

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1007

**OPERADOR INTEGRAL APLICADO À CARACTERIZAÇÃO
ESPAÇO-TEMPORAL DE ANTENAS REFLETORAS**

Stefânia de Sousa Faria

DATA DA DEFESA: 29/09/2017

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**OPERADOR INTEGRAL APLICADO À CARACTERIZAÇÃO
ESPAÇO-TEMPORAL DE ANTENAS REFLETORAS**

Stefânia de Sousa Faria

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Cássio Gonçalves do Rego

Belo Horizonte - MG

Setembro de 2017

F224o Faria, Stefânia de Sousa.
Operador integral aplicado à caracterização espaço-temporal de antenas refletoras[manuscrito] /
Stefânia de Sousa Faria. – 2017.
73 f., enc.: il.

Orientador: Cássio Gonçalves do Rego.
Coorientador: Fernando José da Silva Moreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f.71-73.
Bibliografia: f. 68-69.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Antenas refletoras - Teses. 3. Operadores integrais - Teses. 4. Análise de domínio temporal - Teses. I. Rego, Cássio Gonçalves do. II. Moreira, Fernando José da Silva. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)

**"Operador Integral Aplicado à
Caracterização Espaço-temporal
de Antenas Refletoras"**

Stefânia de Sousa Faria

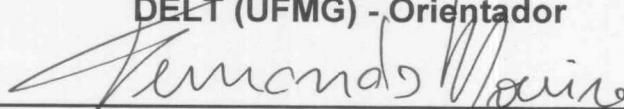
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 29 de setembro de 2017.

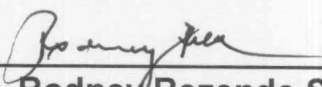
Por:



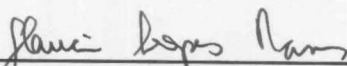
**Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG) - Orientador**



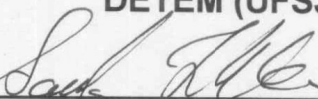
**Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG)**



**Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha
DEE (UFMG)**



**Prof. Dr. Gláucio Lopes Ramos
DETEM (UFSJ)**



**Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves
Engenharia Mecatrônica (CEFET-MG)**

Aos meus pais Maurício e Eugênia, e irmãos Lucas e Ludmilla.

“For every difficult problem there is always a simple answer and most of them are wrong.”(Clayton R. Paul)

AGRADECIMENTOS

- Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me capacitar e permitir finalizar este trabalho;
- Aos meus pais e irmãos, pelo amor incondicional e por serem os maiores incentivadores durante esta jornada;
- Ao Prof. Cássio Gonçalves do Rego por acreditar em meu potencial e pelo apoio durante todo este trabalho;
- Ao Prof. Fernando José da Silva Moreira pelas contribuições e incentivo;
- Aos Profs. Gláucio Lopes Ramos e Marcos Tomio Kakitani pelas dicas e suporte;
- A CAPES/PROCAD e ao PPGEE, órgãos financiadores;
- A todos os meus amigos que, de alguma forma, se fizeram presente e encerram comigo mais esta etapa.

RESUMO

FARIA, Stefânia de Sousa. OPERADOR INTEGRAL APLICADO À CARACTERIZAÇÃO ESPAÇO-TEMPORAL DE ANTENAS REFLETORAS. 73 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2017.

Neste trabalho, é desenvolvida uma formulação fechada para o cálculo de campo radiado a partir de antenas refletoras parabólicas perfeitamente condutoras. Esta solução analítica é manipulada no domínio do tempo de forma a encontrar equações para o operador integral utilizando conceitos de Ótica Geométrica e Método da Abertura. Tal operador, quando associado à fontes genéricas por meio de uma convolução temporal, fornece o campo radiado pela antena, tanto para regiões de campo próximo, quanto para regiões de campo distante. No desenvolvimento dos cálculos, foi empregado um alimentador do tipo cosseno elevado modificado a fim de obter uma formulação geral válida para qualquer valor de expoente n . Os resultados obtidos permitem também a análise de fenômenos transitórios para diferentes fontes de comportamento temporal. Em função do alto grau de dificuldade no processo de integração, utilizou-se um *software* comercial juntamente com um pacote adicional que contém mais de 6000 técnicas de integração para realizar os cálculos.

Palavras-chave: Antenas refletoras, análise espaço-temporal, operador integral, ótica geométrica, método da abertura, alimentador cosseno elevado modificado.

ABSTRACT

FARIA, Stefânia de Sousa. INTEGRAL OPERATORS APPLIED TO SPACE-TIME CHARACTERIZATION OF REFLECTOR ANTENNAS. 73 f. Master's Thesis – Electrical Engineering Graduate Program, Federal University of Minas Gerais. Belo Horizonte, 2017.

In this work, it is developed a closed-formulation to calculate the radiated field by a perfectly conducting parabolic reflector antenna. This analytical solution is manipulated in time-domain in order to find equations to integral operator through the Geometrical Optics and the Aperture Method. Such operator, when associated to general sources by means of a temporal convolution, provides the field radiated by the antenna, such as to near field regions as to far field regions. In this calculation, it was employed the modified raised cosine feeder in order to obtain a generic formulation using any value for the n exponent. The obtained results also allow the analysis of transient phenomenons to different sources of temporal behaviour. Due to the high level of complexity in the integral calculation processes, it was used a commercial software associated to a packet with more than 6000 additional integration rules to solve the problem.

Keywords: Reflector antennas, space-time analysis, integral operator, geometric optics, aperture method, modified raised cosine feeder.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Pulso finito no domínio do tempo e sua transformada equivalente no domínio da frequência.	16
FIGURA 2.1 – Raios refletidos por uma superfície parabólica alimentada pelo foco.	20
FIGURA 2.2 – Regiões de campo da antena.	21
FIGURA 2.3 – Diagrama de radiação do alimentador cosseno elevado modificado para $n=1, 2, 3, 10$	22
FIGURA 2.4 – Abertura plana de um refletor parabólico.	23
FIGURA 3.1 – Relação entre operador integral e uma fonte de comportamento temporal.	25
FIGURA 3.2 – Disposição do sistema de coordenadas do alimentador e do observador considerando o raio incidente \mathbf{r}_F	26
FIGURA 3.3 – Visão lateral do plano de abertura S_a do refletor parabólico.	27
FIGURA 3.4 – Disposição dos vetores unitários e normal unitária.	28
FIGURA 3.5 – Trajeto do raio refletido a partir do plano de abertura até atingir o ponto de observação.	29
FIGURA 3.6 – Área S_a de abertura do refletor contendo a frente de onda no ponto Q	31
FIGURA 3.7 – Localização dos parâmetros $\theta_p, \mathbf{r}, R_0, \theta$ e ξ'	33
FIGURA 3.8 – Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho > \frac{D}{2}$	35
FIGURA 3.9 – Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho < \frac{D}{2}$	35
FIGURA 3.10– Limites para integração em α	36
FIGURA 3.11– Relação entre as coordenadas (y',x') da fonte e (y,x) do observador.	39
FIGURA 3.12– Operador integral em função do tempo para $n=1, r=50$ m e diferentes valores de θ	53
FIGURA 3.13– Operador integral em função do tempo para $n=2, r=50$ m e diferentes valores de θ	53
FIGURA 3.14– Operador integral em função do tempo para $n=3, r=50$ m e diferentes valores de θ	54
FIGURA 3.15– Operador integral em função do tempo para $n=1, r=5000$ m e diferentes valores de θ	55
FIGURA 3.16– Operador integral em função do tempo para $n=2, r=5000$ m e diferentes valores de θ	55
FIGURA 3.17– Operador integral em função do tempo para $n=3, r=5000$ m e diferentes valores de θ	56
FIGURA 3.18– Operador integral em função do tempo para $n=5,68, r=50$ m, considerando $\phi=0^\circ$ e diferentes valores de θ	58
FIGURA 3.19– Operador integral em função do tempo para $n=5,68, r=5000$ m, considerando $\phi=0^\circ$ e diferentes valores de θ	58
FIGURA 3.20– Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=1$	61
FIGURA 3.21– Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=2$	61
FIGURA 3.22– Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=3$	61

	para $n=3$	62
FIGURA 3.23–	Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=1$	63
FIGURA 3.24–	Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=2$	63
FIGURA 3.25–	Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=3$	64

LISTA DE SIGLAS

VHF	Very High Frequency
EHF	Extremely High Frequency
UTD	Uniform Theory of Diffraction
IRA	Impulse Radiated Antenna
GO	Geometrical Optics
Rubi	Rule-based integrator
PSK	Phase shift keying
bit	Binary digit

LISTA DE SÍMBOLOS

$\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s)$	Campo elétrico radiado no domínio da frequência
D	Diâmetro da antena
λ	Comprimento de onda
θ_F	Ângulo de alimentação
n	Exponente da formulação cosseno elevado
$D(\theta_F, \phi_F)$	Diretividade do alimentador
$\tilde{\mathbf{E}}_a(\rho',s)$	Campo elétrico na abertura no domínio da frequência
$\tilde{\mathbf{H}}_a(\rho',s)$	Campo magnético na abertura no domínio da frequência
$\mathbf{E}^{u,\delta}(\mathbf{r},t)$	Resposta ao impulso (degrau) da antena
$\tilde{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}_F,s)$	Campo elétrico radiado pelo alimentador no domínio da frequência
Z_0	Impedância característica do espaço livre
Y_0	Admitância do espaço livre
s	Variável associada à frequência
c	Velocidade da luz no vácuo
R	Distância entre o observador e a fonte equivalente
\mathbf{r}	Vetor que parte da origem em direção ao observador
ρ'	Vetor que liga o ponto de origem do sistema no plano de abertura à fonte
S_a	Porção da abertura a ser integrada
V_0	Valor de pico da tensão do alimentador
$\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F)$	Vetor polarização
Δ	Distância entre o refletor parabólico e o plano de abertura
F	Distância focal
Q_R	Ponto localizado na superfície refletora
Q	Ponto localizado no plano de abertura
\bar{R}	Coefficiente de reflexão
$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^i$	Vetor unitário paralelo - raio incidente
$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^r$	Vetor unitário paralelo - raio refletido
$\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$	Vetor unitário perpendicular
$\hat{\mathbf{n}}_F$	Normal unitária do parabolóide
P	Ponto de observação
ξ	Vetor dado pela diferença entre os vetores ρ' e ρ
ρ	Vetor que parte da origem do plano de abertura em direção ao ponto Q
θ_P	Ângulo formado entre as distâncias ξ' e R_0
ξ'	Valor positivo da raiz do argumento da função delta de Dirac
α_1	Limite de integração inicial em relação a α
α_2	Limite de integração final em relação a α
t_1	Instante inicial da resposta ao degrau da antena
t_2	Instante final da resposta ao degrau da antena
ξ_1	Limite de integração inicial em relação a ξ
ξ_2	Limite de integração final em relação a ξ
V_0	Tensão de pico de entrada

ϕ	Ângulo de azimute
θ	Ângulo de elevação
r	Coordenada radial
ε_t	Eficiência de transbordamento
ε_s	Eficiência de iluminação
θ_E	Ângulo de iluminação
ε_T	Eficiência máxima
AB	Atenuação na borda do refletor
T_b	Intervalo de transmissão de um bit
A_c	Amplitude associada ao sinal 4-PSK
ω_c	Frequência angular da portadora

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	RESULTADOS E PUBLICAÇÃO	17
1.2	ORGANIZAÇÃO	17
2	ANTENAS REFLETORAS PARABÓLICAS	19
2.1	ESTRUTURA DE ANTENAS REFLETORAS PARABÓLICAS	19
2.2	ALIMENTADOR COSSENO ELEVADO MODIFICADO	21
2.3	ÓTICA GEOMÉTRICA	22
2.3.1	MÉTODO DA ABERTURA	23
3	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO CAMPO RADIADO POR UM REFLETOR PARABÓLICO	24
3.1	OPERADOR INTEGRAL	24
3.1.1	DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	25
3.1.2	DOMÍNIO DO TEMPO	31
3.1.3	CARACTERÍSTICAS DO ALIMENTADOR E DA FUNÇÃO $g(\rho', \phi')$	36
3.1.4	RULE-BASED INTEGRATOR (Rubi)	43
3.1.5	SOLUÇÃO GENÉRICA PARA O ALIMENTADOR COSSENO ELEVADO MODIFICADO	44
3.1.6	ANÁLISE GRÁFICA DO OPERADOR INTEGRAL	52
3.1.6.1	REGIÃO DE FRESNEL	52
3.1.6.2	REGIÃO DE FRAUNHOFER	54
3.1.7	CASO PARTICULAR DE n	56
3.2	ANÁLISE DO CAMPO RADIADO	59
3.2.1	CAMPO RADIADO POR UMA FONTE 4-PSK	60
3.2.1.1	REGIÃO DE FRESNEL	60
3.2.1.2	REGIÃO DE FRAUNHOFER	62
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS	65
4.1	TRABALHOS FUTUROS	66
	REFERÊNCIAS	68
	APÊNDICE	70
A	FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICA E HIPERGEOMÉTRICA APPELL	71
A.1	FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA	71
A.2	FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA APPELL	73

1 INTRODUÇÃO

A indústria das telecomunicações está associada diretamente à necessidade de se comunicar à distância. Após Alexander Graham Bell desenvolver o sistema telefônico cabado em 1875, estudiosos passaram a pesquisar uma forma de comunicação que não utilizasse fios. É nesse contexto que surge Marchese Guglielmo Marconi, considerado o inventor do rádio e responsável pela primeira comunicação móvel do mundo, em 1897 (MEDEIROS, 2007).

Na grande maioria dos casos, a ausência de fios em sistemas de comunicação está ligada à aplicação de antenas como instrumentos responsáveis por transmitir e receber informações. Desenvolvidas para radiar e captar ondas eletromagnéticas, as antenas criam enlaces entre diferentes pontos e dão origem às chamadas redes de telecomunicações (MEDEIROS, 2007).

Atualmente, o planejamento de redes de telecomunicações sem fio envolve, muitas vezes, o uso de antenas refletoras parabólicas. Tais antenas são caracterizadas por apresentar alta diretividade e operar em elevadas frequências, especialmente entre as faixas VHF (*Very High Frequency*) e EHF (*Extremely High Frequency*) que vão de 30 MHz a 300 GHz, onde podem ser empregadas para a radiodifusão em FM e TV, telefonia celular, radar e comunicação via satélite (BATISTA, 2008).

Os campos eletromagnéticos radiados por essas antenas são, geralmente, analisados no domínio da frequência assumindo que as componentes de campo são ondas fixadas em uma única frequência e não apresentam efeitos transitórios. Para este tipo de análise harmônica, técnicas como Ótica Física, Ótica Geométrica, Teoria Geométrica da Difração, Teoria Uniforme da Difração, Método dos Momentos, entre outras, podem ser aplicadas para a solução dos problemas.

Contudo, em muitos casos práticos, campos eletromagnéticos gerados, por exemplo, por radares, apresentam sinais de forma pulsada. Nesse cenário, não se pode assumir que a fonte do sistema opera em uma frequência central, gerando assim, a importância da análise do fenômeno transitório ou análise temporal, principalmente para casos em que se utilizam grandes

antenas refletoras (SUN, 1995).

A análise de radiação de pulsos ultracurtos baseada em técnicas tradicionais no domínio da frequência pode tornar-se impraticável devido à manipulação de uma largura de banda muito grande, conforme ilustra a Figura 1.1. Desse modo, o estudo de fenômenos eletromagnéticos tem sido, cada vez mais, desenvolvido no domínio do tempo. Técnicas assintóticas como Ótica Física e técnicas de traçado de raios juntamente com UTD (*Uniform Theory of Diffraction*) podem ser transformadas para o domínio do tempo de forma rápida e apurada (REGO et al., 2008).

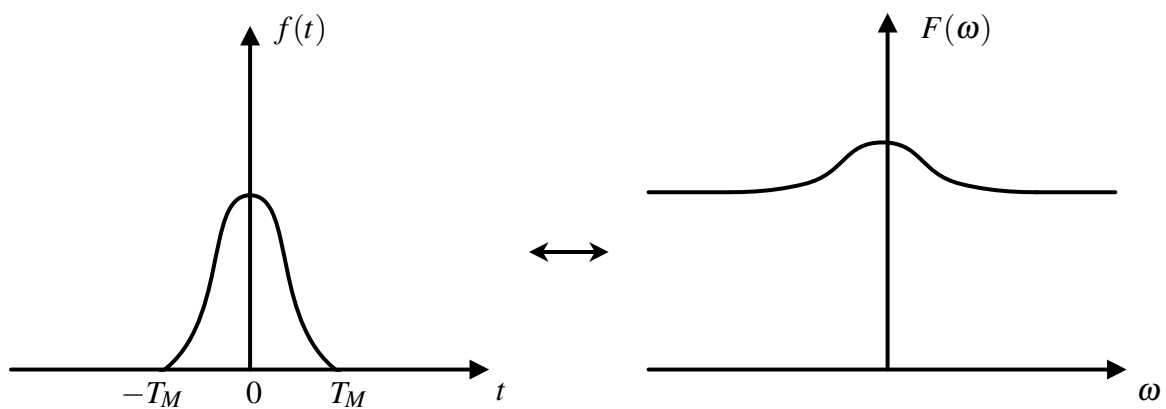


Figura 1.1: Pulso finito no domínio do tempo e sua transformada equivalente no domínio da frequência.

Fonte: Figura modificada (ALENCAR, 1998).

A demanda por aumento no conteúdo de informação dos sistemas de comunicação resulta em um aumento na largura de banda e é uma das principais razões para se investigar e descrever os campos no domínio do tempo. Várias formulações, neste aspecto, foram propostas por Baum, Farr e Giri. Porém, todas, de alguma forma, apresentavam restrições. Baum, por exemplo, desenvolveu uma extensa análise utilizando antenas de impulso radiado (IRA – do inglês *Impulse Radiated Antenna*) para prever campos radiados. A proposta, contudo, apresenta uma limitação devido às equações, que podem ser aplicadas apenas em regiões de campo distante (CHOU et al., 1997).

É neste contexto que o presente trabalho se diferencia. Além de possibilitar o uso de fontes genéricas em antenas refletoras parabólicas perfeitamente condutoras, as expressões desenvolvidas são válidas tanto para regiões de campo próximo, quanto para regiões de campo distante. A análise feita utiliza conceitos da Ótica Geométrica juntamente com o Método da Abertura, ambos no domínio da frequência, para determinar o operador integral utilizado no cálculo do campo radiado. Tal operador, ao ser submetido a uma transformada inversa de

Laplace, pode ser associado a fontes genéricas por meio de uma convolução temporal de modo a fornecer o campo radiado em qualquer ponto do espaço. Para este estudo, foi escolhido um alimentador conhecido como cosseno elevado modificado, no qual a formulação apresentada será aplicada, utilizando-se qualquer valor para a diretividade do modelo de alimentação.

As integrais obtidas para o operador integral são de alta complexidade e por isso foram calculadas por meio de um *software* comercial associado a um pacote matemático adicional que complementa a biblioteca de técnicas de integração. A análise gráfica do operador integral e dos campos radiados foi feita para um ângulo azimutal fixo e diferentes valores de ângulos de elevação.

1.1 RESULTADOS E PUBLICAÇÃO

A fim de comprovar a veracidade das equações desenvolvidas, restringiu-se o problema a $n = 1$, e realizou-se uma comparação entre os operadores integrais dos alimentadores cosseno elevado e cosseno elevado modificado.

- FARIA, S.; REGO, C.; MOREIRA, F., Integral operators formulation for transient radiation from parabolic antennas using modified raised cosine feeder. **The Applied Computational Electromagnetics Society (ACES)**, 2017.

Após realizar tal comparação, optou-se por continuar o desenvolvimento deste estudo apenas com a formulação para o alimentador cosseno elevado modificado, pois o mesmo permite obtenção de uma solução analítica fechada mais simples e genérica.

