

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1014

**NOVAS FUNÇÕES DE FORMA PARA O MÉTODO SEM MALHA DE  
ARESTA**

**Paulo Mariano Inácio da Silva**

DATA DA DEFESA: 30/10/2017

Universidade Federal de Minas Gerais  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

# **Novas Funções de Forma Para o Método sem Malha de Aresta**

**Paulo Mariano Inácio da Silva**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Renato Cardoso Mesquita

Coorientador: Prof. Naísses Zoia Lima

Belo Horizonte - MG

Outubro de 2017

S586n

Silva, Paulo Mariano Inácio da.

Novas funções de forma para o método sem malha de aresta  
[manuscrito] / Paulo Mariano Inácio da Silva. – 2017.  
xiii, 49 f., enc.: il.

Orientador: Renato Cardoso Mesquita.  
Coorientador: Naísses Zoia Lima.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais,  
Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 48-49.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Campos eletromagnéticos - Teses.  
3. Análise numérica - Teses. I. Mesquita, Renato Cardoso. II. Lima,  
Naísses Zoia. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de  
Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)

**"Novas Funções de Forma para  
o Método Sem Malha de Aresta"**

**Paulo Mariano Inácio da Silva**

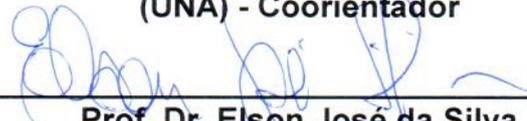
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

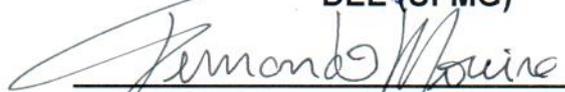
Aprovada em 30 de outubro de 2017.

Por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita  
DEE (UFMG) - Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Naisses Zoia Lima  
(UNA) - Coorientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Elson José da Silva  
DEE (UFMG)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira  
DELT (UFMG)

## Dedicatória

*À memória de meu pai,  
Raimundo Mariano.*

# Agradecimentos

A Deus que está ao meu lado mesmo quando não mereço, nunca me permitindo falhar ou fracassar.

Aos meus pais, pelo estímulo infatigável e apoio incondicional prestado desde do meu primeiro dia vida!. Não basta um muito obrigado para agradecer, hoje, tudo o que sou, é devida à educação que sempre se esforçaram em mim proporcionar.

Aos Profs., Renato Mesquita e Naísses Zoia, por toda disponibilidade que sempre demonstram, pelas críticas e opiniões relevantes que contribuíram de forma benigna para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos os colegas e amigos, especialmente aqueles que me acompanharam no decorrer destes anos de pós-graduação, o meu muito obrigado pelo apoio e amizade que sempre senti quando na vossa companhia.

Aos Mestres que tive o prazer de conhecer nessa belíssima universidade, obrigado pelos ensinamentos tanto científico quanto de conduta profissional.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, pela oportunidade concedida em aceitar-me como aluno de mestrado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro ao longo destes anos de estudo como bolsista.

# Epígrafe

*“A vida é muito curta e não há tempo para birrinhas e brigas, meu amigo...”*

(“We can work it out”, The Beatles)

## Resumo

O Método sem Malha de Aresta é um método numérico recentemente desenvolvido para solucionar problemas de contorno regidos por incógnitas que são campos vetoriais. Este método utiliza funções de forma vetoriais de aresta que satisfazem a condição de divergente nulo e assim geram soluções numéricas livres de modos espúrios. As funções são construídas com base em arestas ao invés de nós, associando um grau de liberdade a cada aresta distribuída no domínio. O objetivo geral do trabalho é prosseguir com o desenvolvimento dos métodos sem malha de aresta, almejando superar algumas de suas deficiências detectadas. Para isso, são realizados estudos mais aprofundados a respeito do impacto da seleção das arestas de suporte na solução de problemas eletromagnéticos e é proposta uma nova maneira de gerar funções de formas vetoriais para o método. A teoria para o desenvolvimento dessas novas funções é baseado nos elementos de Nédélec de primeiro tipo, conformes no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . A formulação matemática para construção das funções de forma é apresentada e as principais características do método são verificadas numericamente para o caso bidimensional. Verifica-se que a solução numérica não é corrompida por modos espúrios e é possível gerar aproximações consistentes mesmo quando o comprimento das arestas tende para zero.

**Palavras chave:** Método sem malha de aresta, Espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ , Campos eletromagnéticos, Métodos numéricos.

## Abstract

The Edge Meshless Method is a recently developed numerical method to solve vector boundary value problems. This method uses edge vector shape functions that satisfy the divergence-free condition and thus generate numerical solutions free from spurious modes. Functions are built based on edges instead of nodes, and it assigns degrees of freedom to edges scattered in the domain. The objective of this work is to continue with the development of the Edge Meshless Method, aiming to overcome some of its detected deficiencies. For this, more in-depth studies about the impact of the support edges selection in the solution of electromagnetic problems are carried out and it is proposed a new way to generate vector shape functions for the method. The theory to develop these functions is based on Nédélec's elements of first type in the  $H(\text{curl}; \Omega)$  space. The mathematical formulation to construct the shape functions is presented and the main characteristics of the method in two dimensions are verified numerically. It is shown that the numerical solution is not corrupted with spurious modes and that it is possible to generate consistent approximations even when the length of the edges tends to zero.

**Keywords:** Edge meshless method ,  $H(\text{curl}; \Omega)$  space, Electromagnetic fields, Numerical methods.

# Sumário

Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Espaço de Hilbert . . . . .	5
2.3 Espaços de Sobolev . . . . .	7
2.4 Problemas Eletromagnéticos . . . . .	8
2.4.1 As equações de Maxwell completas . . . . .	8
2.4.2 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo . . . . .	9
<b>3 Método sem Malha de Aresta</b>	<b>15</b>
3.1 Introdução . . . . .	15
3.2 Elementos Finitos de Arestas . . . . .	16
3.3 Método sem Malha de Aresta . . . . .	19
3.4 Procedimentos de Seleção das Arestas . . . . .	25
3.5 Funções de Forma Vetoriais $H(\text{curl})$ . . . . .	27
<b>4 Resultados Numéricos Computacionais</b>	<b>32</b>
4.1 Introdução . . . . .	32
4.2 Interpolação de Campos Vetoriais . . . . .	33
4.3 Frequências de Corte em Guia de Onda . . . . .	36

4.4 Propagação em Guia de Onda . . . . .	42
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>46</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

1.1	Nós distribuídos pelo domínio e sua fronteira. . . . .	1
2.1	Um esboço ilustrativo da configuração do problema. . . . .	13
3.1	Triângulo representando um elemento de aresta. . . . .	16
3.2	(a) Função de forma ao longo da aresta $e_{12}$ . (b) Soma das funções de forma do triângulo. . . . .	18
3.3	Arestas distribuídas pelo domínio e sua fronteira. Os círculos centrados nos pontos $\mathbf{x}_1$ , $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ representam os domínios de suporte. As extremidades das arestas estão representadas por pequenos círculos para facilitar a visualização. . . . .	20
3.4	Função $W$ linear contida nas funções de forma vetoriais de aresta. . . . .	21
3.5	Procedimento de seleção das arestas do domínio de suporte. Observa-se que as arestas $e_1$ , $e_2$ , $e_3$ e $e_4$ fazem parte do domínio de suporte do ponto $\mathbf{x}$ . . . . .	26
3.6	Funções de forma em $H(curl; \Omega)$ com 3 arestas: (a) $\vec{N}_1$ , (b) $\vec{N}_2$ e (c) $\vec{N}_3$ . . . . .	31
4.1	Distribuição das arestas no domínio de suporte, onde o comprimento das arestas é dado por $(\mathbf{p} \times l_i)$ , para: (a) $\mathbf{p} = 1$ , as arestas de suporte possuem o mesmo tamanho das arestas de background. (b) $0 > \mathbf{p} < 1$ , menores que as arestas de background. (c) $\mathbf{p} > 1$ , maiores que as arestas de background. Em (d) as arestas de suporte são rotacionadas $\theta$ graus no sentido anti-horário em torno do seu centro geométrico. . . . .	34
4.2	(a) Comprimento das arestas de suporte iguais as arestas de background. (b) Arestas de suporte 50% maiores que as arestas de background. (c) Arestas de suporte 50% maiores que as arestas de background. . . . .	34
4.3	(a) Representação do campo elétrico aproximado. (b) Erro de aproximação vs. comprimento das arestas. . . . .	35

4.4	(a) Arestas de suporte são rotacionadas $30^\circ$ no sentido anti-horário sobre as arestas de background, e comprimento das arestas 50% menor que as arestas de background. (b) Representação do campo elétrico, erro é 0,5346. (c) Erro de aproximação vs. rotação das arestas. . . . .	36
4.5	(a) Campo elétrico computado utilizando uma quantidade de arestas constante e iguais a três para todos os domínios de suporte. (b) Campo elétrico associado ao oitavo autovalor computado com domínios de suporte variando, isto é, existem domínios de suporte contendo de três a nove arestas. . . . .	39
4.6	Geometria do guia de onda retangular . . . . .	42
4.7	Conjunto de 6313 arestas espalhadas no domínio e na fronteira do problema, arestas de suporte 50% menor que arestas background. . . . .	45
4.8	Campo elétrico $E_y$ computado em $y = 0,3m$ no $x = a/2$ plano. . . . .	45

# Lista de Tabelas

4.1	Quatorze primeiros autovalores computados pelas funções de forma original do EMM. . . . .	39
4.2	Quatorze primeiros autovalores computado pelo EMM, onde $l_i$ é o comprimento das arestas de background. . . . .	40
4.3	Quatorze primeiro autovalores computados pelo EMM para diferentes ângulos de rotação. O comprimento das arestas de suporte é fixado em 50% menor que o das arestas de background . . . . .	41
4.4	Valores do rotacional das funções de forma para diferentes ângulos de rotação das arestas de suporte. . . . .	41

# Lista de Símbolos

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Espaço produto interno
$(V, \ \cdot\ )$	Espaço normado
$\epsilon$	Permissividade elétrica, em Farad por metro ( $F/m$ )
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica do vácuo, em Farad por metro ( $F/m$ )
$\epsilon_r$	Permissividade elétrica relativa
$\Gamma$	Fronteira do domínio
$\Gamma_g$	Fronteira do domínio com condições de contorno de Dirichlet
$\Gamma_n$	Fronteira com condição de contorno de terceiro tipo
$\hat{t}_i$	Vetor unitário na direção da $i$ -ésima aresta do domínio de suporte
$\lambda_i^e$	Funções de forma nodais do FEM
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno
$\mathbb{P}_k$	Espaço de polinômios homogêneos de grau $k$
$\mathcal{R}^k$	Espaço de polinômios, conforme no espaço $H(\text{curl}; \Omega)$
$\mathcal{S}^k$	Espaço auxiliar, formado pelos polinômios $\mathbb{P}_k$
$\mu$	Permeabilidade magnética, em Henrys por metro ( $H/m$ )
$\mu_0$	Permeabilidade magnética do vácuo, em Henrys por metro ( $H/m$ )
$\mu_r$	Permeabilidade magnética relativa
$\nabla$	Operador diferencial nabra

---

$\Omega$	Domínio arbitrário
$\omega$	Frequência angular do campo
$\vec{W}_t$	Função de teste vetorial do método dos resíduos ponderados
$\Phi$	Matriz contendo as funções de forma em um domínio de suporte
$\rho$	Densidade de carga elétrica, em Coulombs por metro cúbico ( $C/m^3$ )
$\mathbf{B}_Q$	Matriz de momentos das funções de forma do EMM
$\mathbf{B}_u$	Matriz com os termos de vetores nas direções das arestas das funções de forma do EMM
$\mathbf{C}_Q$	Matriz de momentos dos vetores predefinidos das funções de forma do EMM
$\mathbf{c}_s$	Vetor contendo as circulações dos campos vetoriais nas arestas
$\mathbf{C}_u$	Matriz com os termos de vetores predefinidos das funções de forma do EMM
$\mathbf{S}_a$	Matriz associada aos coeficientes $a_i$ das funções de forma
$\mathbf{S}_b$	Matriz associada aos coeficientes constantes das funções de forma
$\vec{B}$	Densidade de fluxo magnético, em Webers por metro quadrado ( $Wb/m^2$ )
$\vec{D}$	Densidade de fluxo elétrico, em Coulombs por metro quadrado ( $C/m^2$ )
$\vec{E}$	Campo elétrico, em Volts por metro ( $V/m$ )
$\vec{H}$	Campo magnético, em Amperes por metro ( $A/m$ )
$\vec{J}$	Densidade de corrente elétrica, em Amperes por metro quadrado ( $A/m^2$ )
$\vec{n}$	Vetor normal unitário
$\ \cdot\ $	Norma induzida
$A_i$	Parâmetro que controla o domínio de influência da aresta $e_i$
$a_i$	$i$ -ésima coeficiente de interpolação das funções de forma
$C_0^\infty$	Espaço das funções numéricas com derivadas parciais contínuas de todas as ordens

$\mathit{curl}\zeta$	$\nabla \times \zeta$ , chamado por rotacional, onde $\zeta \in L^2$
$D^\alpha$	Operador de diferenciação de ordem $\alpha$
$d_i$	Distância ortogonal entre o ponto $x$ e a aresta $e_i$
$\mathit{div}F$	$\nabla \cdot F$ , chamado por divergente
$\mathit{grad} f$	$\nabla f$ , chamado por vetor gradiente
$J$	Matriz Jacobiana
$k_0$	Número de onda para onda no vácuo
$L^2$	Espaço de Hilbert, funções de quadrado integrável
$L^p$	Espaços de Banach, funções $p$ integráveis a Lebesgue
$W^{m,p}$	Espaços de Sobolev de ordem $m$ , onde $1 \leq p < \infty$
$W_i$	Função associada à $i$ -ésima aresta das funções de forma do EMM

# Capítulo 1

## Introdução

Métodos sem malha são métodos numéricos alternativos aos métodos numéricos tradicionais, como o Método dos Elementos Finitos (FEM) e o Método das Diferenças Finitas (FDM). Sua característica principal é a ausência de uma malha para construção de suas funções de forma. Dessa maneira, o domínio é representado por um conjunto de nós espalhados ao invés de uma malha.

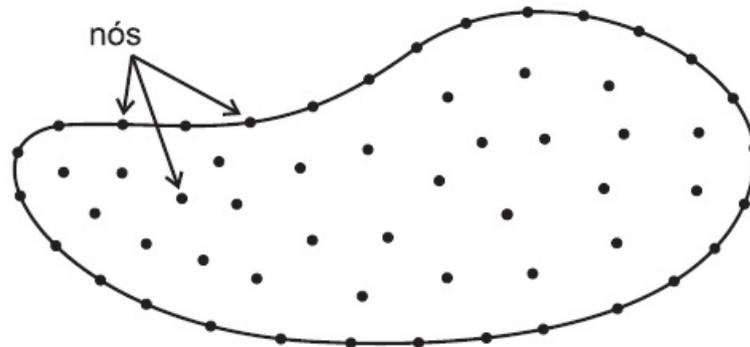


Figura 1.1: Nós distribuídos pelo domínio e sua fronteira.

