verde, azul) e justificou que as cores azul, verde e marrom se repetiam ao longo da sequência, mas não observou a ordem que as pedras ocupavam. Argumentei com ele que haveria um padrão se, a cada grupo de 3 pedras, as cores se repetissem, seguindo uma mesma ordem.

Evandro identificou também um motivo diferente, pois parecia ignorar a primeira pedra, azul. Sérgio e Evandro estavam fazendo juntos o colar. Observei uma segurança da dupla ao determinar a cor da pedra solicitada, principalmente por parte de Sérgio, que argumentou formulando um esquema numérico para se expressar oralmente, sem o recurso às pedras. Já Evandro se justificou recorrendo ao colar montado, indicando com as mãos os grupos de 5, incluindo a pedra azul, que inicialmente parecia ignorar:

> **Sérgio:** *É verde, pois* $5x4 = 20$
>
> **Evandro:** *É verde, pois 5, 5, 5, 5, no final é verde.*

A análise das breves falas de Sérgio e Evandro chamou minha atenção para o fato de que a turma estava começando a se envolver em elaborações de justificativas e reconhecer que havia repetições (ou padrões), o que, em minha experiência como professora de álgebra, não vivenciava muito. Geralmente, poucos alunos falavam, respondiam e, no caso de um trabalho em dupla, davam a mesma resposta, oral ou escrita. Nos episódios comentados, é possível perceber os alunos se colocando, nem sempre em conformidade com os colegas, e recorrendo a diferentes tipos de artefatos, em busca de compreender a tarefa proposta.

Radford (2010b) afirma que, nos processos de objetificação, a interação é fundamental, pois nela o sujeito encontra diferentes vozes e perspectivas, sendo que "(...) a objetificação do conhecimento pressupõe o encontro com um objeto cuja aparência em nossa consciência só é possível através de contrastes" (RADFORD, 2010b, p. 57).[21]

Durante a tarefa, observei que, para encontrar termos distantes, a maioria dos alunos recorreu ao processo de contagem. Alguns perceberam que as pedras estavam relacionadas às sequências de números pares e ímpares, mas não utilizavam essas relações para descrever os termos distantes. Muitos completaram os colares para achar os termos distantes e, quando faltavam pedras, pois não havia em número suficiente, não respondiam às perguntas.

Nos dias 16, 17 e 18 de maio, eu e o professor Marcelo nos dedicamos às discussões e correções das tarefas propostas. Trabalhamos as sequências de cores às quais os colares faziam referência, porém sem o recurso ao material concreto. Nas correções, a ênfase foi no trabalho com as sequências repetitivas de cores, relacionadas às respectivas sequências numéricas. Trabalhamos no sentido de estimular os alunos à percepção dos grupos de repetição e estabelecimento de relações numéricas para a determinação de termos distantes.

4.2.4.3 Oficina de bijuterias – correção das tarefas

No dia 16 de maio de 2016, iniciei a correção das tarefas da intervenção "Oficina de bijuterias". Eu e o professor Marcelo percebemos o envolvimento de alguns alunos e principalmente a interação positiva do grupo composto por Karla, Aline, Rafaela e Ruan. No entanto, havia alunos que ainda não haviam terminado os colares, e a maioria da sala não havia respondido às questões propostas na folha. Nos 2 dias em que desenvolvi a atividade, recolhi as folhas, e muitas, além de estarem em branco, não tinham sequer o nome do aluno.

Optei por fazer a correção e discussão das tarefas em sala de aula, junto com o professor Marcelo, utilizando apenas o quadro e as folhas com as questões propostas. Era fundamental observar como os alunos iriam se comportar sem os colares, pois seria o momento de eles se concentrarem nas relações presentes nas sequências.

Iniciei então a correção da Tarefa 1 (ver QUADRO 6). Retomei tudo que havíamos feito nos últimos dias, como as sequências de cores que os seguidas para montar os colares, o número de pedras e o fechamento.

[21] "(…) the objectification of knowledge presupposes the encounter with an object whose appearance in our consciousness is only possible through contrasts." (RADFORD, 2010b, p. 57)

Quando, oralmente, enunciei as sequências de cores e disse que elas seguiam padrões sucessivamente, o aluno Ruan me interrompeu, dizendo que havia apenas 13 contas nos colares. Aproveitei a oportunidade para pedir que respondessem como continuariam aquele padrão, distanciando-me assim dos colares e propondo que os alunos se ativessem à sequência de cores, na intenção de que a relacionassem com a sequência de números pares e ímpares. Expliquei novamente aos alunos que onde houvesse regularidades era possível chegar a um padrão, a uma regra.

Eles ficaram inseguros em como continuar o padrão, pois, sem as pedras ali em mãos, tiveram dificuldade em dizer até mesmo se a 14ª pedra seria verde ou branca. O padrão seria continuado com branco, verde, branco, verde, e assim sucessivamente. Isso causou confusão em Dayane e David, quando o professor Marcelo perguntou a cor da pedra que continuaria a sequência, que prosseguiu mudando a pergunta: em vez de "como continuaríamos?", sua pergunta foi "qual era a sequência?"

> **Marcelo:** *Então...a sequência certa é branco, verde...*
> **Dayane:** *Tá errado!*
> **David:** *É verde!*
> **Ruan:** *Ele vai ter 2 verdes*?
> **Marcelo:** *Não são 13? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.*

Os alunos discutiram entre si se seria verde ou branca a 14ª pedra, dando indícios de que a relação paridade/cor não estava sendo utilizada para determinar termos não dados. Além disso, o debate seguinte sugere que a pergunta foi interpretada não *como continuariam*, e sim *qual a sequência*, pois os alunos enunciavam, a partir da 14ª pedra, uma nova sequência, separando a sequência em 2:

> **Dayane:** *Vai ser verde de novo*!
> **Marcelo:** *Aqui é branco, não é? A próxima?* [referindo-se a 14ª e 15ª pedras]
> **Alunos:** *Verde!*
> **Marcelo:** *Verde, a próxima?*
> **Alunos:** *Branca!*
> **Marcelo***:* *E a próxima?*
> **Alunos:** *Verde!*
> **Marcelo:** *Verde, não é?*
> **Marcelo:** *Então é branco, verde, branco, verde?* [referindo-se ao modo como o padrão seria continuado]
> **Alunos:** *Verde, branco, verde, branco....*
> **Aline:** *Branco e verde! Não pode ficar 2 verde junto não!*
> **Marcelo:** *Mas cadê? Pode ficar 2 verdes juntos? Se eu colocar verde aqui...David, a 13ª pedra não é verde?*
> **David:** *É...*

Com exceção de Aline, que continuou o padrão, a maioria da turma insistiu que a 14ª pedra seria verde, como que enunciando a sequência desde o início. Juntamente com o professor Marcelo, esclareci que na primeira pergunta deveríamos continuar aquele padrão. Portanto, a continuação seria branco, verde, branco, verde... Explicamos que isso era a continuação, e não uma nova sequência que se iniciava.

Partimos para a discussão acerca da cor da 20ª pedra. Nos 2 dias de confecção dos colares, muitos alunos completaram os colares até a 20ª pedra para descobrir a sua cor. Como não havia mais pedras, teríamos acesso às estratégias utilizadas para encontrar o termo pedido. Perguntei para a turma como seria a 20ª pedra e a maioria respondeu que era branca. Alguns alunos argumentaram que todas as brancas eram pares e todas as verdes, ímpares. Porém, ainda havia alunos em dúvida quanto à cor da 20ª pedra.

Chamou-nos atenção o fato de que nem todos os alunos usavam essa relação para determinar o termo distante, ainda que deixássemos claro que as pedras que ocupavam posições pares eram brancas e posições ímpares verdes. Dayane foi um exemplo:

> **Dayane:** *Eu contei diferente!*
> **Flávia:** *Como é que você contou?*
> **Dayane:** *Eu tô com vergonha!*
> **Flávia:** *Não precisa ter vergonha, não! Fala pra gente, Dayane!*
> **Dayane:** *Eu contei até 20, ué!*
> **Flávia:** *Você contou até 20?*
> **Dayane:** *Contei até 20!*
> **Flávia:** *Contou até 20! Tá...Mas você percebeu que tinha par e ímpar, ou não?*
> **Dayane:** *Não! Só contei até 20 só!*
> **Flávia:** *Quem contou até 20?* [abri a discussão para toda a turma]
> **Dayane:** *Nem me deu a ideia de por em pares ou não!*
> **Flávia:** *Quem contou até 20?*
> **Dayane:** *Só eu contei do jeito mais fácil!*

A turma ficou dividida entre ser mais fácil contar até o termo pedido ou olhar sua paridade. Perguntei à Dayane como seria a 37ª pedra, para verificar se ainda contaria até chegar na posição solicitada ou se lançaria mão de outra estratégia, surpreendendo-nos a estratégia de David, que usou a relação paridade/cor, e ainda se posicionando em relação à proposta das atividades que estavam sendo desenvolvidas:

> **Flávia:** *E a 37ª pedra gente?*
> **Evandro:** *É verde! É verde!*
> **Dayane:** *Sei lá! Deve ser branca!*
> **Alunos:** *É verde! É verde!*
> **Evandro:** *Muda a forma de contar.*
> **David:** *A 7 vai dar verde! A 37...não! É tipo assim! A 7 vai dar verde!*
> **Flávia:** *Humm...*

David: *Se eu adicionar mais 30, vai dar verde! A 30 vai dar é...branca! Mais 7, vai dar...verde!*

A última frase de David pareceu sem sentido inicialmente, mas o aluno já estava relacionando a cor da pedra à sua paridade. A frase “a trinta vai dar é....branca!” evidencia que David pensava algebricamente, por recorrer a uma relação numérica para encontrar um termo distante. Na verdade, parece que David já sabia que a 37ª pedra era ímpar e, portanto, verde, mas fez questão de elaborar oralmente um esquema aritmético. Além disso, surpreendeu-nos que um aluno tido como “fraco” em matemática se expressasse oralmente com tanta segurança perante a turma.

Chamei a atenção da turma quanto à estratégia de David e o pedi para explicar em voz alta para os colegas, que já se mobilizavam para a troca de horário, o que deixou o restante da aula tumultuada. Continuei minha conversa com David, que colocou sua forma de conceber o que estava vivenciando, demostrando que, ao contrário do que a comunidade escolar imaginava, era capaz de observar regularidades e estabelecer relações, características do pensamento algébrico:

Flávia: *Mas não é melhor você olhar o 37 e falar se é par ou ímpar não?*
David: *Tem que complicar! Não tem que fazer o mais fácil...Eu sabia que era ímpar...mas, pra mim, a brincadeira é isso!*
Flávia: *Você acha que tem que complicar?*
David: *É!*
Flávia: *Você acha que tem que dar uma explicação mais diferente?*
David: *É...*
Flávia: *Tá certo! Quanto mais elaborada for sua explicação, mais você trabalhará seu raciocínio, com certeza!*

Retomei a correção no dia seguinte, 17 de maio de 2016, a partir da 2ª tarefa da intervenção, em que o motivo de repetição era composto por 3 pedras, na sequência azul, branca, branca, sendo que a 3ª pedra de cada grupo seria um múltiplo de 3 (ver QUADRO 7).

Reli a tarefa e perguntei aos alunos como seriam as próximas pedras, ou seja, 15ª, 16ª, 17ª, dando continuidade à sequência. Marcelo afirmou que continuaria com uma pedra azul e 2 brancas de modo intencional, a fim de que os alunos percebessem que, como na 1ª tarefa, a sequência teria continuidade, ainda que a resposta não fosse na ordem do motivo de repetição:

Flávia: *O padrão é 1 azul, 2 brancas! A gente parou na 14ª. Como é que a gente continua? 1 azul, 2 brancas...*
Alunos: *Não!*
Karla: *Mas ali vai ficar faltando 1 branca.*
Ruan: *É mesmo!*
Flávia: *Vai ficar faltando 1 branca? Por quê?*
Ruan: *Porque aqui é 2 brancas e 1 azul!*

Afirmei que estavam certos, pois o motivo de repetição que continha a 14ª pedra estava incompleto, por isso a continuação seria com branca, para fechar um grupo de 3, com a 15ª pedra. Fui ao quadro e reproduzi a sequência com as letras A, B, B, chamando a atenção para os grupos de 3 formados e associando-os com a sequência dos múltiplos de 3.

Ainda que tivéssemos falado sobre a relação grupo de repetição/múltiplos de 3, alguns alunos determinaram que a 20ª pedra era branca, por ser par, não se dando conta de que a 21ª era ímpar e também branca. Nós os alertamos de que nessa sequência não havia essa relação e de que deveríamos estar atentos às regularidades.

Voltei ao quadro e numerei os grupos, pedindo que observassem em qual grupo de 3 estaria a 20ª pedra. Essa tarefa envolvia relacionar os grupos de repetição aos múltiplos de 3 e a ordenação das cores azul e branca dentro do próprio grupo. Nesse sentido, o episódio a seguir mostra a compreensão de Karla de que não bastava encontrar o grupo, mas também era preciso organizar as 3pedras dentro desse grupo para determinar sua cor:

> **Flávia:** *Como a gente justifica a cor da 20ª pedra?*
> **Karla:** *Se for olhar pela ordem, sempre começa com azul e termina com branco.*
> **Flávia:** *Começa com azul e termina com branco! Quando você fala isso, você me fala a 19 e a 21!*
> **Karla:** *Mas a do meio é branca, porque eu tenho 2 brancas.*

Embora Karla tenha tido facilidade em lidar com essas relações, para o restante da turma, não ficou muito claro e, juntamente com Marcelo, expliquei que a 20ª pedra estava no 7º grupo de repetição, pois $7 \times 3 = 21$. Portanto, o grupo em que essa pedra estava era composto pelas pedras de ordem 19, 20 e 21, sendo, portanto, branca. A turma teve dificuldade em identificar os grupos e depois determinar que números faziam parte deles, para relacionar com a sequência de cores. Ao final do horário, pedimos que pensassem um pouco em determinar a cor da 36ª pedra, utilizando a estratégia citada, para que pudéssemos discutir na próxima aula.

Durante os 2 dias de correção, observei os alunos envolvidos e atentos às discussões, de modo que era possível ter acesso às suas estratégias, que em muitos casos indicavam que trabalhavam no campo aritmético. De acordo com Radford (2010), os alunos estão operando no campo aritmético se percebem uma regularidade, mas não a utilizam para determinar um termo não dado na sequência. Posto isso, era preciso intervir de modo que os alunos não só detectassem a *comunalidade* (1ª etapa da generalização), mas que a estendessem para todos os termos da sequência e elaborassem uma regra que permitisse encontrar qualquer termo, ainda que em linguagem oral ou escrita corrente (RADFORD, 2010a). Eu e o professor Marcelo estávamos caminhando no processo de objetificação dos alunos para que generalizar algebricamente se tornasse natural para eles. Para isso, continuar as discussões e recorrer a artefatos como circular os grupos e numerá-los eram atitudes extremamente importantes para que os grupos de repetição pudessem ser usados pelos alunos para elaborar uma regra (RADFORD, 2010a).

A explicação em linguagem escrita mereceu atenção, dado que os alunos estavam em busca de compreender a tarefa, mas não registravam seus argumentos e impressões. Em suas pesquisas, Radford mostrou a importância da expressão dessa regra em linguagem oral, escrita e simbólica. A linguagem escrita corrente ou simbólico-matemática são artefatos culturais (RADFORD, 2010a) importantes no processo de generalização, durante o qual o aluno poderá expressar para os outros a regra formulada. Além disso, Radford (2010) se baseia em Kieran (1989, p. 165) ao argumentar que, "(...) além de ver o geral no particular, 'é preciso também ser capaz de expressá-lo algebricamente'" (KIERAN, 1989 *apud* RADFORD, 2010a, p. 42, trad. minha).[22]

No dia 18 de maio de 2016, finalizei a correção das tarefas da "Oficina de bijuterias". Neste dia, o professor Marcelo não estava presente, e fiz a correção na sala laboratório com a ajuda da professora Cristiane. Devido à ausência de Marcelo, o registro em áudio e vídeo também foi deficiente, por conta dificuldade em conduzir a tarefa e registrar, além do tumulto em sala de aula.

Durante a "Oficina de bijuterias", Túlio, que esteve afastado da escola por motivos por mim desconhecidos, retornou, e Cristiane participou de todas as tarefas da intervenção. Túlio se envolveu, permanecendo em sala e me ajudando na organização do espaço, mas não se engajando nas tarefas. Cristiane buscava envolver não apenas Túlio, mas os colegas com os quais o aluno trabalhava.

Como o completamento da sequência foi uma das maiores dificuldades observadas, a qual, de certa forma está relacionada a não percepção do motivo de repetição, achei prudente, para a correção da Tarefa 3, inserir algo para mediar a transição do uso do colar diretamente para a folha de tarefa.

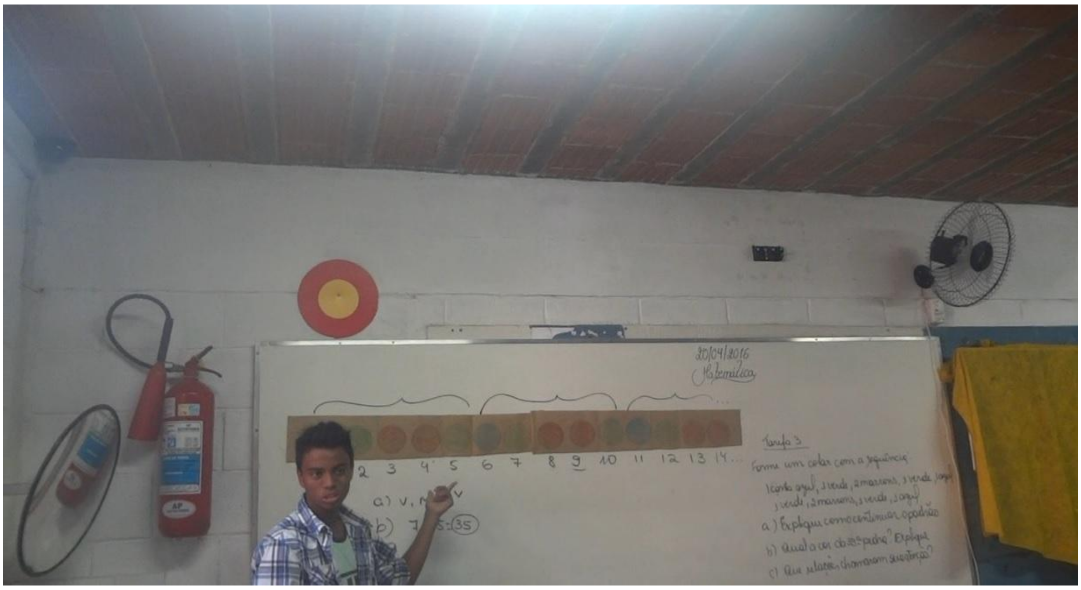
Elaborei cartazes em papel craft em que reproduzi a sequência de cores que formavam o colar da Tarefa 3 (ver QUADRO 8).

Durante a confecção dos colares, continuar o padrão que tinha um motivo de repetição de 5 pedras não foi fácil, e poucos alunos o produziram.

[22] "(…) that in addition to seeing the general in the particular, 'one must also be able to express it algebraically'." (KIERAN, 1989 *apud* RADFORD, 2010a, p. 42)

No papel craft, reproduzi 3 vezes a sequência de cores azul, verde, marrom, marrom, verde e levei folhas de papel A4 e lápis de cor para que os alunos fizessem círculos coloridos em suas folhas também.

O tempo destinado a essa atividade extrapolou o previsto, pois muitos alunos tiveram dificuldade de desenhar os círculos coloridos, tanto seguindo a folha de atividade, quanto observando no quadro a sequência que estava reproduzida em papel craft. Restou pouco tempo para a correção e discussão da tarefa. A turma estava muito agitada. Neste dia, 2 professores estavam ausentes e praticamente só haveria a minha aula. Diante disso, muitos alunos diziam querer ir embora ou ficar na quadra, pois teriam horários vagos. Assim, restando apenas 10 minutos para a correção da atividade, não foi possível provocar muitas discussões. No entanto, Evandro, Welington e Dayane se envolveram bastante, indo ao quadro para dar explicações e expressar as regularidades observadas.



