

**macro@ufmg**

Universidade Federal de Minas Gerais

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Grupo de pesquisa MACRO - Mecatrônica, Controle e Robótica

# **MODELAGEM E CONTROLE DE CORPO COMPLETO DE UM MANIPULADOR AÉREO**

**Laysa Santos Mello**

Belo Horizonte, Brasil

2016

Laysa Santos Mello

# MODELAGEM E CONTROLE DE CORPO COMPLETO DE UM MANIPULADOR AÉREO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientador:** Guilherme Vianna Raffo

**Coorientador:** Bruno Vilhena Adorno

Belo Horizonte, Brasil

2016

*À minha mãe, Márcia, à minha  
irmã, Ana Carolina, e ao meu  
namorado, César, pelo apoio,  
carinho, dedicação e paciência.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que permitiu mais essa realização e que, não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

É difícil agradecer todas as pessoas que de algum modo, nos momentos serenos e ou apreensivos, fizeram ou fazem parte da minha vida, por isso agradeço à todos de coração.

Agradeço a toda a minha família, e de um modo especial à minha mãe Márcia, minha heroína e ao meu namorado César, que me deram apoio e incentivo nas horas mais difíceis, de desânimo e cansaço.

Agradeço a todos os professores por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do meu e mesmo sem nominá-los terão os meus eternos agradecimentos. Em especial, para os meus orientadores, Guilherme Raffo e Bruno Adorno, pela orientação, auxílio, disponibilidade de tempo e incentivo para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos dos grupos MACRO e ProVant, em especial para a Ana Christine, Ernesto, Brenner, Fred, Diana e Rafael, pela ajuda.

À minha empresa ENDdB, por acreditarem na minha capacidade.

Por fim, agradeço às agências CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro que permitiu o desenvolvimento deste projeto.

Ninguém vence sozinho...

OBRIGADA A TODOS!



# Resumo

Essa dissertação apresenta a modelagem e controle de corpo completo de um manipulador aéreo, composto por um VANT do tipo quadricóptero acoplado a um manipulador. A modelagem se baseia na álgebra de quatérnios duais para obter os modelos cinemáticos direto e diferencial da cadeia heterogênea serialmente acoplada. O modelo dinâmico, obtido a partir da formulação de Euler-Lagrange (que utiliza o modelo cinemático), expressa a influência do movimento do manipulador no centro de massa do sistema. As leis de controle apresentadas são desenvolvidas para que o manipulador aéreo siga a trajetória desejada no nível do efetuador, enquanto se mantém estável, mesmo na presença de distúrbios externos, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. Propõem-se três controladores, sendo todos com estrutura de controle em cascata, formados por dois níveis. No primeiro caso, tem-se no nível externo um controlador cinemático e no nível interno um controlador de dinâmica inversa. O controlador de dinâmica inversa é modificado, tendo na sua malha externa um controlador cinemático no espaço da tarefa, que é o espaço onde se realiza a tarefa. No segundo caso, tem-se um controlador similar ao primeiro, mas o controlador do nível interno é obtido por meio da linearização por realimentação. Finalmente, no terceiro caso, tem-se o controlador  $H_\infty$  linear do modelo cinemático no nível externo e no nível interno, o controlador de dinâmica inversa. Para avaliar o desempenho das técnicas implementadas, são realizadas simulações e os resultados apresentados mostram-se aceitáveis, pois alcançou-se os objetivos propostos, que era rastrear a trajetória, com erros considerados pequenos em comparação a escala das trajetórias. Isso valida as técnicas de modelagem de corpo completo, baseada na álgebra de quatérnios duais, que deixam os movimentos fluídos e contínuos e as técnicas de controle para as características de subatuação e não linearidade.

**Palavras-chave:** Veículos Aéreos não Tripulados. Quatérnios Duais. Modelagem de Corpo Completo. Controle de Sistema Subatuado.

# Abstract

This dissertation presents the modeling and control of whole-body of aerial manipulator, composed of a quadrotor UAV coupled to a manipulator. The modeling is based on the algebra of dual quaternions to find differential and forward kinematic models of the heterogeneous serially coupled chain. The dynamic model, obtained from the Euler-Lagrange formulation (which uses the kinematic model), expresses the influence of the manipulator's movement in the system's center of mass. The presented control laws are developed for the aerial manipulator tracks the desired trajectory in the end-effectors level, while keeping the system stable even in the presence of external disturbances, parametric uncertainties and unmodeled dynamics. Three types of controllers are proposed, which all of them with a cascading control structure formed by two levels. In the first case, it has a kinematic controller in the outer loop and an inverse dynamics controller in the inner loop. The inverse dynamics controller is modified, having in its outer loop a kinematic controller in the task space, which is the space where it performs the task. In the second case, there is a similar controller with the first one, but the inner loop controller is obtained from feedback linearization. Finally, in the third case, there is the  $H_\infty$  linear controller of the outer loop's kinematic model, and in the inner loop, the inverse dynamics controller. The performance of the proposal control strategies is evaluated through simulation and the results had shown acceptable, because it caught up with the objectives of the controllers, who were tracking the trajectory with errors considered small compared to the scale of trajectories. This validates the whole-body modeling techniques based on dual quaternion algebra, that leave the fluid and continuous movements and control techniques for underactuated and nonlinear system.

**Keywords:** Unmanned Aerial Vehicle. Dual Quaternions. Whole-Body Modeling. Underactuated System Control.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativas . . . . .	5
1.2 Objetivos . . . . .	7
1.3 Estruturas da dissertação . . . . .	8
1.4 Contribuições . . . . .	8
<b>2 Estado da arte</b>	<b>9</b>
2.1 Veículos aéreos não tripulados . . . . .	9
2.2 Manipuladores aéreos . . . . .	10
2.2.1 Modelagem . . . . .	10
2.2.2 Controle . . . . .	11
2.2.3 Modificações na estrutura do sistema . . . . .	12
2.3 Conclusão . . . . .	13
<b>3 Modelagem de um Manipulador Aéreo</b>	<b>14</b>
3.1 Fundamentos matemáticos . . . . .	15
3.1.1 Quatérnios . . . . .	16
3.1.2 Quatérnios duais . . . . .	17
3.1.3 Representação de movimentos rígidos usando quatérnios duais . . . . .	19
3.1.4 Convenção Denavit-Hartenberg (DH) . . . . .	20
3.1.5 Modelo cinemático direto e diferencial direto do corpo completo . . . . .	22
3.2 Coordenadas generalizadas . . . . .	25
3.3 Modelo cinemático . . . . .	26

3.4	Modelo dinâmico . . . . .	30
3.5	Parâmetros do sistema . . . . .	35
3.6	Conclusão . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Estratégias de Controle</b>	<b>37</b>
4.1	Fundamentos matemáticos . . . . .	38
4.1.1	Linearização por realimentação ( <i>Feedback Linearization</i> ) . . . . .	38
4.1.2	Controlador cinemático . . . . .	41
4.1.3	Controlador de dinâmica inversa . . . . .	43
4.1.4	Controlador $H_\infty$ linear . . . . .	44
4.1.4.1	Sistemas lineares . . . . .	44
4.1.4.2	Desigualdades matriciais lineares - LMIs . . . . .	47
4.1.4.3	Controlador $H_\infty$ linear . . . . .	48
4.2	Estratégias de controle para um manipulador aéreo com o braço de três elos	50
4.2.1	Controlador 1 . . . . .	51
4.2.1.1	Controlador externo - Controlador cinemático . . . . .	51
4.2.1.2	Controlador interno - Controlador de dinâmica inversa . . . . .	53
4.2.2	Controlador 2 . . . . .	54
4.2.2.1	Controlador interno - Controlador por realimentação entrada-saída . . . . .	54
4.2.3	Controlador 3 . . . . .	60
4.2.3.1	Controlador externo - Controlador $H_\infty$ linear . . . . .	60
4.3	Estratégias de controle para um manipulador aéreo com o braço de cinco elos . . . . .	64
4.3.1	Controlador 4 . . . . .	65
4.3.1.1	Controlador cinemático . . . . .	65
4.3.1.2	Controlador de dinâmica inversa . . . . .	65
4.3.2	Controlador 5 . . . . .	66
4.4	Conclusão . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Avaliação Experimental e Resultados</b>	<b>68</b>
5.1	Cenários das simulações . . . . .	68
5.1.1	Trajectoria . . . . .	69
5.1.2	Distúrbios . . . . .	69
5.1.3	Ajuste dos ganhos dos controladores . . . . .	70
5.2	Manipulador aéreo com o braço de três elos . . . . .	71
5.3	Manipulador aéreo com o braço de cinco elos . . . . .	88
5.4	Conclusão . . . . .	95

<b>6 Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>100</b>
6.1 Trabalhos Futuros . . . . .	102
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>103</b>
<b>Apêndice A Matrizes de ganhos <math>H_\infty</math> Linear</b>	<b>108</b>
<b>Apêndice B Matrizes de ganhos <math>H_\infty</math> Linear</b>	<b>110</b>

# Lista de Figuras

1.1	Manipuladores Móveis. . . . .	2
1.2	Bréguet-Richet Gyroplane No.1. . . . .	3
1.3	Alguns exemplos de quadricópteros comerciais e acadêmicos. . . . .	4
1.4	Alguns exemplos de manipuladores aéreos. . . . .	5
1.5	Manipuladores aéreos do projeto ARCAS FP7 European Project. . . . .	6
3.1	Manipulador Aéreo. . . . .	14
3.2	Exemplo de transformação homogênea entre os sistemas de coordenadas $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$ . Adaptado de Adorno (2011). . . . .	20
3.3	Exemplo da sequência de transformações. Adaptado de Adorno (2011). . . . .	21
3.4	Exemplo de transformações correspondentes aos parâmetros da convenção DH. Adaptado de Adorno (2011). . . . .	21
3.5	Sistemas de coordenadas do Manipulador Aéreo e definições de variáveis. . . . .	25
3.6	Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de três elos, a fim de obter os parâmetros D-H. . . . .	27
3.7	Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de três elos, a fim de obter os parâmetros D-H. . . . .	28
3.8	Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de cinco elos, a fim de obter os parâmetros D-H. . . . .	29
4.1	Diagrama de bloco do controlador $H_\infty$ . Adaptado de Raffo et al. (2011). . . . .	48
4.2	Diagrama de bloco da arquitetura do controlador para o manipulador aéreo. . . . .	51
4.3	Manipulador - Cálculo dos torques máximos. . . . .	64
5.1	Trajetória circular no espaço tridimensional do efetuador em quatérnios duais. . . . .	69
5.2	Trajetória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadricóptero (QR) para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	72
5.3	Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	73

5.4	Variáveis do quadrirrotor durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	74
5.5	Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	75
5.6	Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	75
5.7	Trajетória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrirrotor (QR) para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	76
5.8	Trajетória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	77
5.9	Variáveis do quadrirrotor durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	78
5.10	Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	79
5.11	Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	79
5.12	Trajетória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrirrotor (QR) para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	80
5.13	Trajетória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	81
5.14	Variáveis do quadrirrotor durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	82
5.15	Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	83
5.16	Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos. . . . .	83
5.17	Erro dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para os controladores do manipulador aéreo com três elos. . . . .	85
5.18	Comparação entre as ações de controle dos controladores para o cenário com distúrbio. . . . .	87
5.19	Trajетória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrirrotor (QR) para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	90
5.20	Trajетória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	91
5.21	Variáveis do quadrirrotor durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	92
5.22	Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 5 DOF do manipulador para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	93

5.23	Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	94
5.24	Trajectoria desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrrrotor (QR) para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	95
5.25	Trajectoria desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	96
5.26	Variáveis do quadrrrotor durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	97
5.27	Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 5 DOF do manipulador para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	98
5.28	Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos. . . . .	99



## Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros DH do manipulador com três elos. . . . .	27
3.2	Parâmetros DH do manipulador com cinco elos. . . . .	28
3.3	Parâmetros nominais do manipulador aéreo. . . . .	36
4.1	Tipos de controladores do manipulador aéreo com o braço de três elos. . .	51
4.2	Tipos de controladores do manipulador aéreo com o braço de cinco elos. . .	64
5.1	ISE para cada componente do quatérnio dual da pose do efetuador para os Controladores 1, 2 e 3 e as relações entre eles. . . . .	86
5.2	IVA para cada componente do quatérnio dual da pose do efetuador para os Controladores 1, 2 e 3. . . . .	88

# Lista de Abreviaturas

DH	Denavit-Hartenberg.
VANT	Veículo Aéreo não Tripulado.
CEA	Centro de Energia Atômica da França - <i>Centre d'Energie Atomique</i> .
VTOL	Decolagem e Aterrissagem Vertical - <i>Vertical Takeoff and Landing</i> .
ARCAS	Aerial Robotics Cooperative Assembly System.
GRASP	<i>General Robotics, Automation, Sensing &amp; Perception Laboratory at Penn.</i>
FKM	Modelo cinemático direto - <i>Forward kinematics model</i> .
DFKM	Modelo cinemático direto diferencial - <i>Differential forward kinematics model</i> .
DOF	Graus de liberdade - <i>Degrees of freedom</i> .
CAD	<i>Computer Aided Design</i> .
SISO	<i>Single Input, Single Output</i> .
MIMO	<i>Multiple-input and Multiple-output</i> .
PD	Proporcional e derivativo.
PID	Proporcional, integral e derivativo.
LMI	Desigualdades matriciais lineares - <i>Linear Matrix Inequalities</i> .
ISE	Integral do erro quadrático - <i>Integral of the Squared Error</i> .
IAV	Integral da variação absoluta - <i>Integral of the Absolute Value</i> .

# Lista de Símbolos

$A$	Matriz dos estados lineares.
$b$	Coefficiente de empuxo do rotor.
$B$	Matriz das entradas lineares.
$B(\mathbf{q})$	Matriz de acoplamento das entradas.
$B_w(\boldsymbol{\alpha})$	Matriz das entradas externas lineares.
$C$	Matriz das saídas desejadas lineares.
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Matriz de Coriolis.
$\mathcal{D}(\cdot)$	Parte dual de um quatérnio dual.
$f_i$	Força do $i$ -ésimo rotor.
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Campo vetorial dos estados do sistema dinâmico não linear.
$\mathcal{F}_m$	Sistema de coordenadas do manipulador.
$\mathcal{F}_{mi}$	Sistema de coordenadas do $i$ -ésimo elo do manipulador.
$\mathcal{F}_q$	Sistema de coordenadas do quadrirrotor.
$\mathcal{F}_0$	Sistema de coordenadas inercial.
$g$	Aceleração da gravidade.
$\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$	Campo vetorial da $i$ -ésima entrada do sistema dinâmico não linear.
$G(\mathbf{q})$	Vetor das forças gravitacionais.
$\mathbf{h}(\mathbf{x})$	Campo vetorial das saídas do sistema dinâmico não linear.
$\mathbb{H}$	Conjunto dos quatérnios.
$\mathcal{H}$	Conjunto dos quatérnios duais.

$H(s)$	Função de Transferência entre o sinal de entrada e o sinal de saída $\mathbf{z}$ .
$\ H(s)\ _\infty$	Norma $H_\infty$ da função de transferência $H(s)$ .
$\mathbf{H}_4^+, \mathbf{H}_4^-$	Operadores de Hamilton.
$\mathbf{H}^+, \mathbf{H}^-$	Operadores de Hamilton estendidos para quatérnios duais.
$I_n$	Matriz identidade de dimensão $n$ .
$I_{xx}^{ei}$	Momento de inércia do $i$ -ésimo elo do manipulador em torno do eixo $X$ .
$I_{yy}^{ei}$	Momento de inércia do $i$ -ésimo elo do manipulador em torno do eixo $Y$ .
$I_{zz}^{ei}$	Momento de inércia do $i$ -ésimo elo do manipulador em torno do eixo $Z$ .
$I_{xx}^q$	Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $X$ .
$I_{yy}^q$	Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $Y$ .
$I_{zz}^q$	Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $Z$ .
$\text{Im}(\cdot)$	Parte imaginária de um quatérnio.
$\mathcal{I}_{ei}$	Tensor de inércia do $i$ -ésimo elo do manipulador.
$\mathcal{I}_q$	Tensor de inércia do quadrirrotor.
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Unidades imaginárias ou quaterniônicas.
$J$	Matriz Jacobiana analítica correspondente à derivada do quatérnio dual $\underline{\mathbf{x}}$ .
$J_c$	Bloco matricial formado pelas colunas de $J$ relacionadas à $\mathbf{q}_c$ .
$J_i$	Matriz Jacobiana analítica correspondente à derivada do quatérnio dual $\underline{\mathbf{x}}_i$ .
$J_m$	Matriz Jacobiana analítica correspondente à derivada do quatérnio dual $\underline{\mathbf{x}}_m$ .
$J_q$	Matriz Jacobiana analítica correspondente à derivada do quatérnio dual $\underline{\mathbf{x}}_q$ .
$J_u$	Bloco matricial formado pelas colunas de $J$ relacionadas à $\mathbf{q}_u$ .
$\bar{J}_{vi}$	Matriz Jacobiana geométrica relacionada à velocidade linear do $i$ -ésimo centro de massa do sistema.
$\bar{J}_{wi}$	Matriz Jacobiana geométrica relacionada à velocidade angular do $i$ -ésimo centro de massa do sistema.
$k_t$	Coefficiente de arrasto do rotor.

$K_d$	Matriz de ganhos derivativos do controlador de dinâmica inversa.
$K_{dc}$	Matriz de ganhos derivativos do controlador cinemático.
$K_{ns1}$	Matriz de ganhos proporcionais do controlador $\mathbf{U}$ .
$K_{ns2}$	Matriz de ganhos derivativos do controlador $\mathbf{U}$ .
$K_p$	Matriz de ganhos proporcionais do controlador de dinâmica inversa.
$K_{pc}$	Matriz de ganhos proporcionais do controlador cinemático.
$K_{p2}$	Matriz de ganhos derivativos do controlador cinemático $\mathbf{v}_u$ .
$\mathcal{K}_q, \mathcal{K}_{mi}$	Energia Cinética do quadrrrotor e do $i$ -ésimo elo do manipulador.
$l$	Distância entre o centro geométrico do quadrrrotor e o rotor.
$m_{ei}$	Massa do $i$ -ésimo elo do manipulador.
$m_m$	Número de elos do manipulador.
$m_q$	Massa do quadrrrotor.
$M(\mathbf{q})$	Matriz de inércia.
$\mathbf{p}_q$	Quatérnio puro que representa a translação do quadrrrotor.
$\mathcal{P}(\cdot)$	Parte primária de um quatérnio dual.
$\mathbf{q}$	Vetor das variáveis do sistema.
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor das velocidades das variáveis do sistema.
$\mathbf{q}_c$	Vetor das variáveis controladas.
$\mathbf{q}_d$	Vetor das variáveis desejadas do sistema.
$\dot{\mathbf{q}}_d$	Vetor das velocidades das variáveis desejadas do sistema.
$\ddot{\mathbf{q}}_d$	Vetor das acelerações das variáveis desejadas do sistema.
$\mathbf{q}_{eq}$	Vetor das variáveis no ponto de equilíbrio.
$\mathbf{q}_m$	Vetor das variáveis do manipulador.
$\mathbf{q}_q$	Vetor das variáveis do quadrrrotor.
$\mathbf{q}_u$	Vetor das variáveis não controladas.

$\mathbf{Q}_x$	Vetor das ações do controlador responsável por rastrear a trajetória desejada do efetuador.
$r_i$	Grau relativo da $i$ -ésima saída.
$\mathbf{r}_q$	Quatérnio unitário que representa a rotação do quadrrrotor.
$R$	Matriz de rotação do sistema de coordenadas $\mathcal{F}_q$ em relação ao sistema inercial.
$\text{Re}(\cdot)$	Parte real de um quatérnio.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$T_M$	Matriz de normalização.
$\mathcal{U}_q, \mathcal{U}_{mi}$	Energia Potencial do quadrrrotor e do $i$ -ésimo elo do manipulador.
$\mathbf{v}_c$	Vetor das ações do controlador cinemático.
$V(\mathbf{x})$	Função de Lyapunov.
$\mathbf{u}$	Vetor das forças de entrada generalizadas.
$\mathbf{u}_{ext}$	Vetor das forças externas generalizadas.
$\mathbf{U}$	Vetor das ações do controlador secundário no espaço nulo de $J_c$ .
$\mathbf{v}_q, \mathbf{v}_{ei}$	Vetor das velocidades lineares do quadrrrotor e do $i$ -ésimo elo do manipulador em relação à $\mathcal{F}_0$ , expresso em $\mathcal{F}_0$ .
$\mathbf{w}$	Vetor dos distúrbios externos.
$\mathbf{w}_{ei}$	Vetor das velocidades angulares do $i$ -ésimo elo do manipulador em relação à $\mathcal{F}_0$ , expresso em $\mathcal{F}_{mi}$ .
$\mathbf{w}_q$	Vetor das velocidades angulares do quadrrrotor em relação à $\mathcal{F}_0$ , expresso em $\mathcal{F}_q$ .
$W$	Matriz de Euler expressa no sistema de coordenadas $\mathcal{F}_q$ .
$x, y, z$	Variáveis translacionais do quadrrrotor.
$\underline{\mathbf{x}}$	Quatérnio dual que representa a pose do efetuador em relação ao sistema inercial.
$\dot{\underline{\mathbf{x}}}$	Derivada temporal do quatérnio dual $\underline{\mathbf{x}}$ .
$\underline{\mathbf{x}}_a$	Quatérnio dual que representa uma transformação de acoplamento entre o quadrrrotor e o manipulador.

$\underline{\boldsymbol{x}}_d$	Quatérnio dual da pose desejada do efetuador.
$\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}_d$	Quatérnio dual da velocidade desejada do efetuador.
$\ddot{\underline{\boldsymbol{x}}}_d$	Quatérnio dual da aceleração desejada do efetuador.
$\underline{\boldsymbol{x}}_E^{L_{mm}}$	Quatérnio dual que representa uma rotação adicional no sistema de coordenadas do efetuador.
$\underline{\boldsymbol{x}}_i$	Quatérnio dual que representa a pose do centro de massa do $i$ -ésimo elo do manipulador em relação ao sistema inercial.
$\underline{\boldsymbol{x}}_m$	Quatérnio dual que representa a pose do manipulador em relação a sua base.
$\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}_m$	Derivada temporal do quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{x}}_m$ .
$\underline{\boldsymbol{x}}_q$	Quatérnio dual que representa a pose do quadrirrotor em relação ao sistema inercial.
$\dot{\underline{\boldsymbol{x}}}_q$	Derivada temporal do quatérnio dual $\underline{\boldsymbol{x}}_q$ .
$0_{n \times m}$	Matriz de zeros com $n$ linhas e $m$ colunas.
$\boldsymbol{\alpha}_v$	Vetor de parâmetros incertos.
$\alpha_T$	Ângulo vertical dos rotores.
$\beta_i$	Variável angular da $i$ -ésima junta do manipulador.
$\gamma$	Nível de atenuação do problema $H_\infty$ .
$\boldsymbol{I}$	Vetor das ações de controle.
$\varepsilon$	Unidade Dual.
$\tau_i$	Torque da $i$ -ésima junta do manipulador.
$\phi, \theta, \psi$	Variáveis rotacionais do quadrirrotor.

# 1

## Introdução

Os grandes avanços da robótica nos últimos anos fazem com que ela se apresente naturalmente no cotidiano dos seres humanos. Assim, é comum ver robôs industriais que soldam, pintam e movimentam grandes peças; robôs que atuam na medicina, como em laboratórios farmacêuticos e em salas cirúrgicas; robôs que agem em situações de riscos, como os que localizam e desativam minas e procuram por sobreviventes em zonas de desastres naturais; robôs que realizam tarefas agrícolas como plantar e colher; ou até mesmo robôs que realizam as atividades diárias, como lavar pratos. Pode-se ainda mencionar os robôs empregados em acidentes nucleares, naufrágios ou explorações espaciais. Definitivamente, a robótica trouxe maior segurança e qualidade na execução de algumas tarefas, permitindo melhorar a qualidade e as condições de trabalho e substituindo o homem em tarefas incômodas e cansativas, ou até mesmo perigosas. Esses avanços possibilitaram também a utilização de robôs em tarefas impossíveis de serem realizadas pelo homem, e que agora são realizadas pelas máquinas. Para atender as demandas de aplicações complexas, os robôs são capazes, cada vez mais, de realizarem tarefas não triviais, como correr, saltar, subir escadas e manipular objetos, como é o caso do robô Justin, Figura 1.1b (Borst et al., 2009).

Um dos grupos de robôs que se destacou nas pesquisas dos últimos anos foram os robôs móveis, principalmente os manipuladores móveis (Adorno, 2011; Salazar-Sangucho & Adorno, 2014), graças à mobilidade oferecida pela plataforma móvel e a capacidade de manipulação oferecida pelo manipulador. Estes sistemas são compostos por um manipulador inserido em uma plataforma de transporte automática, capaz de locomover e



navegar em um determinado ambiente de trabalho, sendo ambas as partes dotadas de certos níveis de autonomia na execução de suas tarefas. Suas aplicações podem ser muito variadas, como já apresentado e, em alguns casos, podem estar relacionadas com tarefas que normalmente são arriscadas ou nocivas para a saúde humana, como: manutenção de reatores nucleares, manipulação de materiais explosivos, exploração subterrânea, desmantelamento nuclear (Bakari et al., 2007), etc. Todos esses sistemas tendem a ajudar as pessoas de modo inteligente e com grande destreza de movimentação, o que requer alto desenvolvimento das tecnologias aplicadas e a união de várias áreas de pesquisa, englobando, além da robótica, a ciências da computação, engenharias elétrica, mecânica e de controle e automação.

O conceito de autonomia de um sistema, segundo Siegwart & Nourbakhsh (2004), refere à capacidade deste em perceber, planejar e atuar para alcançar objetivos específicos, sem a intervenção, ou com intervenção mínima, do operador humano. Neste caso, os manipuladores móveis autônomos são robôs dotados de um sistema de locomoção que os torna capazes de navegar em seu ambiente de trabalho (estruturado ou não e total ou parcialmente conhecido), interagindo com este ambiente na realização de tarefas, pelo uso de recursos próprios de sensoriamento e tomada de decisão, a partir de seu sistema de controle. Exemplos de manipuladores móveis podem ser vistos na Figura 1.1, com os robôs Joãozinho<sup>1</sup> e o Justin (Borst et al., 2009).

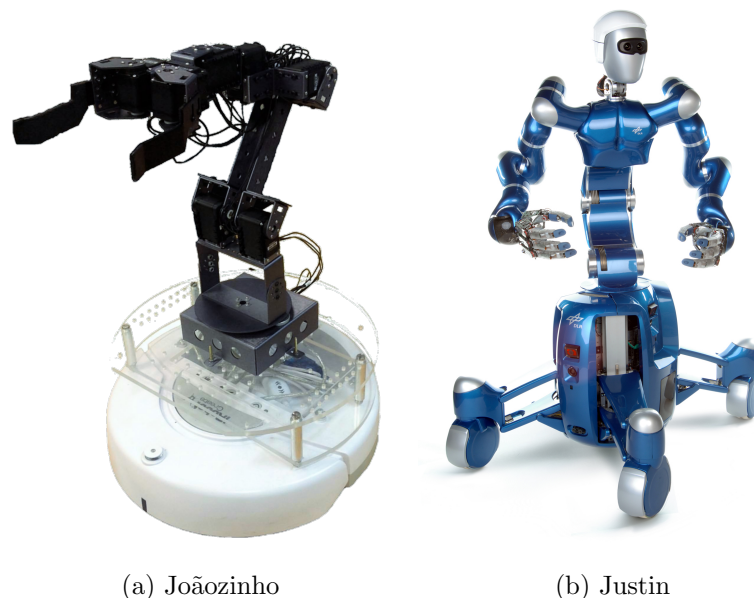


Figura 1.1: Manipuladores Móveis.

A opção mais empregada como estrutura de base móvel dos manipuladores é o uso de veículos com rodas, acionados por motores elétricos. O sistema mecânico deste tipo de

---

<sup>1</sup><http://macro.ppgee.ufmg.br/>

base pode ser simples de ser concebido e construído, e, em alguns casos, possuem também um modelo cinemático simples, o que facilita a implementação da estrutura de controle. Podem-se citar como exemplo os robôs móveis com bases holonômicas. No entanto, apesar da sua simplicidade, uma vez que essa plataforma móvel está restrita ao movimento no solo, a sua mobilidade pode ser comprometida caso a tarefa requeira, por exemplo, que se suba escadas ou se atinja locais de difícil acesso para efetuar a manipulação.

Outro tipo de robô móvel muito estudado são os veículos aéreos não tripulados (VANTs). Eles têm sido utilizados em várias aplicações, tais como exploração, detecção, localização, monitorização, filmagem cinematográfica, fins militares, pulverização de água ou produtos químicos sobre as plantações, busca e salvamento, entre outros. Além disso, estes veículos são muito úteis, principalmente, quando as tarefas são executadas em ambientes perigosos e inacessíveis. Um dos primeiros indícios de pesquisas sobre esses veículos foi no início do século 20, quando os irmãos Louis e Jacques Bréguet e o professor Charles Richet iniciaram os estudos e experimentos na ciência de helicópteros e construíram o seu primeiro helicóptero tripulado, denominado de Bréguet-Richet Gyroplane No.1 (Raza & Gueaieb, 2010). O aparelho possuía a configuração de um quadrirrotor (Figura 1.2), que se constituía de uma plataforma cruciforme com tubos metálicos e cada rotor tinha oito asas modeladas com panos, totalizando 32 superfícies de propulsão. Desde então, estudos com o objetivo de desenvolver VANTs receberam mais incentivos e foram alvos de interesse das áreas acadêmica e industrial. Isso se deve ao baixo custo da sua produção e da melhoria do seu desempenho, graças aos avanços das diversas áreas ligadas a este sistema, como, por exemplo, visão computacional, estimação de estado e novas metodologias de controle e sensoriamento. A Figura 1.3 mostra exemplos de modelos não tripulados, comerciais e acadêmicos, deste tipo de aeronave. A Figura 1.3a<sup>2</sup> mostra o Draganflyer X4-P, fabricado pela Draganfly Innovation Inc., um modelo comercial industrial de quadrirrotor muito utilizado para tomadas aéreas de imagens. O quadrirrotor da Figura 1.3b<sup>3</sup> foi desenvolvido pelo Centro de Energia Atômica da França (CEA, Centre d’Energie Atomique) para operação autônoma e semiautônoma, sendo também muito utilizado em pesquisas.

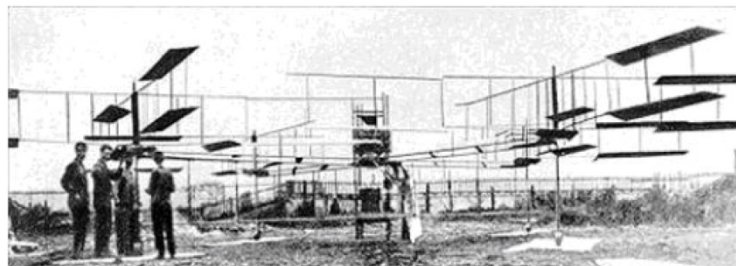


Figura 1.2: Bréguet-Richet Gyroplane No.1.

Dentre as diversas categorias de aeronaves hoje presentes, os quadrirrotores se en-

<sup>2</sup><http://www.draganfly.com/uav-helicopter/draganflyer-x4p/>

<sup>3</sup><http://users.cecs.anu.edu.au/~Robert.Mahony/Demos.htm>

quadram na categoria denominada VTOL (Vertical Takeoff and Landing - Decolagem e Aterrissagem Vertical). Sua característica de pouso e decolagem possibilita flexibilidade para pouso em terreno acidentado ou irregular, graças aos seus sistemas de controle, capazes de executar essas e outras manobras de forma autônoma. Deve-se ressaltar que o desenvolvimento de sistemas de controle para tais veículos não é simples. O VANT quadricóptero é um sistema subatuado, isto é, possui menos entradas de controle do que graus de liberdade. Além disso, é um sistema não linear, sujeito a distúrbios aerodinâmicos e às incertezas estruturais e paramétricas. Isso significa que leis de controle lineares clássicas podem ter algumas limitações nos seus desempenhos, causando instabilidade quando o sistema está operando em condições longe do equilíbrio. Além disso, técnicas de controle para sistemas totalmente atuados também não podem ser diretamente aplicadas a esses tipos de sistemas mecânicos. Portanto, é comum utilizar técnicas de modelagem e controle para sistemas não lineares subatuados, de modo a alcançar alto desempenho em condições específicas (Raffo, 2011).

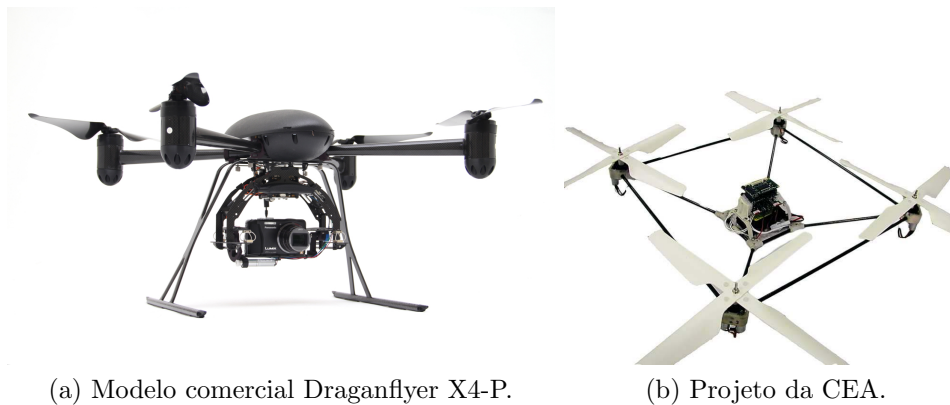
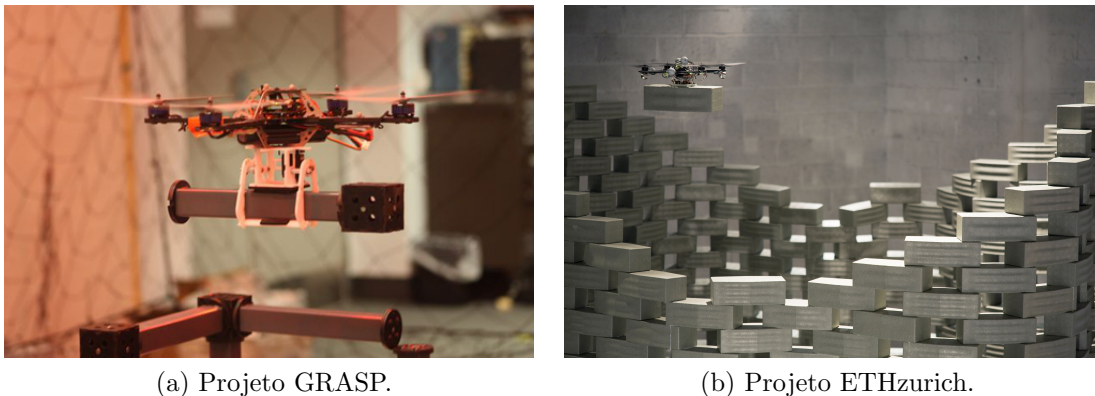


Figura 1.3: Alguns exemplos de quadricópteros comerciais e acadêmicos.

No entanto, apesar de todas as suas aplicações, os VANTs são considerados, sobretudo, como plataformas para sensoriamento ambiental. Muitas de suas tarefas são limitadas, pois não podem interagir diretamente com o ambiente, sendo sua interação essencialmente para troca de informações, sem acoplamento físico entre o VANT e o ambiente. Portanto, muitos pesquisadores vêm trabalhando em manipuladores aéreos, que são análogos aos manipuladores móveis (terrestres), mas são compostos por um manipulador anexado a uma plataforma aérea. Esses tipos de robôs aéreos são capazes de interagir fisicamente com objetos no ambiente, unindo, portanto, a capacidades de manipulação oferecida pelos manipuladores com a mobilidade oferecida pelos VANTs, que podem alcançar mais pontos no espaço tridimensional e/ou locais inacessíveis do que as bases terrestres.

O uso de manipuladores aéreos abre uma nova gama de aplicações (Korpela et al., 2012), que vão desde inspeção e manutenção de torres de transmissão elétrica (Figura 1.5b), à construção de plataformas para a evacuação de pessoas em operações de resgate ou construção em locais inacessíveis (Jimenez-Cano et al., 2013). Um grupo de manipuladores



(a) Projeto GRASP.

(b) Projeto ETHzurich.

Figura 1.4: Alguns exemplos de manipuladores aéreos.

aéreos também foi utilizado para construir uma estrutura de cubo, com juntas magnéticas (Figura 1.4a) (Lindsey et al., 2012) e estruturas arquitetônicas com tijolos (Figura 1.4b) (Augugliaro et al., 2014). O primeiro exemplo foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa GRASP (General robotics, automation, sensing & perception laboratory at Penn)<sup>4</sup> da Universidade da Pensilvânia, EUA. Já o projeto de pesquisa ARCAS (Aerial Robotics Cooperative Assembly System) FP7 European Project<sup>5</sup>, desenvolvido na Universidade de Sevilha, Espanha, realiza diversas pesquisas com manipuladores aéreos, como cooperação de manipulação (Figura 1.5c) e construção de estruturas com barras (Figura 1.5a).

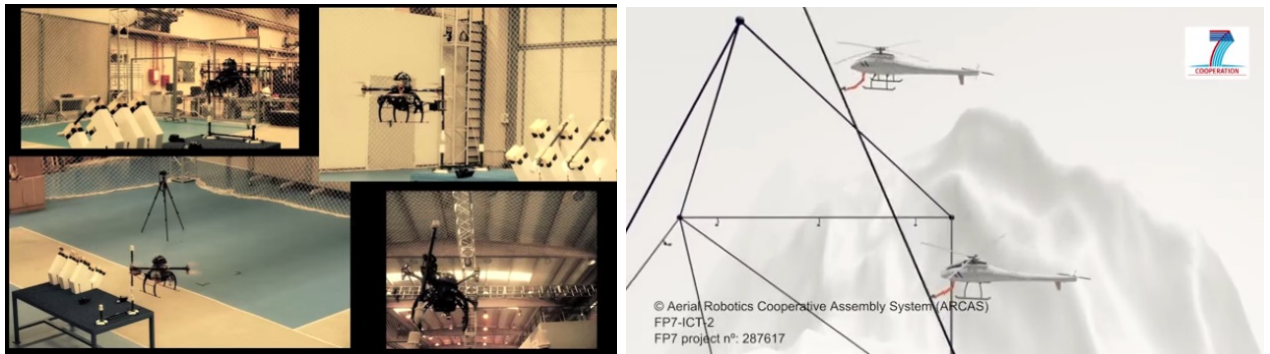
Adotando manipuladores aéreos, tarefas que envolvem manipulação, transporte e acoplamento físico podem ser consideradas. Entretanto, a execução de tais tarefas agrega um número de problemas ao sistema, além daquelas já apresentadas para os VANTs. O mecanismo de acoplamento entre os dois sistemas introduz problemas de estabilidade devido ao movimento do manipulador e a interação com o ambiente, causados principalmente pela variação de distribuição de massa (os centros de massa oscilam significativamente com o movimento do manipulador). Outro desafio é obter um modelo do sistema para que a execução da tarefa desejada seja realizada pelo efetuator. Portanto, devem-se utilizar técnicas de modelagem e controle específicas para obter bom desempenho.

## 1.1 Justificativas

O presente trabalho realiza a modelagem de corpo completo de um veículo aéreo não tripulado (VANT), do tipo quadrirrotor, acoplado a um manipulador. Esse conjunto também é denominado de manipulador aéreo. Escolhe-se trabalhar com manipuladores aéreos, que são manipuladores móveis que possuem um veículo aéreo como base, pois se une as vantagens e capacidades dos dois sistemas, ou seja, aumenta-se a diversidade de aplicações e reduzem-se os limites de acessibilidade. Além disso, realiza-se a modelagem

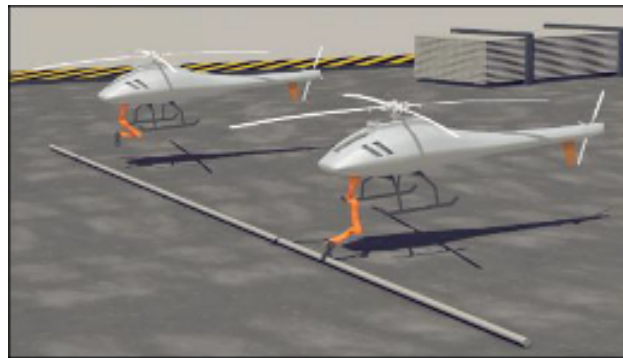
<sup>4</sup><https://www.grasp.upenn.edu/research-groups/kumar-lab>

<sup>5</sup><http://www.arcas-project.eu/>



(a) Projeto ARCAS 2Y.

(b) Projeto ARCAS-1.



(c) Projeto ARCAS-2.

Figura 1.5: Manipuladores aéreos do projeto ARCAS FP7 European Project.

para dois tipos de manipuladores aéreos, sendo o primeiro formado pelo quadricóptero acoplado a um manipulador planar de três elos e o segundo pelo quadricóptero acoplado a um manipulador de cinco elos. Escolheu-se a primeira configuração, pois o braço robótico consegue se mover em uma ampla área de manipulação com um número reduzido de acionamentos, o que reduz o peso total do braço. Já a segunda configuração proporciona ao sistema redundância cinemática e o manipulador pode realizar movimentos de rolagem (*roll*) e arfagem (*pitch*), os quais, caso fossem realizados pelo quadricóptero e não pelo manipulador, poderiam desestabilizar todo o sistema.