Fonte: [Lima, 2016]

Dentre os métodos sem malha desenvolvidos até o momento, destacam-se o Element free Galerkin (EFG) [Belytschko et al., 1994], o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) [Atluri and Zhu, 1998] e os Métodos de Interpolação de Pontos (PIM) [Liu, 2009]. Estes métodos trabalham com as formulações dos problemas em suas formas fracas. Baseando-se em nós distribuídos no domínio do problema, constroem-se as funções de forma. No entanto, quando usamos estes métodos para resolver as equações de Maxwell, os mesmos modos espúrios que aparecem em elementos finitos nodais [Bossavit, 1990] também aparecem nos métodos sem malha, produzindo soluções fisicamente irrealizáveis.

---

Outro problema é que o tratamento da continuidade dos campos na interface entre diferentes materiais não é feito corretamente por funções vetoriais baseadas em nós. Para contornar este problema, trabalhos na linha de métodos sem malha nodais que geram aproximações com divergente nulo foram desenvolvidos recentemente. Um destes métodos, proposto por [Nicomedes et al., 2017], trabalha com uma formulação mista através da adição de restrições com multiplicadores de Lagrange para forçar a condição do divergente nulo. Neste trabalho, o autor desenvolve uma adaptação de métodos destinados a problemas de mecânica dos fluidos, representados pela equação de *Navier-Stokes*, aos problemas de espalhamento eletromagnéticos. No entanto, como as funções são construídas a partir de nós, continua-se associando um grau de liberdade a cada componente do campo vetorial. Além disso, há um aumento na ordem do sistema matricial discretizado devido à presença da restrição com os multiplicadores de Lagrange. Outra alternativa para solucionar o problema do divergente nulo é utilizar Funções de Base Radial (RBF) vetoriais. Estas funções são criadas a partir de nós, mas construídas de maneira a aproximar campos vetoriais atendendo à propriedade do divergente nulo. Desta forma, não há modificação da formulação do problema, e sim no processo de construção das funções de aproximação. O método utiliza funções de base vetoriais construídas a partir de funções de base radial escalares. As RBFs vetoriais foram aplicadas a problemas de eletromagnetismo pela primeira vez em [Yang et al., 2014], especificamente em problemas no domínio do tempo. Neste trabalho, o método sem malha utiliza uma formulação forte e o método da colocação, onde o campo é satisfeito em cada nó distribuído no domínio do problema. Em [Lima and Mesquita, 2017b] as RBFs vetoriais são utilizadas para resolver problemas eletromagnéticos harmônicos no tempo usando a forma fraca sem adição de restrição. Os resultados numéricos mostraram que o método consegue reproduzir soluções livres de modos espúrios. Porém, o método mostrou-se muito dependente dos parâmetros de controle das RBFs na qualidade da solução. Esse comportamento torna o método de difícil aplicabilidade prática, pois não é possível garantir credibilidade à solução numérica produzida, sendo o método de pouca robustez. Outro fator que dificulta a aplicação do método é a impossibilidade de garantir, de maneira simplificada, que as condições de continuidade na interface entre diferentes meios sejam satisfeitas. Nestas interfaces, deveria ser imposta continuidade apenas nas componentes tangenciais, sem impor nas componentes normais. No entanto, o método utilizando as RBFs vetoriais garante continuidade vetoriais em todas as direções.

Outra alternativa, proposta por [Lima and Mesquita, 2014, Lima and Mesquita, 2017a], é o Método sem Malha de Aresta (EMM). Como o próprio nome sugere, o método

---

utiliza um conjunto de arestas distribuídas no domínio para criar as funções de aproximação com a devida escolha de funções de base, visando garantir a propriedade do divergente nulo. Assim, as funções são construídas com base em arestas ao invés de nós, associando um grau de liberdade a cada aresta distribuída no domínio. As funções de forma são obtidas forçando que a circulação seja satisfeita em cada aresta de suporte e, assim, a imposição das condições de contorno de Dirichlet é feita de maneira simplificada.

O método sem malha de aresta mostrou-se eficiente quando as arestas utilizadas para construir as funções de forma são selecionadas baseadas em elementos de malha triangular e retangular, ou seja, quando trabalhamos com três ou quatro arestas no *domínio de suporte*<sup>1</sup>, o método garante aproximação com divergente nulo, reproduzindo soluções livres de modos espúrios. No entanto, testes realizados com mais arestas no domínio de suporte mostraram soluções numéricas corrompidas por modos espúrios. Além disso, à medida que adicionam-se novas arestas, aumenta-se a possibilidade da matriz utilizada na construção da função de forma tornar-se singular e, conseqüentemente, a solução numérica não poder ser gerada.

O objetivo deste trabalho é prosseguir com o desenvolvimento dos métodos sem malha de aresta, almejando superar algumas deficiências detectadas, como problemas de singularidade e impossibilidade de acrescentar mais arestas no domínio de suporte. Neste sentido, serão realizados estudos mais aprofundados a respeito do impacto da seleção das arestas de suporte na solução e será proposta uma nova maneira de gerar as funções de forma baseado no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . Ao trabalhar com esse espaço de funções, além de garantir a propriedade do divergente nulo e impor continuidade tangencial sem impor continuidade na componente normal nas interfaces entre diferentes materiais, as funções de forma também serão consistentes com as funções de forma dos elementos de aresta [Jin, 2002], herdando, portanto, suas boas propriedades matemáticas. A metodologia desenvolvida neste trabalho nos possibilita usar um maior número de arestas no domínio de suporte (4, 5, 6, ...), para gerar as funções de forma, desde que se utilizem espaços polinomiais de ordem maior. Outra característica importante das novas funções de forma é que quando o comprimento das arestas tende para zero, isto é, quando a aresta tende a um ponto, ainda é possível gerar aproximações consistentes para os campos eletromagnéticos

Este texto está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta os conceitos relativos espaços vetoriais, em especial, Espaço de Hilbert e Espaço de Sobolev. Poste-

---

<sup>1</sup> Conjunto de arestas selecionadas na vizinhança de um ponto  $x$ , que faça parte da sua região de influência.

---

riormente, apresenta as equações de Maxwell, suas leis complementares e a formulação matemática para problemas vetoriais harmônicos no tempo, em especial, o problema de guia de onda, onde será apresentada a forma forte e derivada a forma fraca para o método sem malha. O Capítulo 3 faz uma revisão da formulação matemática do método sem malha de aresta, propondo nova maneira de seleção de arestas para o domínio de suporte e apresenta o desenvolvimento matemático para gerar as novas funções de forma, baseando-se no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . O Capítulo 4 apresenta os resultados numéricos de alguns problemas eletromagnéticos, utilizando as novas funções de forma. Por fim, o Capítulo 5 traz as conclusões e considerações finais.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

### 2.1 Introdução

Para simplificar o enunciado de alguns conceitos e problemas apresentados no decorrer deste trabalho, este capítulo trata de espaços vetoriais. Em princípio, os espaços analisados neste texto são espaços de funções. São apresentados estudos sobre *Espaços de Hilbert* e *Espaços de Sobolev*. Demonstrações podem ser encontradas em [Debnath and Mikusiński, 2005] e [Guimarães, 2006], respectivamente. A seguir define-se uma classe especial de funções cuja propriedade característica implica imediatamente a continuidade uniforme de seus membros em seus respectivos domínios.

O capítulo também apresenta as equações de Maxwell e suas leis complementares, fundamentais para a compreensão e resolução de problemas eletromagnéticos. Neste sentido, mostra-se a formulação matemática para problemas vetoriais harmônicos no tempo, em especial, o problema de guia de onda. Para esta classe de problema, será apresentada a forma forte e derivada a forma fraca para o método sem malha.

### 2.2 Espaço de Hilbert

**Definição 1** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

é chamada de um produto interno em  $V$  quando para todo  $u, v, w \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as seguintes condições forem satisfeitas:

$$(i) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \text{ (A barra denota a conjugação complexa)}$$

$$(ii) \langle u + \alpha v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \alpha \langle v, w \rangle$$

$$(iii) \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ e } \langle u, u \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0$$

O par  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é chamado de um espaço produto interno. Todo produto interno induz uma norma dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (2.2)$$

O par  $(V, \|\cdot\|)$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma induzida, é chamado de espaço normado. Uma norma em  $V$  é uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisfaz

$$(a) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \text{ para todo } x \in V \text{ e todo } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(b) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ para quaisquer } x, y \in V \text{ (desigualdade triangular)}$$

$$(c) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Todo espaço com produto interno é, de maneira natural, um espaço normado. Se um espaço normado for completo, dizemos que ele é um *espaço de Banach*. Por sua vez, se esse espaço de Banach tiver sua norma gerada por um produto interno, dizemos que ele é um *espaço de Hilbert*.

Uma classe interessante de exemplos de espaços de Banach são os espaços das funções  $p$  integráveis a Lebesgue, denominados de espaços  $L^p(\Omega)$ , o qual é definido por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \quad (2.3)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto mensurável e  $p \in [1, \infty)$ .

Um caso particular de (2.3) é o conjunto de todas as funções de quadrado integrável, que é um espaço de Hilbert, denotado por  $L^2(\Omega)$ , cujo produto interno é

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx, \forall u, v \in L^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Os espaços  $L^2(\Omega)$ , juntamente com espaços de Sobolev têm um papel central na construção do espaço  $H(curl; \Omega)$ , apresentado no capítulo 4.

## 2.3 Espaços de Sobolev

A teoria de Espaços de Sobolev é bastante utilizada como ferramenta para resolução de problemas de unicidade de solução de equações diferenciais parciais e técnicas de resoluções numéricas, por exemplo de elementos finitos. Esses espaços são definidos sobre um domínio arbitrário  $\Omega$ , subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Se  $u \in L^p$  então  $u$  possui derivadas de todas as ordens em um certo sentido, chamado sentido das distribuições. A derivada no sentido das distribuições de uma função  $u \in L^p(\Omega)$  pode ser definida de um modo direto e sem muita complexidade. Podemos chamá-la de derivada generalizada, então  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  é a derivada generalizada de  $u$  (ou derivada distribucional), em relação à variável  $x_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ , se:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} -\frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.5)$$

onde  $C_0^\infty(\Omega)$  é o espaço das funções numéricas  $u$  definidas em  $\Omega$ , com derivadas parciais contínuos de todas as ordens e cujo suporte é compacto em  $\Omega$ . Se isso for o caso, usaremos a notação:  $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$   $i = 1, 2, \dots, n$ .

Quando  $v_i$  também possui derivadas generalizadas então se denota

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Analogamente, denotamos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

com  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

**Definição 2** O espaço de Sobolev de ordem  $m$ , onde  $m \in \mathbb{N}$ , é o conjunto:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\}, \quad (2.6)$$

onde as derivadas são tomadas no sentido das distribuições e  $1 \leq p < \infty$ .

Prova-se que  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço vetorial normado com norma dada por:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7)$$

Sendo por definição  $\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{m,p}$  para todo  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  e  $|\alpha| \leq m$ . Mostra-se que o espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach,  $1 \leq p < \infty$ .

## 2.4 Problemas Eletromagnéticos

### 2.4.1 As equações de Maxwell completas

As equações de Maxwell em conjunto com as relações constitutivas e a equação da força de Lorentz, constituem-se os alicerces da teoria eletromagnética. Pode-se escrever as equações de Maxwell sob a forma local (pontual) e completas como:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \rightarrow \text{Lei de Faraday} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \rightarrow \text{Lei de Ampère-Maxwell} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \text{Lei de Gauss da eletricidade} \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \text{Lei de Gauss do magnetismo} \quad (2.11)$$

onde

$\vec{E}$  é o campo elétrico, em Volts por metro ( $V/m$ ).

$\vec{H}$  é o campo magnético, em Amperes por metro ( $A/m$ ).

$\vec{B}$  é a densidade de fluxo magnético, em Webers por metro quadrado ( $Wb/m^2$ ).

$\vec{D}$  é a densidade de fluxo elétrico, em Coulombs por metro quadrado ( $C/m^2$ ).

$\vec{J}$  é a densidade de corrente elétrica, em Amperes por metro quadrado ( $A/m^2$ ).

$\rho$  é a densidade de carga elétrica, em Coulombs por metro cúbico ( $C/m^3$ ).

Além das equações de Maxwell, acrescentam-se as relações constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.12)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.13)$$

onde  $\epsilon$  é a permissividade elétrica, em Farad por metro ( $F/m$ ) e  $\mu$  é a permeabilidade magnética, em Henrys por metro ( $H/m$ ). As relações (2.12) e (2.13) valem para meios simples (ou seja, meios lineares, homogêneos, isotrópicos e sem perdas).

### 2.4.2 Problemas Vetoriais Harmônicos no Tempo

Suponha que os campos elétricos e magnéticos variem harmonicamente no tempo a uma frequência  $\omega$  e que não existam fontes em um certo domínio  $\Omega$ . Os meios são lineares e isotrópicos. Dessa maneira, podemos escrever as equações de Maxwell no domínio da frequência da seguinte forma.

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \quad (2.17)$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são representações fasoriais dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

A equação (2.14) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H}. \quad (2.18)$$

Tomando o rotacional em ambos os lados da equação (2.18), tem-se:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = \nabla \times (-j\omega \vec{H}) = -j\omega \nabla \times \vec{H}. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.15) em (2.19), chega-se a

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (2.20)$$

com  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

Considere que as fronteiras do domínio são divididas em  $\Gamma_g$  e  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_n$ , sendo  $\Gamma_n$  a fronteira onde são impostas as condições de contorno mistas ou de terceiro tipo. Em  $\Gamma_g$ , considera-se um condutor elétricos perfeito:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.21)$$

e em  $\Gamma_n$  aplica-se uma condição de contorno de terceiro tipo [Lima, 2016]

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (2.22)$$

onde  $\gamma_e$  é um parâmetro da condição de contorno de terceiro tipo que depende da frequência e da dimensão física do meio onde o campo eletromagnético se propaga.

### Forma forte

A apresentação do problema é feita inicialmente, utilizando-se a forma tradicional das equações diferenciais, forma forte, o que significa que estas equações devem ser satisfeitas pontualmente, ou seja, a solução do problema consiste em satisfazer estas equações, para qualquer ponto  $(x,y)$  do domínio. Então, dados  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\omega$ ,  $\gamma_e$  e  $\vec{U}$  determinar o campo elétrico  $\vec{E}$  que satisfaça:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.23a)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (2.23b)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (2.23c)$$

com as condições de interface  $\vec{E}_1 \times \vec{n} = \vec{E}_2 \times \vec{n}$  e  $\vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{H}_2 \times \vec{n}$ .

### Forma fraca

Para obter a forma fraca do problema utiliza-se o método dos resíduos ponderados. Suponha uma função de teste  $\vec{W}_t \in H_o(\text{curl}, \Omega)$ , com  $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$  em  $\Gamma_g$ . O resíduo da equação (2.23a) ponderado pela função de teste é anulado no sentido integral, então para todo  $\vec{W}_t$ , tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) que pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0. \quad (2.25)$$

Do teorema de Green vetorial, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{W}_t \cdot \left( \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma=\partial\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.25), tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu_r} (\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} d\Gamma = 0. \quad (2.27)$$

Seja a identidade vetorial:

$$\vec{n} \cdot (\vec{W}_t \times \nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \vec{E} \cdot (\vec{n} \times \vec{W}_t) = -\vec{W}_t \cdot (\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}). \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.27) e considerando que  $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_n$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega - \int_{\Gamma_g} \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \cdot (\vec{n} \times \vec{W}_t) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\mu_r} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como  $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$  em  $\Gamma_g$ , a equação (2.29) resulta em

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega + \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\mu_r} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0. \quad (2.30)$$

Aplicando a condição de contorno (2.23c) em (2.30), chega-se a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega + \int_{\Gamma_n} (\vec{U} - \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0. \quad (2.31)$$

Logo, a forma fraca para o problema vetorial harmônico no tempo é escrita como:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega &- \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \\
 &- \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \vec{U} d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Quando trabalha-se com as equações de Maxwell na interface entre diferentes materiais, as funções utilizadas nas aproximações dos campos vetoriais ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) precisam ser definidas no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . Para observar essa característica, considere que o domínio  $\Omega$  consista de dois subdomínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  e a interface interna dada por  $\Gamma_{12}$ , como representado na Figura 2.1.