FIGURAS 13 e 14 - Alunos participando da discussão da Tarefa 3

Fonte: Fotografias da autora, 2016.

Avaliei que a mediação com apresentação da sequência em forma de cartazes com círculos desenhados e reprodução das cores na folha A4 foi positiva. Para Radford (2015a, p. 554, trad. minha), “para que a atividade da sala de aula se mova em direção ao seu objeto, é pedagogicamente necessário introduzir algumas *metas*”.[23] A insegurança dos alunos frente a algo novo, como se posicionar no discurso e elaborar justificativas em linguagem escrita, exigiria, nesta perspectiva, atenção à forma como lhes pediria que escrevessem, para lhes conduzir ao uso do artefato da escrita, buscando envolvê-los na Atividade de Generalização.

4.2.5 Clips

A tarefa “Clips” (QUADRO 9) foi desenvolvida no dia 29 de agosto de 2016, uma segunda-feira, durante o quarto horário de aulas, com 22 alunos presentes, a professora Cristiane e o professor Marcelo. Planejei aplicar a atividade “Clips” no dia 26 de agosto, sexta-feira, durante o 3º horário. Porém, a escola recebeu um grupo de dança que ministrou uma aula coletiva de zumba, para todas as turmas da escola, do 2º ao 4º horário. Não pude aplicar a atividade como planejado, mas, por outro lado, foi possível me reunir com o professor Marcelo. Embora essa reunião não houvesse sido planejada, aproveitei a oportunidade para conversar brevemente com Marcelo acerca de algumas questões. Após a

[23] “(…) for the classroom activity to move towards its object, it is often pedagogically necessary to introduce some *goals*.” (RADFORD, 2015a, p. 554)

atividade “Oficina de bijuterias”, finalizada no dia 18 de maio de 2016, não retornei à escola, tendo ficado 3 meses sem intervir nas aulas, inicialmente, por conta do envolvimento do professor Marcelo com os ensaios para a festa junina da escola, que aconteceram sempre no 3º e 4º horários. Após estes ensaios, houve a semana das avaliações bimestrais, com provas no 2º e 3º horários e campeonato esportivo no 4º. Assim, ao fim do primeiro semestre, a oferta de aulas disponíveis para minhas intervenções não foi muito favorável, bem como no início do segundo semestre, em agosto, devido aos Jogos Olímpicos, em razão do qual os alunos foram dispensados em alguns dias.

Conversar com o professor Marcelo foi importante para avaliarmos o meu retorno. Conversamos sobre as próximas intervenções, que agora eram compostas de atividades envolvendo sequências de crescimento, as possibilitariam, assim, o trabalho com expressões algébricas. Marcelo relatou que já havia finalizado no primeiro semestre os conteúdos de polinômios, produtos notáveis e fatoração. Afirmou que havia iniciado o segundo semestre com o conteúdo de equações do 1º grau e que trabalharia bastante o assunto, que ele julgava de fundamental importância no 9º ano, etapa da escolaridade em que são vistas as equações do 2º grau e se faz a introdução às funções.

Apresentei então à Marcelo a tarefa “Clips”, a ser aplicada na segunda, 29 de agosto. Conversamos sobre as possibilidades de generalização e uma pequena mudança no formato das tarefas, que passariam a ser mais explicativas. Marcelo fez uma aproximação das possíveis formas de resolução da tarefa com o conteúdo que estava trabalhando. Disse que, no trabalho com equações, ele apresentava uma frase em linguagem verbal e pedia sua tradução para a linguagem algébrica, para a solução do problema. Mencionou a possibilidade de os alunos confundirem as propostas. Argumentei que não trabalharia com equações em minha proposta e que as expressões algébricas das próximas tarefas seriam todas de 1º grau com uma variável.

Fizemos a tarefa juntos e eu reforcei a importância de estarmos atentos à organização dos clips, mostrando para os alunos a relação entre a organização dos arranjos de clips na sequência e a sequência numérica associada à sua posição. Afirmei que, agora, no trabalho com as sequências de crescimento, este era o nosso maior objetivo. Perceber o que varia (número de clips, que correspondia à posição do arranjo na sequência numérica) e o que não varia (quantidade de clips fixa, no caso 2). Alertei Marcelo que só conseguiríamos chegar à generalização de um termo distante se mostrássemos isso aos alunos.

No dia 29 de agosto, segunda-feira, a aula aconteceu no 4º horário. Organizei a sala com clips e folhas da atividade em cada mesa. Subi com o professor Marcelo para a sala e buscamos os alunos. Ao chegarem, os alunos se acomodaram nas mesas e começaram a manusear os clips. Pensei que estes objetos, materiais de escritório tão comuns, não os interessaria. Ao contrário, tive que intervir, de maneira severa, pois a turma começou a brincar com os clips, fazendo cordões. Após aproximadamente 10 minutos, iniciei a leitura da tarefa. Reforcei que ela deveria ser feita em grupo e que antes de cada aluno elaborar a resposta em sua folha era importante a discussão com os colegas e professores.

No dia 30 de agosto, apliquei a tarefa. Comecei pela leitura do texto, referindo-me ao modo como Érica havia enfileirado os clips, perguntando o que significava aumentar progressivamente.

QUADRO 9

Tarefa "Clips"

Érica pegou um pacote de clips e ficou enfileirando-os sobre a mesa. Depois decidiu fazer uma brincadeira com seu irmão. Ela montou uma sequência de clips que ia aumentando progressivamente. Observe:

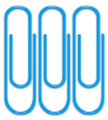


FIGURA 1

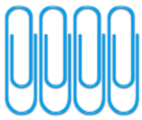


FIGURA 2

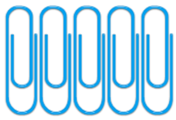


FIGURA 3

1) Érica pediu a seu irmão para continuar a sequência e deu uma saída. Ele não entendeu muito bem. Se você chegasse e ele te pedisse ajuda, como você completaria a sequência?

2) Érica voltou e viu a sequência completa. Para aumentar o desafio, perguntou:

2.1) Quantos clips estão no 10º lugar?

2.2) Quantos clips estão no 50º lugar?

3) Érica então ficou surpresa e disse: "Vocês descobriram o segredo do meu desafio!" Explique à Érica, com suas palavras, qual é este segredo.

4) Como poderíamos escrever essa situação em linguagem simbólico-matemática?

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 152.

Welington disse que significava aumentar cada vez mais. Perguntei então como seria esse "cada vez mais" para aquela sequência de clips. Insisti, perguntando como os clips estavam enfileirados.

Dayane e Evandro disseram que os clips estavam um do lado do outro. Na intenção de que os alunos percebessem os grupos de clips, perguntei:

> **Flávia:** *Então os clips estavam um do lado do outro...é isso? Como era a sequência de clips que a Érica montou? Alguém viu aí?*
> **David:** *Um do lado do outro!*
> **Flávia:** *Um do lado do outro? Como? Um do lado do outro... Pode ser de qualquer jeito?*

Os alunos se inquietaram, dizendo que os clips não estavam de qualquer jeito. Evandro argumentou:

> **Evandro:** *Cada um junto!*
> **Flávia:** *Cada um junto?*
> **Evandro:** *De lado!*
> **Flávia:** *De lado! Que mais?*
> **Evandro:** *De 3 em 3, de 4 em 4!*

Evandro, ao observar os grupos aumentando, usou as expressões "de 3 em 3", "de 4 em 4". Na verdade, o que ele percebeu e não conseguiu expressar é que naquela configuração havia grupos de 3, 4 e 5 clips. Pedi aos alunos que observassem esses grupos e argumentei que representavam uma sequência, que aumentava progressivamente. Disse que essa organização era diferente de enfileirarmos os clips um ao lado do outro. Pedi à turma que reproduzisse a sequência de clips na mesa até o 7º termo e que respondessem à primeira questão:

1) Érica pediu a seu irmão para continuar a sequência e deu uma saída. Ele não entendeu muito bem. Se você chegasse e ele te pedisse ajuda, como você completaria a sequência?

Dayane argumentou com Marcelo que cada coluna era a continuação dos números:

> **Marcelo:** *Como é que você explicaria a estratégia para poder completar o exercício?*
> **Dayane:** *Falar pra separar cada grupo...*
> **Marcelo:** *Oi?*
> **Dayane:** *Para separar coluna! Primeiro que aqui tem uma coluna...1, 2, 3... E aí a gente vai...4, e depois, 5,... e depois 7, 8 e 9* [mostrando os grupos de clips]. *Cada coluna faz continuação dos números! Aí separa com um assim ó...* [apontando os grupos]. *Aí vai continuando...e... a quantidade dos clips que você pôs aqui.*

Fui ao grupo de David, Evandro, Aline, Luciano, Edvaldo e Ruan. A professora Cristiane auxiliava Túlio, David e Evandro. Aline e Luciano trabalhavam separadamente, enquanto Ruan interagia ora com Aline e Edvaldo, ora com David e Evandro. Pedi então que me explicassem como Érica pensou para montar essa sequência. Aline apontou para a sequência reproduzida na mesa e disse:

> **Aline:** *Ô professora, ele seguiu a sequência... O primeiro aumentou 1, o segundo aumentou 2, o 3º aumentou 3!*
> **Flávia:** *Mas isso ajuda a gente a achar qualquer termo?*

Luciano e Aline refizeram seu argumento, afirmando que se tirassem 3 clips em cada termo, o que sobraria seria sempre uma sequência crescente, de 1 em 1. Aline tirou 3 clips em cada termo, a partir do 2º, mostrando-me que esses 3 clips não variavam e o que aumentava, a partir do 2º termo – um clip – iniciando uma sequência crescente dentro da própria sequência:

> **Aline:** *Se eu tirar, fica tudo 3. Ele aumenta 1, aumenta 2, outro 3, outro 4! Aí...pra saber a conta, é só ir aumentando!*

Argumentei com Aline que, de fato, haviam encontrado uma regularidade, que esses 3 clips fixos talvez pudessem os ajudar a elaborar uma regra:

> **Aline:** *É uai...*

Percebi que Aline achou natural continuar completando a sequência até achar o termo pretendido. A aluna havia ido além da numerosidade dos clips (RADFORD, 2010b), ao explicar a regularidade observada, 1ª etapa da generalização, o que, de acordo com Radford (2010b), não é trivial para os alunos.

Fui ao grupo de Fernando, Carlos e Bruno. Fernando argumentou que a regra era aumentar 1:

> **Fernando:** *3 mais 1, 4, 4 mais 1, 5, 5 mais 1, 6...*
> **Flávia:** *Escreve isso pra mim...*
> **Fernando:** *É isso mesmo?*

Disse-lhe que ali não estávamos preocupados com respostas corretas. Percebendo a estratégia de recorrer aos termos anteriores para obter os seguintes, perguntei ao grupo quantos clips teria o termo 10, para ter acesso à suas estratégias, já que este não estava representado com clips na mesa. Li com os alunos a 2ª questão:

2) Érica voltou e viu a sequência completa. Para aumentar o desafio perguntou:

2.1) Quantos clips estão no décimo lugar?

Luciano e Aline me chamaram para falar a respeito do termo 10 argumentando ser ele formado por 12 clips. Perguntei o motivo, e eles responderam, referindo-se aos termos anteriores, que foram aumentando de 1 em 1.

Nessa conversa entre Aline e Luciano, ficou claro que, embora pedíssemos que observassem o número do termo e buscássemos uma relação com o número de clips, não nos explicamos bem de maneira que os alunos percebessem que, em cada termo, o total de clips era dado pelo número do termo mais 2, mesmo que Aline tivesse organizado os termos, mostrando a possibilidade de 3 clips se manterem constantes na sequência.

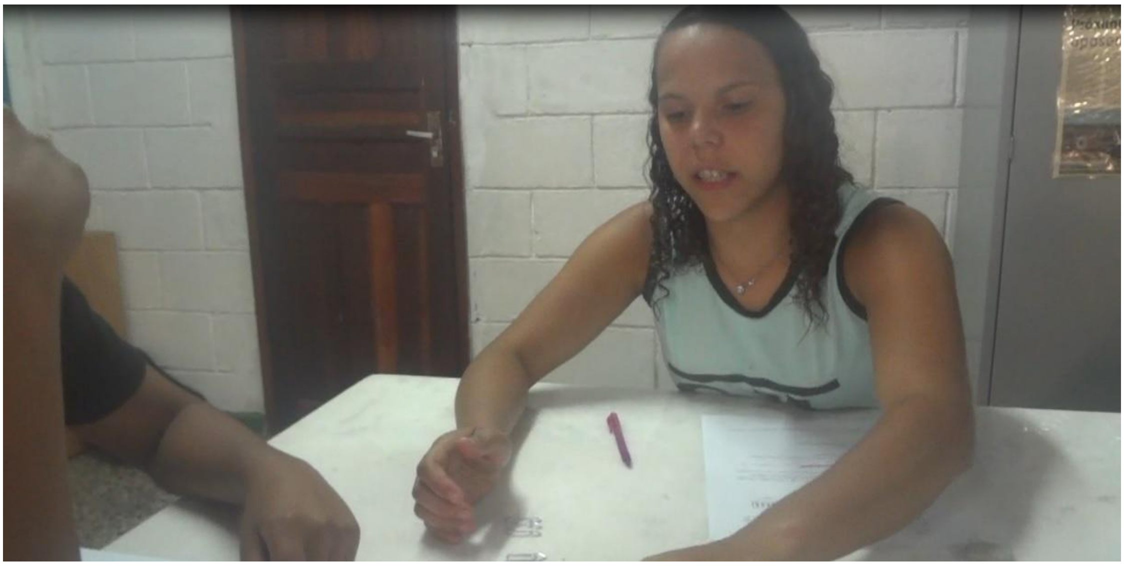


FIGURA 15 - Aline organizando os clips para explicar o padrão observado

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

A dupla Welington e Graziele não se dispôs a completar a sequência até o 10º termo e tentaram elaborar uma estratégia para encontrá-lo, e, posteriormente, o 50º termo, respondendo ainda 2ª questão:

2.2) Quantos clips estão no 50º lugar?

> **Marcelo:** *Aqui... Como é que vocês desenvolveram as figuras?*
> **Welington***:* *Uai... é só colocar 1 a mais. Se o termo 1 é 3, bota 1 a mais, dá 4!* [referindo-se ao 2º termo]. *Termo 3, mais 1! Aí vai somando!*
> **Marcelo:** *Cês fizeram até qual figura?*
> **Graziele:** *Até a 7ª .*
> **Marcelo:** *Até a 7ª figura?*
> **Graziele:** *É... deu 9*!
> **Marcelo:** *Como é que vocês perceberam as figuras? Que é essa sequência!*
> **Welington:** *Vai fazer de 5 em 5 até dar 50! Essa 5 aqui deu quanto?* [Welington olha para os clips e, contando, surpreende-se] *Deu 7!* [percebe que o 5º termo não representa um múltiplo de 5 e sorri. Junto com Graziele, Welington tenta descobrir o 10º termo]
> **Welington:** *10...* [Welington pensa um pouco]
> **Graziele:** *10...*
> **Welington:** *10... 14.*

A estratégia utilizada por Welington sugere que ele usou o termo 5 como ponto de partida, dobrando-o. Isso se confirma na fala do aluno:

> **Welington:** *10... 14! 7 mais 7!*

Graziele, referindo-se ao 50º termo, afirma ser necessário fazer 10 x 5, para encontrá-lo:

> **Welington:** *O número 10 é qual*? [Welington estava focado em estabelecer uma relação de crescimento de 5 em 5 na sequência. Ainda não havia percebido que não se tratava de uma sequência do tipo 5n]

Graziele então acrescentou mais clips ao 7º termo, deixando 10 clips ao todo. Mas logo os alunos perceberam que o 7º não estava seguindo a lei de formação dos termos anteriores e completaram até o 10º termo, observando que o ele tinha 12 clips. Perguntei então pelo 50º termo:

> **Welington:** *Peraí, eu tô dando um jeito aqui!*
> **Graziele:** *Porque com 10 é 12. Aí 20, vai dobrando. 20 é 24, e no 50...*

Graziele disse que teria que pensar um pouco mais, me pedindo um tempo. Welington explicou que, para achar o 50º termo, usou a decomposição em grupos de 10. Welington e Graziele avançaram em estratégias, ao, por exemplo, demonstrar a que não havia necessidade desenhar ou montar com palitos os termos da sequência para determinar o 50º termo. No entanto, ainda que os alunos tenham se envolvido na Atividade de Generalização, atitude esperada, de acordo com Mason (1996); Radford, 2010b e Vale e Pimentel (2011), ao buscar uma relação numérica que explicasse a formação da sequência, eles ainda não estabeleciam a relação entre a posição do termo na sequência com a quantidade total de clips. Welington, por exemplo, agia de modo recursivo, utilizando o 10º termo para determinar o 50º.

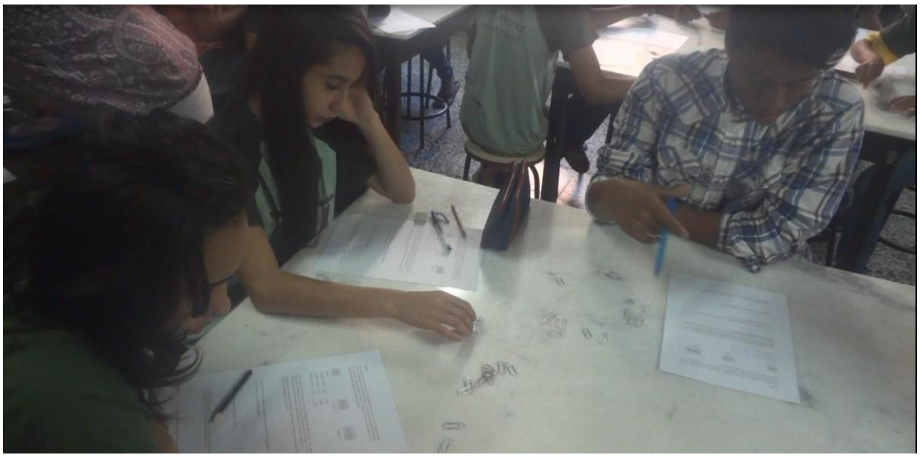


FIGURA 16 – Welington e Graziele em busca de uma justificativa para a quantidade de clips do 50º termo da sequência.