A partir da modelagem de corpo completo de um manipulador aéreo, que fornece um modelo único e simplificado, é possível gerar tarefas no nível do efetuador. Neste caso, a movimentação é fluída e contínua, ou seja, não precisa mover somente o quadricóptero e depois, enquanto este está planando, mover o manipulador. Outra vantagem é que, ao se obter o modelo dinâmico a partir do modelo cinemático completo com formulação de Euler-Lagrange, a influência do movimento do manipulador no centro de massa do quadricóptero é calculada indiretamente.

Para obter o modelo cinemático de corpo completo usa-se a álgebra de quatérnios duais. Essa álgebra possui eficiência computacional, ausência de singularidades representacionais e modelos expressivos. Por exemplo, quatérnios duais são usados para representar movimento de corpos rígidos, torques, forças e primitivas geométricas.

As leis de controle desenvolvidas para o manipulador aéreo requerem que o sistema siga uma trajetória desejada no nível do efetuador. Para o presente estudo, é importante que o sistema se mantenha estável, mesmo na presença de distúrbios externos, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. As leis de controle são projetadas para sistemas subatuados, não lineares e considera-se, indiretamente, o efeito de acoplamento entre os sistemas no modelo dinâmico. Os resultados desses controladores são apresentados por meio de simulações. Além disso, elas devem ser projetadas para os dois diferentes tipos de manipuladores aéreos. No entanto, a metodologia utilizada é geral o suficiente para ser aplicada em qualquer manipulador aéreo. Projetam-se, basicamente, três tipos de controladores, sendo, todos eles, uma estrutura de controle em cascata, formados por dois níveis que se diferenciam entre eles. No primeiro caso, tem-se no nível externo um controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$ , que calcula os movimentos de referência no espaço das juntas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , os quais são rastreados por um controlador de dinâmica inversa  $\mathbf{\Gamma}$  no nível interno. O controlador de dinâmica inversa é também modificado, tendo na sua malha externa um controlador cinemático no espaço da tarefa, que é o espaço onde a tarefa está sendo realizada. No segundo caso, tem-se um controlador similar ao apresentado no primeiro, mas o controlador do nível interno é obtido pela linearização por realimentação, utilizando variáveis de estado e Álgebra de Lie. No terceiro e último caso, tem-se um controlador  $H_\infty$  linear no controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$  do nível externo. Neste caso, o nível externo também computa os movimentos de referência no espaço das juntas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , que são rastreados por um controlador de dinâmica inversa  $\mathbf{\Gamma}$  no nível interno.

## 1.2 Objetivos

Modelar, de forma única, um manipulador aéreo formado por um veículo aéreo não tripulado (VANT), do tipo quadricóptero, acoplado a um manipulador, utilizando a álgebra de quatérnios duais. A partir deste, obter um modelo dinâmico que expresse a influência do movimento do manipulador no centro de massa do quadricóptero. E por fim, controlar o sistema para que este realize tarefas no nível do efetuador enquanto o veículo se mantém estável.

Os objetivos específicos são:

- Obter os modelos cinemático e dinâmico de corpo completo de manipuladores aéreos.
- Propor estratégias de controle para o manipulador aéreo, para realizar tarefas desejadas no nível do efetuador, enquanto o sistema se mantém estável.
- Simular as leis de controle propostas.
- Apresentar os resultados dos controladores.



### 1.3 Estruturas da dissertação

A dissertação é organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta o estado da arte relacionado a manipuladores aéreos. Nele se encontram a modelagem e vários tipos de controladores utilizados neste sistema, a fim de fornecer as bases para a construção do trabalho.
- Capítulo 3: apresenta a modelagem utilizada no estudo. Primeiramente, descreve-se a base matemática da representação dos movimentos rígidos usando quatérnios duais, necessária para compreensão dos conceitos desenvolvidos no capítulo. Em seguida, a modelagem cinemática direta e diferencial do sistema completo é apresentada. E por último, apresenta-se o modelo dinâmico do sistema a partir da formulação de Euler-Lagrange.
- Capítulo 4: apresenta os controladores propostos. Inicialmente, introduz-se a base matemática dos controladores utilizados, sendo esta necessária para compreensão dos conceitos desenvolvidos ao longo do capítulo. A seguir, são apresentados os controladores, considerando uma divisão com base na configuração do manipulador.
- Capítulo 5: descrevem-se os resultados das simulações dos controladores propostos no trabalho.
- Capítulo 6: resume as contribuições e os resultados obtidos, além de apresentar sugestões para trabalhos futuros.

### 1.4 Contribuições

O artigo “Whole-body Modeling and Control of an Unmanned Aerial Manipulator” foi apresentado e publicado nos Anais do XII Simpósio Brasileiro de Automática Inteligente 2015 (Mello et al., 2015).

# 2

## Estado da arte

Este capítulo apresenta inicialmente o estado da arte de veículos aéreos não tripulados (VANTs) e em seguida o de manipuladores aéreos. O objetivo é mostrar que os manipuladores aéreos requerem técnicas de modelagem e controle complexas, pois são sistemas subatuados, não lineares e com efeitos de acoplamento. A partir disso, busca-se justificar o uso das técnicas apresentadas neste trabalho.

### 2.1 Veículos aéreos não tripulados

Nos últimos anos é crescente o interesse da comunidade acadêmica e industrial pelo campo da robótica aérea. VANTs são frequentemente utilizados em vários cenários de aplicações “passivas”, tais como inspeção, sensoriamento remoto, vigilância, monitoramento, etc (Marconi et al., 2012; Kim & Shim, 2003). No entanto, ultimamente, estes veículos são utilizados em tarefas “ativas” como agarrar e manipular objetos. Um exemplo disso é a inspeção remota por contato em plantas industriais descrita em Fumagalli et al. (2012). Por outro lado, a troca entre tarefas “passivas” e “ativas” requer o desenvolvimento de dispositivos mecânicos a fim de tornar os VANTs plataformas mais complexas, como as plataformas terrestres. Manipuladores móveis terrestres podem ser tomados como exemplos deste cenário ativo (Adorno, 2011; Borst et al., 2009; Salazar-Sangucho & Adorno, 2014).

Entretanto, muitos VANTs ainda são utilizados em tarefas “ativas” sem modificação nas suas estruturas. Nestes casos, eles, ao interagir fisicamente com um objeto durante



o voo, apresentam vários problemas devido à dinâmica instável do veículo e aos efeitos de acoplamento dados pela presença do objeto. Estes problemas, muitas vezes, podem ser originados pelo deslocamento do centro de massa do VANT. Para solucionar isso, Palunko & Fierro (2011) desenvolveram três tipos de controladores em cascata adaptativos, com ação PD e *Feedforward* na aceleração, considerando a variação do centro de massa do quadricóptero. Já Antonelli et al. (2013) desenvolveram um controlador adaptativo que considera as perturbações externas e a não simetria do veículo a partir da matriz de acoplamento das entradas, para que o quadricóptero siga a trajetória desejada. Em Bouabdallah & Siegwart (2005) e Hoffmann et al. (2007), controladores backstepping foram desenvolvidos para solucionar a dinâmica instável do sistema e a não linearidade. Todavia, a forma mais otimizada de realizar as tarefas “ativas” é fazendo alterações nas estruturas da plataforma.

## 2.2 Manipuladores aéreos

Como descrito anteriormente, os VANTs são usados cada vez mais em tarefas “ativas”, o que requer uma modificação na sua estrutura, para que eles se tornem plataformas mais complexas. Os VANTs equipados com um braço robótico são uma solução eficiente para essa mudança, gerando um veículo aéreo com a capacidade de realizar agilmente tarefas de manipulação, denominado manipulador aéreo. Este sistema aumentou o número de tarefas possíveis de serem realizadas graças à união das habilidades dos dois sistemas - capacidade de manipulação de objeto dos manipuladores com a mobilidade dos VANTs -, como, por exemplo, abrir e fechar gavetas (Kim et al., 2015), abrir uma válvula (Korpela et al., 2014), construção de estruturas com barra (Cano et al., 2013) e construção de estruturas arquitetônicas com tijolos (Augugliaro et al., 2014).

Entretanto, a junção desses dois sistemas gera desafios que devem ser tratados através dos sistemas de controle. O manipulador aéreo é um sistema subatuado e não linear, que requer técnicas de controle mais complexas para realizar as suas tarefas. Além disso, a manipulação e o acoplamento entre o manipulador e o VANT geram mais problemas, devido aos efeitos de acoplamento no modelo dinâmico, uma vez que a sua dinâmica depende da configuração real de todas as variáveis do sistema. A seguir, são descritos alguns trabalhos que propõem diferentes técnicas de modelagem, controles, e estruturas para solucionar esses desafios.

### 2.2.1 Modelagem

A manipulação e o acoplamento entre o manipulador e o VANT podem gerar forças de contato capazes de desestabilizar o manipulador aéreo quando este está voando ou realizando alguma tarefa. Por isso, muitos pesquisadores tentam solucionar estes problemas

utilizando técnicas de modelagem em união às técnicas de controle. Korpela et al. (2011) foram um dos primeiros a investigar e desenvolver ferramentas necessárias para acoplar o manipulador ao VANT, tratando desses problemas. Eles utilizaram dois modelos dinâmicos, sendo um para cada parte do sistema, para construir controladores capazes de reagir às forças de reação e os efeitos da manipulação aérea, além de manter o sistema estável. Em Kondak et al. (2013), as influências impostas a um helicóptero a partir de um manipulador são analisadas.

Outro modo de reduzir os problemas de acoplamento é obter o modelo dinâmico completo do sistema e, a partir deste, projetar os controladores. Em Lippiello & Ruggiero (2012a), o modelo dinâmico do sistema completo é apresentado e aplicado a um controlador de impedância cartesiano, desenvolvido para lidar com forças de contato e perturbações externas durante a realização das tarefas propostas, enquanto que em Lippiello & Ruggiero (2012b), este controlador ainda é explorado considerando a redundância do manipulador aéreo, para a execução de tarefas secundárias. Já Heredia & Jimenez-Cano (2014), a partir de seu modelo dinâmico completo, desenvolveram um controlador backstepping, com parâmetros variáveis para um multirotor, que considerava o efeito da dinâmica completa e a variação da distribuição da massa quando o manipulador se movia. Kim et al. (2013) projetaram um controlador de modo deslizante adaptativo, que utilizava o modelo dinâmico completo, com estimações das matrizes, incertezas e distúrbios externos.

## 2.2.2 Controle

Os controladores são implementados nos manipuladores aéreos com a finalidade de superar os desafios impostos pelas características do sistema, como não linearidade, subatuação, dinâmica instável e efeito de acoplamento. Em Arleo et al. (2013), o problema do controle do movimento do efetuador de um braço robótico, acoplado a um quadricóptero, foi abordado a partir de uma arquitetura de controle hierárquica. Neste caso, tem-se na camada superior um algoritmo de cinemática inversa que calculava os valores de referências para as variáveis controladas, que eram a posição e o ângulo de guinada do quadricóptero e as variáveis do manipulador, enquanto que na camada inferior, um algoritmo de controle de movimento era responsável por rastrear as trajetórias de referências. Já Caccavale et al. (2014) fizeram adaptações no controlador responsável pela movimentação apresentado por Arleo et al. (2013), considerando as incertezas de modelagem e superando algumas suposições feitas pelo primeiro, como a estimação de incertezas e análise de estabilidade para o sistema em malha fechada.

Já Giglio & Pierri (2014) desenvolveram um controlador em cascata, sendo o primeiro nível formado por um controlador de cinemática inversa que gera, a partir da pose desejada do efetuador, a trajetória desejada para as variáveis acionadas; o segundo nível

consiste de um controlador com um filtro de impedância que fornece um comportamento compatível para o sistema na presença de interações do manipulador; e o terceiro nível é um controlador responsável por rastrear a trajetória.

Jimenez-Cano et al. (2013) apresentaram dois controladores em paralelo, sendo um controlador backstepping para o VANT e um controlador PID para o manipulador, a fim de realizar tarefas de manipulação em um braço robótico de 3 DOF. Mesmo desenvolvendo dois modelos dinâmicos, a influência do movimento de cada parte na localização do centro de massa do outro sistema foi expressa nesses modelos. Do mesmo modo, Kondak et al. (2014) desenvolveram um controlador formado por controladores PD independentes para cada parte do sistema, com acréscimo do acoplamento cinemático no eixo Z e do acoplamento dinâmico, capaz de rejeitar a variação do centro de massa e das forças de acoplamento.

Ruggiero et al. (2015) desenvolveram um controlador, com arquitetura de multicamadas, para reduzir os efeitos do movimento do manipulador no centro de massa do veículo multirrotores. Na primeira camada, a partir de um controlador PID, a bateria do multirotor se desloca para tentar compensar o deslocamento do centro de massa provocado pelo movimento do manipulador. Na segunda camada, o compensador estático calcula torques e empuxos para reduzir os efeitos estáticos do manipulador. Na terceira camada, o estimador de forças e momentos externos é apresentado. Esse controlador conseguiu reduzir o erro das variáveis ao rastrear uma trajetória, mesmo sob o efeito de distúrbios.

### 2.2.3 Modificações na estrutura do sistema

A modificação na estrutura dos manipuladores, junto com técnicas de controle, também é usada para reduzir os efeitos de manipulação, principalmente à variação do centro de massa do quadrirrotor quando o manipulador se movimenta. Korpela et al. (2013) projetaram dois controladores em paralelo, sendo um para o quadrirrotor e um para dois braços robóticos. Neste caso, os movimentos dos braços agiam em conjunto com o movimento do quadrirrotor, para manter o sistema estável durante o voo e a manipulação. De modo similar, Orsag et al. (2013) desenvolveram um manipulador aéreo composto por três braços robóticos, defasados entre si de  $120^\circ$ . O controlador deste trabalho tentava equilibrar o movimento de um braço movendo os outros braços, para que as forças de interação não desestabilizassem o sistema e não variasse o centro de massa do quadrirrotor, reduzindo, portanto, as forças de acoplamento no movimento do manipulador. Já Danko & Oh (2014) mostraram que o desenvolvimento dos manipuladores tem importante impacto no desempenho do sistema e apresentaram um manipulador hiper-redundante, que podia executar tarefas de forma mais eficiente.

Bellicoso et al. (2015) desenvolveram, modelaram e controlaram um braço manipulador de 5 DOF (graus de liberdade) para manipulação aérea que, pela sua mecânica, era

capaz de dobrar sobre si mesmo, com o propósito de manter o seu centro de massa próximo ao centro de massa do veículo aéreo quando estivesse transportando algum objeto. Para simplificar o modelo cinemático, consideraram que o manipulador não realizava o movimento de guinada (este era realizado pelo veículo aéreo) e os movimentos de arfagem e rolagem eram obtidos pela combinação dos movimentos das juntas. Além disso, considerou-se no modelo dinâmico os efeitos estáticos de atrito e viscosidades dos motores e forças externas, expressos na matriz de acoplamento entre os sistemas. Finalmente, testes em um protótipo validaram o modelo dinâmico, os sistemas mecânico e eletrônico e as leis de controle de impedância implementadas para o braço do robô projetado.

## 2.3 Conclusão

Todos os trabalhos citados acima apresentaram técnicas de modelagem, controle e modificações estruturais, que são contribuições nas pesquisas para que os manipuladores aéreos consigam realizar tarefas e superar os seus problemas, como não linearidade, subatuação e efeito de acoplamento. Eles fornecem a base no qual os modelos desta dissertação são construídos.

Toma-se como base a modelagem de corpo completo, realizado por alguns autores apresentados na Seção 2.2.1, pois neste caso, os efeitos de acoplamento entre os sistemas são obtidos diretamente no modelo dinâmico. Assim, a partir deste modelo, propõem-se as leis de controle, que são mais simples do que aquelas apresentadas por muitos autores, mas que conseguem, do mesmo modo, superar as dificuldades características do sistema. Estas leis têm como objetivo executar tarefas no nível do efetuador, sendo estas somente possíveis de serem realizadas por causa do modelo.

Este trabalho possui um avanço na modelagem, pois utiliza a álgebra de quatérnios duais que pode representar movimentos de corpos rígidos de forma simples e direta. Ela é também menos complexa que as matrizes de transformações homogêneas, que são utilizadas em todos os trabalhos apresentados anteriormente. Outra vantagem de se obter o modelo de corpo completo é gerar apenas uma trajetória para o sistema, sendo esta para o efetuador. Neste caso não é necessário gerar uma trajetória para o quadricóptero, pois o controlador ajusta este percurso indiretamente.

Deve-se ressaltar que a transdisciplinaridade é importante neste trabalho, uma vez que os avanços de várias áreas, principalmente da robótica e de controle, possibilitaram o desenvolvimento de manipuladores aéreos mais complexos, com maior utilidade e aproveitamento das tecnologias disponíveis.

# 3

## Modelagem de um Manipulador Aéreo

Este capítulo se concentra na modelagem de um veículo aéreo não tripulado (VANT), o quadricóptero, acoplado a um manipulador. Este sistema é também denominado de manipulador aéreo. As equações cinemáticas de corpo completo são desenvolvidas baseando-se na álgebra de quatérnios duais e as equações dinâmicas são obtidas pela formulação de Euler-Lagrange. O manipulador aéreo utilizado neste trabalho é um sistema composto por dois sistemas acoplados (Figura 3.1):

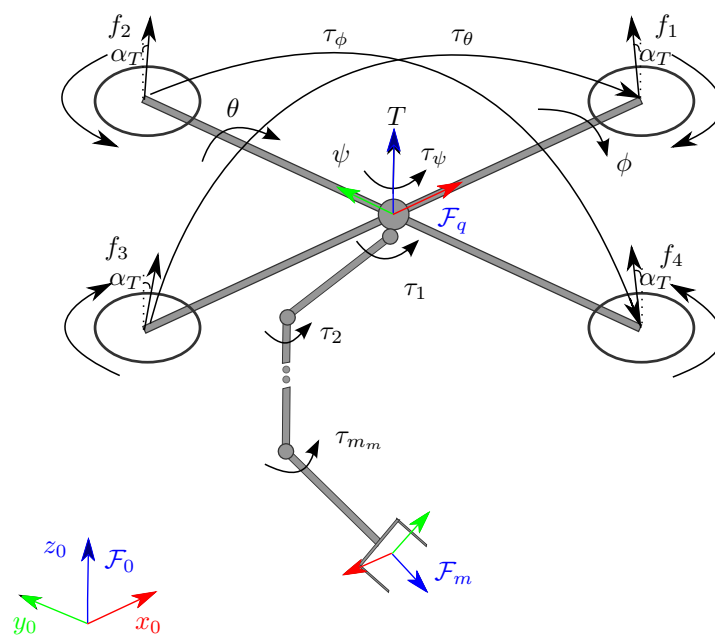


Figura 3.1: Manipulador Aéreo.

- O quadrirrotor: veículo não tripulado composto por quatro rotores inclinados em relação ao eixo vertical.
- O manipulador: composto por três ou cinco elos ligados por juntas de revolução.

Os movimentos do quadrirrotor ocorrem a partir da variação das forças geradas por cada rotor (Figura 3.1). Movimentos longitudinais, ou movimentos de arfagem (*pitch*), são obtidos variando a velocidade dos rotores anteriores e posteriores, de forma a alterar as forças  $f_1$  e  $f_3$ . Os movimentos laterais, ou movimentos de rolagem (*roll*), são obtidos variando a velocidade dos rotores direito e esquerdo, de forma a alterar as forças  $f_2$  e  $f_4$ . Já os movimentos de guinada (*yaw*) são obtidos com base na diferença entre as velocidades dos rotores 1 e 3 com os rotores 2 e 4, que geram as forças  $(f_1, f_3)$  e  $(f_2, f_4)$ , respectivamente. Neste caso, dois rotores devem aumentar a velocidade no sentido horário, enquanto os outros dois devem reduzir a velocidade no sentido anti-horário, e vice-versa. Estes movimentos são possíveis porque o primeiro par gira em sentido contrário ao segundo par. Por último, o empuxo total, localizado no centro do veículo, é obtido pela soma das quatro forças geradas pelos rotores (Raffo, 2011).

Já os movimentos dos elos do manipulador são gerados pelos torques de cada junta (Figura 3.1). Duas configurações do manipulador são utilizadas neste trabalho. A primeira consiste em um manipulador planar formado por três elos. Os eixos de suas juntas são paralelos ao plano horizontal do quadrirrotor, por isso o manipulador consegue realizar movimentos no plano perpendicular ao eixo  $Z$  de  $\mathcal{F}_q$ . Já a segunda configuração é um manipulador formado por cinco elos, sendo que três desses formam um punho esférico. Nessa configuração, os torques das juntas são aplicados em torno dos três eixos e o manipulador consegue se mover nas três dimensões. Mais detalhes da modelagem do sistema são descritos nas seções seguintes.

A Seção 3.1 apresenta os fundamentos matemáticos utilizados para realizar a modelagem do sistema. A Seção 3.2 apresenta as coordenadas generalizadas do sistema. A Seção 3.3 apresenta o modelo cinemático de corpo completo do sistema utilizando a álgebra de quatérnios duais. A Seção 3.4 obtém o modelo dinâmico usando a formulação de Euler-Lagrange. Finalmente, a Seção 3.5 traz os parâmetros do manipulador aéreo.

### 3.1 Fundamentos matemáticos

O uso da álgebra de quatérnios duais em robótica aumentou nos últimos anos, graças a sua eficiência computacional, ausência de singularidades representacionais e modelos expressivos. Por exemplo, quatérnios duais são usados para representar movimento de corpos rígidos, torques, forças e primitivas geométricas (Adorno, 2011). As seguintes seções descrevem a álgebra de quatérnios duais, a sua representação de movimentos e seu uso no modelo cinemático de robôs.

### 3.1.1 Quatérnios

Os quatérnios, introduzidos por Hamilton no século XIX e denotados pelo conjunto  $\mathbb{H}$ , são a extensão do conjunto dos números complexos, no qual os números imaginários, também conhecidos por unidades quaterniônicas,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , são usados e possuem as propriedades (Adorno, 2011)

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1. \quad (3.1)$$

**Definição 3.1.** O quatérnio  $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$  é definido como

$$\mathbf{a} \triangleq a_1 + \hat{i}a_2 + \hat{j}a_3 + \hat{k}a_4,$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4 \in \mathbb{R}$  e possui uma parte real,  $\text{Re}(\mathbf{a}) \triangleq a_1$ , e uma parte imaginária,  $\text{Im}(\mathbf{a}) \triangleq \hat{i}a_2 + \hat{j}a_3 + \hat{k}a_4$ .

Por se tratar de uma álgebra, os quatérnios possuem operações entre elementos, como soma, subtração, multiplicação, entre outras, definidas a seguir.

**Definição 3.2.** Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}$ , a adição/subtração de quatérnios, que gera como resultado outro quatérnio, é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_1 + \hat{i}a_2 + \hat{j}a_3 + \hat{k}a_4) \pm (b_1 + \hat{i}b_2 + \hat{j}b_3 + \hat{k}b_4) \\ &= a_1 \pm b_1 + \hat{i}(a_2 \pm b_2) + \hat{j}(a_3 \pm b_3) + \hat{k}(a_4 \pm b_4). \end{aligned}$$

**Definição 3.3.** Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}$ , a multiplicação entre quatérnios, utilizando as propriedades apresentadas em (3.1), é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{b} &= (a_1 + \hat{i}a_2 + \hat{j}a_3 + \hat{k}a_4) (b_1 + \hat{i}b_2 + \hat{j}b_3 + \hat{k}b_4) \\ &= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + \\ &\quad (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3) \hat{i} + \\ &\quad (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2) \hat{j} + \\ &\quad (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1) \hat{k}. \end{aligned}$$

Como se pode ver pelas definições anteriores, o grupo dos quatérnios  $\mathbb{H}$  é um grupo associativo e distributivo, mas não é comutativo, ou seja,

$$\mathbf{a}\mathbf{b} \neq \mathbf{b}\mathbf{a}.$$

**Definição 3.4.** Seja  $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$ , o conjugado do quatérnio é dado por

$$\mathbf{a}^* = \text{Re}(\mathbf{a}) - \text{Im}(\mathbf{a}).$$

**Definição 3.5.** Seja  $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$ , a norma do quatérnio é dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^* \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a} \mathbf{a}^*}.$$

A partir da definição 3.5, obtém-se uma relação muito útil na álgebra de quatérnios, quando se trabalha com quatérnios unitários. Isso porque, para quatérnios unitários,

$$\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^*,$$

ou seja, o inverso de um quatérnio é igual ao seu conjugado. Logo,

$$\mathbf{a} \mathbf{a}^* = 1.$$

### 3.1.2 Quatérnios duais

Os quatérnios duais, denotados pelo conjunto  $\mathcal{H}$ , são compostos por dois quatérnios e uma unidade dual  $\varepsilon$ , que possui as propriedades  $\varepsilon \neq 0$  e  $\varepsilon^2 = 0$  (Selig, 2005). Eles permitem representar o movimento de corpos rígidos, além da modelagem de cadeias cinemáticas, sendo esta representação intuitiva, compacta e livre de singularidades (Adorno, 2011). Especificamente, podem representar posição e orientação utilizando oito parâmetros, e desempenham o mesmo papel das matrizes de transformação homogênea.

**Definição 3.6.** Sejam  $\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_d \in \mathbb{H}$ , um quatérnio dual  $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}$  é definido como (Selig, 2005)

$$\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_p + \varepsilon \mathbf{a}_d,$$

sendo que  $\mathbf{a}_p$  corresponde à parte primária, também denominada por  $\mathcal{P}(\underline{\mathbf{a}})$  e  $\mathbf{a}_d$  corresponde à parte dual, também denominada por  $\mathcal{D}(\underline{\mathbf{a}})$ .

**Definição 3.7.** Sejam  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{H}$ , a adição/subtração de quatérnios duais, que resulta em outro quatérnio dual, é definida por

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \pm \underline{\mathbf{b}} &= (\mathbf{a}_p + \varepsilon \mathbf{a}_d) \pm (\mathbf{b}_p + \varepsilon \mathbf{b}_d) \\ &= \mathbf{a}_p \pm \mathbf{b}_p + \varepsilon (\mathbf{a}_d \pm \mathbf{b}_d). \end{aligned}$$

**Definição 3.8.** Sejam  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \in \mathcal{H}$ , a multiplicação de quatérnios duais, considerando as propriedades da unidade dual (Selig, 2005), é definida por

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{b}} &= (\mathbf{a}_p + \varepsilon \mathbf{a}_d) (\mathbf{b}_p + \varepsilon \mathbf{b}_d) \\ &= \mathbf{a}_p \mathbf{b}_p + \varepsilon (\mathbf{a}_p \mathbf{b}_d + \mathbf{a}_d \mathbf{b}_p). \end{aligned}$$

Assim como para os quatérnios, o grupo dos quatérnios duais  $\mathcal{H}$  é um grupo associativo e distributivo, mas não é comutativo.



**Definição 3.9.** Seja  $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}$ , o conjugado do quatérnio dual é definido por

$$\underline{\mathbf{a}}^* = \mathbf{a}_p^* + \varepsilon \mathbf{a}_d^*.$$

**Definição 3.10.** Seja  $\underline{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}$ , a norma do quatérnio dual é definida por

$$\|\underline{\mathbf{a}}\| = \sqrt{\underline{\mathbf{a}}^* \underline{\mathbf{a}}} = \sqrt{\underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{a}}^*}.$$

Assim, como para os quatérnios unitários, o inverso de um quatérnio dual unitário é igual ao seu conjugado. Portanto,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}} \underline{\mathbf{a}}^* &= 1, \\ \underline{\mathbf{a}}^{-1} &= \underline{\mathbf{a}}^*. \end{aligned}$$

**Definição 3.11.** Seja o quatérnio dual  $\underline{\mathbf{a}} = a_1 + a_2 \hat{i} + a_3 \hat{j} + a_4 \hat{k} + \varepsilon (a_5 + a_6 \hat{i} + a_7 \hat{j} + a_8 \hat{k})$ , o operador vec possibilita o mapeamento  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^8$ , definido por

$$\text{vec } \underline{\mathbf{a}} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_8]^T.$$

De forma análoga para o quatérnio  $\mathbf{a}$ , pode-se fazer o mapeamento bijetor  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ , utilizando-se o operador  $\text{vec}_4$  (Adorno, 2011).

Outros operadores úteis na álgebra de quatérnios são os operadores de Hamilton  $\overset{+}{\mathbf{H}}(\cdot)$  e  $\overset{-}{\mathbf{H}}(\cdot)$  (Adorno, 2011), sendo

$$\overset{+}{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}})) & 0_4 \\ \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}})) & \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}})) \end{bmatrix}, \quad \overset{-}{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} \overset{-}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{y}})) & 0_4 \\ \overset{-}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{y}})) & \overset{-}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{y}})) \end{bmatrix},$$

onde

$$\overset{+}{\mathbf{H}}_4(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \quad \overset{-}{\mathbf{H}}_4(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{bmatrix}.$$

Apesar da multiplicação de quatérnios duais não ser comutativa, os operadores de Hamilton podem ser usados para, convenientemente, inverter a ordem dos termos em uma multiplicação de quatérnios duais (Adorno, 2011). Especificamente, a multiplicação dos quatérnios duais  $\underline{\mathbf{x}}_1, \underline{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{H}$  pode ser representada como

$$\text{vec}(\underline{\mathbf{x}}_1 \underline{\mathbf{x}}_2) = \overset{+}{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}_1) \text{vec } \underline{\mathbf{x}}_2 = \overset{-}{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{x}}_2) \text{vec } \underline{\mathbf{x}}_1.$$

### 3.1.3 Representação de movimentos rígidos usando quatérnios duais

A pose de um corpo rígido, representado pela sua rotação e translação, pode ser descrita em relação a um sistema de coordenadas de referência utilizando quatérnios, ou de forma única, por um quatérnio dual unitário (Adorno, 2011). Essa representação é usada em movimentos rígidos, como por exemplo, em movimentos de manipuladores, robôs móveis, etc.

**Definição 3.12.** Seja  $[p_x \ p_y \ p_z]^T \in \mathbb{R}^3$  a coordenada de um ponto com respeito a um sistema de coordenadas de referência  $\mathcal{F}_0$ . A sua posição  $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$  é definida por um quatérnio puro

$$\mathbf{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}. \quad (3.2)$$

**Definição 3.13.** Seja  $\phi$  o ângulo de rotação em torno de um eixo de rotação de norma unitária  $\mathbf{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ , a rotação  $\mathbf{r} \in \mathbb{H}$  é representada como

$$\mathbf{r} = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathbf{n}. \quad (3.3)$$

**Definição 3.14.** Sejam  $\mathbf{p}_1^0, \mathbf{r}_1^0 \in \mathbb{H}$  e definidos por (3.2) e (3.3), respectivamente, a pose de um corpo rígido, determinado no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_1$ , em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , é definida pelo quatérnio dual unitário (Adorno, 2011)

$$\underline{\mathbf{x}}_1^0 = \mathbf{r}_1^0 + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{p}_1^0 \mathbf{r}_1^0. \quad (3.4)$$

Este conjunto de quatérnios duais unitários forma o grupo algébrico  $\text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$  (Selig, 2005). Um exemplo da transformação homogênea, expressa por (3.4), pode ser visto na Figura 3.2. Neste caso, primeiro realiza-se a translação  $\mathbf{p}_1^0$  e depois a rotação  $\mathbf{r}_1^0$ .

A rotação  $\mathbf{r}_1^0$  pode ser obtida diretamente de  $\underline{\mathbf{x}}_1^0$ , a partir de sua parte primária, sendo

$$\mathbf{r}_1^0 = \mathcal{P}\left(\underline{\mathbf{x}}_1^0\right).$$

Já a posição  $\mathbf{p}_1^0$  é extraída com base em (3.4), como

$$\mathbf{p}_1^0 = 2 \mathcal{D}\left(\underline{\mathbf{x}}_1^0\right) \mathcal{P}\left(\underline{\mathbf{x}}_1^0\right)^* = 2 \mathcal{D}\left(\underline{\mathbf{x}}_1^0\right) \left(\mathbf{r}_1^0\right)^*. \quad (3.5)$$

**Definição 3.15.** Sejam  $\underline{\mathbf{x}}_1^0, \underline{\mathbf{x}}_2^1, \dots, \underline{\mathbf{x}}_n^{n-1} \in \mathcal{H}$  uma sequência de  $n$  transformações intermediárias, o quatérnio dual unitário resultante é o produto

$$\underline{\mathbf{x}}_n^0 = \underline{\mathbf{x}}_1^0 \underline{\mathbf{x}}_2^1 \cdots \underline{\mathbf{x}}_n^{n-1}.$$

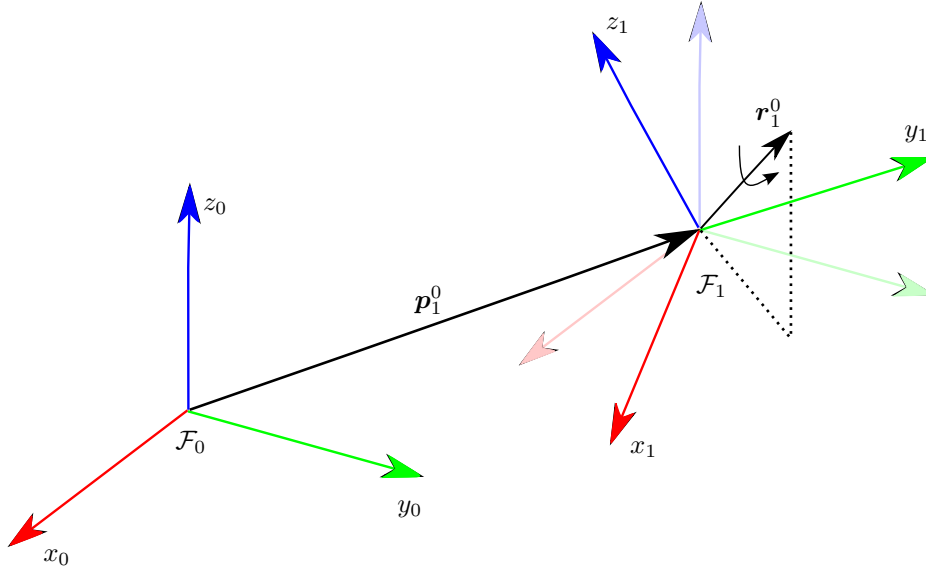


Figura 3.2: Exemplo de transformação homogênea entre os sistemas de coordenadas  $\mathcal{F}_0$  e  $\mathcal{F}_1$ . Adaptado de Adorno (2011).

A sequência de transformações, utilizando quatérnios duais, é exemplificada na Figura 3.3. Neste caso tem-se  $\underline{\mathbf{x}}_2^0 = \underline{\mathbf{x}}_1^0 \underline{\mathbf{x}}_2^1$ .

**Definição 3.16.** Seja  $\underline{\mathbf{x}}_1^0 \in \mathcal{H}$  o quatérnio dual unitário que representa a transformação homogênea de um corpo rígido, no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_1$  em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ . O inverso dessa transformação, o quatérnio dual unitário  $\underline{\mathbf{x}}_0^1$ , que representa a transformação do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_1$ , é representado pelo conjugado

$$\underline{\mathbf{x}}_0^1 = \underline{\mathbf{x}}_1^0{}^*.$$

### 3.1.4 Convenção Denavit-Hartenberg (DH)

Os quatro parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH) descrevem a relação de um elo em uma cadeia cinemática, em relação ao elo anterior, e são usados tipicamente em robôs manipuladores (Siciliano et al., 2009; Spong et al., 2006). Esses parâmetros, apresentados na Figura 3.4, são:

- $d$  : translação ao longo do eixo  $z_0$ ;
- $\theta$  : rotação em torno do eixo  $z_0$ ;
- $a$  : translação ao longo do eixo  $x_1$ ;
- $\alpha$  : rotação em torno do eixo  $x_1$ .

A representação da convenção DH no espaço de quatérnios duais consiste de multiplicar os quatro quatérnios duais correspondentes a cada transformação (Adorno, 2011). Assim,

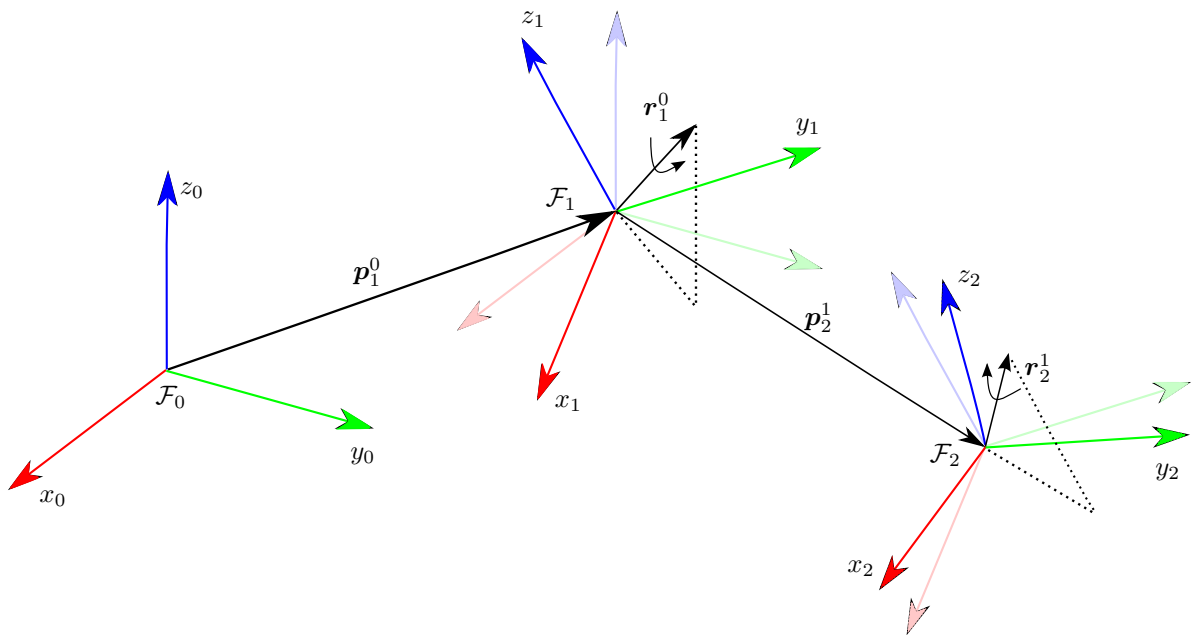


Figura 3.3: Exemplo da sequência de transformações. Adaptado de Adorno (2011).

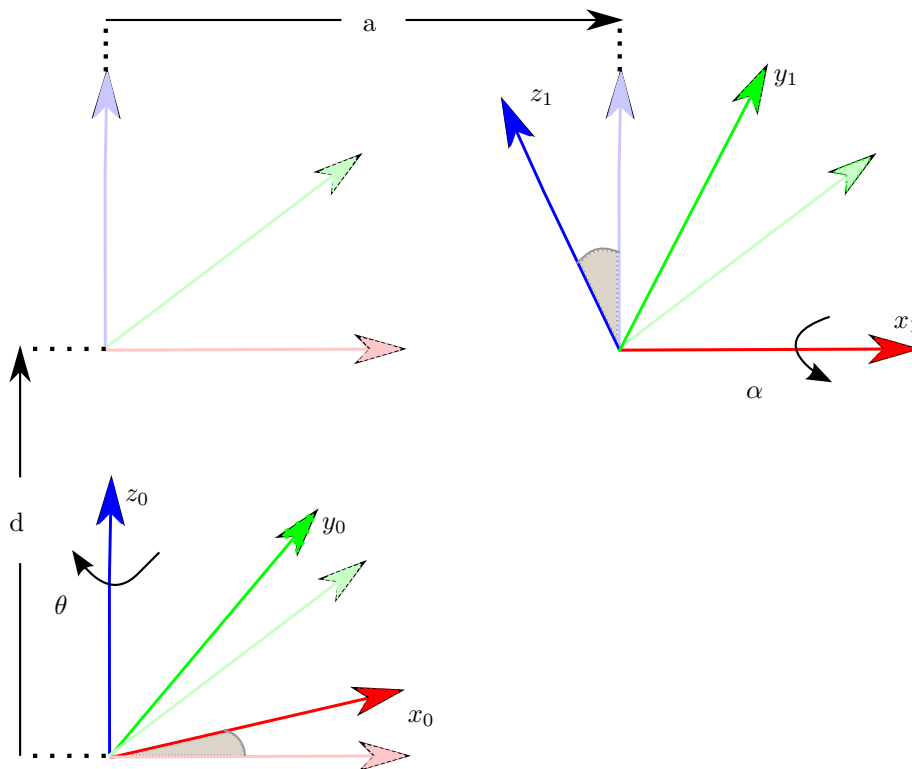


Figura 3.4: Exemplo de transformações correspondentes aos parâmetros da convenção DH. Adaptado de Adorno (2011).

$$\underline{\mathbf{x}}_{DH} = \mathbf{r}_{z,\theta} \underline{\mathbf{p}}_{z,d} \underline{\mathbf{p}}_{x,a} \mathbf{r}_{x,\alpha}, \quad (3.6)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{z,\theta} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{k}, \\ \mathbf{r}_{x,\alpha} &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{i}, \\ \underline{\mathbf{p}}_{z,d} &= 1 + \varepsilon \left(\frac{d}{2}\right) \hat{k}, \\ \underline{\mathbf{p}}_{x,a} &= 1 + \varepsilon \left(\frac{a}{2}\right) \hat{i}. \end{aligned}$$

### 3.1.5 Modelo cinemático direto e diferencial direto do corpo completo

O modelo cinemático direto (FKM) representa o mapeamento  $\underline{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Spin}(3) \times \mathbb{R}^3$  entre a configuração das juntas e a pose do efetuador (Adorno, 2011), que é

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{f}}(\mathbf{q}),$$

sendo  $\underline{\mathbf{x}}$  a pose do efetuador e  $\mathbf{q}$  o vetor das variáveis das juntas.