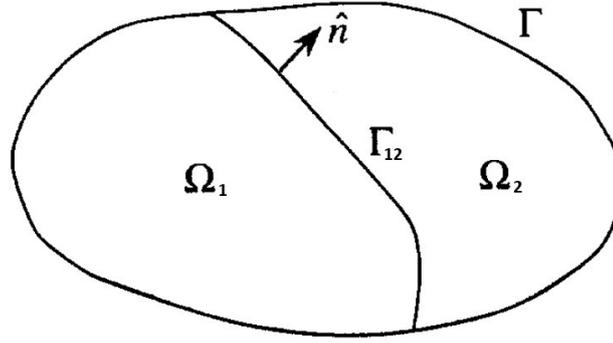


Figura 2.1: Um esboço ilustrativo da configuração do problema.

Definindo uma função  $u \in L^2(\Omega)$  como

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{se } x \in \Omega_1, \\ u_2 & \text{se } x \in \Omega_2. \end{cases} \tag{2.33}$$

Diz-se que  $u \in H(d; \Omega)$  se, e somente se

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1|_{\Gamma_{12}} = u_2|_{\Gamma_{12}} & \text{para } d = \text{grad}, \\ \hat{n} \times u_1|_{\Gamma_{12}} = \hat{n} \times u_2|_{\Gamma_{12}} & \text{para } d = \text{curl}, \\ \hat{n} \cdot u_1|_{\Gamma_{12}} = \hat{n} \cdot u_2|_{\Gamma_{12}} & \text{para } d = \text{div}. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Então para uma função em  $H(\text{curl}; \Omega)$ , sua componente tangencial deve ser contínuo através da interface e para uma função em  $H(\text{div}; \Omega)$ , sua componente normal deve ser contínua. Daí vem a importância da teoria dos espaços de Sobolev, utilizada como ferramenta para solução numérica das equações Maxwell. Pois, na interface entre diferentes materiais, pode-se garantir as seguintes propriedades.

Os campos vetoriais  $(\vec{E}, \vec{H})$  pertencem a  $H(\text{curl}; \Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Enquanto o fluxo  $(\vec{D}, \vec{B})$  em  $H(\text{div}; \Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0, \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Esses conceitos são essenciais para construção dos espaços das funções de forma baseados na família de elementos de primeiro tipo de Nédélec, conforme no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ .

# Capítulo 3

## Método sem Malha de Aresta

### 3.1 Introdução

O método sem malha de aresta, inicialmente proposto em [Lima and Mesquita, 2014] e desenvolvido em [Lima and Mesquita, 2017a], é uma alternativa para resolver problemas vetoriais cuja condição do divergente nulo precisa ser assegurada. O método propõe construir as funções de forma vetoriais com base em arestas ao invés de nós. As funções de forma são obtidas forçando que a circulação do campo seja satisfeita em cada aresta de suporte e, assim, a imposição das condições de contorno e das condições de interface entre diferentes materiais é feita de maneira simplificada.

Este capítulo apresenta a formulação matemática do método sem malha de aresta, publicada originalmente no trabalho [Lima and Mesquita, 2014] e propõe procedimentos para seleção de arestas de suporte, dentre um conjunto de arestas disponíveis, de forma a evitar problemas de singularidade da matriz responsável pela formação das funções de forma do método. Por fim, apresenta-se o desenvolvimento matemático para construção das novas funções de forma, baseado no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . Para testar as funções de forma, trabalhamos com problemas no espaço bidimensional e com a ordem dos polinômios igual a 1. Contudo, o interessante em utilizar estas funções de forma no EMM é a capacidade de trabalharmos no espaço n-dimensional e a possibilidade de adicionarmos mais arestas ao domínio de suporte, desde que se utilizem outros espaços de polinômios.

## 3.2 Elementos Finitos de Arestas

A ideia de utilizar elementos de aresta com graus de liberdade associados às arestas e não aos nós, foi originalmente desenvolvida para os métodos de elementos finitos. Isso faz que as funções de forma possuam funções de base vetoriais. Considere o triângulo mostrado na Figura 3.1, onde os nós estão numerados de 1 a 3 e as arestas ( $e_{12}, e_{23}, e_{31}$ ) são orientadas conforme as setas.

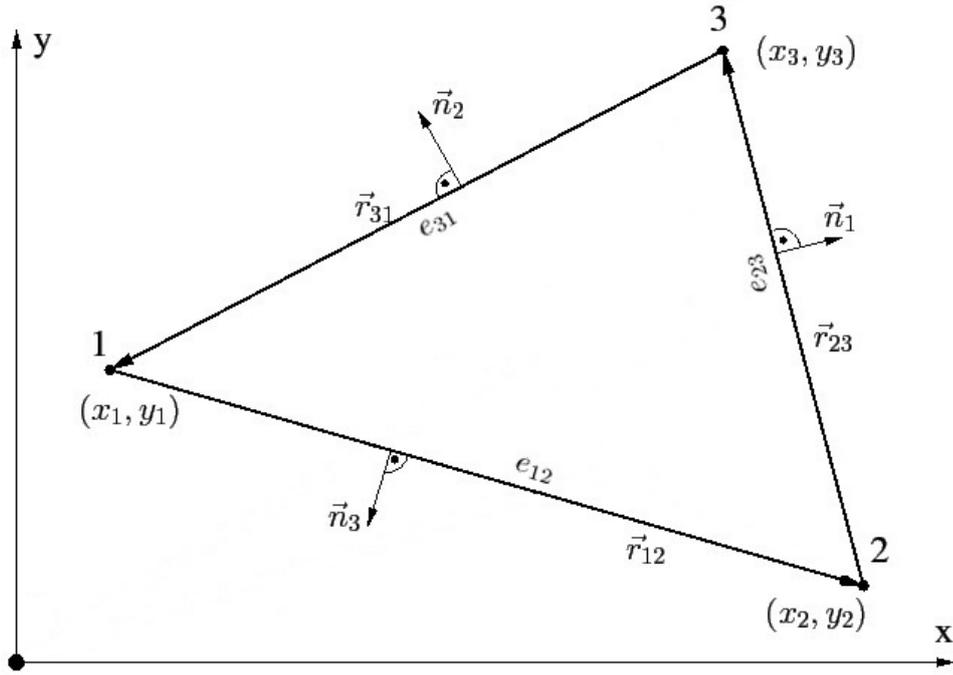


Figura 3.1: Triângulo representando um elemento de aresta.

Sejam  $\lambda_1^e$ ,  $\lambda_2^e$  e  $\lambda_3^e$  funções de forma nodais do FEM relativas aos nós 1, 2 e 3, respectivamente. As funções vetoriais das arestas são:

$$\vec{N}_{12}^e = l_{12}(\lambda_1^e \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e \nabla \lambda_1^e) \quad (3.1)$$

$$\vec{N}_{23}^e = l_{23}(\lambda_2^e \nabla \lambda_3^e - \lambda_3^e \nabla \lambda_2^e) \quad (3.2)$$

$$\vec{N}_{31}^e = l_{31}(\lambda_3^e \nabla \lambda_1^e - \lambda_1^e \nabla \lambda_3^e) \quad (3.3)$$

onde  $l_{12}, l_{23}$  e  $l_{31}$  são os comprimentos das respectivas arestas.

Sem perda de generalidade, usaremos a aresta  $e_{12}$  para provar algumas propriedades das funções de aresta. Analisando o rotacional da função de forma de aresta, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \vec{N}_{12}^e &= \nabla \times (\lambda_1^e \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e \nabla \lambda_1^e) \\
 &= [\nabla \times (\nabla \lambda_1^e \times \nabla \lambda_2^e) - \nabla \times (\nabla \lambda_2^e \times \nabla \lambda_1^e)] l_{12} \\
 &= [\lambda_1^e \nabla \times \nabla \lambda_2^e - \nabla \lambda_2^e \times \nabla \lambda_1^e - (\lambda_2^e \nabla \times \nabla \lambda_1^e - \nabla \lambda_1^e \times \nabla \lambda_2^e)] l_{12} \\
 &= (\nabla \lambda_1^e \times \nabla \lambda_2^e + \nabla \lambda_1^e \times \nabla \lambda_2^e) l_{12} \\
 &= 2l_{12}(\nabla \lambda_1^e \times \nabla \lambda_2^e), \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

isto é, dentro de cada elemento o rotacional da função de aresta é um vetor constante.

A componente tangencial de  $\vec{N}_{12}^e$  na aresta  $e_{23}$  pode ser obtida a partir de:

$$\vec{N}_{12}^e \cdot \frac{\vec{r}_{23}}{l_{12}} = (\lambda_1^e \vec{r}_{23}) \cdot \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e (\vec{r}_{23} \cdot \nabla \lambda_1^e). \tag{3.5}$$

Como  $\lambda_1^e$  anula-se na aresta  $e_{23}$  e  $\nabla \lambda_1^e$  é perpendicular  $\vec{r}_{23}$ , os dois termos no lado direito da equação (3.5) são nulos e  $\vec{N}_{12}^e$  não possui qualquer componente tangencial na aresta  $e_{23}$ :

$$\vec{N}_{12}^e \cdot \frac{\vec{r}_{23}}{l_{12}} = 0. \tag{3.6}$$

Analogamente, pode ser mostrado que  $\vec{N}_{12}^e$  não tem nenhuma componente tangencial na aresta  $e_{31}$ . Para  $\vec{N}_{12}^e$  ao longo da direção da aresta  $e_{12}$  a seguinte expressão é aplicada:

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_{12}^e \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{l_{12}} &= \lambda_1^e \vec{r}_{12} \cdot \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e \vec{r}_{12} \cdot \nabla \lambda_1^e \\
 &= -\lambda_1^e \vec{r}_{12} \cdot \frac{\vec{r}_{31} \times \hat{z}}{J} + \lambda_2^e \vec{r}_{12} \cdot \frac{\vec{r}_{23} \times \hat{z}}{J} \\
 &= -\lambda_1^e \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{31}}{J} \cdot \hat{z} + \lambda_2^e \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{r}_{23}}{J} \cdot \hat{z} \\
 &= \lambda_1^e + \lambda_2^e, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana.

Como  $\lambda_3^e$  é nulo na aresta  $e_{12}$ ,  $\lambda_1^e + \lambda_2^e$  é igual a 1 na aresta. Logo, a componente tangencial de  $\vec{N}_{12}^e$  na aresta  $e_{12}$  é igual a 1. A função vetorial  $\vec{N}_{12}^e$  tem uma componente tangencial constante  $\lambda_1^e + \lambda_2^e$  apenas ao longo da correspondente aresta  $e_{12}$ . Ao longo das arestas restantes esta função não tem componente tangencial. Essas características também se aplicam às outras funções de forma  $\vec{N}_{23}^e$  e  $\vec{N}_{31}^e$ . Daí temos que o campo vetorial  $\vec{u}(r)$  dentro de um elemento é aproximado por:

$$\vec{u}^h(r) = c_1 \vec{N}_{12}^e + c_2 \vec{N}_{23}^e + c_3 \vec{N}_{31}^e \quad (3.8)$$

onde os coeficientes arbitrárias  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  devem ser considerados como valores da projeção de  $\vec{u}^h(r)$  nas possíveis direções das respectivas arestas. Esse fato justifica o nome “função de aresta” ou “elemento de aresta”. A Figura 3.2a apresenta a função de forma  $\vec{N}_{12}^e$ . Veja que existem componentes tangenciais apenas ao longo da aresta  $e_{12}$ . A Figura 3.2b representa graficamente a soma vetorial das funções de forma  $\vec{N}_{12}^e$ ,  $\vec{N}_{23}^e$  e  $\vec{N}_{31}^e$ .

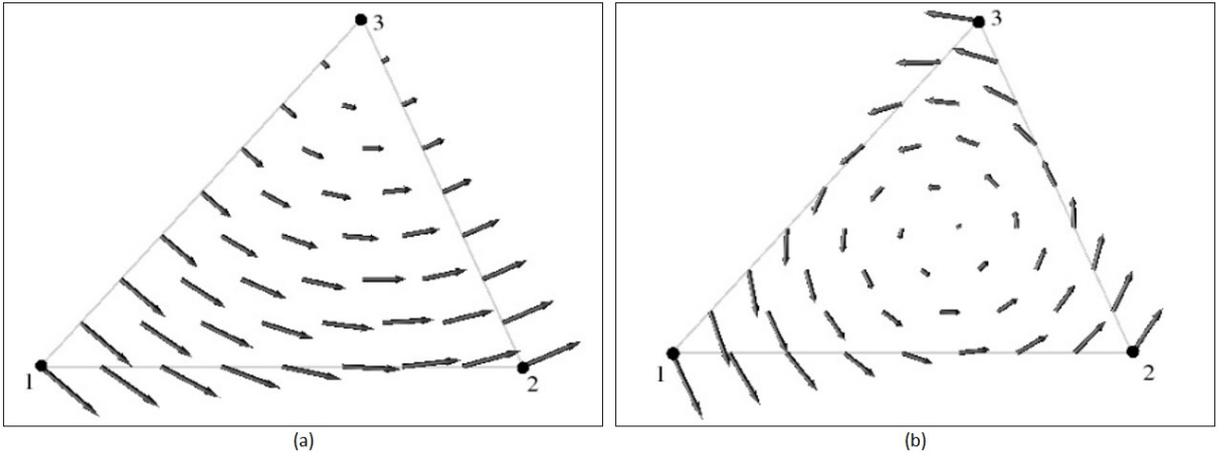


Figura 3.2: (a) Função de forma ao longo da aresta  $e_{12}$ . (b) Soma das funções de forma do triângulo.

Fonte: [Nentchev, 2008]

Com relação ao divergente da função de forma de aresta, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\vec{N}_{12}^e}{l_{12}} &= \nabla \cdot (\lambda_1^e \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e \nabla \lambda_1^e) \\ &= \nabla \cdot (\lambda_1^e \nabla \lambda_2^e) - \nabla \cdot (\lambda_2^e \nabla \lambda_1^e) \\ &= \nabla \lambda_2^e \cdot \nabla \lambda_1^e + \lambda_1^e \nabla \cdot \nabla \lambda_2^e - (\nabla \lambda_1^e \cdot \nabla \lambda_2^e + \lambda_2^e \nabla \cdot \nabla \lambda_1^e) \\ &= \nabla \lambda_1^e \cdot \nabla \lambda_2^e + \lambda_1^e \nabla^2 \lambda_2^e - \nabla \lambda_1^e \cdot \nabla \lambda_2^e - \lambda_2^e \nabla^2 \lambda_1^e \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde o Laplaciano das funções nodais é nulo, pois o gradiente das funções nodais é constante dentro do elemento. Logo, dentro de cada elemento o divergente da função de aresta é nulo e, conseqüentemente, este tipo de função é capaz de produzir campos vetoriais para os quais a condição do divergente nulo é atendida.

### 3.3 Método sem Malha de Aresta

Dado um campo vetorial  $\vec{u}$  definido em um certo domínio  $\Omega$ , deseja-se aproximá-lo por uma função  $\vec{u}^h$ . Para isto, um conjunto de arestas é distribuído no interior e na fronteira de  $\Omega$ , conforme a Figura 3.3.