1.2 ORGANIZAÇÃO

As demais partes deste documento são divididas da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta os principais conceitos e equações utilizados na análise de antenas refletoras parabólicas, incluindo definições de alimentadores e campo radiado pela antena. Diferentes métodos podem ser utilizados para calcular o campo radiado e, por isso, nesse capítulo é dada ênfase também à Ótica Geométrica e ao Método da Abertura, os quais serão utilizados no desenvolvimento das expressões. O Capítulo 3 apresenta toda a formulação desenvolvida e os resultados obtidos por meio de simulações. São apresentadas as expressões das componentes cartesianas do operador integral, e a análise dos campos radiados em regiões de campo próximo e distante. Funções especiais aparecem como solução das integrais na formulação genérica e

são retratadas com mais detalhes no Apêndice A. Por fim, o Capítulo 4 relata os comentários finais e as propostas de trabalhos futuros.

2 ANTENAS REFLETORAS PARABÓLICAS

O termo antena é definido como uma estrutura metálica de transição entre o espaço livre e um meio guiado, capaz de transmitir ou receber ondas eletromagnéticas. Antenas refletoras, em especial, têm sido utilizadas desde a descoberta da propagação de ondas de rádio por Heinrich Rudolf Hertz, em 1888. Contudo, a análise e projeto deste tipo de antena se tornaram mais intensos a partir da Segunda Guerra Mundial, quando deu-se início às aplicações de radar (BALANIS, 2005).

A formulação desenvolvida neste trabalho é direcionada exclusivamente para antenas refletoras parabólicas. Sendo assim, segue-se uma visão geral do tipo de antena estudado.

2.1 ESTRUTURA DE ANTENAS REFLETORAS PARABÓLICAS

Antenas refletoras parabólicas são utilizadas em situações que exigem altas taxas de transmissão ou diretividades elevadas, necessárias para transmitir ou receber sinais a vários quilômetros de distância.

O princípio de funcionamento deste tipo de antena se dá por meio da colimação de raios. Estes refletores colimam o feixe radiado pelo alimentador em uma frente de onda plana. A superfície parabólica (parabolóide) utilizada nesta análise é obtida pela rotação de uma parábola em torno de seu próprio eixo e no foco principal do sistema é colocado o alimentador, responsável pela excitação da antena (BALANIS, 2005).

Como o alimentador é posicionado no foco do parabolóide, a configuração é conhecida como alimentação frontal. Quando a alimentação ocorre de maneira eficiente pelo foco, os refletores parabólicos são capazes de gerar um feixe muito diretivo, com baixo nível de lóbulos secundários e baixa polarização cruzada (BALANIS, 2005).

As antenas refletoras parabólicas podem ser completamente caracterizadas pela dependência do campo radiado com a distância e a frequência $[\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s)]$. Os campos eletromagnéticos são radiados por correntes induzidas na superfície da antena e para o caso

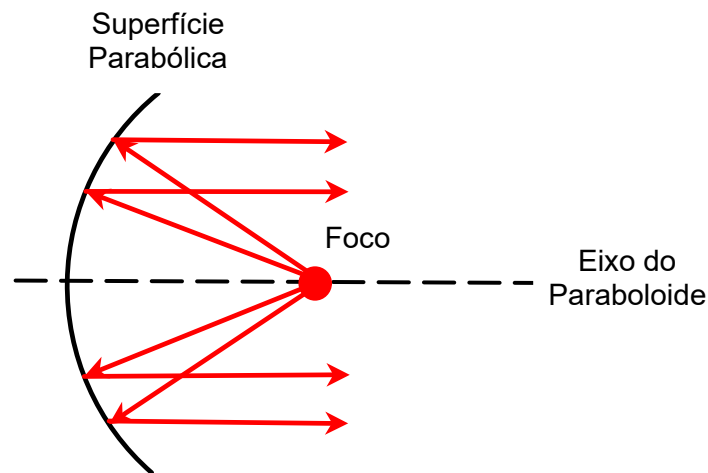


Figura 2.1: Raios refletidos por uma superfície parabólica alimentada pelo foco.

de antenas transmissoras de pulsos, a geometria dessas correntes depende do instante de tempo (OLIVEIRA; HÉLIER, 2007).

Para o presente trabalho, será importante também estabelecer o conceito de regiões de campo da antena. De acordo com (BALANIS, 2005), o espaço ao redor de uma antena pode ser dividido em três seções: campo próximo reativo, campo próximo radiante (região de Fresnel) e campo distante (região de Fraunhofer). Essa é apenas uma das definições associadas à regiões de campo da antena e pôde ser empregada ao assumir-se o comprimento de onda da portadora do sinal como sendo um valor fixo.

A região de campo próximo reativo é tida como a área imediatamente ao redor da antena onde os campos elétrico e magnético da onda transmitida não são ortogonais entre si. Está presente para uma distância $d < 0,62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}}$, sendo D o diâmetro da antena e λ o comprimento de onda do sinal. A região de campo próximo radiante é vista como a faixa entre a região de campo reativo e a região de campo distante. Nesta faixa, a distribuição angular de campo é dependente da distância da antena, e está localizada entre $0,62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \leq d < \frac{2D^2}{\lambda}$. Por fim, a região de campo distante é definida como a região onde a distribuição angular de campo não depende da distância da antena e os campos elétrico e magnético são ortogonais entre si. Ocorre para uma distância $d \geq \frac{2D^2}{\lambda}$ (BALANIS, 2005). Neste estudo, as região de Fresnel e Fraunhofer terão único destaque.

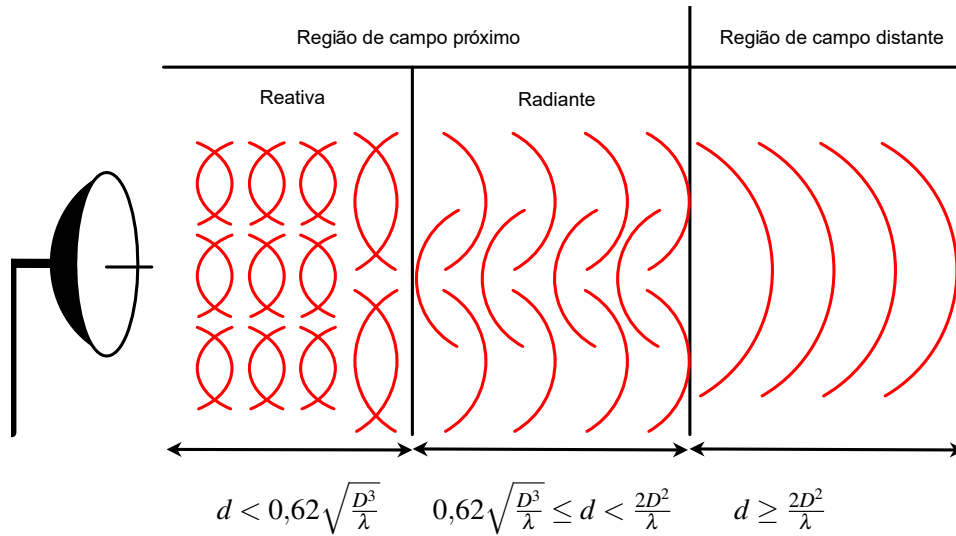


Figura 2.2: Regiões de campo da antena.

Fonte: Figura modificada (DJUKNIC, 2003).

2.2 ALIMENTADOR COSSENO ELEVADO MODIFICADO

Para os cálculos desenvolvidos neste trabalho, considerou-se uma variação do modelo cosseno elevado (SILVER, 1984) como forma de alimentação, a qual é obtida alterando-se o argumento da função cosseno para $\theta_F/2$ (KILDAL, 2000). Tal modelo permite representar, satisfatoriamente, o diagrama de radiação de diversas antenas cornetas que, na prática, são utilizadas como alimentadores de antenas parabólicas.

Esse tipo de alimentador é apresentado em função dos parâmetros θ_F e n , de modo que sua representação matemática é dada por

$$f(\theta_F) = \cos^n \left(\frac{\theta_F}{2} \right), \quad (2.1)$$

em que $0 \leq \theta_F \leq \pi$. O mesmo foi empregado por facilitar o desenvolvimento de uma formulação analítica fechada para as integrais de radiação. O ângulo θ_F indica a região de iluminação fornecida pelo alimentador e o expoente n é responsável por controlar o formato do diagrama de radiação do alimentador, sendo que, quanto maior o valor do expoente, mais diretivo o diagrama será (FARIA, 2015).

A diretividade $D(\theta_F, \phi_F)$ do alimentador cosseno elevado modificado é dada por

$$D(\theta_F, \phi_F = 0) = (n + 1) \cos^{2n} \left(\frac{\theta_F}{2} \right). \quad (2.2)$$

De modo a ilustrar o aumento da diretividade ao variar-se o valor do expoente n , obteve-se as

curvas da Figura 2.3.

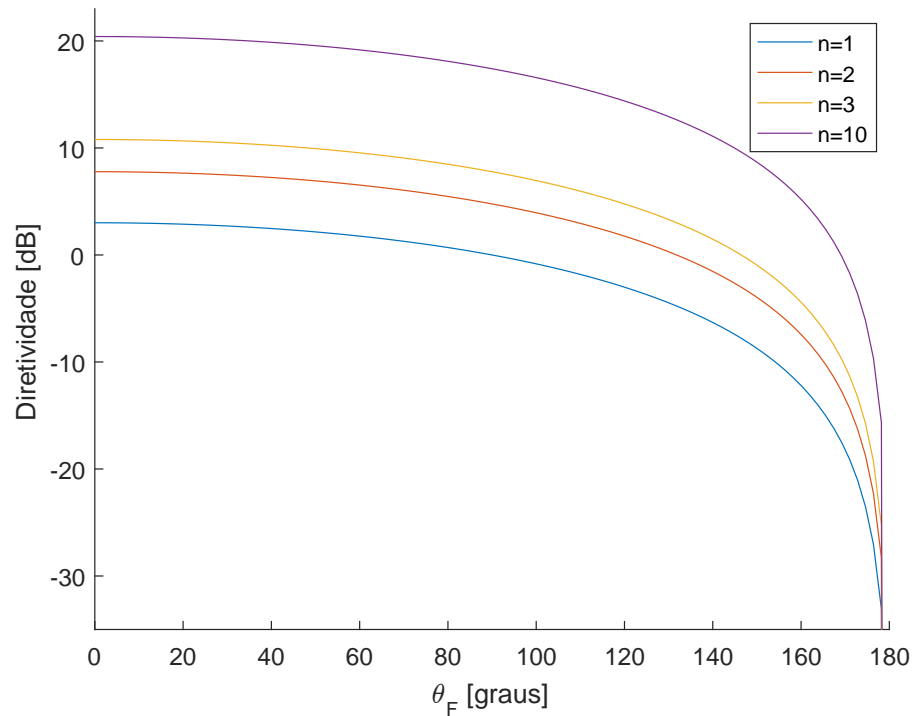


Figura 2.3: Diagrama de radiação do alimentador cosseno elevado modificado para $n=1, 2, 3, 10$.

Uma antena refletora parabólica que utiliza este tipo de alimentador é capaz de radiar pulsos rápidos por meio de um feixe estreito. Além disso, a faixa de frequência do sinal radiado pode ser bastante ampla.

2.3 ÓTICA GEOMÉTRICA

A Ótica Geométrica (GO – do inglês *Geometrical Optics*) utiliza técnicas de traçado de raios para encontrar o campo espalhado por determinadas superfícies. De modo geral, esse método se destaca por caracterizar as trajetórias seguidas pelos raios que partem do alimentador da antena.

Por meio da Ótica Geométrica, pode-se afirmar que um feixe de raios paralelos incidente em um refletor parabólico perfeitamente condutor irá produzir uma radiação que converge para o foco. De forma semelhante, uma fonte pontual posicionada no foco irá gerar raios refletidos pelo parabolóide como um feixe paralelo. Tal fenômeno se enquadra no Princípio da Reciprocidade (BALANIS, 2005).

A análise realizada neste trabalho leva em consideração somente técnicas óticas para o rastreamento de campo na abertura, desconsiderando, portanto, quaisquer efeitos de difração

ocasionados pela borda do refletor ou pela estrutura de alimentação. Tais efeitos foram desconsiderados por demandarem valores de ângulo de iluminação elevados, o que foge do escopo deste trabalho.

2.3.1 MÉTODO DA ABERTURA

Para antenas de grande porte, a distribuição espacial do campo é definida pela forma e dimensão de sua abertura, pois, os campos eletromagnéticos dessas antenas podem ser representados como integrais calculadas a partir dos campos na abertura (SKULKIN; TURCHIN, 1999).

No Método da Abertura, tem-se que o campo refletido pelo parabolóide é determinado ao longo de um plano normal ao eixo do refletor conhecido como plano de abertura (BALANIS, 2005).

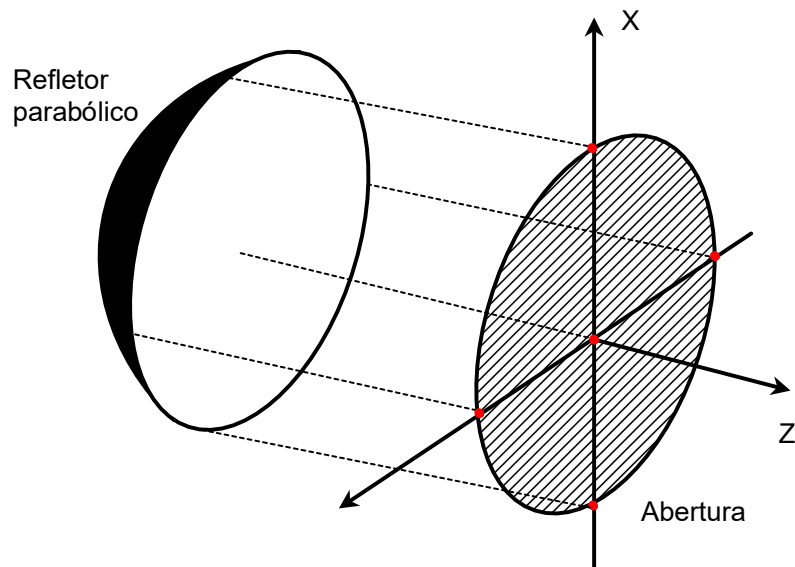


Figura 2.4: Abertura plana de um refletor parabólico.

Assim, fontes equivalentes formadas no plano de abertura são utilizadas para determinar os campos radiados pela antena. O Princípio da Equivalência e a técnica de traçado de raios (Ótica Geométrica) estão diretamente associados ao Método da Abertura. É importante ressaltar que efeitos de difração na borda do refletor não são considerados no cálculo do campo na abertura, contudo, ao integrar-se a região de abertura para encontrar o campo radiado, efeitos difrativos são parcialmente considerados (CHOU et al., 1997).

Considerando uma abertura localizada em $z = 0$, o método desenvolvido neste trabalho determina campos radiados para $z > 0$, assumindo o vácuo como meio (BAUM, 1987).

3 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO CAMPO RADIADO POR UM REFLETOR PARABÓLICO

3.1 OPERADOR INTEGRAL

Normalmente, a análise de antenas refletoras parabólicas é feita no domínio da frequência e o transitório de tais estruturas é obtido pela transformada de Fourier aplicada nas equações de radiação. Sabe-se, contudo, que este estudo se torna menos complicado quando o mesmo é realizado diretamente no domínio do tempo (OLIVEIRA; HÉLIER, 2007).

A solução no domínio do tempo para o presente trabalho é obtida por meio da conversão da análise correspondente no domínio da frequência, a qual pode ser encontrada utilizando-se conceitos de aproximação assintótica em alta frequência, nesse caso, aproximação da ótica geométrica, dentro do método equivalente de campo na abertura (CHOU et al., 1997).

Para esta análise, considerou-se a abertura em $z = 0$, onde é possível traçar um plano definido pelo contorno do parabolóide e encontrar o campo na abertura. O cálculo do campo radiado por esse método é expresso em termos das correntes (fontes) equivalentes que surgem neste plano e permitem definir os campos elétrico $\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s)$ e magnético $\tilde{\mathbf{H}}_a(\boldsymbol{\rho}', s)$ na abertura. Aplicando a transformada inversa de Laplace nas equações do operador integral e realizando a convolução no domínio do tempo, encontra-se, finalmente, o campo transitório (CHOU et al., 1997).

A caracterização no domínio do tempo de antenas refletoras parabólicas descrita neste trabalho é equivalente à comumente utilizada no domínio da frequência após aplicar-se a transformada temporal de Fourier (SHLIVINSKI et al., 1997). O ponto chave desta formulação está associado ao desenvolvimento de um operador integral, também conhecido como função de transferência ou resposta ao degrau (impulso) da antena $\mathbf{E}^{u,\delta}(\mathbf{r}, t)$, o qual apresenta unidade de medida igual à do campo elétrico [V/m] e pode ser entendido como uma função peso no cálculo do campo radiado, como ilustra a Figura 3.1.

O comportamento temporal do operador integral neste trabalho se assemelha a uma função impulso e é tido como um passo intermediário para o cálculo do campo radiado.

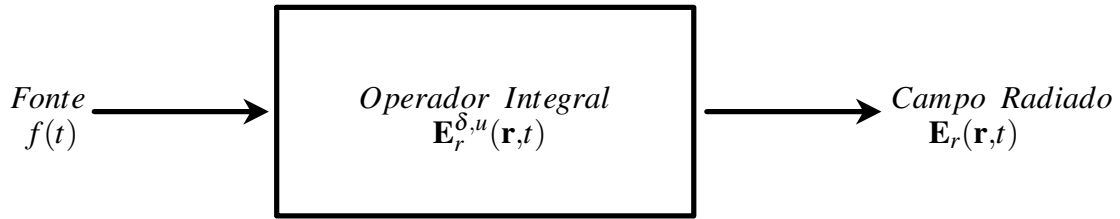


Figura 3.1: Relação entre operador integral e uma fonte de comportamento temporal.

Somente a convolução entre a função de transferência da antena e o sinal de excitação da fonte primária irá gerar o campo transmitido. A duração da função de transferência é proporcional à área de superfície do refletor e seu valor decresce com o aumento da distância entre refletor e observador, seguindo a razão de $1/r$ (OLIVEIRA; HÉLIER, 2007).

3.1.1 DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A fim de evitar possíveis dúvidas relacionadas à notação utilizada, fixou-se, para os cálculos que se seguem, as variáveis $\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$ como sendo campos no domínio da frequência, enquanto que \mathbf{E} e \mathbf{H} foram estabelecidos como campos no domínio do tempo. Desse modo, a equação geral, no domínio da frequência, válida a partir da região de Fresnel, para o cálculo do campo radiado no espaço livre por uma antena refletora iluminada por um campo elétrico $\tilde{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}_F, s)$ radiado pelo alimentador quando o mesmo está centrado em O_F , conforme ilustra a Figura 3.2, é dada por (CHOU et al., 1997):

$$\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, s) \approx \frac{sZ_0}{4\pi c} \int \int_{S_a} \{ \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times [\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{H}}_a(\boldsymbol{\rho}', s)] + Y_0 \hat{\mathbf{R}} \times [\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) \times \hat{\mathbf{z}}] \} \frac{e^{-sR/c}}{R} dS', \quad (3.1)$$

em que Z_0 é a impedância intrínseca do meio, $Y_0=1/Z_0$, $\hat{\mathbf{R}}$ é o vetor unitário dado por $\hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}')/R$, s é a variável associada à frequência, c é a velocidade da luz no vácuo e o termo $\exp(-sR/c)/R$ é a função de Green no espaço livre, no qual $R = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'|$ é a distância entre o observador e a fonte equivalente. Nesse caso, \mathbf{r} é o vetor que parte da origem em direção ao observador e $\boldsymbol{\rho}'$ é o vetor que liga o ponto de origem do sistema no plano de abertura à fonte. O subscrito S_a indica a porção da abertura a ser integrada, desconsiderando-se o bloqueio gerado pela presença física do alimentador.