O modelo cinemático direto diferencial (DFKM), por outro lado, representa o mapeamento entre as derivadas do vetor das variáveis das juntas e as derivadas do quatérnio dual, que representa a pose do efetuador (Adorno, 2011); isso é,

$$\text{vec } \dot{\underline{\mathbf{x}}} = J\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.7)$$

$$\text{vec } \ddot{\underline{\mathbf{x}}} = \dot{J}\dot{\mathbf{q}} + J\ddot{\mathbf{q}}, \quad (3.8)$$

onde  $J = \partial \text{vec } \underline{\mathbf{x}} / \partial \mathbf{q}$  é a Jacobiana analítica.

Um robô manipulador é representado como uma cadeia cinemática de corpos rígidos de elos conectados por juntas prismáticas ou de revolução. O movimento resultante do último elo é obtido pela composição dos movimentos dos elos anteriores. Assim, quando se considera sistemas de cadeia serial como, por exemplo, em robôs manipuladores seriais, o FKM do  $n$ -ésimo elo em relação à sua base é dado por

$$\underline{\mathbf{x}}_n^0 = \underline{\mathbf{x}}_1^0 \underline{\mathbf{x}}_2^1 \cdots \underline{\mathbf{x}}_n^{n-1}, \quad (3.9)$$

sendo que o quatérnio dual  $\underline{\mathbf{x}}_i^{i-1}$ , para  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , é obtido considerando a convenção

DH descrita na Seção 3.1.4. Para obter o DFKM, deriva-se (3.9) (Adorno, 2011), tendo

$$\dot{\mathbf{x}}_n^0 = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{x}_i^0 \dot{\mathbf{x}}_{i+1}^i \mathbf{x}_n^{i+1}. \quad (3.10)$$

Sabe-se que

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1}^i = \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}^i}{\partial q_{i+1}} \dot{q}_{i+1}$$

e ao substituir este termo na derivada (3.10), obtém-se a  $j_i$ -ésima coluna da Jacobiana analítica, para  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ , que é

$$j_i \triangleq \mathbf{x}_i^0 \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}^i}{\partial q_{i+1}} \mathbf{x}_{i+1}^{0*} \mathbf{x}_n^0. \quad (3.11)$$

Para encontrar a Jacobiana geométrica, que também se utiliza neste trabalho, é necessária a próxima definição.

**Definição 3.17.** Seja  $\mathbf{r}_b^a \in \mathbb{H}$  um quatérnio unitário que representa a rotação de  $\theta$  do corpo rígido do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_b$ , em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_a$ . A relação entre a derivada temporal de  $\mathbf{r}_b^a$  com a velocidade angular  $\mathbf{w}_{ab}^b \in \mathbb{H}$  do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_b$ , em relação ao sistema  $\mathcal{F}_a$ , expresso no sistema  $\mathcal{F}_b$ , é dada por (Adorno, 2011)

$$\dot{\mathbf{r}}_b^a = \frac{1}{2} \mathbf{r}_b^a \mathbf{w}_{ab}^b. \quad (3.12)$$

De modo análogo, a relação entre a derivada temporal de  $\mathbf{r}_b^a$  com a velocidade angular  $\mathbf{w}_{ab}^a$  do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_b$ , em relação ao sistema  $\mathcal{F}_a$ , expresso no sistema  $\mathcal{F}_a$  é dada por

$$\dot{\mathbf{r}}_b^a = \frac{1}{2} \mathbf{w}_{ab}^a \mathbf{r}_b^a.$$

Portanto, é possível obter a relação

$$\text{vec}_4 \mathbf{w}_{ab}^b \triangleq \bar{J}_w \dot{\mathbf{q}}$$

a partir de (3.12), juntamente com a derivada de (3.4), em que  $\bar{J}_w$  é a Jacobiana geométrica relacionada à velocidade angular  $\mathbf{w}_{ab}^b$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  é o vetor das derivadas temporais das variáveis de entrada do sistema. Neste último caso,

$$\dot{\mathbf{x}}_b^a = \mathcal{P}(\dot{\mathbf{x}}_b^a) + \varepsilon \mathcal{D}(\dot{\mathbf{x}}_b^a), \quad (3.13)$$

sendo

$$\mathcal{P}(\dot{\mathbf{x}}_b^a) = \dot{\mathbf{r}}_b^a. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.12) em (3.14), tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_b^{a*} \mathbf{w}_{ab}^b \\ \implies \mathbf{w}_{ab}^b &= 2 \mathbf{r}_b^{a*} \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Considerando a definição

$$\text{vec } \dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a \triangleq \begin{bmatrix} \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\ \text{vec}_4 \mathcal{D}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \end{bmatrix} \triangleq J \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.16)$$

e mapeando (3.15) para  $\mathbb{R}^4$ , tem-se que

$$\begin{aligned}\text{vec } \mathbf{w}_{ab}^b &= 2 \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathbf{r}_b^{a*}) \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\ &= 2 \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\ \text{vec}_4 \mathcal{D}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix} J \dot{\mathbf{q}},\end{aligned}\quad (3.17)$$

onde  $0_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de zeros e  $J$  é a Jacobiana analítica do sistema. Logo, a Jacobiana geométrica da parte angular é

$$\bar{J}_w \triangleq G_1(\underline{\mathbf{x}}_b^a) J. \quad (3.18)$$

sendo  $G_1(\underline{\mathbf{x}}_b^a) \triangleq \begin{bmatrix} 2 \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}$ .

De modo análogo, pode-se obter a relação

$$\text{vec}_4 \mathbf{v}_{ab}^a \triangleq \bar{J}_v \dot{\mathbf{q}},$$

em que  $\bar{J}_v$  é a Jacobiana geométrica relacionada à velocidade linear  $\mathbf{v}_{ab}^a$  do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_b$ , em relação ao sistema  $\mathcal{F}_a$ , expresso no sistema  $\mathcal{F}_a$ , a partir da derivada de (3.5). Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{ab}^a &= \dot{\mathbf{p}}_{ab}^a \\ &= 2 \mathcal{D}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*}) + 2 \mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}_b^a) \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^{a*}).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Mapeando (3.19) para  $\mathbb{R}^4$  e considerando a definição (3.16), tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{vec } \mathbf{v}_{ab}^a &= 2\bar{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) \text{vec}_4 \mathcal{D}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) + 2\overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}_b^a)) C_4 \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\
 &= 2 \begin{bmatrix} \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}_b^a)) C_4 & \bar{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}_4 \mathcal{P}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \\ \text{vec}_4 \mathcal{D}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_b^a) \end{bmatrix} \\
 &= 2 \begin{bmatrix} \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}_b^a)) C_4 & \bar{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) \end{bmatrix} J\dot{\mathbf{q}},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde  $C_4 \triangleq \text{diag}([1 \ -1 \ -1 \ -1])$  é uma matriz diagonal. Logo,

$$\bar{J}_v \triangleq G_2(\underline{\mathbf{x}}_b^a) J, \tag{3.21}$$

sendo  $G_2(\underline{\mathbf{x}}_b^a) \triangleq 2 \begin{bmatrix} \overset{+}{\mathbf{H}}_4(\mathcal{D}(\underline{\mathbf{x}}_b^a)) C_4 & \bar{\mathbf{H}}_4(\mathcal{P}(\underline{\mathbf{x}}_b^{a*})) \end{bmatrix}$ .

Uma observação importante sobre as Jacobianas geométricas  $\bar{J}_w$  e  $\bar{J}_v$  é que, como as velocidades angular  $\mathbf{w}_{ab}^b$  e linear  $\mathbf{v}_{ab}^a$  são quatérnios puros, ou seja, possuem a parte real nula, essas Jacobianas são matrizes que possuem a primeira linha nula.

## 3.2 Coordenadas generalizadas

Esta seção define os sistemas de coordenadas e as coordenadas generalizadas dos manipuladores aéreos propostos, que consistem de um quadrirrotor acoplado a um manipulador de três ou cinco elos.

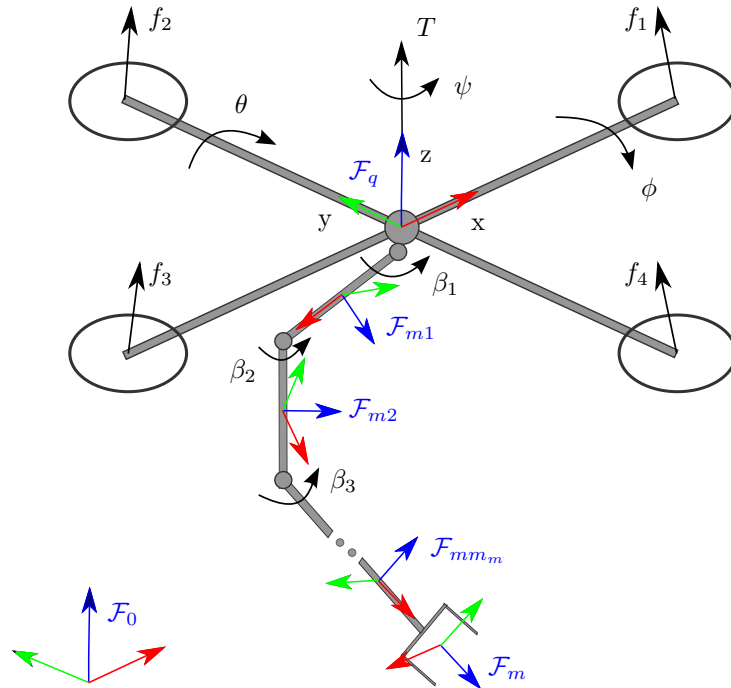


Figura 3.5: Sistemas de coordenadas do Manipulador Aéreo e definições de variáveis.



Considere os sistemas de coordenadas na Figura 3.5. Os sistemas de coordenadas são definidos como: inercial,  $\mathcal{F}_0$ ; do corpo do veículo,  $\mathcal{F}_q$ ; e do efetuador final,  $\mathcal{F}_m$ . Também são considerados os sistemas de coordenadas  $\mathcal{F}_{mi}$ , para  $i = \{1, \dots, m_m\}$ , no centro de massa de cada elo do manipulador, sendo  $m_m$  o número de elos. Como todos os elos são simétricos, o centro de massa corresponde ao centro geométrico.

O quadrrrotor possui seis graus de liberdade (DOF),  $\mathbf{q}_q \triangleq [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T$ . As variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  expressam a posição de  $\mathcal{F}_q$  em relação a  $\mathcal{F}_0$  e  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  representam a rotação sobre os eixos móveis  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente. O manipulador consiste de  $m_m$  elos conectados por juntas de revolução, dados por  $\mathbf{q}_m \triangleq [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_{m_m}]^T$ . Assim, o sistema completo tem  $6 + m_m$  DOF (Figura 3.5), que compõem o vetor de coordenadas generalizadas do manipulador aéreo; isto é:

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{q}_q \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}.$$

A seguir, os modelos cinemático e dinâmico são desenvolvidos para o manipulador aéreo ser capaz de realizar tarefas definidas no nível do efetuador.

### 3.3 Modelo cinemático

O FKM do manipulador aéreo considera os modelos do manipulador e do quadrrrotor para representar a pose do efetuador, definido pelo sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_m$ , com relação à  $\mathcal{F}_0$ .

O FKM do quadrrrotor é obtido considerando (3.4) e é dado por

$$\underline{\mathbf{x}}_q = \mathbf{r}_q + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{p}_q \mathbf{r}_q, \quad (3.22)$$

em que

$$\mathbf{p}_q = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

é a translação do quadrrrotor em relação ao sistema de coordenada inercial  $\mathcal{F}_0$  e

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_z \mathbf{r}_y \mathbf{r}_x$$

é a rotação usando a convenção *roll-pitch-yaw*, sendo  $\mathbf{r}_x$  a rotação  $\phi$  sobre o eixo fixo  $X$ ,  $\mathbf{r}_y$  a rotação  $\theta$  sobre o eixo fixo  $Y$  e  $\mathbf{r}_z$  a rotação  $\psi$  sobre o eixo fixo  $Z$  (multiplicações pela esquerda - Figura 3.6). Para obter o DFKM do quadrrrotor, basta derivar no tempo (3.22) e mapear o resultado para  $\mathbb{R}^8$ . Neste caso, a  $i$ -ésima linha da Jacobiana analítica  $J_q$  corresponde ao gradiente do  $i$ -ésimo elemento do vetor de  $\underline{\mathbf{x}}_q$ , para  $i = \{1, 2, \dots, 6\}$ .

O FKM do manipulador é obtido usando a convenção padrão de DH, aplicado à álgebra de quatérnios duais, apresentada na seção 3.1.4. Neste trabalho, utilizam-se duas

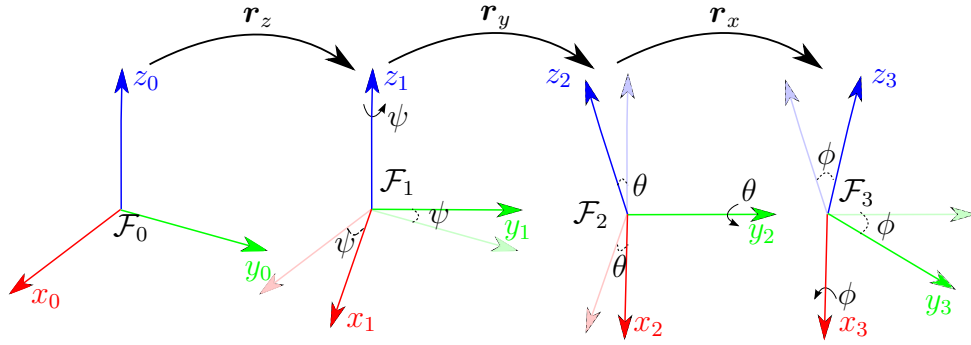


Figura 3.6: Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de três elos, a fim de obter os parâmetros D-H.

configurações do manipulador, sendo esses com três (Figura 3.7) e com cinco elos (Figura 3.8). Essa modificação na configuração do manipulador possibilita ao sistema ser cinematicamente redundante e o manipulador poderá realizar movimentos de rolagem (*roll*) e arfagem (*pitch*). As Tabelas 3.1 e 3.2 mostram os parâmetros das duas configurações. Em ambas as configurações, uma rotação adicional no sistema de coordenadas do efetuador é considerada, para que o seu eixo  $Z$  seja a direção de aproximação, o eixo  $Y$  seja a direção de deslizamento (a direção ao longo do qual a garra desliza para abrir e fechar) e o eixo  $X$  a direção normal ao plano formado pelos eixos anteriores (Spong et al., 2006). Esta rotação é representada por

$$\underline{\mathbf{x}}_E^{L_3} = \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{j} \right),$$

para o manipulador de três elos e

$$\underline{\mathbf{x}}_E^{L_5} = \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{j} \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{k} \right),$$

para o manipulador de cinco elos. Assim, o FKM do manipulador é dado por

$$\underline{\mathbf{x}}_m = \underline{\mathbf{x}}_{L_1} \underline{\mathbf{x}}_{L_2} \cdots \underline{\mathbf{x}}_{L_{m_m}} \underline{\mathbf{x}}_E^{L_{m_m}},$$

sendo  $m_m$  o número de elos do manipulador.

O DFKM do manipulador é obtido considerando (3.11).

Tabela 3.1: Parâmetros DH do manipulador com três elos.

Elo	$d$ (m)	$\theta$ (rad)	$a$ (m)	$\alpha$ (rad)
$L_1$	0	$\pi/4 + \beta_1$	0.15	0
$L_2$	0	$\pi/4 + \beta_2$	0.15	0
$L_3$	0	$\pi/4 + \beta_3$	0.15	$\pi/2$

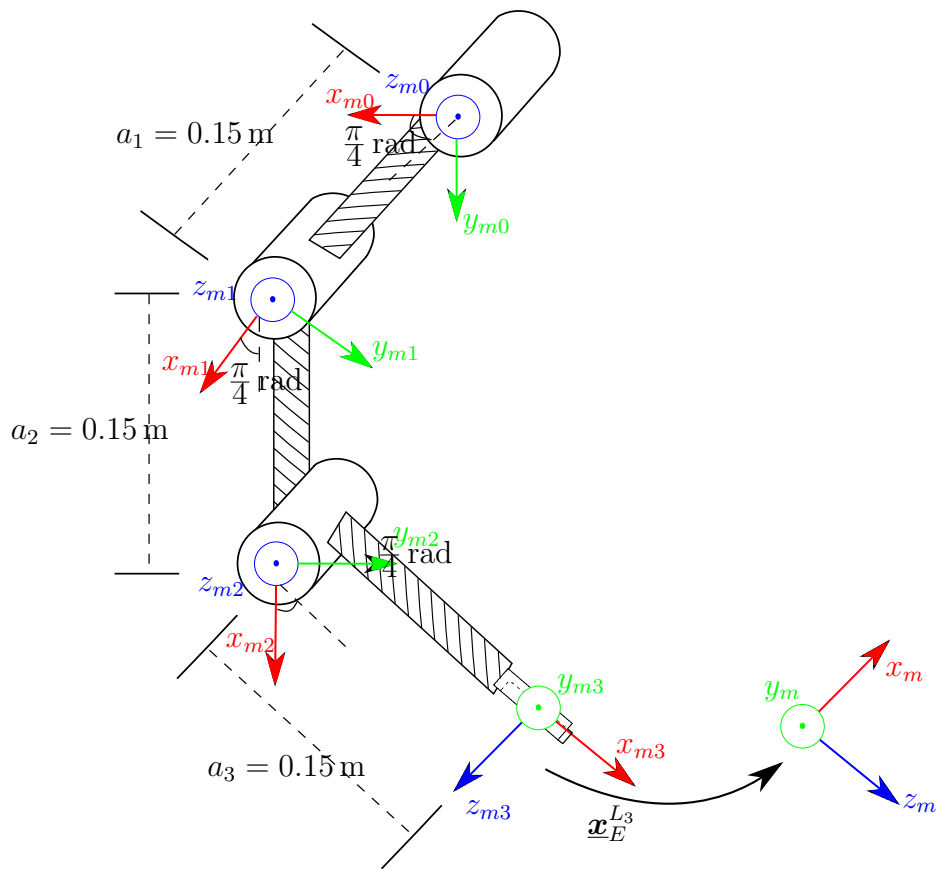


Figura 3.7: Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de três elos, a fim de obter os parâmetros D-H.

Tabela 3.2: Parâmetros DH do manipulador com cinco elos.

Elo	$d$ (m)	$\theta$ (rad)	$a$ (m)	$\alpha$ (rad)
$L_1$	0	$\pi/4 + \beta_1$	0.15	0
$L_2$	0	$\pi/4 + \beta_2$	0.15	0
$L_3$	0	$-\pi/4 + \beta_3$	0	$-\pi/2$
$L_4$	0	$-\pi/2 + \beta_4$	0	$-\pi/2$
$L_5$	0	$-\pi/2 + \beta_5$	0.15	0

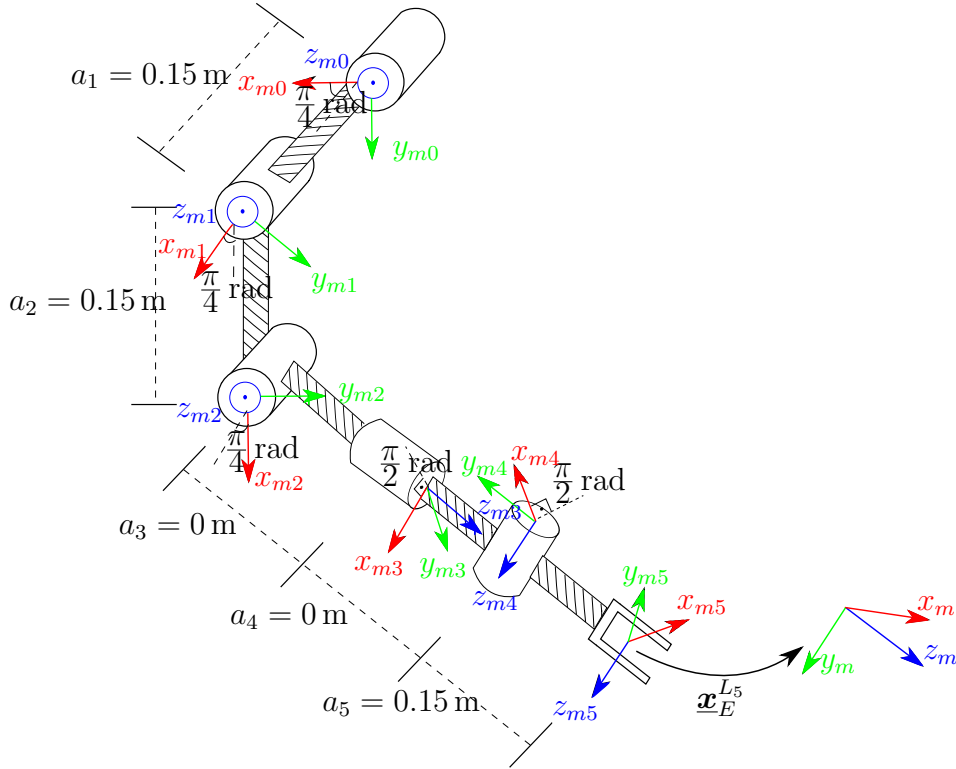


Figura 3.8: Sistemas de referência atribuídos ao manipulador de cinco elos, a fim de obter os parâmetros D-H.

Como o manipulador aéreo é uma cadeia serial, o FKM do sistema completo  $\underline{x}$  é

$$\underline{x} = \underline{x}_q \underline{x}_a \underline{x}_m, \quad (3.23)$$

em que

$$\underline{x}_a = \mathbf{r}_a + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{p}_a \mathbf{r}_a$$

é a transformação de  $\mathcal{F}_m$  para a base do manipulador, sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{i} \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{k} \right) \quad \text{e} \\ \mathbf{p}_a &= -0.075 \hat{k}, \end{aligned}$$

para o manipulador aéreo com três elos e

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \hat{i} \right) \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \hat{j} \right) \quad \text{e} \\ \mathbf{p}_a &= -0.075 \hat{k}, \end{aligned}$$

para o manipulador aéreo com cinco elos.

Para obter o DFKM do sistema completo, deriva-se no tempo (3.23) e mapeia-se a

equação resultante para  $\mathbb{R}^8$ . Neste caso,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_q \mathbf{x}_a \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_q \mathbf{x}_a \dot{\mathbf{x}}_m \implies \text{vec } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_a \mathbf{x}_m) J_q & \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q \mathbf{x}_a) J_m \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}},$$

sendo

$$J \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_a \mathbf{x}_m) J_q & \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q \mathbf{x}_a) J_m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

a Jacobiana analítica do sistema completo.

Neste trabalho, utiliza-se também a derivada da Jacobiana analítica

$$\dot{J} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_a \mathbf{x}_m) \dot{J}_q + \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_a \dot{\mathbf{x}}_m) J_q & \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q \mathbf{x}_a) \dot{J}_m + \bar{\mathbf{H}}(\dot{\mathbf{x}}_q \mathbf{x}_a) J_m \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

### 3.4 Modelo dinâmico

O modelo dinâmico pode ser obtido considerando a formulação de Euler-Lagrange, no qual o sistema mecânico pode ser caracterizado pelo seu Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U},$$

sendo  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{U}$  as energias cinética e potencial total do sistema, respectivamente. As equações de Lagrange, segundo Lippiello & Ruggiero (2012a); Siciliano et al. (2009); Spong et al. (2006), são expressas por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = u_i, \quad (3.26)$$

em que  $i = \{1, \dots, 6 + m_m\}$ ,  $q_i$  é a  $i$ -ésima coordenada generalizada de  $\mathbf{q}$  e  $u_i$  está associado a  $i$ -ésima força generalizada.

A energia cinética total é dada pela soma das contribuições relativas ao movimento do quadrrorotor e os movimentos de cada elo do manipulador

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_q + \sum_{i=1}^{m_m} \mathcal{K}_{m_i}, \quad (3.27)$$

sendo  $\mathcal{K}_q$  a energia cinética associada ao quadrrorotor, enquanto  $\mathcal{K}_{m_i}$  é a energia cinética associada a cada elo do manipulador.

A contribuição da energia cinética do quadrrorotor é dada por

$$\mathcal{K}_q = \frac{1}{2} m_q \mathbf{v}_q^T \mathbf{v}_q + \frac{1}{2} \mathbf{w}_q^T \mathcal{I}_q \mathbf{w}_q,$$

em que  $m_q \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{I}_q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  são, respectivamente, a massa e o tensor de inércia do quadrrorotor. Neste trabalho, considera-se que o veículo é simétrico e a localização do centro de massa coincide com a origem de  $\mathcal{F}_q$ , e, portanto,  $\mathcal{I}_q$  é uma matriz diagonal com valores constantes, formada pelos momentos de inércia nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do veículo,

expressos no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_q$ . Já  $\mathbf{v}_q$  é a velocidade linear do quadrirrotor em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , expressada em  $\mathcal{F}_0$ , e  $\mathbf{w}_q$  é a velocidade angular do quadrirrotor em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , expressada em  $\mathcal{F}_q$ .

A contribuição da energia cinética de cada elo do manipulador é dada por

$$\mathcal{K}_{mi} = \frac{1}{2}m_{ei}\mathbf{v}_{ei}^T\mathbf{v}_{ei} + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{ei}^T\mathcal{I}_{ei}\mathbf{w}_{ei},$$

em que  $m_{ei} \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{I}_{ei} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , para  $i = \{1, \dots, m_m\}$ , são a massa e o tensor de inércia do  $i$ -ésimo elo do manipulador. Neste trabalho, considera-se que os elos do manipulador são simétricos e a localização dos centros de massa do  $i$ -ésimo elo coincide com a origem de  $\mathcal{F}_{m_i}$  e, portanto,  $\mathcal{I}_{ei}$  é uma matriz diagonal com valores constantes, formada pelos momentos de inércia nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do elo do manipulador expressos no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_{m_i}$ . Já  $\mathbf{v}_{ei}$  é a velocidade linear do  $i$ -ésimo elo em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , expressada em  $\mathcal{F}_0$ , e  $\mathbf{w}_{ei}$  é a velocidade angular do  $i$ -ésimo elo em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_0$ , expressada em  $\mathcal{F}_{m_i}$ .

A energia cinética total também pode ser expressa como (Spong et al., 2006)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.28)$$

em que  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(6+m_m) \times (6+m_m)}$  é a matriz de inércia definida positiva. Assim, com base em (3.27) e (3.28), a matriz de inércia pode ser assim definida

$$M(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m_m+1} M_{si},$$

e  $M_{si}$  é a parcela da matriz de inércia relacionada a cada centro de massa do manipulador aéreo. Para calcular estas parcelas, devem-se obter o FKM e o DFKM da pose de cada centro de massa em relação ao sistema de coordenadas inercial  $\mathcal{F}_0$ , tendo estes modelos de 6 a  $6 + m_m$  coordenadas generalizadas. Assim, as Jacobianas analíticas, calculadas para os modelos que possuem menos que  $6 + m_m$  DOF, devem ser estendidas com colunas de zero, a fim de que estas englobem todas as coordenadas generalizadas do sistema. A partir destas, pode-se encontrar as Jacobianas geométricas correspondentes, que são utilizadas para calcular as parcelas da matriz de inércia. Assim,

$$M_{si} = \frac{1}{2}m_{si}J_{vi}^T J_{vi} + \frac{1}{2}J_{wi}^T \mathcal{I}_{si} J_{wi},$$

em que  $m_{si} \in \mathbb{R}$  e  $\mathcal{I}_{si} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , para  $i = \{1, \dots, m_m + 1\}$ , são a massa e o tensor de inércia do  $i$ -ésimo centro de massa e  $J_{vi} \in \mathbb{R}^{3 \times 6+m_m}$  e  $J_{wi} \in \mathbb{R}^{3 \times 6+m_m}$  são as Jacobianas geométricas obtidas pelas equações (3.18) e (3.21), eliminando-se a primeira linha nula.

O primeiro subsistema considerado é apenas o quadrirrotor, onde  $m_{s1} = m_q$  e  $\mathcal{I}_{s1} = \mathcal{I}_q$ .

Já as Jacobianas geométricas  $J_{w1}$  e  $J_{v1}$  são formadas pelas três últimas linhas de  $\bar{J}_{w1}$  e  $\bar{J}_{v1}$ , dadas por

$$\begin{aligned}\bar{J}_{w1} &= G_1(\mathbf{x}_q) J_1, \\ \bar{J}_{v1} &= G_2(\mathbf{x}_q) J_1,\end{aligned}$$

com  $J_1 = \begin{bmatrix} J_q & 0_{8 \times m_m} \end{bmatrix}$ .

No caso do braço robótico, as equações de FKM e as Jacobianas analíticas do centro de massa do  $j$ -ésimo elo do manipulador, para  $j = \{1, \dots, m_m\}$ , definido pelo sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_{mi}$ , com respeito ao sistema de coordenadas inercial  $\mathcal{F}_0$ , são

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j &= \mathbf{x}_q \mathbf{x}_a \mathbf{x}_{mj} \quad \text{e} \\ J_{pj} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_a \mathbf{x}_{mi}) J_q & \bar{\mathbf{H}}^+(\mathbf{x}_q \mathbf{x}_a) J_{mj} \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{3.29}$$

sendo  $\mathbf{x}_{mj}$  e  $J_{mj}$  obtidos considerando a convenção DH e a definição (3.11), lembrando que o centro de massa de cada elo coincide com o centro geométrico do mesmo. Além disso, deve-se ressaltar que em ambas as configurações do manipulador aéreo consideram-se três centros de massa, pois na segunda configuração, os três últimos elos, que formam o punho esférico, possuem um único centro de massa em comum. Nessas situações,  $j = \{1, 2, 3\}$ ,  $m_{si} = m_{ej}$  e  $\mathcal{I}_{si} = \mathcal{I}_{ej}$ , para  $i = \{j + 1\}$ . Já as Jacobianas geométricas  $J_{wi}$  e  $J_{vi}$  são formadas pelas três últimas linhas de  $\bar{J}_{wi}$  e  $\bar{J}_{vi}$ , dadas por

$$\begin{aligned}\bar{J}_{wi} &= G_1(\mathbf{x}_j) J_i \quad \text{e} \\ \bar{J}_{vi} &= G_2(\mathbf{x}_j) J_i,\end{aligned}$$

sendo  $J_2 = \begin{bmatrix} J_{p1} & 0_{8 \times m_m - 1} \end{bmatrix}$ ,  $J_3 = \begin{bmatrix} J_{p2} & 0_{8 \times m_m - 2} \end{bmatrix}$  e  $J_4 = J_{p3}$ .

Assim, têm-se todos os dados necessários para se calcular a matriz de inércia do sistema completo. Ao calcular a matriz de inércia  $M(\mathbf{q})$  deste modo específico, calcula-se também a influência do movimento de cada elo do manipulador no centro de massa dos elos antecessores e no centro de massa do quadrirrotor. Tal fato é importante nesta modelagem e é um avanço em relação a outros trabalhos, como, por exemplo, os de Arleo et al. (2013) e Korpela et al. (2011), que viram a necessidade de descrever a influência do movimento do manipulador no centro de massa da quadrirrotor nas equações dinâmicas, uma vez que seus modelos não foram obtidos de modo completo. Para este trabalho, este acoplamento é considerado de forma direta nos cálculos.

A energia potencial armazenada no sistema  $\mathcal{U}$  é dada pela soma das contribuições do quadrirrotor e de cada elo do manipulador

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_q + \sum_{i=1}^{m_m} \mathcal{U}_{mi},\tag{3.30}$$

onde  $\mathcal{U}_q$  é a energia potencial associada ao quadrirrotor, enquanto  $\mathcal{U}_{mi}$  é a energia potencial do  $i$ -ésimo elo.

A energia potencial do quadrirrotor é dada por

$$\mathcal{U}_q = -m_q g \mathbf{e}_4^T \text{vec}_4 \mathbf{p}_q,$$

e  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\mathbf{p}_q$  é o quatérnio puro que representa a translação do quadrirrotor e  $\mathbf{e}_4 \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  é o vetor que seleciona os eixos de  $\mathcal{F}_0$  onde a gravidade age. Neste trabalho,  $\mathbf{e}_4 = [0 \ 0 \ 0 \ -1]^T$ , pois a ação da gravidade é ao longo do eixo  $Z$  de  $\mathcal{F}_0$ .

Já a energia potencial de cada elo do manipulador é dada por

$$\mathcal{U}_{mi} = -m_{ei} g \mathbf{e}_4^T \text{vec}_4 \mathbf{p}_{mi},$$

sendo  $\mathbf{p}_{mi}$  o quatérnio puro que representa a translação, obtido por meio de (3.5), de cada subsistema representado por (3.29).

Assim, tendo computado as energias cinéticas e potenciais do sistema em (3.28) e (3.30), através das equações de Euler-Lagrange (3.26) (Siciliano et al., 2009; Spong et al., 2006), a equação dinâmica completa do manipulador aéreo é obtida:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \mathbf{u} + \mathbf{u}_{ext}, \quad (3.31)$$

sendo  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{(6+m_m) \times (6+m_m)}$  a matriz de Coriolis, obtida através dos símbolos de Christoffel de primeiro tipo, computadas como segue:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{6+m_m} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k,$$

sendo  $m_{ij}$  o elemento da matriz  $M(\mathbf{q})$ , com  $i, j = \{1, \dots, 6 + m_m\}$ . O vetor das forças gravitacionais,  $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6+m_m}$ , é definido como

$$G(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}.$$

O vetor de forças de entrada generalizadas,  $\mathbf{u}$ , é definido como

$$\mathbf{u} = \left[ \tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi \ T_X \ T_Y \ T_Z \ \tau_1 \ \dots \ \tau_{m_m} \right]^T,$$

onde  $\tau_\phi$ ,  $\tau_\theta$  e  $\tau_\psi$  representam, respectivamente, os torques rotacionais do quadrirrotor nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  expressos em  $\mathcal{F}_0$ , e  $T_i$  representa a força translacional do quadrirrotor ao longo do eixo  $i$  do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_q$  expressa em  $\mathcal{F}_0$ . Já  $\tau_j$ , com  $j = \{1, 2, \dots, m_m\}$ , é o torque da  $j$ -ésima junta do manipulador.



O manipulador aéreo apresentado é um sistema dinamicamente subatuado, por possuir menos ações de controle independentes do que graus de liberdade (Raffo, 2011). Assim,

$$\mathbf{u} = B(\mathbf{q}) \mathbf{\Gamma},$$

sendo  $B(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(6+m_m) \times (4+m_m)}$  a matriz de acoplamento e  $\mathbf{\Gamma} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ \tau_1 \ \cdots \ \tau_{m_m}]^T$  o vetor das forças e torques aplicados. Especificamente,  $f_i$ , com  $i = \{1, \dots, 4\}$ , é o empuxo gerado pelo o  $i$ -ésimo rotor (Mistler et al., 2001; Raffo, 2011). A matriz de acoplamento  $B(\mathbf{q})$  é dada por

$$B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} N(\mathbf{q}) & 0_{6 \times m_m} \\ 0_{m_m \times 4} & I_{m_m} \end{bmatrix},$$

onde  $N(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$  é a matriz responsável por fazer o mapeamento entre as forças de entrada generalizadas do quadrirrotor com as forças provenientes de cada propulsor. Na estrutura do quadrirrotor proposto, tem-se que (Raffo, 2011)

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_T)(f_3 - f_1) \\ \sin(\alpha_T)(f_4 - f_2) \\ \left(\sum_{i=1}^4 \cos(\alpha_T) f_i\right) \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos(\alpha_T)(f_2 - f_4) \\ l \cos(\alpha_T)(f_3 - f_1) \\ \left(\sum_{i=1}^4 \cos(\alpha_T) \tau_{Mi}\right) \end{bmatrix},$$

sendo

$$\tau_{Mi} = \frac{k_t}{b} f_i,$$

$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz identidade e  $0_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m_m}$  uma matriz de zeros;  $l$  a distância entre o centro geométrico e o rotor;  $b$  o coeficiente de empuxo do rotor;  $k_t$  o coeficiente de arrasto do rotor; e  $\alpha_T$  o ângulo constante dos rotores com respeito ao eixo vertical. Graças a este ângulo, as forças de empuxo geram movimentos longitudinal e lateral nos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, com  $\phi$  e  $\theta$  nulos, além de aumentar a controlabilidade do sistema. Assim,

$$N(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} W^T & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R \end{bmatrix} \bar{N}(\mathbf{q}),$$

com

$$\bar{N}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & l \cos(\alpha_T) & 0 & -l \cos(\alpha_T) \\ -l \cos(\alpha_T) & 0 & l \cos(\alpha_T) & 0 \\ \frac{k_t}{b} \cos(\alpha_T) & -\frac{k_t}{b} \cos(\alpha_T) & \frac{k_t}{b} \cos(\alpha_T) & -\frac{k_t}{b} \cos(\alpha_T) \\ -\sin(\alpha_T) & 0 & \sin(\alpha_T) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_T) & 0 & \sin(\alpha_T) \\ \cos(\alpha_T) & \cos(\alpha_T) & \cos(\alpha_T) & \cos(\alpha_T) \end{bmatrix},$$

sendo  $R$  a matriz de rotação que descreve a orientação do sistema de coordenadas do quadricóptero  $\mathcal{F}_q$  com relação ao inercial  $\mathcal{F}_0$  e  $W$  a matriz que relaciona a velocidade angular do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}_q$  com as derivadas no tempo dos ângulos de Euler (Raffo, 2011).

Por último, o termo  $\mathbf{u}_{ext}$  em (3.31) representa o vetor de forças externas generalizadas.

Com isso, tem-se o modelo dinâmico completo do sistema, que é usado no projeto dos controladores, bem como na representação do sistema para simulação.

### 3.5 Parâmetros do sistema

A Tabela 3.3 mostra os parâmetros nominais do manipulador aéreo. Os dados relacionados ao quadricóptero, como massa, momentos de inércia, distância entre o centro de massa e o rotor, coeficiente de empuxo e de arrasto do rotor e o ângulo vertical dos rotores são os mesmos considerados por Raffo (2011). Já os dados relacionados ao manipulador, como massa e dimensões, foram especificados e, a partir destes, os momentos de inércia foram calculados. O parâmetro  $g$  é a aceleração da gravidade, que é uma constante natural conhecida.

### 3.6 Conclusão

Este capítulo apresentou as equações cinemáticas de corpo completo para um manipulador aéreo formado por um quadricóptero acoplado serialmente a um manipulador. O modelo cinemático, obtido utilizando a álgebra de quatérnios duais, possui  $6 + m_m$  graus de liberdade, sendo 6 destes as coordenadas generalizadas do quadricóptero, que representam orientação e translação, e  $m_m$  elos do manipulador.

A partir do modelo cinemático, obteve-se o modelo dinâmico de corpo completo utilizando a formulação de Euler-Lagrange. Neste caso, o acoplamento é considerado de forma direta nos cálculos do modelo.

No próximo capítulo, esses modelos são utilizados para projetar controladores, os quais têm como objetivo realizar tarefas descritas no nível do efetuador.

Tabela 3.3: Parâmetros nominais do manipulador aéreo.

Descrição dos Parâmetros	Parâmetro	Valor
Massa do quadrirrotor	$m_q$	2.24 kg
Massa do elo do manipulador	$m_{e1}, m_{e2}, m_{e3}$	0.2 kg
Distância entre o centro geométrico do quadrirrotor e o rotor	$l$	0.332 m
Coefficiente de empuxo do rotor	$b$	$9.5 \cdot 10^{-6} \text{ N s}^2$
Coefficiente de arrasto do rotor	$k_t$	$1.7 \cdot 10^{-7} \text{ N m s}^2$
Ângulo vertical dos rotores	$\alpha_T$	$5^\circ$
Aceleração da gravidade	$g$	$9.81 \text{ m/s}^2$
Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $X$	$I_{xx}^q$	$0.0363 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $Y$	$I_{yy}^q$	$0.0363 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia do quadrirrotor em torno do eixo $Z$	$I_{zz}^q$	$0.0615 \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia do elo do manipulador em torno do eixo $X$	$I_{xx}^{e1}, I_{xx}^{e2}, I_{xx}^{e3}$	$7.53 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia do elo do manipulador em torno do eixo $Y$	$I_{yy}^{e1}, I_{yy}^{e2}, I_{yy}^{e3}$	$6.48 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
Momento de inércia do elo do manipulador em torno do eixo $Z$	$I_{zz}^{e1}, I_{zz}^{e2}, I_{zz}^{e3}$	$6.48 \cdot 10^{-6} \text{ kg.m}^2$

# 4

## Estratégias de Controle

O objetivo deste capítulo é apresentar as estratégias de controle em malha fechada propostas para o manipulador aéreo. O propósito principal desses controladores é executar as tarefas no nível do efetuador, sendo necessário rastrear tanto a pose  $\mathbf{x}_d$ , quanto a velocidade  $\dot{\mathbf{x}}_d$  e a aceleração  $\ddot{\mathbf{x}}_d$  desejadas do efetuador, enquanto mantém o sistema completo estável. A realização dessas tarefas considera ambientes sujeitos a distúrbios externos, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. Para o projeto das estratégias de controle se assume que todas as variáveis do sistema  $\mathbf{q}$  e suas velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  estão disponíveis.