O campo no ponto  $\mathbf{x}$  é aproximado por um conjunto de arestas na vizinhança de  $\mathbf{x}$ , chamadas de arestas de suporte. Ao conjunto de arestas dá-se o nome de domínio de suporte de  $\mathbf{x}$ . A aproximação  $\vec{u}^h$  do campo  $\vec{u}$  em um ponto  $\mathbf{x}$  é realizada como:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + [\hat{x} \ \hat{y}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde  $\hat{t}_i$  é o vetor unitário na direção da  $i$ -ésima aresta no domínio de suporte de  $\mathbf{x}$ ,  $n$  é o número total de arestas no domínio de suporte,  $a_i$  é o coeficiente de interpolação da função  $W_i$  associada à  $i$ -ésima aresta do domínio de suporte,  $b_1$  e  $b_2$  são coeficientes de interpolação associados aos vetores canônicos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , respectivamente.

A aproximação  $\vec{u}^h$  utiliza dois termos, o primeiro refere-se à contribuição de cada aresta de suporte na aproximação vetorial, o segundo termo se faz necessário para capacitar a aproximação a reproduzir campos vetoriais constantes. No primeiro termo,  $W_i$  é a função de suporte de aresta  $e_i$  que determina o quanto a aresta contribui na aproximação gerada do campo vetorial. Com objetivo de analisar as características de  $W_i$  e de garantir que a aproximação  $\vec{u}^h$  tenha divergente nulo, calcula-se o divergente da equação (3.10):

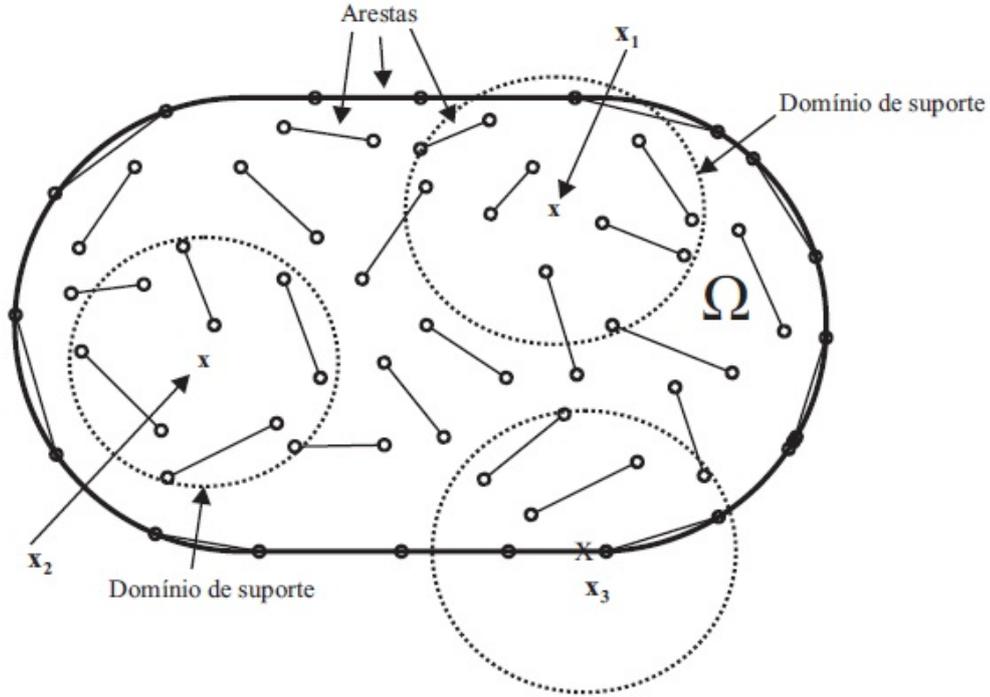


Figura 3.3: Arestas distribuídas pelo domínio e sua fronteira. Os círculos centrados nos pontos  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  representam os domínios de suporte. As extremidades das arestas estão representadas por pequenos círculos para facilitar a visualização.

Fonte: [Lima, 2016]

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{u}^h &= \nabla \cdot \sum_{i=1}^n W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + \nabla \cdot [\hat{x} \ \hat{y}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \nabla \cdot [\hat{x} \ \hat{y}] \\
 &= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

O termo referente ao segundo somatório foi anulado em virtude dos vetores  $[\hat{x} \ \hat{y}]$  serem constantes. Da equação (3.11), tem-se que

$$\nabla \cdot (W_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) = 0. \tag{3.12}$$

Através de algumas manipulações vetoriais, podemos escrever (3.12) como:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (W_i(\mathbf{x})\hat{t}_i) &= W_i(\mathbf{x})\nabla \cdot \hat{t}_i + \hat{t}_i \cdot \nabla W_i(\mathbf{x}) \\ &= \hat{t}_i \cdot \nabla W_i(\mathbf{x}) = 0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

ou seja, o gradiente da função  $W_i$  deve ser ortogonal ao vetor  $\hat{t}_i$ . Para isso, podemos especificar  $W_i$  de modo que varie apenas na direção ortogonal à aresta, por exemplo, que  $W_i$  seja uma função da distância ortogonal  $d_i$  entre o ponto  $x$  e a aresta  $e_i$ , isto é:

$$W_i(\mathbf{x}) = f(d_i(\mathbf{x})).\tag{3.14}$$

Dessa forma, a condição de divergente nulo é satisfeita.

Várias funções de suporte  $W_i$  podem ser utilizadas na aproximação  $\vec{u}^h$ . Uma versão interessante de  $W_i$  é a função linear em relação à distância  $d_i$ :

$$W_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i},\tag{3.15}$$

onde  $dw_i$  é o parâmetro que controla o alcance de  $W_i$ , podendo ser visto como uma espécie de raio de influência da aresta  $e_i$ . Na Figura 3.4 tem-se o gráfico da função  $W_i$  linear, considerando a aresta com pontos extremos  $(-10; 0)$  e  $(10; 0)$ .

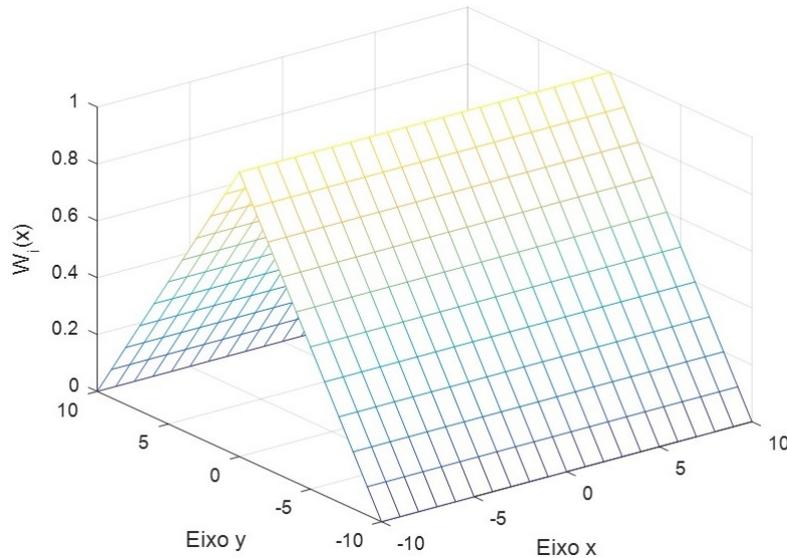


Figura 3.4: Função  $W$  linear contida nas funções de forma vetoriais de aresta.

A equação (3.10) pode ser escrita na forma matricial, como:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T\mathbf{b}, \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) &= [W_1(\mathbf{x})\hat{t}_1, W_2(\mathbf{x})\hat{t}_2, \dots, W_n(\mathbf{x})\hat{t}_n] \\ \mathbf{C}_u^T &= [\hat{x} \ \hat{y}] \\ \mathbf{a} &= [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \\ \mathbf{b} &= [b_1 \ b_2]^T. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os coeficientes  $a_i$  e  $b_j$  na equação (3.16) são determinados fazendo com que a circulação do campo  $\vec{u}$  seja satisfeita sobre cada aresta  $e_k$  do domínio de suporte de  $\mathbf{x}$ . Para cada aresta  $e_k$ , temos:

$$\int_{e_k} \vec{u} \cdot \vec{dl} = \int_{e_k} \vec{u}^h \cdot \vec{dl}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.16) em (3.18), obtém-se

$$\int_{e_k} (\mathbf{B}_u^T(x)\mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T\mathbf{b}) \cdot \vec{dl} = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.19)$$

onde  $c_k$  é a circulação do campo  $\vec{u}$  sobre a aresta  $e_k$ . A equação (3.19) pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{B}_Q\mathbf{a} + \mathbf{C}_Q\mathbf{b} = \mathbf{c}_s, \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{c}_s$  é um vetor que contém as circulações  $c_k$  sobre as  $n$  arestas do domínio de suporte,  $\mathbf{B}_Q$  e  $\mathbf{C}_Q$  são dados por:

$$\mathbf{B}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} W_1\hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_1} W_n\hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} W_1\hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_2} W_n\hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_n} W_1\hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_n} W_n\hat{t}_n \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} \hat{x} \cdot \vec{dl} & \int_{e_1} \hat{y} \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} \hat{x} \cdot \vec{dl} & \int_{e_2} \hat{y} \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \vdots \\ \int_{e_n} \hat{x} \cdot \vec{dl} & \int_{e_n} \hat{y} \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

O sistema de equações (3.20) possui  $n$  equações e  $n + 2$  incógnitas e, portanto, não possui solução única. Uma forma de tornar o sistema possível e determinado é impor a seguinte restrição [Lima and Mesquita, 2017a]:

$$\mathbf{C}_Q^T \mathbf{a} = 0. \quad (3.22)$$

Multiplicando (3.20) por  $B_Q^{-1}$ , após algumas manipulações matemáticas chega-se a:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{c}_s - \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{C}_Q \mathbf{b}. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.23) em (3.22), tem-se:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{c}_s, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{S}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{B}_Q]^{-1} \mathbf{C}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1}. \quad (3.25)$$

Substituindo (3.24) em (3.23), tem-se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{c}_s, \quad (3.26)$$

onde

$$\mathbf{S}_a = [\mathbf{S}_Q^{-1} [1 - \mathbf{C}_Q \mathbf{S}_b]]. \quad (3.27)$$

Combinando (3.26) e (3.24) com (3.16), a aproximação  $\vec{u}^h$  pode ser escrita como:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_i^n \vec{\phi}_i(\mathbf{x}) c_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_s, \quad (3.28)$$

onde  $\vec{\phi}_i$  corresponde à função de forma vetorial da  $i$ -ésima aresta do domínio de suporte e  $\Phi(\mathbf{x})$  representa a matrix das funções de forma vetoriais de cada aresta do domínio de suporte:

$$\Phi(x) = [\vec{\phi}_1(\mathbf{x}), \vec{\phi}_2(\mathbf{x}), \dots, \vec{\phi}_n(\mathbf{x})], \quad (3.29)$$

dada por

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T\mathbf{S}_b. \quad (3.30)$$

Aplicando o operador rotacional na aproximação  $\vec{u}^h$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{u}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \times \Phi(\mathbf{x})\mathbf{c}_s \\ &= [\nabla \times \Phi(\mathbf{x})]\mathbf{c}_s, \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pela equação (3.31), verifica-se a necessidade de encontrar o rotacional da matrix  $\Phi$ , referente às funções de forma. Tomando o rotacional na equação (3.30):

$$\begin{aligned} \nabla \times \Phi(\mathbf{x}) &= \nabla \times (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T\mathbf{S}_b) \\ &= \nabla \times (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a) \\ &= [\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})]\mathbf{S}_a, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla \times W_1(\mathbf{x})\hat{t}_1, \nabla \times W_2(\mathbf{x})\hat{t}_2, \dots, \nabla \times W_n(\mathbf{x})\hat{t}_n]. \quad (3.33)$$

Das identidades vetoriais, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \times (W_i\hat{t}_i) &= (\nabla W_i) \times \hat{t}_i + W_i(\nabla \times \hat{t}_i) \\ &= (\nabla W_i) \times \hat{t}_i, \end{aligned} \quad (3.34)$$

como  $\hat{t}_i$  é constante,  $\nabla \times \hat{t}_i = 0$ . Aplicando (3.34) para cada termo da equação (3.33), obtém-se a seguinte relação

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla W_1(\mathbf{x}) \times \hat{t}_1, \nabla W_2(\mathbf{x}) \times \hat{t}_2, \dots, \nabla W_n(\mathbf{x}) \times \hat{t}_n]. \quad (3.35)$$

Logo o rotacional da função de forma de uma aresta é calculado como o produto vetorial entre o gradiente da função  $W_i$  e o vetor diretor da aresta, multiplicado pela matriz  $S_a$ .

Por construção, as funções de forma da equação (3.28) têm divergente nulo. Outra característica importante é que, como a circulação do campo vetorial é satisfeita sobre cada aresta do domínio, as condições de interface entre diferentes materiais e de contorno essenciais são facilmente impostas mediante distribuição das arestas sobre as fronteiras de Dirichlet. Numericamente, mostra-se que a circulação das funções de forma sobre as outras arestas do domínio de suporte é nula [Lima, 2016].

Essas funções de forma podem ser utilizadas para discretizar a forma fraca de problemas vetoriais harmônicos no tempo, como, por exemplo, problemas de propagação ou de espalhamento de ondas eletromagnéticas, ou a determinação das frequências de ressonância de cavidades.

### 3.4 Procedimentos de Seleção das Arestas

Nesta seção, serão realizados estudos mais aprofundados a respeito do impacto da seleção das arestas de suporte na solução e problemas de não compatibilidade das funções de forma. Neste sentido, apresenta-se um procedimento para seleção das arestas de suporte, dentre um conjunto de arestas disponíveis, de forma a evitar singularidade da matriz de momentos,  $B_Q$ , das funções de forma do EMM. Nos trabalhos anteriores a seleção era feita com base nas arestas de malhas triangulares ou retangulares, sendo que o número de arestas utilizadas no domínio de suporte era 3 ou 4. Usando esse procedimento, os resultados numéricos mostraram que o EMM produz soluções em concordância com as soluções analíticas, livres de modos espúrios, e que atendem a condição do divergente nulo [Lima and Mesquita, 2017a]. Porém, verificou-se que o número de arestas utilizadas na construção das funções de forma impacta diretamente a qualidade da aproximação numérica do EMM. Ou seja, quando aumentamos o número de arestas no domínio de suporte, surgem resultados errôneos e, em alguns casos, não há possibilidade de construir as funções de forma devido a problemas de singularidade na matriz de momentos.

O procedimento de seleção das arestas, proposto neste trabalho, é escolher as novas arestas de suporte, depois de verificar quais delas contêm o ponto  $\mathbf{x}$  em seus domínios de influência. O procedimento é bastante simples:

1-passo um: As três primeiras arestas de suporte são selecionadas da mesma forma que nos trabalhos anteriores [Lima and Mesquita, 2017a, Lima, 2016], ou seja, selecionam-se as 3 arestas do elemento triangular cujo ponto  $\mathbf{x}$  esteja no seu interior.

2-passo dois: Para acrescentar mais arestas ao domínio de suporte, além das três arestas previamente selecionadas, é preciso levar em consideração a distância ortogonal  $d_i$  entre o ponto  $\mathbf{x}$  e a aresta  $e_i$ . Então, umas das formas de verificar se a aresta  $e_i$  contém o ponto  $\mathbf{x}$  em seu domínio de influência é traçar retângulos sobre as arestas do domínio e verificar se o ponto  $\mathbf{x}$  encontra-se no interior destes retângulos, conforme a Figura 3.5.  $A_i$  é o parâmetro que controla o domínio de influência da aresta  $e_i$ .