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Marcelo interviu no trabalho de Aline e Luciano:

> **Marcelo:** *Vocês fizeram até qual figura?*
> **Aline:** *Até a 7!*
> **Marcelo:** *A 7ª figura fica com quantos clips?*
> **Aline:** *7... 9!*
> **Marcelo:** *9 clips? Vocês acharam quantos clips na 10ª figura?*
> **Luciano:** *Na 10ª?*
> **Aline:** *Na 10ª?*
> **Luciano:** *Me empresta os clips aí Ruan! Tô fazendo...* [os clips acabam. Luciano continua]
> **Luciano:** *Conta assim, ó... 10, 12!*
> **Marcelo:** *Por que 12 clips?*
> **Luciano:** *Porque a gente foi aumentando de 1 em 1.*

Aline afirmou novamente que, se tirasse os clips que aumentavam dos grupos, todos poderiam ficar com 3 e, a partir do 2º termo. O número de clips retirados aumentava uma unidade para cada termo:

> **Aline:** *Fica tudo com 3!*
> **Luciano:** *Aline, viaja não, sô!*
> **Marcelo:** *Me explica*!
> **Aline:** *Aí cê vai aumentar 1 aqui, que esse tá pedindo pra ir até o 7º...*
> [os meninos começaram a rir]
> **Aline:** *Aí ...cê aumenta um aqui! Vai 4, aumenta 2, 5, 3, 4, 5, 6... É... vai aumentando!*
> **Marcelo:** *Quê que cê acha?*

Luciano: *Ah... eu acho que tipo assim, oh...* [apontando para o 1º termo]. *Aqui tem 3. Aqui botou 3 mais 1, ficou 4* [referindo-se ao termo 2]. *Aí, 4 mais um, 5... 5 mais 1, 6... 6 mais 1, 7... Até o resultado que ela quer! A gente ia continuar a mesma sequência, ia dar 12!*
Marcelo: *Os clips estão aumentando de um em um? De acordo com a figura?*
Aline: *É... Deve ser também né?*
Luciano: [mostra o desenho para Aline] *É... aqui...3! 3 mais 1, 4! 4 mais 1, 5!*
Marcelo: *Mas aqui é dois com mais um!* [referindo-se à posição do termo]. *Teria que ter 3 aqui!*
Luciano: *Então o negócio da Aline tá certo!*

Marcelo relacionou o primeiro grupo de clips ao número da figura, separando 2 clips no arranjo. Mas os alunos não prestaram muita atenção, pois estavam discutindo a veracidade do argumento de Aline:

Marcelo: *Qual que é a resposta da Aline? Explica aí Aline!*
Aline: [Usa a sequência reproduzida na mesa para explicar] *Aqui ó... 3!* [apontando para o termo um] *Aí cê aumenta aqui, 4!* [mantendo, nas figuras 2 e 3, clips fixos e, tirando e voltando 1 clip, para mostrar a quantidade que aumenta] *Aumenta 2, 5* [fazendo o mesmo movimento de manter 3 fixos e mostrar o que varia] *Aumenta 3, 6! Aumenta 4, 7! Aí vai aumentando até chegar na resposta que ela quer!*
Marcelo: *Aumentou de quanto em quanto?*
Aline: [Olha para a sequência e diz] *Se aqui tá 3, aumentou 1, 2, 3,4,5,6,7...*
Marcelo: *Tá... Então, se eu quiser a figura de número 50? Quantos clips terá a figura de número 50? Porque eu posso desenvolver a sequência aqui...*
Luciano: *47!*
Marcelo: *Quanto? 47?*
Luciano: *47!*
Marcelo: *Se fosse a figura de número 50?*
Luciano: *Porque aqui...ó...sempre vai dar 3...*
Marcelo: *Não era essa a e resposta que eu queria não! É... faz o seguinte: se você tivesse que fazer a figura de número 10? A 10ª figura? Quantos clips teria?*
Luciano: *12!*
Marcelo: *12!*

Marcelo foi perguntando as quantidades de clips de várias figuras, e, oralmente, os alunos foram respondendo, adicionando 2 unidades ao número da figura solicitada. Marcelo pediu o número de clips do 30º termo:

Ruan: *32!*
Marcelo: *Por quê?*
Ruan: *Porque sempre aumenta 2! Se eu falar 30, aumenta 2!*
Marcelo: *Mas a sequência tá aumentando de 2 em 2?*
Ruan: *Vai de 2 em 2!*
Marcelo: *A figura de número 50?*
Ruan: *52! Eu entendi!*
Marcelo: *Então a sequência está aumentando de 1em 1?*
Aline: *De 2 em 2!*
Marcelo: *De 2 em 2? De acordo com o número da figura?*

O episódio mencionado é um exemplo da interação como componente essencial dos processos de objetificação (RADFORD, 2010b), em que Ruan, Aline, Luciano e Marcelo se envolvem coletivamente em busca de compreender a tarefa e pensar juntos. Essa interação mobilizou diversos artefatos, como os clips, a linguagem oral e gestual.

Na fala de Ruan “porque sempre aumenta dois! Se eu falar 30, aumenta 2!” ficam evidenciados traços de uma generalização algébrica contextual. Ao dizer que sempre aumenta 2, Ruan, deixa de usar exemplos particulares como “se eu falar 30, aumenta 2!”, para elaborar uma regra válida para qualquer termo, dizendo “porque sempre aumenta 2!”

Radford (2015b) afirma que há uma contradição inerente à Atividade de Generalização, que, segundo o autor, é a assimetria epistemológica da atividade de aprendizagem, pois o professor sabe o objetivo da atividade e os alunos, não. Assim, a Atividade de Generalização já traz consigo essa contradição, pois o objeto do professor é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, e os alunos não têm consciência disso.

Nesse sentido, Radford (2015b) explica que o fato de os alunos não saberem o objetivo da atividade de generalizar padrões não impede que eles se engajem e busquem resolver as tarefas, por vezes recorrendo a estratégias aritméticas.

Os episódios relatados desvelam a importância do papel do professor em “(...) criar condições de os alunos perceberem a estrutura geral por trás da sequência” (RADFORD, 2010b, p. 5),[24] por meio da mobilização de artefatos.

A pergunta de Marcelo não ficou clara para o grupo. Havia duas regularidades sendo observadas pelos alunos. Uma, a sequência numérica que representava o número total de clips das figuras, que ia aumentando uma unidade a cada termo. E outra, a regularidade observada por Aline e Ruan, que tinham adicionando 2 unidades ao número do termo para encontrar o total de clips, mas não expressavam isso a partir de uma regra.

Intervi no grupo, montando a sequência como os clips e mostrando-lhes que todas as figuras eram acrescidas de 2 clips. Pedi então para recapitularem a ideia que haviam construído por último, com Marcelo:

> **Flávia:** *Vocês disseram que a sequência aumenta de 2 em 2!*
> **Aline e Luciano**: *É...*
> **Luciano:** *Olha aqui pro cê vê ó: 1 mais 2 vai dar 3. 2 mais 2 vai dar 4. 3 mais 2 vai dar 5!*
> **Aline:** *10, 12...* [provavelmente referindo-se à sequência gerada pelo total de clips em cada figura]
> **Flávia:** *A sequência numérica aumenta de 2 em 2? Olha lá ó...* [e, apontando para a sequência reproduzida na mesa] *3, 4, 5...*
> **Luciano:** *Mas sempre tem o 2!*
> **Flávia:** *Tem o 2!*

[24] “(…) created the conditions of possibility for the students to perceive a general structure behind the sequence.” (RADFORD, 2010b, p. 5)

Luciano: *Com o 2, aumenta, entendeu?*
Flávia: *Põe o 2...*
Luciano: *Aí aumenta!*
Flávia: *Mas o quê que aumenta e o quê que fica? Na sequência numérica, o total de clips aumenta de 1 em 1...*
Luciano: *Tá...O Marcelo falou que era de 2 em 2!*
Flávia: *O quê que aumenta, de 1 em 1 e de 2 em 2?*

Os alunos ficaram confusos, pois o total de clips de cada termo ou figura era obtido somando-se 2 unidades ao número dessa figura. Eles percebiam que essa era a regra, mas a discussão tomou um rumo de encontrar de quantas unidades o termo anterior era acrescido para resultar no segundo. Julgo que, devido ao fato de as primeiras sequências trabalhadas representarem uma situação de proporcionalidade direta, os alunos ficaram buscando múltiplos para descobrir termos mais distantes, dificultando a percepção de outras regularidades.

Não consegui, nesta aula, avançar para a elaboração de uma regra que permitisse encontrar o total de clips de uma figura qualquer, ainda que oralmente, como solicitado nas questões 4 e 5:

4) Érica então ficou surpresa e disse: “Vocês descobriram o segredo do meu desafio!” Explique a Érica, com suas palavras, qual é esse segredo!
5) Como poderíamos escrever essa situação em linguagem simbólico-matemática?

O horário estava próximo de terminar e tive que dispensar os alunos sem finalizar a tarefa. Notei, durante esta intervenção que, embora os alunos tivessem ficado mais de 2 meses sem participar da pesquisa, eles se apropriaram de um vocabulário próprio daquela proposta, como sequência e termo, desconhecidos inicialmente e que utilizei exaustivamente nas tarefas “Canecas” e “Oficina de bijuterias”. Avançaram também na compreensão da proposta, ao tentarem expressar os modos como estavam pensando, e, sentindo-se desafiados, buscavam estratégias e justificativas para encontrar termos não dados, em alguns casos, dispensando o material manipulável. Como as primeiras tarefas com sequências foram relacionadas a múltiplos, observei que os alunos buscaram encontrar essas mesmas regras na sequência de clips.

Com relação à apresentação da sequência de clips, avalio que a esta não ofereceu uma imagem muito favorável para a seleção dos aspectos variantes e invariantes da organização da figura, e repensar a folha de tarefa também deveria ser considerado, dado que a turma ainda não se engajava em elaborar respostas escritas.

Nessa retomada das atividades, percebi que os alunos apresentaram uma postura aberta ao desenvolvimento das tarefas e engajamento. Ainda que apresentassem dificuldades para redigir a resposta escrita, a barreira da comunicação foi transposta ao longo das últimas tarefas. Foi possível observar a naturalidade ao interagir com os colegas, discutir e argumentar comigo e com o professor Marcelo.

A interação com a finalidade de sanar dificuldades ou formular uma argumentação em grupo estava caminhando. Outro ponto importante foi a presença da professora Cristiane intervindo e estimulando os alunos durante a Atividade. Alguns alunos se referiram às intervenções como um momento de pensar. Julgavam difíceis as tarefas, mas ainda assim se sentiam desafiados a participar e comunicar seus modos de pensar, em especial Wellington, que não costumava se posicionar durante as aulas do professor Marcelo, mas que se mostrou muito satisfeito quando lhe entreguei o material para fazer a atividade clips, dizendo “sou bom nisso!”

4.2.6 Comboios de polígonos

Essa intervenção foi desenvolvida em 3 aulas, nos dias 31 de agosto e 2 de setembro de 2016, e dividida em 2 partes: (i) “Comboios de quadrados” (QUADRO 10) e (ii) “Comboios de triângulos” (QUADRO 11). As tarefas apresentaram duas sequências de crescimento, na qual comboios de quadrados e triângulos eram formados com palitos de fósforos. Modificamo-la para a última intervenção. Propusemos um estudo dirigido, em que os alunos pudessem trabalhar com o material concreto e, ao mesmo tempo, ler e escrever.

4.2.6.1 1ª parte: comboios de quadrados

A tarefa “Comboios de quadrados” foi aplicada no dia 31 de agosto de 2016 durante o 1º e 3º horários. Ela foi desenvolvida no laboratório de física e química, com a presença de 17 alunos, o professor Marcelo e a professora Cristiane. Organizei a sala distribuindo potinhos com palitos de fósforo e folhas de trabalho da tarefa.

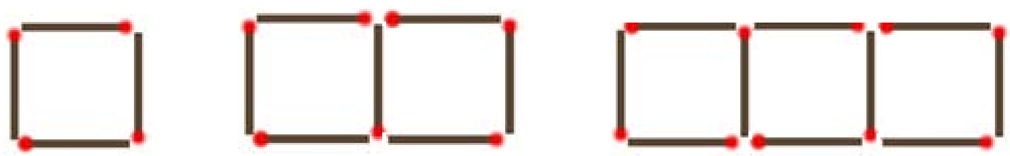
QUADRO 10

Tarefa "Comboios de quadrados"

Durante a aula de matemática, a professora Ana pediu aos alunos que formassem vários polígonos utilizando palitos de fósforo disponíveis em suas mesas.

Ana dividiu a sala em duplas e, após uma exploração com polígonos variados, pediu a algumas duplas que montassem sequências de quadrados e a outras, sequências de triângulos, que ela chamou de comboios.

Os comboios de quadrados foram montados assim:



Comboio 1 Comboio 2 Comboio 3

Ana convidou os alunos a observarem como os comboios eram formados e a quantidade de palitos necessária para formar cada comboio, em função da quantidade de polígonos.

Imagine que você é um dos alunos de Ana. Seguindo o exemplo dado, complete:

1. O comboio 1 tem 1 quadrado e é formado utilizando-se 4 palitos de fósforos.
2. O comboio 2 tem ____
3. O ____

Quantos palitos são necessários para formar os comboios 4, 5 e 6? Escreva uma resposta completa e desenhe, se desejar.

O comboio 4 tem _____ quadrados e é formado utilizando-se ____ palitos de fósforos.

O comboio 5 tem____

O ____

Você saberia dizer quantos palitos de fósforos seriam necessários para montar o comboio 10?

Você sabe explicar (que contas você fez) como se calcula o número de palitos utilizado no comboio 10?

Existe uma forma de descobrir quantos palitos são necessários para formar comboios com um número qualquer de quadrados? Por exemplo, N quadrados?

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 80.

No dia 31, trabalhei com os comboios de quadrados. Esta tarefa teve como objetivo a percepção de que para encontrar o número de palitos para formar um comboio qualquer bastava multiplicar por 3 o número do comboio e somar 1, gerando a expressão algébrica $3n + 1$. Isso se a regularidade percebida fosse a de que havia 1 palito que iniciava o primeiro comboio, de maneira que os demais seguiriam esse mesmo padrão, acrescentando-se 3 palitos para formar cada quadrado. Outra maneira de perceber seria 1 quadrado com 4 palitos e os demais com 3, de modo que a regra, um pouco mais complexa, envolveria o antecessor do termo pretendido, gerando a fórmula $4 + (n - 1) \times 3$, equivalente à 1ª. Assim, a percepção de que apenas no 1º comboio eram necessários 4 palitos e de que os outros quadrados que se juntassem usariam o lado do quadrado anterior era muito importante, por permitir a separação do que variava (o número de quadrados em cada comboio) e o que não variava (o 1º palito ou o 1º quadrado em cada um deles).

Iniciei a atividade por volta das 13 horas e 20 minutos, pois eu e o professor Marcelo tivemos que subir com os alunos para a sala de aula, até que todas as turmas se acomodassem em suas salas; só então desceríamos para o laboratório. Perguntei aos alunos se sabiam o que significava a palavra *comboio* e também a palavra *polígono*. Brevemente conversamos sobre o significado da palavra comboio e relembramos as propriedades de um polígono.

O grupo formado por Ariane, Raissa, Tais, Luciane e João prontamente pegou as folhas de tarefas e começou a reproduzir os comboios antes mesmo que eu terminasse de explicar o significado da palavra comboio. Este grupo nos surpreendeu, pois, na tarefa “Clips”, não se envolveram.

Comecei a ler a tarefa e pedi à turma que acompanhasse comigo atentamente. Sabia que isso não aconteceria, pois vivenciava em minha trajetória na escola a dificuldade em manter os estudantes atentos em uma leitura. Ainda assim, insisti e fiquei observando, pois estavam engajados em seguir as orientações propostas na folha de tarefas, lendo e reproduzindo os comboios na mesa.

FIGURA 17 - Início da tarefa “Comboios de quadrados”

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Li a 1ª parte, explicando-lhes que a professora Ana fez uma exploração em sua aula em que os alunos montaram polígonos com palitos de fósforos. Expliquei-lhes que, após esse momento, Ana trabalhou a sequência reproduzida na folha com seus alunos, pedindo que observassem a maneira como os comboios eram formados e o número de palitos necessários para formar cada comboio, mas observando e buscando relacionar o número do comboio com a quantidade de quadrados em cada um.

Perguntei aos alunos como esses comboios eram formados:

Dayane: *Em grupo!*
David: *1 quadrado, 2 quadrados...*
Flávia: *1 quadrado, 2 quadrados... Aí ela formou 1 comboio de quadrados!*
Evandro: *Em ordem!*
Flávia: *Em ordem...*

Pedi que observassem a formação dos comboios. Perguntei quantos palitos seriam necessários para formar um comboio com um quadrado.

Os alunos, unanimemente, responderam:

Alunos: *4!*
Flávia: *Para formar um comboio com 2 quadrados?*
Alunos: *8!*

Flávia: *Será?*
Welington: *7!*

FIGURA 18 - A reprodução dos comboios pelos alunos

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Retomei pedindo que observassem o número de palitos usados para formar cada comboio e também que observassem que, o número de cada comboio era o número de quadrados usados em sua formação. Pedi então que completassem a folha de atividade, observando o número do comboio, o número de quadrados e a quantidade de palitos utilizada para formar cada comboio. Os alunos observaram e completaram sem dificuldades essa 1ª parte.

Iniciamos a 2ª parte da tarefa em que trabalharíamos com os comboios 4, 5 e 6. Pedi que reproduzissem, com palitos de fósforos até o comboio 6, e respondessem às perguntas da folha. Distribuímos cartões numerados de 1 a 10 para os alunos, na intenção que tivessem um estímulo para relacionar o número do comboio com o número de quadrados usados.

FIGURA 19 - Distribuição dos cartões para numerar os comboios reproduzidos.

Fonte: Fotografia da autora, 2016.

Dayane e Welington terminaram a 1ª parte da atividade, mas individualmente. Dayane me chama em sua mesa:

> **Dayane:** *Ô Flávia, faz favor! Por quê aqui a gente conta 4 e aqui a gente conta 7?* [referindo-se aos comboios 1 e 2]
> **Flávia:** *É isso que eu quero saber! Vamos reproduzir aqui... Comboio 1, comboio 2... olha se o seu comboio está igualzinho ao da Ana... Vamos numerar os comboios gente?!*

Alguns alunos ficaram confusos ao calcular 8 palitos para o 2º comboio e constatar, na reprodução, que eram necessários 7, argumentando que se 1 quadrado tem 4 lados, 2 teriam 2×4, isto é, 8. Intervi alertando-os acerca do modo como os comboios eram formados, para que observassem que os quadrados eram formados uns a partir dos outros:

> **Dayane:** *Eu tenho que fazer que nem tá no papel?*
> **Flávia:** *Que nem tá no papel! Do jeitinho que a Ana propôs!*
> **Dayane:** *Então não vai ter 8! Vai ter 7! Então o comboio 2 tá errado, porque aqui tem 7 palitos.*
> **Graziele:** *Tá faltando um... É por isso que ficou 7!*
> **Dayane:** *O 1º quadrado que tá aqui forma o 2º!*

Welington foi o primeiro a completar e me mostrou. O aluno reproduziu apenas os 3 primeiros comboios. Perguntei a ele como havia encontrado o total de palitos dos comboios 4, 5 e 6:

> **Flávia:** *Você não reproduziu o comboio aí! Como você fez pra saber?*
> **Welington:** *Foi de 3 em 3. De 3 em 3, formando mais quadrados...*

> *Que tipo assim...*[usando o 1º quadrado do comboio 1] *...cê tem que colocar só 3 palitos. Pra acabar! Você não tem que colocar o do meio. Porque que o do meio não precisa de colocar.*
> **Flávia:** *Por que o do meio não precisa de colocar?*
> **Welington:** *Que já tem uai...pra completar outros quadrados.*
> **Dayane:** *É porque o outro quadrado só, já completa 1. Aí, 1 quadrado que já tem, ou só tem que acrescentar mais 3 palitos.*
> **Flávia:** *1 quadrado que já tem...*
> **Dayane:** *É formado...tem 4 palitos! Aí a gente já faz o 2º quadrado... aí só acrescentar mais 3 palitos em cada!*
> **Welington:** *É por isso que vai de 3 em 3!*
> **Flávia:** *Por que que vai de 3 em 3?*
> **Dayane:** *Porque que vai de 3 em 3?*
> **Flávia:** *Por exemplo, o comboio 3 tem quantos palitos?*
> **Dayane:** *Tem 10 palitos!*
> **Flávia:** *10?*
> **Dayane:** *É...*
> **Flávia:** *Pois é! Você falou que vai de 3 em 3... Já que está de 3 em 3, o comboio 3 tem que ter 9! 3 × 3, 9! Porque não tem 9?*
> **Dayane:** *Aí cê me pegou!!*
> **Flávia:** *Pensa pra me responder! Eu quero que você me explique! Porque o comboio 3 não tem 9, o comboio 4 não tem 12...* [Welington argumentou:]
> **Welington:** *Ah! Eu sei que é de 3 em 3 uai!!*
> **Flávia:** *Pensa aí...*
> **Dayane:** *Nuhh...agora pegou! 3 vezes 3 é 9...aqui deu 10...*

Dayane e Welington pediram os cartões numerados para formar os comboios 4, 5 e 6. Dayane formou até o comboio 5. Os palitos disponíveis acabaram. Nos episódios descritos, tivemos 2 momentos interessantes. No primeiro, os alunos foram estimulados a dizer que para formar os comboios bastava multiplicar por 4, pois são quadrados. Essa impressão foi bem inicial, pois como muitos já estavam manipulando os palitos de fósforos, rapidamente se convenceram de que o número de palitos de cada comboio não coincidia com esse pensamento. Em um segundo momento, ao observar mais atentamente o desenho ou reproduzir os comboios, ficou claro para os alunos que, a partir do comboio 1, bastava acrescentar 3 palitos. Os alunos perceberam a regularidade presente na sequência, mas não sabiam explicar o motivo de não se ter uma sequência que progredia de 3 em 3.