Além disso, as leis de controle devem considerar a característica de subatuação, no espaço de configurações, dos manipuladores aéreos considerados neste trabalho. Assim, os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , que correspondem aos movimentos de rolagem (*roll*) e arfagem (*pitch*), respectivamente, devem somente se estabilizar próximos a 0 rad, não sendo possível regulá-los em um ponto de operação específico no mesmo instante que os outros DOF são regulados.

As estratégias de controle apresentadas são desenvolvidas para duas configurações do manipulador aéreo. Na primeira configuração, o manipulador aéreo é formado pelo quadrirrotor acoplado a um manipulador planar de três elos. Os parâmetros DH desse manipulador são apresentados na Tabela 3.1. As estratégias de controle desenvolvidas para esse sistema são apresentadas na Seção 4.2. Já na segunda configuração, o manipulador aéreo é formado pelo quadrirrotor acoplado a um manipulador de cinco elos. Os seus parâmetros DH foram apresentados na Tabela 3.2. Essa modificação na configuração proporciona ao sistema redundância cinemática e o manipulador pode realizar movimentos

de rolagem (*roll*) e arfagem (*pitch*), os quais, caso fossem realizados pelo quadricóptero e não pelo manipulador, poderiam desestabilizar todo o sistema. As estratégias de controle desenvolvidas para esse sistema são apresentadas na Seção 4.3. No entanto, antes de descrever esses controladores, a Seção 4.1 apresenta os fundamentos matemáticos utilizados para desenvolver essas estratégias de controle.

## 4.1 Fundamentos matemáticos

O desenvolvimento de técnicas de controle pode se tornar complexo, de acordo com as características do sistema, como a não linearidade e subatuação, e quando se consideram distúrbios externos, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas. As seguintes seções descrevem os fundamentos matemáticos utilizados no desenvolvimento dos controladores deste trabalho.

### 4.1.1 Linearização por realimentação (*Feedback Linearization*)

Linearização por realimentação é uma abordagem para projetos de controle não linear que transforma algebricamente a dinâmica de sistemas não lineares em uma dinâmica de sistema linear, para que as técnicas de controle lineares possam ser aplicadas (Slotine & Li, 1990). Esta técnica pode ser simplificada quando se descreve o sistema pela forma canônica controlável (Khalil, 2002). Neste caso, a dinâmica do sistema é representada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (4.2)$$

sendo  $u_i$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor de entradas  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  o vetor das variáveis de estados,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  o vetor das saídas e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$  vetores não lineares dos estados. Eq. (4.1) é também denominada sistema dinâmico não linear afim nas entradas e  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$  são denominados campos vetoriais.

Antes de descrever a técnica de linearização por realimentação, alguns conceitos matemáticos são definidos a seguir.

**Definição 4.1.** (Slotine & Li, 1990) Difeomorfismo é determinado como uma função bijetora suave  $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido na região  $\Omega$ , tal que  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  sejam mapeamentos diferenciáveis, com  $\mathcal{C}^1$ , e também mapeamentos suaves, com  $\mathcal{C}^\infty$ , sendo a inversa  $\Phi^{-1}$  única.

**Definição 4.2.** (Vidyasagar, 2002) O mapeamento suave ( $\mathcal{C}^\infty$ ) com derivadas parciais de

todas as ordens

$$a : X \rightarrow \mathbb{R}$$

é um campo escalar. O conjunto de todos os campos escalares  $a(\cdot) \in \mathcal{C}^\infty$  definidos em  $X$  é denominado de  $S(X)$ .

**Definição 4.3.** (Vidyasagar, 2002) O mapeamento suave ( $\mathcal{C}^\infty$ )

$$\mathbf{f} : X \rightarrow T_X X$$

que relaciona para cada ponto  $\mathbf{x} \in X$  um vetor  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in T_X X$  tangente para  $X$  no ponto  $\mathbf{x}$ , é um campo vetorial. O conjunto de todos os campos vetoriais suaves definidos em  $X$  é denominado  $V(X)$ .

**Definição 4.4.** (Slotine & Li, 1990) Derivada de Lie,  $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) \in S(X)$ , é a derivada de um campo escalar  $h(\mathbf{x}) \in S(X)$  na direção do campo vetorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in V(X)$ . A derivada direcional de  $h(\mathbf{x})$  ao longo de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  é definida como

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \langle \nabla^T h(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.3)$$

sendo  $\nabla h(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]^T$  o gradiente de  $h(\mathbf{x})$ . Outra interpretação da derivada de Lie é

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \frac{dh(\mathbf{x})}{dt},$$

onde  $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{x}(t)$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

No caso, por exemplo, das equações dinâmicas do sistema definidas por (4.1) e (4.2), sendo  $\dot{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in V(X)$  e  $y_i = h_i(\mathbf{x}) \in S(X)$  a  $i$ -ésima saída do vetor  $\mathbf{y}$ , para  $i = \{1, \dots, p\}$ , tem-se que

$$\dot{y}_i = \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}h_i(\mathbf{x}).$$

**Definição 4.5.** (Khalil, 2002) Um sistema não linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (4.4)$$

em que  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $G : X \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são suficientemente suaves no domínio  $X \subset \mathbb{R}^n$ , é considerado linearizável por realimentação se existir o difeomorfismo  $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $X_z = T(X)$  contenha a origem e a mudança de variável  $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ , que transforme o sistema (4.4) para

$$\dot{\mathbf{z}} = A_r \mathbf{z} + B_r \gamma(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})),$$

sendo o par  $(A_r, B_r)$  controlável,  $\gamma(\mathbf{x}) = \beta^{-1}(\mathbf{x})$  não singular para todo  $\mathbf{x} \in X$  e a entrada dada por

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{v}. \quad (4.5)$$

A partir da Definição 4.5, é possível resolver problemas de controle para rastreamento de trajetória usando a teoria de controle linear. Ao propor a linearização por entrada-saída, o que se pretende é encontrar a relação diferencial entre a saída  $\mathbf{y}$  do sistema e a nova entrada  $\mathbf{v}$ , que cancele as parcelas não lineares encontradas nessa saída.

**Definição 4.6.** (Khalil, 2002) Para um sistema dinâmico não linear, o grau relativo  $r_j$  relacionado à saída  $y_j$ , para  $j = \{1, 2, \dots, p\}$ , é igual ao número de vezes necessário para diferenciar  $y_j$  em relação ao tempo, a fim de que pelo menos uma das entradas de controle  $u_k$ , para  $k = \{1, 2, \dots, m\}$ , apareça explicitamente na expressão da derivada

$$\frac{d^{r_j} y_j}{dt^{r_j}},$$

sendo que o grau relativo total  $r$  é a soma de todos os  $r_j$ , ou seja,

$$r = \sum_{j=1}^p r_j.$$

O grau relativo  $r$ , para uma região local, corresponde ao número de estados observáveis do sistema, descritos em (4.1), que podem ser controlados. Caso o grau relativo  $r$  seja menor que o número  $n$  de variáveis de estado, o sistema possui uma dinâmica interna não observável, que deve ser analisada separadamente. No caso do grau relativo  $r$  ser igual ao número  $n$  de variáveis de estado, o sistema é completamente controlável, todos os estados são observáveis e pode-se dizer que há linearização entrada-estados.

O processo de derivação da  $i$ -ésima saída de  $\mathbf{y}$ , utilizando a derivada de Lie, é definido como

$$\frac{d^{r_j} y_j}{dt^{r_j}} = L_f^{r_j} h_j(\mathbf{x}) + L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x}) u_i, \quad (4.6)$$

sendo  $h_j(\mathbf{x})$  o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ .

Deste modo, conclui-se que o grau relativo  $r_j$  de um sistema dinâmico não linear afim nas entradas pode ser matematicamente definido como o número  $r_j$ , tal que:

$$L_{g_i} L_f^k h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, r_j - 2 \quad (4.7)$$

$$L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x}) \neq 0. \quad (4.8)$$

A partir de (4.6), pode-se observar que o sistema de linearização entrada-saída, utilizando o controle de realimentação de estados

$$u_i = \frac{1}{L_{g_i} L_f^{r_j-1} h_j(\mathbf{x})} \left( -L_f^{r_j} h_j(\mathbf{x}) + v_i \right),$$

reduz o mapeamento da entrada-saída para  $\mathbf{y}^r = \mathbf{v}$ .

Resumindo, o sistema (4.1)-(4.2) é linearizável por realimentação se a função  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

existir e o sistema tenha grau relativo  $n$ , ou que a função  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  satisfaça as equações diferenciais parciais (4.7) e (4.8) (Vidyasagar, 2002). Assim, pode-se reescrever (4.5) para realimentação entrada-saída como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) &= -\Delta^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \\ \beta(\mathbf{x}) &= -\Delta^{-1}(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{4.9}$$

em que

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_f^{r_1-1}h_1 & \cdots & \mathcal{L}_{g_m}\mathcal{L}_f^{r_1-1}h_1 \\ \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_f^{r_2-1}h_2 & \cdots & \mathcal{L}_{g_m}\mathcal{L}_f^{r_2-1}h_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1}\mathcal{L}_f^{r_p-1}h_p & \cdots & \mathcal{L}_{g_m}\mathcal{L}_f^{r_p-1}h_p \end{bmatrix} \quad \text{e}\tag{4.10}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f^{r_1}h_1 \\ \mathcal{L}_f^{r_2}h_2 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_f^{r_p}h_p \end{bmatrix},\tag{4.11}$$

aplicando, portanto, a lei de controle

$$\mathbf{u} = \Delta^{-1}(\mathbf{x})(\mathbf{v} - \mathbf{b}(\mathbf{x})),$$

sendo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  a nova entrada de controle. Neste caso, a matriz  $\Delta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  deve ser não singular e  $m = p$ . Se o número de entradas for menor que o número de saídas, deve-se utilizar a pseudo-inversa a direita  $\Delta^+$  e neste caso, a solução somente é possível se a matriz tiver posto igual a  $m$  para todo  $\mathbf{x}$ . Esta solução é um resultado local e deve ter o grau relativo constante.

### 4.1.2 Controlador cinemático

As equações cinemáticas diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}}_t = J\dot{\mathbf{q}},\tag{4.12}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_t = \dot{J}\dot{\mathbf{q}} + J\ddot{\mathbf{q}},\tag{4.13}$$

representam o mapeamento entre o espaço das velocidades das juntas e o espaço das velocidades de acionamento, sendo possível utilizá-las em problemas de cinemática inversa.

O objetivo é determinar a trajetória no espaço das configurações, a partir de  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^m$ , que reproduza a trajetória gerada no espaço da tarefa, dada por  $\mathbf{x}_t \triangleq \mathbf{x}_t(t) \in \mathbb{R}^n$  (Siciliano et al., 2009). Isso pode ser obtido pela inversão da matriz Jacobiana



quadrada de posto completo, sendo

$$\dot{\mathbf{q}} = J^{-1}\dot{\mathbf{x}}_t,$$

onde  $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $m = n$ .

Para as situações em que a matriz Jacobiana possui mais colunas que linhas, busca-se a solução que satisfaça esta equação e que minimize o custo quadrático funcional das velocidades das juntas. Considere,

$$\dot{\mathbf{q}} = J^+\dot{\mathbf{x}}_t, \quad (4.14)$$

sendo  $J^+$  a pseudo-inversa à direita de  $J$  e esta, para que o sistema tenha solução, deve ter posto-linha pleno.

Para matrizes Jacobianas como estas, que possuem mais colunas  $m$  que linhas  $n$ , é possível modificar a solução (4.14) com a introdução do termo  $P\dot{\mathbf{q}}_a$ , em que  $P$  é a projeção no espaço nulo de  $J$  e  $\dot{\mathbf{q}}_a$  é um vetor arbitrário das velocidades das juntas, que normalmente é especificado para resolver algum problema de restrição adicional (Siciliano et al., 2009). Neste caso, tem-se que

$$\dot{\mathbf{q}} = J^+\dot{\mathbf{x}}_t + (I_m - J^+J)\dot{\mathbf{q}}_a,$$

sendo  $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma matriz identidade. A projeção no espaço nulo de  $J$ , sendo  $P \triangleq (I_m - J^+J)$ , não modifica a tarefa principal, determinada em (4.14), mas possibilita resolver questões de restrição adicional.

Para problemas de rastreamento, deve-se considerar o espaço do erro entre a pose desejada e a atual do efetuador; isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_t, \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}_t, \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que  $\mathbf{e}$  e  $\dot{\mathbf{e}}$  são o erro de posição e o erro da velocidade, respectivamente. Pode-se reescrever (4.15), utilizando a definição 4.12, como

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - J\dot{\mathbf{q}}.$$

Ao escolher a ação de controle para um sistema redundante como

$$\dot{\mathbf{q}} = J^+(\dot{\mathbf{x}}_d + K\mathbf{e}) + (I_m - J^+J)\dot{\mathbf{q}}_a,$$

tem-se um sistema linear equivalente

$$\dot{\mathbf{e}} + K\mathbf{e} = 0_{n \times 1}, \quad (4.16)$$

assintoticamente estável, sendo  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz de ganhos definida positiva.

Percebe-se que o controle cinemático é um caso de linearização por realimentação.

De modo análogo, pode-se obter a lei de controle cinemático de segunda ordem para um sistema redundante, considerando (4.13). Neste caso,

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^+(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{x}}_t - \dot{J}\dot{\mathbf{q}}) + (I_m - J^+J) \ddot{\mathbf{q}}_a,$$

sendo  $\ddot{\mathbf{q}}_a$  um vetor arbitrário das acelerações das juntas. Além disso,

$$\ddot{\mathbf{e}} = \ddot{\mathbf{x}}_d - (\dot{J}\dot{\mathbf{q}} + J\ddot{\mathbf{q}}).$$

Assim, escolhendo a ação de controle para o sistema como

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^+ (\ddot{\mathbf{x}}_d + K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}} - \dot{J}\dot{\mathbf{q}}) + (I_m - J^+J) \ddot{\mathbf{q}}_a, \quad (4.17)$$

sendo  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes definidas positivas de ganhos proporcionais e derivativos, respectivamente, tem-se um sistema linear equivalente

$$\ddot{\mathbf{e}} + K_p\mathbf{e} + K_d\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}_{n \times 1},$$

que também é assintoticamente estável.

Deve-se ressaltar que, esta lei de controle só garante convergência quando a trajetória desejada não passar por pontos de singularidades, que são configurações que reduzem o posto da matriz Jacobiana.

### 4.1.3 Controlador de dinâmica inversa

A equação dinâmica do sistema de  $n$  DOF,

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = \mathbf{u}, \quad (4.18)$$

apresentada na Seção 3.4, é utilizada para tratar os problemas de controle para sistemas MIMO (*Multiple-input and Multiple-output*) não lineares. Neste caso, deve-se encontrar um vetor de entradas  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  capaz de elaborar a relação entrada-saída do tipo linear por meio da realimentação dos estados não linear (Siciliano et al., 2009). Percebe-se que a dinâmica inversa é um caso particular de linearização por realimentação, desde que a matriz  $M(\mathbf{q})$  seja inversível para as configurações do sistema.

Pode-se considerar o controle  $\mathbf{u}$  na forma (Spong et al., 2006)

$$\mathbf{u} = M(\mathbf{q})\mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}), \quad (4.19)$$

no nível interno, que conduz o sistema a um sistema linear equivalente

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad (4.20)$$

onde  $\mathbf{v}$  representa um novo vetor de entradas e compõe o nível externo.

O problema de controle se reduz a encontrar uma lei de controle estável  $\mathbf{v}$ , que comporá o nível externo. Pode-se escolher, por exemplo, um controlador PD com ação *Feedforward* na aceleração; isto é:

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}), \quad (4.21)$$

em que  $K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes diagonais definidas positivas de ganhos derivativos e proporcionais, respectivamente, e  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  são os vetores de posição, velocidade e aceleração desejada da trajetória que se deve rastrear.

Substituindo a lei de controle (4.21) na equação diferencial de segunda ordem (4.20), tem-se que

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}_{n \times 1},$$

a qual expressa a dinâmica do erro quando se rastreia uma trajetória, sendo que  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  representa o erro.

Resumindo, o nível interno do controlador é baseado no modelo dinâmico do sistema e obtido para cancelar os termos não lineares. Já o nível externo do controlador, operado no rastreamento do erro, é obtido para estabilizar o sistema. Essa técnica de controle é baseada no cancelamento dos termos não lineares.

#### 4.1.4 Controlador $H_\infty$ linear

O objetivo desta seção é apresentar a formulação da teoria de controle  $H_\infty$  linear utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMI—do inglês *Linear Matrix Inequalities*). A vantagem de usar o método  $H_\infty$  está na sua habilidade de incluir, em seu equacionamento, a solução de problema de otimização, pois se reduz os efeitos do distúrbio no sistema e minimiza-se a influência das incertezas, tornando-o, assim, mais robusto. Será apresentada a seguir uma breve introdução sobre sistemas lineares, bem como LMIs e controlador  $H_\infty$  linear.

##### 4.1.4.1 Sistemas lineares

Sistemas de espaço de estados de tempo contínuo, lineares e invariantes no tempo podem ser definidos por:

$$\dot{\mathbf{x}}_l(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_l(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \text{com } \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.22)$$

$$\mathbf{y}_l(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_l(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (4.23)$$

sendo  $\mathbf{x}_l(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor dos estados do sistema,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor das entradas do sistema,  $\mathbf{y}_l(t) \in \mathbb{R}^p$  o vetor das saídas do sistema e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  matrizes constantes.

Pode-se representar o sistema dinâmico (4.22) e (4.23) a partir do ponto de vista entrada-saída, pela matriz Função de Transferência do sistema, aplicando a transformada de Laplace para  $\mathbf{x}_0 = 0$ . Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} Y_l(s) &= G(s)U(s), \\ G(s) &= C(sI_n - A)^{-1}B + D, \end{aligned}$$

em que  $Y_l(s)$  e  $U(s)$  são as transformadas de Laplace dos sinais  $\mathbf{y}_l(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$ , respectivamente, e  $G(s)$  é a matriz função de transferência do sistema.

Dentre as propriedades de um sistema linear, algumas, que são definidas a seguir, merecem destaque.

**Definição 4.7.** (Chen, 2012) Um sistema é **controlável** em um instante  $t_0$  se existir uma entrada  $\mathbf{u}(t)$  capaz de transferir o sistema de qualquer ponto inicial  $\mathbf{x}_l(t_0) = \mathbf{x}_0$  para qualquer outro estado  $\mathbf{x}_1$  em um tempo finito. Neste caso, afirma-se que o par  $(A, B)$ , definido em (4.22), é controlável. A controlabilidade do par  $(A, B)$  pode ser testada verificando se o posto da matriz de controlabilidade  $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$  é igual à dimensão  $n$  do vetor de variáveis de estados do sistema. Em outras palavras, o par  $(A, B)$  é controlável se a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tiver posto-linha completo, ou seja, igual a  $n$ .

**Definição 4.8.** (Chen, 2012) Um sistema é **observável** se o estado inicial  $\mathbf{x}_l(t_0)$  for determinado de maneira única, a partir da resposta a entrada  $\mathbf{u}(t)$  conhecida, durante o intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Neste caso, afirma-se que o par  $(A, C)$ , definidos em (4.22) e (4.23), é observável. A observabilidade do par  $(A, C)$  pode ser testada verificando se o posto da matriz de observabilidade  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{np \times n}$  é igual à dimensão  $n$  do vetor de estados do sistema. Isto é, o par  $(A, C)$  é observável se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiver posto-coluna completo, ou seja, igual a  $n$ .

**Definição 4.9.** (Dullerud & Paganini, 2005) Um sistema autônomo

$$\dot{\mathbf{x}}_l(t) = A\mathbf{x}_l(t) \quad (4.24)$$

é internamente *estável* se, para toda condição inicial  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , o limite

$$\mathbf{x}_l(t) \rightarrow 0_{n \times 1} \quad \text{quando } t \rightarrow 0,$$

for mantido.

Quando se trabalha com o rastreamento da trajetória, as variáveis de  $\mathbf{x}_l(t)$  não tendem a zero com o tempo. Entretanto, a variável estudada é o erro

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{x}_{ld}(t) - \mathbf{x}_l(t),$$

e neste caso

$$\mathbf{e}_l(t) \rightarrow 0_{n \times 1} \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

A estabilidade de um sistema está diretamente relacionada aos polos da função de transferência  $G(s)$ . Um sistema é estável se, e somente se, todos os polos de  $G(s)$  têm parte real negativa ou, equivalente, se todos os polos estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Se  $G(s)$  possuir algum polo no semiplano direito, pode-se afirmar que o sistema é instável (Trofino et al., 2003).

Segundo (Chen, 2012), todo polo de  $G(s)$  é também um autovalor da matriz  $A$ . Então, um sistema é estável se todos os autovalores da matriz  $A$  têm parte real negativa. A matriz que possui esta propriedade é denominada *Hurwitz*. Como esta condição é apenas suficiente, não se pode afirmar que o sistema é instável quando  $A$  possuir autovalores com parte real positiva (Chen, 2012).

Para sistemas lineares, como definido em (4.22), pode-se escolher uma lei de controle, dada por  $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}_l(t)$ , em que  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de ganhos, de tal modo que o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_l(t) &= A\mathbf{x}_l(t) + BK\mathbf{x}_l(t) \\ &= (A + BK)\mathbf{x}_l(t) \\ &= A_f\mathbf{x}_l(t), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $A_f \triangleq (A + BK)$ , seja um sistema autônomo. Logo, o sistema (4.25) em malha fechada é estável se a matriz  $A_f$  é *Hurwitz*.

Outra forma de analisar a estabilidade do sistema é usando a Teoria de Estabilidade de Lyapunov (1892, apud Khalil, 2002). Suponha que  $\mathbf{x}_{eq}$  é um ponto de equilíbrio de um

sistema dinâmico. Uma função de Lyapunov para o sistema é uma função  $V(\mathbf{x}_l)$  definida em uma região  $\Omega$  do espaço de estados que contém  $\mathbf{x}_{eq}$ , que satisfaz:

1.  $V(\mathbf{x}_l)$  é contínua.
2.  $V(\mathbf{x}_l)$  possui um único mínimo na região  $\Omega$ , dado por  $\mathbf{x}_{eq}$ .
3. Ao longo de qualquer trajetória do sistema em  $\Omega$ , o valor de  $V(\mathbf{x}_l)$  nunca aumenta.

Logo, a estabilidade do ponto  $\mathbf{x}_{eq} = 0_{n \times 1}$  do sistema linear definido por (4.24) pode ser investigada pela função quadrática

$$V(\mathbf{x}_l) = \mathbf{x}_l^T P \mathbf{x}_l,$$

com  $P > 0$ . Se  $V(\mathbf{x}_l) > 0$  para qualquer  $\mathbf{x}_l \neq 0_{n \times 1}$ ,  $V(\mathbf{x}_l) = 0$  somente para  $\mathbf{x}_l = 0_{n \times 1}$  e  $\dot{V}(\mathbf{x}_l) < 0$  para todo  $\mathbf{x}_l \neq 0_{n \times 1}$ , então  $\mathbf{x}_{eq} = 0_{n \times 1}$  é assintoticamente estável.

Assim, a estabilidade assintótica de um sistema linear autônomo, como em (4.24), pode ser testada pela existência de uma solução factível para as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P + P A &< 0. \end{aligned}$$

Entretanto, se não é possível encontrar a matriz  $P$  que satisfaça essas condições, nenhuma afirmação pode ser feita sobre a estabilidade do sistema.

De modo análogo, pode-se analisar a estabilidade do sistema (4.25). Neste caso, a estabilidade assintótica do sistema linear autônomo pode ser testada pela existência de uma solução factível para as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A_f^T P + P A_f &< 0. \end{aligned}$$

#### 4.1.4.2 Desigualdades matriciais lineares - LMIs

As LMIs são ferramentas matemáticas habitualmente utilizadas na teoria de controle (Boyd et al., 1994), que conseguem solucionar problemas convexos de forma eficiente ou problemas que os métodos convencionais falharam ou não obtiveram solução (Skogestad & Postlethwaite, 2005). Há vários *solver* que podem solucionar as LMIs de modo eficiente. O *solver* usado neste trabalho é o LMILab (Gahinet & Nemirovskii, 1993), uma ferramenta do Matlab.

#### 4.1.4.3 Controlador $H_\infty$ linear

O controlador  $H_\infty$  linear tem como objetivo atenuar os efeitos de distúrbios externos. O diagrama de bloco, apresentado na Figura 4.1, exemplifica este tipo de controlador, sendo  $P(s)$  um processo e  $K(s)$  um controlador.

Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo nominal

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_l(t) &= A(\boldsymbol{\alpha}_v) \mathbf{x}_l(t) + B(\boldsymbol{\alpha}_v) \mathbf{u}(t) + B_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \mathbf{w}(t), & \boldsymbol{\alpha}_v \in \Lambda \\ \mathbf{z}(t) &= C\mathbf{x}_l(t) + D\mathbf{u}(t) + D_w\mathbf{w}(t),\end{aligned}\quad (4.26)$$

sendo  $\mathbf{x}_l(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor das variáveis de estado,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor das entradas de controle,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^p$  o vetor das entradas externas,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^t$  o vetor das saídas,  $C$ ,  $D$  e  $D_w$  matrizes constantes de dimensões apropriadas,  $\boldsymbol{\alpha}_v \in \mathbb{R}^v$  o vetor de parâmetros incertos,  $\Lambda$  o conjunto compacto conhecido que representa os valores admissíveis de  $\boldsymbol{\alpha}_v$  e  $A(\boldsymbol{\alpha}_v)$ ,  $B(\boldsymbol{\alpha}_v)$  e  $B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)$  a função conhecida desses parâmetros (Dullerud & Paganini, 2005).

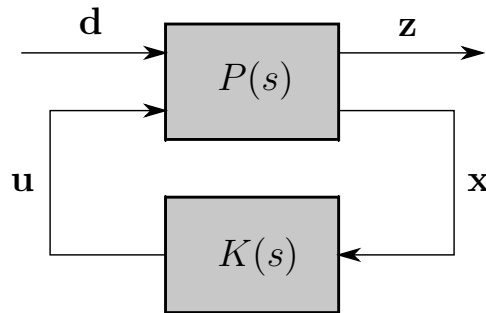


Figura 4.1: Diagrama de bloco do controlador  $H_\infty$ . Adaptado de Raffo et al. (2011).

A norma  $H_\infty$  de um sistema representa o maior ganho da sua resposta em frequência e, também, pode ser interpretada como o maior ganho em termos de energia que o sistema é capaz de proporcionar ao sinal de entrada. Pelo teorema de Parseval (Raffo, 2011), tem-se

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(s)^* W(s) ds, \\ \|\mathbf{z}(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Z(s)^* Z(s) ds,\end{aligned}$$

onde  $W(s)$  e  $Z(s)$  são as transformadas de Fourier dos sinais  $\mathbf{w}(t)$  e  $\mathbf{z}(t)$ , respectivamente e  $\|\cdot\|_2^2$  é a norma  $\mathcal{L}_2$  dos sinais. A norma  $\mathcal{L}_2$  é uma norma para o espaço de uma função contínua por partes e integralmente quadrada que formam um espaço denominado  $\mathcal{L}_2$ .

O problema do controle  $H_\infty$ , nesta configuração, consiste em obter um controlador que minimize a ação das entradas externas  $\mathbf{w}(t)$  nas saídas desejadas  $\mathbf{z}(t)$  (Raffo, 2011).

Assim, considerando  $Z(s) = H_{wz}(s)W(s)$ , sendo  $H_{wz}(s)$  a norma  $H_\infty$  no domínio da frequência, tem-se que

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(s)^* H_{wz}(s)^* H_{wz}(s) W(s) ds, \quad (4.27)$$

$$\|\mathbf{z}(t)\|_2^2 \leq \|H_{wz}(s)\|_\infty \cdot \|\mathbf{w}(t)\|_2^2. \quad (4.28)$$

A igualdade de (4.27) é obtida quando se encontra um sinal adequado de  $W(s)$  e esta relação no domínio do tempo é

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2^2}. \quad (4.29)$$

Para este trabalho, ao invés de determinar o valor exato da norma  $H_\infty$ , determina-se o limite superior  $\gamma$  para  $\|H_{wz}(s)\|_\infty$ , utilizando a definição de (4.29), ou seja

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty < \gamma.$$

Neste caso, o valor de  $\gamma$  pode ser encontrado de modo iterativo, utilizando LMIs.

Portanto, o controlador  $H_\infty$  é projetado de tal forma que o sistema em malha fechada tenha ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado. Assim, a relação entre as normas induzidas  $\mathcal{L}_2$  dos sinais de entrada, considerando os distúrbios, e a saída é limitada por um nível de atenuação  $\gamma$  (Dullerud & Paganini, 2005).

A condição desejada, considerando (4.28) e (4.29),

$$\sup \frac{\|\mathbf{z}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{w}(t)\|_2^2} = \sup \sqrt{\frac{\int_0^\infty \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt}{\int_0^\infty \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) dt}} < \gamma, \quad (4.30)$$

pode ser reescrita como

$$\int_0^\infty \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) dt. \quad (4.31)$$

Para um sistema exponencialmente estável ( $\mathbf{x}_l(\infty)=0$ ) com condições iniciais nulas ( $\mathbf{x}_l(0)=0$ ), deve-se considerar o problema de determinar uma função Lyapunov  $V(\mathbf{x}_l) = \mathbf{x}_l(t)^T P \mathbf{x}_l(t)$ , sendo  $P$  uma matriz definida positiva, tal que

$$\dot{V}(\mathbf{x}_l) + \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) < 0, \quad (4.32)$$

sendo  $\dot{V}(\mathbf{x}_l) < 0$  a derivada no tempo de  $V(\mathbf{x}_l)$ . Se existir  $V(\mathbf{x}_l)$  que satisfaça (4.32), então (4.30) e (4.31) também são satisfeitas. O interessante dessas condições é que elas podem ser expressas por meio de LMIs.



Considerando o sistema linear (4.26) e a entrada de controle como uma realimentação dos estados  $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}_l(t)$ , tem-se que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}_l) &= \dot{\mathbf{x}}_l(t)^T P \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_l(t)^T P \dot{\mathbf{x}}_l(t) \\ \dot{V}(\mathbf{x}_l) &= \mathbf{x}_l(t)^T \left( A_f^T P + P A_f \right) \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{w}(t)^T B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)^T P \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_l(t)^T P B_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \mathbf{w}(t),\end{aligned}$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz de ganhos da realimentação. Assim, (4.32) pode ser reescrita:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_f^T P + P A_f + C_f^T C_f & C_f^T D_w + P B_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \\ B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)^T P + D_w^T C_f & -\gamma^2 I_p + D_w^T D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} < 0,$$

sendo  $C_f \triangleq C + DK$ .

Portanto, tem-se um problema de otimização convexa com as LMIs:

$$\min \gamma^2 : \begin{cases} P & > 0 \\ \begin{bmatrix} A_f^T P + P A_f + C_f^T C_f & C_f^T D_w + P B_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \\ B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)^T P + D_w^T C_f & -\gamma^2 I_p + D_w^T D_w \end{bmatrix} & < 0 \end{cases} \quad \forall \boldsymbol{\alpha}_v \in \Lambda. \quad (4.33)$$

Esse limitante pode ser obtido numericamente, de forma eficiente, quando  $B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)$  é afim em  $\boldsymbol{\alpha}_v$  e  $\Lambda$  é um politopo de  $vr_i$  vértices conhecidos, com  $i = \{1, \dots, 2^v\}$ . Nessas condições basta resolver  $2^v + 1$  LMIs simultâneas obtidas de (4.33) para  $\boldsymbol{\alpha}_v = vr_i$ .

Para este trabalho, quando se encontra o menor valor de  $\gamma$  em que as LMIs (4.33) são factíveis, obtêm-se os valores da matriz de ganhos  $K$ , que torne o controlador robusto a perturbações externas.

## 4.2 Estratégias de controle para um manipulador aéreo com o braço de três elos

Nessa seção são descritos os controladores propostos para o manipulador aéreo com um braço de três elos. Projetaram-se três controladores, sendo todos em uma estrutura de controle em cascata formada por dois níveis (Figura 4.2). No primeiro caso, tem-se no nível externo o controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$  com ações PD e *feedforward* na aceleração, que calcula os movimentos de referência no espaço das juntas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , os quais são rastreados por um controlador de dinâmica inversa  $\mathbf{\Gamma}$  no nível interno, a partir dos valores desejados da pose  $\underline{\mathbf{x}}_d$ , da velocidade  $\underline{\dot{\mathbf{x}}}_d$  e da aceleração  $\underline{\ddot{\mathbf{x}}}_d$  do efetuador. No segundo caso, tem-se também o controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$  no nível externo e um controlador obtido a partir da linearização por realimentação  $\mathbf{\Gamma}$  no nível interno, utilizando variáveis de estado e Álgebra de Lie. No terceiro e último caso, tem-se o controlador  $H_\infty$  linear no controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$  no nível externo. Neste caso, o nível externo também computa

os movimentos de referência no espaço das juntas  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , que são rastreados por um controlador de dinâmica inversa  $\Gamma$  no nível interno. Na Tabela 4.1 pode-se ver um resumo desses controladores.

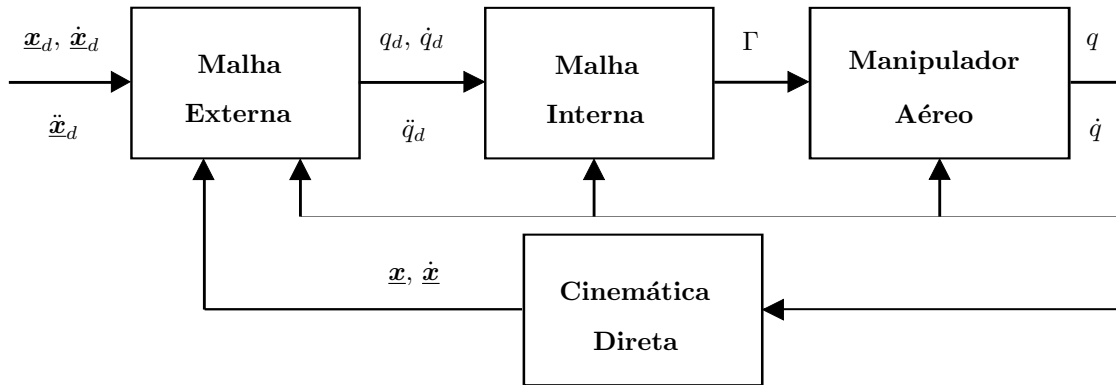


Figura 4.2: Diagrama de bloco da arquitetura do controlador para o manipulador aéreo.

Tabela 4.1: Tipos de controladores do manipulador aéreo com o braço de três elos.

	Controlador Externo	Controlador Interno
Controlador 1	Controlador Cinemático no espaço da tarefa	Controlador de Dinâmica Inversa
Controlador 2	Controlador Cinemático no espaço da tarefa	Controlador por realimentação de estados
Controlador 3	Controlador $H_\infty$ Linear	Controlador de Dinâmica Inversa

Nas Seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, os três controladores são descritos.

## 4.2.1 Controlador 1

O nível externo deste controlador é composto por um controlador cinemático, formulado a partir dos fundamentos apresentados na Seção 4.1.2 e o nível interno é constituído por um controlador de dinâmica inversa, baseado no controlador apresentado na Seção 4.1.3. A seguir, esses controladores são especificados.

### 4.2.1.1 Controlador externo - Controlador cinemático

O controlador cinemático de corpo completo permite ao manipulador aéreo realizar tarefas no nível do efetuador, por meio do uso simultâneo de todos os graus de liberdade presentes no sistema.

No entanto, enquanto o sistema realiza essas tarefas, os ângulos de rolagem,  $\phi$ , e arfagem,  $\theta$ , devem ser mantidos estáveis, próximos a 0 rad. Por isso, a lei de controle cinemático  $\mathbf{v}_k$  é dividida em duas partes:

$$\mathbf{v}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{v}_c \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Conseqüentemente, divide-se a matriz Jacobiana do sistema completo  $J(\mathbf{q})$ , obtido em (3.24), em dois blocos,  $J_u$  e  $J_c$ , ou seja,

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_u & J_c \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

onde  $J_u$  é o bloco relacionado às variáveis  $\phi$  e  $\theta$ , composta pelas duas primeiras colunas de  $J(\mathbf{q})$ , enquanto  $J_c$  é composta pelas colunas restantes. O vetor  $\mathbf{q}$  das coordenadas generalizadas também é particionado em conformidade, isto é,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}.$$

A primeira parte do controlador,  $\mathbf{v}_u \in \mathbb{R}^2$ , é um controlador proporcional às variáveis  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\theta}$ , com matriz de ganho  $K_{p2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  definida positiva, ou seja,

$$\mathbf{v}_u = -K_{p2} \dot{\mathbf{q}}_u. \quad (4.36)$$

O valor desejado para essas velocidades é zero, pois o objetivo é manter o quadricóptero estável, não sendo possível regulá-las em um ponto de operação específico no mesmo instante que os outros DOF são regulados através de uma única lei de controle.

A segunda parte,  $\mathbf{v}_c \in \mathbb{R}^7$ , é baseada no controlador apresentado em (4.17), sendo  $\mathbf{x}_t \triangleq \text{vec } \underline{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{x}_d \triangleq \text{vec } \underline{\mathbf{x}}_d$ . O objetivo deste é rastrear a trajetória, enquanto mantém as juntas do manipulador o mais afastado dos seus limites físicos. Por isso, utiliza-se o bloco  $J_c$  da Jacobiana, pois este está relacionado à  $\mathbf{q}_c$ , que são os DOF possíveis de se regular em um ponto de operação específico, além de se usar a lei controle adicional  $\ddot{\mathbf{q}}_a \triangleq \mathbf{U} \in \mathbb{R}^7$  no espaço nulo da matriz  $J_c$ , que tem a finalidade de manter as juntas do manipulador o mais afastadas dos seus limites físicos. Assim,  $\mathbf{v}_c$  é dado por

$$\mathbf{v}_c = J_c^\# (\mathbf{Q}_x - \dot{J}_c \dot{\mathbf{q}}_c) + (I_7 - J_c^\# J_c) \mathbf{U}, \quad (4.37)$$

em que  $J_c^\#$  é a pseudo-inversa amortecida da matriz  $J_c$  (Buss, 2004), definida como

$$J_c^\# \triangleq J_c^T (J_c J_c^T + \lambda_{ip}^2 I_7)^{-1},$$

onde  $\lambda_{ip} = 0.1$ ,  $I_7$  é uma matriz identidade e

$$\mathbf{Q}_x \triangleq K_{pc} \text{vec}(\underline{\mathbf{x}}_d - \underline{\mathbf{x}}) + K_{dc} \text{vec}(\dot{\underline{\mathbf{x}}}_d - \dot{\underline{\mathbf{x}}}) + \text{vec} \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_d$$

é o controlador PD, com ação *feedforward* na aceleração para o rastreamento da trajetória gerada no nível do efetuador, com  $K_{pc} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  e  $K_{dc} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$  matrizes de ganhos proporcionais e derivativos, respectivamente, definidas positivas.

A lei secundária é definida como

$$\mathbf{U} \triangleq J_{ns}^+ \left( K_{ns1} d(\mathbf{q}_m) + K_{ns2} \dot{d}(\mathbf{q}_m) - \dot{\mathbf{d}}_p \dot{\mathbf{q}}_m \right),$$

sendo

$$d(\mathbf{q}_m) \triangleq \sum_{i=1}^3 \bar{d}_i,$$

um valor escalar para  $\bar{d}_i \triangleq 1/2\beta_i^2$ , com  $i = \{1, 2, 3\}$ , sendo  $\beta_i$  os ângulos das juntas do manipulador,  $\mathbf{d}_p \in \mathbb{R}^7$  um vetor formado pelas derivadas parciais de  $d(\mathbf{q}_m)$ , ou seja,

$$\mathbf{d}_p \triangleq \frac{\partial d(\mathbf{q}_m)}{\partial \mathbf{q}_m},$$

$$J_{ns} \triangleq \begin{bmatrix} 0_{1 \times 4} & \mathbf{d}_p \end{bmatrix},$$

e  $K_{ns1} \in \mathbb{R}$  e  $K_{ns2} \in \mathbb{R}$  são ganhos escalares proporcional e derivativo, respectivamente, definidos positivos.

#### 4.2.1.2 Controlador interno - Controlador de dinâmica inversa

O controlador de dinâmica inversa é baseado em (4.19), acrescentando apenas a pseudo-inversa da matriz de acoplamento  $B(\mathbf{q})$ , pois o sistema considerado é subatuado. Assim, a lei de controle  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^7$  é definida como

$$\mathbf{\Gamma} = B(\mathbf{q})^+ (M(\mathbf{q}) \mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q})), \quad (4.38)$$

onde o novo vetor de entradas

$$\mathbf{v} \triangleq K_p (\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + K_d (\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\mathbf{q}}_d$$

é um controlador PD com ação *feedforward* na aceleração e  $K_p \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  e  $K_d \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  são matrizes diagonais semidefinidas positivas que representam os ganhos proporcionais e derivativos, respectivamente. Este controlador é responsável por rastrear a trajetória de referência no espaço das juntas gerada pelo nível externo. Assim,  $\ddot{\mathbf{q}}_d \triangleq \mathbf{v}_k$  e os valores de  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\mathbf{q}_d$  são obtidos pela integração de  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ .