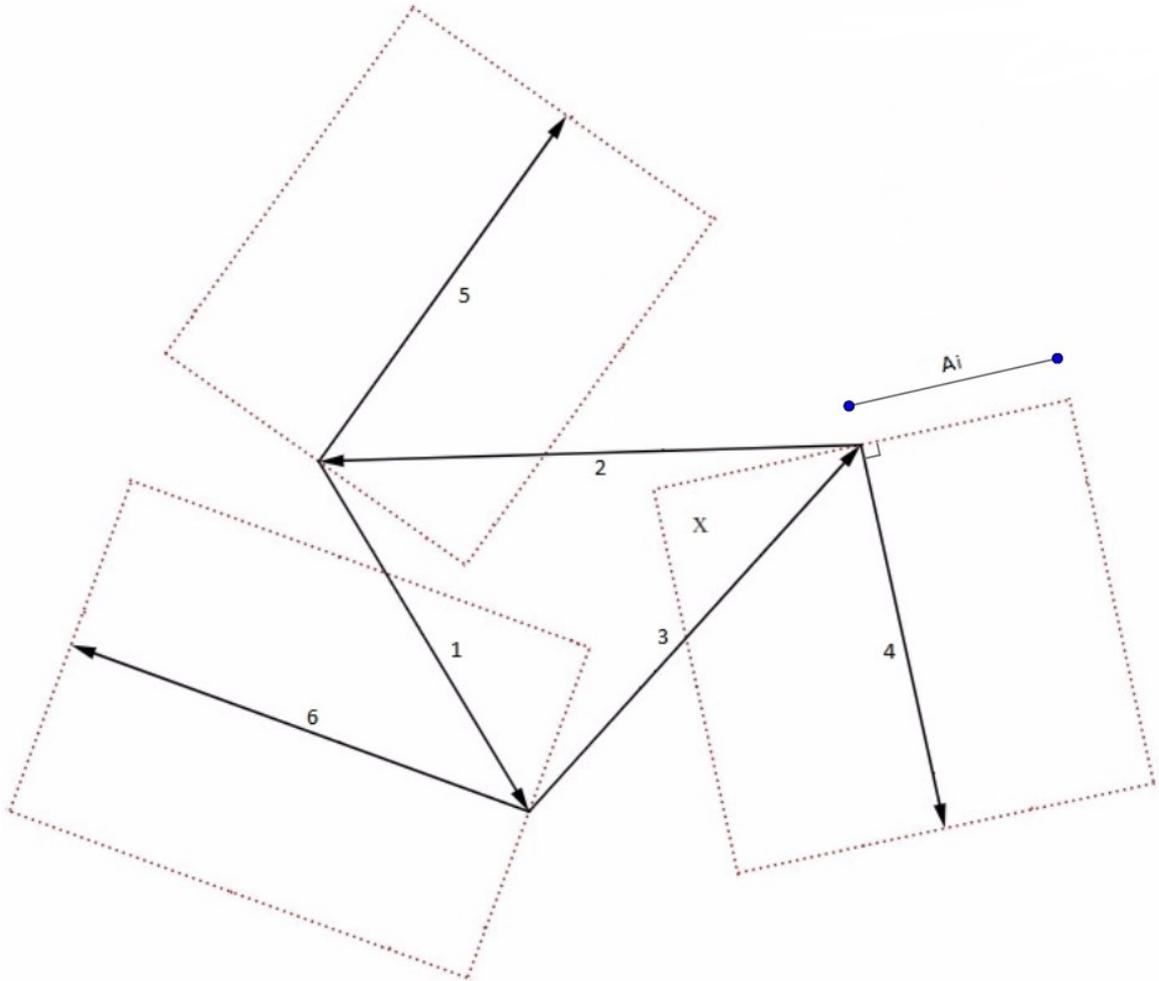


Figura 3.5: Procedimento de seleção das arestas do domínio de suporte. Observa-se que as arestas  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  e  $e_4$  fazem parte do domínio de suporte do ponto  $\mathbf{x}$ .

Seguindo o procedimento representado na Figura 3.5, consegue-se gerar as funções de forma evitando singularidade da matriz de momentos. Porém, os testes numéricos

realizados neste trabalho constataram que os modos espúrios ainda aparecem na solução do problema de autovalor. Os resultados serão apresentados no capítulo 4 onde serão discutidas as simulações computacionais.

Acredita-se que a razão para que soluções espúrias estejam presentes com escolhas diferentes de arestas de suporte esteja vinculada a não se estar trabalhando com o espaço de aproximações correto. De fato, a única premissa adotada para construir as funções de forma foi fazer seu divergente igual a zero e forçar a sua continuidade tangencial sobre as arestas. Várias funções de forma diferentes poderiam ter sido escolhidas com essas características, mas essas não necessariamente estariam gerando um espaço de funções adequado para realizar a aproximação da função vetorial. Para solucionar esta questão é que propomos neste trabalho a busca pelo espaço de aproximação adequado, baseado na teoria dos espaços  $H(\text{curl}; \Omega)$  que será apresentada na próxima seção.

### 3.5 Funções de Forma Vetoriais $H(\text{curl})$

O objetivo desta seção é desenvolver as funções de forma para o Método sem Malha de Aresta, baseando-se no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . A base deste trabalho é a mesma do elemento de Nédélec de primeira ordem para o espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  e pode ser encontrada em [Schneebeli, 2003, Nédélec, 1980].

Seja  $\Omega$  um domínio Lipschitziano, aberto e limitado com uma fronteira regular  $\partial\Omega$ . Sabe-se que os espaços de Sobolev  $\mathbf{H}^s(\Omega)$  para qualquer  $s \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{H}^t(\partial\Omega)$  para  $t \in [-1, 1]$  são definidos no domínio  $\Omega$  e na sua fronteira  $\partial\Omega$ , respectivamente [Buffa et al., 2002]. Para  $d = 2, 3$  escrevemos  $\tilde{d} = 1$  se  $d = 2$  ou  $\tilde{d} = 3$  se  $d = 3$ , define-se o espaço das funções vetoriais  $H(\text{curl}; \Omega)$  como:

$$H(\text{curl}; \Omega) = \left\{ \zeta \in (L^2(\Omega))^d; \text{curl}\zeta \in (L^2(\Omega))^{\tilde{d}} \right\}, \quad (3.36)$$

onde  $L^2(\Omega)$  é o espaço de Hilbert de funções de quadrado integrável.

É necessário, inicialmente, definir alguns espaços de polinômios, começando por  $\mathbb{P}_k$ , espaço de polinômios de grau  $k$ , que é a imagem dos monômios de grau total igual a  $k$  em  $d$  variáveis. Define-se, também, o espaço auxiliar:

$$\mathcal{S}^k = \left\{ \mathbf{p} \in (\mathbb{P}_k)^d : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = 0 = \sum_{i=1}^d p_i x_i = 0 \right\}, \quad (3.37)$$

onde a dimensão desse espaço é igual a  $k$ , quando  $d = 2$  e  $k(k+2)$  para  $d = 3$  [Schneebeli, 2003].

A família de elementos de primeiro tipo de Nédélec, conforme no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  é baseada nos espaços polinomiais:

$$\mathcal{R}^k = (\mathbb{P}_{k-1})^d \oplus \mathcal{S}^k \quad (3.38)$$

Estes espaços polinomiais, originalmente propostos por Nédélec, são representados nas seguintes dimensões

$$\dim(\mathcal{R}^k) = k(k+2) \quad \text{para } d = 2,$$

$$\dim(\mathcal{R}^k) = \frac{(k+3)(k+2)k}{2} \quad \text{para } d = 3.$$

Como ilustração, considere o caso bidimensional e os espaços polinomiais de grau  $k = 1$  e  $k = 2$ . Então, a representação equivalente do espaço  $\mathcal{R}^k$ , representada pela equação (3.38), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right\} \quad (3.39)$$

e

$$\mathcal{R}^2 = (\mathbb{P}_1)^2 \oplus \left\{ \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.40)$$

Dado um campo vetorial aproximado por  $\vec{u}^h$  e definido em um certo domínio  $\Omega$ , um conjunto de arestas é então distribuído no interior e na fronteira de  $\Omega$ , conforme a Figura 3.3. A aproximação do campo vetorial  $\vec{u}$  em um ponto  $\mathbf{x}$  é realizada por

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i(\mathbf{x}) c_i \quad (3.41)$$

onde  $\vec{N}_i$  é a função vetorial da  $i$ -ésima aresta que determina como a aresta contribui na aproximação gerada do campo vetorial e  $c_i$  representa o coeficiente associado à  $i$ -ésima aresta, cujo significado físico é a componente tangencial de  $\vec{u}$  ao longo da aresta  $e_i$ .

Os problemas analisados neste trabalho são bidimensionais ( $d = 2$ ) e considera-se o espaço polinomial de grau  $k = 1$ . Então, a função de forma  $\vec{N}_i$  relacionada à  $i$ -ésima aresta do domínio de suporte é baseada no espaço  $\mathcal{R}^1$ , cuja base é dada pela equação (3.39), tendo portanto, a seguinte expressão:

$$\vec{N}_i = \alpha_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde  $\alpha_{1i}$ ,  $\alpha_{2i}$  e  $\alpha_{3i}$  são os coeficientes a serem obtidos para garantir que as funções de forma vetoriais tenham componentes tangenciais apenas ao longo da aresta correspondente.

Para determinar os coeficientes das funções de forma (3.42), utilizam-se 3 arestas no domínio de suporte. Para garantir que as funções de forma vetoriais  $\vec{N}_i$  tenham componentes tangenciais apenas ao longo da aresta  $e_i$ , as seguintes relações precisam ser satisfeitas:

$$\begin{cases} \int_{e_i} \vec{N}_j \cdot \vec{t}_i dl = 1 & \text{se } j = i \\ \int_{e_i} \vec{N}_j \cdot \vec{t}_i dl = 0 & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad (3.43)$$

onde  $t_i$  é o vetor unitário na direção da aresta  $e_i$ .

Para  $\vec{N}_1$ , tem-se:

$$\begin{cases} \int_{e_1} \vec{N}_1 \cdot \vec{t}_1 dl = 1 \\ \int_{e_2} \vec{N}_1 \cdot \vec{t}_2 dl = 0 \\ \int_{e_3} \vec{N}_1 \cdot \vec{t}_3 dl = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x} - xt_{1y})dl \\ t_{2x} & t_{2y} & \int_{e_2} (yt_{2x} - xt_{2y})dl \\ t_{3x} & t_{3y} & \int_{e_3} (yt_{3x} - xt_{3y})dl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

onde os elementos da primeira e segunda coluna do sistema são as componentes dos vetores unitários associados às respectivas arestas e  $l_1$  é o comprimento da aresta  $e_1$ .

Solucionando o sistema de equações (3.45), determinam-se os parâmetros da função de forma  $\vec{N}_1$ . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para encontrar os parâmetros de  $\vec{N}_2$  e  $\vec{N}_3$ .

Para três arestas no domínio de suporte, a aproximação (3.41) pode ser expressa como:

$$\vec{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i(\mathbf{x})c_i = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{c} \quad (3.46)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{x}) = [\vec{N}_1 \quad \vec{N}_2 \quad \vec{N}_3] \quad e \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Para ilustrar graficamente as funções de forma geradas, considere o caso em que três arestas arbitrárias ( $e_1, e_2, e_3$ ) são selecionadas para o domínio de suporte. As funções de forma correspondentes são representadas na Figura 3.6.

Pode-se utilizar essas novas funções de forma no EMM para solucionar alguns problemas eletromagnéticos, onde o divergente nulo imposto pelas equações de Maxwell precisa ser assegurado.

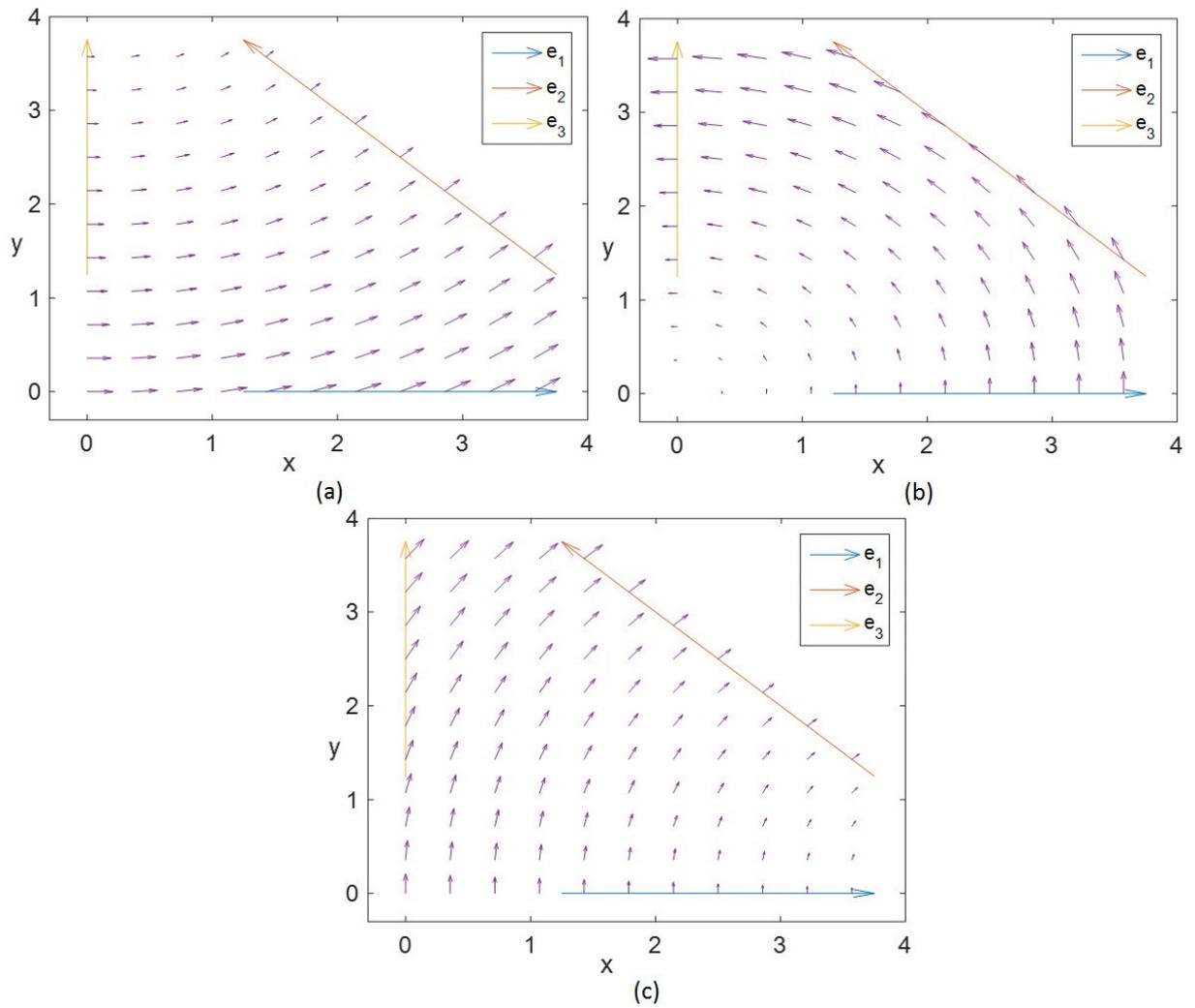


Figura 3.6: Funções de forma em  $H(\text{curl}; \Omega)$  com 3 arestas: (a)  $\vec{N}_1$ , (b)  $\vec{N}_2$  e (c)  $\vec{N}_3$

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos Computacionais

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a aplicação do EMM usando as funções de forma vetoriais  $H(\text{curl})$ . Em todos os exemplos foram utilizadas funções de forma vetoriais de primeira ordem pertencente  $\mathcal{R}^1$ , isto é, com 3 arestas no domínio de suporte. No entanto, entende-se que é possível gerar funções de forma utilizando um número maior de arestas no domínio de suporte, desde que se aumente a ordem dos espaços polinomiais. Deixamos a geração das aproximações utilizando um conjunto de arestas de suporte maior para desenvolvimentos futuros. Uma primeira tentativa, por exemplo, seria desenvolver as funções para todos os espaços polinomiais apresentados por [Nédélec, 1980, Nédélec, 1986]

Quanto à organização deste capítulo, primeiro verifica-se a capacidade da função de forma interpolar campos vetoriais. O segundo exemplo refere-se a um problema de cavidades ressonantes, cujo objetivo é determinar as frequências de corte em guia de onda que estão associados aos autovalores do problema. Por último, o método é utilizado para resolver um problema de propagação em guia de onda, onde estamos interessados em determinar o campo eletromagnético em uma dada frequência de propagação. Para os três exemplos, trabalhamos com problemas no espaço bidimensional e com a ordem dos polinômios igual a 1.