Para determinar o número de palitos dos comboios 4, 5 e 6, alguns alunos os reproduziram e outros buscaram outras formas para encontrar o total de palitos de cada comboio. A seguir, apresento alguns modos de resolução.

Dayane, que juntamente com Welington não conseguiu explicar o motivo da sequência ser de 3 em 3 e o número de palitos não ser múltiplos de 3, foram desafiados por Marcelo:

> **Marcelo:** *Vamos supor que acabaram os palitos. Quantos palitos vão ser necessários para formar o comboio 5?*
> **Dayane:** *O comboio 5 tem que colocar mais um quadrado aqui, ó* [completando o comboio 4 que havia reproduzido em sua mesa]
> **Marcelo:** *Quantos palitos você precisa?*

Dayane: *3!*
Marcelo*: No comboio todo?*
Dayane*: Não.*
Marcelo: *O comboio 5 todo tem quantos palitos?*
Dayane: *16!*
Marcelo: *E o comboio 4? Só o comboio 4 tem quantos palitos?*
Dayane: *Somando 5 ou não?*
Marcelo: *Não! Só o comboio 4! Tem quantos palitos aí...no comboio 4?*
[Dayane usa os comboios 4 e o 5 para contar]
Dayane: *13! É 13! Porque aqui também tem 4! Cê não deixou eu completar! Aqui também tem 4!*
Marcelo: *Então completa!*
Dayane: *Aqui tem 5!*
Marcelo: *Tem 5 comboios! Quantos palitos?*
Dayane: *16!*

Marcelo pediu a Dayane o total de palitos dos comboios em ordem decrescente e a aluna foi enunciando, até chegar a 4 palitos do 1º comboio. Eu e Marcelo estávamos observando a estratégia de Dayane quando David e Evandro nos chamaram em seu grupo. David havia reproduzido apenas os 3 primeiros comboios e afirmou que o comboio 4 era formado por 13 palitos. Em busca de compreender a estratégia utilizada por David, perguntei:

Flávia: *O comboio quatro tem 13 palitos. Por quê?*
David: *Eu tenho o comboio 3. Tem 10 palito! É...3... 3 quadrado... Tem 10 palito! Acrescenta mais 4, nós vai tirar um. Não vai precisar de 1 palito!*
Acrescenta assim ó [David faz um gesto com a mão se referindo ao formato semelhante a um C dos 3 palitos que se encaixam nos 3 quadrados para formar o 4º quadrado]
Aí vai dar 13 palito! Vou desenhar [e encaixa mais 3 palitos no desenho da folha] *Aqui, 4 quadrado! Pronto! 4 quadrado!*
Flávia: *Isso é o comboio 4?*
David: *É! Aqui tem...1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7, 8, 9, 10, 11, 12, 13* [conta os palitos no desenho]
Flávia: *E o comboio 5?*
David: *O comboio 5 é 16! 16! 16 palitos de fósforo!*
Marcelo: *Comboio 6?*
David: *O quê?*
Marcelo: *Comboio 6?*
Evandro: *Eu sei! Eu sei! 19!*
David: *19!*
Flávia: *Por quê?*
David: *Por quê? Porque é de 3 em 3!*

David e Evandro estavam usando a estratégia de adicionar três ao número total de palitos do comboio anterior, para obter o seguinte, sob o argumento de que a sequência aumentava de 3 em 3, o que se confirma a seguir:

Flávia: *O comboio 6 é 18!*
David: *O quê?*
Flávia: *3 vezes 6 é 18*!
David: *Não fessora! Ó! 6! 17, 18, 19. Comboio 4 é 16, não é? 16! 17, 18, 19.*

Percebi que David se confundiu um pouco e obteve o comboio 4 como se precisasse de 4 palitos para cada quadrado. Resolvi desafiar David, no lugar de responder:

> **Flávia:** *O comboio 4 é 12! Você falou que é de 3 em 3 que os palitos aumentam!*
> **David:** *Não fesssora... Tipo assim* [mostrou-me o comboio 3 na folha]
> *Aqui é 10! Mais 3, 13, não é? 10, 11, 12, 13! 13! 14, 15, 16!*
> **Flávia:** *Por que é 10?*
> **David:** *Porque o comboio 3 é 10.*
> **Flávia:** *O comboio 3 é 10?*
> **David:** *É!*
> **Marcelo:** *David! Mas não são 4 quadrados? 4 vezes 3 é 12!*
> **David:** *Não! Eu tô contando aqui ó fessor! Disse que aqui é o comboio 4!* [David usa o desenho de novo apontando o primeiro quadrado do comboio 3] *Aqui já tem 4! 1, 2, 3, 4! 3... 4, 5, 6, 7! 8, 9, 10! 11, 12, 13!* [a fala elucida que David determinou, de modo recursivo, o número de palitos do comboio 4]
> **Flávia:** *David! Eu não tô entendendo! De 3 em 3, mas aí não dá múltiplo de 3!* [Dayane se insere na discussão:]
> **Dayane:** *É só fazer de 2 em 2! Pronto!*
> **Flávia**: *Conta de 2 em 2! Me explica!*
> **Marcelo:** *O comboio 6 então tem que ter 18 palitos! Tá indo de 3 em 3!*
> **Dayane:** *É... Não é não, fessor! Tem 19!*
> **Marcelo:** *Por que que tá aumentando 1?*
> **Dayane:** *Eu não tô aumentando não! E se contar 2?*
> **Marcelo:** *Tá contando palito a mais aí!*
> **Dayane:** *Não tem!*
> **Marcelo:** *Então ele não tá indo de 4 em 4!*
> **Dayane:** *De 4 não dá 18, nem 19!*
> **Marcelo:** *Tem 1 palito a mais aí!*
> **Dayane:** *Quer ver?* [Dayane começa a contar os palitos dos comboios 5 e 6 e pensar em uma maneira explicar o que estava acontecendo]

Dayane se inquietou com essa unidade que é adicionada à quantidade de palitos do comboio em questão. No entanto, visualmente, não apenas Dayane, mas os outros alunos, de um modo geral, haviam verbalizado que existia um palito que era excluído na montagem de cada quadrado, a partir do comboio 1. Interpreto que, em nível físico, os alunos, ao montar os comboios, tinham a ideia de que sempre se contava com 1 a menos na formação de cada quadrado, que era formado com apenas 3 palitos. Já no nível do discurso, na elaboração de um esquema numérico ou justificativa oral, o aluno adicionava 1 palito. Por exemplo: para formar o comboio 3, os alunos pareciam mentalmente efetuar $(3 \times 3) + 1 = 10$, pois nos forneciam o número de palitos mentalmente, sem se dar conta que aumentaram 1. Já com os palitos, ao montar os comboios, eles afirmavam haver 1 palito a menos, que era desnecessário.

David, que observava a intervenção de Dayane na discussão iniciada com ele, buscando explicar o motivo de se acrescentarem 3 palitos e o total de palitos não ser um múltiplo de 3, chamou Marcelo para lhe explicar como pensava:

David: *Agora eu sei! É tipo assim: o comboio 3 tem 10 palito, não tem?*
Marcelo: *Quantos?*
David: *10 palito! Comboio 3!*
Marcelo: *9!*
David: *O quê? Não! É 10!*
Marcelo: *Tá indo de 3 em 3!*
David: *Não... é 10! Aqui... comboio 3...* [conta os palitos no desenho que representava o comboio 3] *Não é 10? Aí, desses 10... Aí... tipo assim ó! Nos vai pegar mais 10 palito e acrescentar mais 3...e formar o comboio 4! Aí vai dar 13 palito!*
Marcelo: *Tá! Mais...a sequência tá indo de quantos em quantos?* [David olha o desenho e fala:]
David: *Tá indo 4, 3, 3.*
Marcelo: *Se tá indo de 3 em 3, então o comboio 3 tem que ter 9 palitos! Que 3 × 3 é 9!*
David: *Tipo! Assim ó! Por exemplo! 10 palito!*
Marcelo: *ahmm....*
David pegou 10 palitos soltos e contou.
David: *10 palito aqui, né? Aí depois desses 10 palito...*
Marcelo: *Com esses 10 palitos dá pra fazer quantos comboios?*
David: *2! 2 quadrado! Aí desses 2 quadrado, aí nós desmancha...*
Marcelo: *Ah é!? No comboio 2 tem 10 palitos?*
David*: Não! É no comboio 3! Aí conta 3! Aí tem 10 palitos, certo?*
Marcelo: *Certo!*
David: *Nós acrescenta 10 mais 3 e vai dar 3 palitos, dá o comboio 4! Ou então nós pode fazer isso aqui ó...4 comboio... Eu acho que é de 2 em 2!*
Marcelo: *De 2 em 2?*
David: *Eu acho que é, tipo assim...1, 2, 3, 4! É de 3 em 3 mesmo, aqui...3, 6, 7...*
Marcelo: *Olha pra lá e explica!*
[Olhando para o comboio David conta os palitos!]
David: *3, 6, 9... Ah...é de 5 em 5! Quer ver! 1, 2, 3, 4, 5! 1, 2, 3, 4, 5!* [David começou a dividir os palitos dos comboios em grupos de 5].
Marcelo: *Por que é de 5 em 5?*
David: *Olha pro cê vê!*
Marcelo: *Como que tá indo de 5 em 5? Tinha 10 aqui...agora tem 13! Como que tá indo de 5 em 5?*
David: *Eu tô pegando de 10 em 10 palito! Aí eu vou pegar mais 3 para inteirar o comboio 4 entendeu?*
Marcelo: *Ahmm...Então faz o comboio 4 aqui pra mim.*

Até aqui, David e Dayane estavam completando a sequência para encontrar os termos 4, 5 e 6. Os alunos perceberam que para cada novo comboio na sequência precisariam acrescentar 3 palitos. Porém, a percepção de que havia grupos de 3 palitos que se relacionavam com os números dos comboios não aconteceu.

A postura de David nesta discussão é interessante por mostrar o esforço do aluno em um processo de objetificação, recorrendo a diversos artefatos (desenhos, gestos, material e linguagem oral) em busca de comunicar seu pensamento, em uma situação desafiadora provocada por Marcelo. Percebi que alguns alunos já estavam respondendo à 2ª parte da atividade.

Você saberia dizer quantos palitos de fósforos seriam necessários para montar o comboio 10?   Você sabe explicar (que contas você fez?) como se calcula o número de palitos utilizado no comboio 10?

Comecei então a visitar os grupos em busca de uma explicação acerca do número de palitos necessários para formar o comboio 10, que não havia sido reproduzido por nenhum grupo, e que necessitaria de alguma estratégia para ser obtido. Decidi perguntar para os grupos como estavam fazendo as questões, pedindo que elaborassem, de modo conjunto, um argumento para a questão solicitada.

Fui ao grupo de Dayane, Graziele e Welington e perguntei com haviam encontrado o total de palitos utilizados no comboio 10:

> **Welington:** *Eu contei nos dedos! Não é um triângulo...é um quadrado! Aí eu contei...4, 7, 10* [formando os grupos de 3 com os dedos] *Aí depois vai adicionando de 3 em 3! E o 1º aqui tem 4.*
> **Flávia:** *Eu tenho 4 inicial, depois você tem de 3 em 3?*
> **Welington:** *É! Eu só vou precisar de 3 palitos!*
> **Dayane:** *O Marcelo disse que tem 1 palito a mais aqui!*
> **Flávia:** *Tem 1 palito a mais?*
> **Dayane:** *Não sei!*

Pedi ao grupo que elaborassem uma resposta escrita, justificando o total de palitos do comboio 10. Os alunos estavam muito envolvidos em construir oralmente as explicações, o que foi muito positivo. Valorizei o fato sempre indo aos grupos para participar das discussões. A 1ª parte da folha de tarefas foi respondida. Porém, na pergunta relativa ao comboio 10 foi necessário insistir para que escrevessem.

Welington escreveu e me chamou para justificar:

> **Welington:** *16 mais 16* [argumentando que o número de palitos do comboio 10 é o dobro do número de palitos do comboio 5, pois 10 é o dobro de 5]
> **Fernando:** [Fui ao grupo de Fernando e Bruno, obtendo a explicação de Fernando] *Eu já tava no 5! Como deu 16, o 5, eu multipliquei por 2!*
> **Flávia:** *32! Monta aí o comboio 10 pra gente ver!*

Conversando com Ruan e David acerca da estratégia utilizada para montar o comboio 10, os alunos deixaram claro a utilização da estratégia de contagem para encontrar o total de palitos. Se não contassem no comboio reproduzido, contariam nos dedos até encontrar o total de palitos do comboio 10:

Flávia: *E aí! Como vocês fizeram pra achar? Vocês não usaram os outros comboios não?*
Ruan: *Tipo assim...1 quadradinho é 4. Aí a gente só vai acrescentando mais 3, mais 3, mais 3...*
David: *Mas tá errado!*
Flávia: *Aí vocês precisaram montar o comboio 10, sabendo que o 1º é 4 e o resto é só acrescentar 3?*
Ruan: *É porque um quadrado vai completando o outro ó... Se eu colocasse mais 1 aqui...não ia ter espaço* [justificando a ausência do 4º palito, a partir do comboio 2]
Flávia: *Será que isso não ajuda a gente a pensar no número de palitos sem montar o comboio não?*
Ruan: *Sem montar na mesa? Tem... na mão!*
Flávia: *Entendi...*

O horário estava terminando. Dispensei os alunos e lhes disse que voltariam no 3º horário com o professor Marcelo para darmos continuidade à tarefa. Quando voltaram estavam mais agitados e alguns argumentavam já haverem terminado as tarefas. Fui aos grupos perguntar a respeito da forma como encontraram o comboio 10. Fernando respondeu que este tinha 31 palitos:

Flávia: *Como vocês acharam que o comboio 10 tem 31 palitos?*
Fernando: *Ela falou que o primeiro comboio tem 4... você vai acrescentando 3...*
Flávia: *Vamo lá! O 1º comboio tem 4. Então, se eu acrescento 3 palitos, somando 2 quadrados... Como é que é isso?*
Fernando: *Aqui tem 4.... Aí eu acrescento 3!*
Flávia: *Isso é o comboio 2! E o comboio 10?*
Fernando: *Aí você vai acrescentando 3 até formar o comboio 10.*
Flávia: *Beleza. E aí, isso ajuda a gente a determinar um número...por exemplo, o comboio 12? A gente faria como?*
Fernando: *Acrescentando 3 palitos até chegar no comboio 12.*
Flávia: *Beleza.*

Decidi ir ao quadro para expor a questão dos grupos e do 1º palito, invariante presente em todos os comboios. Antes, Dayane, Welington e Graziele justificaram para mim suas respostas:

Flávia: *Um número qualquer, por exemplo, o comboio 12... Como é que vocês pensariam para montar o comboio 12?*
Welington: *Vai de 3 em 3...*
Flávia: *De 3 em 3? Aí você precisaria do 10, por exemplo?*
Welington: *Sim.*
Flávia: *Mas e o comboio 15 nessa ideia que você colocou?*
Dayane: *Aqui tem 10, mais 5...*
Graziele: *O quê que eu tô falando?*
Flávia: *Fala o que você está pensando!*
Graziele: *Eu soltei só... você faz 15 × 3... O que eu tô falando, gente?*
Flávia: *Fala, continua...*
Graziele: *Sei lá... Eu soltei só, um 15 ×3 dá... 40 e... 45! É o número de palitos, 15 comboios...*

Flávia: *15 × 3, 45. E aí? Vamo lá!* [vou com Graziele à representação do comboio 10 para que a aluna percebesse que havia formulado a regra, mas faltava o 1º palito]
Flávia: *Então tá! O comboio 10 seria 10 × 3* [aponto para o comboio 10]
Graziele: *Sim...*
Flávia: *Mas aí... para começar os comboios, a gente sempre precisa do quê? Do palito inicial pra você continuar a sequência de 3 em 3. Então a fórmula vai acontecer, mais ou menos por aí! Pense um pouco...*

Graziele utilizou a regularidade para elaborar um esquema aritmético (RADFORD, 2007), o que mostra que estava em campo algébrico (MASON, 1996). Assim, a generalização da aluna caminhava para uma generalização factual, por ainda recorrer a exemplos concretos.

Não consegui continuar a conversa com Graziele devido a problemas de indisciplina na turma, tendo que ir ao quadro para fazer a correção da atividade, convidando toda a turma para participar:

Flávia: *Qual é a regra pra gente formar os comboios?O que vocês fizeram pra ir formando? Por exemplo: para fazer o comboio 13, o quê que eu preciso?*
Luciane: *De contar quantos palitos que tem e montar 13 quadrados.*
Flávia: *A gente vai ter 13 quadrados, não é? Aí eu vou precisar de quantos palitos?*
Luciane: *Eu vou fazer aqui uai! Pra mim contar!*
Luciane: *Comboio 13 tem 40!*
Flávia: *Por quê?*
Luciane: *Porque pra 10 tem 31! 10. Aí, eu pus mais 3.*
Flávia: *E sem usar os comboios anteriores? Será que não tem jeito?*
Luciane: *Começa com 4.*
Flávia: *É.. Começa com 4 e aí...depois...Isso que eu quero que vocês pensem. Pensem num jeito de formar comboios sem usar palitos e sem desenhar, por exemplo!*
Luciane: *Entendi.*
Luciane: *O primeiro começa com 4! Mas aí você tem de 3 em 3!*

Expliquei aos alunos que chega um momento em que contar de 3 em 3 não é mais suficiente. Referi-me à última questão com sendo uma regra:

Existe uma forma de descobrir quantos palitos são necessários para formar comboios com um número qualquer de quadrados? Por exemplo, N quadrados?

F
Flávia: *O comboio 1 é formado por quantos quadrados?*
Alunos: *4!*
Flávia: *1 quadrado e 4 palitos. O comboio 2, como é que vocês formariam?*
Welington: *Com 7 palitos e com 2 quadrados!*
Flávia: *Por que são 7 palitos?*
Welington: *Porque o do meio já completa os 2.*
Flávia: *E o comboio 3?*
David: *São 3 quadrados!*
Welington: *E 10 palitos!*
Flávia: *O comboio 1 também seguiu essa mesma regra, não? Olha só, você tinha um palito* [circulo o primeiro palito] *e somou 3, não foi? Nós estamos buscando uma*

> *regra, não é? Não é uma regra que a gente tá procurando? Então o comboio 1 tem 1 palito mais 3, não é?*
> *Comboio 2? Tem 1 palito aqui* [circulo o primeiro palito também] *e eu junto o quê? Quantos grupos de 3?*
> **David:** *2!*
> **Flávia:** *Alguns alunos já falaram isso: eu juntei de 3 em 3. Quando eu falo de 3 em 3...Mas isso tá claro, gente? A questão dos grupos? Quem são os grupos?*

Fui ao quadro e desenhei os comboios, circulei o primeiro palito de cada e mostrei os grupos formados em cada um. Relembrei com os alunos a atividade dos colares e os grupos de repetição que formávamos. Afirmei para a turma que, quando eles falavam “de 3 em 3”, estavam formando grupos. Salientei, entretanto, que havia os grupos de 3 palitos, mas que deveríamos ficar atentos a 1 palito, que iniciava cada comboio:

> **Flávia:** *Nessa ideia, de quantos grupos eu preciso para formar o comboio 4?*
> **Evandro:** *Comboio 4?*
> **Luciane:** *Ah professora! Eu entendi!*
> **Evandro:** *13 palitos!*
> **Flávia:** *13 palitos ao todo! Mas, o comboio 4, pra formar, eu preciso de quantos grupos de palitos?*
> **David:** *5.*
> **Flávia:** *4 grupos de 3 palitos. Qual é a brincadeira gente? Qual é o segredo da professora? Ela põe 1 palitinho lá pra começar e depois ela vai formando grupos de 3 palitos.*

Oralmente fui, juntamente com os alunos, descrevendo cada comboio em função do número de grupos de 3 palitos, que variava, e dando ênfase ao palito fixo:

> **Flávia:** *Como seria o comboio 5, seguindo a regra da professora Ana?*
> **Dayane:** *Com 5 grupos de 3!*
> **Flávia:** *E 1 palito fixo...*
> **Luciane:** *Vai ser 1 palito e 5 grupos de 3!*

Nem todos os alunos se convenceram. João afirmou não entender. Outros se dispersavam devido à proximidade do recreio. Disse a eles que ficassem atentos, para que formulássemos a regra que nos daria o número de palitos de um comboio, pensando nos grupos de três palitos e no palito fixo, necessários para formá-los. Já havia desenhado os comboios no quadro. Tomei o comboio 4 como exemplo e montei uma expressão numérica, nomeando cada elemento:

Comboio quatro

$$\underbrace{1}_{\text{Palito inicial}} + \underbrace{4}_{\substack{\text{Número de quadrados} \\ \text{do comboio}}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{Número de palitos para} \\ \text{formar cada quadrado}}}$$

> **Flávia:** *Pra formar um comboio qualquer, eu preciso de quantos palitos?*
> **Luciane:** *Pra fazer a continuação, é de 3 em 3.*

Disse aos alunos que nosso objetivo era elaborar agora uma fórmula que nos desse o número de palitos de um comboio qualquer.