Quando se substitui o vetor de entrada (4.38) em (4.18) tem-se

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = B(\mathbf{q})B(\mathbf{q})^+(M(\mathbf{q})\mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q})).$$

A matriz de acoplamento de entrada  $B(\mathbf{q})$  possui mais linhas que colunas e por isso a sua pseudo-inversa  $B(\mathbf{q})^+$  é à esquerda e  $B(\mathbf{q})B(\mathbf{q})^+ \neq I_9$ . Assim, não é possível cancelar os termos não lineares por realimentação de estados. Entretanto, como a trajetória desejada é calculada suavemente e, por isso, o erro entre os DOFs desejados  $\mathbf{q}_d$  e os medidos  $\mathbf{q}$  é baixo, pode-se considerar que os resíduos do não cancelamento dos termos não lineares são pequenos e podem ser tratados como distúrbios, que o sistema deve rejeitar.

## 4.2.2 Controlador 2

O controlador considerado consiste de um controlador cinemático, especificado na Seção 4.2.1.1, no nível externo e no nível interno, um controlador de linearização por realimentação entrada-saída, baseado no fundamento matemático apresentado na Seção 4.1.1. A seguir, o controlador interno é apresentado.

### 4.2.2.1 Controlador interno - Controlador por realimentação entrada-saída

Os atuadores do sistema são os quatro rotores do quadrirrotor e os motores das juntas do manipulador. Como dito anteriormente, o manipulador aéreo é um sistema mecanicamente subatuado com acoplamento de entrada, pois tem um número menor de atuadores do que DOF. O acoplamento de entrada é obtido construindo os rotores de modo inclinado (Raffo, 2011) e, neste caso, as ações de controle passam a influenciar todas as variáveis no mesmo instante de tempo, pois a força gerada pela rotação dos rotores gera também movimentos longitudinal e lateral nos eixos X e Y.

Desenvolver um controlador para este tipo de sistema não é uma tarefa trivial. Por isso, deve-se particionar o sistema de  $n$  DOF em duas partes: uma correspondente às coordenadas generalizadas residuais ou não controladas,  $\mathbf{q}_u \in \mathbb{R}^{n_u}$ , sendo  $n_u = n - m$ , e a outra às controláveis,  $\mathbf{q}_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ , sendo  $n_c = m$ . Como se sabe, somente  $m$  DOF podem ser controlados a cada instante pelas forças/torques aplicadas ao sistema. Assim o objetivo da lei de controle é regular  $\mathbf{q}_c$  em uma referência desejada, garantindo que  $\mathbf{q}_u$  seja estabilizada em torno de seu ponto de equilíbrio.

Para escolher quais são as variáveis controladas e quais são as residuais, deve-se analisar o objetivo do controlador. Para este trabalho, o objetivo principal é rastrear a trajetória no espaço 3D com uma determinada orientação de guinada. Logo, as variáveis são subdivididas da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_c = \left[ \psi \quad x \quad y \quad z \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \right]^T$$

e

$$\mathbf{q}_u = [\phi \ \theta]^T,$$

sendo, então,  $n_c = m = 7$  e  $n_u = 2$ .

Considere a equação dinâmica

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = B(\mathbf{q})\boldsymbol{\Gamma}. \quad (4.39)$$

Para este sistema subatuado, a matriz  $B(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tem posto igual a  $m < n$ .

Primeiramente, sem perder a generalidade, pode-se dividir a matriz  $B(\mathbf{q})$  em:

$$B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} B_u(\mathbf{q}) \\ B_c(\mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

sendo  $B_c(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  uma matriz inversível e  $B_u(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_u \times m}$  uma matriz diferente de  $0_{n_u \times m}$  para todo  $\mathbf{q}$ , formando assim o acoplamento de entrada.

Considerando que a matriz de acoplamento  $B(\mathbf{q})$  é dividida em dinâmica residual e controlada, a equação dinâmica do sistema pode ser normalizada, a fim de se obter uma matriz de inércia bloco diagonal, simétrica e definida positiva (Raffo, 2011). Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} & \overline{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \overline{G}(\mathbf{q}) = \overline{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Gamma} \\ & \begin{bmatrix} M_{su}(\mathbf{q}) & 0_{n_u \times n_c} \\ 0_{n_c \times n_u} & M_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{su}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{sc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_{ru}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & C_{rc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\mathbf{q}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{su}(\mathbf{q}) \\ G_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{su}(\mathbf{q}) \\ B_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde os subscritos  $s$  e  $r$  denotam o subsistema estabilizado e regulado, respectivamente, e

$$\begin{aligned} \overline{B}(\mathbf{q}) &= T_M(\mathbf{q})B(\mathbf{q}), \\ \overline{G}(\mathbf{q}) &= T_M(\mathbf{q})G(\mathbf{q}), \\ \overline{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= T_M(\mathbf{q})C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \overline{M}(\mathbf{q}) &= T_M(\mathbf{q})M(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

sendo

$$T_M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{n_u} & -M_{uc}(\mathbf{q})M_{cc}^{-1}(\mathbf{q}) \\ -M_{cu}(\mathbf{q})M_{uu}^{-1}(\mathbf{q}) & I_{n_c} \end{bmatrix},$$

e  $M_{ij}(\mathbf{q})$  sub-blocos da matriz de inércia  $M(\mathbf{q})$ , relacionados às variáveis  $\mathbf{q}_u$  e  $\mathbf{q}_c$ . Essa normalização é possível porque  $M_{uu}(\mathbf{q})$  e  $M_{cc}(\mathbf{q})$  são invertíveis e  $M_{uc}(\mathbf{q}) = M_{cu}^T(\mathbf{q})$  é diferente de zero em pelo menos uma vizinhança da origem. Esta normalização permite considerar as derivadas no tempo dos DOF residuais no vetor de estados do rastreamento

da trajetória desejada (Raffo, 2011).

Para o objetivo do presente controlador, considera-se o seguinte vetor de estados:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [\dot{\mathbf{q}}_u^T \quad \mathbf{q}_c^T \quad \dot{\mathbf{q}}_c^T]^T \\ \mathbf{x} &= [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad x \quad y \quad z \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \\ &\quad \dot{\psi} \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\beta}_1 \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\beta}_3]^T.\end{aligned}$$

Como o objetivo principal do controlador é rastrear a trajetória desejada enquanto a dinâmica residual é estabilizada, as saídas do sistema, considerando o acoplamento das entradas, são:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= [\dot{\mathbf{q}}_u^T \quad \mathbf{q}_c^T]^T \\ \mathbf{y} &= [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \psi \quad x \quad y \quad z \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T.\end{aligned}$$

Para essa equação dinâmica, o número de variáveis de estado  $n$ , o número de entradas  $m$  e o número de saídas  $p$  são, respectivamente,  $n = 16$ ,  $m = 7$  e  $p = 9$ .

Considerando este espaço de estados, a equação dinâmica em (4.40) pode ser reescrita no formato de equação dinâmica afim nas entradas, como apresentado nas equações (4.1) e (4.2). Neste caso,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_u, t) + G_a(\mathbf{x}, \mathbf{q}_u, t) \mathbf{\Gamma}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\tag{4.41}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_u, t) &= \begin{bmatrix} -M_{su}^{-1}(\mathbf{q})(C_{su}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_u + C_{sc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_c + G_{su}(\mathbf{q})) \\ \dot{\mathbf{q}}_c \\ -M_{rc}^{-1}(\mathbf{q})(C_{ru}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_u + C_{rc}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_c + G_{rc}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \quad e \\ G_a(\mathbf{x}, \mathbf{q}_u, t) &= \begin{bmatrix} M_{su}^{-1}(\mathbf{q})B_{su}(\mathbf{q}) \\ 0_{n_c \times n_c} \\ M_{rc}^{-1}(\mathbf{q})B_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

e  $G_a(\mathbf{x}, \mathbf{q}_u, t) \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$  é a matriz formada pelas colunas  $\mathbf{g}_i$ , para  $i = \{1, \dots, n_c\}$ .

Como a matriz  $G_a(\mathbf{x}, \mathbf{q}_u, t)$  possui um bloco de zeros, não é possível invertê-la e, conseqüentemente, não é possível obter diretamente a lei de controle de dinâmica inversa. Por isso, tem que se considerar a formulação do controlador por realimentação entrada-saída, como apresentado em (4.9), para obter

$$\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) + \beta(\mathbf{q})\mathbf{v}.\tag{4.42}$$

No entanto, antes de determinar esses parâmetros, deve-se analisar o grau relativo total do sistema, como na definição 4.6. Para este sistema, tem-se que  $r_1 = r_2 = 1$  e  $r_i = 2$ , para  $i = \{3, 4, \dots, 9\}$ , o que resulta em um grau relativo total de  $r = 16$ . Neste caso, tem-se que 16 estados do sistema são observáveis, ou seja, a dinâmica interna do vetor de estados  $\mathbf{x}$  é observável e pode-se dizer que o sistema é completamente controlável, uma vez que o grau relativo total é igual ao número dos estados.

A matriz  $\Delta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{9 \times 7}$  e o vetor  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^9$ , definidos em (4.10) e (4.11), respectivamente, são:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{g_1} h_1 & \cdots & \mathcal{L}_{g_7} h_1 \\ \mathcal{L}_{g_1} h_2 & \cdots & \mathcal{L}_{g_7} h_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_8 & \cdots & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_8 \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_9 & \cdots & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_f h_1 \\ \mathcal{L}_f h_2 \\ \mathcal{L}_f^2 h_3 \\ \mathcal{L}_f^2 h_4 \\ \mathcal{L}_f^2 h_5 \\ \mathcal{L}_f^2 h_6 \\ \mathcal{L}_f^2 h_7 \\ \mathcal{L}_f^2 h_8 \\ \mathcal{L}_f^2 h_9 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Para simplificar os cálculos das derivadas de Lie, considera-se que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}_u, t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_c \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}$$

sendo  $\mathbf{f}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  e  $\mathbf{f}_2 \in \mathbb{R}^{7 \times 1}$ . Então, as derivadas de Lie são:

- Para  $h_1 = \dot{\phi}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f h_1 &= f_{11} & \mathcal{L}_{g_4} h_1 &= g_{4,1} \\ \mathcal{L}_{g_1} h_1 &= g_{1,1} & \mathcal{L}_{g_5} h_1 &= g_{5,1} \\ \mathcal{L}_{g_2} h_1 &= g_{2,1} & \mathcal{L}_{g_6} h_1 &= g_{6,1} \\ \mathcal{L}_{g_3} h_1 &= g_{3,1} & \mathcal{L}_{g_7} h_1 &= g_{7,1}, \end{aligned}$$

sendo  $f_{ij}$ , para  $i = \{1, 2\}$  e  $j = \{1, \dots, 7\}$ , o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{f}_i$  e  $g_{m,n}$ , para



$m = \{1, \dots, 7\}$  e  $n = \{1, \dots, 16\}$ , o  $n$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{g}_m$ .

- Para  $h_2 = \dot{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f h_2 &= f_{12} & \mathcal{L}_{g_4} h_2 &= g_{4,2} \\ \mathcal{L}_{g_1} h_2 &= g_{1,2} & \mathcal{L}_{g_5} h_2 &= g_{5,2} \\ \mathcal{L}_{g_2} h_2 &= g_{2,2} & \mathcal{L}_{g_6} h_2 &= g_{6,2} \\ \mathcal{L}_{g_3} h_2 &= g_{3,2} & \mathcal{L}_{g_7} h_2 &= g_{7,2}. \end{aligned}$$

- Para  $h_3 = \psi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_3 &= f_{21} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{4,10} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{1,10} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{5,10} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{2,10} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{6,10} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{3,10} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_3 &= g_{7,10}. \end{aligned}$$

- Para  $h_4 = x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_4 &= f_{22} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{4,11} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{1,11} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{5,11} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{2,11} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{6,11} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{3,11} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_4 &= g_{7,11}. \end{aligned}$$

- Para  $h_5 = y$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_5 &= f_{23} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{4,12} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{1,12} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{5,12} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{2,12} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{6,12} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{3,12} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_5 &= g_{7,12}. \end{aligned}$$

- Para  $h_6 = z$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_6 &= f_{24} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{4,13} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{1,13} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{5,13} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{2,13} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{6,13} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{3,13} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_6 &= g_{7,13}. \end{aligned}$$

- Para  $h_7 = \beta_1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_7 &= f_{25} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{4,14} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{1,14} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{5,14} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{2,14} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{6,14} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{3,14} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_7 &= g_{7,14}. \end{aligned}$$

- Para  $h_8 = \beta_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_8 &= f_{26} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{4,15} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{1,15} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{5,15} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{2,15} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{6,15} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{3,15} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_8 &= g_{7,15}. \end{aligned}$$

- Para  $h_9 = \beta_3$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^2 h_9 &= f_{27} & \mathcal{L}_{g_4} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{4,16} \\ \mathcal{L}_{g_1} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{1,16} & \mathcal{L}_{g_5} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{5,16} \\ \mathcal{L}_{g_2} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{2,16} & \mathcal{L}_{g_6} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{6,16} \\ \mathcal{L}_{g_3} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{3,16} & \mathcal{L}_{g_7} \mathcal{L}_f h_9 &= g_{7,16}. \end{aligned}$$

Com estes resultados e considerando as equações (4.43) e (4.44), tem-se:

$$\Delta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} M_{su}^{-1}(\mathbf{q})B_{su}(\mathbf{q}) \\ M_{rc}^{-1}(\mathbf{q})B_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Esta lei de controle obtida pela pseudo-inversa de  $\Delta(\mathbf{x})$  só é válida porque, a partir da matriz de acoplamento  $B(\mathbf{q})$ , a matriz  $B_{rc}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é inversível e  $B_{su}(\mathbf{q}) \neq 0 \forall \mathbf{q}$ .

Assim, obtém-se a lei de controle determinada por (4.42), sendo  $\mathbf{v}$  um controlador PD com ação *feedforward* da aceleração desejada, isto é:

$$\mathbf{v} = K_p(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) + K_d(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\mathbf{q}}_d, \quad (4.47)$$

sendo  $K_p \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  e  $K_d \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$  matrizes diagonais de ganho proporcionais e derivativos semidefinidas positivas,  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  a posição, a velocidade e a aceleração desejada no

espaço das configurações, onde  $\ddot{\mathbf{q}}_d \triangleq \mathbf{v}_k$  e os valores de  $\dot{\mathbf{q}}_d$  e  $\mathbf{q}_d$  são obtidos pela integração de  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ , e  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$  os dados medidos do sistema. Assim,

$$\mathbf{\Gamma} = \Delta(\mathbf{x})^+ (\mathbf{b}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}).$$

Essa lei somente é válida se a matriz  $\Delta(\mathbf{x})$  possuir posto igual a  $m = 7$ .

Quando se substitui o vetor de entrada (4.42) na equação dinâmica (4.18), tem-se que

$$B(\mathbf{q}) \Delta(\mathbf{x})^+ \neq \begin{bmatrix} M_{su}(\mathbf{q}) \\ M_{rc}(\mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

sendo o resultado de igualdade desejado para cancelar os termos não lineares por realimentação. Entretanto, como no controlador por dinâmica inversa, a trajetória desejada é calculada suavemente e, portanto, o erro entre os DOFs desejados  $\mathbf{q}_d$  e os medidos  $\mathbf{q}$  é baixo, sendo possível considerar que os resíduos do não cancelamento dos termos não lineares são pequenos e podem ser tratados como distúrbios que o sistema deve rejeitar.

Como se pode ver nas definições de (4.45) e (4.46), o controlador obtido é similar ao controlador de dinâmica inversa, apresentado anteriormente. Mas neste controlador, pode-se dizer que o sistema é completamente controlável, sendo a dinâmica interna de  $\mathbf{x}$  observável, uma vez que o grau relativo total é igual ao número dos estados. Isso somente é possível porque, com a normalização da equação dinâmica, pode-se considerar apenas  $\dot{\mathbf{q}}_u$  no vetor de estados para o rastreamento da trajetória, desejando-se, assim, que  $\dot{\mathbf{q}}_u \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

### 4.2.3 Controlador 3

O controlador consiste de um controlador  $H_\infty$  linear no controlador cinemático, apresentado na Seção 4.1.4, no nível externo e o controlador de dinâmica inversa, definido na Seção 4.2.1.2, no nível interno. A seguir, o controlador  $H_\infty$  linear é apresentado.

#### 4.2.3.1 Controlador externo - Controlador $H_\infty$ linear

O controlador  $H_\infty$  linear, abordado em (4.33), é utilizado para controlar o rastreamento da trajetória no nível do efetuador. Neste caso, considera-se que as variáveis  $x, y, z \in \mathbf{q}$ , bem como os parâmetros do quadrirrotor  $m_q, I_{xx}^q, I_{yy}^q$  e  $I_{zz}^q$ , são parâmetros incertos e que o distúrbio é um vetor de forças generalizadas  $\mathbf{w}$ , sendo  $\mathbf{u}_{ext} \triangleq \mathbf{w}$ . Assim, a equação dinâmica do sistema é

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q}) = B(\mathbf{q}) \mathbf{\Gamma} + \mathbf{w}. \quad (4.48)$$

Para gerar este controlador, considera-se que o controlador da malha interna é de

dinâmica inversa, sendo o controlador  $\mathbf{v}$  obtido no espaço da tarefa, ou seja,

$$\Gamma = B(\mathbf{q})^+ (M(\mathbf{q}) \mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q})), \quad (4.49)$$

com  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$ , sendo  $\mathbf{v}_k$  apresentado em (4.34). Como a trajetória desejada gerada é suave, pode-se considerar que  $B(\mathbf{q})B(\mathbf{q})^+ \approx I_9$ , e as parcelas não lineares que não forem canceladas pela realimentação são tratadas como distúrbios externos no vetor  $\mathbf{w}$ , que o controlador deve rejeitar. Igualando as equações (4.48) e (4.49), tem-se

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} + M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{w}. \quad (4.50)$$

O objetivo deste é rastrear a trajetória, então se deve considerar apenas a parte  $\mathbf{v}_c$  do controlador  $\mathbf{v}$  e, assim, (4.50) é reescrita como

$$\ddot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{v}_c + M_c^+(\mathbf{q}) \mathbf{w}, \quad (4.51)$$

sendo a matriz  $M_c(\mathbf{q})$  formada pelas  $i$ -ésimas colunas de  $M(\mathbf{q})$ , para  $i = \{3, \dots, 9\}$ . Substituindo  $\mathbf{v}_c$ , obtido em (4.37) em (4.51) e considerando como realimentação  $\ddot{\mathbf{q}}_c = J_c^\# (\text{vec } \ddot{\mathbf{e}} - \dot{J}_c \dot{\mathbf{q}}_c)$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_c &= J_c^\# (\mathbf{Q}_x - \dot{J}_c \dot{\mathbf{q}}_c) + (I_7 - J_c^\# J_c) \mathbf{U} + M_c^+(\mathbf{q}) \mathbf{w} \quad \text{e} \\ \text{vec } \ddot{\mathbf{e}} &= \mathbf{Q}_x + J_c M_c^+(\mathbf{q}) \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Neste caso, pode-se transformar (4.52) em uma equação linear, quando se considera  $J_c M_c^+(\mathbf{q})$  como vértices de parâmetros incertos, respeitando as variáveis já citadas anteriormente. As demais variáveis de  $\mathbf{q}$  são consideradas no ponto de equilíbrio e os parâmetros do manipulador são os valores nominais. Para encontrar o ponto de equilíbrio, deve-se considerar que as velocidades e as acelerações dos DOF são nulas, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0}_{9 \times 1}, \\ \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{0}_{9 \times 1}. \end{aligned}$$

Substituindo essa relação da equação dinâmica do sistema e considerando o distúrbio externo  $\mathbf{w}$  nulo, tem-se

$$B(\mathbf{q}) \Gamma - G(\mathbf{q}) = \mathbf{0}_{9 \times 1}. \quad (4.53)$$

As variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  não aparecem nas equações acima, conduzindo a um número infinito de pontos de equilíbrio, além de estas serem consideradas variáveis incertas. O ponto de equilíbrio obtido a partir de (4.53) é:

$$\mathbf{q}_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ x \ y \ z \ \beta_{r1} \ \beta_{r1} \ \beta_{r3}]^T, \quad (4.54)$$

sendo  $\beta_{ri}$ , para  $i = \{1, 2, 3\}$ , o ângulo da posição de repouso do  $i$ -ésimo elo do manipulador.

A partir dessas considerações, as variáveis de estados concatenadas em  $\mathbf{x}_l$  e as matrizes de(4.26) são:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_l &= \begin{bmatrix} \text{vec } \mathbf{e} \\ \text{vec } \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} & I_8 \\ 0_{8 \times 8} & 0_{8 \times 8} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} \\ I_8 \end{bmatrix}, & K &= \begin{bmatrix} K_{pc} & K_{dc} \end{bmatrix}, \\ B_w(\boldsymbol{\alpha}_v) &= \begin{bmatrix} 0_{8 \times 9} \\ \bar{B}_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \end{bmatrix}, & C &= I_{16}, \\ D &= 0 & D_w &= 0. \end{aligned}$$

sendo a matriz  $\bar{B}_w(\boldsymbol{\alpha}_v) \triangleq J_c M_c^+(\mathbf{q})$  calculada para os vértices.

Cada variável do sistema tem pesos diferentes sobre a equação dinâmica e, por isso, escala-se o sistema para transformar as escalas de todas as variáveis em unitárias (Skogestad & Postlethwaite, 2005). O dimensionamento adequado das matrizes do sistema linear é importante para os cálculos serem precisos, pois ao trabalhar com modelos em escalas diferentes, poderá haver perda de precisão. Um exemplo de dimensionamento incorreto é quando um sistema dinâmico possui estados com unidades em escalas diferentes, como, por exemplo, anos-luz e milímetros. Tais unidades podem introduzir entradas grandes ou pequenas na matriz  $A$ , que, ao serem calculadas, provocam a mistura de grandezas diferentes, que podem prejudicar características importantes do sistema e conduzir a resultados incorretos. Assim, considera-se que o  $i$ -ésimo estado e a  $j$ -ésima entrada externa, para  $i = 1, 2, \dots, 16$  e  $j = 1, 2, \dots, 9$ , sejam

$$\bar{x}_{li}(t) = \frac{x_{li}(t)}{D_{xi}}, \quad \bar{w}_j(t) = \frac{w_j(t)}{D_{wj}},$$

sendo  $D_{xi}$  e  $D_{wj}$  os elementos das diagonais principal das matrizes  $D_x \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$  e  $D_w \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ , formadas pelos valores máximos de  $x_{li}$  e  $w_j$ , respectivamente, definidas como

$$D_w = \text{blkdiag} \left( 2, 2, 2, 7.76825, 8.970, 13.455, 9, 6, 3 \right),$$

$$D_x = \text{blkdiag} \left( 0.0852, 0.0645, 0.0136, 0.1057, 0.77714, 0.6734, 0.67353, 0.77636, \right. \\ \left. 0.0052, 0.0038, 0.0011, 0.0063, 0.032916, 0.02807, 0.02798, 0.03295 \right),$$

onde *blkdiag* significa matriz diagonal. Com isso, os novos valores de  $\bar{\mathbf{x}}_l(t)$  e  $\bar{\mathbf{w}}(t)$  são

normalizados em [1] e as matrizes da equação linear, apresentam-se como

$$\begin{aligned}\bar{A} &= D_x^{-1}AD_x, \\ \bar{B} &= D_x^{-1}B, \\ \bar{K} &= KD_x, \\ \hat{B}_w(\boldsymbol{\alpha}_v) &= D_x^{-1}B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)D_w.\end{aligned}$$

Os valores máximos do vetor  $\mathbf{x}_l$  foram obtidos com base nos dados da simulação nominal do primeiro controlador, acrescentando uma taxa de 30%. Para encontrar os valores máximos das entradas generalizadas externas  $\mathbf{w}$ , considera-se que os torques máximos do quadrirrotor, em relação ao sistema inercial  $\mathcal{F}_0$ , são de 2 N.m em cada direção. Estes dados baseiam-se que este é um valor considerável para distúrbios de torques causados, por exemplo, por vento. Para as forças generalizadas do quadrirrotor nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do sistema inercial  $\mathcal{F}_0$  utiliza-se

$$\begin{aligned}F_x &= (\cos(\psi_{max}) \sin(\theta_{max}) \cos(\phi_{max}) + \sin(\psi_{max}) \sin(\phi_{max})) (\bar{T} - T_{Dmax}), \\ F_y &= (\sin(\psi_{max}) \sin(\theta_{max}) \cos(\phi_{max}) - \cos(\psi_{max}) \sin(\phi_{max})) (\bar{T} - T_{Dmax}), \\ F_z &= \cos(\theta_{max}) \cos(\phi_{max}) (\bar{T} - T_{Dmax}),\end{aligned}$$

sendo  $\bar{T} = \sum_{i=1}^4 T_i = 27.94\text{N}$ ,  $T_i$  as forças referentes ao quadrirrotor, obtidas na simulação nominal do primeiro controlador,  $T_{Dmax} = 10\text{N}$  a força de distúrbio máxima, aplicada em  $\mathcal{F}_q$  e os ângulos  $\phi_{max} = 30^\circ$ ,  $\theta_{max} = 30^\circ$  e  $\psi_{max} = 360^\circ$  os valores máximos que podem assumir. Para obter os torques do manipulador, calcula-se o torque como  $\tau_i = Fd_i$ , para  $i = \{1, 2, 3\}$ , sendo  $F$  a força aplicada no efetuador e  $d_i$  a distância do efetuador a  $i$ -ésima junta, como na Figura 4.3. Para este trabalho, a força máxima realizada em cada rotor é de 12.2 N e considerando o peso do sistema, a massa máxima que o manipulador poderia carregar é, aproximadamente,  $m_{max} = 2,09\text{kg}$ . Logo, a força  $F$  é calculada considerando essa massa máxima e a aceleração da gravidade  $g$ .

Levando em consideração as LMIs apresentadas em (4.33) e para que estas sejam numericamente resolvidas, é necessário pré e pós multiplicar a segunda inequação pela matriz

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0_{16 \times 16} \\ 0_{16 \times 16} & I_{16} \end{bmatrix}$$

e pela sua inversa, respectivamente, e considerar as transformações  $X_p = P^{-1}$  e  $Y_p = \bar{K}P^{-1}$ .

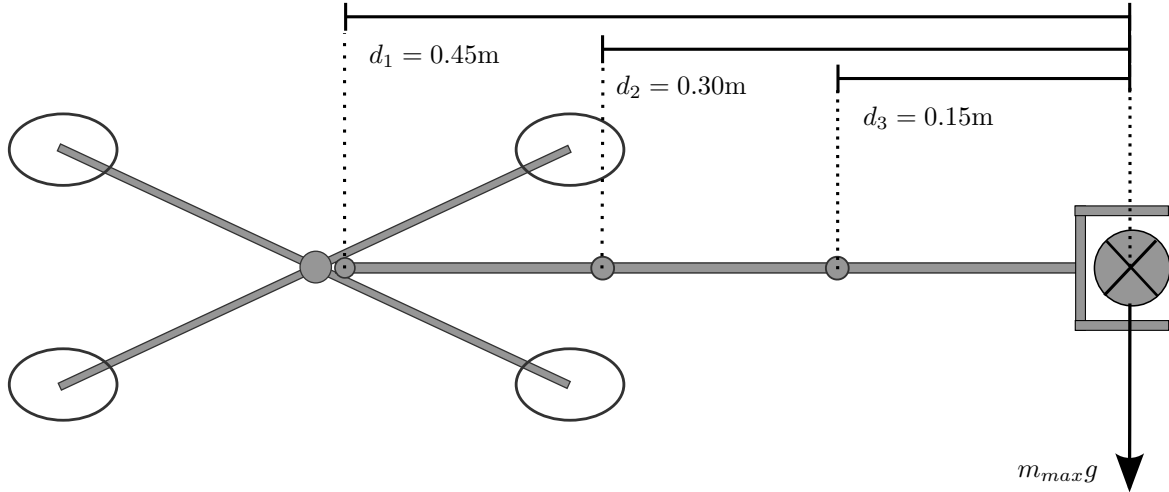


Figura 4.3: Manipulador - Cálculo dos torques máximos.

Com isso, as LMIs são:

$$\min \gamma^2 : \begin{cases} X_p & > 0 \\ \begin{bmatrix} (X_p \bar{A}^T + \bar{A} X_p + Y_p^T \bar{B}^T + \bar{B} Y_p + I_{16}) & \hat{B}_w(\alpha_v) \\ \hat{B}_w(\alpha_v)^T & -\gamma^2 I_9 \end{bmatrix} & < 0 \end{cases} \quad \forall \alpha_v \in \Lambda. \quad (4.55)$$

### 4.3 Estratégias de controle para um manipulador aéreo com o braço de cinco elos

Nessa seção são descritos os controladores propostos para o manipulador aéreo com um braço de cinco elos. Os controladores apresentados são de dinâmica inversa, sendo o vetor de entradas  $\mathbf{v}$  definido em (4.19), obtido diretamente do controlador cinemático no espaço da tarefa, apresentado na Seção 4.1.2, ou seja,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$  (Figura 4.2). O segundo controlador se difere do primeiro, pois este terá o controlador  $H_\infty$  linear aplicado ao controlador cinemático  $\mathbf{v}_k$ .

As Seções 4.3.1 e 4.3.2, descrevem os detalhes de cada um dos dois controladores propostos.

Tabela 4.2: Tipos de controladores do manipulador aéreo com o braço de cinco elos.

	Controlador Externo	Controlador Interno
Controlador 4	Controlador Cinemático no espaço da tarefa	Controlador de Dinâmica Inversa
Controlador 5	Controlador $H_\infty$ Linear	Controlador de Dinâmica Inversa

### 4.3.1 Controlador 4

O controlador considerado é o cinemático, especificado na Seção 4.1.2 que calcula o novo vetor de entrada  $\mathbf{v}$  para o controlador de dinâmica inversa, especificado na Seção 4.1.3.

#### 4.3.1.1 Controlador cinemático

O controlador cinemático de corpo completo permite ao manipulador aéreo realizar tarefas no nível do efetuador, por meio do uso simultâneo de todos os graus de liberdade, presentes no sistema. Este controlador é similar ao apresentado na Seção 4.2.1.1, com apenas algumas modificações.

Para este controlador, o vetor  $\mathbf{v}_k$  e a Jacobiana completa do sistema  $J(\mathbf{q})$  continuam sendo divididos, como em (4.34) e (4.35), respectivamente. Neste último caso,  $J_u \in \mathbb{R}^{8 \times 2}$  ainda é o bloco relacionado às variáveis  $\phi$  e  $\theta$ , composta pelas duas primeiras colunas de  $J(\mathbf{q})$ , enquanto  $J_c \in \mathbb{R}^{8 \times 9}$  é composta pelas colunas restantes. O que difere é a dimensão da matriz  $J_c$ . O vetor  $\mathbf{q}$  das coordenadas generalizadas também é particionado em conformidade, isso é,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_c \end{bmatrix}.$$

A primeira parte do controlador,  $\mathbf{v}_u \in \mathbb{R}^2$  é a mesma especificada em (4.36). Já a segunda parte,  $\mathbf{v}_c \in \mathbb{R}^9$ , é idêntica ao controlador apresentado em (4.37), mas utilizando o novo bloco da matriz Jacobiana  $J_c$  e uma lei de controle secundária  $\mathbf{U}$  estendida para os cinco elos. Neste último caso, o que difere é

$$d(\mathbf{q}_m) \triangleq \sum_{i=1}^5 \bar{d}_i,$$

para  $\bar{d}_i \triangleq 1/2\beta_i^2$ , com  $i = \{1, \dots, 5\}$ .

#### 4.3.1.2 Controlador de dinâmica inversa

O controlador de dinâmica inversa é baseado em (4.19), acrescentando-se apenas a pseudo-inversa da matriz de acoplamento  $B(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{11 \times 9}$ , pois o sistema é subatuado. Assim, o controlador  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^9$  é definido como

$$\mathbf{\Gamma} = B(\mathbf{q})^+ (M(\mathbf{q})\mathbf{v} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + G(\mathbf{q})), \quad (4.56)$$

sendo que nesse caso as dimensões das matrizes  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$  e  $G(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{11 \times 1}$  sofreram alterações. O novo vetor de entradas é computado pelo controlador cinemático, apresentado na Seção 4.3.1.1, ou seja,

$$\mathbf{v} \triangleq \mathbf{v}_k.$$





formado pelo quadrirrotor acoplado a um manipulador planar de três elos e a segunda, um manipulador aéreo formado pelo quadrirrotor acoplado a um manipulador de cinco elos.

Para a primeira configuração, propõem-se inicialmente o Controlador 1, pois é um controlador simples de ser concebido, pois envolve apenas a aplicação direta da equação dinâmica. No caso do Controlador 2, deseja-se mostrar que a dinâmica interna das variáveis do espaço de estado proposto era completamente observável e isso somente foi possível pois normalizou-se a equação dinâmica, como apresentado em Raffo (2011), e deste modo pode-se considerar no vetor de estados apenas a velocidade das coordenadas generalizadas que são estabilizadas. Já para o Controlador 3, deseja-se que este seja robusto e tenha melhores resultados, em relação ao erro e ações de controle, que os demais. A mesma análise foi feita ao se propor os controladores da segunda configuração.

Além disso, projeta-se a segunda configuração para reduzir o número de controladores, pois no controlador de dinâmica inversa não há o controlador no espaço das configurações, havendo apenas o controlador de cinemática no espaço da tarefa.

No capítulo a seguir, os resultados das simulações desses controladores serão apresentados, a fim de verificar se o objetivo destes, que é realizar a tarefa no nível do efetuador, enquanto o sistema permanece estável, é alcançado.

# 5

## Avaliação Experimental e Resultados

Neste capítulo são descritos os resultados das simulações dos controladores apresentados no capítulo 4. As simulações foram realizadas em ambiente MATLAB/Simulink<sup>®</sup>. O objetivo é comprovar que, mesmo sob a ação de distúrbios e/ou incertezas paramétricas, os controladores propostos conseguem rastrear uma trajetória no nível do efetuador, enquanto mantêm o sistema completo estável e as juntas o mais longe possível dos seus limites físicos. Os dados geométricos usados são os apresentados na Tabela 3.3.

A apresentação dos resultados de simulação é dividida em duas seções: a Seção 5.2 apresenta os resultados para os controladores do manipulador aéreo com o braço de três elos, enquanto a Seção 5.3 apresenta os resultados do manipulador aéreo com o braço de cinco elos. A seguir, os cenários dessas simulações são descritos.

### 5.1 Cenários das simulações

As simulações são realizadas em condições semelhantes e as situações em comum, como trajetória, distúrbios e ajustes de parâmetros, são descritas a seguir.

### 5.1.1 Trajetória

Nas simulações, o manipulador aéreo deve seguir uma trajetória circular (Figura 5.1) no nível do efetuador, definida em quatérnios duais como:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}}_d &= \underline{\mathbf{x}}_1(t) \underline{\mathbf{x}}(0), \\ \dot{\underline{\mathbf{x}}}_d &= \varepsilon \left( -wC_2\hat{i} + wC_1\hat{j} + 4wC_2\hat{k} \right) \underline{\mathbf{x}}(0), \\ \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_d &= \varepsilon \left( -w^2C_1\hat{i} - w^2C_2\hat{j} + 4w^2C_1\hat{k} \right) \underline{\mathbf{x}}(0),\end{aligned}\quad (5.1)$$

onde  $\underline{\mathbf{x}}_1(t) = \left( 1 + \varepsilon \left( C_1\hat{i} + C_2\hat{j} + (3 - 4C_1)\hat{k} \right) \right)$ ,  $C_1 \triangleq (1/2) \cos(wt)$ ,  $C_2 \triangleq (1/2) \sin(wt)$ ,  $\underline{\mathbf{x}}(0)$  é a posição inicial do efetuador,  $w = 2\pi/T_s$  é a velocidade angular e  $T_s$  é o tempo total de simulação. Em todos os casos, o manipulador aéreo parte de um ponto inicial  $\underline{\mathbf{x}}(0)$  fora da trajetória desejada  $\underline{\mathbf{x}}_d$ .

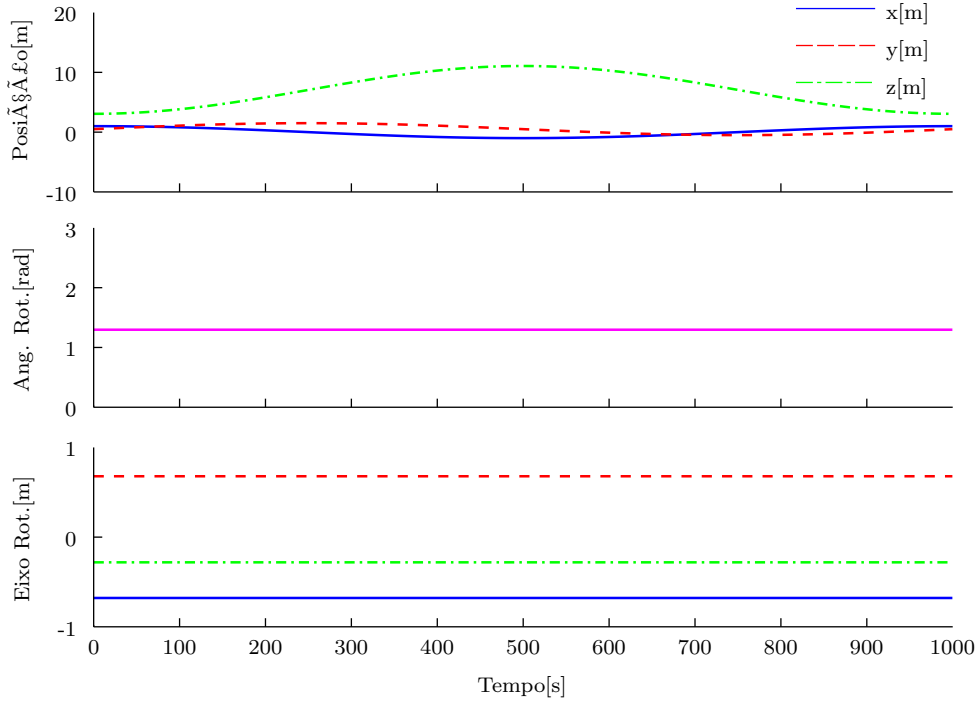


Figura 5.1: Trajetória circular no espaço tridimensional do efetuador em quatérnios duais.

### 5.1.2 Distúrbios

No caso das simulações do manipulador aéreo com um braço de três elos, para testar a rejeição destes controladores às forças generalizadas externas, um vetor de distúrbios

$$\mathbf{u}_{ext} = \left[ \tau_{\phi d} \ 0 \ 0 \ T_{Xd} \ 0 \ 0 \ \tau_{1d} \ 0 \ 0 \right]^T \quad (5.2)$$

é aplicado ao sistema, como definido em (3.31). Essas forças são, na simulação, sinais constantes aplicados em instantes diferentes. Neste caso, as magnitudes dos distúrbios e

os instantes dos disparos são:

$$\begin{aligned}\tau_{\phi d} &= 0.008 \text{ N.m} && \text{em } T = 750 \text{ s,} \\ T_{X_d} &= 0.01 \text{ N} && \text{em } T = 250 \text{ s,} \\ \tau_{1d} &= 0.005 \text{ N.m} && \text{em } T = 500 \text{ s.}\end{aligned}$$

Já os vetores de distúrbios aplicados nas simulações do manipulador aéreo com braço de cinco elos são específicos para cada controlador e são descritos na Seção 5.3.

### 5.1.3 Ajuste dos ganhos dos controladores

Os ganhos do controlador cinemático foram ajustados de modo similar em todos os controladores em que eles são utilizados. Os ganhos das matrizes  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  são ajustados empiricamente para os controladores das seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.3.1, enquanto que, para os controladores das seções 4.2.3 e 4.3.2, eles são obtidos ao se encontrar o menor valor de  $\gamma$  que torne as LMIs apresentadas factíveis. As submatrizes relacionadas à parte primária do erro da pose e da sua derivada têm valores menores que as partes duais (as quais contém os componentes de translação), pois a dinâmica de translação do sistema é mais lenta que a sua dinâmica rotacional.

Os ganhos das matrizes  $K_p$  e  $K_d$  dos controladores de dinâmica inversa apresentados na Seção (4.2) foram regulados respeitando as considerações feitas previamente. A matriz de ganho  $K_p$  é ajustada considerando que  $\phi$  e  $\theta$  não podem ser regulados em uma orientação desejada e, portanto, seus ganhos são nulos. Já a matriz de ganho  $K_d$  é ajustada considerando que  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\beta_i$ , para  $i = \{1, 2, 3\}$ , devem se estabilizar rapidamente. O mesmo princípio é usado para ajustar as matrizes  $K_{p2}$ ,  $K_{ns1}$  e  $K_{ns2}$  pertencentes ao controlador cinemático.

Para os controladores  $H_\infty$  linear no modelo cinemático, as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  e os parâmetros  $m_q$ ,  $I_{xx}^q$ ,  $I_{yy}^q$  e  $I_{zz}^q$  são considerados parâmetros incertos. As demais variáveis de  $\mathbf{q}$  são consideradas no ponto de equilíbrio (apresentado em (4.54) para o manipulador aéreo com três elos e em (4.58) para o de cinco elos) e os parâmetros do manipulador são os valores nominais (apresentados na Tabela 3.3). Para os parâmetros incertos, considera-se que  $x \in [-5 \ 5] \text{ m}$ ,  $y \in [-5 \ 5] \text{ m}$  e  $z \in [0 \ 10] \text{ m}$  e que os parâmetros do quadrirrotor variam em  $\pm 30\%$  do valor nominal. Com esses valores, calculam-se todos os vértices da matriz  $B_w(\boldsymbol{\alpha}_v)$  das LMIs, sendo possível assim encontrar os ganhos das matrizes  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  para os controladores das seções 4.2.3 e 4.3.2.