Para frequências consideravelmente altas, os campos na abertura representados por $\tilde{\mathbf{E}}_a$ e $\tilde{\mathbf{H}}_a$ podem ser determinados por meio da Ótica Geométrica. Esses campos estão localizados no plano $z = 0$, o qual corresponde à abertura projetada do refletor parabólico, e podem ser

expressos da seguinte maneira (CHOU et al., 1997):

$$\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = \tilde{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}_F, s) \cdot \bar{R} e^{\frac{-s\Delta}{c}}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = Y_0 [\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s)]. \quad (3.3)$$

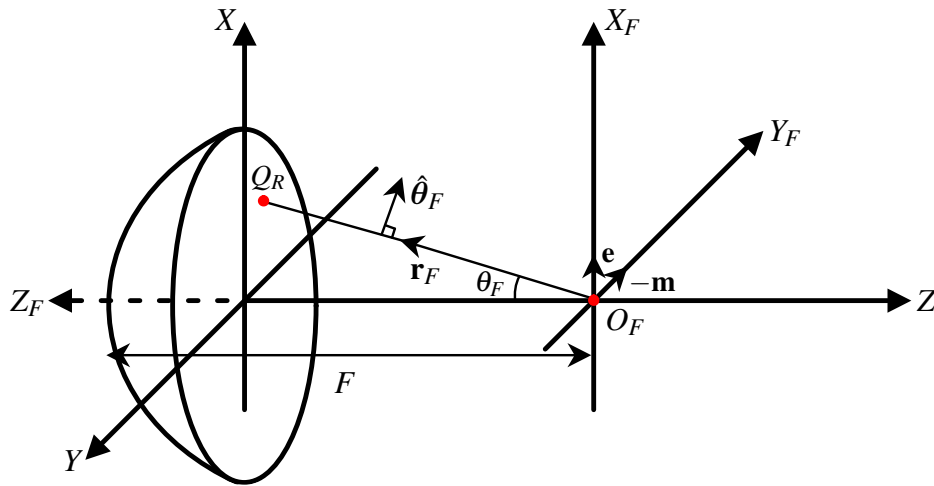


Figura 3.2: Disposição do sistema de coordenadas do alimentador e do observador considerando o raio incidente \mathbf{r}_F .

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

Nesse caso, $\tilde{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}_F, s)$ pode ser escrito em função de uma constante V_0 associada ao valor de pico da tensão do alimentador e de um vetor polarização $\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F)$ que possui componentes $\hat{\boldsymbol{\theta}}_F$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}_F$ (CHOU et al., 1997):

$$\tilde{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}_F, s) = V_0 \mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \frac{e^{\frac{-s}{c} r_F}}{s r_F} = V_0 [f_\theta(\theta_F, \phi_F) \hat{\boldsymbol{\theta}}_F + f_\phi(\theta_F, \phi_F) \hat{\boldsymbol{\phi}}_F] \frac{e^{\frac{-s}{c} r_F}}{s r_F}. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4), a dependência do alimentador com o fator $1/s$ é estabelecida para que o mesmo possa radiar uma onda esférica com diretividade definida pelo cosseno elevado modificado.

A variável Δ na equação (3.2) é uma propriedade das cônicas no plano Cartesiano e indica a distância entre o refletor parabólico e o plano de abertura,

$$\Delta = -r_F + F + \frac{D^2}{16F} = r_F \cos \theta_F - \left(F - \frac{D^2}{16F} \right), \quad (3.5)$$

sendo D o diâmetro do paraboloide e F a sua distância focal. Por meio da Figura 3.3 é possível visualizar a importante relação que Δ possui com os pontos Q_R e Q , sendo Q_R o ponto localizado na superfície refletora e Q a projeção do ponto de observação P sobre o plano $z = 0$.

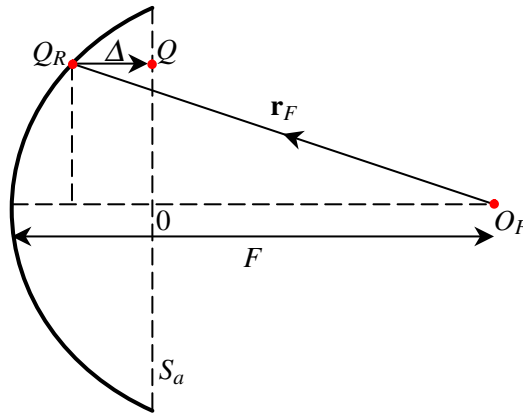


Figura 3.3: Visão lateral do plano de abertura S_a do refletor parabólico.

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

Além disso, o coeficiente de reflexão \bar{R} , também presente em (3.2), pode ser expresso como (CHOU et al., 1997)

$$\bar{R} = \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^i \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^r - \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \quad (3.6)$$

em que os vetores unitários $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^i$, $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^r$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ estão presentes nos raios incidente (i) e refletido (r) e indicam vetores paralelos e perpendiculares ao plano em que se localiza o vetor \mathbf{e} de direção do campo elétrico. Tais vetores obedecem às seguintes relações:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_F \times \hat{\mathbf{n}}_F}{|\hat{\mathbf{r}}_F \times \hat{\mathbf{n}}_F|} = \hat{\phi}_F = -\sin \phi_F \hat{\mathbf{x}}_F + \cos \phi_F \hat{\mathbf{y}}_F = -\sin \phi_F \hat{\mathbf{x}} - \cos \phi_F \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^i &= \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{r}}_F = \hat{\theta}_F = \cos \theta_F \cos \phi_F \hat{\mathbf{x}}_F + \cos \theta_F \sin \phi_F \hat{\mathbf{y}}_F - \sin \theta_F \hat{\mathbf{z}}_F \\ &= \cos \theta_F \cos \phi_F \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_F \sin \phi_F \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta_F \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}^r = \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \times (-\hat{\mathbf{z}}_F) = \hat{\mathbf{z}}_F \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp} = -\cos \phi_F \hat{\mathbf{x}}_F - \sin \phi_F \hat{\mathbf{y}}_F = -\cos \phi_F \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_F \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.9)$$

O vetor $\hat{\mathbf{n}}_F$ em (3.7) é a normal unitária do parabolóide e é dado por

$$\hat{\mathbf{n}}_R = -\cos \left(\frac{\theta_F}{2} \right) \hat{\mathbf{r}}_F + \sin \left(\frac{\theta_F}{2} \right) \hat{\theta}_F. \quad (3.10)$$

A Figura 3.4 ilustra a componente normal, juntamente com os vetores unitários do problema.

A mudança de base realizada de (3.7) a (3.9) foi feita para ser possível trabalhar em um único sistema de coordenadas. É importante ressaltar que as componentes com o sobrescrito F estão relacionadas ao alimentador, enquanto que as demais componentes estão associadas ao observador.

Aplicando as equações de (3.4) a (3.9) em (3.2), encontra-se o campo elétrico na

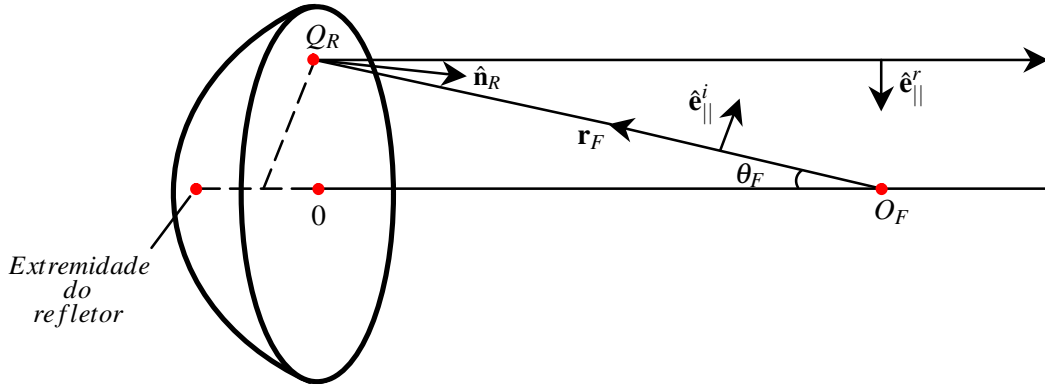


Figura 3.4: Disposição dos vetores unitários e da normal unitária.

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

abertura em função das coordenadas do observador localizado no ponto P da Figura 3.5. O passo a passo realizado nos cálculos é mostrado a seguir

$$\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = V_0 \mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \frac{e^{-\frac{sr_F}{c}}}{sr_F} \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_{||}^i \hat{\mathbf{e}}_{||}^r - \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \right) e^{-\frac{s\Delta}{c}} \quad (3.11a)$$

$$= V_0 \left[\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{||}^i \hat{\mathbf{e}}_{||}^r - \mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \right] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F} \quad (3.11b)$$

$$= V_0 \left[\left(\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}_F \right) \hat{\mathbf{e}}_{||}^r - \left(\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}_F \right) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \right] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F} \quad (3.11c)$$

$$= V_0 \left[f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{e}}_{||}^r - f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \right] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F} \quad (3.11d)$$

$$= V_0 \left[f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) (-\cos \phi_F \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi_F \hat{\mathbf{y}}) + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) (\sin \phi_F \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi_F \hat{\mathbf{y}}) \right] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}. \quad (3.11e)$$

Separando $\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s)$ em componentes $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$, é possível reescrever o campo na abertura da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = V_0 \left\{ \left[-f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \cos \phi_F + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \sin \phi_F \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \sin \phi_F + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \cos \phi_F \right] \hat{\mathbf{y}} \right\} \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}. \quad (3.12)$$

Para simplificar a notação, utilizou-se

$$A_x(\theta_F, \phi_F) = -f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \cos \phi_F + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \sin \phi_F, \quad (3.13)$$

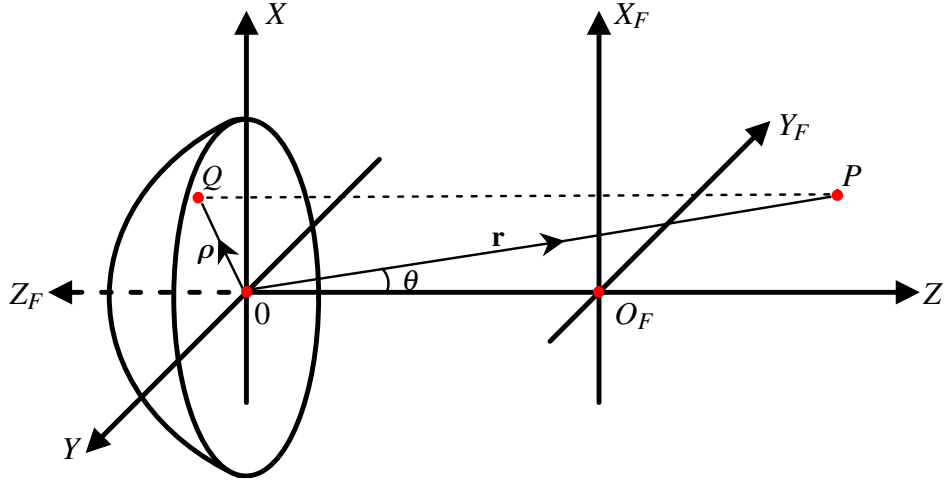


Figura 3.5: Trajeto do raio refletido a partir do plano de abertura até atingir o ponto de observação.

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

$$A_y(\theta_F, \phi_F) = f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \text{sen } \phi_F + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \text{cos } \phi_F, \quad (3.14)$$

de forma que os campos elétrico e magnético na abertura são reescritos como

$$\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = V_0 [A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} + A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}, \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = Y_0 V_0 [-A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} + A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}. \quad (3.16)$$

Substituindo as equações (3.15) e (3.16) nos produtos vetoriais presentes em (3.1), têm-se

$$\tilde{\mathbf{E}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) \times \hat{\mathbf{z}} = V_0 [A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}, \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{H}}_a(\boldsymbol{\rho}', s) = Y_0 V_0 [-A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F}, \quad (3.18)$$

onde o campo radiado pela abertura passa a ser dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, s) \approx \frac{sZ_0}{4\pi c} \int \int_{S_a} \left\{ \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[Y_0 V_0 [-A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F} \right] + \right. \\ \left. \hat{\mathbf{R}} \times \left[Y_0 V_0 [A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \frac{e^{-\frac{s}{c}(\Delta + r_F)}}{sr_F} \right] \right\} \frac{e^{-\frac{sR}{c}}}{R} dS'. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Simplificando algumas constantes da equação (3.19) é possível reescrevê-la da

seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s) \approx \frac{V_0}{4\pi c} \int \int_{S_a} \{ \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times [-A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] + \\ \hat{\mathbf{R}} \times [A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] \} \frac{e^{\frac{-s}{c}(\Delta + r_F + R)}}{Rr_F} dS'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Novamente, a fim de simplificar a expressão matemática, foi realizada outra substituição:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\rho', \phi') = \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times [-A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}] + \\ \hat{\mathbf{R}} \times [A_y(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{x}} - A_x(\theta_F, \phi_F) \hat{\mathbf{y}}], \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que $\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s)$ é finalmente descrito como

$$\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s) = \frac{V_0}{4\pi c} \int \int_{S_a} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{Rr_F} e^{\frac{-s}{c}(\Delta + r_F + R)} dS'. \quad (3.22)$$

Utilizando as relações

$$r_F = \frac{\rho'^2 + 4F^2}{4F}, \quad (3.23)$$

$$\cos \theta_F = \frac{-\rho'^2 + 4F^2}{\rho'^2 + 4F^2}, \quad (3.24)$$

pode-se escrever o argumento da exponencial presente em (3.22) como

$$\Delta + r_F + R = \left[r_F \cos \theta_F - \left(F - \frac{D^2}{16F} \right) \right] + r_F + R \quad (3.25a)$$

$$= \left[\left(\frac{\rho'^2 + 4F^2}{4F} \right) \left(\frac{-\rho'^2 + 4F^2}{\rho'^2 + 4F^2} \right) - F + \frac{D^2}{16F} \right] + \frac{\rho'^2 + 4F^2}{4F} + R \quad (3.25b)$$

$$= R + \left(\frac{-\rho'^2 + 4F^2}{4F} \right) + \left(\frac{\rho'^2 + 4F^2}{4F} \right) - F + \frac{D^2}{16F} \quad (3.25c)$$

$$= R + \frac{8F^2}{4F} - F + \frac{D^2}{16F} \quad (3.25d)$$

$$= R + F + \frac{D^2}{16F}, \quad (3.25e)$$

de modo que a equação (3.22) é reescrita como

$$\tilde{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r},s) = \frac{V_0}{4\pi c} \int \int_{S_a} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{R \left(\frac{\rho'^2 + 4F^2}{4F} \right)} e^{\frac{-s}{c} \left(R + F + \frac{D^2}{16F} \right)} dS' \quad (3.26a)$$

$$= \frac{FV_0}{\pi c} \int \int_{S_a} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{R(\rho'^2 + 4F^2)} e^{\frac{-s}{c} \left(R + F + \frac{D^2}{16F} \right)} dS'. \quad (3.26b)$$

Essa é, portanto, a expressão final do operador integral para a análise do campo no domínio da frequência, onde S_a é a área da abertura circular mostrada na Figura 3.6. O operador integral no domínio do tempo correspondente à equação (3.26b) é obtido na próxima subseção por meio de uma transformada inversa de Laplace.

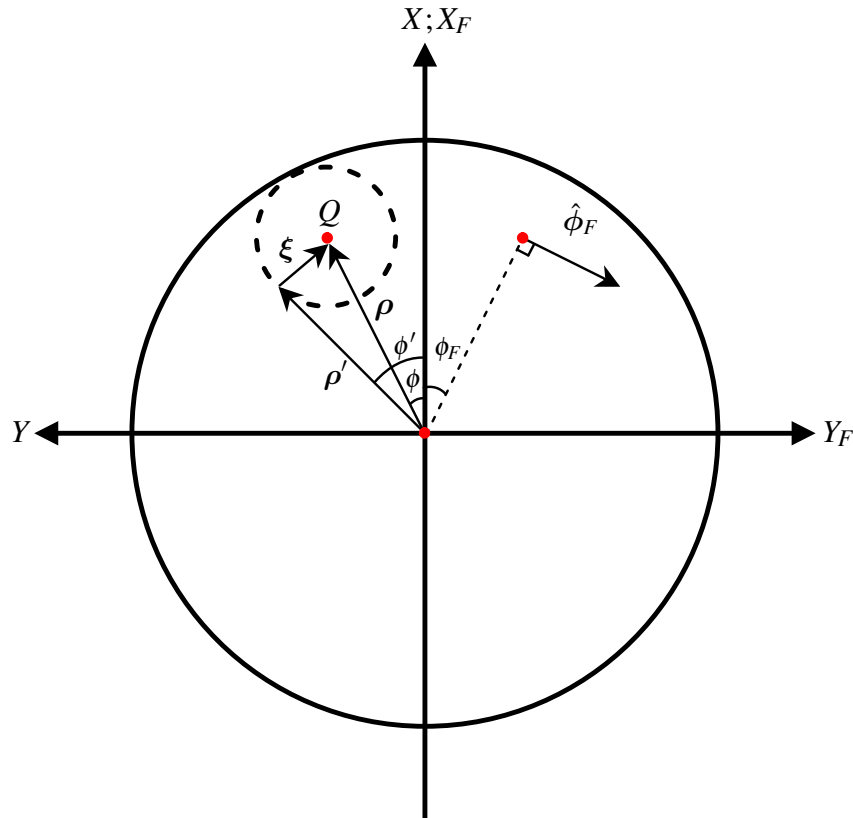


Figura 3.6: Área S_a de abertura do refletor contendo a frente de onda no ponto Q .

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

3.1.2 DOMÍNIO DO TEMPO

O operador integral no domínio do tempo pode ser encontrado aplicando-se uma transformada temporal na equação desenvolvida no domínio da frequência. Assim, a fim de converter a equação (3.26b) para o domínio do tempo, é preciso aplicar a transformada inversa de Laplace. A propriedade utilizada é dada por (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2007)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t - a) \quad (3.27)$$

o que permite definir a função delta de Dirac em termos da exponencial do problema

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{-\frac{s}{c} \left(R + F + \frac{D^2}{16F} \right)} \right\} = \delta \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right). \quad (3.28)$$

Desse modo, o operador integral no espaço livre passa a ser escrito como

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi c} \int \int_{S_a} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{R(\rho'^2 + 4F^2)} \delta \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right) dS'. \quad (3.29)$$

Para auxiliar nos cálculos, será adotada outra propriedade associada à função delta de Dirac (CHOU et al., 1997)

$$\delta \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right) = \frac{\delta(\xi - \xi')}{\left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right) \right|_{\xi = \xi'}}. \quad (3.30)$$

A propriedade de delta de Dirac reduz a integração sobre a superfície refletora em uma área, ao longo de um contorno C . Fisicamente, o caminho C pode ser visto como o traçado circular da frente de onda radiada por um ponto localizado no plano de abertura e que é equivalente à projeção do ponto de observação. Essa integral depende tanto do tempo quanto do ponto de observação.

De acordo com a Figura 3.6, é possível equacionar o vetor

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}. \quad (3.31)$$

Ou seja, $\boldsymbol{\xi}$ é dado pela diferença entre um vetor $\boldsymbol{\rho}$ que parte da origem do plano de abertura em direção ao ponto Q e um vetor $\boldsymbol{\rho}'$ que também parte da origem e segue em direção à fonte de corrente dada pelo contorno da frente de onda.

Outra relação importante e que pode ser extraída da Figura 3.7 é a distância R :

$$R = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}'| \quad (3.32a)$$

$$= |\mathbf{r} - (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\rho})| \quad (3.32b)$$

$$= \sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2 + \xi^2} \quad (3.32c)$$

$$= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}. \quad (3.32d)$$

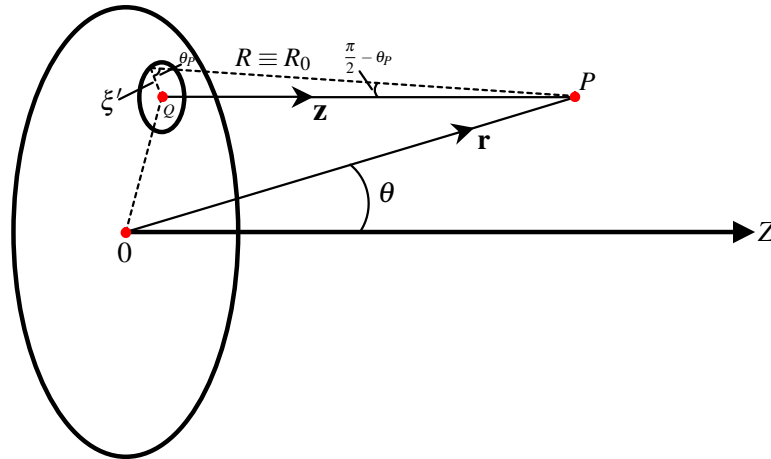


Figura 3.7: Localização dos parâmetros θ_P , r , R_0 , θ e ξ' .