Todo comboio que eu pedia já estava sendo descrito pelos alunos segundo essa regra. Porém, expressá-la de um modo geral, utilizando a variável **n**, não era algo claro para eles. Fui novamente ao quadro e montei expressões numéricas que descreviam cada um dos comboios até o 6º. Mostrei que em todos há 1 palito e que, nas expressões, o que mudava era o número de quadrados do comboio, que coincidia com seu número. Convidei os alunos a pensar na quantidade de palitos do comboio 13, sem pensar nos comboios anteriores, usando apenas a expressão que relacionava comboio e número de palitos:

> **Flávia:** *Aí... como é que vai ficar então para o comboio 13. Eu quero fazer o comboio 13 sem pensar nos outros.*
> **Dayane:** *Como assim?*
> **Flávia:** *Vamos fazer o comboio 13 sem pensar nos outros.*
> **Luciane:** *Vai começar tudo de novo!*
> **Marcelo:** *O quê que é variável?*
> **Flávia:** *O quê tá variando?*
> **Dayane:** *Quem que tá variando?*
> **Flávia:** *O número do comboio, não é?*
> **Dayane:** *É uai...*
> **Flávia:** *A quantidade de grupos! O quê que eu falei? A quantidade de grupos tá sempre...tem a ver com o quê? Por exemplo: se eu quero o comboio 4, com quatro quadrados, então vai ter 4 grupos.*
> **Dayane:** *Então vai ser 10...*
> **Luciane:** *Um né!....Vezes o 10....3 comboios...mais 3 quadradinhos....*
> ***Fernando**: Comboio 13 é 1 + 13 × 3?*
> **Flávia:** *É! O comboio 13, você tem que lembrar que não é grupos de 3?*
> **David:** *Sim!*
> **Flávia:** *Comboio 13, quantos quadrados?*
> **Luciane:** *13.*
> **Flávia:** *Então vamos pensar assim ó! Comboio 13...vamos esquecer o desenho agora, hein! Comboio 13, eu quero 13 quadrados, não é? E aí, esses 13 quadrados...eu preciso de quantos palitos?*
> **Luciane:** *3.*
> **Fernando:** *3.*
> **Flávia:** *3 palitos! Por que não é 4? Porque a gente sabe que é só ir encaixando 3!*
> **Ruan:** *Dá 40 palitos, não dá?*
> **Dayane:** *Dá.*
> **Flávia:** *Então o comboio 13 é aquele palitinho do começo, mais quantos grupos?* [Os alunos ficam em silêncio. Continuo expondo que seriam 13 grupos de 3, lembrando que o número do comboio é o número de grupos de que eu precisava. Percebo que, embora os alunos estivessem pensando na expressão para me dar o total de palitos dos últimos comboios, explicar não estava sendo uma tarefa simples para eles. Pergunto então quantos grupos de 3 palitos eu precisava para formar o comboio 22]
> **Luciane:** *22!*
> **Flávia:** *Eu preciso de 1 palito, mais 22 grupos de 3 palitos Então pensem numa resposta para a gente encontrar o total de palitos de qualquer comboio.*
> **Marcelo:** *Uma expressão algébrica.*

Flávia: *Uma expressão! Ou uma resposta escrita. Digam pra alguém. E agora, eu descobri que eu preciso de 3 grupos de 3 mais um palitinho fixo. Então conta pra mim uma regra...Escrevam com palavras... O quê que é N gente? É um número qualquer de quadrados. Comboio 20, comboio 30, comboio 49.*

Perguntei aos alunos respeito de outros comboios, como seriam formados. Ao perguntar por um comboio particular, ou seja, 19, 32 etc., os alunos rapidamente responderam que para montar esses comboios precisaríamos de um palito mais 3 vezes o número daquele comboio. Estavam lidando tranquilamente com a expressão numérica e respondiam imediatamente, efetuando cálculo mental para encontrar a quantidade de palitos pedida.

No entanto, ainda que eu enunciasse mais comboios e os alunos agilmente respondessem, quando pedia aquela expressão genericamente, utilizando um comboio qualquer ou usando a variável N, os alunos não respondiam.

Fizemos muitos comboios, e mesmo dizendo que havia um palito inicial e multiplicaria por 3 vezes o número de quadrados que seriam formados, e repetisse a regra para todos, fazer com que os alunos escrevessem ou expressassem essa generalização usando uma letra não aconteceu. Usar uma letra parecia não fazer nenhum sentido naquele momento para eles.

Como o horário estava terminando, montei a expressão contendo a variável N e pedi aos alunos para anotar e avaliar a fórmula comigo, repetindo os termos:

$$\underbrace{1}_{\substack{\text{Palito inicial}\\ \text{de cada comboio}}} + \underbrace{3}_{\substack{\text{Número de palitos}\\ \text{de cada quadrado formado}}} \times \underbrace{N}_{\substack{\text{Número de quadrados}\\ \text{de cada comboio}}}$$

Ao escrever a fórmula, Dayane e João reagiram:

Dayane: *Dá pra saber...é facinho...*
João: *Só isso?*

As falas de Dayane e João realçam que dominar o cálculo com letras (LINS; GIMENEZ, 1997) não implica utilizá-las para modelar e simbolizar uma situação problema. Isso aparenta que, para esses alunos, a linguagem algébrica é vista como um conteúdo, independente, pois não se surpreenderam com a fórmula, que faz parte do cotidiano escolar deles, afirmando ser fácil, ou seja, dominam a manipulação das expressões. Porém, mesmo que utilizem e trabalhem exaustivamente com expressões algébricas e equações durante as aulas e que letras lhes sejam familiares, os alunos não conseguiram utilizá-las para expressar, de maneira simbólica, as regularidades observadas, confirmando as ideias de Radford (2008).

Este afirma que o pensamento algébrico não está relacionado ao uso de letras, mas aos diferentes modos de pensar, que não necessariamente implicam usar letras. Antes da elaboração de uma regra, seja oralmente, escrita em palavras ou símbolos matemáticos, Radford sinaliza que um passo importante no processo de generalização é a discriminação entre o que varia e o que não varia. Assim, nesta intervenção, comprovei a ideia do autor (2013) de que não é a quantidade de termos pedidos ou a discussão prolongada em cima do que os alunos estão vendo que facilita essa discriminação, mas sim a intervenção do professor para mostrar os aspectos variantes e invariantes da sequência.

Elaborar um trabalho mais dirigido contribuiu para que os alunos se concentrassem e escrevessem, de modo que trabalharam ao mesmo tempo com a leitura e a escrita e utilizaram os materiais. Na parte da tarefa em que deveriam formalizar suas estratégias por escrito, os alunos sentiram dificuldades. Radford (2000) argumenta que essa mudança de recursos semióticos seria uma transposição de práticas (da expressão em linguagem oral para escrita corrente e da corrente para escrita simbólica) que não acontece de maneira simples, exigindo uma reconstrução conceitual por parte do aluno.

4.2.6.2 2ª parte: comboios de triângulos

A aplicação da tarefa aconteceu no dia 2 de setembro de 2016, com 16 alunos presentes, os professores Cristiane e Marcelo. Optei por discutir brevemente a 2ª parte da tarefa “Os comboios de polígonos” para finalizar as intervenções no 8º ano.

Recebi os alunos na sala laboratório com um certo atraso, devido a problemas de ordem disciplinar envolvendo alguns deles. Recepcionei toda a turma e logo fui interrompida pela supervisora, que julgou necessário conversar com toda a turma acerca do problema ocorrido, tendo restado apenas 30 minutos para o desenvolvimento da intervenção.

Após o imprevisto, iniciei a correção relembrando “Comboios de quadrados”. Retomei com os alunos o modo como esses comboios eram formados e regra geral formulada para encontrar o número de palitos necessários para formar um comboio em função da quantidade de quadrados que ele tinha. Feito isso, iniciei a leitura da tarefa “Os comboios de triângulos” (QUADRO 11).

Pedi aos alunos para lerem atentamente, dizendo-lhes que, de acordo com a fórmula elaborada pelos alunos de Ana (3n), o comboio 1, com 1 triângulo, teria 3 palitos. O comboio 2, 6 palitos e assim por diante. Fui ao quadro e desenhei os comboios e argumentei que, segundo os alunos da professora Ana, para cada comboio formado, eu precisaria de 3 palitos, pois os comboios são de triângulos, que possuem 3 lados.

QUADRO 11

Tarefa “Comboios de triângulos”

Veja como os comboios de triângulos eram formados:

Comboio 1 Comboio 2 Comboio 3

Ana perguntou a uma das duplas que montou esses comboios de triângulos se existia uma regra que permite descobrir a quantidade de palitos necessária para formar comboios com um número qualquer de triângulos e que expressassem essa regra em linguagem simbólica matemática.

A dupla apresentou a expressão $3n$, considerando **n** o número de triângulos que compõem o comboio. Por exemplo,

- o comboio 1 com 1 triângulo, de acordo com a fórmula da dupla, teria $3 \times 1 = 3$palitos.
- o comboio 2 com 2 triângulos, de acordo com a fórmula da dupla, teria $3 \times 2 = 6$ palitos.

Eles argumentaram que bastava multiplicar por 3 a quantidade de triângulos de qualquer comboio, pois os triângulos são formados por 3 palitos cada.

Verifique isso formando comboios com 4, 5, e 6 triângulos e utilizando a expressão que os alunos elaboraram. O que você pode concluir?

Fonte: Adaptado de VALE; PIMENTEL, 2011, p. 80.

Os alunos David, Evandro e Dayane me corrigiram dizendo que, para aumentar os comboios, eram necessários apenas 2 palitos. Argumentaram também que apenas o 1º triângulo de cada comboio necessitava de 3 palitos. Juntos, eles responderam:

É 5!
Flávia: *É 5? Por quê?*
Dayane: *Já tá escrito que já formou um triângulo, aí vai formar com 2 palitos.*
David e Evandro: *É porque já tem 1 aqui.*

> **Dayane:** *É que nem a do quadrado. Aí... só que não precisa 3...só 2!*
> **David:** *É de 2 em 2.*
> **Flávia:** *Então tá bom!*

Pedi que continuassem lendo comigo para verificar a expressão elaborada pelos alunos de Ana. Disse-lhes que iríamos comparar o que estávamos observando no desenho com a fórmula e corrigi-la, se fosse o caso.

Lemos a atividade e expliquei a eles que os alunos de Ana argumentavam que, para cada triângulo, sempre teriam 3 palitos. Afirmei que, possivelmente, os alunos não consideraram que 1 lado do triângulo já é dado, a partir do 2º comboio.

Os alunos concordaram justificando que cada triângulo é formado a partir de 1 dos lados do triângulo anterior. Intervi pedindo que montassem os comboios de triângulos, a fim de verificar a expressão:

> **Flávia:** *Então eu quero a expressão...Qual será a expressão para encontrar o número de palitos de qualquer comboio de triângulos? Vamos montar os comboios na mesa pra gente pensar, igual na outra aula! Eu quero uma fórmula hoje, tá?!*
> [Luciano me chama em seu grupo para argumentar que a fórmula não é 3n]
> **Flávia:** *Eu quero saber se essa fórmula dos meninos está certa! Se pra achar o número de palitos, basta eu multiplicar por 3!*
> **Luciano:** *Aqui já tem 1!*
> **Flávia:** *Não contaram com o que já tem! Aí... o que já tem participa de que maneira nessa história?*
> **Luciano:** *Juntando 2.*
> **Flávia:** *Juntando 2... Isso! Bom! Eu quero que você pense em uma expressão então! Já que não é 3n, eu quero saber qual é a fórmula certa! Lembrando da fórmula da aula passada, hein!*

Fui ao grupo de David, Aline, Welington e Evandro, pedindo uma explicação acerca da expressão formulada pelos alunos de Ana:

> **Flávia:** *E aí gente! Me explica!*
> **Evandro:** *O quê que cê quer saber*?
> **Flávia:** *Vocês formaram os comboios 4, 5 e 6 e usaram a expressão que os meninos fizeram, para conferir*?
> **Evandro:** *Sim!*
> **Flávia:** *E o que vocês concluíram?*
> **David:** *Que já tem 1 palito! Que tem que completar de 2 em 2...Não tem aquele quadrado, que completava 3!*

David, Evandro e Luciano demonstram decompor os comboios em 2 partes, afirmando já haver 1 palito e que o restante variava de 2 em 2. Radford (2007; 2013) afirma que um passo importante no processo de generalização é essa escolha entre o que muda e o que permanece inalterado, estratégia que iniciei ao fim da tarefa “Comboios de quadrados”.

Voltei ao grupo de Luciane, Luciano, Sérgio e Taís, pedindo explicação acerca da fórmula elaborada pelos alunos de Ana:

> **Luciane:** *De 2 em 2! Tem um aqui ó...*[apontando para o 1º palito, do triângulo do comboio 1]. *2, 2, 2...* [mostrando o encaixe de 2 palitos para formar cada triângulo seguinte]
> **Flávia:** *E aí? Então a fórmula deles tá certa?*
> **Luciane:** *Põe 1! Aí agora, 2, 2, lá! Vai de 2 em 2!*

Luciano confere a afirmação de Luciane no desenho:

> **Flávia:** *Então como é que a gente conserta a fórmula dos meninos?*
> **Luciane:** *1 dividido por 2!*
> **Flávia:** *1 dividido?*
> **Luciane:** *Multiplicado!*
> **Flávia:** *1 multiplicado por 2?*
> **Luciane:** *É...*
> **Luciano:** *Acho que é 3 + 2!*
> **Flávia:** *3 + 2...Mas e um comboio qualquer, por exemplo, lá no comboio 20? Como é que eu faria? Que os meninos falaram assim que o comboio 20, como eram 20 triângulos, seria 20 ×3! Vai ser isso?*
> **Luciano:** *Vai ser 20 × 2 + 3!*
> **Flávia:** *20 × 2 + 3? Vamos pensar nisso? Vamos pensar num comboio menor! Comboio 6, por exemplo! De acordo com isso aí que você pensou! 6 × 2...*
> **Luciano:** *É...*[pensa um pouco] *6 ×2 +3... Vai dar...Vai dar 12. 12 + 3 = 15!* [Luciano não percebe que se fizesse 6 × 2 +3 teria, na verdade, 7 triângulos e não 6. Peço então que use o comboio reproduzido para verificar]
> **Flávia:** *Olha aqui o comboio 6! Vê se ele tem 15! Conta aí quantos palitos ele tem! Vamos ver!* [Luciane conta os palitos e afirma que o comboio 6 deu 13 palitos]
> **Flávia:** *Deu 15!* [lembrando da expressão elaborada por Luciano] *E aí? O que será que tá acontecendo? Vou multiplicar por 2 e somar mais 3! Que nem tá aí*! [mostro a correção envolvendo os comboios de quadrados]
> **Flávia:** *Tem um 2 a mais aí! De onde será que ele tá saindo? Pensa aí!*
> **Luciano:** *Se tem um 2 a mais a dos meninos tá certa! Não tá errada não!*
> **Flávia:** *A dos meninos tá certa? Mas você fez uma coisa diferente! Cê multiplicou por 2 a quantidade de comboios, ou seja, realmente cada triângulo formado cê vai precisar de 2 lados, não é? Porque por exemplo, para formar um comboio com 5 triângulos, 5 triângulos vezes 2 palitos! Realmente! Porque sempre 1 já é dado não é? 5 ×2! E aí?*
> **Luciano:** *5 × 2 + 1! Aí dá 13! Que aí cê pediu a 6ª, 6 ×2 + 1!*
> **Flávia:** *Mas aí....que seria esse 1?*
> **Luciano:** *Mas aí acho que tá certo! Olha pro cê ver!*
> **Flávia:** *Tá nesse caminho mesmo!*

Na fala de Luciane e Luciano fica explícita a diferença entre as generalizações aritméticas e algébricas. Os dois alunos separam o invariante, que é o 1º palito. Mas, ao lidar com a parte variante, Luciane não estabeleceu uma relação numérica em que ela inserisse os 2 palitos de cada comboio. Já Luciano, ao dizer “acho que é 3 + 2!”, ainda que de modo inacabado, pois não havia inserido a multiplicação pelo número do comboio, dá indícios de estar em campo algébrico, por colocar as partes da sequência em uma expressão numérica, utilizando uma operação para relacionar o que permanecia e o que mudava.

Fui ao grupo de Aline, Welington, David e Evandro:

> **Flávia:** *Vocês pensaram numa explicação porque a fórmula dos meninos tá errada?*
> **Evandro:** *Porque que o deles tá errado? Porque eles não pensa igual a gente!*
> **Flávia:** *Eles não pensam igual a vocês! Vocês pensaram melhor que eles! Porque nos quadrados, hora nenhuma vocês falaram que era 4 vezes o número do comboio. Vocês falaram isso? Esses meninos tão achando que precisa de três palitos para todos os triângulos!*
> **Evandro:** *É que eu acho que...tipo...multiplica?*
> **Flávia:** *E aí? É 3 palitos que precisa pra cada um?*
> **Evandro:** *Não! Mas...já tem 1 aqui!*
> **Flávia:** *Já tem 1! Então vamos consertar a fórmula desses meninos! Eles estão falando assim: "Pra achar o comboio 2, é 3 × 2! Pra achar o comboio 10, eu preciso de 10 triângulos, eu multiplico 3 × 10 triângulos!" E aí? Cada triângulo vai ter 3 palitos? Mas não é! A gente sabe que cada triângulo tem 2, né?*
> **Evandro:** *2 +...É...2 + 1!*
> **Flávia:** *2 + 1? Quê que tem esse 1 a ver?*
> **Evandro:** *2 que vai ser!*
> **Flávia:** *2 que vai ser...e o que mais eu preciso para multiplicar?*
> **Evandro:** *O que nós precisamos!*[25]
> **Flávia:** *Então, a fórmula tá por aí... Escreve isso pra mim! Você já achou a fórmula! Mas agora cê tem que usar o* ***n***.

Por meio das intervenções anteriores, Evandro foi se familiarizando com termos como grupo de repetição e observar o que se mantinha fixo em uma sequência. Ainda que carente de sofisticação, esse diálogo com o aluno evidencia o processo de objetificação por ele vivenciado, visto que na tarefa "Oficina de bijuterias", precisava completar o colar para encontrar os termos distantes. Evandro foi capaz de, oralmente, com a minha ajuda, elaborar um esquema envolvendo as operações de adição, multiplicação e inserir os elementos variantes e invariantes da sequência.