## 5.2 Manipulador aéreo com o braço de três elos

Nessa seção são apresentados os resultados de simulação obtidos com os controladores projetados para o manipulador aéreo com um braço de três elos, descritos na Seção 4.2. Em todas essas simulações, utiliza-se a mesma configuração inicial, definida como:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} & 0.5 & 1.5 & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}^T, \\ \dot{\mathbf{q}} &= 0_{9 \times 1}, \\ \ddot{\mathbf{q}} &= 0_{9 \times 1},\end{aligned}$$

e a mesma trajetória desejada, especificada em (5.1).

Os controladores apresentados são os propostos nas Seções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, denominados ao longo do texto como Controlador 1, Controlador 2 e Controlador 3, respectivamente. O objetivo destes é rastrear uma trajetória desejada no nível do efetuador, enquanto mantêm o sistema completo estável e as juntas o mais longe possível dos seus limites físicos, mesmo sob a ação de distúrbios e incertezas paramétricas. Além disso, o último controlador tem também o objetivo de ser robusto frente às forças externas, incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas.

As matrizes de ganho utilizadas são específicas para cada controlador e elas são ajustadas de acordo com as especificações da Seção 5.1.3. Para o Controlador 1, as matrizes de ganhos são:

$$\begin{aligned}K_{pc} &= \text{blkdiag}(0.0045 I_4; 0.006 I_4), \\ K_{dc} &= \text{blkdiag}(0.04 I_4; 0.078 I_4), \\ K_p &= \text{blkdiag}(0_{2 \times 2}; I_4; 2 I_3), \\ K_d &= \text{blkdiag}(50 I_2; I_4; 50 I_3), \\ K_{p2} &= -5 I_2, \\ K_{ns1} &= 0.5, \\ K_{ns2} &= 100,\end{aligned}$$

onde *blkdiag* define uma matriz bloco diagonal. Já para o Controlador 2, as matrizes de ganhos  $K_{pc}$ ,  $K_{dc}$ ,  $K_{p2}$ ,  $K_{ns1}$  e  $K_{ns2}$  são as mesmas definidas para o Controlador 1 e  $K_p$  e  $K_d$  são definidas como:

$$\begin{aligned}K_p &= \text{blkdiag}(0_{2 \times 2}; 200; 10 I_3; I_3), \\ K_d &= \text{blkdiag}(5 I_2; 110; 10 I_3; 20 I_3).\end{aligned}$$

Para o Controlador 3, as matrizes de ganho  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  são ajustadas utilizando o controlador  $H_\infty$  linear e as especificações da Seção 5.1.3. Neste caso, o menor valor de  $\gamma$

que torne as LMIs, apresentadas em (4.55), factíveis é  $\gamma = 19.587$  e as matrizes  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  obtidas são apresentadas no Apêndice A. Já as matrizes de ganhos  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $K_{p2}$ ,  $K_{ns1}$  e  $K_{ns2}$  são as mesmas definidas para o Controlador 1.

Para testar a rejeição destes controladores às forças generalizadas externas, um vetor de distúrbios, definido em (5.2), é aplicado ao sistema, como determinado em (3.31). Além disso, para testar a rejeição destes às incertezas paramétricas e dinâmicas não modeladas, realizaram-se as simulações considerando que  $m_q$ ,  $I_{xx}^q$ ,  $I_{yy}^q$  e  $I_{zz}^q$ , para a equação dinâmica do sistema, possuem valores 20% maiores que os seus valores nominais.

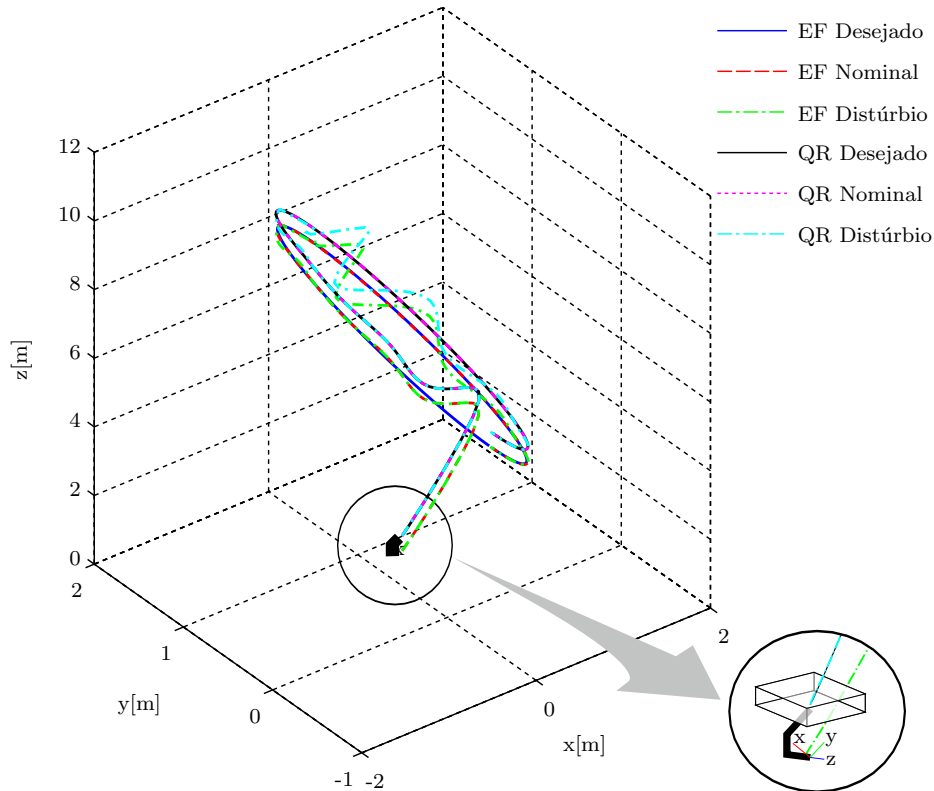
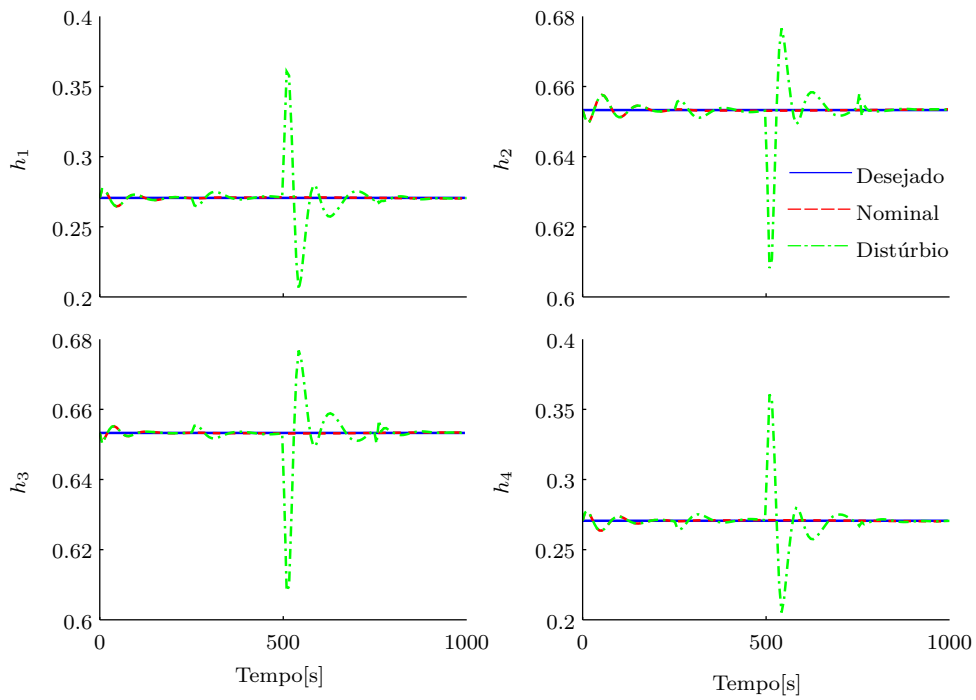
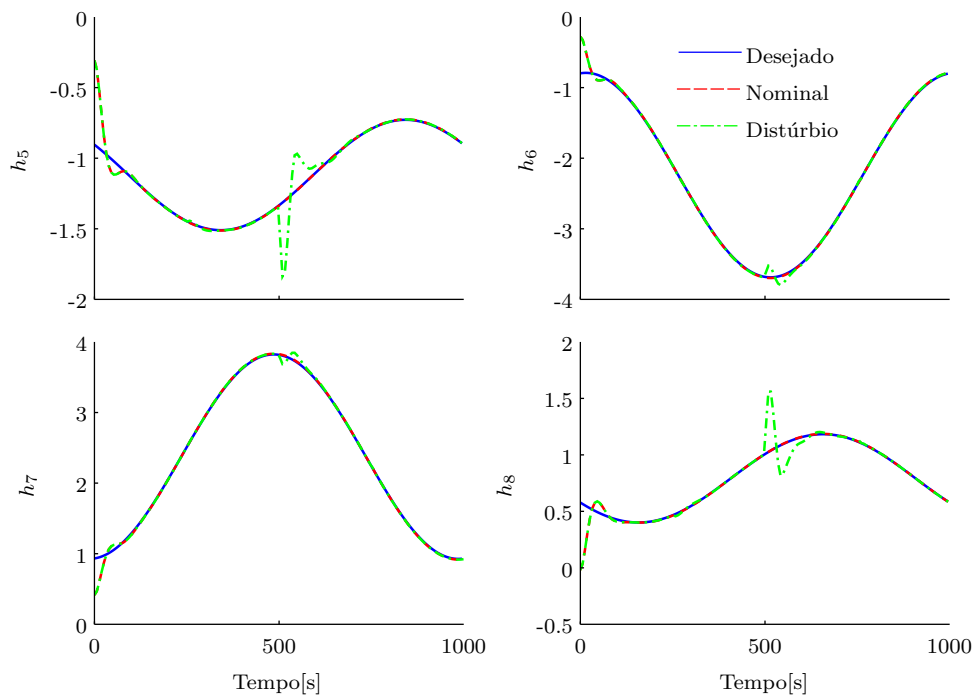


Figura 5.2: Trajetória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrirrotor (QR) para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos.

As Figuras 5.2–5.6, 5.7–5.11 e 5.12–5.16 mostram os resultados das simulações para o Controlador 1, Controlador 2 e Controlador 3, respectivamente. Nas figuras, pode-se visualizar o rastreamento da trajetória desejada realizada pelo manipulador aéreo para dois tipos de cenários, sendo um livre de distúrbios, denominado nominal, e outro considerando distúrbios e incertezas paramétricas. Em detalhe, as Figuras 5.2, 5.7 e 5.12 mostram uma visão tridimensional da trajetória seguida pelo efetuador e pelo quadrirrotor. Mesmo na presença de distúrbios, o manipulador aéreo seguiu, em todos os controladores, a trajetória especificada, mantendo-se estável ao longo de todo o percurso. A resposta temporal de cada componente do quatérnio dual  $\underline{x}$ , que representa a pose do efetuador, está representada nas Figuras 5.3, 5.8 e 5.13. Apesar dos distúrbios, em todos os casos cada componente convergiu assintoticamente para a referência desejada, retornando sempre à



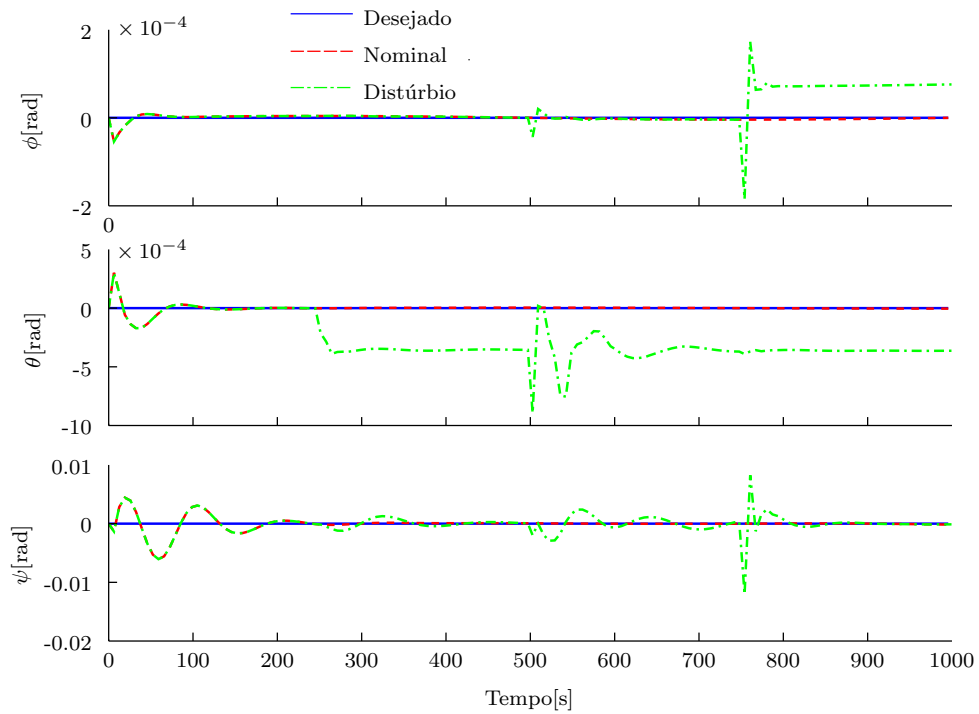
(a) Parte Primária de  $\underline{x}$ .



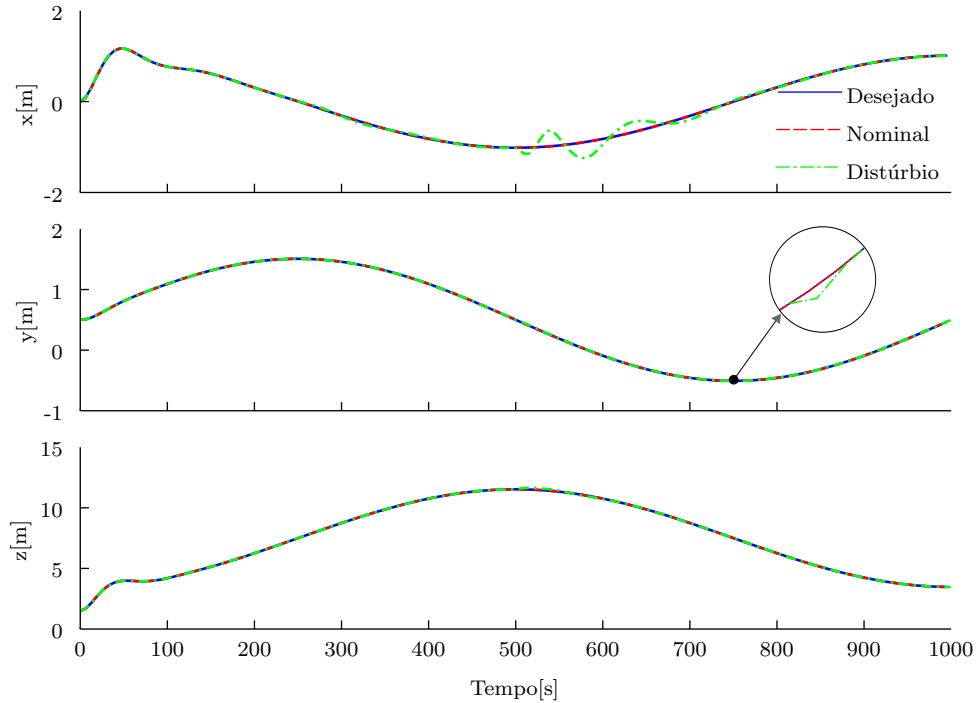
(b) Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.3: Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos.





(a) Orientação



(b) Posição

Figura 5.4: Variáveis do quadricóptero durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos.

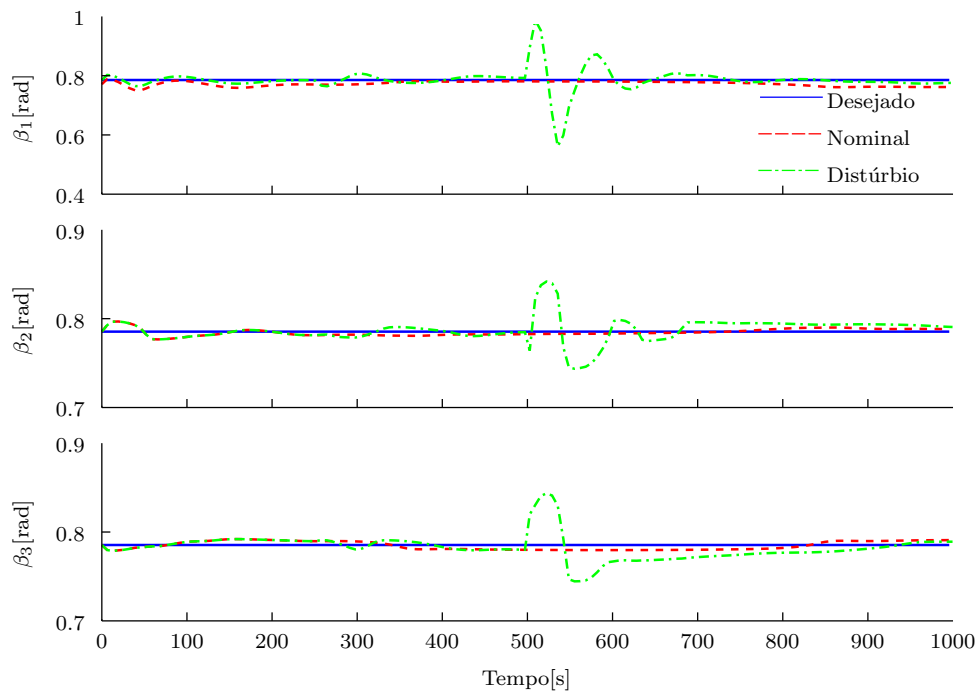


Figura 5.5: Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos.

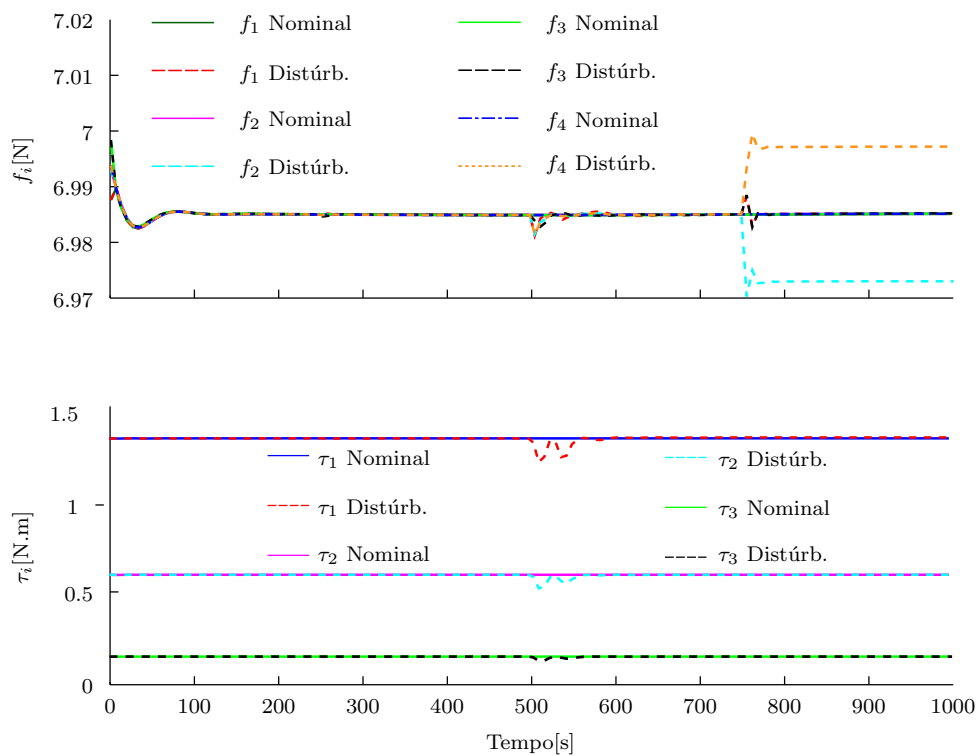


Figura 5.6: Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 1 do manipulador aéreo com três elos.

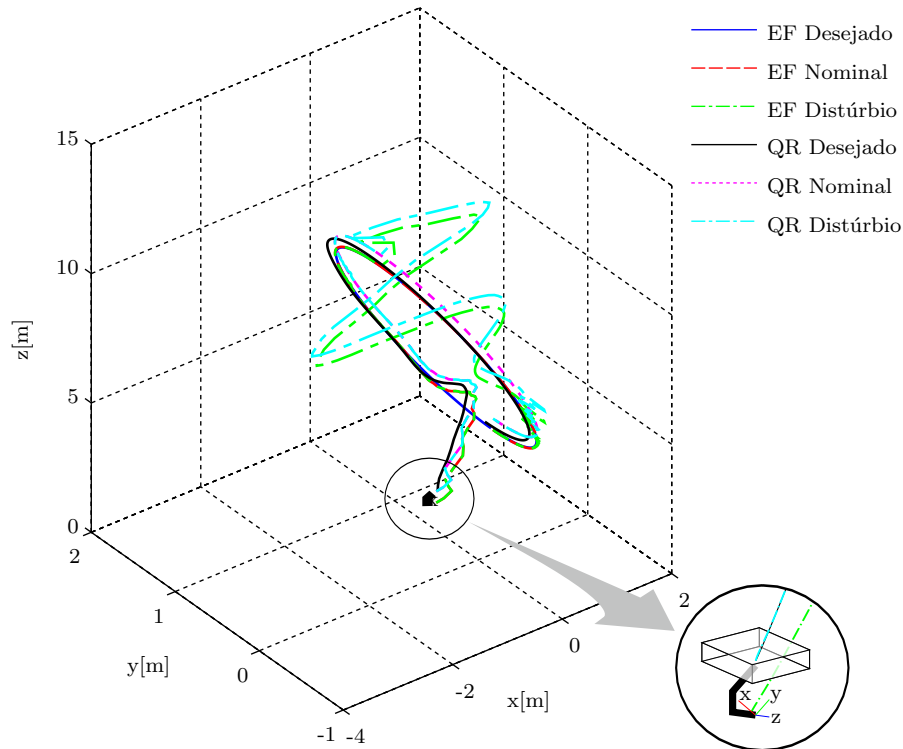
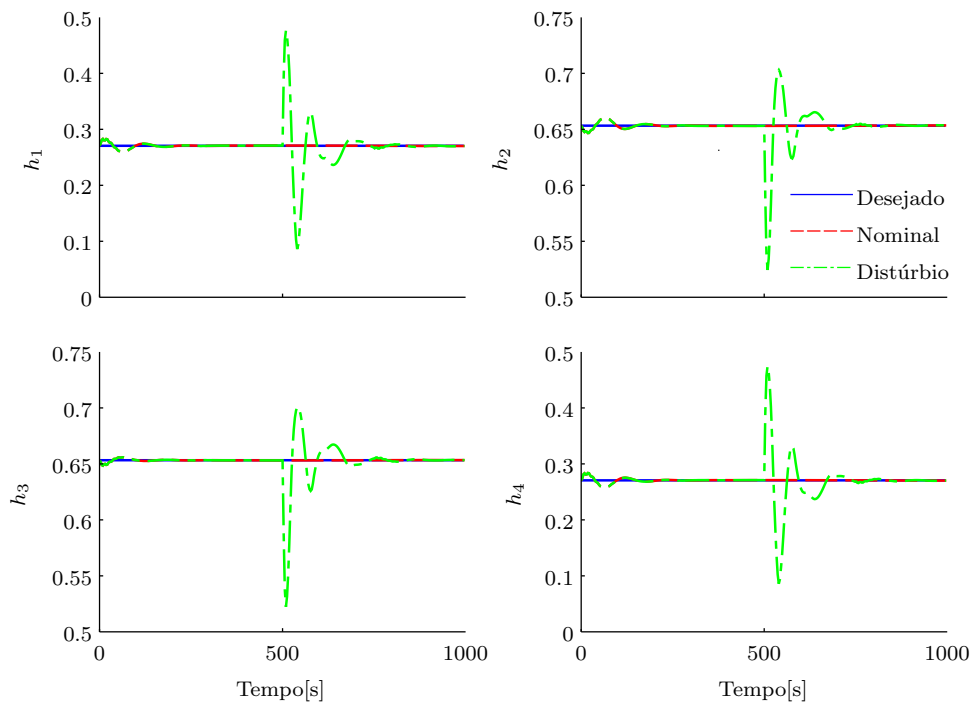


Figura 5.7: Trajetória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrrrotor (QR) para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos.

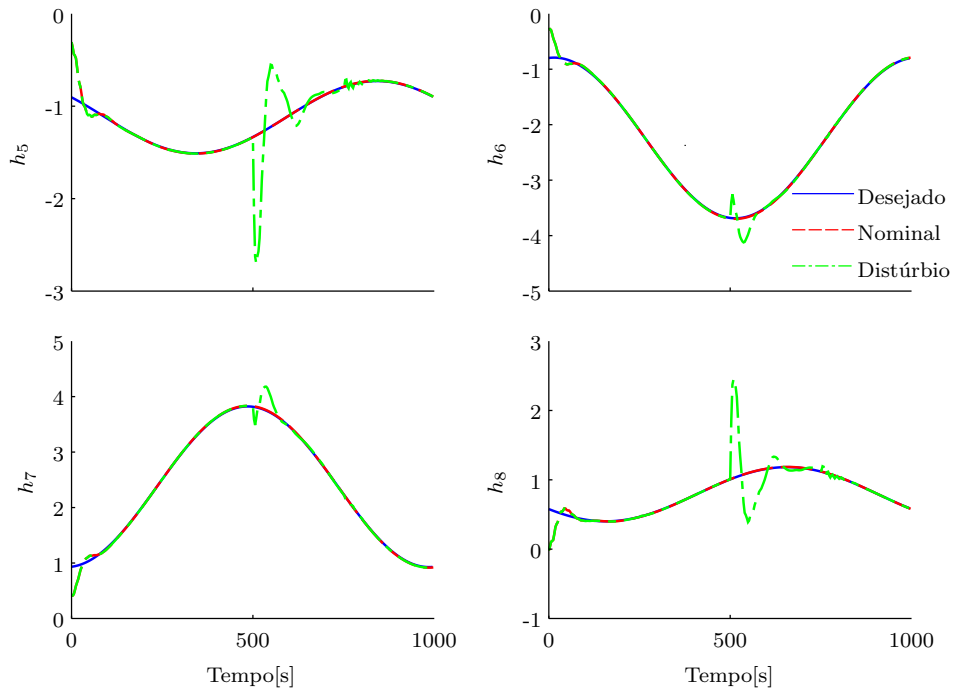
trajetória de referência depois que distúrbios foram aplicados no sistema.

As Figuras 5.4a, 5.9a e 5.14a apresentam a resposta dos ângulos de Euler, correspondentes à orientação do quadrrrotor. Como a orientação desejada é constante (Figura 5.1), conclui-se que, para todos os controladores, a estratégia de controle em cascata teve um desempenho satisfatório, pois a variação em cada componente de orientação foi pequena em relação a escala de 1 rad e flutuou em torno da origem, o que mostra a estabilidade do sistema. O ângulo de rolagem,  $\phi$ , após o disparo do distúrbio  $\tau_{\phi d}$ , (força generalizada externa que afeta diretamente a dinâmica desta variável), se estabilizou em um valor próximo de zero (aproximadamente  $7.275 \cdot 10^{-5}$  rad para o Controlador 1;  $1.13 \cdot 10^{-4}$  rad para o Controlador 2; e  $7.403 \cdot 10^{-5}$  rad para o Controlador 3). Essa pequena variação foi necessária para rejeitar o distúrbio nessa direção. Já o ângulo de arfagem,  $\theta$ , após o disparo do distúrbio  $T_{Xd}$ , (força generalizada externa que afeta diretamente a dinâmica da variável  $x$ ), se estabilizou em um valor próximo de zero (aproximadamente  $-3.561 \cdot 10^{-4}$  rad para o Controlador 1;  $-4.12 \cdot 10^{-3}$  rad para o Controlador 2; e  $-3.253 \cdot 10^{-5}$  rad para o Controlador 3). Essa pequena variação ocorreu para rejeitar o distúrbio na direção da variável  $x$ , pois o movimento de arfagem (*pitch*) deste ângulo causa deslocamento nesta direção. Em particular, o ângulo de arfagem,  $\theta$ , no Controlador 2 se estabilizou em um valor diferente de zero, sendo  $\theta \approx -3.85 \cdot 10^{-3}$  rad. Esta variação é explicada a seguir, mas por ser um valor pequeno, pode-se considerar que o erro é praticamente nulo.

As Figuras 5.4b, 5.9b e 5.14b apresentam a evolução temporal dos movimentos trans-

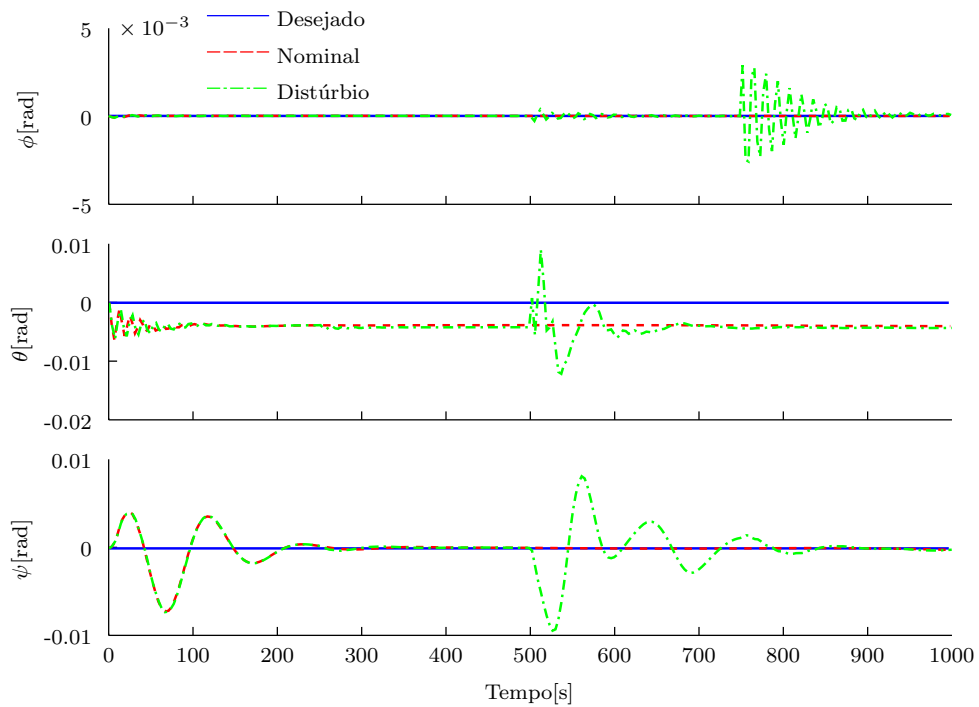


(a) Parte Primária de  $\underline{x}$ .

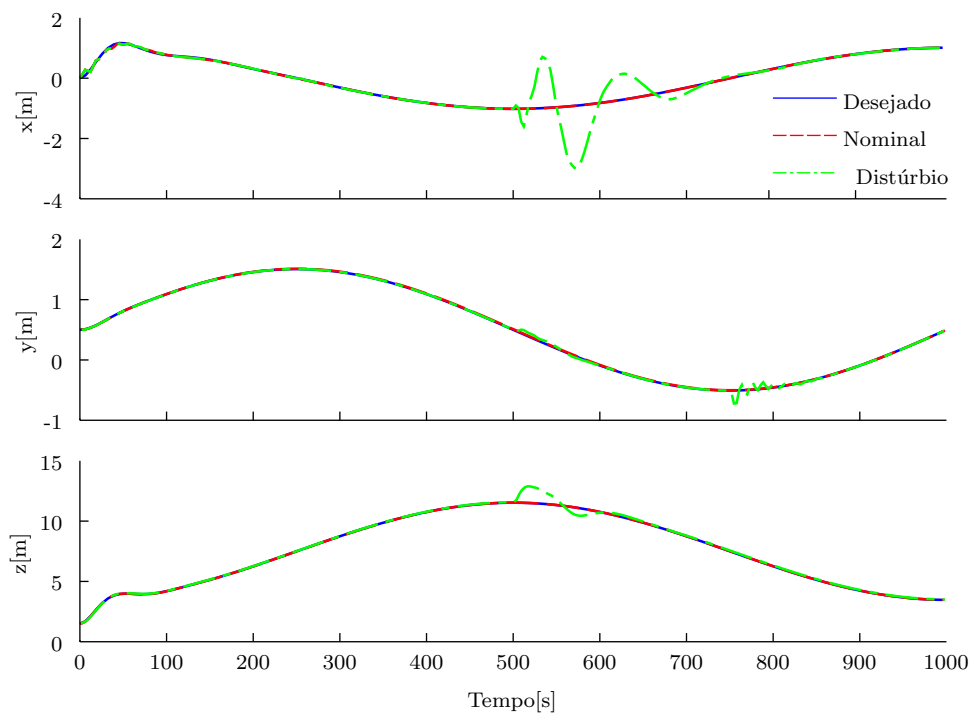


(b) Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.8: Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos.



(a) Orientação



(b) Posição

Figura 5.9: Variáveis do quadricóptero durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos.

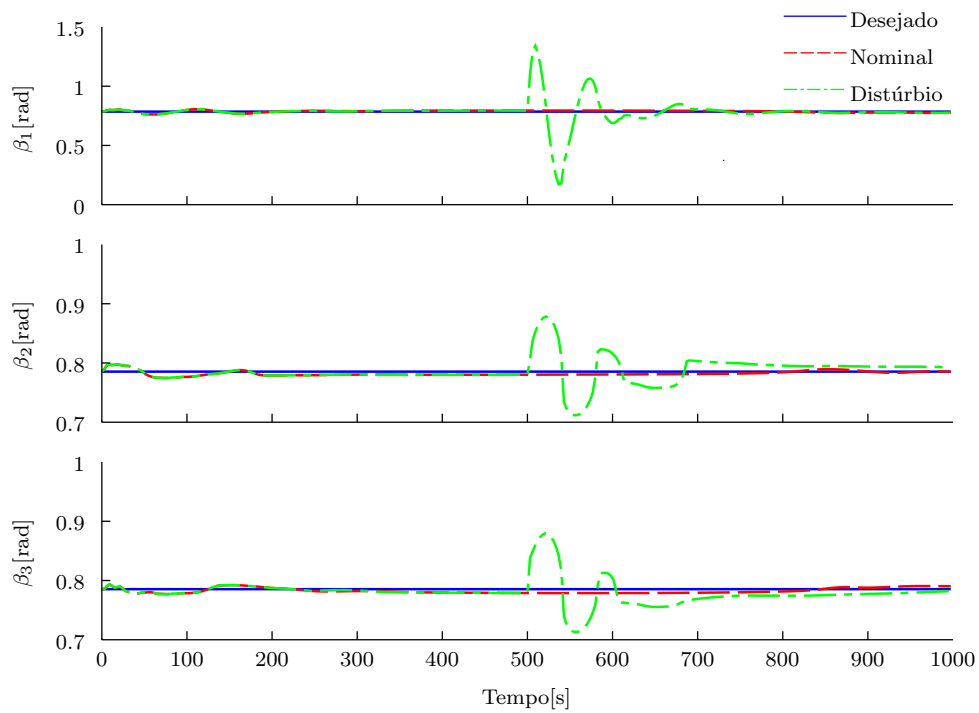


Figura 5.10: Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos.

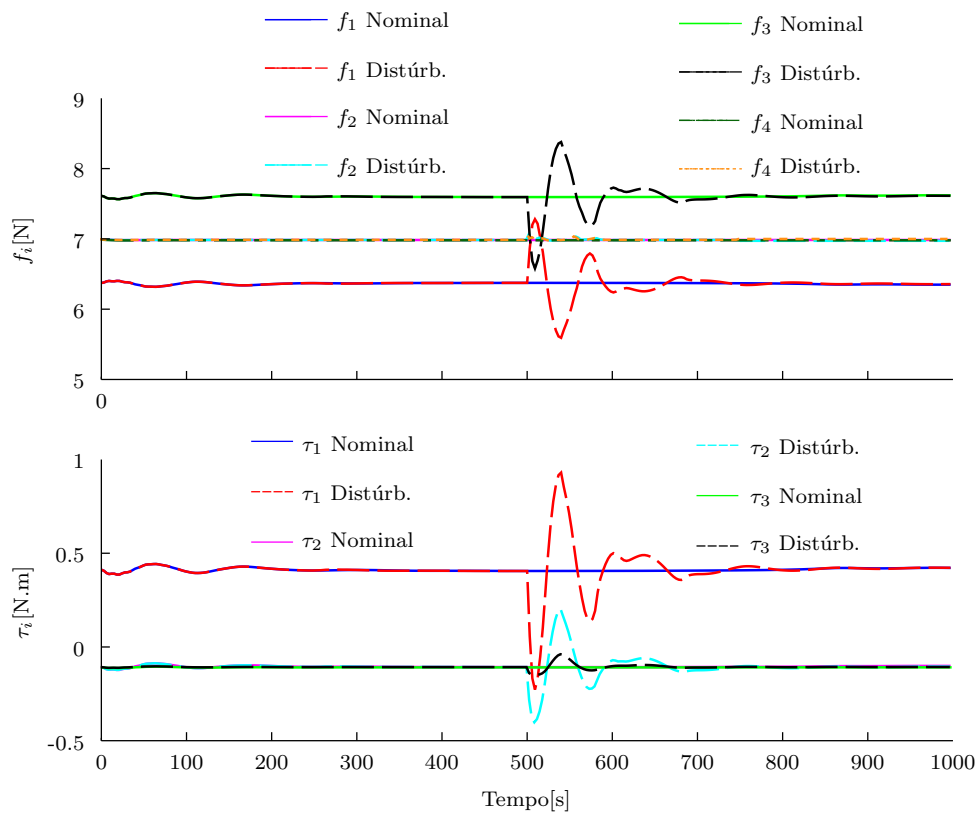


Figura 5.11: Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 2 do manipulador aéreo com três elos.