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

Substituindo (3.32f) em (3.30) e resolvendo a derivada presente na equação

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} \right) = -\frac{\xi}{cR}, \quad (3.33)$$

é possível reescrever a função delta de Dirac da seguinte forma

$$\delta \left(t - \frac{R + F + \frac{D^2}{16F}}{c} \right) = \frac{\delta(\xi - \xi')}{\left| \frac{-\xi}{cR} \right|_{\xi=\xi'}} = \frac{cR_0}{\xi'} \delta(\xi - \xi'), \quad (3.34)$$

sendo que $R_0 = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi'^2}$.

A variável ξ' é dada pela raiz do argumento da função delta de Dirac considerando $R = R_0$. Nesse caso, podem existir dois valores para ξ' , um positivo e outro negativo. Como ξ' indica uma distância, utiliza-se o valor positivo. Tem-se, portanto,

$$\xi' = \left| \sqrt{\left[ct - \left(F + \frac{D^2}{16F} \right) \right]^2 - r^2 \cos^2 \theta} \right|. \quad (3.35)$$

Aplicando (3.34) em (3.29), tem-se

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi c} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{R(\rho'^2 + 4F^2)} \frac{cR_0}{\xi'} \delta(\xi - \xi') \xi d\xi d\alpha \quad (3.36a)$$

$$= \frac{FV_0}{\pi} [U(t - t_1) - U(t - t_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mathbf{g}(\rho', \phi')}{(\rho'^2 + 4F^2)} \Big|_{\xi=\xi'} d\alpha, \quad (3.36b)$$

onde os limites α_1 e α_2 são dependentes da relação $\xi = \xi'$, enquanto $U(t - t_1)$ e $U(t - t_2)$ são os termos associados à função degrau.

As definições de t_1 e t_2 envolvem parâmetros geométricos e indicam os instantes de início e término da resposta ao degrau da antena, respectivamente. De acordo com as Figuras 3.8 e 3.9 é possível entender o estabelecimento desses parâmetros conforme a posição da projeção do observador no plano de abertura. Para o caso em que o ponto de observação P , e automaticamente sua projeção Q em $z = 0$, estão localizados fora do plano de abertura circular do refletor, ou seja, $\rho > \frac{D}{2}$, tem-se que a primeira contribuição de campo refletido em P é advinda do ponto Q_1 no instante de tempo $t = t_1$ por meio dos segmentos $\overline{O_F Q_1} + \overline{Q_1 P}$. Quando $\rho < \frac{D}{2}$, $Q_1 = Q$ e os valores de ξ_1 são definidos como

$$\xi_1 = \begin{cases} \rho - \frac{D}{2}, & \rho > \frac{D}{2} \\ 0, & \rho < \frac{D}{2}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Assim, o instante t_1 em que o sinal é detectado no ponto P é dado por (CHOU et al., 1997)

$$t_1 = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(\sqrt{r^2 - Dr \sin \theta + \frac{D^2}{4}} + F + \frac{D^2}{16F} \right), & \rho > \frac{D}{2} \\ \frac{1}{c} \left(z + F + \frac{D^2}{16F} \right), & \rho < \frac{D}{2}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Considerando agora um instante de tempo $t > t_1$, a contribuição do campo radiado no ponto P vem do arco crescente de raio ξ' até que $\xi' = \xi_2$. Desse forma,

$$\xi_2 = \rho + \frac{D}{2}, \quad (3.39)$$

e o valor de t_2 em que o sinal cessa no ponto de observação é (CHOU et al., 1997)

$$t_2 = \frac{1}{c} \left(\sqrt{r^2 + Dr \sin \theta + \frac{D^2}{4}} + F + \frac{D^2}{16F} \right). \quad (3.40)$$

Finalmente, é preciso determinar os limites de integração α_1 e α_2 . Tomando como base a Figura 3.10, é possível escrever (CHOU et al., 1997)

$$\cos \Omega = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (\xi'^2 + \rho^2)}{2\xi'\rho}, \quad (3.41)$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \phi + \Omega, & |\cos \Omega| < 1 \\ 0, & |\cos \Omega| > 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1. \quad (3.43)$$

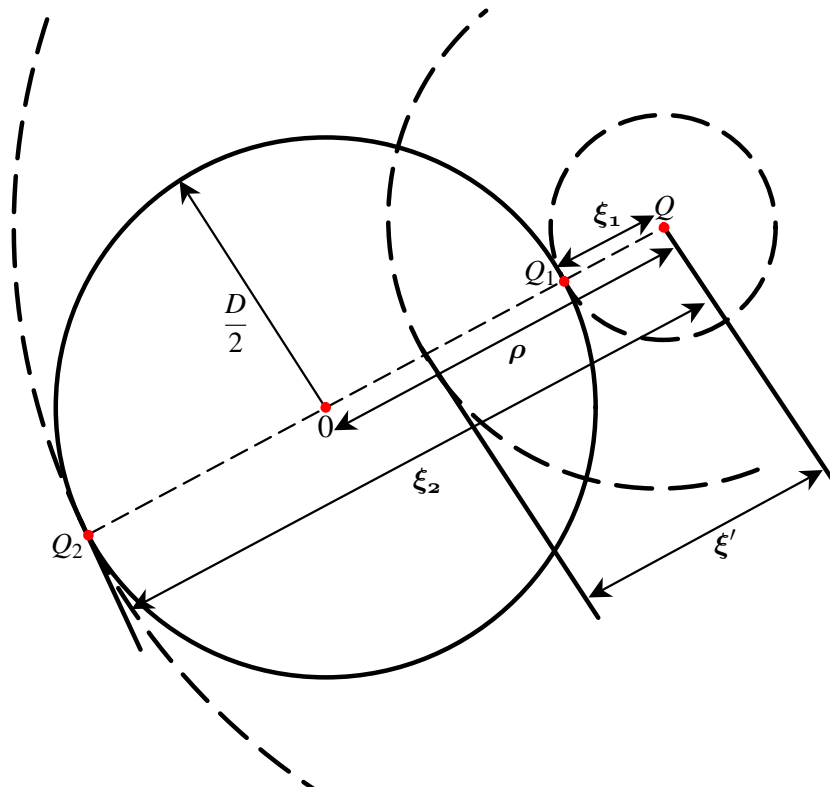


Figura 3.8: Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho > \frac{D}{2}$.

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

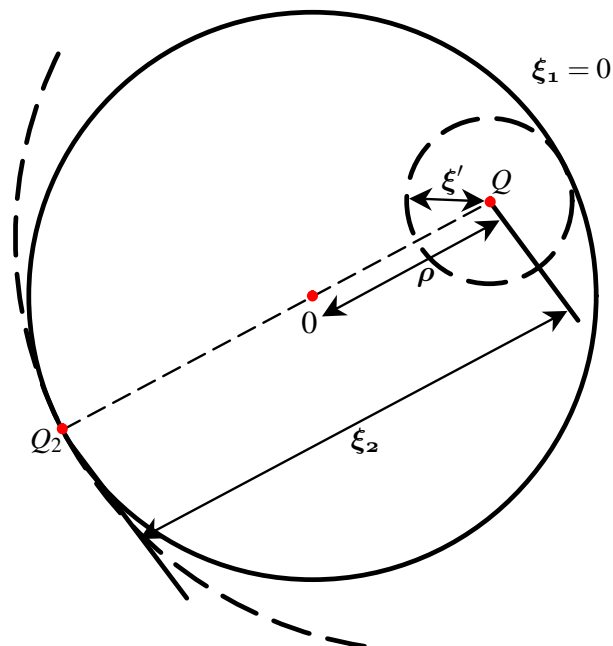


Figura 3.9: Limites para integração em ξ quando $\xi = \xi'$, sendo $\xi_1 < \xi = \xi'$ e $\rho < \frac{D}{2}$.

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

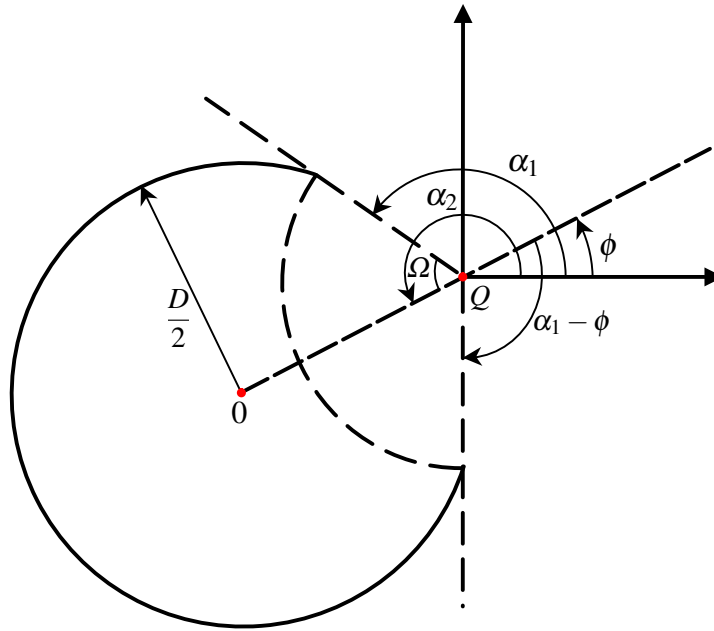


Figura 3.10: Limites para integração em α .

Fonte: Figura modificada (CHOU et al., 1997).

A resposta temporal expressa em (3.36b) é obtida a partir da solução da integral de linha aplicada aos limites α_1 e α_2 . Para resolver tal integral, é preciso definir o modelo do alimentador da antena que caracteriza a função $g(\rho', \phi')$.

3.1.3 CARACTERÍSTICAS DO ALIMENTADOR E DA FUNÇÃO $g(\rho', \phi')$

No capítulo 2 foi fornecida uma breve explicação sobre o tipo de alimentador utilizado nesta formulação. Ao considerar um alimentador ideal, deve-se levar em conta que o mesmo pode gerar polarização cruzada no campo radiado. Desse modo, a fim de evitar que a abertura da antena radie polarização cruzada, fez-se uso da terceira definição de Ludwig associada à polarização (LUDWIG, 1973).

Um formato de alimentação que não apresenta polarização cruzada é tido como ótimo do ponto de vista da eficiência de abertura da antena (LUDWIG, 1973). Assim, podemos expressar o modelo cosseno elevado modificado $\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right)$ em termos da seguinte função

$$\mathbf{f}(\theta_F, \phi_F) = f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) \hat{\theta}_F + f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) \hat{\phi}_F, \quad (3.44)$$

onde

$$f_{\theta_F}(\theta_F, \phi_F) = \cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \cos \phi_F, \quad (3.45)$$

$$f_{\phi_F}(\theta_F, \phi_F) = -\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \text{sen } \phi_F. \quad (3.46)$$

Substituindo as equações (3.45) e (3.46) em (3.13) e (3.14), obtém-se as expressões completas para $A_x(\theta_F, \phi_F)$ e $A_y(\theta_F, \phi_F)$

$$A_x(\theta_F, \phi_F) = -\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \cos^2 \phi_F - \cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \text{sen}^2 \phi_F \quad (3.47a)$$

$$= -\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right), \quad (3.47b)$$

$$A_y(\theta_F, \phi_F) = \cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \cos \phi_F \text{sen } \phi_F + \left[-\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \text{sen } \phi_F \cos \phi_F\right] = 0, \quad (3.48)$$

As equações de (3.44) a (3.46) representam um alimentador linearmente polarizado em $\hat{\mathbf{x}}$, e como consequência, geram uma abertura também linearmente polarizada em $\hat{\mathbf{x}}$. Aplicando agora, as equações (3.47b) e (3.48) em (3.21), é possível escrever

$$\mathbf{g}(\rho', \phi') = \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \hat{\mathbf{x}} - 0\hat{\mathbf{y}} \right] + \hat{\mathbf{R}} \times \left[0\hat{\mathbf{x}} + \cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (3.49a)$$

$$= \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}} \times \left[\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \hat{\mathbf{x}} \right] + \hat{\mathbf{R}} \times \left[\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (3.49b)$$

$$= \cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) [\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{x}}) + (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{y}})]. \quad (3.49c)$$

Realizando os produtos vetoriais presentes em (3.49), tem-se:

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ R_x & R_y & R_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = R_z \hat{\mathbf{y}} - R_y \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.50)$$

$$\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{x}}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ R_x & R_y & R_z \\ 0 & R_z & -R_y \end{vmatrix} = (-R_y^2 - R_z^2) \hat{\mathbf{x}} + (R_x R_y) \hat{\mathbf{y}} + (R_x R_z) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.51)$$

$$\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ R_x & R_y & R_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -R_z \hat{\mathbf{x}} + R_x \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.52)$$

Além disso, uma importante relação geométrica será utilizada

$$\cos^n\left(\frac{\theta_F}{2}\right) = \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}}\right)^n. \quad (3.53)$$

Logo, a equação (3.49c) se torna

$$\mathbf{g}(\rho', \phi') = \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n [(-R_y^2 - R_z^2)\hat{\mathbf{x}} + (R_x R_y)\hat{\mathbf{y}} + (R_x R_z)\hat{\mathbf{z}} - R_z\hat{\mathbf{x}} + R_x\hat{\mathbf{z}}] \quad (3.54a)$$

$$= \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n [(-R_y^2 - R_z^2 - R_z)\hat{\mathbf{x}} + (R_x R_y)\hat{\mathbf{y}} + (R_x + R_x R_z)\hat{\mathbf{z}}]. \quad (3.54b)$$

Tomando como base a Figura 3.11, é possível escrever as seguintes relações geométricas

$$x - x' = -\xi \cos \alpha, \quad (3.55)$$

$$y' - y = \xi \sin \alpha, \quad (3.56)$$

de modo que o vetor $\hat{\mathbf{R}}$ presente em (3.21) possa ser descrito como

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{(\mathbf{r} - \rho')}{R} \quad (3.57a)$$

$$= \frac{\mathbf{r} - \rho'}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \quad (3.57b)$$

$$= \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \quad (3.57c)$$

$$= \frac{-\xi \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \xi \sin \alpha \hat{\mathbf{y}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}}. \quad (3.57d)$$

Substituindo-se as componentes cartesianas da equação (3.57d) em (3.54b), tem-se:

$$\mathbf{g}(\rho', \phi') = \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n \left\{ - \left[\frac{(\xi^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \theta)}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} + \frac{r \cos \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\xi^2 \cos \alpha \sin \alpha}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} \right) \hat{\mathbf{y}} - \left[\frac{(\xi r \cos \theta \cos \alpha)}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} + \frac{\xi \cos \alpha}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\}. \quad (3.58)$$

Considerando a separação de variáveis presente na função $\mathbf{g}(\rho', \phi')$, é possível também escrever o operador integral em termos das componentes $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$:

$$E_x^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi} [U(t - t_1) - U(t - t_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{g_x(\rho', \phi')}{(\rho'^2 + 4F^2)} \Big|_{\xi=\xi'} d\alpha, \quad (3.59)$$

$$E_y^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi} [U(t - t_1) - U(t - t_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{g_y(\rho', \phi')}{(\rho'^2 + 4F^2)} \Big|_{\xi=\xi'} d\alpha, \quad (3.60)$$

$$E_z^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi} [U(t - t_1) - U(t - t_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{g_z(\rho', \phi')}{(\rho'^2 + 4F^2)} \Big|_{\xi=\xi'} d\alpha. \quad (3.61)$$

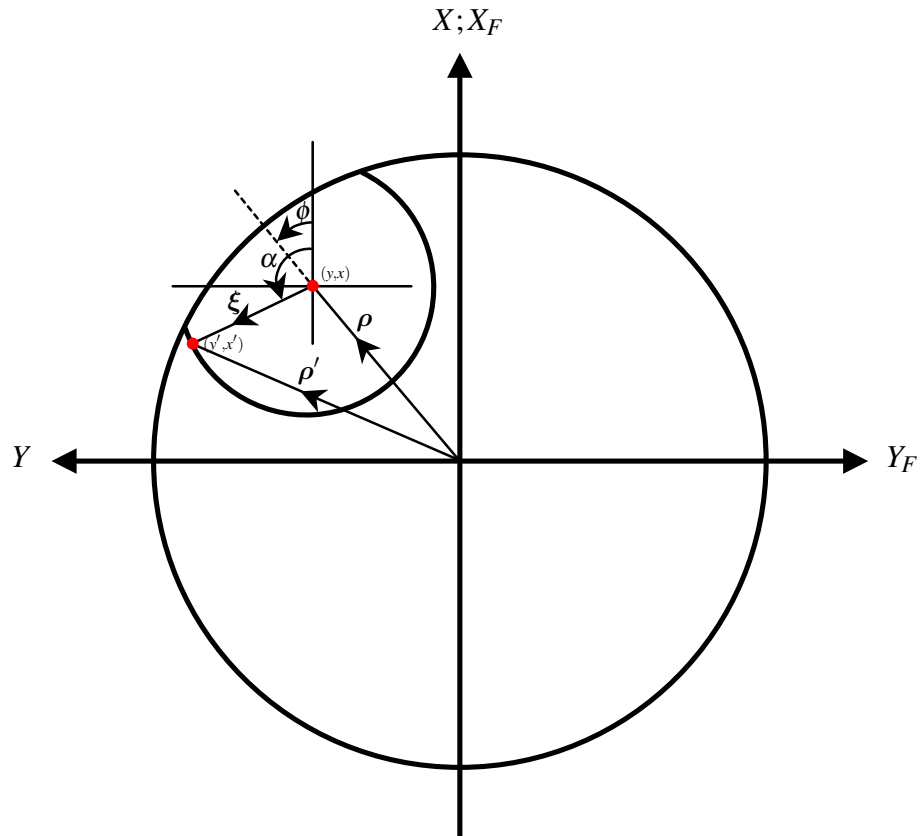


Figura 3.11: Relação entre as coordenadas (y', x') da fonte e (y, x) do observador.