Devido ao término do horário, iniciei a correção para apresentar a fórmula para os alunos. Desenhei os triângulos no quadro e escrevi a expressão numérica relativa a cada comboio, finalizando com a expressão que nos permitia calcular o número de palitos de qualquer comboio.

Embora com tempo reduzido, realizar a tarefa "Comboio de triângulos" mostrou que a ação de decompor os termos da sequência estava se tornando mais presente entre os alunos, principalmente após explicitamente, na tarefa referida, eu mostrar qual era o papel do primeiro palito em cada termo da sequência e evidenciar os grupos de repetição em todos eles, de modo que a elaboração de uma regra já começava a se tornar algo mais familiar para os alunos.

[25] Durante as intervenções, ao formar os grupos de repetição nas sequências, referia-me como sendo o que era preciso em cada termo. Assim, nos comboios de triângulos, ao determinar o número de palitos do comboio 10, por exemplo, dizia que havia 1 palito fixo e que precisávamos de 10 grupos de 2 palitos.

4.7 A título de síntese

Neste capítulo, busquei descrever e analisar os dados da pesquisa. Nessa descrição, dei ênfase às falas dos alunos por ser exatamente o ponto que mais chamou minha atenção durante as intervenções.

Desde o início das intervenções, as falas estiveram presentes. No entanto, retomando as ideias de Mason (1996), percebia que não havia a apreensão da generalidade por parte dos alunos, de modo que até a "Oficina de bijuterias", cada intervenção parecia ser vista pelos alunos como uma totalidade em que eles se envolviam, mas sem estabelecer conexão entre elas. Destaco nessa fase que o ato de colorir as telas de Escher e montar os colares foram artefatos que mexeram com a emoção dos alunos, sendo possível notar seu envolvimento e interesse em participar das tarefas.

Contudo, antes da "Oficina de bijuterias", durante a intervenção "Canecas", a discussão coletiva se mostrou um poderoso artefato, que, quando foi utilizado por mim e Marcelo, de maneira incisiva, provocou um conflito na turma, pois, até então, durante as aulas com as quais estavam acostumados nessa escola, a correção tinha outro formato: da parte do professor, fornecer respostas, e do aluno, obter o visto no caderno.

Assim, interpreto que, ao usar a correção e discussão das tarefas citadas, os alunos começaram a perceber que havia algo de comum naquelas intervenções. Ao conduzir as intervenções clips e comboios de polígonos, a pergunta "o quê que é para fazer" diminuiu gradativamente, sendo que, ao final, os alunos aparentavam ter certa consciência de que o objetivo era explicar os seus modos de pensar acerca das sequências, por vezes não recorrendo ao material concreto e se envolvendo em discussões comigo, Marcelo, Cristiane e os colegas.

A linguagem oral merece um destaque, pois não era habitual entre os alunos utilizá-la para expressar o modo como pensavam para resolver problemas. Creio que eu e Marcelo, por meio do estímulo durante as discussões, mostramos e potencializamos o uso deste artefato. Isso me provocou quanto à postura de estar atenta aos artefatos que os alunos trazem e que fazem com que se engajem durante a Atividade.

Não devemos, portanto, nos limitar à linguagem oral e mostrar outras possibilidades. Apresentar a possibilidade de os alunos terem contato com outros artefatos presentes na cultura, como a linguagem escrita e simbólico-matemática, é importante. Todavia, a passagem de um modo de representação para outro não é simples, e ocorre em camadas cada vez mais profundas de consciência (RADFORD, 2010a).

Isso se mostrou durante as intervenções, quando os alunos, ao completar a parte dirigida das tarefas “Comboios”, fizeram-no com tranquilidade, mas, ao ter que explicar por escrito o que diziam oralmente, apresentaram dificuldades. Radford (2010a) afirma que será no decorrer dos processos de objetificação, no contato com diversas vozes e perspectivas, que a inteligência presente nos artefatos será percebida pelos sujeitos.

Nessa lógica, conjecturo que a introdução à álgebra por meio de sua linguagem simbólica como conteúdo pode, além de não desenvolver o pensamento algébrico, inibir o engajamento dos sujeitos na Atividade, que podem agir alienadamente, contribuindo para a perda de suas subjetividades.

No próximo capítulo, apresento a descrição do produto educacional, fruto desta pesquisa e voltado, de modo especial, para o professor da rede estadual de ensino.

CAPÍTULO 5

O produto educacional

Nos últimos anos, houve uma consolidação dos mestrados profissionais em Educação (MPE), sendo que "81% dos MPEs estão concentrados na rede pública de ensino, objetivando atender as demandas da Educação Básica" (HETKOWSKI, 2014, p. 6).

Nesse sentido, na área, o mestrado profissional surge para atender a uma demanda de aplicabilidades das pesquisas em Educação em sala de aula que compreendam os desafios vivenciados por alunos e professores, relacionados à formação docente, ensino e aprendizagem.

O mestrado profissional se diferencia do mestrado acadêmico por se tratar de uma pesquisa aplicada, direcionada à uma problemática vivenciada no cotidiano da sala de aula, de modo que a pesquisa não fique restrita à academia, mas possa ser acessível a um público que vivencia o problema em seu cotidiano, além de apontar melhorias e caminhos a partir do relato das experiências ocorridas no contexto da pesquisa:

> Assim, os MPEs investem e mobilizam pressupostos teórico-metodológicos às pesquisas de intervenção a resolução de problemáticas específicas do contexto da educação, bem como têm como compromisso atuar na formação dos profissionais ao aprimoramento de práticas pedagógicas, estratégias e técnicas de ensino, redimensionar um "saber-fazer crítico-reflexivo, científico" e não repetitivo-tecnicista, concebendo condições aos profissionais dessa área e, possibilidades de ampliação nos modos de fazer, já existentes, ou criando novas formas, estratégias e inovações na rede básica de ensino (HETKOWSKI, 2014, p. 9).

Se o objetivo, com dito, é que os resultados da pesquisa sejam acessíveis a diferentes segmentos, especialmente à comunidade interessada:

> O trabalho de conclusão final do curso poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, composições, concertos, relatórios finais de pesquisa, softwares, estudos de caso, relatório técnico com regras de sigilo, manual de operação técnica, protocolo experimental ou de aplicação em serviços, proposta de intervenção em procedimentos clínicos ou de serviço pertinente, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, produção artística, sem prejuízo de outros formatos, de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, desde que previamente propostos e aprovados pela CAPES (BRASIL, 2009).

No programa de pós-graduação no qual desenvolvi esta pesquisa como trabalho de conclusão de curso, é necessária a apresentação de uma dissertação e de um produto educacional, fruto de todo o processo vivenciado pelo pesquisador, que vai desde a escolha da questão a ser investigada, passando por estudos bibliográficos e pesquisa de campo, até um relatório de pesquisa. O produto educacional é mais do que um anexo ou resumo da dissertação, mas um fruto das reflexões e análises, apresentando sugestões, sucessos e insucessos, o qual se aproxime do público a que se destina.

Além disso, o Programa de Pós-Graduação em Educação da UFMG tem como foco a melhoria da qualidade do ensino público. Portanto, as particularidades dessa rede foram consideradas na elaboração do kit que será apresentado após a seção “Apêndice” desta dissertação. Com 12 anos de jornada na rede estadual de ensino, busquei elaborar um produto que atendesse às necessidades que a seguir detalho.

5.1 Econômica

Na rede estadual, os recursos didáticos disponíveis para o professor são o quadro branco, marcadores, apagadores e livro didático. Na escola em que esta pesquisa se desenvolveu, para os professores de matemática, que possuem livro didático, existe uma cota de reprodução xerográfica. Não há a possibilidade de impressão de atividades. Geralmente, a cota se limita a 100 cópias por mês, o que limita muito a impressão de tarefas para os alunos.

Os recursos didáticos utilizados foram testados de forma a minimizar o custo para o professor e para a escola que desejar utilizá-lo. Não foi simples consegui-lo, pois, para a aplicação das tarefas, utilizei recursos próprios e, ao longo dos trabalhos e conversas com o professor Marcelo, vim a conhecer o gasto total com os materiais, já pensando na possibilidade de adaptação que poderia fazer em alguns deles.

5.2 Tempo do professor

Além do gasto com material, a elaboração do produto exigiu envolvimento na confecção, o que exigiu tempo.

Tenho consciência de que na rede estadual, por vezes, o profissional possui mais de 30 aulas semanais, o que dificulta bastante conciliar planejamento, diários, correção de provas e trabalhos. Sempre busquei alternativas a essa realidade, de modo a evitar precisar de ainda mais tempo para a confecção de recursos didáticos.

Nesse sentido, na confecção dos materiais da pesquisa, considerei aqueles que fossem fáceis de serem produzidos e adquiridos, bem flexibilizei as fichas de tarefas para que o professor pudesse adaptá-las e/ou reproduzi-las. Antes de ingressar no mestrado profissional, buscava produtos educacionais que me oferecessem fichas que eu pudesse reproduzir, pois, assim, o tempo que gastaria as elaborando, poderia ser utilizado na confecção de algum tipo de material como jogos, cartões etc.

5.3 Particularidades das salas de aula

O produto precisou ser atraente para os alunos. Isso explica a versão apresentada em sala de aula, com materiais de custo não muito acessível, como mosaicos e pedras em resina. Como reconhecia a realidade da escola, com alunos infrequentes, por vezes desinteressados, e a dificuldade vivenciada por mim no trabalho com material concreto, tentei levar para a sala algo que impressionasse os alunos. Em minha experiência docente, sempre observei a satisfação dos alunos na presença de novidades, sentindo-se importantes ao verem que o professor investiu seu tempo e recursos financeiros para elaborar a aula. Eles têm consciência disso, pois sabem da carência de recursos da escola e da condição dos professores, com baixos salários e carga horária elevada de aulas.

Destaco então que, ainda que nós, professores, tenhamos uma realidade que dificulta o investimento de tempo e dinheiro nas aulas, não houve como elaborar um produto em que se dispensasse a necessidade de gastos e envolvimento da parte daquele que vier a usá-lo, ou seja, um produto pronto para ser usado.

É muito importante ressaltar que esse envolvimento na apresentação da aula, com recursos e tarefas diversificadas, repercute em produção de subjetividades por parte dos envolvidos. Ainda que o produto se apresentasse pronto para ser utilizado, haveria a necessidade de adaptá-lo em função do universo particular dos alunos.

Nessa perspectiva, relato o processo de desenvolvimento do kit de artefatos que chamamos de *Kit de provocações matemáticas: pensamento algébrico*, produto da pesquisa de campo desenvolvida entre fevereiro e setembro de 2016. Relato inicialmente o contexto no qual o concebemos e depois a discussão dos artefatos utilizados em cada tarefa, com as reflexões acerca das dificuldades e sucessos obtidos, assim como as adaptações feitas para a versão final.

5.4 A confecção do kit de provocações

A insatisfação em ensinar e aprender álgebra sem significado orientou minhas pesquisas acerca de seu ensino. Baseado em técnicas para transformar expressões (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), este me mostrava a falta de sentido em ensinar meus alunos a aprenderem a manipular tantos símbolos.

Acompanhando turmas de 6º ao 9º ano (antigas 5ª a 8ª séries), observava que aprender técnicas ou macetes para lidar com expressões e equações não fazia com que esses alunos, alguns acompanhados por mim no ensino médio, pudessem usar tais "métodos" para resolver problemas.

Entrei no mestrado com a proposta de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos e, se possível, contribuir com o desenvolvimento da linguagem, de modo que esta passasse a ter significado. As bibliografias nortearam um ensino de álgebra em que a linguagem e o pensamento algébrico mantivessem uma relação dialética (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Apontaram também para uma flexibilização acerca do que é pensamento algébrico, de modo que devemos estar atentos não para sua definição, mas para suas características, que podem ser percebidas em alguns elementos, ditos caracterizadores, como percepção de regularidades, estabelecimento de relações, simbolização e modelação. Nesse sentido, pesquisadores elegem a generalização como um caminho possível para a emergência desses elementos.

Generalizar padrões permite o trabalho com esses elementos, por meio de um processo exploratório e desafiador, proporcionado pelos padrões numéricos, visuais e figurativos. Especialmente no trabalho com sequências figurativas de crescimento, há a possibilidade do trabalho com progressões aritméticas e geométricas, sendo possível a construção de expressões algébricas (VALE; PIMENTEL, 2011).

Mas, antes de construir expressões, explorar sequências permite o contato com a indeterminação e a condução do aluno pelo professor no sentido de um trabalho mais analítico com números desconhecidos, o que pode vir a contribuir para a emergência de elementos característicos do pensamento algébrico, que não se manifesta apenas por meio do uso de símbolos, mas também de forma oral e gestual.

Nesse sentido, o que mais nos desafiou durante a elaboração do projeto de pesquisa foi o modo como trabalharíamos sequências, de modo diferente das propostas que nortearam essa pesquisa, dado o contexto da escola pública brasileira. No Canadá e em Portugal, houve um período maior para implementação e aqui, em uma rede particular, (VELOSO, 2012), com condições favoráveis como envolvimento das famílias, preparo dos alunos e recursos materiais.

Como então trabalharíamos, de maneira diferente, tais sequências de livros didáticos, que por vezes eu mesma não sabia que poderia ser um caminho para a álgebra? Como introduzir sequências para alunos que já lidavam como o simbolismo algébrico? Como atrair a atenção de alunos de uma sala de aula da qual eu não era regente? Essas foram algumas questões que nortearam as conversas entre mim e minha orientadora, a fim de delinear nossas estratégias de atuação dentro da sala de aula.

Mesmo com boas referências de pesquisa, contendo propostas para o trabalho com padrões, não tínhamos o produto pronto para aplicar e analisar os resultados. Chamamos o nosso de *kit de provocações matemáticas* pelo caráter intervencionista da pesquisa (ENGESTROM, 2015), em que estivemos centradas em analisar o papel dos artefatos nas ações dos sujeitos envolvidos na Atividade de Generalização de Padrões.

Chamando de Atividade a ação humana intencional, direcionada a um objeto, foi nosso objetivo, ao desenvolver o kit, não apenas testá-lo, mas compreender a maneira como ele impactou a sala de aula e a Atividade de alunos e professores.

Desse modo, relato, em seu desenvolvimento, as ações provocadas ou intensificadas nos sujeitos envolvidos, trazendo sugestões e possibilidades de aprimoramento.

5.5 As telas de Escher

Não apenas as telas de Escher, mas qualquer imagem ou situação pode oferecer padrões. A busca por padrões é natural na matemática, mas nem sempre percebemos em nosso cotidiano que estamos buscando relações e elaborando uma regra que explique algum fenômeno.

Ao conceber o kit, tínhamos uma primeira intenção, que era motivar os alunos de 8º ano aplicando uma proposta originalmente voltada para as séries iniciais. Assim, a apresentação das telas de Escher foi escolhida exatamente para trazer os alunos para o mundo dos padrões, estimular suas capacidades de percepção visual e comunicação. Ao mesmo tempo, não bastava observar e falar acerca do que viam, mas perceber que as telas tinham uma lei de formação.

Assim, inserimos no kit, além das imagens projetadas em slides, cópias para colorir. Projetei uma apresentação em PowerPoint, que pode ser adaptada para uma apresentação em retroprojetor, com as imagens impressas em transparências.

Além da parte material, com cópias impressas, lápis de cor e recursos multimídia, é fundamental deixar um tempo livre para que os alunos se sintam à vontade para expressar seus sentimentos de surpresa, emoção, enfim, o primeiro impacto em relação à tarefa.

De acordo com Mason (1996), nem sempre manipular o concreto proporciona o contato com a generalização. Assim, nós, professores, que conhecemos o objetivo da tarefa, devemos direcionar os alunos para que tenham o contato com a generalidade. Durante o trabalho com as telas, busquei fazer isso, corroborando as ideias de Mason, pois, embora os alunos se mostrassem entusiasmados com as imagens, foi durante as provocações ou discussões coletivas e falas dos colegas que alguns começaram a ordenar o pensamento, amadurecendo a percepção de "uma coisa muito doida" para "todos os negócio é igual", mostrando que, com o tempo, ouvindo as vozes dos outros, foi possível refletir e modificar percepção inicial acerca das imagens.

5.6 Descobrindo padrões em mosaicos

Originalmente, a intervenção envolvendo a percepção de padrões em mosaicos foi feita com mosaicos em madeira.

Ressalto que, por questões de ordem econômica, os mosaicos podem ser confeccionados em papel cartão ou EVA. Para a pesquisa, que tinha a interação como foco de observação, levei poucos mosaicos de madeira, já com essa finalidade. Porém, como relatei no desenvolvimento, poucas peças não foram suficientes. Além disso, os mosaicos de madeira, em maior quantidade, tornam-se dispendiosos, pois custam, em média, R$ 25,00 cada. A confecção em EVA também não é muito econômica, pois as formas, para serem encaixadas, devem ser cortadas por cortadores apropriados, que custam na faixa de R$ 60,00 cada.

Assim, a melhor relação custo-benefício é confeccionar os mosaicos em papel cartão, minimizando a demanda financeira, ainda que demande tempo para a confecção das formas geométricas. Para esse trabalho, é possível economizar tempo com uma guilhotina ou refiladora de papel, que custa na faixa de R$ 120,00, mas teria utilidade para a produção de diversos tipos de formas em papel cartão.

5.7 Canecas

A intervenção “Canecas” não exigiu muitos recursos. Foi uma tarefa que exigiu bastante concentração e desafiou os alunos. Apresentei-a em uma folha de papel A4 impressa em colorido e projetei a mesma imagem, com as canecas em uma sequência repetitiva, em um slide projetado no datashow.

Esta tarefa foi desenvolvida em sala de aula regular. Juntamente com o professor Marcelo, recorri à correção e discussão com a turma, e conseguimos observar os alunos explicitarem suas percepções e estabelecerem relações na imagem observada.

Concluí, ao final de minhas análises, que a relação de uma sequência figurativa com uma numérica não é simples e que, desde o início, deveria ter enfatizado este aspecto.

O objetivo desta tarefa foi a percepção da relação entre números pares e ímpares, de modo a auxiliar na determinação da posição de xícaras grandes ou pequenas, de acordo com a paridade. Ainda havia a relação entre os pares de xícaras grandes e pequenas, que formavam um grupo de 4 xícaras, em que um par tinha as asas voltadas para dentro e outro para fora.

Esse grupo não foi percebido facilmente, e destacá-lo é de suma importância para que os alunos se apropriem dele, a fim de estabelecer relação com o conjunto dos múltiplos de quatro e encontrar xícaras em posições distantes.

Embora esta sequência tenha tantos detalhes, como disse, ela foi muito desafiadora e causou bastante impacto nos alunos, que se sentiram confiantes para colocar as suas ideias, mobilizando noções de ordenação, paridade e relações numéricas.

A dificuldade verificada foi com a folha de tarefas, que, na ocasião, tinha perguntas pouco dirigidas. Nesse sentido, a tarefa poderia ter sido mais proveitosa se houvesse instruções, como circular o motivo de repetição e numerar as xícaras.

Concluo que o potencial desta tarefa está no desafio visual apresentado na organização das xícaras e no modo como o professor pode instigar a turma a descobrir, gradativamente, os padrões nesta sequência e se surpreender, ao perceber a tarefa como matemática e constatar que tem argumentos para discutir entre si e com os professores.

5.8 Oficina de bijuterias

Como afirma Mason (1996), até que algo se torne exemplo de alguma coisa para os alunos, ou seja, até que eles percebam a generalidade e usem essa percepção para lidar com casos particulares, há um tempo, dada a própria assimetria epistemológica entre alunos e professores (RADFORD, 2010).

Durante a primeira parte da “Oficina de bijuterias”, observei isso, diante da dificuldade que tive em envolver os alunos.