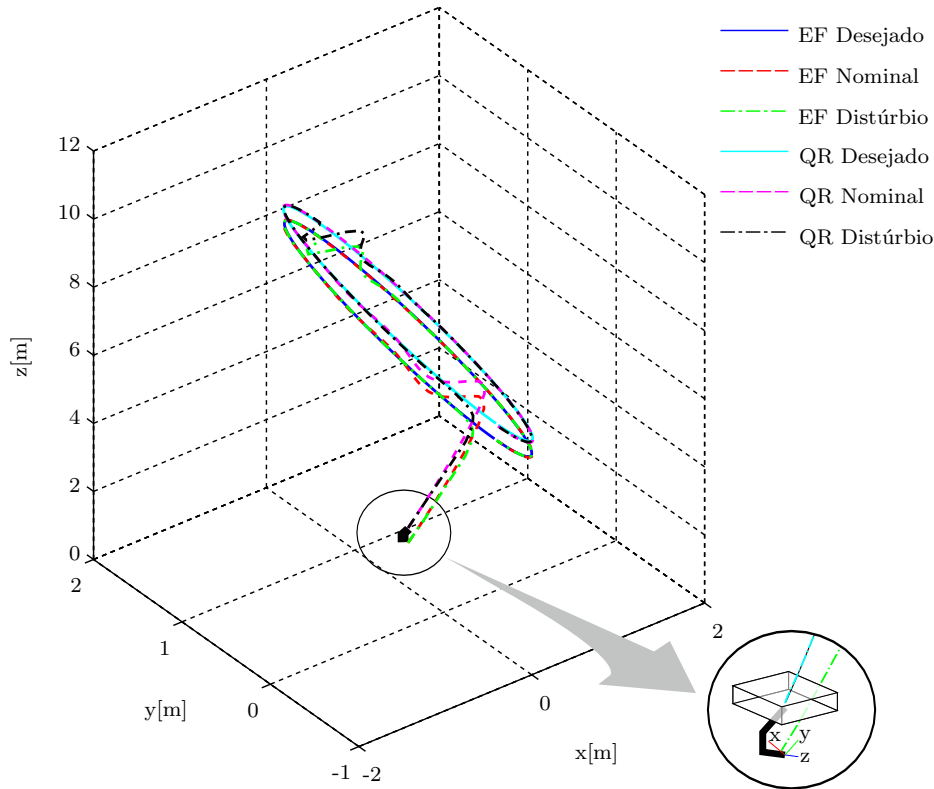
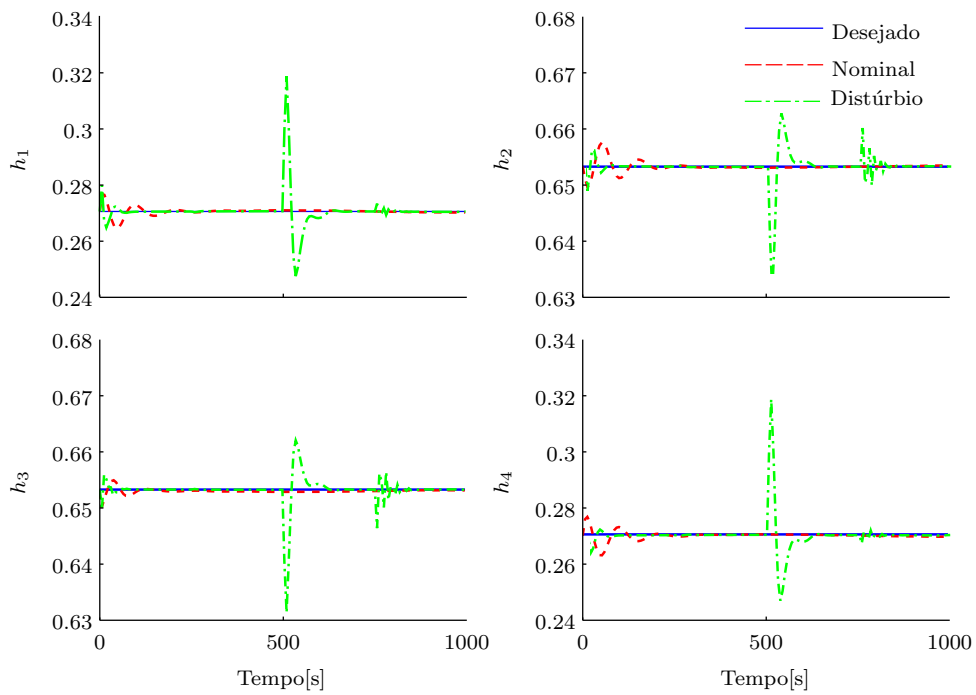


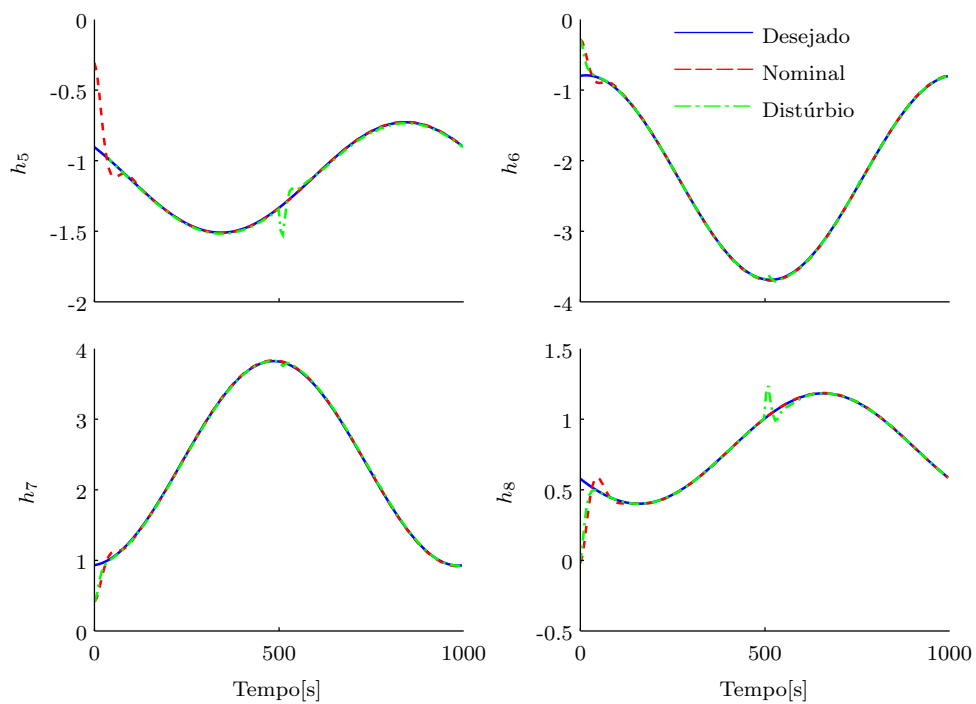
Figura 5.12: Trajetória desejada e atual do efetor (EF) e do quadrrorotor (QR) para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos.

lacionais do quadrrorotor, indicando que as estratégias de controle foram capazes de guiar o veículo suavemente. Além disso, o controlador garantiu erros pequenos, quando se compara a escala total da trajetória, em regime permanente, tanto para os movimentos rotacionais quanto translacionais. Particularmente, no Controlador 2, por causa da estabilização de  $\theta$  em um valor diferente de zero, a variável  $x$  se estabilizou em um valor diferente daquele encontrado na simulação sem distúrbios, no qual  $\theta$  permaneceu próximo de 0 rad. Neste caso,  $x$  está, aproximadamente, 0.016 m abaixo da trajetória nominal (Figura 5.9b). A variação nas coordenadas generalizadas  $\theta$  e  $x$  ocorreu devido ao efeito da modelagem de corpo completo do sistema. Para essa configuração do controlador, as variáveis do manipulador,  $\mathbf{q}_m$ , se estabilizaram mais rápidas que as variáveis do quadrrorotor,  $\mathbf{q}_q$ . Entretanto, o ponto em que elas se estabilizaram deslocou o manipulador, e consequentemente o efetor, em, aproximadamente, 0.009 m para frente (dados calculados para  $T = 150$  s, no qual  $\beta_1 \approx 0.7782$  rad,  $\beta_2 \approx 0.7857$  rad e  $\beta_3 \approx 0.7922$  rad). Desse modo, para manter o efetor na posição desejada, o quadrrorotor se deslocou para trás.

As Figuras 5.5, 5.10 e 5.15 mostram a resposta temporal dos ângulos das juntas do manipulador. A lei de controle secundária, projetada no espaço nulo da tarefa principal e igual para todos os controladores, alcançou os objetivos ao mantê-los próximos aos valores desejados, que neste caso correspondem à posição de repouso ( $\pi/4$  rad para todos os ângulos). Além disso, as leis de controle completas foram bem sucedidas em rejeitar os



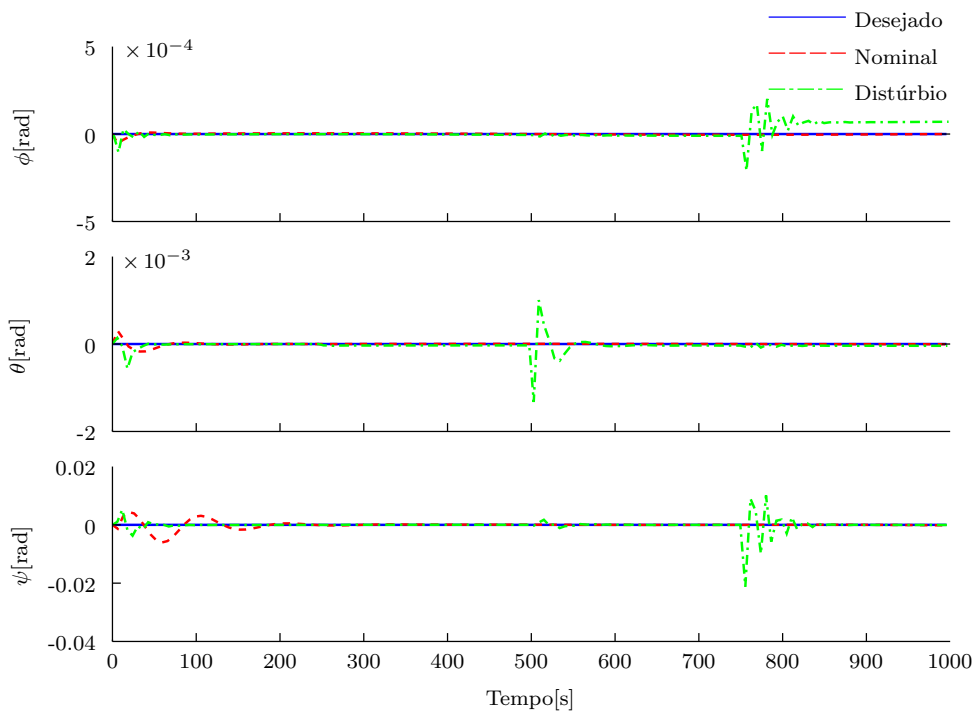
(a) Parte Primária de  $\underline{x}$ .



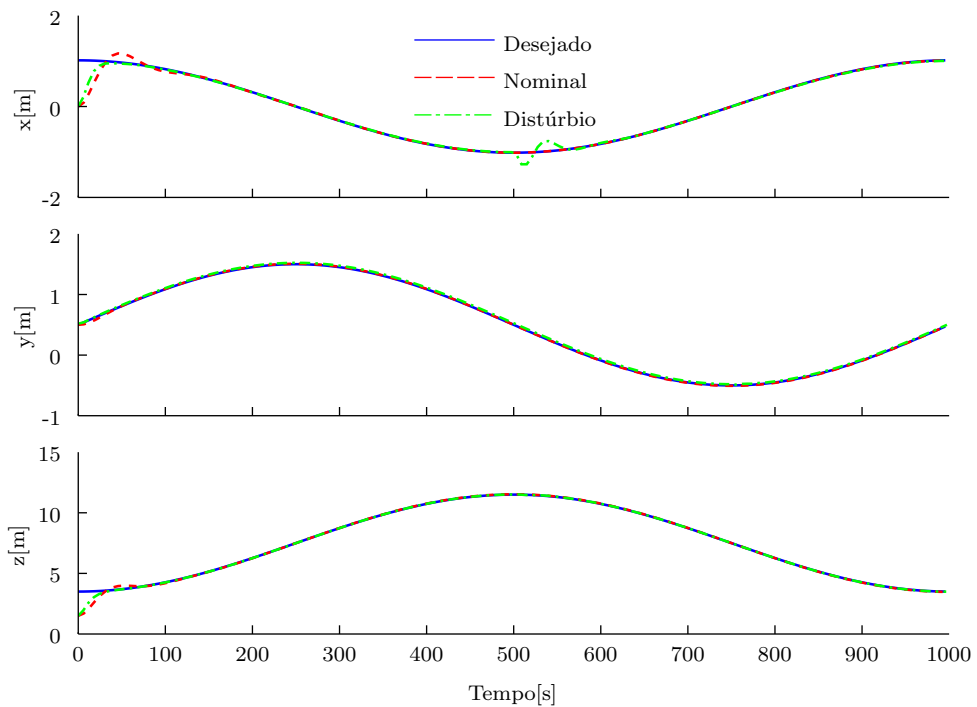
(b) Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.13: Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos.





(a) Orientação



(b) Posição

Figura 5.14: Variáveis do quadricóptero durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos.

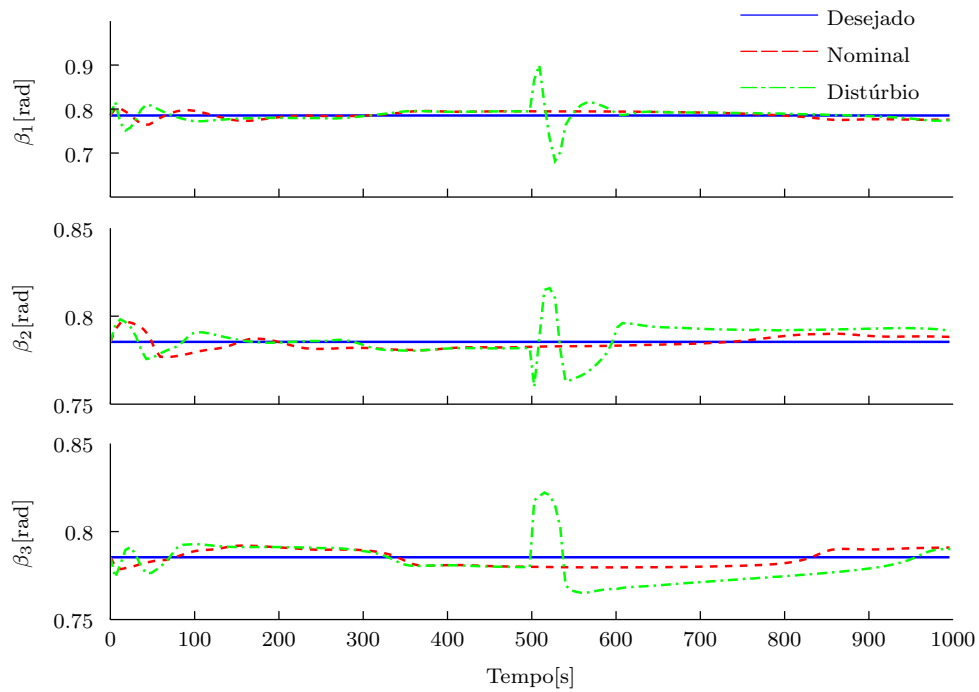


Figura 5.15: Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 3 DOF do manipulador para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos.

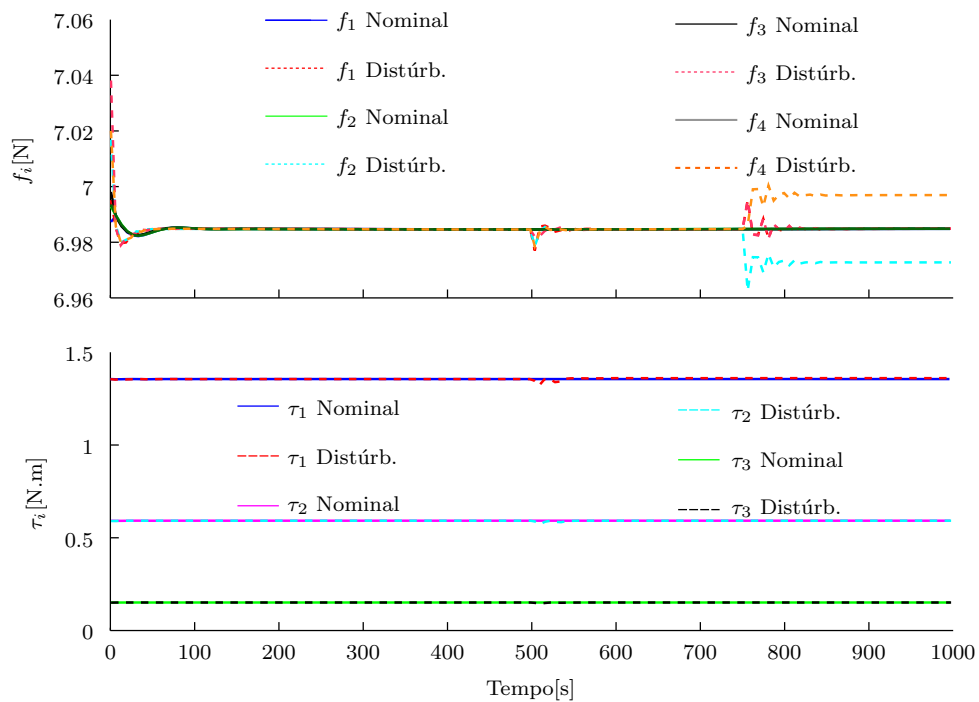


Figura 5.16: Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 3 do manipulador aéreo com três elos.

distúrbios, principalmente  $\tau_{1d}$ , que é uma força generalizada externa que afeta diretamente a dinâmica de uma das variáveis do manipulador. O erro destes ângulos não foi nulo, como esperado, devido às exigências impostas pela tarefa primária em acompanhar a trajetória desejada.

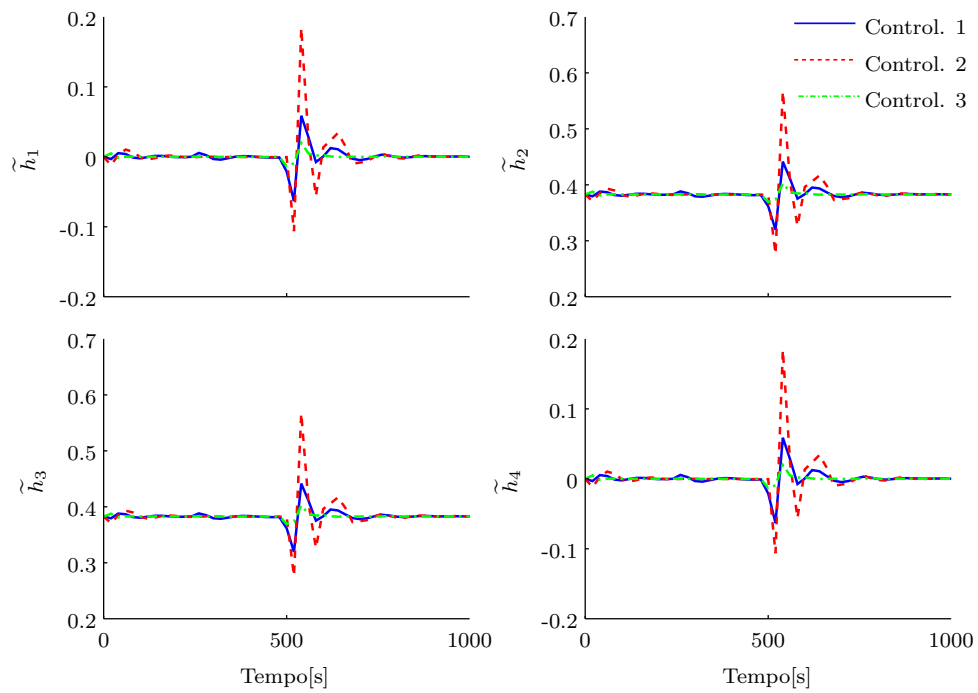
Uma observação importante é que o distúrbio  $\tau_{1d}$  afetou significativamente todas as variáveis do sistema. Tal fato ocorre porque o manipulador e o quadrirrotor acoplados funcionam como alavancas e o ponto de acoplamento entre eles é um ponto de apoio. Assim, neste caso, uma força aplicada na extremidade do braço robótico, que possui uma distância maior ao ponto de apoio, é equilibrada por uma força de maior intensidade aplicada no quadrirrotor, ou seja, a perturbação no manipulador é amplificada no quadrirrotor, em função do efeito alavanca. Além disso, pode-se ver que os ângulos  $\phi$  e  $\theta$ , responsáveis pelos movimentos de rolagem e arfagem, estabilizaram-se em valores próximos a origem, mesmo havendo movimentos laterais e longitudinais. Isso somente é possível porque os rotores são inclinados de um ângulo de  $\alpha_T$  em relação ao eixo vertical e, portanto, as forças dos rotores  $f_i$ , para  $i = 1, \dots, 4$ , conseguem também gerar impulso nos eixos  $X$  e  $Y$ .

As Figuras 5.6, 5.11 e 5.16 mostram os esforços dos controladores. Especificamente, nos gráficos superiores são apresentadas as forças de cada rotor do veículo, ao passo que nos inferiores são ilustrados os torques aplicados em cada junta do manipulador. Todos os gráficos indicam que as entradas geradas foram suaves, não ultrapassando 20% dos valores nominais, mesmo na presença de perturbações. Observou-se que, após o disparo do distúrbio  $\tau_{\phi d}$ , as forças  $f_2$  e  $f_4$  de todos os controladores se estabilizaram em novos pontos. Isso ocorreu porque o ângulo  $\phi$  se estabilizou em um novo ponto para rejeitar este distúrbio, e a combinação dessas duas forças é responsável por este movimento. Em particular, no Controlador 2, a variação do ângulo de arfagem,  $\theta$ , também influenciou nas ações de controle do quadrirrotor. Neste caso,  $f_1 \approx 6.373$  N e  $f_3 \approx 7.594$  N se estabilizaram em valores diferentes de  $f_2 \approx 6.985$  N e  $f_4 \approx 6.985$  N. Isso ocorreu porque o par de forças  $(f_1, f_3)$  é responsável pelo movimento de arfagem.

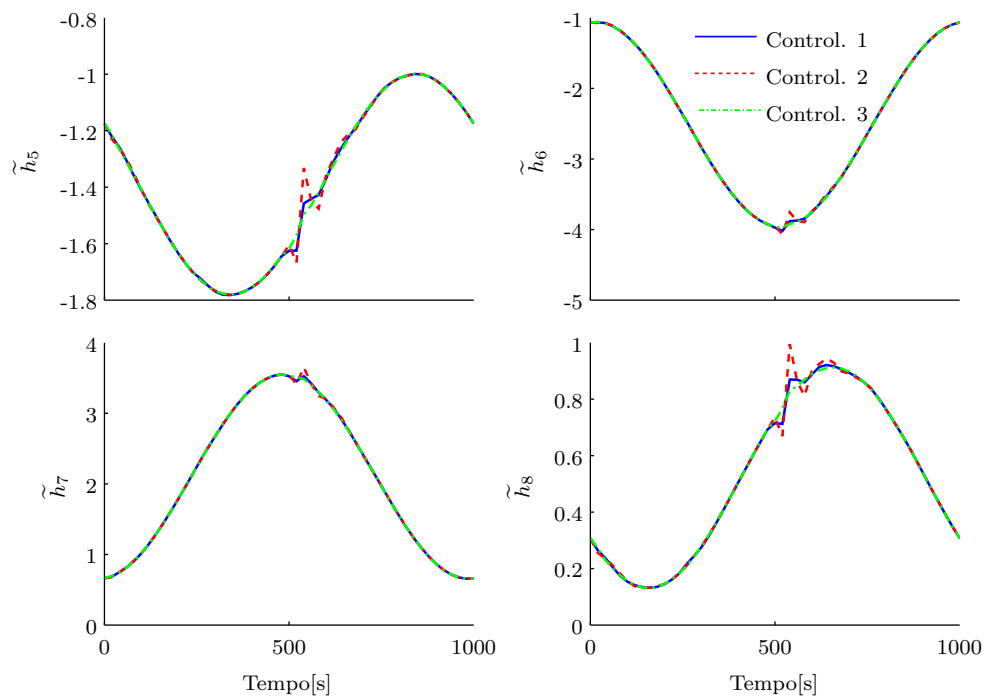
A Figura 5.17 exhibe os erros de rastreamento dos coeficientes do quatérnio dual  $\underline{x}$  da pose do efetuador, definidos como  $\tilde{h}_i = h_{iref} - h_i$ , para  $i = \{1, \dots, 8\}$ . Pode-se ver nesta figura que o Controlador 2 teve sobressinais maiores do que os demais controladores quando os distúrbios foram aplicados e que o Controlador 3 teve melhores resultados, pois os seus erros foram menores, em comparação aos outros controladores, como já esperado, porque ele é um controlador robusto.

A Tabela 5.1 mostra o índice integral do erro quadrático (ISE) dos coeficientes do quatérnio dual  $\underline{x}$  da pose do efetuador em relação à trajetória desejada, isto é:

$$\text{ISE}(h_i) = \int_0^{T_s} (\tilde{h}_i)^2 dt.$$



(a) Erro dos coeficientes da Parte Primária de  $\underline{x}$ .



(b) Erro dos coeficientes da Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.17: Erro dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para os controladores do manipulador aéreo com três elos.

De modo geral, o Controlador 3 apresentou menor índice de ISE em relação aos outros dois controladores para todos os coeficientes, com exceção dos ISE de  $h_5$  e  $h_6$ , que tiveram melhor desempenho no Controlador 2. Deve-se destacar que o Controlador 3 apresentou 7,76% e 1,38% de ISE nos coeficientes  $h_1$  e  $h_4$ , respectivamente, com respeito aos Controladores 1 e 2. Entretanto, com exceção desses coeficientes, as relações dos ISEs entre dois controladores ficaram bem próximo a um, o que indica que, pelo índice do erro quadrático, os controladores têm comportamentos semelhantes.

Tabela 5.1: ISE para cada componente do quatérnio dual da pose do efetuador para os Controladores 1, 2 e 3 e as relações entre eles.

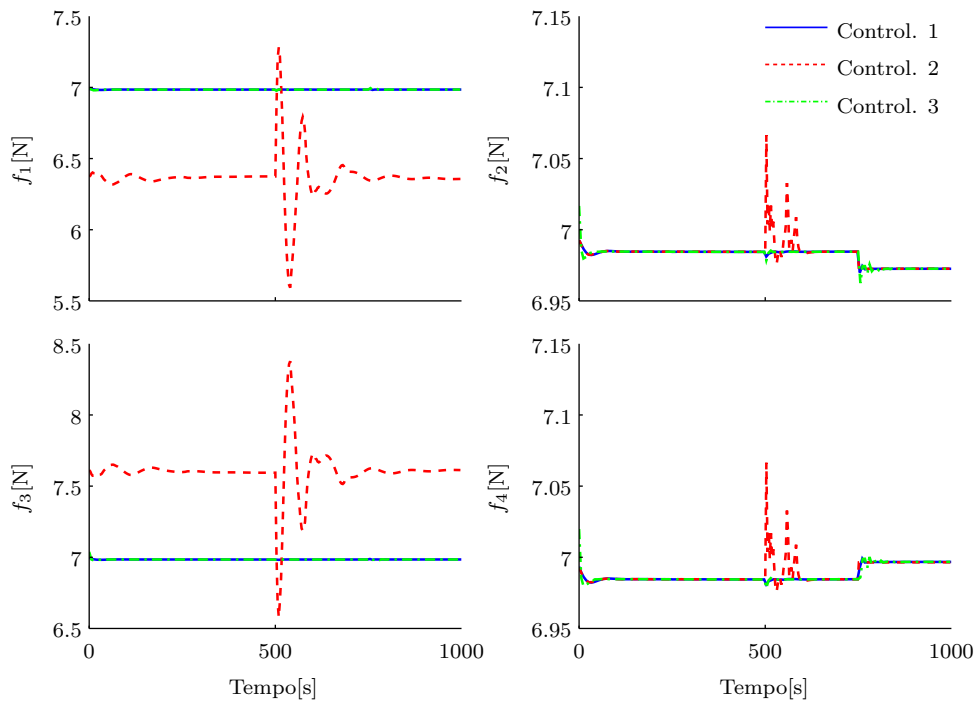
	Control. 1	Control. 2	Control. 3	$\frac{\text{Control.3}}{\text{Control.1}}$	$\frac{\text{Control.3}}{\text{Control.2}}$	$\frac{\text{Control.1}}{\text{Control.2}}$
ISE( $h_1$ )	$1.798 \cdot 10^{-4}$	$1.011 \cdot 10^{-3}$	$1.396 \cdot 10^{-5}$	0.0776	0.0138	0.1779
ISE( $h_2$ )	0.1469	0.1492	0.1466	0.9979	0.9830	0.9850
ISE( $h_3$ )	0.1469	0.1492	0.1466	0.9979	0.9830	0.9850
ISE( $h_4$ )	$1.798 \cdot 10^{-4}$	$1.011 \cdot 10^{-3}$	$1.396 \cdot 10^{-5}$	0.0776	0.0138	0.1779
ISE( $h_5$ )	1.9942	1.9896	1.9943	1.0001	1.0024	1.0023
ISE( $h_6$ )	7.2248	7.2114	7.2256	1.0001	1.0020	1.0019
ISE( $h_7$ )	5.3785	5.3919	5.3779	0.9999	0.9974	0.9975
ISE( $h_8$ )	0.3444	0.3483	0.3439	0.9984	0.9873	0.9889

A Figura 5.18 exibe a comparação entre as ações de controle ao longo do tempo dos controladores para os cenários com distúrbios. Pode-se ver que o Controlador 2 foi mais agressivo que os demais controladores. A mesma conclusão pode ser vista na Tabela 5.2, que apresenta o índice integral da variação absoluta (IAV) dos sinais de controle para os controladores. Este índice avalia o esforço do controlador e é dado por:

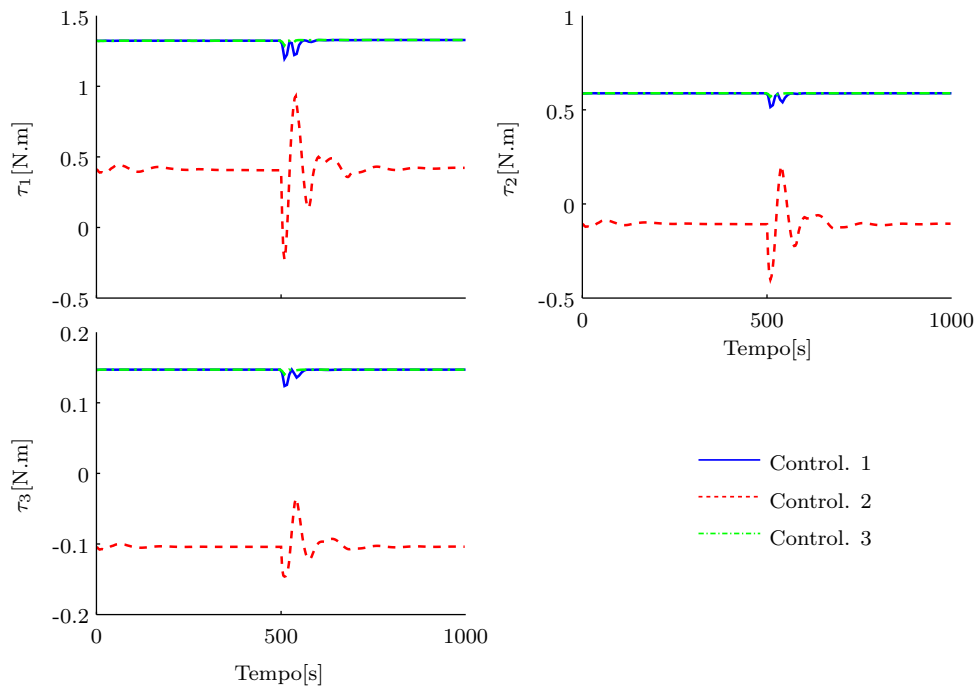
$$\text{IAV}(f_i) = \int_0^{T_s} \left| \frac{df_i}{dt} \right| dt.$$

Fazendo uma comparação entres os índices IAV do Controlador 1 com os do Controlador 3, pode-se ver que os esforços de controle para as ações do quadrirrotor foram mais agressivas no Controlador 3, enquanto que os esforços das ações de controle do manipulador foram mais suaves. Isso ocorreu porque o ajuste dos controladores, utilizando o controlador  $H_\infty$  linear, ponderou mais as coordenadas generalizadas do quadrirrotor do que as coordenadas do manipulador.

Os controladores provaram ser capazes de rastrear uma trajetória desejada no nível do efetuador, mantendo o sistema estável. Entretanto, pela análise dos índices ISE e IAV, o Controlador 2 teve um desempenho inferior em comparação com os demais controladores, pois seus erros de rastreamento foram maiores e as suas ações de controle foram mais agressivas.



(a) Forças dos rotores do quadrirrotor.



(b) Torques aplicados às juntas do manipulador.

Figura 5.18: Comparação entre as ações de controle dos controladores para o cenário com distúrbio.

Tabela 5.2: IVA para cada componente do quaternio dual da pose do efetuador para os Controladores 1, 2 e 3.

	Control. 1	Control. 2	Control. 3
IAV( $f_1$ )	$1,732 \cdot 10^{-5}$	$3,560 \cdot 10^{-3}$	$3,918 \cdot 10^{-5}$
IAV( $f_2$ )	$2,575 \cdot 10^{-5}$	$1,569 \cdot 10^{-4}$	$4,963 \cdot 10^{-5}$
IAV( $f_3$ )	$2,653 \cdot 10^{-5}$	$3,749 \cdot 10^{-3}$	$7,795 \cdot 10^{-5}$
IAV( $f_4$ )	$3,238 \cdot 10^{-5}$	$1,568 \cdot 10^{-4}$	$6,903 \cdot 10^{-5}$
IAV( $\tau_1$ )	$2,831 \cdot 10^{-4}$	$2,423 \cdot 10^{-3}$	$1,271 \cdot 10^{-5}$
IAV( $\tau_2$ )	$1,019 \cdot 10^{-4}$	$1,343 \cdot 10^{-3}$	$7,585 \cdot 10^{-6}$
IAV( $\tau_3$ )	$2,540 \cdot 10^{-5}$	$2,762 \cdot 10^{-4}$	$2,802 \cdot 10^{-6}$

### 5.3 Manipulador aéreo com o braço de cinco elos

Nessa seção são apresentados os resultados de simulação dos controladores projetados para o manipulador aéreo com um braço de cinco elos, descritos na Seção 4.3. Em todas as simulações deste manipulador aéreo, utilizou-se a mesma configuração inicial, definida como:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \left[ 0_{4 \times 1}^T \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 0_{5 \times 1}^T \right]^T, \\ \dot{\mathbf{q}} &= 0_{11 \times 1}, \\ \ddot{\mathbf{q}} &= 0_{11 \times 1}, \end{aligned}$$

e a mesma trajetória, especificada em (5.1). Neste caso, o ponto inicial  $\mathbf{x}(0)$  está próximo da trajetória desejada  $\mathbf{x}_d$ , para que o erro gerado inicialmente seja pequeno.

Os controladores apresentados são os propostos nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, denominados ao longo do texto como Controlador 4 e Controlador 5, respectivamente. Estes controladores, assim como os controladores apresentados para o manipulador aéreo com o braço de três elos, têm o objetivo de rastrear uma trajetória desejada no nível do efetuador, enquanto mantêm o sistema completo estável e as juntas o mais longe possível dos seus limites físicos, mesmo sob a ação de distúrbios. Além disso, tem-se como objetivo mostrar que o controlador de dinâmica inversa pode realizar essas tarefas, mesmo quando a sua malha externa é um controlador cinemático no espaço da tarefa. Neste caso, não se necessita dos valores de referência dos DOF do sistema para conseguir rastrear uma trajetória desejada. Ademais, deseja-se verificar que o Controlador 4 consegue atenuar os distúrbios em todas as direções das coordenadas generalizadas e comprovar no Controlador 5 a consideração feita no Controlador 3, no qual  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$ .

As matrizes de ganho utilizadas são ajustadas de acordo com as especificações da Seção

(5.1.3). Para o Controlador 4, elas são:

$$\begin{aligned} K_{pc} &= \text{blkdiag}(0.001 I_4; 0.0025 I_4), \\ K_{dc} &= \text{blkdiag}(18.2 I_4; 25.7 I_4), \\ K_{p2} &= -5 I_2, \\ K_{ns1} &= 0.5, \\ K_{ns2} &= 100. \end{aligned}$$

Já para o Controlador 5, as matrizes de ganho  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  são ajustadas utilizando o controlador  $H_\infty$  linear e as especificações da Seção 5.1.3. Neste caso, o menor valor de  $\gamma$  que torne as LMIs, apresentadas em (4.55), factíveis é  $\gamma = 403.604$  e as matrizes  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  obtidas são apresentadas no Apêndice B. Já as matrizes de ganhos  $K_{p2}$ ,  $K_{ns1}$  e  $K_{ns2}$  são as mesmas definidas para o Controlador 4.

Como dito anteriormente, deseja-se mostrar que o Controlador 4 consegue atenuar distúrbios em todas as direções das coordenadas generalizadas. Para isso, um vetor de distúrbios,

$$\mathbf{u}_{ext} = \begin{bmatrix} fe_1 & fe_2 & fe_3 & fe_4 & fe_5 & fe_6 \\ fe_7 & fe_8 & fe_9 & fe_{10} & fe_{11} \end{bmatrix}^T,$$

é aplicado ao sistema, como definido em (3.31). Essas forças são, na simulação, funções impulsos de diferentes larguras, disparadas em instantes diferentes, definidas como:

$$\begin{aligned} \tau_{\phi d} &= 0.01 && \text{em } T = 250 \text{ s} && \text{a } 250.5 \text{ s}, \\ \tau_{\theta d} &= 0.01 && \text{em } T = 400 \text{ s} && \text{a } 400.5 \text{ s}, \\ \tau_{\psi d} &= 0.01 && \text{em } T = 550 \text{ s} && \text{a } 550.5 \text{ s}, \\ T_{Xd} &= 0.05 && \text{em } T = 700 \text{ s} && \text{a } 703 \text{ s}, \\ T_{Yd} &= 0.008 && \text{em } T = 850 \text{ s} && \text{a } 850.5 \text{ s}, \\ T_{Zd} &= 0.05 && \text{em } T = 1003 \text{ s} && \text{a } 1003 \text{ s}, \\ \tau_{1d} &= 0.008 && \text{em } T = 1150 \text{ s} && \text{a } 1150.1 \text{ s}, \\ \tau_{2d} &= 0.001 && \text{em } T = 1300 \text{ s} && \text{a } 1300.1 \text{ s}, \\ \tau_{3d} &= 0.0005 && \text{em } T = 1450 \text{ s} && \text{a } 1450.1 \text{ s}, \\ \tau_{4d} &= 0.0001 && \text{em } T = 1600 \text{ s} && \text{a } 1600.1 \text{ s}, \\ \tau_{5d} &= 0.0001 && \text{em } T = 1750 \text{ s} && \text{a } 1750.1 \text{ s}. \end{aligned}$$

Já para testar a robustez do Controlador 5 às forças generalizadas externas, incertezas



paramétricas e dinâmicas não modeladas, realizou-se uma simulação, na qual  $m_q$ ,  $I_{xx}^q$ ,  $I_{yy}^q$  e  $I_{zz}^q$ , para a equação dinâmica do sistema, possuem valores 15% maiores que os seus valores nominais, sendo que para o projeto do controlador considera-se que os parâmetros variam em  $\pm 30\%$  do valor nominal. Também se aplicou o vetor de distúrbio

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

desde o instante inicial da simulação.

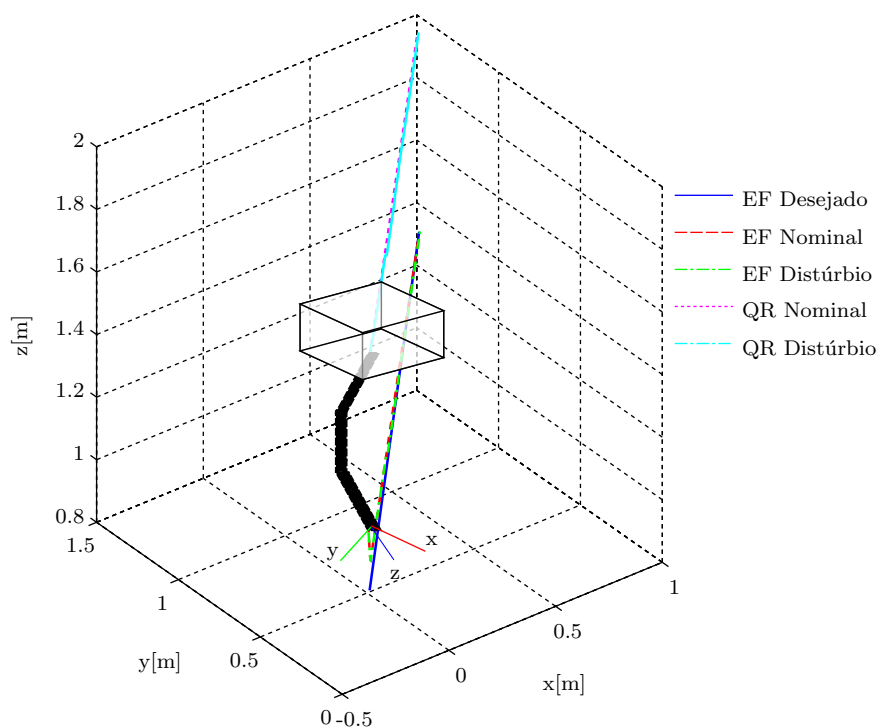
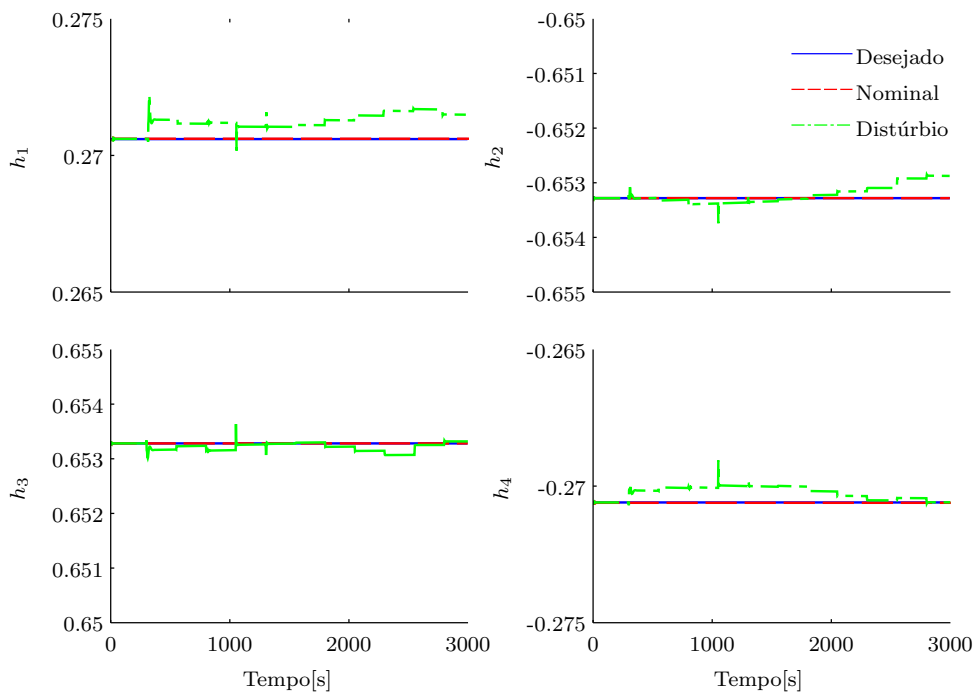


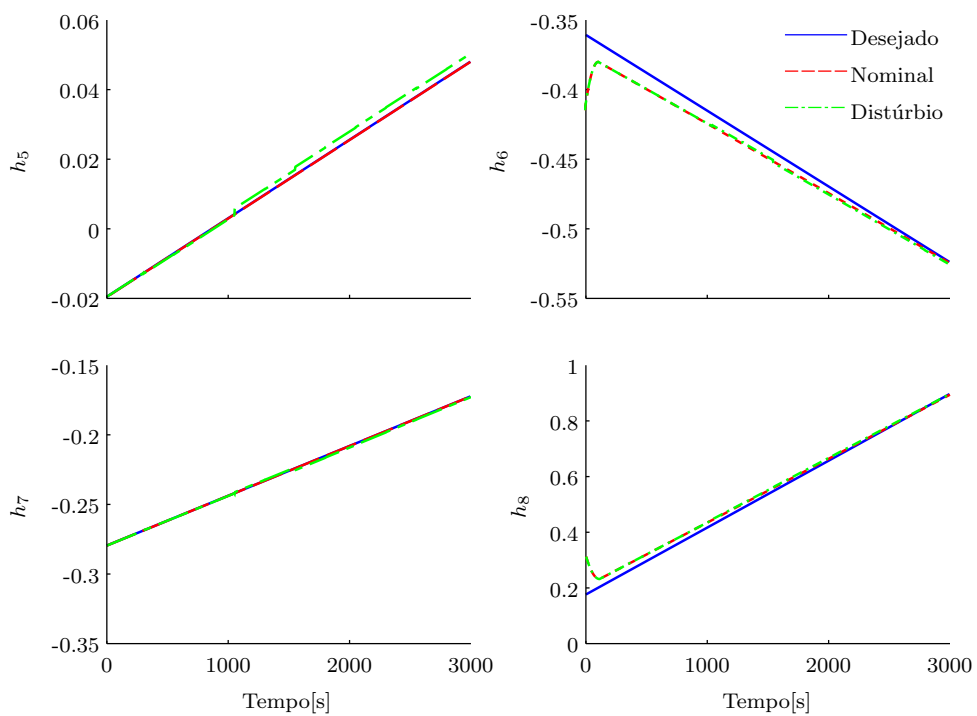
Figura 5.19: Trajetória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadrirrotor (QR) para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos.