Desse modo, para facilitar a manipulação das integrais, definiu-se uma função porta como

$$U(t - t_1) - U(t - t_2) = \Pi(t), \quad (3.62)$$

e aplicando também a lei dos cossenos, tomando como base a Figura 3.11, de maneira a determinar a medida de um dos lados do triângulo em termos dos outros dois

$$\rho'^2 = \rho^2 + \xi^2 + 2\xi\rho \cos(\alpha - \phi), \quad (3.63)$$

pode-se escrever as componentes do operador integral como

$$E_x^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi} \Pi(t) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n \left[-\frac{(\xi^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \theta)}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} - \frac{(r \cos \theta)}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \right] \frac{1}{(\rho'^2 + 4F^2)} d\alpha \quad (3.64a)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{2^n F^n (\xi^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \theta)}{(4F^2 + \rho^2 + \xi'^2 + 2\xi' \rho \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right. \\
= & \left. + \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{2^n F^n (r \cos \theta)}{(4F^2 + \rho^2 + \xi'^2 + 2\xi' \rho \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \tag{3.64b}
\end{aligned}$$

$$E_y^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0}{\pi} \Pi(t) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n \left[\frac{(\xi^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} \right] \frac{1}{(\rho'^2 + 4F^2)} d\alpha \tag{3.65a}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{2^n F^n (\xi^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{(4F^2 + \rho^2 + \xi'^2 + 2\xi' \rho \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \tag{3.65b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^u(\mathbf{r}, t) = & \frac{FV_0}{\pi} \Pi(t) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{2F}{\sqrt{\rho'^2 + 4F^2}} \right)^n \left[-\frac{(\xi r \cos \theta \cos \alpha)}{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2} - \right. \\
& \left. \frac{\xi \cos \alpha}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \right] \frac{1}{(\rho'^2 + 4F^2)} d\alpha \tag{3.66a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{2^n F^n (\xi r \cos \theta \cos \alpha)}{(4F^2 + \rho^2 + \xi'^2 + 2\xi' \rho \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{2^n F^n (\xi \cos \alpha)}{(4F^2 + \rho^2 + \xi'^2 + 2\xi' \rho \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}. \tag{3.66b}
\end{aligned}$$

A fim de reduzir o tamanho das expressões e simplificar a notação, considerou-se as relações

$$\delta_1 = 4F^2 + \rho^2 + \xi'^2, \tag{3.67}$$

$$\delta_2 = 2\xi' \rho, \tag{3.68}$$

$$\delta_3 = 2F. \tag{3.69}$$

Assim, o operador integral passa a ter o seguinte formato

$$\begin{aligned}
E_x^u(\mathbf{r}, t) = & -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\xi^2 \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \theta)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha + \right. \\
& \left. \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (r \cos \theta)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

$$E_y^u(\mathbf{r},t) = \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\xi^2 \cos \alpha \sin \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \quad (3.71)$$

$$E_z^u(\mathbf{r},t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \frac{1}{(r^2 \cos^2 \theta + \xi^2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\xi r \cos \theta \cos \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha + \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi^2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\xi \cos \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}. \quad (3.72)$$

Considerando o instante em que $\xi = \xi'$, é possível definir, por meio da Figura 3.7, as seguintes equivalências

$$\cos \theta_p = \frac{\xi'}{\sqrt{z^2 + \xi'^2}} = \frac{\xi'}{R_0}, \quad (3.73)$$

$$\sin \theta_p = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \xi'^2}} = \frac{r \cos \theta}{R_0}, \quad (3.74)$$

$$R_0 = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + \xi'^2}. \quad (3.75)$$

Dessa forma, as equações (3.70), (3.71) e (3.72) podem ser reescritas como

$$E_x^u(\mathbf{r},t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\cos^2 \theta_p \sin^2 \alpha + \sin^2 \theta_p)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha + \right. \\ \left. \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\sin \theta_p)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \quad (3.76)$$

$$E_y^u(\mathbf{r},t) = \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\cos^2 \theta_p \cos \alpha \sin \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}, \quad (3.77)$$

$$E_z^u(\mathbf{r},t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\cos \theta_p \sin \theta_p \cos \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha + \right. \\ \left. \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\delta_3^n (\cos \theta_p \cos \alpha)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha - \phi))^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\alpha \right\}. \quad (3.78)$$

Para facilitar o cálculo das integrais, alterou-se a variável de integração para

$$\psi = \alpha - \phi, \quad (3.79)$$

e os valores dos ângulos α_1 e α_2 continuam sendo definidos como (CHOU et al., 1997)

$$\alpha_1 = \phi + \cos^{-1} \left[\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (\xi'^2 + \rho^2)}{2\xi'\rho} \right], \quad (3.80)$$

$$\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1. \quad (3.81)$$

Consequentemente, a fórmula geral para o operador integral, com suas respectivas

componentes, se torna

$$E_x^u(\mathbf{r}, t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \cos^2 \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n \sin^2(\psi + \phi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi + \right. \\ \left. \sin^2 \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi + \sin \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\}, \quad (3.82)$$

$$E_y^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \cos^2 \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n \cos(\psi + \phi) \sin(\psi + \phi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\}, \quad (3.83)$$

$$E_z^u(\mathbf{r}, t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \left\{ \cos \theta_p \sin \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n \cos(\psi + \phi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi + \right. \\ \left. \cos \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\delta_3^n \cos(\psi + \phi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\}. \quad (3.84)$$

O cálculo das integrais foi realizado com o auxílio de um *software* comercial, conforme explicado na próxima subseção. Assim, para evitar possíveis erros de operação por parte deste, optou-se por simplificar ao máximo as relações trigonométricas

$$\sin^2(\psi + \phi) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\psi) \cos(2\phi) + \sin(2\psi) \sin(2\phi)], \quad (3.85)$$

$$\cos(\psi + \phi) = \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi, \quad (3.86)$$

$$\sin(\psi + \phi) = \sin \psi \cos \phi + \sin \phi \cos \psi, \quad (3.87)$$

$$\cos(\psi + \phi) \sin(\psi + \phi) = \cos(2\phi) \frac{\sin(2\psi)}{2} + \frac{\sin(2\phi)}{2} \cos(2\psi), \quad (3.88)$$

$$\cos(2\psi) = 2 \cos^2 \psi - 1, \quad (3.89)$$

de modo a obter as expressões finais para o operador integral no domínio do tempo

$$E_x^u(\mathbf{r}, t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \frac{1}{2} \cos^2 \theta_p \left\{ \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi - \right. \right. \\ \left. \cos(2\phi) \left\{ 2 \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\cos^2 \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi - \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\} + \right. \\ \left. \sin(2\phi) \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\sin(2\psi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\} + \sin^2 \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi + \\ \left. \sin \theta_p \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\}, \quad (3.90)$$

$$E_y^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos^2 \theta_p \left\{ \frac{\cos(2\phi)}{2} \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\text{sen}(2\psi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi + \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \left\{ 2 \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\cos^2 \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi - \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\} \right\}, \quad (3.91)$$

$$E_z^u(\mathbf{r}, t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos \theta_p \text{sen} \theta_p \left\{ \cos \phi \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\cos \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi - \text{sen} \phi \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\text{sen} \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\} + \cos \theta_p \left\{ \cos \phi \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\cos \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi - \text{sen} \phi \int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\text{sen} \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi \right\} \right\}. \quad (3.92)$$

Neste estudo, optou-se por trabalhar com a resposta ao degrau da antena. Contudo, é possível relacionar facilmente a resposta ao degrau e a resposta ao impulso por meio de

$$\mathbf{E}_r^\delta(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_r^u(\mathbf{r}, t). \quad (3.93)$$

3.1.4 RULE-BASED INTEGRATOR (RUBI)

Em função do alto grau de dificuldade na avaliação das integrais encontradas, utilizou-se o software *Mathematica 9* como ferramenta para a obtenção dos resultados. Este *software*, porém, é limitado, e como forma de aumentar sua capacidade de operação, utilizou-se um pacote adicional conhecido como *Rule-based integrator* [Rubi 4.10], o qual possui mais de 6000 regras de integração (RICH, 2015).

Rubi é um pacote fundamentado em regras de transformação, baseado nas seguintes propriedades (RICH; JEFFREY, 2009):

- Funcionalidade, a fim de obter resultados em um único e compreensível passo durante a simplificação de uma expressão;
- Limitação dos domínios de validade, pois muitas regras são válidas somente quando as variáveis se restringem a certo domínio;
- Uso de simplificações de modo a encontrar expressões mais compreensíveis;
- Estabelecimento de variáveis locais;
- Emprego de exclusividade mútua para garantir que regras de transformação possam ser adicionadas, removidas ou modificadas sem afetar outras regras.

Aparentemente, regras de transformação utilizadas pelo *Rubi* e identidades matemáticas estabelecidas no *Mathematica* parecem ser a mesma coisa. Contudo, existe uma grande diferença entre tais termos e é nesse contexto que o uso do *Rubi* se faz importante. Ao serem estabelecidas as regras de transformação, é possível saber quando e como transformar expressões particulares em expressões equivalentes mais simples, enquanto que, as identidades matemáticas apenas verificam se os lados esquerdo e direito das equações são matematicamente equivalentes (RICH; JEFFREY, 2009).

Um dos maiores benefícios proporcionados pelo *Rubi* é a capacidade de fornecer resultados em formato simplificado, utilizando, sempre que possível, funções elementares. Como exemplo, calculou-se uma mesma integral, com e sem o uso do *Rubi*, e os resultados obtidos foram (RICH; JEFFREY, 2009):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}\sqrt{b+x}} = \begin{cases} 2 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b+x}}\right), & \text{Rubi} \\ \ln(a+b+2x+2\sqrt{a+x}\sqrt{b+x}), & \text{Mathematica.} \end{cases} \quad (3.94)$$

Por meio deste resultado, percebe-se que *Rubi* associa uma resposta bem mais simples ao resultado da integral, dada por meio de uma tangente hiperbólica, enquanto que a utilização somente do *Mathematica* para a solução deste tipo de integral, retorna uma resposta em termos de logaritmo neperiano.

As regras de integração fornecidas pelo pacote, quando aplicadas sistematicamente, podem determinar as anti-derivadas de inúmeras funções matemáticas, aumentando assim a capacidade de performance do *software* de cálculo algébrico. A plataforma que irá suportar esse pacote deve armazenar as regras de transformação em um formato de árvore de decisões baseada no tipo de integrando. Por exemplo, expressões associadas a $\sin(x)$ serão coletadas em um ramo da árvore. Todas as regras de derivação ligadas a essa função estarão em outro ramo, bem como as regras de integração em outro, e assim por diante (RICH; JEFFREY, 2009).

3.1.5 SOLUÇÃO GENÉRICA PARA O ALIMENTADOR COSSENO ELEVADO MODIFICADO

O resultado encontrado para o cálculo do operador integral foi obtido de forma genérica. Ou seja, é válido para qualquer valor de n , seja n inteiro ou racional. Conforme explicitado no capítulo 2, a importância deste valor está diretamente associada à diretividade da antena. Assim, obtendo-se uma formulação genérica, é possível projetar e analisar antenas com valores de n adequados a cada situação.

A grande maioria das integrais calculadas apresenta descontinuidade em múltiplos de $\pm\pi$ e, por isso, tiveram de ser tratadas de maneira diferenciada no *Mathematica*. Algumas integrais se repetem nas três componentes do operador integral e, portanto, foram calculadas 5 integrais distintas. Os resultados de cada integral estão listados abaixo.

$$\int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\text{sen } \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi = 0, \quad (3.95)$$

$$\int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\text{sen}(2\psi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi = 0, \quad (3.96)$$

$$\int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi = \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1+\delta_2}}\right)} \right. \\ \left. \frac{{}_F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_1-\phi}{2}\right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1-\phi)}{\delta_1+\delta_2}\right) \left(\frac{\delta_1+\delta_2 \cos(\alpha_1-\phi)}{\delta_1+\delta_2}\right)^{\frac{n}{2}} \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\alpha_1-\phi}{2}\right)}\right)} \right], \quad (3.97)$$

$$\int_{\alpha_1-\phi}^{2\pi-\alpha_1+\phi} \left[\frac{\cos \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2}+1}} \right] d\psi = \\ \frac{2}{\delta_2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ \frac{\left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1+\delta_2}\right)^{\frac{n}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \left[(\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \delta_1 {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1+\delta_2}\right) \right] + \right. \\ \left. \sqrt{2} \left[\delta_1 {}_F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_1-\phi}{2}\right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1-\phi)}{\delta_1+\delta_2}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. (\delta_1 + \delta_2) {}_F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2\left(\frac{\alpha_1-\phi}{2}\right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1-\phi)}{\delta_1+\delta_2}\right) \right] \right. \\ \left. \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1+\delta_2 \cos(\alpha_1-\phi)}{\delta_1+\delta_2}\right)^{\frac{n}{2}} \tan\left(\frac{\alpha_1-\phi}{2}\right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \right\}, \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{\cos^2 \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^{\frac{n}{2} + 1}} \right] d\psi = \frac{2}{\delta_2^2 (\delta_1 + \delta_2) (-2 + n) (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \\
& \left\{ \frac{1}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \pi (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \right. \right. \\
& \quad \left[2\delta_1 (\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \left. (-2\delta_1^2 + \delta_2^2 n) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] + 2(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \operatorname{sen}(\alpha_1 - \phi) \right\} + \\
& \quad \sqrt{2} \left[(2\delta_1^2 - \delta_2^2 n) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \right. \\
& \quad \left. 2\delta_1 (\delta_1 + \delta_2) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] \\
& \quad \left. \sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

A expressão completa para o operador integral com n genérico é mostrada a seguir e apresenta duas funções especiais, função Hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ e função Hipergeométrica Appell $[F_1(a; b_1, b_2; c; x, y)]$, as quais são elucidadas no apêndice A.

$$\begin{aligned}
E_x^u(\mathbf{r}, t) &= -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \frac{1}{2} \cos^2 \theta_p \left\{ \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}} \right)} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen}(\alpha_1 - \phi) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{2}{\delta_2^2 (\delta_1 + \delta_2) (-2 + n) (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left\{ \frac{1}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \pi (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left[2\delta_1 (\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) + \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. (-2\delta_1^2 + \delta_2^2 n) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] + 2(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \operatorname{sen}(\alpha_1 - \phi) \right\} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \sqrt{2} \left[(2\delta_1^2 - \delta_2^2 n) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \right. \right. \right. \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\delta_1(\delta_1 + \delta_2) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \Bigg] \\
& \left. \left. \left. \sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right) \right\} \right\} - \\
& \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}} \right)} - \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \text{sen}(\alpha_1 - \phi) \right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)} \right)} \right] \right\} \Bigg\} + \\
& \text{sen}^2 \theta_p \left\{ \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}} \right)} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \text{sen}(\alpha_1 - \phi) \right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)} \right)} \right] \right\} + \\
& \text{sen} \theta_p \left\{ \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}} \right)} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \text{sen}(\alpha_1 - \phi) \right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)} \right)} \right] \right\} \Bigg\} \Bigg\}, \\
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}
E_y^u(\mathbf{r}, t) &= \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos^2 \theta_p \left\{ \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \left\{ 2 \left[\frac{2}{\delta_2^2 (\delta_1 + \delta_2) (-2 + n) (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left\{ \frac{1}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \pi (\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left[2\delta_1 (\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) + \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. (-2\delta_1^2 + \delta_2^2 n) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] + 2(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \delta_2 (\delta_1 + \delta_2) \text{sen}(\alpha_1 - \phi) \right\} \right\} + \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \sqrt{2} \left[(2\delta_1^2 - \delta_2^2 n) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\delta_1(\delta_1 + \delta_2) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \Bigg] \\
& \sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right) \Bigg\} - \\
& \frac{2}{\delta_1 + \delta_2} \left[\frac{\pi {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}} \right)} - \right. \\
& \left. F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \text{sen}(\alpha_1 - \phi) \right] \Bigg\} \Bigg\} \Bigg\}, \\
& \frac{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)} \right)}{\phantom{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)} \right)}} \Bigg\} \Bigg\} \Bigg\}, \tag{3.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^u(\mathbf{r}, t) &= -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos \theta_p \text{sen} \theta_p \cos \phi \frac{2}{\delta_2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ \frac{\left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \right. \right. \\
& \left[(\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \delta_1 {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] + \\
& \sqrt{2} \left[\delta_1 F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \right. \\
& \left. \left. (\delta_1 + \delta_2) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] \right. \\
& \left. \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \right\} + \\
& \cos \theta_p \cos \phi \frac{2}{\delta_2(\delta_1 + \delta_2)} \left\{ \frac{\left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{n}{2}}} \right. \\
& \left[(\delta_1 + \delta_2) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \delta_1 {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2+n}{2}, 1, \frac{2\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] + \\
& \sqrt{2} \left[\delta_1 F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) - \right. \\
& \left. \left. (\delta_1 + \delta_2) F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{3}{2}, \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right), \frac{\delta_2 - \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\left. \left. \frac{\sqrt{1 + \cos(\alpha_1 - \phi)} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi)}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{n}{2}} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))^{\frac{n}{2}}} \right\} \right\}. \quad (3.102)$$

Para $n = 2$, a formulação anterior é inconsistente devido a uma indeterminação em função do termo $(-2 + n)$ presente no denominador da solução de (3.1.5). Assim, realizou-se o cálculo das integrais especificamente para tal valor de n de modo a sanar esta exceção. Os resultados encontrados foram:

$$\int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{\text{sen } \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^2} \right] d\psi = 0, \quad (3.103)$$

$$\int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{\text{sen}(2\psi)}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^2} \right] d\psi = 0, \quad (3.104)$$

$$\int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{1}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^2} \right] d\psi = 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \frac{2\delta_1 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right], \quad (3.105)$$

$$\int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{\cos \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^2} \right] d\psi = 2 \left[-\frac{\delta_2 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \frac{2\delta_2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_1 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right], \quad (3.106)$$

$$\int_{\alpha_1 - \phi}^{2\pi - \alpha_1 + \phi} \left[\frac{\cos^2 \psi}{(\delta_1 + \delta_2 \cos \psi)^2} \right] d\psi = \frac{2}{\delta_2^2} \left[-(\alpha_1 - \phi) + \pi - \frac{\delta_1 (\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \right.$$

$$\left. \frac{2\delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan\left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2}\right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}}(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_1^2 \delta_2 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \cdot \quad (3.107)$$

A expressão completa do operador integral calculada para $n = 2$ é:

$$\begin{aligned} E_x^u(\mathbf{r}, t) = & -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \frac{1}{2} \cos^2 \theta_p \left\{ 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \right. \right. \\ & \left. \frac{2\delta_1 \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan\left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2}\right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}}(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] - \\ & \cos(2\phi) \left\{ 2 \left\{ \frac{2}{\delta_2^2} \left[-(\alpha_1 - \phi) + \pi - \frac{\delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan\left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2}\right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}}(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_1^2 \delta_2 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\} - \\ & 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \frac{2\delta_1 \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan\left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2}\right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}}(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & \left. \frac{\delta_2 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \left. \right\} + \sin^2 \theta_p \left\{ 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}\right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2\delta_1 \arctan\left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan\left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2}\right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}}\right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}}(\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\text{sen } \theta_p \left\{ 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \frac{2\delta_1 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\}, \quad (3.108)$$

$$E_y^u(\mathbf{r}, t) = \frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos^2 \theta_p \left\{ \frac{\text{sen}(2\phi)}{2} \left\{ 2 \left\{ \frac{2}{\delta_2^2} [-(\alpha_1 - \phi) + \pi - \frac{\delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \frac{2\delta_1(\delta_1^2 - 2\delta_2^2) \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_1^2 \delta_2 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))}] \right\} - 2 \left[\frac{\delta_1 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} - \frac{2\delta_1 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\} \right\} \right\} \quad (3.109)$$

$$E_z^u(\mathbf{r}, t) = -\frac{FV_0\Pi(t)}{\pi} \delta_3^n \left\{ \cos \theta_p \text{sen } \theta_p \cos \phi \left\{ 2 \left[\frac{\delta_2 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \frac{2\delta_2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_1 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\} + \cos \theta_p \cos \phi \left\{ 2 \left[\frac{\delta_2 \left(-1 + \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \right)^{\frac{3}{2}} \pi}{(\delta_1 - \delta_2)^3} + \frac{2\delta_2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\delta_1 - \delta_2} \tan \left(\frac{\alpha_1 - \phi}{2} \right)}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2}} \right)}{(\delta_1 - \delta_2)^{\frac{3}{2}} (\delta_1 + \delta_2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_1 \text{sen}(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right] \right\} \right\}$$

$$\left. \frac{\delta_1 \sin(\alpha_1 - \phi)}{(\delta_1^2 - \delta_2^2)(\delta_1 + \delta_2 \cos(\alpha_1 - \phi))} \right\} \quad (3.110)$$

3.1.6 ANÁLISE GRÁFICA DO OPERADOR INTEGRAL

Após encontrar o resultado das integrais utilizando o *software Mathematica 9* associado às regras de integração do *Rubi*, fez-se uso também do *software MATLAB R2014* para gerar, graficamente, o operador integral em módulo.

Assim, foi necessário estabelecer o valor de algumas constantes, tendo a velocidade da luz como $c = 2,99792458 \times 10^8$ m/s, o comprimento de onda da portadora $\lambda = 0,075$ m, o diâmetro do paraboloide $D = 7,5$ m, a distância focal $F = 0,4D$ e a tensão de pico de entrada $V_0 = 1$ V. O valor de ϕ , ou ângulo de azimute, foi estabelecido igual a 0° , enquanto que o valor de θ , ou ângulo de elevação, foi variado de formas diferentes dependendo da distância do observador. Por fim, um dos parâmetros mais importantes para esta formulação, n , que é o expoente presente no modelo de alimentador cosseno elevado modificado, foi analisado com valores iguais a 1, 2 e 3, de modo a discutir-se brevemente a diretividade da antena para cada um dos casos. Como mencionado anteriormente, esta formulação é válida tanto para campo próximo quanto para campo distante. Portanto, a fim de comprovar tal característica, dividiu-se os resultados em duas subseções.