Sugiro que, neste primeiro dia de oficina, sejam disponibilizadas várias bijuterias prontas. Não apenas bijuterias, mas tecidos, cestos, enfim, objetos que causem impacto visual nos alunos. Objetos do cotidiano, que usamos como artigos de decoração ou vestuário, acessórios. Ao contrário das obras de Escher e dos mosaicos, tais objetos podem provocar nos alunos a reflexão de que foram produzidos por pessoas comuns, e perguntar-lhes como essas pessoas pensaram para criá-los seria um ponto de partida para exploração e argumentação acerca das regularidades observadas.

Na aplicação da tarefa, disponibilizei apenas 1 colar por grupo de 4 alunos, e os pedi que observassem imagens. As imagens podem ilustrar, mas manipular as peças, na segunda etapa da oficina, foi algo muito motivador para eles. Assim, ver e falar sobre as composições dos objetos na primeira etapa pode contribuir para a etapa de confecção das bijuterias.

Reforço que a linguagem oral é muito importante, principalmente em um ambiente em que todos possam elaborar suas justificativas, ouvindo colegas e professores, em consonância com as ideias de Mason (1996), que argumenta que a simples manipulação de materiais não leva os alunos a generalizar: “Alguém cuja atenção é estruturada de forma, cuja consciência é mais ampla e mais nivelada por cima, que pode direcionar ou atrair a atenção do aluno apropriadamente para os recursos é essencial (MASON, 1996, p. 71).

Estar com o outro se torna fundamental. A voz do colega, por vezes, poderá trazer algo ainda não observado, provocando conflitos. Além disso, o professor, que tem consciência do objetivo da tarefa, intervém de forma a apresentar aspectos relevantes, que possam conduzir o aluno no processo de generalização.

A oficina foi muito atraente, mas, de acordo com a observação de Marcelo, o professor da classe, seria necessária uma adequação das peças utilizadas na confecção dos colares, já que utilizei pedras em resina, que possuem um custo muito alto.

Pedras menores seriam ideais, devido ao seu custo mais baixo. Por outro lado, poderiam ser menos atrativas para os alunos, que poderiam perdê-las com mais facilidade. Mais uma vez, o trabalho prévio com as bijuterias prontas seria uma maneira de acostumar os alunos não apenas aos padrões a observar, mas ao simples manuseio dos materiais.

Uma dificuldade significativa durante a oficina foi em relação ao motivo de repetição e completamento das sequências, sem o uso dos colares. Sugiro, então, manter a ideia original de Vale e Pimentel (2011), disponibilizando para cada aluno a quantidade exata de contas para cada colar, de modo que cada um tenha que elaborar estratégias para encontrar os termos distantes, o que teria evitado que a turma ficasse refém de montar colares com 40 pedras, por exemplo, quando pedirmos o 40º termo da sequência repetitiva de cores.

Com relação à transição para a parte escrita da tarefa, durante a correção da última sequência, na qual o motivo de repetição tinha 5 pedras, obtive mais sucesso com a argumentação dos alunos, já sem os colares. A reprodução das contas numeradas auxiliou na percepção das relações numéricas, oferecendo, além disso, um importante momento de discussão em que os colares já não estavam mais presentes. Observei que simplesmente retirar os colares e partir para a correção, com registro, deixou alguns alunos confusos. Assim, essa transição pode ser mais suave, com desenhos na folha, apresentação das contas coloridas em papel craft no quadro etc.

Desse modo, a atenção maior nessa oficina deve ser dada à transição da confecção dos colares, algo extremamente prático, para a abstração, com elaboração de hipóteses, argumentos e justificativas, rumo à produção de registros escritos.

5.9 Clips

A tarefa “Clips” utilizou materiais de um custo muito acessível. Porém, a maior dificuldade foi separar, na sequência de clips, os elementos variantes e invariantes que a associavam com uma sequência numérica.

A sugestão é que o professor adiante a organização visual com os alunos, de modo que possam numerar esses arranjos e estabelecer a relação entre posição e organização dos clips.

Devido à pouca familiaridade dos alunos com sequências de crescimento, evidenciar os elementos invariantes em cores diferentes é uma adaptação possível para que os arranjos possam ser percebidos em relação com sua posição na sequência. Argumento a favor dessa estratégia, pois foi muito difícil colocar essa organização para os alunos de modo intencional.

Acredito que esse é um caminho, no início do trabalho com sequências de crescimento, colocando a possibilidade de experimentação e organização nas próximas tarefas. É importante frisar que isso não pode ocorrer em todo o processo de trabalho com sequências de crescimento, mas é uma alternativa a um público que não teve contato com esse tipo de tarefa em sua escolarização. A generalização tem etapas e uma delas é notar similaridades e diferenças, organizando, intencionalmente, as figuras e buscar a relação com a sua posição na sequência numérica.

5.10 Comboios de polígonos

Como relatado no texto, o trabalho com palitos foi tão envolvente quanto o com as bijuterias.

No entanto, a percepção do invariante não foi tão fácil, a ponto de ser explicada com a posterior elaboração de uma regra. Contudo, com exemplos concretos, os alunos organizavam variantes e invariantes, para encontrar os termos distantes solicitados.

Acredito que, desde o início das tarefas, se a associação com a posição das figuras for trabalhada, ao chegar nas sequências de crescimento, o aluno poderá se aventurar na elaboração de hipóteses acerca da sequência observada.

Economicamente, o trabalho com palitos é bastante acessível, pois os alunos podem até trazer palitos de fósforos usados de casa. Além disso, nessas duas tarefas, observei que os alunos não se mantiveram tão presos ao material concreto, partindo para a elaboração de estratégias.

5.11 O produto educacional: um kit de provocações matemáticas

Diante de experiência relatada, o produto educacional que ora apresento não é apenas um kit com materiais manipuláveis de pronto uso. Um kit de recursos didáticos com folhas de tarefas só se tornou um kit de provocações por estarmos imersas em uma perspectiva de que nada do que tínhamos em mãos era estático.

Em cada intervenção, o material, a folha de tarefas e o modo como os sujeitos se envolviam na Atividade eram registrados, com a finalidade de identificar os conflitos provocados e que nos impulsionavam a repensar e modificar cada artefato.

Assim, o kit de materiais é importante, mas o relato da experiência vivida, juntamente com a reflexão e análise acerca das intervenções, apontou para a necessidade de um olhar atento para dinamicidade da sala de aula e a valorização de outras formas de expressão, como linguagem oral e escrita, antes de se cobrar dos alunos o uso de símbolos, por vezes de maneira mecânica e desprovida de significado.

CONCLUSÃO

Os processos de objetificação consistem em fazer com que o objeto do conhecimento se torne um objeto de consciência, por meio do uso de artefatos e da experiência de ouvir e ser ouvido, compreender e ser compreendido, de modo que a sala de aula se torne uma comunidade (RADFORD, 2011a).

Nesta perspectiva, procurei, com a pesquisa, atingir alunos que já lidavam com a álgebra em seu cotidiano, do qual faço parte, e a vejo representar "(...) o mais severo corte (momento de seleção) da educação matemática escolar" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 9) e responder a seguinte questão: *De que forma o uso de artefatos influencia as ações dos sujeitos envolvidos nas intervenções?*

Senti-me desafiada e ao mesmo tempo apreensiva com as propostas de Radford (2010) e Vale e Pimentel (2011) para o trabalho com generalização de padrões, pois minha experiência na escola e as primeiras observações no 8º B mostravam certa falta de familiaridade dos alunos com posturas como argumentar, comunicar e explorar, fundamentais no trabalho com padrões.

Diante disso, elaboramos tarefas que tiveram a intenção de introduzir o pensamento algébrico e estimular a comunicação, argumentação e interação.

Como descrito, as primeiras tarefas eram "piloto", mas cumpriram muito mais do que o papel de familiarizar os alunos com padrões. As tarefas permitiram que David e Welington deixassem a apatia na aula de matemática e assumissem posturas ativas.

Marcelo, o professor regente, afirmava, em nossos encontros informais, que estes alunos tinham muita dificuldade em matemática, o que era reforçado pelos demais professores ao afirmarem que David "não era letrado" e possuía "problemas mentais".

Contrariando a crença reinante sobre sua desenvoltura escolar, David mostrou um desejo de se comunicar e elaborar hipóteses, que mostraram que ele realmente não domina a linguagem escrita, mas que sabe estabelecer relações numéricas e tecer argumentos, capacidades do aluno até então desconhecidas por Marcelo.

Welington foi enquadrado em perfil semelhante ao de David, mas é um aluno mais quieto e introspectivo. Não obstante, mostrou-se totalmente aberto para as discussões e se esforçava ao máximo para elaborar justificativas e hipóteses, o que dava evidências de que se sentia desafiado pelas atividades, afirmando que aqueles momentos de intervenção eram difíceis, mas que os fazia pensar – e que ele era bom nisso.

Assim como David e Welington, houve outros alunos, como Evandro, Aline, Ruan e Dayane, que saíram de uma posição de “bagunceiros” e de alunos “com dificuldades” para a posição de argumentadores. Ao fim das tarefas-piloto, já haviam mostrado mudanças em seu comportamento em sala de aula, o que impactou toda a rotina da classe.

As tarefas com sequências repetitivas e padrões visuais proporcionaram aos alunos a experiência de se sentirem capazes de “fazer matemática”. Nesse sentido, confirmaram-se na prática as ideias de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), defensores de que o pensamento algébrico independe de uma linguagem simbólica para se manifestar.

Diante disso, no decorrer da pesquisa, não pude deixar de focar as análises nestes processos que ocorreram no 8º ano, de modo que as tarefas envolvendo sequências de crescimento, que geram fórmulas, passaram a ter menos importância. Posso afirmar que, em minha percepção, em função das experiências vivenciadas com sequências repetitivas e observação de padrões visuais, os alunos chegaram às sequências de crescimento mais maduros e com uma certa intimidade com padrões, o que revelou ser este um caminho possível para o uso da linguagem algébrica consciente, ainda que tais alunos não sejam iniciantes em álgebra.

Ao terem contato, em sala de aula, com as obras de Escher e vivenciarem a oficina de bijuterias, os alunos se sentiram provocados esteticamente para desenvolver trabalhos artísticos, como colorir e produzir colares.

Além dos materiais concretos utilizados, considero que a linguagem oral foi o artefato que mais provocou os alunos, pois eu e Marcelo a colocamos como primordial desde as primeiras tarefas, provocando discussões. Ao sentir a segurança que lhes proporcionamos, os alunos a incorporaram em suas ações, de modo que falar e argumentar passou a ser natural, ações que não eram comuns em uma turma que apenas copiava as respostas corretas e dependia inteiramente da legitimação do professor para tomar parte no processo de construção do saber.

Frequentemente, nós, professores, estamos em busca de respostas corretas, dentro dos padrões estipulados por nós mesmos ou pela escola. Estar atento ao que o aluno traz e ao que pode oferecer num determinado momento gera em nós um certo conflito, pois temos que seguir um planejamento que inclui elaborar provas, exercícios e ministrar aulas de acordo com o calendário e o currículo, unificados para toda uma rede educacional. Assim, em meio a tantos afazeres e exigências, deixamos de olhar para as questões que envolvem cada sujeito em particular.

Por outro lado, permitir que os alunos se coloquem, com suas percepções e vivências, pode contribuir para a construção de um ambiente escolar de discussão e exploração, o que, de fato, pode levar não apenas à aprendizagem de conteúdos, mas à promoção de transformações desses sujeitos.

A maior dificuldade enfrentada durante a pesquisa de campo ora relatada foi com as sequências de crescimento, no sentido de os alunos perceberem a relação entre a posição do termo na sequência numérica e o arranjo das figuras, papel primordial atribuído ao professor (RADFORD, 2010b). Isso ficou cristalizado na tarefa “Clips”, em que não consegui exercê-lo frente aos alunos. A postura de Marcelo talvez tenha contribuído mais, já que este se ateve, durante suas perguntas, ao total de clips de cada termo, tendo focado muito em perguntar “de quantos em quantos aumentava”, uma estratégia indutiva, embora o certo seria descrever os aspectos variantes e invariantes de cada termo.

Suponho que o ideal seria priorizar a observação e descrição dos termos dados, pedindo os mais próximos – em que o material ajudaria no completamento da sequência – para depois e pedir os termos distantes. Eu e Marcelo dedicamos muito tempo em ouvir e observar as estratégias de generalização e na determinação dos termos distantes, o que foi muito positivo do ponto de vista do envolvimento da turma em formular justificativas e se comunicar, mas deixou um pouco a desejar no que diz respeito à discussão das regras aventadas para encontrá-los.

Durante esse processo de analisar e refletir acerca dos dados da pesquisa, elaboramos o guia de utilização do *Kit de provocações matemáticas*, no qual julguei relevante deixar claro como o trabalho com sequências é um caminho para a álgebra, pontuando, de forma breve, o seu percurso histórico e o pensamento algébrico como o objetivo de seu ensino, justificando o trabalho com a generalização de padrões. Tendo constatado um desconhecimento por parte de nós, professores, quanto às potencialidades presentes na generalização de padrões, espero, com o kit, mostrar que há possibilidades de implementar esse tipo de proposta em um contexto de escola pública, evidenciando os limites e as possibilidades das tarefas.

Assim, estou de acordo com Vale e Pimentel (2011) quando afirmam que o trabalho com a generalização de padrões exige tempo e persistência por parte do professor, e confio que futuras pesquisas fundamentadas em processos de objetificação poderão esclarecer aspectos que não foram discutidos mais profundamente nesta pesquisa, como a motivação dos sujeitos, a exploração de artefatos intermediários entre a fala e a escrita, bem como os processos de subjetificação.

REFERÊNCIAS

ABRAMOWAY, Miriam *et al. Cotidiano das escolas*: entre violências. Brasília: UNESCO, Observatório de Violência, Ministério da Educação, 2005. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001452/145265POR.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2016.

BARTOLINI BUSSI, Maria G.; MARIOTTI, Maria A. Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In: ENGLISH, L. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2nd ed. New York: Routledge, 2008. p. 746-783.

BEDNARZ, Nadine; KIERAN, Carolyn; LEE, Lesley. *Approaches to Algebra*: Perspectives for Research and Teaching. Mathematics Education Library. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BENTO, Antônio V. Investigação quantitativa e qualitativa: Dicotomia ou complementaridade? *Revista JA* (Associação da Universidade de Madeira), p. 40-43, n. 64, abril 2012.

BOERO, Paolo *et al.* Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching and Learning in Compulsory School. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 19., 1995. [*Proceedings…*]. Disponível em: <http://macosa.dima.unige.it/pub/pme/pme.htm>. Acesso em: 3 dez. 2016.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). *As ideias da álgebra.* São Paulo: Atual, 1995.

BORRALHO, Antônio B. *et al.* Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In: VALE, I. *et al.* (Org.). *Números e Álgebra*. Lisboa: SEM-SPCE. p. 193-211, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática, 1997. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 16 jun. 2016.

BRASIL. Ministério de Educação. Portaria Normativa n. 7 de 22 de junho de 2009.

DAVID, Maria M.; TOMAZ, Vanessa S. Aprendizagens expansivas reveladas pela pesquisa sobre a Atividade matemática na sala de aula. *Bolema*, Rio Claro, v. 29, p. 1287-1308, n. 53, dezembro 2015.

ENGESTRÖM, Yrjö. *Learning by Expanding*: an Activity Theoretical Approach to Developmental Research. 2. ed. Cambridge University Press: New York, 2015.

ESCHER, M.C. Disponível em: <http://www.mcescher.com>. Acesso em: 9 jan. 2016.

FIORENTINI, Dario; GUARNICA, António V.; BICUDO, Maria A. V. *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. In: BORBA, Marcelo C.; ARAÚJO, Jussara L. (Org.). 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

FIORENTINI, D.; MIORIM, Maria A.; MIGUEL, A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? *Pro-Posições*, v. 3, p. 39-53, n. 1, março 1992.

________________. Contribuições para um repensar a Educação Algébrica Elementar. *Pro-Posições*, v. 4, p. 78-91, n. 1, março 1993.

GRUCOMAT (Grupo Colaborativa em Matemática). Sequência 10: sequências e generalizações. Disponível em: <http://grucomat.blogspot.com.br/>. Acesso em: 12 jan 2016.

HETKOWSKI, Tânia M. *Programas de pós-graduação em educação*: cenário e perspectivas metodológicas dos mestrados profissionais. Natal: EPENN, 2014.

KAWASAKI, Teresinha F. *Tecnologias na sala de aula de matemática*: resistência e mudanças na formação continuada de professores. Tese (Doutorado em Educação) – UFMG, Belo Horizonte, 2008.

LEONT'EV, Alexey N. *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Livros Horizonte, 1978. 350 p.

LERMAN, Stephen. *The function of language in radical constructivism*: a Vygotskian perspective. In: Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, 16., Ed. W. Geeslin & K. Graham, New Hampshire, USA, 1992.

LINS, Rômulo; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

MINAS GERAIS. *Lei Delegada n. 180*, de 20 de janeiro de 2011. Dispõe sobre a estrutura orgânica da Administração Pública do Poder Executivo do Estado de Minas Gerais e dá outras providências. Minas Gerais, 20 de janeiro de 2011. Disponível em: <http://jornal.iof.mg.gov.br/xmlui/handle/123456789/19267>. Acesso: 16 jun. 2016.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. PROEB – 2013/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1 (jan./dez. 2013), Juiz de Fora, 2013 – Anual. *Revista Pedagógica – Matemática – 9º ano do Ensino Fundamental*. Disponível em: <http://www.portalavaliacao.caedufjf.net>. Acesso em: 8 jul. 2015.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. *Proposta curricular CBC* – Matemática (ensino fundamental). Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br>. Acesso em: 8 jul. 2015.

NOGUEIRA, Maria A. Família e escola na contemporaneidade: os meandros de uma relação. *Revista Educação e Realidade*, v. 31, p. 155-170, n. 2, jul./dez. 2006.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I. *et al.* (Ed.). *Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

PONTE, João P.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, set. 2009. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105>. Acesso em: 16 jun. 2016.

RADFORD, Luis. Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: a Semiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics*, v. 42, p. 237-268, n. 3, 2000.

______. Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 25. *Proceedings*... Ed. Marja van den Hueuvel-Panhuizen, The Netherlands: Freudental Institute, Utrecht University, 2001. p. 81-88.

______. Iconicity and Contraction: a Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns in Different Contexts. *Zdm*, v. 40, n. 1, jan. 2008.

______. Layers of Generality and Types of Generalization in Pattern Activities. *PNA*, v. 4, p. 37-62, n. 2, 2010a.

______. The Eye as a Theoretician: Seeing Structures in Generalizing Activities. *For the Learning of Mathematics*, v. 30, p. 2-7, n. 2, 2010b.

______. *Cognição matemática*: história, antropologia e epistemologia. MOREY, Bernadete; MENDES, Iran A. (Org.). São Paulo: Livraria da Física, 2011a.

______. Grade 2 students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In: CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (Ed.). *Early Algebraization*. Berlin: Springer-Verlag, 2011b. p. 303-322.

RADFORD, Luis; ROTH, Wolff-Michael. Intercorporeality and Ethical Commitment: an Activity Perspective on Classroom Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, p. 227-245, 2011c.

RADFORD, Luis. En torno a tres problemas de la generalización. In: RICO, Luis *et al.* (Ed.). *Investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje a Encarnación Castro Granada. Granada: Editorial Comares, 2013. p. 3-12.

______. De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, v. 7, p. 132- 150, n. 2, 2014.

______. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. *Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)*, v. 8, p. 547-567, 2015a.

______. The Epistemological Foundations of the Theory of Objectification. In: BRANCHETTI, Laura (Ed.). *Isonomia On-line Journal of Philosophy – Epistemologica*. Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education. Disponível em: <http://isonomia.uniurb.it/wp-content/uploads/2016/12/Laura-Branchetti-Teaching-and-Learning-Mathematics.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2016.

RADFORD, Luis; SABENA, Cristina. The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. BIKNER-AHSBAHS, A. *et al.* (Ed.). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education.* Advances in Mathematics Education. Local: Springer Netherlands, 2015c. p. 157-182.