## 4.2 Interpolação de Campos Vetoriais

Nesta seção, a função de forma proposta é usada para verificar a capacidade de interpolar campos vetoriais. Para fins de verificação, será calculado o erro médio das aproximações sobre um conjunto fixo de  $m$  pontos no domínio, dado por:

$$erro = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\vec{u}(x_i) - \vec{u}^h(x_i)| \quad (4.1)$$

onde  $\vec{u}$  é o valor exato e  $\vec{u}^h$  é o valor aproximado do campo vetorial no ponto  $x_i$ .

O campo vetorial que será aproximado corresponde ao oitavo modo do campo elétrico em um guia de onda retangular, dado por:

$$\vec{u} = (2\pi^2 + 1)[\cos(\pi x)\text{sen}(\pi y)\vec{x} - \sin(\pi x)\cos(\pi y)\vec{y}]. \quad (4.2)$$

A interpolação é computada sobre os pontos distribuídos uniformemente no domínio  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ , cuja unidade dimensional da geometria é dada em metros. Como estamos trabalhando com problemas bidimensionais e considerando o espaço polinomial de grau  $k = 1$ , as funções de forma são representadas por (3.42) e com isso podemos utilizar 3 arestas no domínio de suporte. A distribuição das arestas no domínio de suporte é realizada de quatro maneiras diferentes. Como visto na Figura 4.1a, primeiro as arestas de suporte são selecionadas de acordo com as arestas de uma malha triangular, denominadas arestas de *background*. No segundo caso, o comprimento das arestas é reduzido em relação às arestas de *background*, conforme a Figura 4.1b, e no terceiro caso, aumenta-se o comprimento das arestas, conforme a Figura 4.1c. Por último, as arestas são rotacionadas no sentido anti-horário em torno do centro geométrico das respectivas arestas de *background*, de acordo com a Figura 4.1d. Seja  $l_i$  o comprimento das arestas de *background*,  $\mathbf{p}$  é o parâmetro pertencente  $\mathbb{R}_+$  que controla o comprimento das arestas de suporte, isto é,  $l_i$  multiplicado por  $\mathbf{p}$  é igual ao comprimento da respectiva aresta de suporte.

Primeiro as funções de forma são avaliadas em relação ao tamanho das arestas. A Figura 4.2 mostra um conjunto de 11869 arestas distribuídas pelo domínio e na fronteira do problema, onde (a) as arestas de suporte são iguais as arestas de *background*, (b) as arestas de suporte são 50% menores que as arestas de *background* e (c) tem-se arestas de suporte são 50% maiores que as arestas de *background*. Os erros médios dos campos elétricos aproximados são 0,5455, 0,5451 e 0,5464, respectivamente.

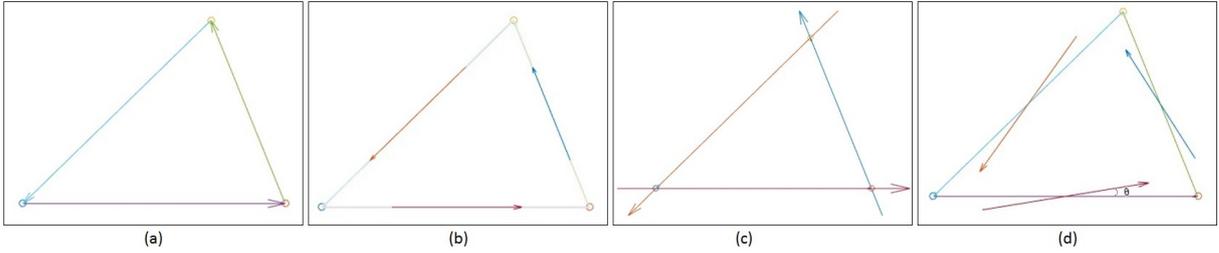


Figura 4.1: Distribuição das arestas no domínio de suporte, onde o comprimento das arestas é dado por  $(\mathbf{p} \times l_i)$ , para: **(a)**  $\mathbf{p} = 1$ , as arestas de suporte possuem o mesmo tamanho das arestas de background. **(b)**  $0 > \mathbf{p} < 1$ , menores que as arestas de background. **(c)**  $\mathbf{p} > 1$ , maiores que as arestas de background. Em **(d)** as arestas de suporte são rotacionadas  $\theta$  graus no sentido anti-horário em torno do seu centro geométrico.

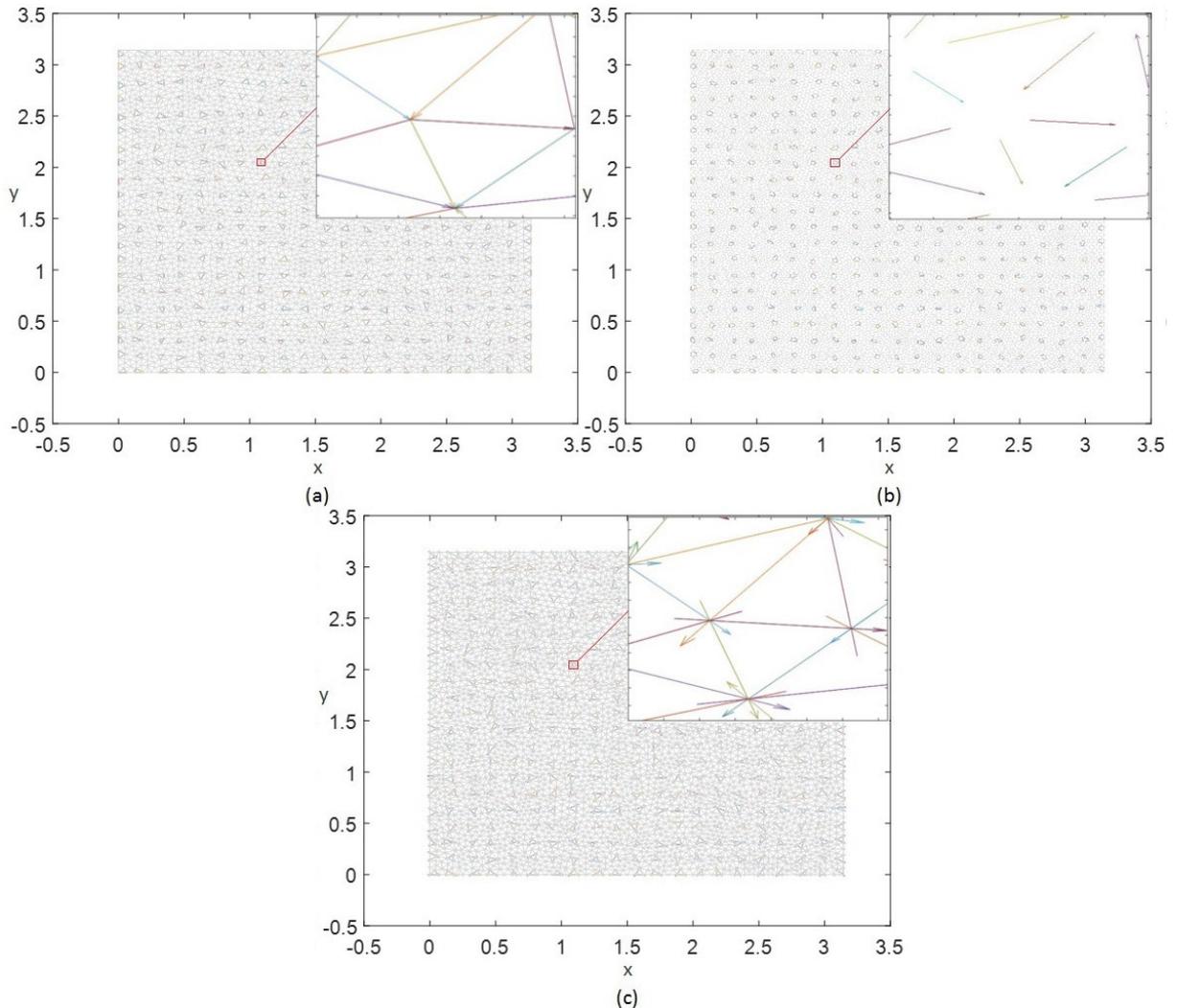


Figura 4.2: **(a)** Comprimento das arestas de suporte iguais as arestas de background. **(b)** Arestas de suporte 50% maiores que as arestas de background. **(c)** Arestas de suporte 50% maiores que as arestas de background.

O erro computado é praticamente igual para os três casos analisados e o campo elétrico aproximado é visualmente o mesmo, conforme apresentado na Figura 4.3a. É interessante observar o comportamento do erro à medida que o comprimento das arestas é reduzido. A Figura 4.3b apresenta o comportamento do erro quando o comprimento das arestas de suporte varia em relação às arestas de *background*. O erro para  $p = 1$ , isto é, para o comprimento das arestas de suporte igual ao das arestas de *background*, é 0,5455. O erro para  $p = 0,001$ , isto é, para o comprimento das arestas de suporte igual a 0,001 vezes o tamanho da arestas de *background*, é 0,54509. Veja que há pouca variação no erro quando modificamos o comprimento das arestas. Logo, pode-se inferir que o método é praticamente insensível à variação do tamanho das arestas.

Uma vez que o método mostrou-se bastante estável as variações do comprimento das arestas, podemos pensar no EMM trabalhando com pontos ao invés de arestas, mas ainda gerando aproximações vetoriais consistentes que satisfaçam a condição de divergente nulo e com componentes tangencias contínuas na interface entre diferentes materiais.

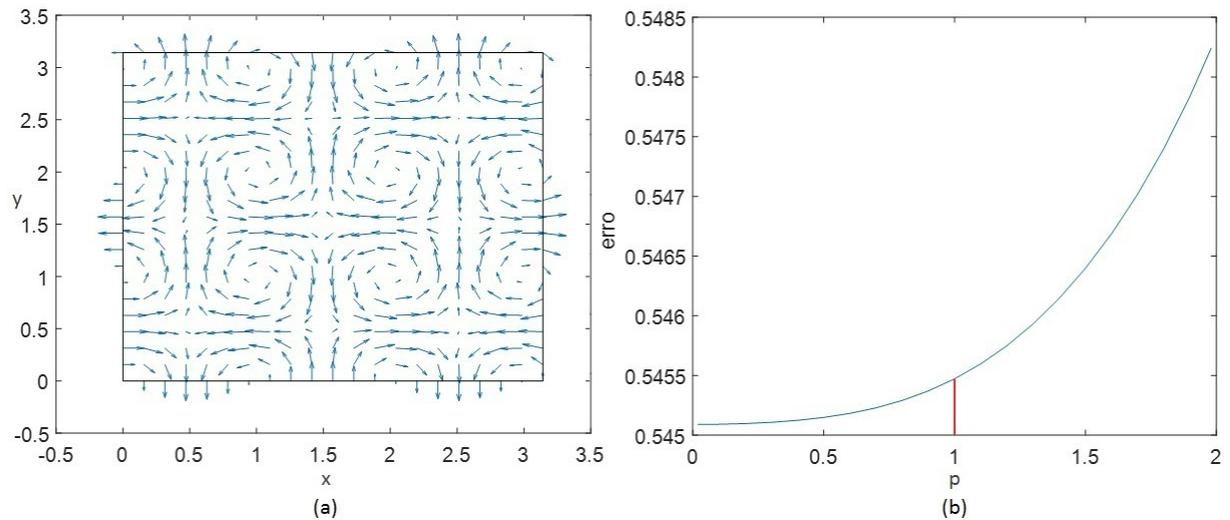


Figura 4.3: (a) Representação do campo elétrico aproximado. (b) Erro de aproximação vs. comprimento das arestas.

No último caso, Figura 4.4a, as arestas são rotacionadas  $30^\circ$  sobre o centro geométrico das arestas de *background*. A Figura 4.4b apresenta o campo elétrico aproximado, onde o erro médio é 0,5346.

Através de resultados numéricos constatamos que o erro de interpolação é muito sensível a rotação das arestas de suporte. A Figura 4.4c apresenta o erro de interpolação em função das rotação das arestas. Percebe-se que, a medida que o ângulo de rotação

aproxima-se de  $90^\circ$ , o erro tende ao infinito. Quando o ângulo de rotação é  $90^\circ$ , há um problema de singularidade no sistema (3.45) e, conseqüentemente, a função de forma não pode ser gerada.