3.1.6.1 REGIÃO DE FRESNEL

Conforme definido no capítulo 2, a região de Fresnel deve estar entre $0,62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \leq d < \frac{2D^2}{\lambda}$. Portanto, de acordo com os parâmetros estabelecidos no problema, as distâncias mínima e máxima que contêm a região de campo próximo são

$$d_{min} = 0,62\sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} = 0,62\sqrt{\frac{7,5^3}{0,075}} = 46,5 \text{ m}, \quad (3.111)$$

$$d_{max} = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2(7,5)^2}{0,075} = 1500 \text{ m}. \quad (3.112)$$

Conhecendo-se os limites da região, é possível determinar a posição do observador em termos de (r, θ, ϕ) , sendo a coordenada radial r igual a 50 m, os valores de θ iguais a 0° , 1° , 5° e 10° e ϕ igual a 0° .

Para a direção de maior diretividade, ou seja, $\theta = 0^\circ$, o operador se comporta aproximadamente como uma função impulso, porém, à medida em que o ângulo de elevação

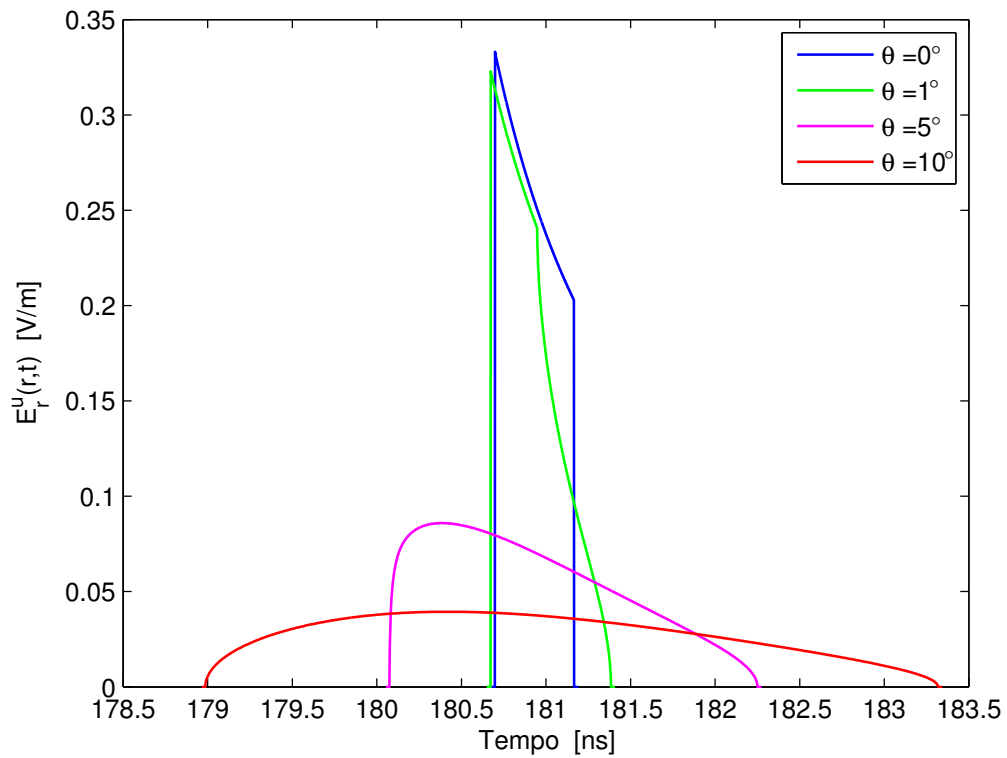


Figura 3.12: Operador integral em função do tempo para $n=1$, $r=50$ m e diferentes valores de θ .

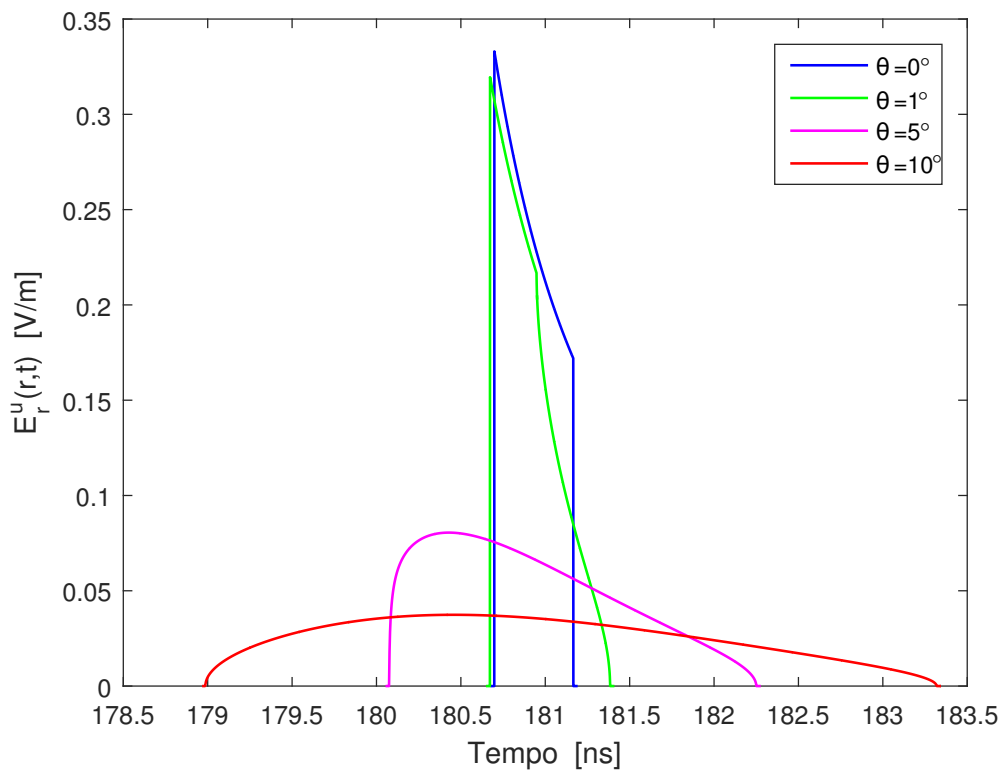


Figura 3.13: Operador integral em função do tempo para $n=2$, $r=50$ m e diferentes valores de θ .

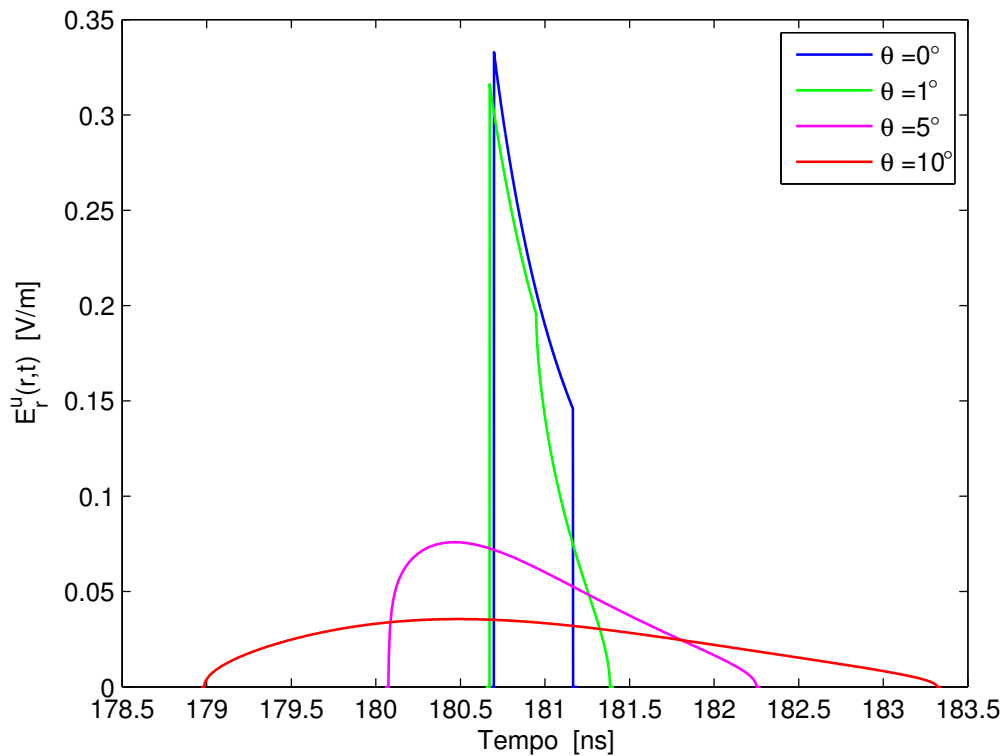


Figura 3.14: Operador integral em função do tempo para $n=3$, $r=50$ m e diferentes valores de θ .

aumenta, as formas de onda se espalham no domínio do tempo. Além disso, é possível notar também que à medida em que o valor de n aumenta, as respostas se estreitam no topo, comprovando que a antena se torna mais diretiva.

3.1.6.2 REGIÃO DE FRAUNHOFER

Para análise do operador integral na região de campo distante, é preciso considerar a coordenada radial a uma distância maior que 1500 m. Desse modo, estabeleceu-se $r = 5000$ m, $\phi = 0^\circ$ e valores de θ variando em 0° , $0,1^\circ$ e $0,5^\circ$.

Para distâncias muito grandes, é possível perceber que qualquer variação mínima no valor de θ acarreta em uma queda brusca no valor da amplitude do operador integral. Outra característica notável é que o valor das amplitudes do operador integral na direção de maior diretividade ($\theta = 0^\circ$), tanto para a região de campo próximo quanto para a região de campo distante, é o mesmo. A duração do pulso, entretanto, sofre uma grande diminuição pois está associada à razão $\frac{1}{r}$, onde r indica a distância entre a antena e o observador (CHOU et al., 1997).

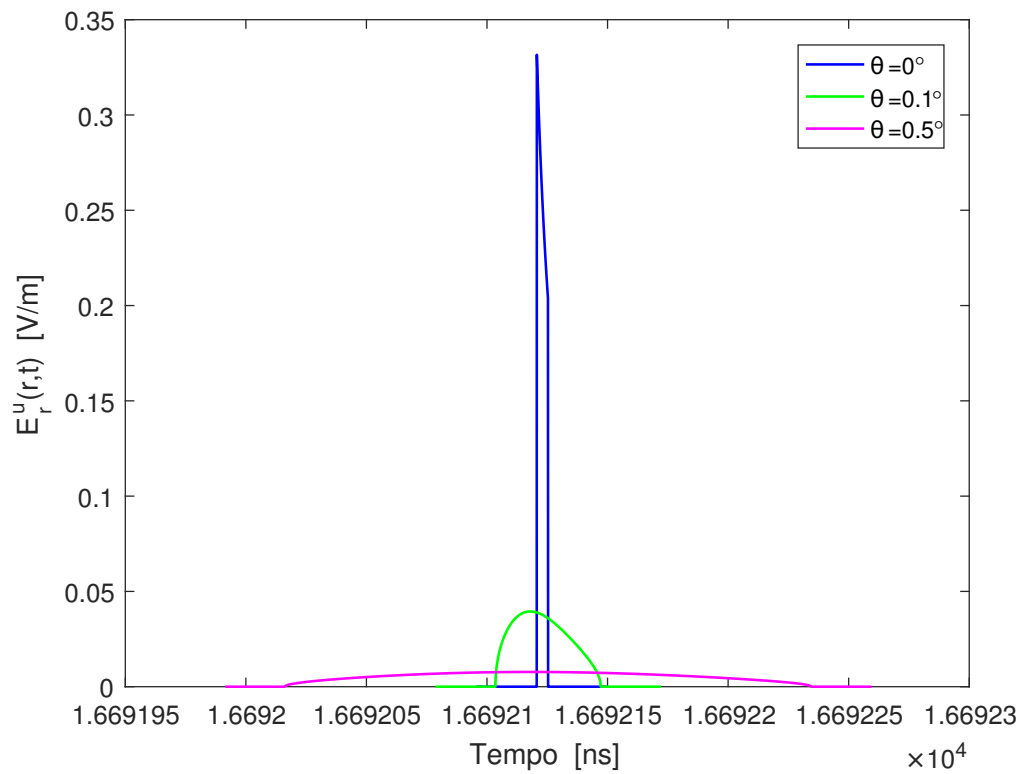


Figura 3.15: Operador integral em função do tempo para $n=1$, $r=5000$ m e diferentes valores de θ .

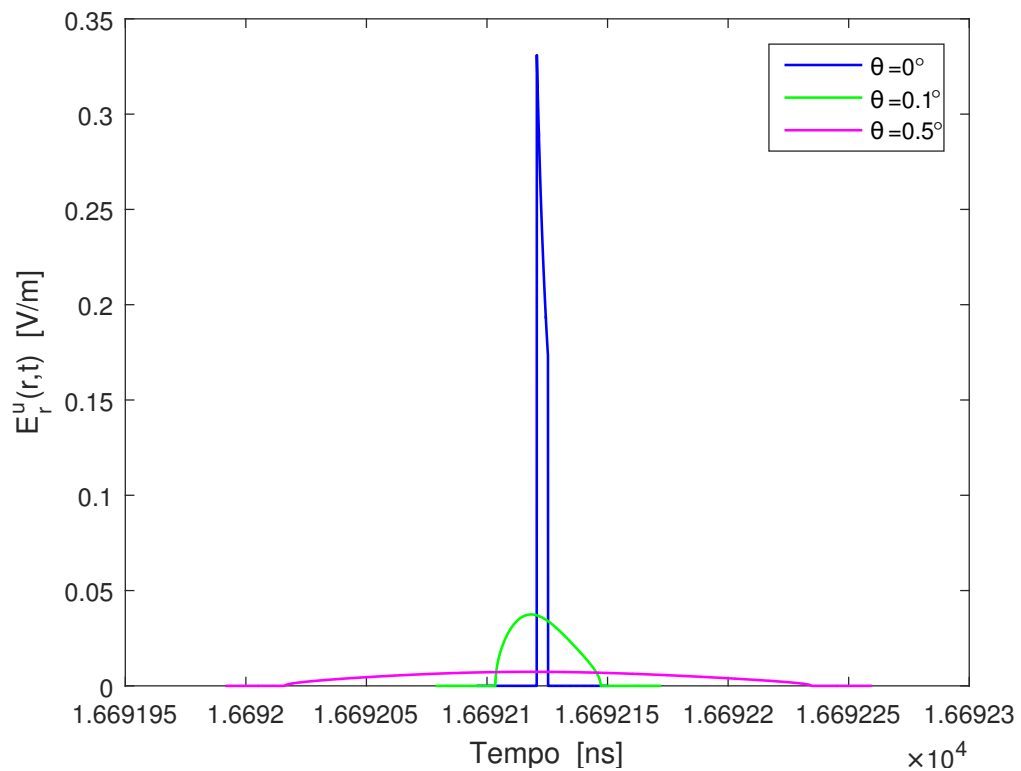


Figura 3.16: Operador integral em função do tempo para $n=2$, $r=5000$ m e diferentes valores de θ .

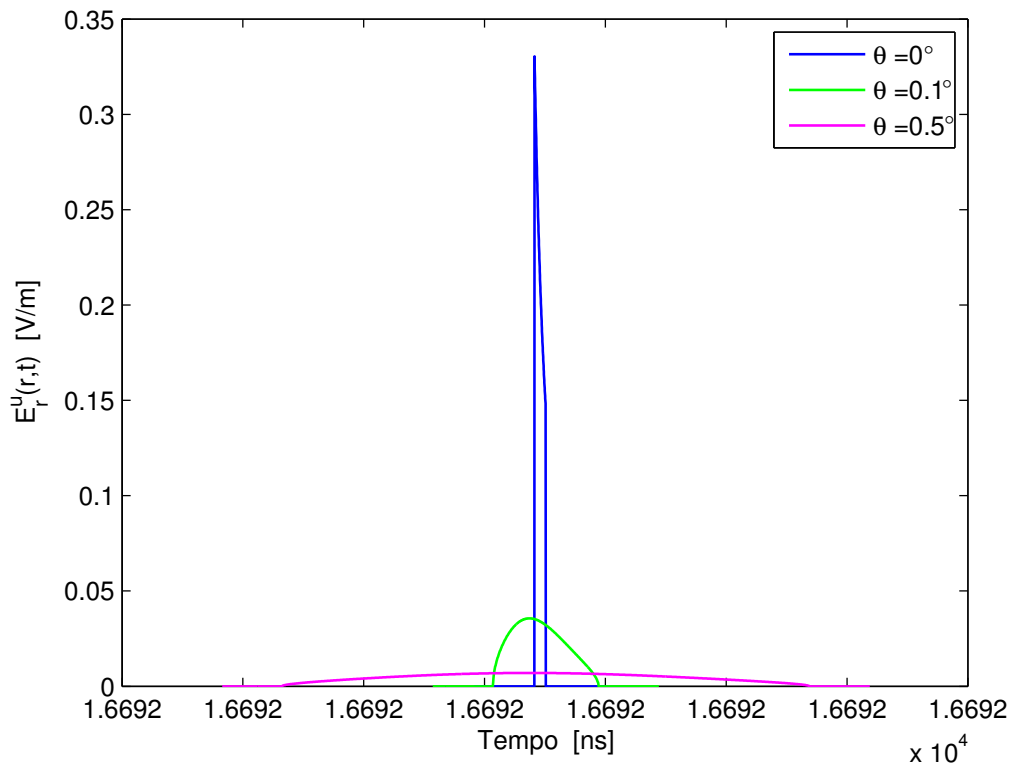


Figura 3.17: Operador integral em função do tempo para $n=3$, $r=5000$ m e diferentes valores de θ .

3.1.7 CASO PARTICULAR DE n

O valor de n está intimamente associado aos parâmetros físicos da antena e à atenuação na borda do refletor. Assim, é preciso definir duas importantes propriedades relacionadas ao alimentador, a eficiência de transbordamento ε_t e a eficiência de iluminação ε_s . A eficiência de transbordamento determina a potência total que é radiada pelo alimentador e intercepta o paraboloide, enquanto que, a eficiência de iluminação indica o grau de uniformidade do diagrama de radiação do alimentador (BALANIS, 2005).

A medida em que o alimentador se torna mais diretivo (ou seja, o valor de n aumenta), maior será a eficiência de transbordamento. Contudo, o campo no plano de abertura se mostra cada vez mais concentrado na região central, diminuindo portanto, a eficiência de iluminação (BALANIS, 2005).

A eficiência na abertura, que é dada pelo produto das eficiências de transbordamento e iluminação, está diretamente associada ao ângulo de iluminação θ_E e ao valor do expoente n do alimentador cosseno elevado modificado. Para o caso de um refletor parabólico simétrico, a eficiência máxima ε_T é de aproximadamente 82%, o que leva a uma atenuação na borda AB de

aproximadamente -11 dB (BALANIS, 2005)

$$AB = 10 \log \left[\cos^4 \left(\frac{\theta_E}{2} \right) \cos^{2n} \left(\frac{\theta_E}{2} \right) \right] \approx -11 \text{ dB}, \quad (3.113)$$

onde

$$\theta_E = 2 \arctan \left(\frac{D}{4F} \right). \quad (3.114)$$

As variáveis D e F na equação 3.114 são, respectivamente, o diâmetro do parabolóide e a distância focal. Fixando-se $D = 7,5$ m e $F = 0,4D$, é possível encontrar o valor mais apropriado de n para as condições dadas no problema, o qual é $n \approx 5,68$.

Utilizando este valor de n e mantendo fixos os parâmetros da antena, pode-se analisar a amplitude dos lobos secundários por meio do operador integral. Essa análise é feita calculando-se a diferença entre o valor de pico do operador integral quando $\theta = 0^\circ$ e seu equivalente para $\theta = 1^\circ$, no caso de analisar a região de campo próximo, ou $\theta = 0,1^\circ$, para região de campo distante.

Decidiu-se então, fazer uma comparação gráfica para os operadores quando $n = 1$ e $n = 5,68$. Considerando os mesmos parâmetros da subseção anterior e estabelecendo $n = 5,68$, calculou-se os operadores integrais tanto para região de campo próximo, quanto para região de campo distante. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 3.18 e 3.19.