USISKIM, Zalmam Concepções sobre Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

VALE, Isabel. Resolução de tarefas com padrões em contextos figurativos: exemplos de sala de aula. *Matemática e padrões no ensino básico*: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores. PTDC/CED/69287/2006.

______. PIMENTEL, Tereza (Coord.). *Padrões em matemática*. Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico. Lisboa: Texto Editores, 2011.

VELOSO, Débora. S. *O desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos no ensino fundamental*: análise de tarefas desenvolvidas em uma classe de 6º ano. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – UFOP, Ouro Preto, 2012.

APÊNDICES

APÊNDICE A

CONVITE (CARTA DE ESCLARECIMENTO)

Prezados pais,

Sou Flávia Christiane do Nascimento Regis, aluna de mestrado da Universidade Federal de Minas Gerais e professora de matemática da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares.

Desde março de 2005, leciono nesta instituição e, da minha experiência em sala de aula, surgiu o desejo de aprofundar meus estudos, para a melhoria da qualidade de meu trabalho.

Durante esses anos, lecionei quase que exclusivamente no ensino fundamental, e assim nasceu a motivação para estudar uma proposta relacionada ao ensino de álgebra (mais comumente relacionada ao "trabalho com as letras"). Após um ano de estudos na universidade, estou iniciando minha pesquisa de campo para implementar uma proposta de ensino que contribua para o desenvolvimento das habilidades de percepção visual, comunicação, estabelecimento de relações e generalizações.

Pesquisas recentes sinalizam que, ao colocar em exercício tais habilidades, os alunos podem desenvolver o pensamento algébrico, o que proporcionaria um trabalho consciente com o simbolismo matemático.

Desse modo, convido seus filhos a participarem do projeto "Ensino de álgebra no 8º ano: a generalização de padrões a partir da perspectiva sociocultural", que consiste em atividades matemáticas exploratórias envolvendo padrões figurativos-geométricos, com estímulo à interação social e ao uso de materiais manipuláveis. O objetivo de meu trabalho é contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e a melhoria no processo de ensino e aprendizagem de álgebra.

Nos próximos dias, enviar-lhes-ei o pedido de autorização para que seu (sua) filho(a) participem da pesquisa, bem como maiores esclarecimentos.

Desde já agradeço a atenção e a colaboração,

Flávia Christiane do Nascimento Regis

APÊNDICE B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Senhores pais e/ou responsáveis pelos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares,

Sou Flávia Christiane do Nascimento Regis, professora de matemática e aluna do mestrado profissional da UFMG. Após conversar com a direção da escola na qual seu (sua) filho(a) estuda, apresentar minha proposta e contar com seu apoio, venho convidar seu (sua) filho(a) a participar de um projeto de pesquisa em Educação Matemática intitulado "Ensino de Álgebra no 8º ano: a generalização de padrões a partir da perspectiva sociocultural". Este projeto visa à melhoria do ensino/aprendizagem de matemática, mais especificamente o de álgebra. Durante a pesquisa, analisarei como os estudantes de 8º ano se engajam em tarefas que envolvem generalização de padrões em sequências, mediadas pela utilização de material concreto e pela interação entre professores e colegas. Partindo do pressuposto de que é papel da escola inserir as pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, é relevante o desenvolvimento de propostas de ensino que estimulem a construção de estratégias, a criatividade, a iniciativa e a comprovação e a justificativa de resultados.

A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática, com a autorização e colaboração do(a) professor(a) de seu (sua) filho(a), a partir da aplicação de uma série de atividades envolvendo sequências numéricas e geométricas, nas quais os estudantes deverão perceber as regularidades envolvidas e buscar uma regra geral de formação das sequências. Eventualmente, poderemos fazer reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com os estudantes e o(a) professor(a). Esse trabalho poderá contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se coloca como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado apenas na manipulação de símbolos, às vezes sem significado para os alunos.

Durante as aulas, realizarei observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de também poder avaliar posteriormente as relações, interações, registros e falas de sala de aula.

Apenas com o consentimento do(a) senhor(a), o estudante poderá participar da pesquisa, ressaltando-se que:

- ✓ não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;

- ✓ a participação do aluno(a) não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de minha responsabilidade;
- ✓ o material coletado – anotações e gravações – será exclusivamente para fins de pesquisa. Não será, portanto, utilizado para avaliação de condutas dos estudantes;
- ✓ os resultados serão divulgados com o uso de nomes fictícios, para que sejam preservadas a identidade e a privacidade de todos os envolvidos;
- ✓ os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo do qual faço parte, e ficarão arquivados por um período de 15 anos na sala da professora orientadora da pesquisa, Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki, localizada na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, na Avenida Antônio Carlos, 6.627, Pampulha, CEP 31270-901, Belo Horizonte-MG. Fica assegurado ainda que só terão acesso a esses dados os envolvidos na pesquisa.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar dos alunos. Porém, poderá haver desconforto ou constrangimento durante a participação, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade, pois esta irá alterar a rotina das aulas de matemática. Para que isso não aconteça, propomo-nos a realizar todos os esforços para minimizar os possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, o(a) senhor(a) poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa pelo telefone (31)3879-7142 ou pelo e-mail flaviacnregis@gmail.com.

Caso deseje recusar a participação de seu (sua) filho(a) ou retirar o seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, tem total liberdade para fazê-lo.

Para maiores esclarecimentos relativos a questões éticas, o Comitê de Ética na Pesquisa (COEP – UFMG) deverá ser procurado.

______________________________ ______________________________

Rubrica – Pai ou responsável | Rubrica – Flávia C. N. Regis

Sentindo-se esclarecido(a) em relação à proposta e concordando com a participação voluntária de seu (sua) filho(a) nesta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar e devolver o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado em duas vias, sendo que uma delas ficará com o(a) senhor(a) e a outra será arquivada pelos pesquisadores por um período de 15 anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

Atenciosamente,

____

Flávia Christiane do Nascimento Regis

(professora de matemática e aluna do mestrado)

____

Teresinha Fumi Kawasaki

(coordenadora da pesquisa)

Agradecemos desde já sua colaboração.

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de matemática, nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

Nome do estudante____

Assinatura do pai ou responsável: ____________________________________

Belo Horizonte _______de __________________ de 201__.

Comitê de Ética na Pesquisa/UFMG: Av. Antônio Carlos, 6.627 – Unidade Administrativa II – 2º andar/sala 2005 – Campus Pampulha – CEP 31270-901 – Belo Horizonte-MG. Fone: (31)3409-4592. E-mail: coep@prpq.ufmg.br

APÊNDICE C

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Ao(à) professor(a) regente das classes de 8º ano da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares,

Solicitamos sua autorização para iniciar em suas aulas a pesquisa acadêmica "Ensino de álgebra no 8º ano: a generalização de padrões a partir da perspectiva sociocultural", de autoria da mestranda Flávia Christiane do Nascimento Regis da Faculdade de Educação da UFMG. A pesquisa tem por objetivo analisar como os estudantes de 8º ano se engajam em tarefas que envolvam generalização de padrões em sequências, mediadas pela utilização de material concreto e pela interação entre professores e colegas. Partindo do pressuposto de que é papel da escola inserir as pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, é relevante o desenvolvimento de propostas de ensino que estimulem a construção de estratégias, a criatividade, a iniciativa e a comprovação e a justificativa de resultados.

A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática, com a sua autorização e, se for de seu interesse, sua colaboração, a partir da aplicação de uma série de atividades envolvendo sequências numéricas e geométricas, desenvolvidas em oficinas que serão ministradas no Laboratório de Matemática, nas quais os estudantes deverão perceber as regularidades envolvidas e buscar uma regra geral de formação das sequências. Eventualmente, poderemos fazer reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com o(a) senhor(a) e os estudantes.

Esse trabalho contribui para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se coloca como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado apenas na manipulação de símbolos, às vezes sem significado para os alunos. Durante as aulas, com seu consentimento e segundo sua disponibilidade de data e horário, a pesquisadora realizará observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de também ser capaz de avaliar posteriormente as relações, interações, registros e falas em sala de aula.

______________________________ ______________________________

Rubrica prof. regente Rubrica Flávia C. N. Regis

Apenas com a sua autorização, da direção da escola, dos responsáveis e dos estudantes é que acontecerá a pesquisa, ressaltando-se que:

- ✓ não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ a participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade da pesquisadora;
- ✓ o material coletado – anotações e gravações – será exclusivamente para fins de pesquisa. Não será, portanto, utilizado para avaliação de condutas dos estudantes e nem de sua prática docente;
- ✓ os resultados serão divulgados com uso de nomes fictícios, para que sejam preservadas a identidade e a privacidade de todos os envolvidos;
- ✓ os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo do qual a pesquisadora faz parte, e ficarão arquivados por um período de 15 anos na sala da professora orientadora da pesquisa, Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki, localizada na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, na Avenida Antônio Carlos, 6.627, Pampulha, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG. Fica assegurado ainda que só terão acesso a esses dados os envolvidos na pesquisa.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar dos alunos. Porém, poderá haver desconforto ou constrangimento durante a participação, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade, pois esta irá alterar a rotina das aulas de matemática. Para que isso não aconteça, propomo-nos a realizar todos os esforços para minimizar os possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, o(a) senhor(a) poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa pelo telefone (31)3879-7142 ou pelo e-mail flaviacnregis@gmail.com.

Para maiores esclarecimentos relativos a questões éticas, o Comitê de Ética na Pesquisa (COEP – UFMG) deverá ser procurado.

____________________________ ____________________________

Rubrica prof. regente   Rubrica Flávia C. N. Regis

Sentindo-se esclarecido (a) em relação à proposta e concordando em participar voluntariamente desta pesquisa, pedimos-lhe a gentileza de assinar e devolver a autorização assinada em duas vias, sendo que uma delas ficará com o(a) senhor(a) e a outra será arquivada pelos pesquisadores por um período de 15 anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

Atenciosamente,

____

Flávia Christiane do Nascimento Regis

(professora de matemática e aluna do mestrado)

____

Teresinha Fumi Kawasaki

(coordenadora da pesquisa)

Agradecemos desde já sua colaboração.

(   ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de matemática nos termos propostos.

(   ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

____

Professor(a) da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares

Belo Horizonte _______de __________________ de 201__.

Comitê de Ética na Pesquisa/UFMG: Av. Antônio Carlos, 6.627 – Unidade Administrativa II – 2º andar/sala 2005 – Campus Pampulha – CEP 31270-901 – Belo Horizonte-MG. Fone: (31)3409-4592. E-mail: coep@prpq.ufmg.br

APÊNDICE D

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DO MENOR

Prezado estudante do 8º ano da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares,

Meu nome é Flávia Christiane do Nascimento Regis. Sou professora de matemática e aluna de mestrado profissional em Educação Matemática. Meu projeto de pesquisa consiste no desenvolvimento de uma proposta de ensino/aprendizagem de álgebra para os alunos do ensino fundamental e pretendo realizá-lo em sua escola. Para isso, eu e minha orientadora convidamos você e seus colegas de classe para participar da pesquisa intitulada “Ensino de álgebra no 8º ano: a generalização de padrões a partir da perspectiva sociocultural”. A pesquisa tem por objetivo apresentar a você uma proposta de ensino de álgebra em que a prioridade não seja o trabalho com “letras”, mas sim o desenvolvimento de sua criatividade e capacidade de estabelecer conexões entre os diferentes campos da matemática, assim como a compreensão das habilidades matemáticas que você possui.

A pesquisa acontecerá durante as suas aulas de matemática, com a autorização e colaboração de seu (sua) professor (a), a partir da aplicação de uma série de atividades envolvendo sequências numéricas e geométricas. Eventualmente, poderemos realizá-las fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com você e seu (sua) professor(a). Esse trabalho pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se coloca como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado apenas na manipulação de símbolos, os quais muitas vezes não têm significado algum para você. Durante as aulas, eu, a pesquisadora, realizarei observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de avaliar posteriormente as relações, interações, registros e falas de sala de aula.

Apenas com seu consentimento e de seus responsáveis, você poderá participar da pesquisa, ressaltando-se que:

- ✓ não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ a participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de minha responsabilidade;
- ✓ o material coletado – anotações e gravações – será exclusivamente para fins de pesquisa. Não será, portanto, utilizado para avaliação de condutas dos estudantes;
- ✓ os resultados serão divulgados com uso de nomes fictícios, para que sua identidade e privacidade sejam preservadas;

- ✓ os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo do qual faço parte, e ficarão arquivados por um período de 15 anos na sala da professora orientadora da pesquisa, Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki, localizada na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, na Avenida Antônio Carlos, 6.627, Pampulha, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG. Fica assegurado ainda que só terão acesso a esses dados os envolvidos na pesquisa.

Gostaria de ressaltar que a pesquisa apresenta riscos mínimos à sua saúde e ao seu bem-estar. Porém, eventualmente, você poderá sentir algum desconforto ou constrangimento durante sua participação na pesquisa, uma vez que esta envolve observações e filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade, pois ela irá alterar a sua rotina escolar. Para que isso não aconteça, propomo-nos a realizar todos os esforços para minimizar possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

A qualquer momento, você poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa pelo telefone (31)3879-7142 ou pelo e-mail flaviacnregis@gmail.com.

Caso você ou seus responsáveis desejem recusar sua participação ou retirar o seu consentimento em qualquer fase da pesquisa, têm total liberdade para fazê-lo.

Para maiores esclarecimentos relativos a questões éticas, o Comitê de Ética na Pesquisa (COEP – UFMG) deverá ser procurado.

Sentindo-se esclarecido(a) em relação à proposta e concordando em participar voluntariamente desta pesquisa, pedimos a gentileza de assinar e devolver o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido do Menor (TALE) em duas vias, sendo que uma delas ficará com você e a outra será arquivada pelos pesquisadores por um período de 15 anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

Atenciosamente,

____

Flávia Christiane do Nascimento Regis

(professora de matemática e aluna do mestrado)

____

Teresinha Fumi Kawasaki

(coordenadora da pesquisa)

Agradecemos desde já sua colaboração.

(   ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de Matemática, nos termos propostos.

(   ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

Nome do estudante: ____

Assinatura do estudante: ____

Belo Horizonte _______de ___________________ de 201__.

Comitê de Ética na Pesquisa/UFMG: Av. Antônio Carlos, 6.627 – Unidade Administrativa II – 2º andar/sala 2005 – Campus Pampulha – CEP 31270-901 – Belo Horizonte-MG. Fone: (31)3409-4592. E-mail: coep@prpq.ufmg.br

APÊNDICE E

TERMO DE COMPROMISSO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Faculdade de Educação

TERMO DE COMPROMISSO

Declaro que conheço e cumprirei os requisitos da resolução 466/12 e suas complementares. Comprometo-me a utilizar os materiais e dados coletados exclusivamente para os fins previstos no protocolo e publicar os resultados, sejam eles favoráveis ou não. Aceito as responsabilidades pela condução científica do projeto. Tenho ciência de que esta folha será anexada ao projeto devidamente assinada e fará parte integrante de sua documentação.

____

Flávia Christiane do Nascimento Regis

(pesquisadora)

flaviacnregis@gmail.com

____

Prof.ª Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki

(coordenadora da pesquisa e orientadora)

kawasakit@gmail.com

Belo Horizonte _______de __________________ de 201__.

Comitê de Ética na Pesquisa/UFMG: Av. Antônio Carlos, 6.627 – Unidade Administrativa II – 2º andar/sala 2005 – Campus Pampulha – CEP 31270-901 – Belo Horizonte-MG. Fone: (31)3409-4592. E-mail: coep@prpq.ufmg.br

APÊNDICE F

AUTORIZAÇÃO

À direção da Escola Estadual Geraldo Jardim Linhares, na pessoa da prezada diretora Heloisa Helena Alberto,

Solicitamos a sua autorização para iniciar a pesquisa acadêmica “Ensino de álgebra no oitavo ano: a generalização de padrões a partir da perspectiva sociocultural”, de autoria de Flávia Christiane do Nascimento Regis, mestranda da Faculdade de Educação da UFMG. A pesquisa tem por objetivo analisar como os estudantes de 8º ano se engajam em tarefas que envolvam generalização de padrões em sequências, mediadas pela utilização de material concreto e pela interação entre professores e colegas. Partindo do pressuposto de que é papel da escola inserir as pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, é relevante o desenvolvimento de propostas de ensino que estimulem a construção de estratégias, a criatividade, a iniciativa e a comprovação e a justificativa de resultados.

A pesquisa acontecerá durante as aulas regulares de matemática, com a autorização e colaboração do(a) professor(a) regente, a partir da aplicação de uma série de atividades envolvendo sequências numéricas e geométricas, desenvolvidas em oficinas que serão ministradas no Laboratório de Matemática, nas quais os estudantes deverão perceber as regularidades envolvidas e buscar uma regra geral de formação das sequências. Eventualmente, poderão ser feitas reuniões fora do horário de aula, mas sempre em comum acordo com os estudantes e o(a) professor(a). Esse trabalho pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades anteriormente citadas e se coloca como uma alternativa ao ensino de álgebra baseado apenas na manipulação de símbolos, às vezes sem significado para os alunos. Durante as aulas, a pesquisadora realizará observações, anotações e gravações em áudio e vídeo, a fim de também poder avaliar posteriormente as relações, interações, registros e falas em sala de aula.

Apenas com a autorização da direção da escola, dos responsáveis e dos estudantes é que a pesquisa acontecerá, ressaltando-se que:

- ✓ não haverá qualquer atividade proposta que extrapole as tarefas escolares comuns;
- ✓ a participação não envolverá gastos de qualquer natureza, pois os custos previstos são de responsabilidade da pesquisadora;

- ✓ o material coletado – anotações e gravações – será exclusivamente para fins de pesquisa. Não será, portanto, utilizado para avaliação de condutas dos estudantes e nem de sua prática docente;
- ✓ os resultados serão divulgados com uso de nomes fictícios, para que sejam preservadas as identidades de todos os envolvidos;
- ✓ os registros em vídeo comporão um banco de dados que poderão ser utilizados nesta e em outras pesquisas do grupo do qual a pesquisadora faz parte, e ficarão arquivados por um período de 15 anos na sala da professora orientadora da pesquisa, Dr.ª Teresinha Fumi Kawasaki, localizada na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, na Avenida Antônio Carlos, 6.627, Pampulha, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG. Fica assegurado ainda que só terão acesso a esses dados os envolvidos na pesquisa.

A pesquisa apresenta riscos mínimos à saúde e ao bem-estar dos alunos. Porém, poderá haver desconforto ou constrangimento durante a participação, uma vez que esta envolve filmagens. O mesmo poderá acontecer em relação ao tempo dedicado à atividade, pois esta irá alterar a rotina das aulas de matemática. Para que isso não aconteça, propomo-nos a realizar todos os esforços para minimizar os possíveis riscos e desconfortos. Está garantida a indenização em casos de eventuais danos, comprovadamente decorrentes da participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Em qualquer momento, o(a) senhor(a) poderá solicitar esclarecimentos sobre quaisquer aspectos desta pesquisa pelo telefone (31)3879-7142 ou pelo e-mail flaviacnregis@gmail.com.

Para maiores esclarecimentos relativos a questões éticas, o Comitê de Ética na Pesquisa (COEP – UFMG) deverá ser procurado.

Sentindo-se esclarecido(a) em relação à proposta e autorizando a realização desta pesquisa, peço-lhe a gentileza de assinar as duas vias deste documento, sendo que uma delas ficará com o(a) senhor(a) e a outra será arquivada pelos pesquisadores por um período de 15 anos, de acordo com a Resolução 466/2012.

____

Flávia Christiane do Nascimento Regis

(professora de matemática e aluna do mestrado)

____

Teresinha Fumi Kawasaki

(coordenadora da pesquisa)

Agradecemos desde já sua colaboração.

( ) Concordo e autorizo a realização da pesquisa, com gravação das atividades de matemática nos termos propostos.

( ) Discordo e desautorizo a realização da pesquisa.

____

Heloisa Helena Alberto

(diretora da E. E. Geraldo Jardim Linhares)

Belo Horizonte _______de __________________ de 201__.