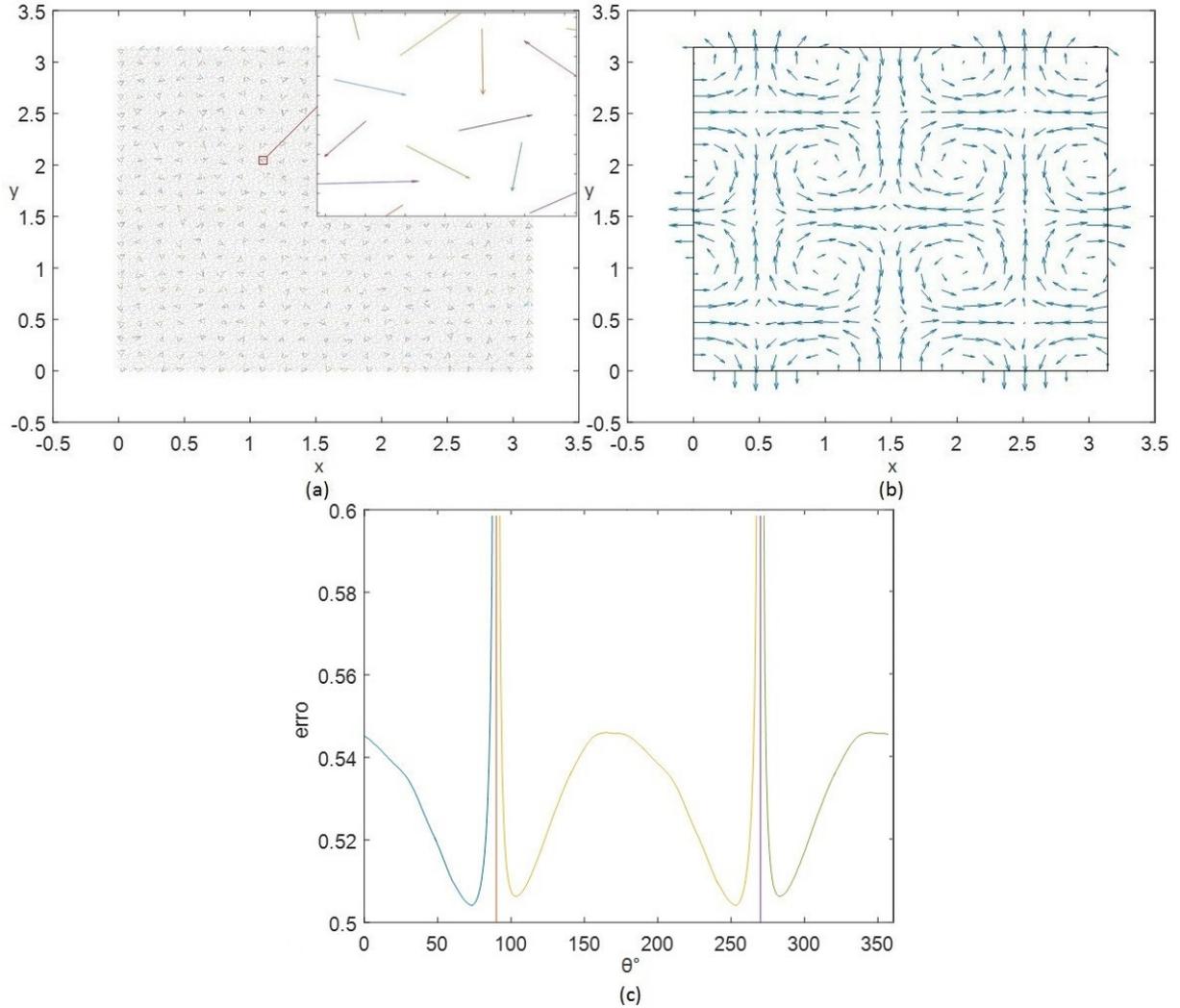


Figura 4.4: (a) Arestas de suporte são rotacionadas  $30^\circ$  no sentido anti-horário sobre as arestas de background, e comprimento das arestas 50% menor que as arestas de background. (b) Representação do campo elétrico, erro é 0,5346. (c) Erro de aproximação vs. rotação das arestas.

### 4.3 Frequências de Corte em Guia de Onda

Até o momento, foi apresentada a capacidade de aproximar campos vetoriais das funções de forma vetoriais  $H(\text{curl})$ . O próximo passo é utilizar as funções de forma no EMM para resolver problemas eletromagnéticos. A formulação de um problema vetorial

harmônico no tempo foi apresentada na seção 2.4 em termos de suas formas forte e fraca. Essa classe de problema pode ser relacionada a aplicações de guias de onda e cavidades ressonantes, sendo representada por (2.23), onde geralmente deseja-se determinar os autovalores  $\omega^2$  associados às frequências de corte do guia. Então, a condição de contorno homogênea (2.21) é utilizada, uma vez que  $\partial\Omega = \partial\Omega_g$  e a fronteira  $\partial\Omega_n$  não está presente. Assim, o problema representado na sua forma forte pela equação (2.23), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} &= 0 & \text{em } \Omega \\ \hat{n} \times \vec{E} &= 0 & \text{em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considere que o guia de onda tem seção transversal quadrada  $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ , cuja unidade dimensional da geometria é dada em metros e o meio interno espaço livre (vácuo), isto é,  $\mu_r = 1$  e  $\epsilon_r = 1$ . Além disso, a fronteira  $\partial\Omega$  é do tipo PEC (condutores elétricos perfeitos). Este problema possui solução analítica [Boffi et al., 1999] e é dada por:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= n^2 + m^2 \neq 0 \\ n, m &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para que o método sem malha de aresta compute os autovalores numericamente, é preciso determinar a forma fraca do problema (4.3). Então, com base na equação (2.32), a forma fraca para o problema em um domínio  $\Omega$  é

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot (\nabla \times \vec{W}_t) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} (\epsilon_r \vec{E}) \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0 \quad \forall \vec{W}_t \in H_o(\text{curl}, \Omega) \quad (4.5)$$

onde  $\vec{W}_t$  é a função vetorial de teste do método dos resíduos ponderados e  $H_o(\text{curl}, \Omega)$  é o espaço de funções vetoriais,  $\vec{u} \in H(\text{curl}, \Omega)$  que satisfazem  $\vec{n} \times \vec{u} = 0$  em  $\partial\Omega$ .

Neste trabalho, considera-se o campo em modo TE<sub>z</sub>, isto é, o campo elétrico possui componentes em  $x$  e  $y$ , enquanto a direção de propagação é  $z$ . O problema original pode ser aproximado como:

$$\begin{aligned}\vec{E}^h &= \sum_i \vec{N}_i(\mathbf{x}) \cdot c_i, \\ \vec{W}_t &= \sum_j \vec{N}_j(\mathbf{x}) \cdot d_j.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.5), obtemos o seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = k_0^2 \mathbf{B}\mathbf{c}\tag{4.7}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} [\nabla \times \vec{N}_i]^T [\nabla \times \vec{N}_j] d\Omega, \\ \mathbf{B} &= B_{ij} = \int_{\Omega} \epsilon_r [\vec{N}_i]^T [N_j] d\Omega.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Como a formulação envolve a integração da forma fraca, expressa pela equação 4.8, esta é efetuada numericamente neste trabalho utilizando uma malha de *background* triangular e quadratura gaussiana com 4 pontos por célula, assim como nos métodos sem malha tradicionais, por exemplo, EFG [Belytschko et al., 1994].

Primeiro o problema é resolvido utilizando a função de forma vetorial originalmente proposta para o EMM, equação 3.15. Como visto anteriormente, estas funções dependem da distância ortogonal  $d_i$  entre o ponto  $\mathbf{x}$  e a aresta  $e_i$ . A Figura 4.5 apresenta o campo elétrico associado ao oitavo autovalor ( $\omega^2 = 8$ ). Em (a) o problema é resolvido utilizando três arestas no domínio de suporte, já em (b) o número de arestas no domínio de suporte está variando de três a nove. O círculo na Figura 4.5b destaca os vetores corrompidos no campo elétrico aproximado.

Os autovalores obtidos numericamente são mostrados na Tabela 4.1, onde podemos visualizar o modo espúrio em destaque.

O testes demonstram que com a adição de arestas ao domínio de suporte, a solução é corrompida com modos espúrios. Acredita-se que a razão para que soluções espúrias estejam presentes com escolhas diferentes de arestas de suporte esteja vinculada a não se estar trabalhando com o espaço de aproximações correto. De fato, a única premissa

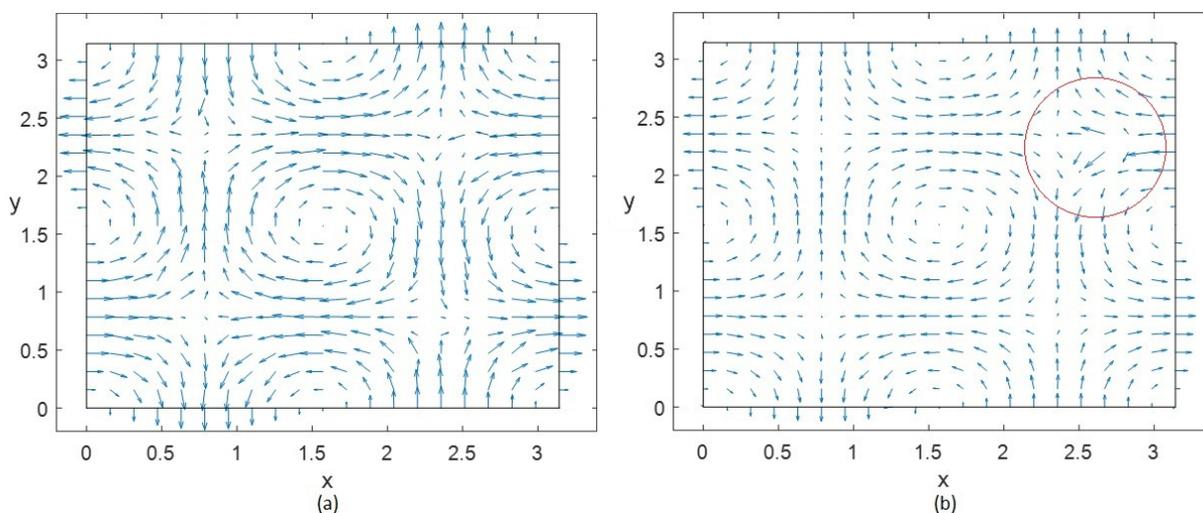


Figura 4.5: (a) Campo elétrico computado utilizando uma quantidade de arestas constante e iguais a três para todos os domínios de suporte. (b) Campo elétrico associado ao oitavo autovalor computado com domínios de suporte variando, isto é, existem domínios de suporte contendo de três a nove arestas.

Tabela 4.1: Quatorze primeiros autovalores computados pelas funções de forma original do EMM.

N	EMM		Exato
	3 arestas	De 3 (min) a 9 arestas (max)	
1	0,9998	1,0056	1
2	0,9999	1,0121	1
3	1,9999	2,0179	2
4	3,9971	4,0456	4
5	4,0003	4,0719	4
6	4,9907	5,0534	5
7	5,0047	5,0831	5
8	7,9923	8,1054	8
9	8,9884	9,1610	9
10	9,0032	9,2580	9
11	9,9734	10,1128	10
12	10,0040	10,2722	10
13	12,9506	10,7294	13
14	13,0077	13,3787	13

adotada para construir as funções de forma foi fazer seu divergente igual a zero e forçar a sua continuidade tangencial sobre as arestas. Várias funções de forma diferentes poderiam ter sido escolhidas com essas características, mas essas não necessariamente estariam gerando um espaço de funções adequado para realizar a aproximação da função vetorial.

Agora o problema é resolvido usando as funções de forma  $H(\text{curl})$ . Quanto à distribuição das arestas de suporte, segue-se a mesma estratégia usada na interpolação do campo, Figura 4.1. Os autovalores obtidos numericamente para cada configuração das arestas são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Quatorze primeiros autovalores computado pelo EMM, onde  $l_i$  é o comprimento das arestas de background.

N	EMM				Exato
	$0,001 \times l_i$	$0,5 \times l_i$	$1,0 \times l_i$	$1,5 \times l_i$	
1	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	1
2	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1
3	1,9997	1,9997	1,9997	1,9997	2
4	3,9960	3,9960	3,9960	3,9960	4
5	3,9997	3,9997	3,9997	3,9997	4
6	4,9916	4,9916	4,9916	4,9916	5
7	5,0004	5,0004	5,0004	5,0004	5
8	7,9916	7,9916	7,9916	7,9916	8
9	8,9829	8,9829	8,9829	8,9829	9
10	8,9969	8,9969	8,9969	8,9969	9
11	9,9670	9,9670	9,9670	9,9670	10
12	9,9925	9,9925	9,9925	9,9925	10
13	12,9449	12,9449	12,9449	12,9449	13
14	13,0070	13,0070	13,0070	13,0070	13

Observe que os autovalores obtidos numericamente não variam com comprimento das arestas, ou seja, outra vez constata-se que a sensibilidade da solução em relação ao tamanho das arestas é praticamente inexistente. Pelos resultados das simulações, a diferença entre as soluções está aparecendo a partir da décima segunda casa decimal.

Para investigar o comportamento do método em relação à rotação das arestas de suporte, Figura 4.4a, diminui-se o comprimento das arestas de suporte em 50% do comprimento das arestas de *background* e a direção das arestas de suporte é rotacionado no sentido anti-horário. Primeiro o problema é resolvido deixando todas as arestas do domínio e suas fronteiras livres para rotacionar. No segundo caso, as arestas da fronteira são fixadas, rotacionando apenas as arestas internas do domínio. Os autovalores obtidos numericamente são visualizados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Quatorze primeiro autovalores computados pelo EMM para diferentes ângulos de rotação. O comprimento das arestas de suporte é fixado em 50% menor que o das arestas de background

(a) Arestas das bordas rotacionando					(b) Arestas das bordas sem rotacionar				
N	EMM			Exato	N	EMM			Exato
	$\theta = 1^\circ$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 15^\circ$			$\theta = 1^\circ$	$\theta = 10^\circ$	$\theta = 15^\circ$	
1	1,0001	1,0307	1,0712	1	1	1,0033	1,3561	1,7771	1
2	1,0002	1,0311	1,0718	1	2	1,0037	1,3624	1,7868	1
3	2,0003	2,0616	2,1427	2	3	2,0049	2,5178	3,1385	2
4	3,9972	4,1190	4,2803	4	4	4,0003	4,3994	4,9154	4
5	4,0008	4,1227	4,2841	4	5	4,0036	4,4687	5,0574	4
6	4,9930	5,1442	5,3447	5	6	4,9966	5,5634	6,2881	5
7	5,0018	5,1542	5,3560	5	7	5,0067	5,5926	6,3424	5
8	7,9939	8,2357	8,5560	8	8	7,9982	8,6397	9,4846	8
9	8,9858	9,2602	9,6213	9	9	8,9878	9,5360	10,2528	9
10	8,9996	9,2719	9,6324	9	10	9,0031	9,5563	10,2785	9
11	9,9702	10,2739	10,6738	10	11	9,9736	10,5923	11,3860	10
12	9,9955	10,2981	10,6980	10	12	10,0007	10,7320	11,6882	10
13	12,9487	13,3382	13,8534	13	13	12,9532	13,6761	14,6198	13
14	13,0107	13,4019	13,9191	13	14	13,0149	13,7637	14,7538	13

Precisa-se analisar com mais rigor o comportamento do método quando as arestas de suporte são rotacionadas em relação às arestas de *background*, pois observa-se um aumento considerável no erro a partir de certo ângulo de rotação. Uma possível explicação para esse fenômeno é, como as funções de forma são baseadas no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ , tanto seu quadrado quanto o quadrado do seu rotacional devem ser integráveis. Porém, quando o ângulo de rotação das arestas de suporte tende a  $90^\circ$  as derivadas nem sempre são definidas. A Tabela 4.4 apresenta o comportamento do rotacional a medida que o ângulo de rotação das arestas de suporte tende a  $90^\circ$ . Nota-se, claramente, a singularidade que ocorre quando o ângulo se aproxima de  $90^\circ$ .

Tabela 4.4: Valores do rotacional das funções de forma para diferentes ângulos de rotação das arestas de suporte.

$\theta$	$\nabla \times \vec{N}_1$	$\nabla \times \vec{N}_2$	$\nabla \times \vec{N}_3$
$0^\circ$	40,43	-40,43	-40,43
$10^\circ$	82,11	-82,11	-82,11
$30^\circ$	93,37	-93,37	-93,37
$60^\circ$	161,73	-161,73	-161,73
$89^\circ$	$4,63 \cdot 10^3$	$-4,63 \cdot 10^3$	$-4,63 \cdot 10^3$
$89,5^\circ$	$9,26 \cdot 10^3$	$-9,26 \cdot 10^3$	$-9,26 \cdot 10^3$
$89,9^\circ$	$4,63 \cdot 10^4$	$-4,63 \cdot 10^4$	$-4,63 \cdot 10^4$
$90,1^\circ$	$-4,63 \cdot 10^4$	$4,63 \cdot 10^4$	$4,63 \cdot 10^4$
$90,5^\circ$	$-9,26 \cdot 10^3$	$9,26 \cdot 10^3$	$9,26 \cdot 10^3$
$91^\circ$	$-4,63 \cdot 10^3$	$4,63 \cdot 10^3$	$4,63 \cdot 10^3$

## 4.4 Propagação em Guia de Onda

Quando se trabalha com problemas de propagação em guias de onda, normalmente é necessário determinar o campo eletromagnético em uma dada frequência de propagação. Suponha um guia de onda retangular, como mostrado na Figura 4.6, onde uma onda eletromagnética, com frequência de operação de 300 MHz, se propaga na direção  $+z$ . O problema é representado por (2.23), com algumas condições de contorno específicas, como descrito a seguir.