Calculando a diferença mencionada anteriormente, encontra-se para a Figura 3.12 um valor de $0,0148$ V/m, o que equivale a $-36,60$ dB. Para o caso em que se utilizou o valor de $n = 5,68$, a diferença foi de $0,0358$ V/m, ou $-28,92$ dB. Assim, nota-se uma diminuição de $7,68$ dB no lobo secundário para $n = 5,68$, o que pode ser visto como um ganho considerável, já que, a cada aumento de 3 dB, o valor da potência do sinal dobra.

Para a Figura 3.15, foi encontrada uma diferença do lobo primário para o secundário de $0,2930$ V/m, o que equivale a $-10,66$ dB. Simulando para $n = 5,68$, a diferença obtida foi de $0,2978$ V/m, ou $-10,52$ dB. De um gráfico para o outro, obteve-se uma diferença de $0,14$ dB, permitindo comprovar o aumento de potência do sinal para o último caso.

É importante ressaltar que a formulação desenvolvida neste trabalho pode ser aplicada para qualquer valor de n , contudo, em função dos parâmetros iniciais de cada problema, é possível encontrar um valor “ótimo” de n que favorecerá o projeto físico da antena.

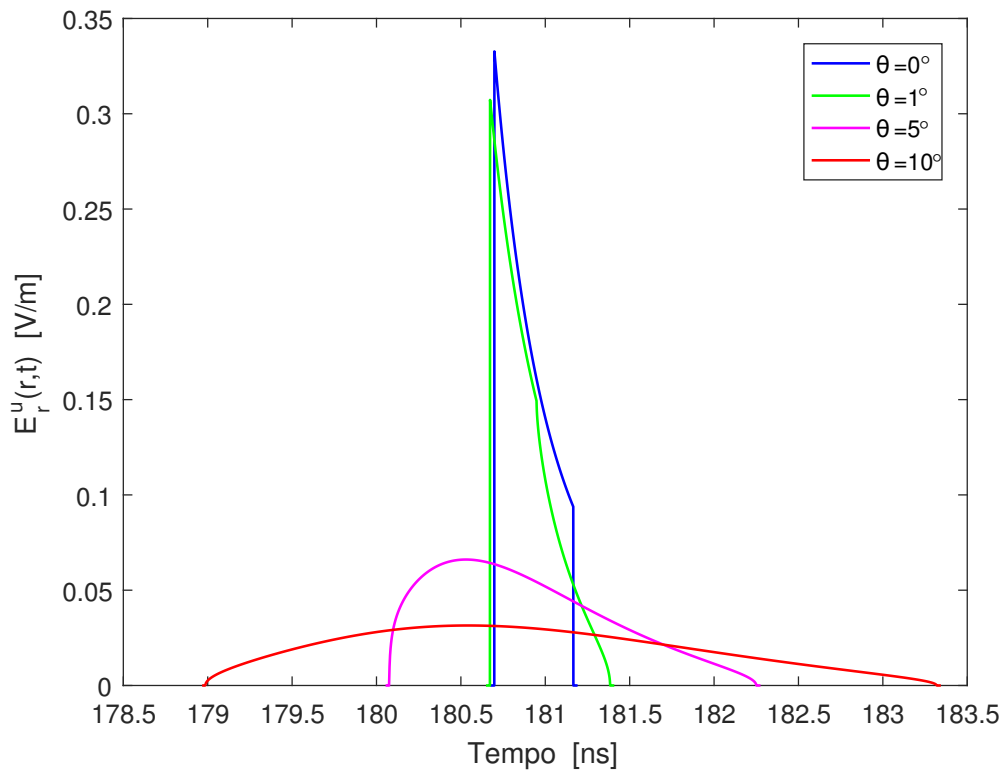


Figura 3.18: Operador integral em função do tempo para $n=5,68$, $r=50$ m, considerando $\phi=0^\circ$ e diferentes valores de θ .

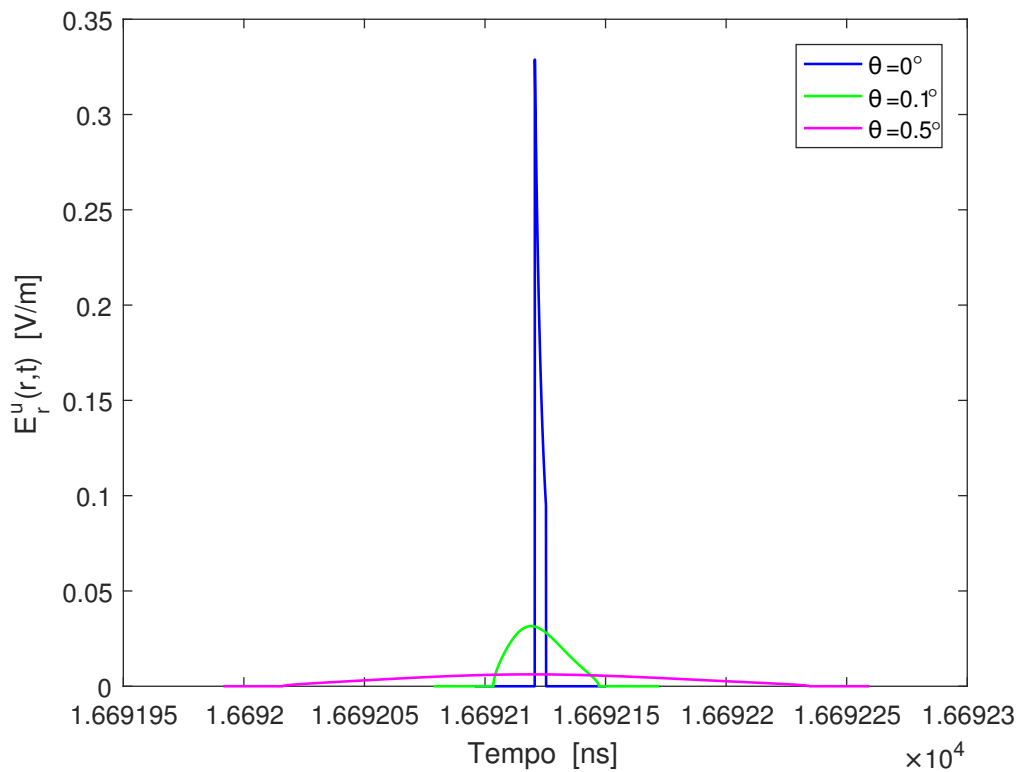


Figura 3.19: Operador integral em função do tempo para $n=5,68$, $r=5000$ m, considerando $\phi=0^\circ$ e diferentes valores de θ .

3.2 ANÁLISE DO CAMPO RADIADO

Uma das grandes vantagens do cálculo de campo radiado por meio do operador integral é a flexibilidade que esta técnica proporciona. A fonte responsável por gerar o sinal a ser transmitido pela antena é tratada de forma independente com relação ao operador integral, evitando que cálculos sejam refeitos sempre que uma nova fonte for introduzida ao sistema.

Os campos radiados pela antena são computados por meio de uma convolução temporal entre a resposta ao impulso (degrau) da antena e uma excitação de fonte primária

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_r^\delta(\mathbf{r},t) * f(t) = \mathbf{E}_r^u(\mathbf{r},t) * \frac{d}{dt}f(t). \quad (3.115)$$

Na região de abertura, todas as fontes equivalentes ali presentes emitem a mesma forma de onda que chegam ao ponto do observador. Para o presente estudo, a forma de onda que excita a antena é assumida como nula antes do acionamento do sistema.

Trabalhando-se com o conceito de abertura focalizada, é possível separar a dependência dos campos no ponto de observação em termos associados à frequência e ao espaço, e por isso, é possível escrever, após aplicar a transformada inversa de Laplace, uma formulação em termos de $\mathbf{E}_r^u(\mathbf{r},t)$ (BAUM, 1987).

A definição de transitório pode ser vista como o intervalo de tempo que vai do instante em que o sinal é detectado em um ponto fixo até o instante em que o sinal atinge o estado estacionário. Por causa dos diferentes comprimentos de caminhos entre a fonte e os pontos de incidência sobre o refletor, e dos diferentes comprimentos de caminho entre pontos na superfície refletora e o observador na região de campo distante, uma iluminação parcial pode acontecer durante a mudança de estado do sistema. Quando a fonte é ligada, um tempo de atraso é percebido. Nesse caso, para o observador na região de campo distante, apenas a contribuição de menor caminho aparece inicialmente no ponto. Com o passar do tempo, mais componentes atingem o ponto e se a fonte continuar ligada, toda a superfície contribuirá para o campo espalhado na posição do observador. O intervalo entre ligar a fonte e atingir o estado estacionário é chamado de *build-up*. Já o intervalo entre o estado estacionário e a extinção completa do sinal pode ser chamada de *decay* (SUN, 1995).

A seguir, discute-se os resultados obtidos para os campos nas regiões de Fresnel e Fraunhofer. A direção de maior interesse é, certamente, a de maior diretividade, porém, durante a análise, variou-se os valores de θ a fim de destacar o surgimento de possíveis lobos secundários no diagrama de radiação da antena em função da queda nos valores de amplitude do operador integral.

3.2.1 CAMPO RADIADO POR UMA FONTE 4-PSK

Na transmissão e recepção de sinais digitais é preciso modular e demodular o sinal. Quando dados são transmitidos por meio de uma variação na fase do sinal, tem-se o esquema conhecido como PSK, do inglês, *Phase Shift Keying*. Esse tipo de modulação transmite um *bit* de informação em um intervalo de T_b segundos, ou a uma taxa de $1/T_b$ bits/s. Desse modo, é possível aumentar a taxa de transmissão diminuindo-se o valor de T_b ou aplicando uma sinalização M-ária. No primeiro caso, exige-se uma grande largura de banda enquanto que no segundo caso, é necessário um uso maior de potência. Como na grande maioria dos sistemas de telecomunicações a largura de banda é limitada, a melhor opção é trabalhar com uma das variações da modulação PSK, conhecida como M-PSK (LATHI; DING, 2009).

O tipo de modulação escolhida para este trabalho foi a 4-PSK ou QPSK (PSK em quadratura), a qual apresenta maior imunidade contra ruídos. Este formato consiste na soma de dois sinais binários PSK onde um utiliza a portadora $\cos(\omega_c t)$ e o outro a portadora $\sin(\omega_c t)$, ambas com a mesma frequência angular (LATHI; DING, 2009).

A modulação QPSK varia a fase e a quadratura da onda portadora para que o sinal possa ser transmitido. A variação desses dois parâmetros permite a transmissão de um número maior de bits por símbolo.

A formulação apresentada considera o modelo de alimentador cosseno elevado modificado capaz de gerar o seguinte sinal 4-PSK

$$\frac{d}{dt}f(t) = A_c \sum_{n=0}^3 \sin \left[\omega_c t - (2n+1) \frac{\pi}{4} \right] \{U(t - nT_b) - U[t - (n+1)T_b]\}, \quad (3.116)$$

onde $A_c = \sqrt{2}/2$, $\omega_c = 200\pi(c/D)$ e $T_b = 5D/(100c)$. Os resultados obtidos para os campos radiados são apresentados nas próximas subseções.

3.2.1.1 REGIÃO DE FRESNEL

Nesta análise de campo radiado, os valores de r , θ e ϕ foram mantidos os mesmos do estudo do operador integral para campo próximo.

Por meio dos gráficos, é possível dizer que o comportamento dos campos na região de Fresnel dificilmente atinge o estado estacionário, ou seja, as formas de onda transmitida e recebida são diferentes. Tal fato ocasiona em uma baixa precisão de sinal medido quando comparado à forma de onda do pulso 4-PSK, mesmo na direção de *boresight*, ou maior diretividade ($\theta = 0^\circ$). Isso acontece, principalmente, em função da forte presença de

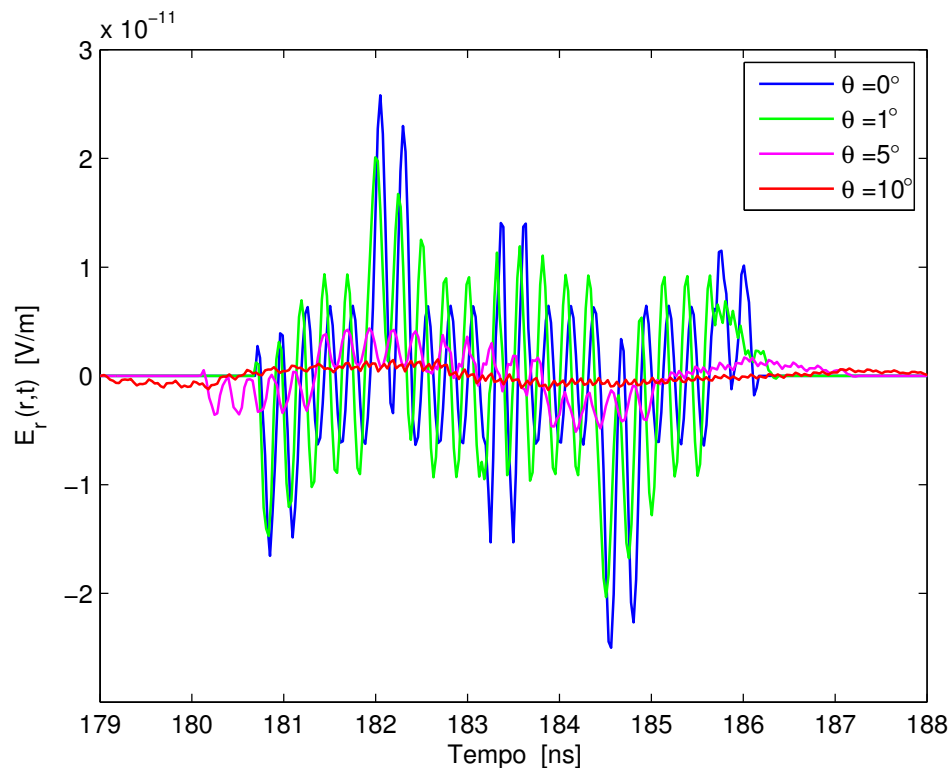


Figura 3.20: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=1$.

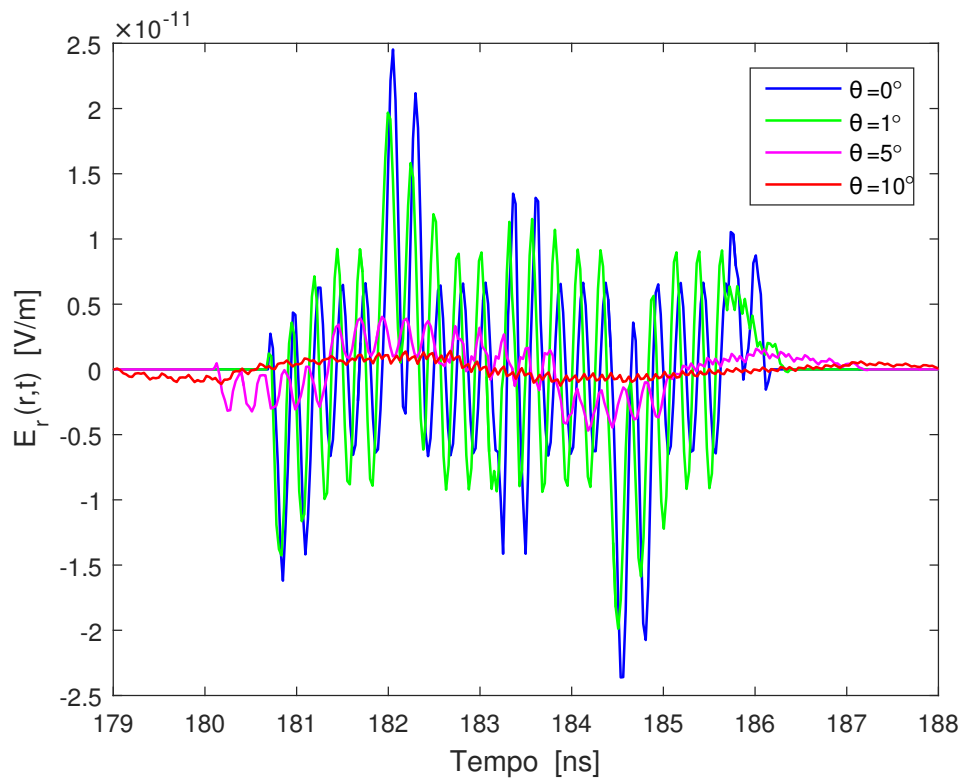


Figura 3.21: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=2$.

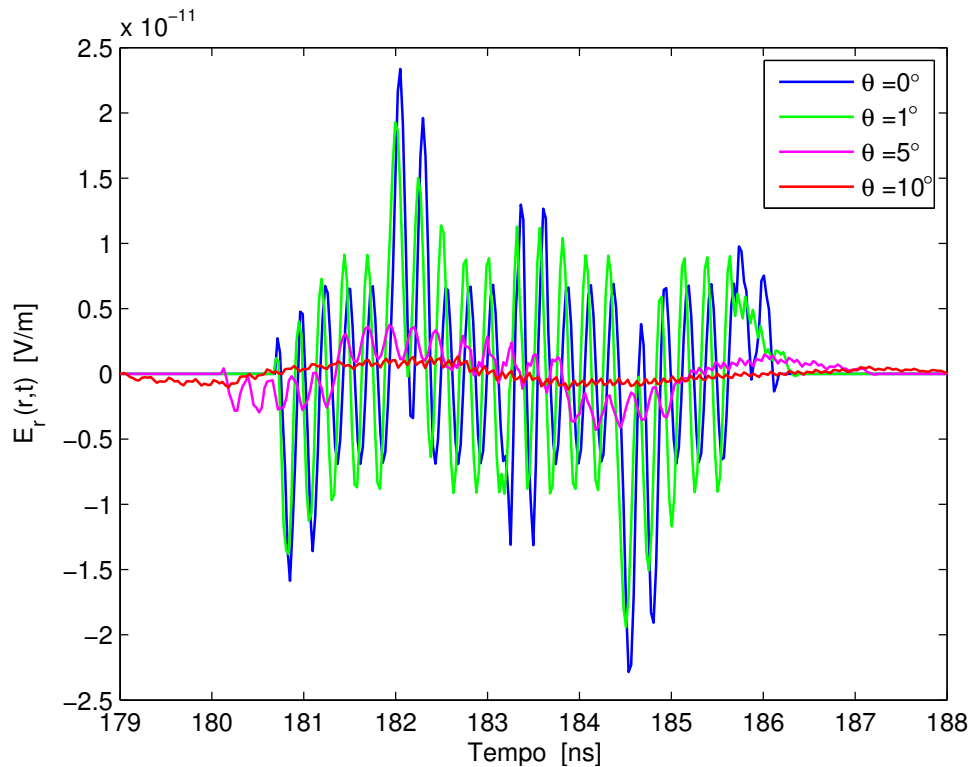


Figura 3.22: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=50$ m para $n=3$.

componentes de campo reativo (REGO, 2009).

3.2.1.2 REGIÃO DE FRAUNHOFER

De maneira semelhante à subseção anterior, para a análise de campo radiado na região de Fraunhofer, os valores de r , θ e ϕ foram mantidos os mesmos do estudo do operador integral para campo distante.

Na região de campo distante, é possível observar uma correlação de 100% do sinal transmitido com o sinal recebido na direção de *boresight* ($\theta = 0^\circ$), devido a ausência de transitórios. Com o aumento dos valores de θ , fenômenos de dispersão começam a alterar o sinal e o efeito da difração na borda do refletor se torna evidente, fazendo com que a fidelidade do sinal diminua (REGO, 2009).