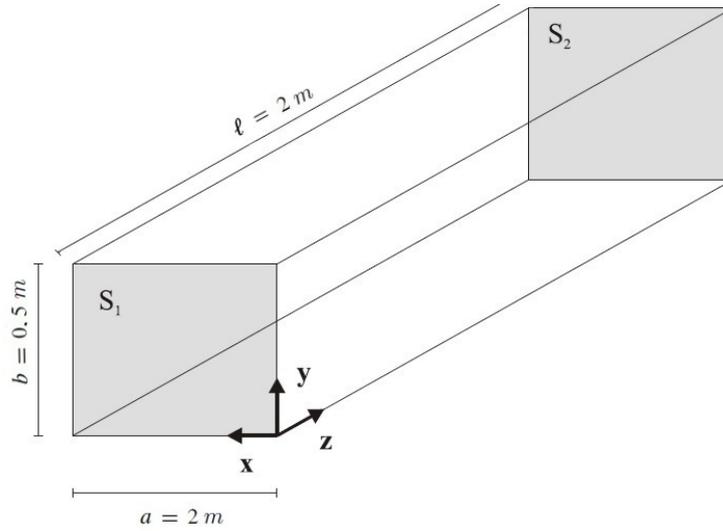


Figura 4.6: Geometria do guia de onda retangular

Fonte: [Lima and Mesquita, 2017b]

Nas paredes do guia, tem-se a condição de contorno de Dirichlet (2.21). Em  $S_1$ , aplica-se uma condição de contorno de Dirichlet sobre o campo elétrico incidente dado por:

$$\vec{E}_{inc}(x, z) = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) e^{-jk_{10}z} \hat{y} \quad (4.9)$$

Em  $S_2$ , o campo pode ser expresso pela condição de contorno do terceiro tipo (2.21) com  $\vec{U} = 0$ . Assim, o problema (2.23), pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} &= 0 & \text{em } \Omega \\ \hat{n} \times \vec{E} &= 0 & \text{em } \Gamma_d \\ \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \hat{n} \times (\nabla \times \vec{E}) &= 0 & \text{em } S_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema,  $\Gamma_d$  é a fronteira do tipo PEC e  $S_2$  é a fronteira onde é imposta a condição de contorno do terceiro tipo com parâmetro  $\gamma_e = jk_{10}$ , onde  $k_{10} = \sqrt{\omega^2 - (\pi/a)^2}$ .

Assim, a partir da equação (2.32), a forma fraca do problema no domínio  $\Omega$  é dada por:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \cdot (\nabla \times \vec{W}_t) d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} (\epsilon_r \vec{E}) \cdot \vec{W}_t d\Omega - \int_{S_2} \vec{W}_t \cdot (\gamma_e \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E})) d\Gamma = 0 \quad (4.11)$$

onde  $\vec{W}_t$  é a função vetorial de teste do método dos resíduos ponderados.

Para simplificar, o problema é resolvido em duas dimensões, no plano  $x = a/2$ . Tal simplificação justifica-se pelo fato de que, como o modo de propagação é  $TE_{10}$  e a onda propaga-se em  $+z$ , o campo elétrico possui apenas componente na direção  $y$ , isto é,  $\vec{E} = E_y \hat{y}$ .

Na forma fraca (4.11), é necessário calcular o rotacional do campo elétrico, dado por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{z}. \quad (4.12)$$

Além disso, o campo elétrico no interior do guia corresponde a  $\vec{E}^{inc}$ . Tomando as derivadas parciais requeridas no rotacional (4.12), tem-se que:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_{10}z}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -jk_{10} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jk_{10}z} \quad (4.14)$$

e seus valores absolutos máximos são:

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max} = \frac{\pi}{a} E_0, \quad (4.15)$$

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} = k_{10} E_0. \quad (4.16)$$

Considerando as dimensões do guia e a frequência de propagação, tem-se que:

$$\left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} \approx 4 \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max}. \quad (4.17)$$

Como na forma fraca (4.11) o primeiro termo envolve o produto escalar entre os rotacionais e

$$\left( \left| \frac{\partial E_y}{\partial z} \right|_{max} \right)^2 \approx 16 \left( \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{max} \right)^2. \quad (4.18)$$

então podemos simplificar o rotacional do campo elétrico (4.12) levando em conta apenas a componente que envolve a derivada parcial em relação a  $z$ , uma vez que a componente que envolve a derivada parcial em relação a  $x$  irá contribuir muito pouco no produto escalar. Logo, o rotacional do campo será calculado como:

$$\nabla \times \vec{E} \approx -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} \quad (4.19)$$

o que valida resolver o problema em duas dimensões no plano  $x = a/2$ .

Considera-se uma frequência de propagação da onda incidente de 300 MHz. A distribuição das arestas de suporte é feita de duas maneiras diferentes, ou seja, com comprimento das arestas de suporte iguais a 50% e 0,1% das arestas de *background*. A Figura 4.7 mostra as arestas distribuídas no domínio do problema, para comprimento igual a 50% das arestas de *background*.

Uma comparação com a solução analítica para  $E_y$  em  $y = 0, 3m$  é feita e mostrada na Figura 4.8. Nesta, é possível ver que a solução numérica está em concordância com a solução analítica, inclusive nas fronteiras  $z = 0$  e  $z = 2m$  onde foram impostas as condições de contorno para o campo incidente e o campo transmitido, respectivamente. O erro médio obtido para ambos os casos foi de  $2,17 \times 10^{-2}$ , a diferença no resultado do erro aparece na nona casa decimal.

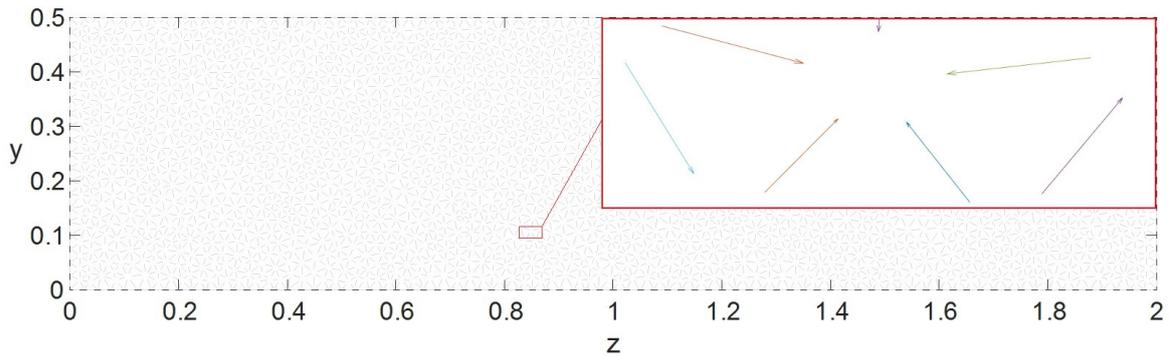


Figura 4.7: Conjunto de 6313 arestas espalhadas no domínio e na fronteira do problema, arestas de suporte 50% menor que arestas background.

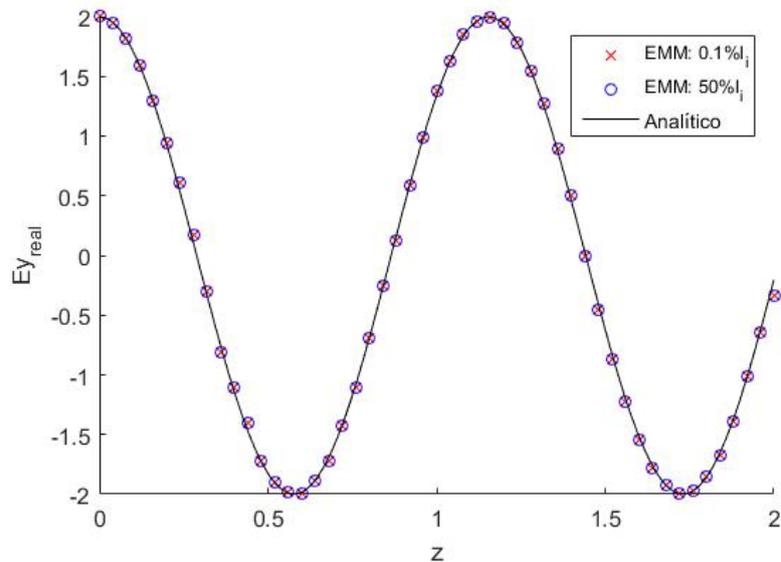


Figura 4.8: Campo elétrico  $E_y$  computado em  $y = 0,3m$  no  $x = a/2$  plano.

Outra vez percebe-se que o método é bastante estável em relação ao comprimento das arestas. De fato, pelo os resultados experimentais é possível verificar um menor erro quando o comprimento das arestas aproxima-se de zero. Logo, conclui-se que o EMM consegue reproduzir a onda em modo  $TE_{10}$  de maneira correta com solução numérica livre de modos espúrios, e que estas funções de forma têm erros menores quando as arestas tendem para um ponto.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

No presente trabalho, foram apresentadas novas funções de forma para o Método sem Malha de Aresta, cujo foco principal foi desenvolver funções que pertençam ao espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$  de maneira a atender a condição de divergente nulo. Em seguida, utiliza-se as novas funções de forma no EMM para resolver problemas do eletromagnetismo, verificando assim sua aplicabilidade e eficiência.

Como primeiro passo, fez-se uma revisão sucinta dos espaços vetoriais de Hilbert e Sobolev que são de fundamentais importância para construção do espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . Também foram apresentados estudos sobre problemas vetoriais harmônicos no tempo, onde foi apresentada a forma forte do problema e a partir do método dos resíduos ponderados derivada a forma fraca.

Posteriormente foi feito uma revisão do Método sem Malha de Aresta e apresentou-se o desenvolvimento matemático para construção das novas funções de forma, baseado no espaço  $H(\text{curl}; \Omega)$ . Para ilustrar, trabalhamos com problemas no espaço bidimensional e com a ordem dos polinômios igual a 1. Contudo, o interessante em utilizar estas funções de forma no EMM é a capacidade de trabalharmos no espaço n-dimensional e a possibilidade de adicionarmos mais arestas ao domínio de suporte, desde que se utilizem outros espaços de polinômios. Inicialmente, supomos que deve ser possível desenvolver aproximações para qualquer número de arestas.

As funções de forma propostas funcionaram corretamente quando aplicadas na aproximação de campos vetoriais e para resolver problemas vetoriais harmônicos no tempo. A solução numérica seguiu a expressão analítica esperada, livre de modos espúrios. Os resultados também mostraram que a solução praticamente independe do comprimento das

---

arestas. De fato, menores erros são obtidos quando o tamanho das arestas se aproxima de zero. Este resultado pode ser explorado em trabalhos futuros, por exemplo, encontrar uma formulação matemática para as funções de forma quando as arestas tendem a um ponto e, a partir daí, trabalhar como um método sem malha nodal, mas podendo atribuir uma direção, capaz de gerar aproximações vetoriais que satisfaçam a condição do divergente nulo.

O método é bastante robusto quanto ao comprimento das arestas de suporte. Contudo, quando as arestas de suporte são rotacionadas em relação às arestas de *background*, observou-se um aumento considerável no erro a partir de certo ângulo de rotação e, em 90 graus, a construção das funções de forma falha devido à singularidade da matriz. Esse comportamento precisa ser investigado com mais rigor em trabalhos futuros. Outros trabalhos futuros incluem, gerar as funções de forma usando espaços de polinômios com ordem superior, e, com isso, verificar o comportamento do método utilizando mais arestas no domínio de suporte. Por último, implementar o método para problemas tridimensionais.

# Referências Bibliográficas

- [Atluri and Zhu, 1998] Atluri, S. and Zhu, T. (1998). A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Comput. Mech., 22(2):117–127.
- [Belytschko et al., 1994] Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. Int. J. for Numer. Methods Eng., 37(2):229–256.
- [Boffi et al., 1999] Boffi, D., Fernandes, P., Gastaldi, L., and Perugia, I. (1999). Computational Models of Electromagnetic Resonators: Analysis of Edge Element Approximation. SIAM j. Numer. Analysis, 36(4):1264–1290.
- [Bossavit, 1990] Bossavit, A. (1990). Solving Maxwell’s equations in a closed cavity, and the question of spurious modes. IEEE Trans. on Magn., 26(2):702–705.
- [Buffa et al., 2002] Buffa, A., Costabel, M., and Sheen, D. (2002). On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains. J. Math. Analysis Apps., 276(2):845–867.
- [Debnath and Mikusiński, 2005] Debnath, L. and Mikusiński, P. (2005). Hilbert Spaces with Applications, 3rd Ed. Academic Press, San Diego, California.
- [Guimarães, 2006] Guimarães, C. J. (2006). Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o  $p(x)$ -Laplaciano. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil.
- [Jin, 2002] Jin, J. M. (2002). The Finite Element Method in Electromagnetics, 2nd Ed. John Wiley & Sons, New York, NY.
- [Lima and Mesquita, 2014] Lima, N. and Mesquita, R. (2014). An Edge Meshless Method. Ancey, France. The 16th IEEE Conf. Electr. Field Comput.
- [Lima and Mesquita, 2017a] Lima, N. and Mesquita, R. (2017a). Edge Meshless Method Applied to Vector Electromagnetic Problems. IEEE Trans. on Magn., 53(6):1–4.

- [Lima and Mesquita, 2017b] Lima, N. and Mesquita, R. (2017b). Meshless Vector Radial Basis Functions With Weak Forms. IEEE Trans. Magn., 53(6):1–4.
- [Lima, 2016] Lima, N. Z. (2016). Métodos sem Malha Aplicados ao Eletromagnetismo: Formas Fracas Enfraquecidas e Funções de Forma Vetoriais. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.
- [Liu, 2009] Liu, G. R. (2009). Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, 2nd Ed. CRC Press, Boca Raton, Florida. pp. 60-67.
- [Nédélec, 1980] Nédélec, J. C. (1980). Mixed Finite Elements in  $\mathbb{R}^3$ . Numer. Math., 35(3):315–341.
- [Nédélec, 1986] Nédélec, J. C. (1986). A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . Numer. Math., 50(1):57–81.
- [Nentchev, 2008] Nentchev, A. (2008). Numerical Analysis and Simulation in Microelectronics by Vector Finite Elements. PhD thesis, Technical University of Vienna, Vienna, Austria.
- [Nicomedes et al., 2017] Nicomedes, W. L., Bathe, K. J., Moreira, F. J. S., and Mesquita, R. C. (2017). Meshfree analysis of electromagnetic wave scattering from conducting targets: Formulation and computations. Comput. Struct., 184:36–52.
- [Schneebeli, 2003] Schneebeli, A. (2003). An  $H(\text{curl}, \Omega)$ -conforming FEM: Nédélec’s elements of first type. Technical report. University of Basel, Switzerland. Also available online from <https://www.dealii.org/reports/nedelec/nedelec.pdf>.
- [Yang et al., 2014] Yang, S., Chen, Z., Yu, Y., and Ponomarenko, S. (2014). A Divergence-Free Meshless Method Based on the Vector Basis Function for Transient Electromagnetic Analysis. IEEE Trans. Microw. Theory Techn., 62(7):1409–1416.