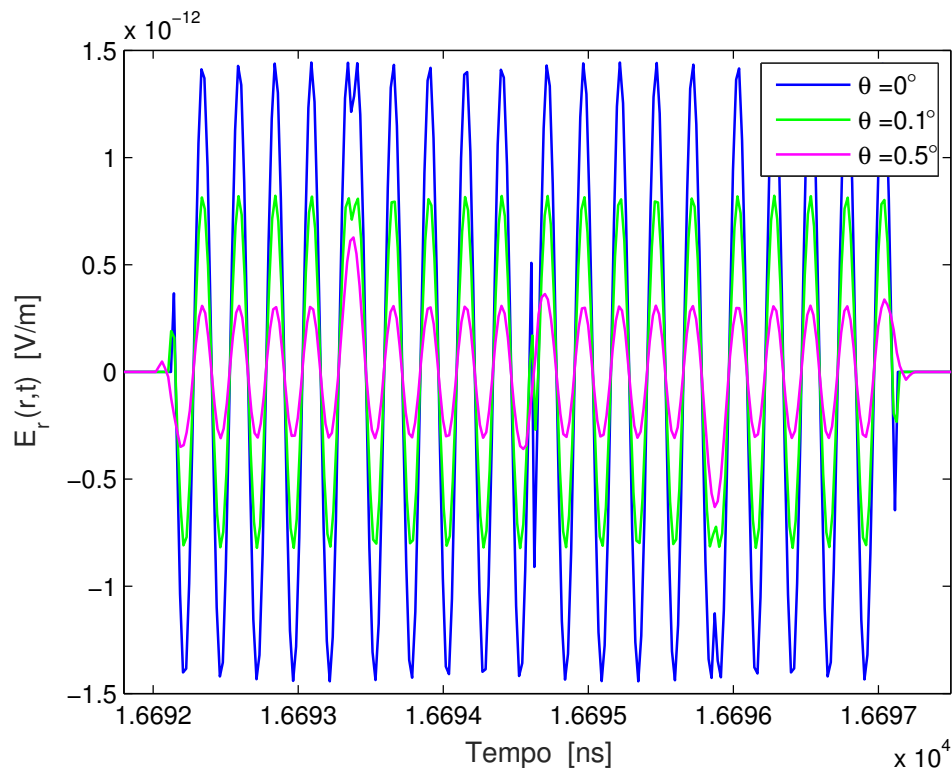


Figura 3.23: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=1$.

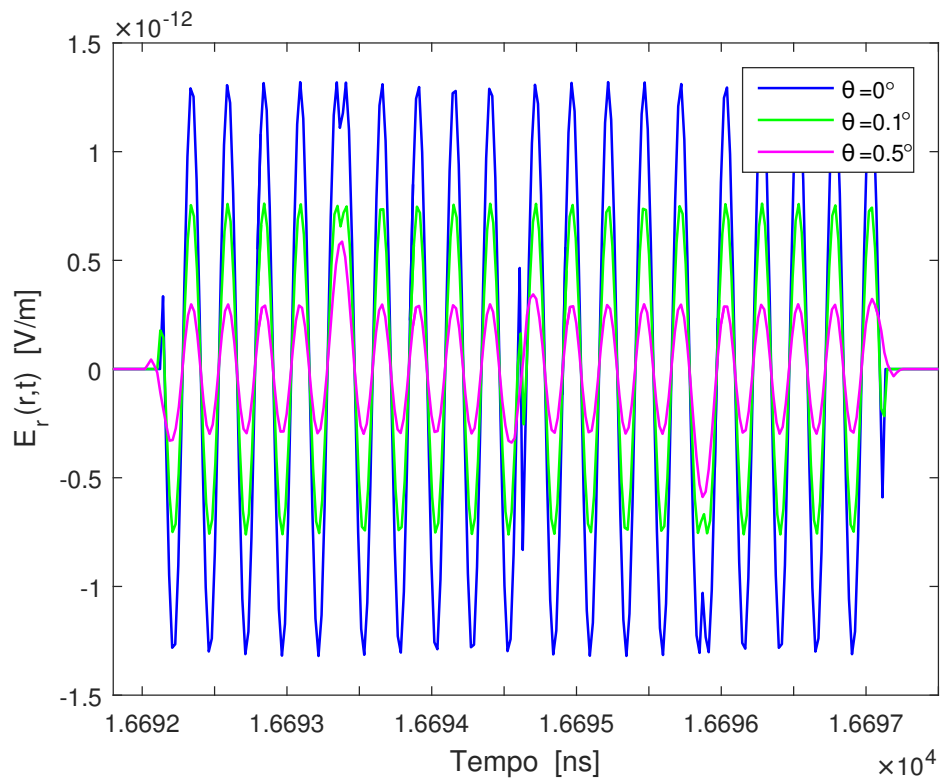


Figura 3.24: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=2$.

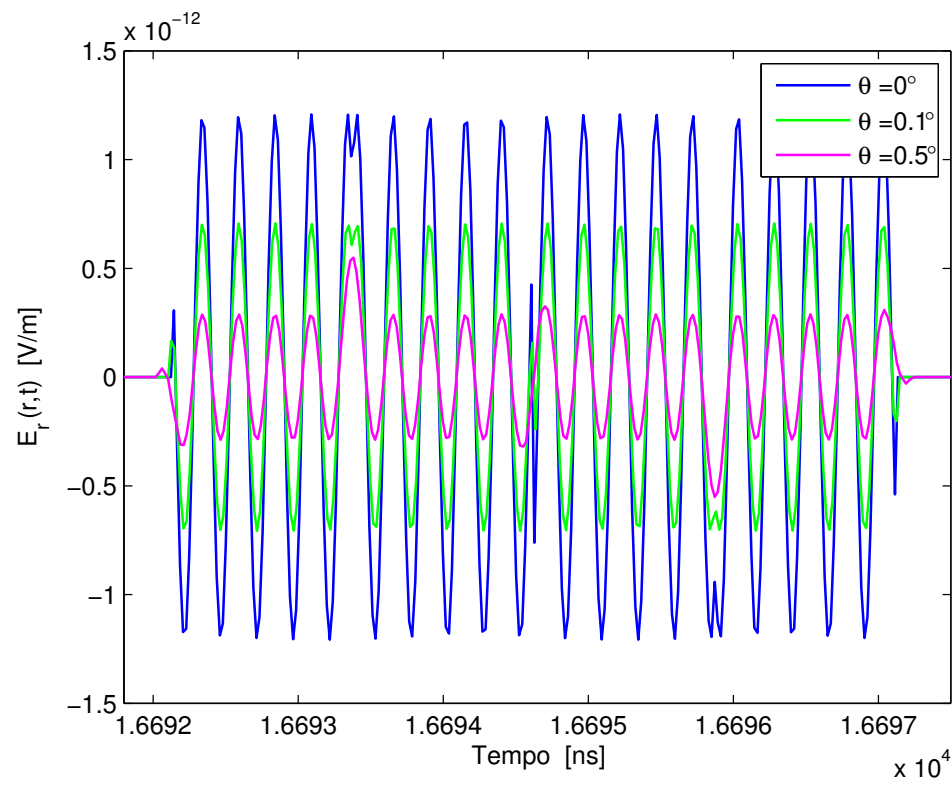


Figura 3.25: Campo radiado por uma antena refletora parabólica a uma distância $r=5000$ m para $n=3$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

O crescente interesse no processo de radiação e detecção de pulsos ultra curtos tem causado grande impacto na análise e *design* de antenas refletoras parabólicas. Isso ocorre pelo fato de que o estudo deste tipo de radiação, baseado em técnicas tradicionais no domínio da frequência, torna-se inviável devido à manipulação de uma extensa largura de banda. Desse modo, a análise de fenômenos eletromagnéticos tem sido, cada vez mais, desenvolvida no domínio do tempo.

O presente estudo foi desenvolvido para contribuir com o aumento da demanda por maiores taxas de informação, e conseqüentemente, a utilização de sinais pulsados no processo de transmissão. Elaborou-se então, uma formulação para calcular o campo radiado no espaço livre a partir de antenas refletoras parabólicas perfeitamente condutoras, alimentadas pelo modelo cosseno elevado modificado.

Este tipo de alimentador pode ser aplicado para controlar a diretividade da antena conforme o valor de n , no modelo de alimentação, varia. Além disso, por meio deste alimentador é possível também chegar a uma solução analítica fechada para análise de problemas no domínio do tempo utilizando qualquer valor de n , seja n inteiro ou racional. Este trabalho se destaca por conter expressões válidas tanto para regiões de campo próximo, quanto para regiões de campo distante, além de permitir o uso de fontes genéricas em antenas refletoras parabólicas.

A partir de conceitos da Ótica Geométrica e Método da Abertura, ambos no domínio da frequência, é possível definir um parâmetro conhecido como operador integral, o qual pode ser entendido como a resposta ao degrau (impulso) da antena. Ao aplicar-se a transformada inversa de Laplace neste operador, é possível convertê-lo para o domínio do tempo sem prejuízo numérico. Tal operador foi dividido em componentes cartesianas para melhor entendimento e visualização gráfica.

Em função do alto grau de complexidade das integrais obtidas nos cálculos, utilizou-se o software *Mathematica 9* juntamente com um pacote adicional conhecido como *Rubi 4.10*, o

qual possui vasto número de rotinas de integração.

A formulação genérica completa é composta por duas funções especiais: Função Hipergeometria e Função Hipergeometria Appell, as quais são soluções de equações diferenciais de segunda ordem. Para o caso em que o expoente n do alimentador é igual a 2, foi necessário criar uma condição restritiva, já que, para tal valor, não é permitido utilizar a formulação genérica devido a uma indeterminação em função do termo $(-2 + n)$ presente no denominador de uma das soluções de integral.

O operador integral, quando associado a fontes genéricas por meio de convolução temporal, fornece o campo radiado pela antena tanto para regiões de campo próximo, quanto para regiões de campo distante. A convolução foi realizada de forma numérica e apresentou grande precisão nos cálculos. Tanto os cálculos do operador integral quanto do campo radiado pelo parabolóide foram feitos utilizando o software *MATLAB R2014*.

A análise no domínio do tempo foi realizada utilizando-se um valor fixo de ângulo de azimute, porém variando-se o valor do ângulo de elevação. Por meio dos resultados gráficos, pode-se observar um aumento na diretividade da antena em função do estreitamento gerado nas curvas do operador integral, à medida que n aumenta. Nota-se que, para a região de Fresnel, o valor de θ permite maior variação quanto a posição do observador quando comparado aos valores utilizados para a região de Fraunhofer. Nesta, os valores de amplitude tanto do operador integral quanto do campo radiado sofrem uma brusca queda, mesmo utilizando variações de θ extremamente pequenas. Com relação aos campos radiados, para a região de Fresnel nota-se uma baixa precisão de sinal medido quando comparado à forma de onda do pulso 4-PSK, devido a forte presença de componentes de campo reativo, enquanto que para a região de Fraunhofer, obteve-se uma correlação de 100% do sinal transmitido com o sinal recebido na direção de *boresight* ($\theta = 0^\circ$), devido a ausência de transitórios (REGO, 2009).

4.1 TRABALHOS FUTUROS

A pesquisa realizada aborda a análise de apenas um tipo de fonte temporal. Este estudo, porém, pode ser ampliado para antenas com um padrão de radiação mais genérico do que uma fonte 4-PSK. Além disso, de modo a reduzir níveis de lobos laterais no diagrama de radiação da antena, pode-se reescrever a formulação para outros modelos de alimentação que diminuam o campo elétrico na borda da abertura e intensificam os raios na região central da mesma (SKULKIN et al., 2017).

A presente análise é desenvolvida para um refletor parabólico alimentado pelo foco,

contudo, para obter melhores resultados de diretividade e ganho, pode ser estendida para refletores parabólicos *offset*.

Essa mesma formulação também pode ser desenvolvida pelo viés da Ótica Física (SKULKIN et al., 2017), de forma a obter resultados que incluam fenômenos de difração na borda do refletor. Para aplicar tal técnica, a superfície parabólica deve ser parametrizada a fim de encontrar o campo radiado no espaço livre.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, M. **Telefonia Digital**. [S.l.]: Editora Érica, 1998.
- ARFKEN, G.; WEBER, H. **Mathematical Methods for Physicists**. [S.l.]: Elsevier Inc., 2005.
- BALANIS, C. **Antenna Theory: Analysis and Design**. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2005.
- BATISTA, C. **Predição de cobertura radioelétrica em terrenos mistos: uma abordagem via equações integrais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- BAUM, C. Focused aperture antennas. **Air Force Weapons Laboratory**, 1987.
- CHOU, H.; PATHAK, P.; ROUSSEAU, P. Analytical solution for early-time transient radiation from pulse-excited parabolic reflector antennas. **IEEE Transactions on An**, p. 829–836, 1997.
- DJUKNIC, G. **Method of Measuring a Patter of Electromagnetic Radiation**. dez. 2003. United States Patente 6657596 B2.
- FARIA, T. **Síntese Óptica de Antenas Refletoras com Simetria Circular Utilizando a Concatenação de Seções Elípticas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. **Table of Integrals, Series and Products**. [S.l.]: Elsevier Inc., 2007.
- KILDAL, P.-S. **Foundations of Antennas**. [S.l.]: Studentlitteratur Lund, 2000. Seção 8.4.2.
- LATHI, B.; DING, Z. **Modern Digital and Analog Communication Systems**. [S.l.]: Oxford University Press, 2009.
- LUDWIG, A. The definition of cross polarization. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, p. 116–119, 1973.
- MEDEIROS, J. **Princípios de Telecomunicações: Teoria e Prática**. [S.l.]: Érica, 2007.
- OLIVEIRA, E. **Funções Especiais com Aplicações**. [S.l.]: Livraria da Física, 2005.
- OLIVEIRA, R.; HÉLIER, M. Closed-form expressions of the axial step and impulse responses of a parabolic reflector antenna. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, p. 1030–1037, 2007.
- REGO, C. Closed-form solution for integral operators applied to the calculation of radiated fields from paraolic reflector antennas. **IEEE MTT-S International Mricrowave & Optoelectronics Conference (IMOC)**, p. 441–446, 2009.

- REGO, C.; GONÇALVES, S.; MOREIRA, F. High-frequency asymptotic formulation for prompt response of parabolic reflector antennas. **International Journal of Electronics and Communications**, p. 36–46, 2008.
- RICH, A. **Rule-based Mathematics - Symbolic Integration Rules**. jul. 2015. Acessado em 03/02/2017. Disponível em: <<http://www.apmaths.uwo.ca/arich/>>.
- RICH, A.; JEFFREY, D. A knowledge repository for indefinite integration based on transformation rules. **Springer-Verlag Berlin Heidelberg**, 2009.
- SHLIVINSKI, A.; HEYMAN, E.; KASTNER, R. Antenna characterization in the time domain. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, p. 1140–1149, 1997.
- SILVER, S. (Ed.). **Microwave Antenna Theory and Design**. [S.l.]: Peter Peregrinus Ltd., 1984. Seção 12.5.
- SKULKIN, S.; TURCHIN, V. Transient field calculation of aperture antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, p. 929–932, 1999.
- SKULKIN, S. et al. Transient field calculation of aperture antennas for various field distributions over the aperture. **IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters**, p. 2295–2298, 2017.
- SUN, E.-Y. Transient analysis of large paraboloidal reflector antennas. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, p. 1491–1496, 1995.
- WOLFRAM, S. **The Mathematica Book**. [S.l.]: Wolfram Media, 2003.

APÊNDICE

A FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICA E HIPERGEOMÉTRICA APPELL

Essas duas funções especiais aparecem no conjunto de soluções das integrais presentes no operador integral e serão detalhadas a seguir.

A.1 FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

De forma simplificada, pode-se dizer que a função hipergeométrica é a solução da equação diferencial de Gauss (ou equação hipergeométrica), a qual é definida como uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, linear e homogênea (OLIVEIRA, 2005).

Tal equação diferencial, quando apresenta apenas três pontos singulares, incluindo um ponto no infinito, caracteriza a chamada equação diferencial de Riemann-Papperitz. Assim, partindo da equação de Riemann-Papperitz, e definindo-se os pontos singulares em zero, um e infinito, é possível chegar na equação hipergeométrica (OLIVEIRA, 2005).

De modo geral, uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, linear e homogênea pode ser escrita como (OLIVEIRA, 2005)

$$\frac{d^2}{dz^2}w(z) + P(z)\frac{d}{dz}w(z) + Q(z)w(z) = 0, \quad (\text{A.1})$$

sendo $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas.

Estabelecendo-se que essa equação admita três pontos singulares e regulares, incluindo um ponto no infinito, é possível escrever a equação diferencial de Riemann-Papperitz como (OLIVEIRA, 2005)

$$\frac{d^2}{dz^2}w(z) + \left[\frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - z_1} + \frac{1 - \beta - \beta'}{z - z_2} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{z - z_3} \right] \frac{d}{dz}w(z) + \left[\frac{\alpha\alpha'(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{z - z_1} + \frac{\beta\beta'(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)}{z - z_2} + \frac{\gamma\gamma'(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}{z - z_3} \right] \frac{w(z)}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde z_1, z_2 e z_3 são os pontos singulares regulares e $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ e γ, γ' são, respectivamente, os expoentes associados a esses pontos.

Considerando a combinação conveniente de uma transformação bilinear e uma transformação do tipo (OLIVEIRA, 2005)

$$w(z) = (z - z_1)^{-\lambda} (z - z_2)^{-\mu} (z - z_3)^{-\nu} v(z), \quad (\text{A.3})$$

com $\lambda + \mu + \nu = 0$, é possível conduzir os pontos z_1, z_2 e z_3 nos pontos 0, 1 e ∞ . Além disso, se forem impostas as condições (OLIVEIRA, 2005)

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha + \beta' + \gamma = b, \quad (\text{A.5})$$

$$1 + \alpha - \alpha' = c, \quad (\text{A.6})$$

obtem-se

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} w(z) + [c - (a+b+1)z] \frac{d}{dz} w(z) - abw(z) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Tal equação diferencial é definida como equação hipergeométrica.

Nas vizinhanças da origem, ou seja, quando $z = 0$, a solução da equação hipergeométrica pode ser escrita utilizando-se o Método de Frobenius. Quando aplicável, esse método permite escrever a solução de uma equação diferencial ordinária em termos de série de potências. Para o problema em questão, utilizou-se (OLIVEIRA, 2005)

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{n+s}, \quad (\text{A.8})$$

sendo d_n os coeficientes e s o parâmetro livre.

Substituindo (A.8) na equação hipergeométrica, encontra-se (OLIVEIRA, 2005)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s+c-1) d_n z^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+a+b) + ab] d_n z^{n+s} = 0, \quad (\text{A.9})$$

de onde é possível extrair as seguintes informações:

- Equação indicial: $s(s+c-1) = 0$;
- Relação de recorrência: $d_n = \frac{(n+s+a-1)(n+s+b-1)}{(n+s)(n+s+c-1)} d_{n-1}$, com $n \geq 1$.

Para obter a solução de interesse, considerou-se $s = 0$. Nesse caso, a relação de recorrência se torna (OLIVEIRA, 2005)

$$d_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} d_{n-1}. \quad (\text{A.10})$$

É preciso então, expressar d_n em função do coeficiente d_0 , e para isso, será utilizado a função gama $\Gamma(x)$, de modo que (OLIVEIRA, 2005)

$$d_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{1}{n!} d_0, \quad (\text{A.11})$$

ou seja, a solução da equação diferencial nas vizinhanças da origem é dada por

$$d_0 \left[1 + \frac{ab}{1!c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \right]. \quad (\text{A.12})$$

Portanto, a função representada pela série entre colchetes é conhecida como função de Gauss ou função hipergeométrica e é expressa como (OLIVEIRA, 2005)

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n, \quad (\text{A.13})$$

sendo z o argumento da função e $c \neq -m$, onde $m = 0,1,2,\dots$.

Outra forma de escrever a equação (A.13) é utilizando a notação de Pochhammer

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \equiv \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (\text{A.14})$$

Logo, para $|z| < 1$, tem-se

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n. \quad (\text{A.15})$$

Assim, é possível entender melhor o significado dos índices inferiores 2 e 1. O índice principal 2 indica que dois símbolos de Pochhammer estão presentes no numerador enquanto que o índice final 1 informa que existe apenas um símbolo de Pochhammer no denominador (ARFKEN; WEBER, 2005).

A.2 FUNÇÃO HIPERGEOMÉTRICA APPELL

A função hipergeométrica Appell é uma extensão da função hipergeométrica definida anteriormente, porém, aplicada para duas variáveis. É dada por (WOLFRAM, 2003)

$$F_1(a;b_1,b_2;c;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{m!n!(c)_{m+n}} x^m y^n, \quad (\text{A.16})$$

sendo $|x| < 1$ e $|y| < 1$.

Quando $x = 0$ ou $y = 0$, $F_1(a;b_1,b_2;c;x,y)$ se reduz a ${}_2F_1(a,b;c;z)$.