As Figuras 5.19–5.23 e 5.24–5.28 mostram os resultados da simulação do rastreamento da trajetória desejada realizada pelo manipulador aéreo para o Controlador 4 e Controlador 5, respectivamente, considerando dois tipos de cenário, sendo um livre de distúrbios, denominado nominal e outro considerando distúrbios. Em detalhe, as Figuras 5.19 e 5.24 mostram a visão tridimensional da trajetória seguida pelo efetuador e pelo quadrirrotor; 5.20 e 5.25 apresentam a resposta no tempo de cada componente do quatérnio dual  $\underline{\mathbf{x}}$ , que representa a pose do efetuador; 5.21 e 5.26 ilustram as variáveis do quadrirrotor; 5.22 e 5.27 mostram as variáveis do manipulador; e 5.23 e 5.28 demonstram os esforços do controlador, sendo que os gráficos superiores são as forças dos rotores do quadrirrotor e os inferiores os torques aplicados às juntas do manipulador.

Como nos controladores para o manipulador aéreo com o braço de três elos, as leis de controle avaliadas nesta seção foram eficientes em rastrear uma trajetória desejada

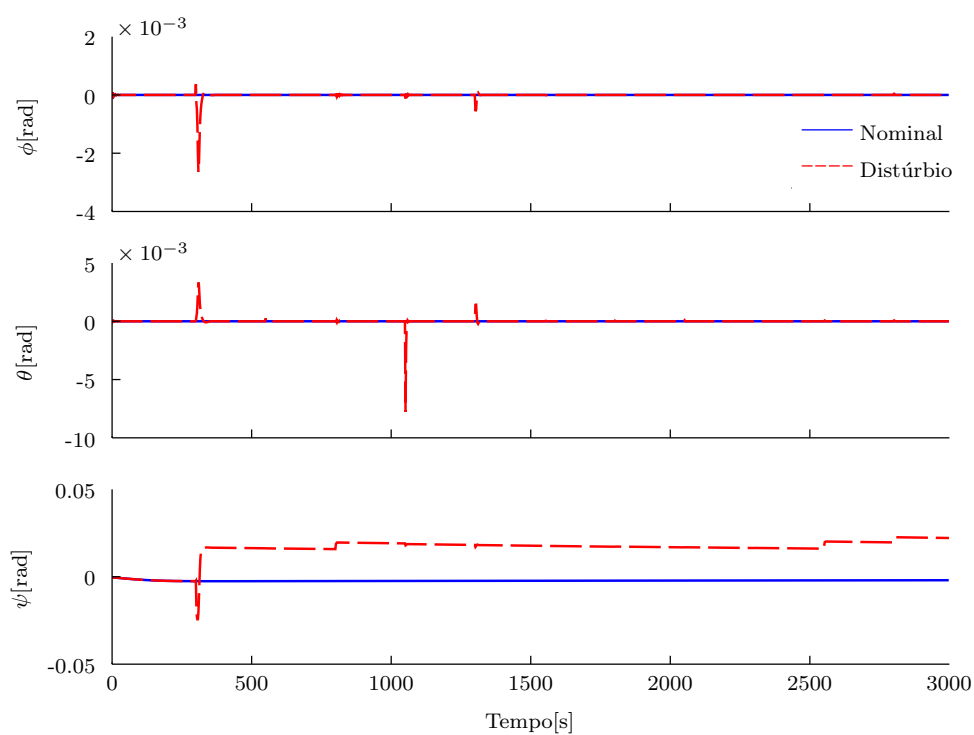


(a) Parte Primária de  $\underline{x}$ .

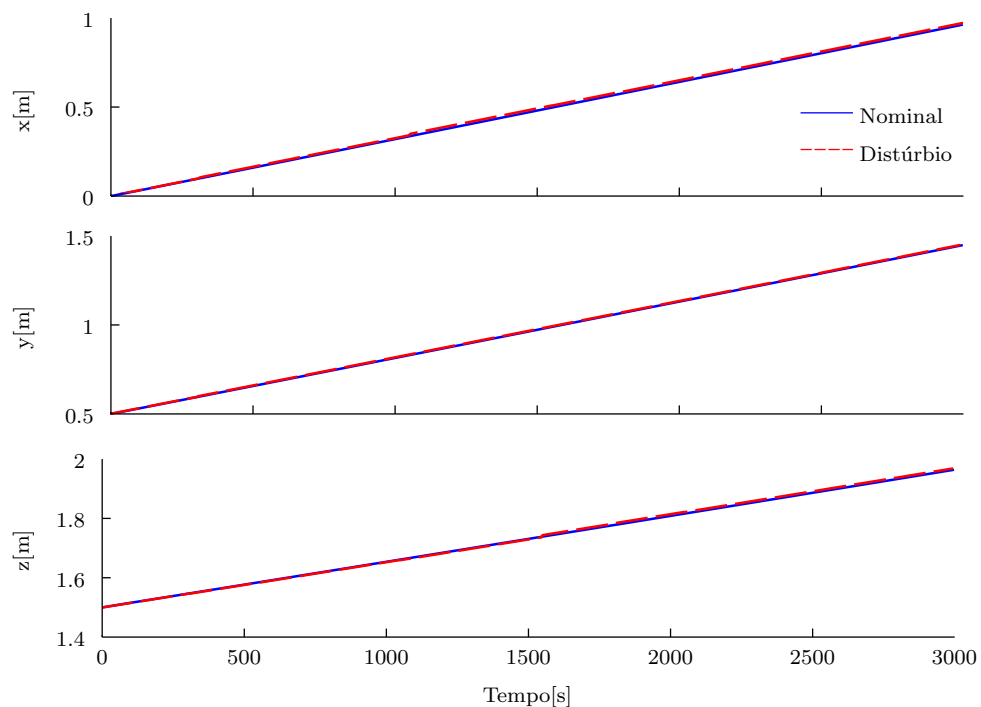


(b) Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.20: Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos.



(a) Orientação



(b) Posição

Figura 5.21: Variáveis do quadricóptero durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos.

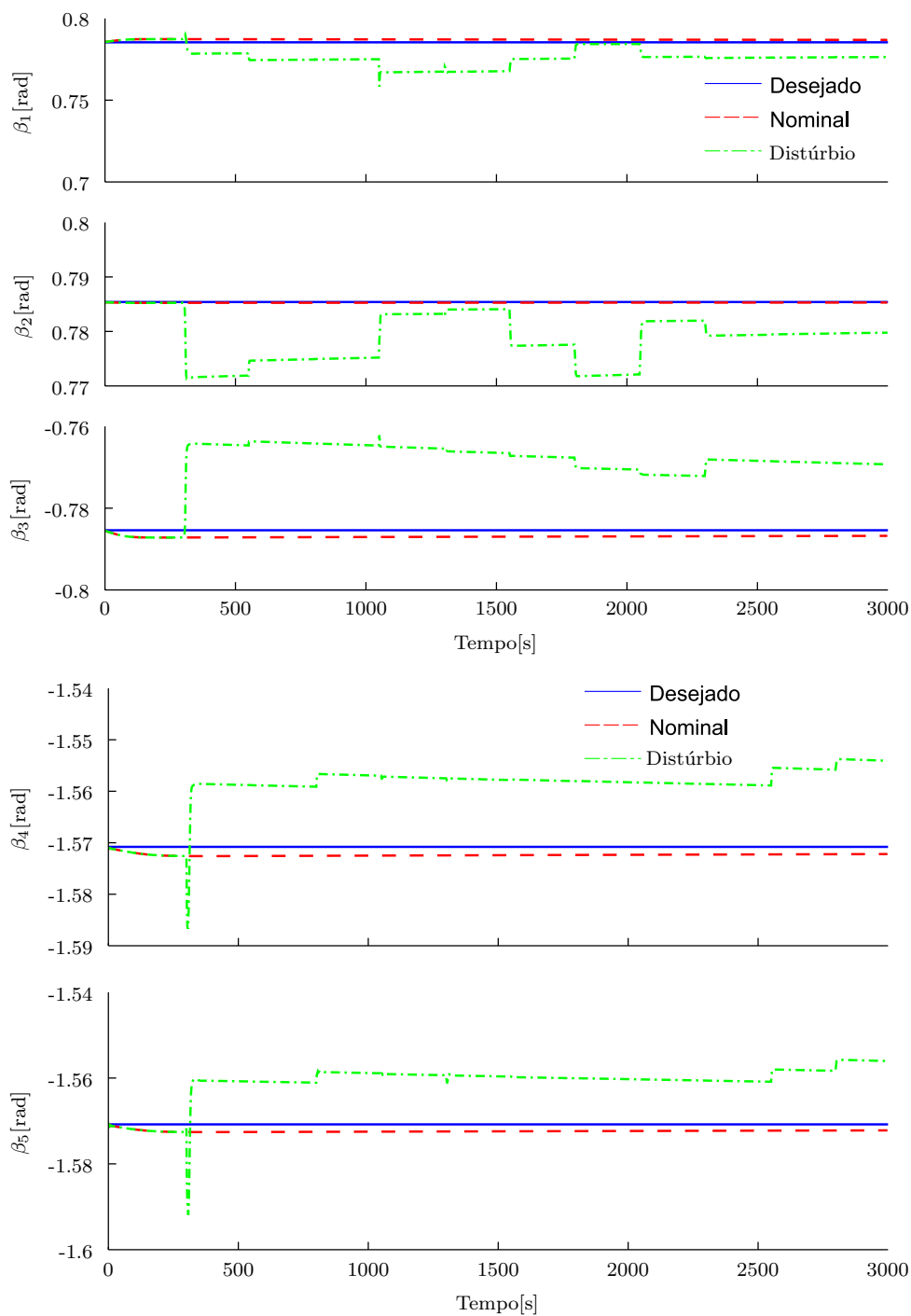


Figura 5.22: Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 5 DOF do manipulador para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos.

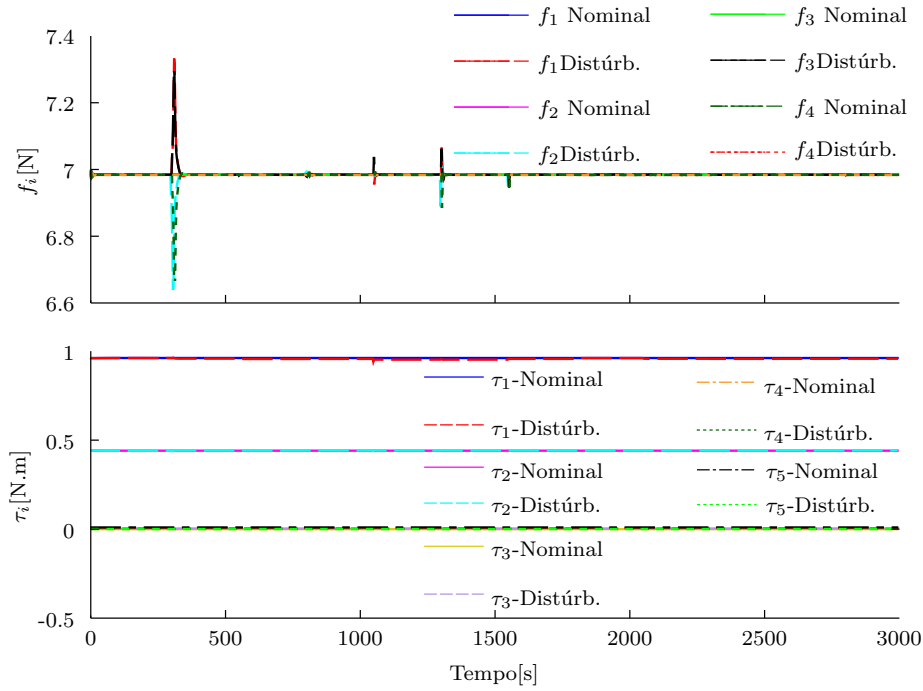


Figura 5.23: Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 4 do manipulador aéreo com cinco elos.

pelo efetuador e ao mesmo tempo manter o sistema estável. Além disso, a lei de controle secundária, projetada no espaço nulo da tarefa principal, foi bem sucedida em manter os ângulos das juntas próximos aos valores desejados, que neste caso correspondem à posição de repouso ( $\pi/4$  rad para os ângulos  $\beta_1$  e  $\beta_2$ ,  $-\pi/4$  rad para  $\beta_3$  e  $-\pi/2$  rad para  $\beta_4$  e  $\beta_5$ ) e as entradas não foram agressivas, não ultrapassando 20% dos valores nominais, mesmo na presença de perturbações e incertezas paramétricas.

Especificamente, o Controlador 4 conseguiu atenuar os distúrbios em todas as direções das coordenadas generalizadas. Entretanto, houve uma variação nas respostas da parte dual dos coeficientes do quatérnio dual  $\underline{x}$  da pose de efetuador para ambas as simulações (Figura 5.20b). Isso ocorreu porque o controlador não possui ação integral para corrigir os erros. Outro ponto importante visto neste controlador é a ação da modelagem de corpo completo: as forças generalizadas externas que influenciam diretamente as variáveis do quadricóptero, também influenciaram o manipulador, de acordo com o gráfico de  $\beta_5$  em  $T = 250$  s,  $T = 550$  s e  $T = 700$  s (Figura 5.22).

Já para o Controlador 5, a resposta dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador na simulação com distúrbios teve menores erros (Figura (5.25b)), comparado à resposta da simulação nominal, como já era esperado, pois o controlador se tornou robusto quando se ajustou as matrizes de ganhos  $K_{pc}$  e  $K_{dc}$  utilizando o controlador  $H_\infty$  linear. Pode-se observar também uma diferença entre as respostas das variáveis translacionais do quadricóptero na simulação nominal e com distúrbios (Figura 5.26b). Isso ocorreu devido ao efeito da modelagem de corpo completo do sistema, pois as variáveis do manipulador

$\mathbf{q}_m$  se estabilizaram em valores diferentes dos seus valores nominais. Entretanto, o ponto em que elas se estabilizaram deslocou o manipulador, e conseqüentemente o efetuador, para baixo e para trás. Em consequência, para manter o efetuador na posição desejada, o quadricóptero se deslocou para cima e para frente. Todavia, pode-se ver que o controlador proposto conseguiu atingir o principal objetivo do trabalho, e que a consideração feita na Seção 4.2.3, de que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k$  é válida, pois neste caso a afirmação é verdadeira.

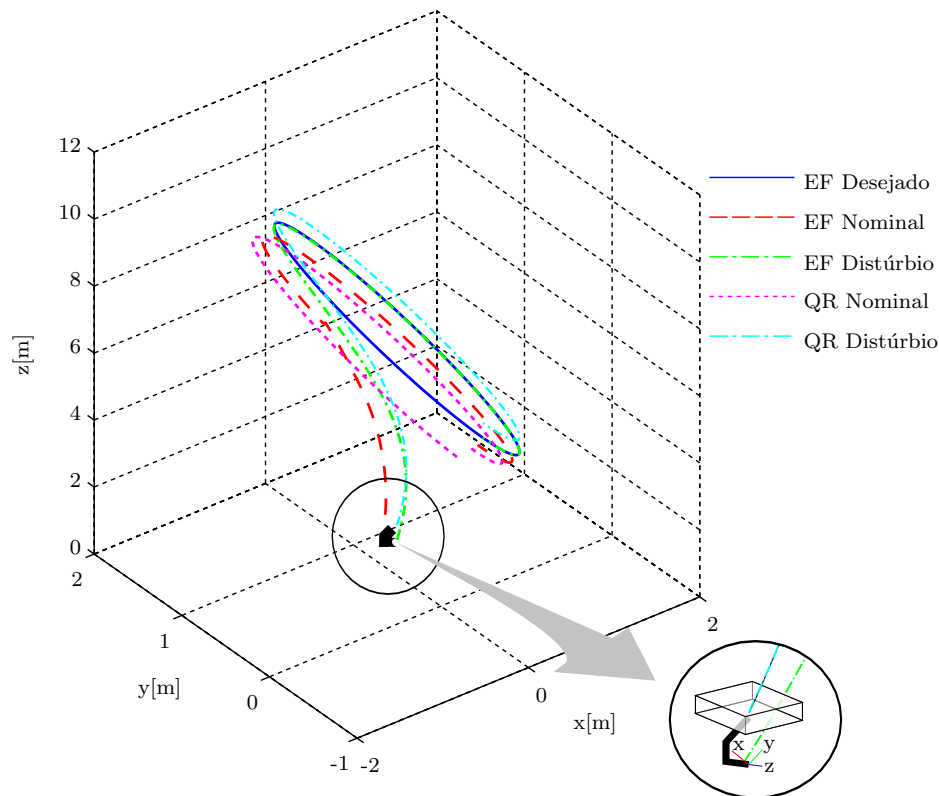
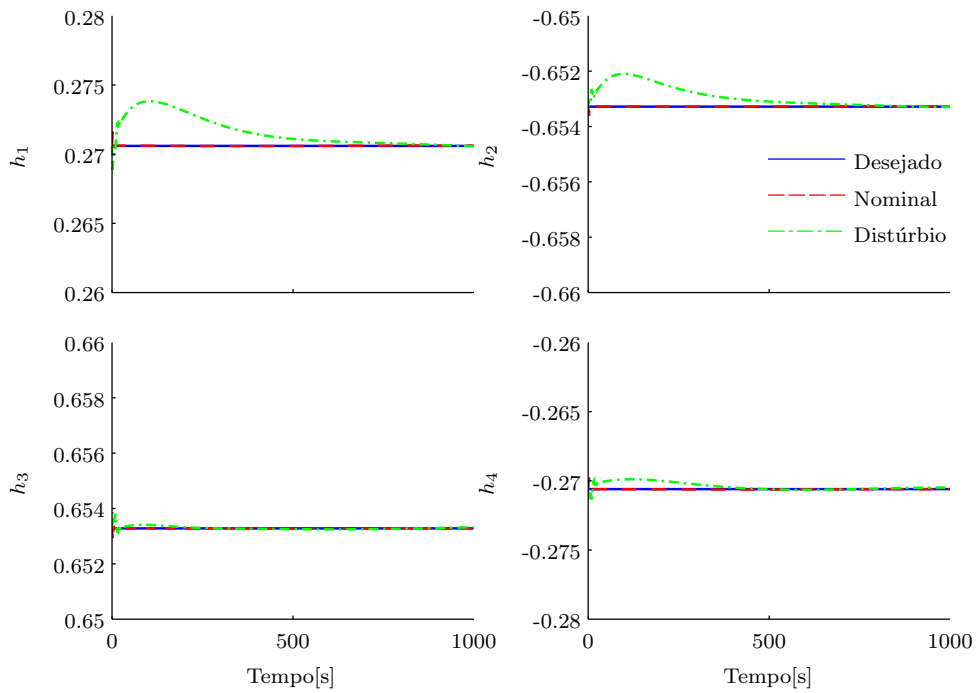


Figura 5.24: Trajetória desejada e atual do efetuador (EF) e do quadricóptero (QR) para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos.

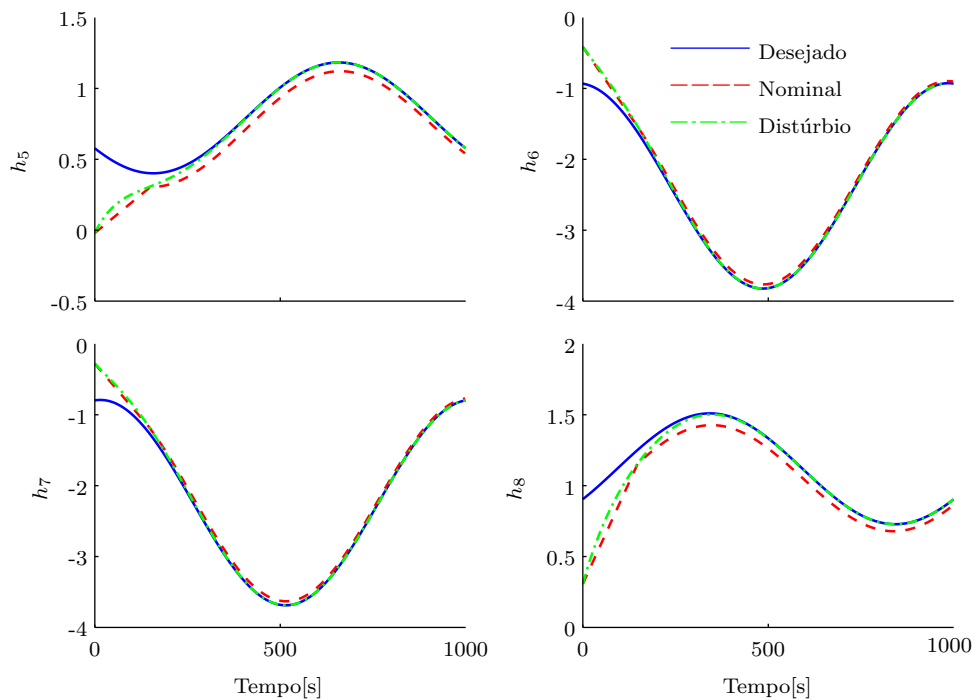
A apresentação desses controladores não tinha como objetivo fazer uma comparação entre eles e sim ressaltar algumas observações já apresentadas anteriormente. Entretanto, viu-se que existem algumas desvantagens no uso do controlador de dinâmica inversa, tanto como malha externa o controlador cinemático no espaço da tarefa. Dado que o sistema deve sempre estar na vizinhança do ponto de operação, um grande desvio desta vizinhança pode desestabilizá-lo. Como consequência, perturbações mais severas do que as utilizadas nas simulações e trajetórias não suaves podem desestabilizar o sistema.

## 5.4 Conclusão

Este capítulo descreveu os resultados de simulação dos controladores apresentados no capítulo anterior para as duas configurações do manipulador aéreo. Todos eles foram

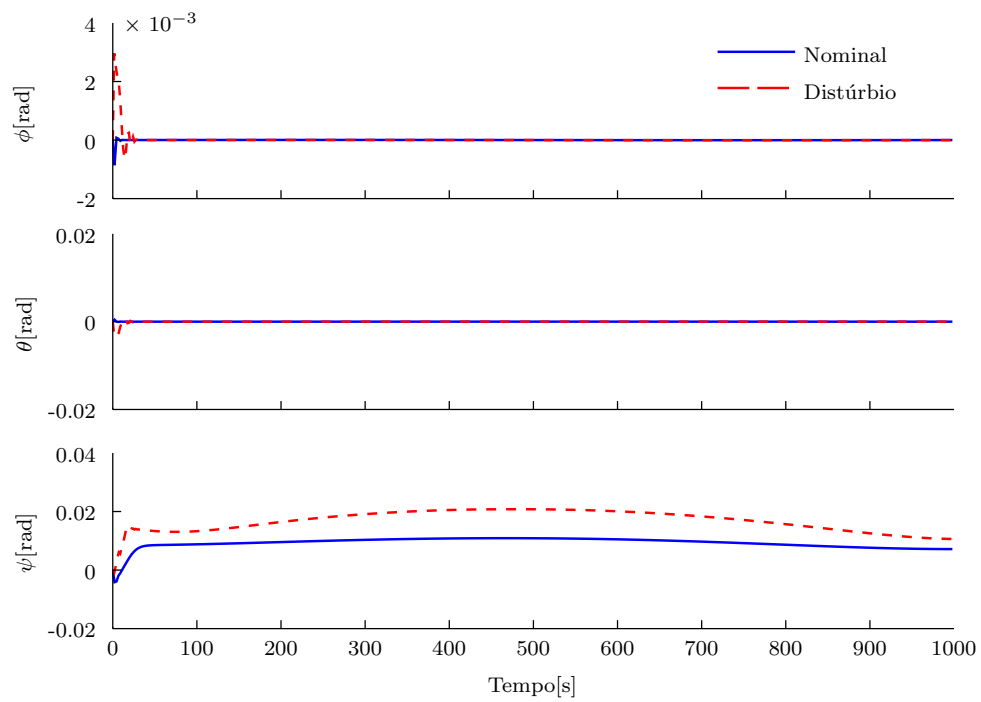


(a) Parte Primária de  $\underline{x}$ .

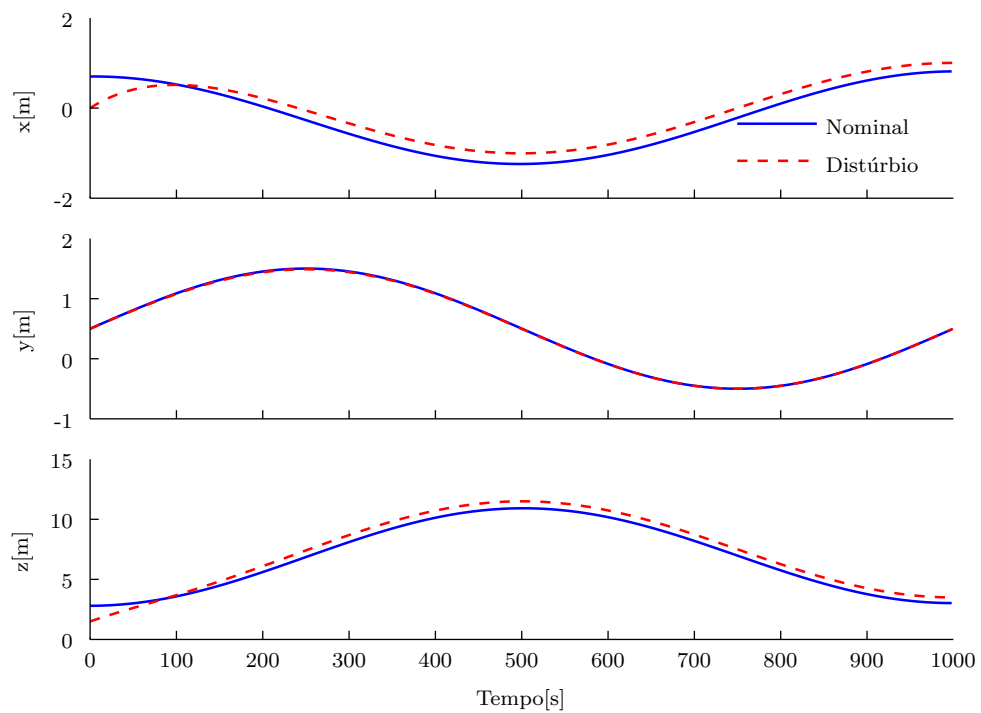


(b) Parte Dual de  $\underline{x}$ .

Figura 5.25: Trajetória desejada e atual dos coeficientes do quatérnio dual da pose do efetuador para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos.



(a) Orientação



(b) Posição

Figura 5.26: Variáveis do quadricóptero durante o rastreamento da trajetória circular para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos.



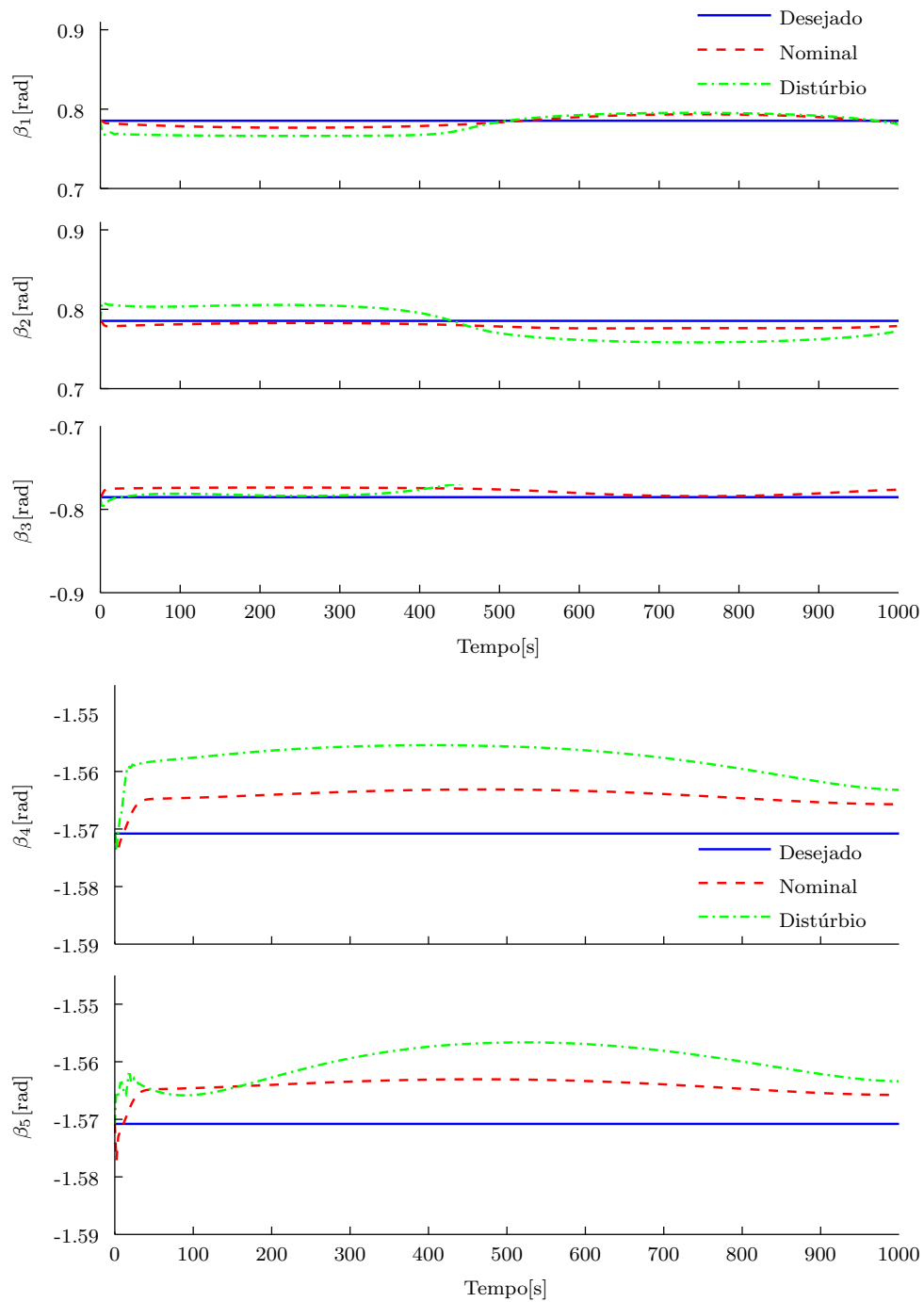


Figura 5.27: Evolução temporal dos ângulos das juntas dos 5 DOF do manipulador para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos.

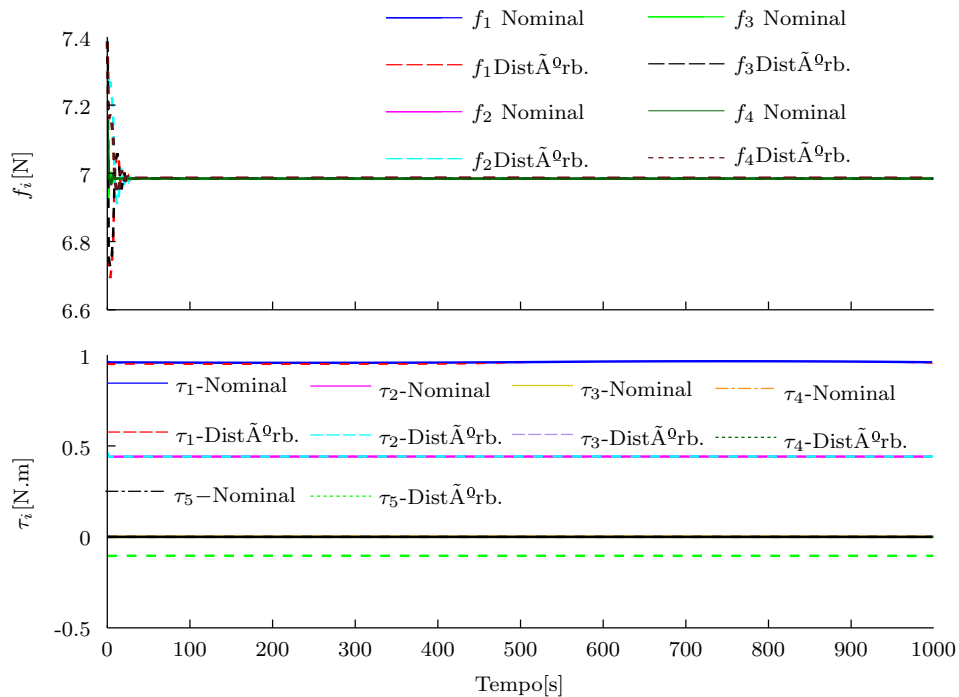


Figura 5.28: Evolução temporal das entradas de controle para o controlador 5 do manipulador aéreo com cinco elos.

capazes de rastrear uma trajetória desejada no nível do efetuador, mantendo o quadricóptero estável, mesmo na presença de distúrbios.

Na primeira configuração, que é um manipulador aéreo com um braço de três elos, fez-se uma comparação entre os três controladores propostos. Entre eles, o Controlador 2 teve o pior desempenho, pois teve maior erro para a maioria dos coeficientes de  $\underline{x}$  e maior esforço de controle. Pode-se considerar que o Controlador 3 teve bom desempenho, pois seus erros foram menores e não teve esforços de controle elevados, em comparação aos outros controladores.

No segundo caso, que é um manipulador aéreo com um braço de cinco elos, testou-se uma configuração do controlador de dinâmica inversa, tendo como malha externa o controlador cinemático no espaço da tarefa. Neste caso, viu-se que este controlador atingiu o objetivo do trabalho, além de conseguir rejeitar distúrbios em todas as direções das coordenadas generalizadas. Entretanto, este formato do controlador de dinâmica inversa não é capaz de estabilizar a sistema quando se desvia muito do seu ponto de equilíbrio. Além disso, o Controlador 5 comprovou a consideração feita pelo Controlador 3.

# 6

## Conclusão e Trabalhos Futuros

A robótica aérea está evoluindo para incluir não só sistemas com capacidades de detecção, mas também com a possibilidade de agir sobre o ambiente e, particularmente, com capacidade de manipulação. Esta dissertação apresentou técnicas de modelagem e controle de corpo completo para um manipulador aéreo composto por um VANT do tipo quadricóptero, acoplado a um manipulador. O manipulador teve duas configurações estruturais, sendo um planar de três elos conectados com juntas de revolução e outro de cinco elos conectados com o mesmo tipo de juntas, das quais as três últimas formaram um punho esférico. Essa diferença proporcionou maior manobrabilidade do efetuador final aos movimentos do sistema, uma vez que no último caso o manipulador é capaz de realizar os movimentos de rolagem e de arfagem. Para cada uma das etapas do trabalho, procurou-se justificar a sua realização, apresentar os fundamentos teóricos necessários à sua compreensão e discorreu-se sobre os resultados experimentais obtidos.

A técnica de modelagem se baseou na álgebra de quatérnios duais para encontrar os modelos cinemáticos direto e diferencial da cadeia heterogênea serialmente acoplada. Esta metodologia é suficiente para ser aplicada a qualquer manipulador aéreo. Neste trabalho, a pose do efetuador, em relação ao sistema de coordenadas inercial, foi descrita em termos de todos os graus de liberdade presentes no sistema. O modelo simplificado obtido possibilitou que a tarefa fosse realizada no nível do efetuador, e, por isso, as referências desejadas para rastreamento de trajetória foram fornecidas para esta parte do sistema na forma de quatérnios duais. Deve-se citar também que, ao utilizar a Jacobiana do corpo completo na cinemática inversa, foi possível gerar, simultaneamente, sinais de

atuação em todos os graus de liberdade da cadeia cinemática. Com isso, o movimento do sistema se tornou suave e todas as partes foram capazes de se mover ao mesmo tempo. Alcançaram-se vantagens com a modelagem de corpo completo, pois o modelo dinâmico, obtido a partir da formulação de Euler-Lagrange e utilizando o modelo cinemático, já possuía, em sua definição, a influência do movimento do manipulador no centro de massa do quadrirrotor.

As leis de controle apresentadas foram desenvolvidas para que o manipulador aéreo seguisse a trajetória desejada no nível do efetuador. Além dessa tarefa principal, os controladores tinham como objetivo manter o sistema estável e as juntas do manipulador o mais afastadas dos seus limites físicos, mesmo na presença de distúrbios externos, incertezas paramétricas e erros de modelagem. Os controladores apresentados levaram em consideração as características desse sistema, que é subatuado, não linear e com acoplamento, e alcançaram, na simulação, bom desempenho em condições específicas, como trajetória suave e distúrbios com magnitudes limitadas.

Os resultados das simulações mostraram o bom desempenho dos controladores aqui propostos para as condições analisadas, além de evidenciar, em ambiente virtual, as estratégias de modelagem e controle. As simulações foram divididas para os dois diferentes tipos de manipuladores aéreos. Para os controladores do primeiro caso, os resultados foram satisfatórios, pois se alcançaram os objetivos dos controladores e os erros foram pequenos, em comparação as dimensões da trajetória. Em todos os controladores, os coeficientes do quatérnio dual  $\underline{x}$ , que representam a pose do efetuador, convergiram para os valores desejados, com erros praticamente nulos, mesmo em situações com distúrbios externos e incertezas paramétricas. Os erros não foram nulos porque esses controladores não possuem ação integral para corrigi-los. Pela análise dos índices ISE e IAV, o segundo controlador teve desempenho inferior em comparação aos outros dois controladores, pois seus erros de rastreamento foram maiores e as suas ações de controle foram mais agressivas.

Os resultados dos controladores do segundo manipulador aéreo também foram satisfatórios, pois as variáveis do sistema convergiram para a trajetória desejada, com erros pequenos (aproximadamente 5% dos valores nominais), mesmo sob a ação de distúrbios em todas as direções das coordenadas generalizadas (Controlador 4) e também sujeito às incertezas paramétricas (Controlador 5). Além disso, viu-se que era possível rastrear uma trajetória desejada sem a necessidade de ter os valores de referências para os DOF. Entretanto, existem algumas desvantagens no uso do controlador de dinâmica inversa, tanto como malha externa o controlador cinemático no espaço da tarefa, pois o sistema deve sempre estar na vizinhança do ponto de operação. Como consequência, perturbações mais severas e trajetórias não suaves podem desestabilizar o sistema.

As limitações do trabalho foram que não há prova final da estabilidade dos controladores; não se sabe qual a magnitude máxima dos distúrbios que o sistema consegue rejeitar; perturbações mais severas podem desestabilizar o sistema; e os erros, apesar de

serem pequenos em comparação a escala total da trajetória, não poderão ser desconsiderados quando a tarefa exigir maior precisão de movimentação. Além disso, os resultados apresentados são locais e devem sempre estar próximo a uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Os resultados obtidos mostraram-se aceitáveis para as considerações feitas ao longo do trabalho, que objetivava realizar o controle de corpo completo, enquanto mantinha o sistema estável.

## 6.1 Trabalhos Futuros

Com o conhecimento adquirido, sugere-se para trabalhos futuros:

- Realizar as provas de convergência.
- Implementar uma garra no manipulador, para que o sistema seja capaz de manipular objetos.
- Implementar controladores que imponham restrições nos movimentos do quadricóptero.
- Implementar geradores de trajetória que evitem obstáculos, pois neste trabalhou-se com trajetória pré-definidas.
- Realizar as simulações em um ambiente virtual mais realístico, como o software Vrep.
- Implementar esses controladores em uma plataforma real.
- Modificar a modelagem e o controle para outros tipos de VANT, como o Tilt-Rotor.

## Referências Bibliográficas

- Adorno, B. V. (2011). *Two-arm manipulation: From manipulators to enhanced human-robot collaboration [Contribution à la manipulation à deux bras : des manipulateurs à la collaboration homme-robot]*. PhD thesis, Université Montpellier 2.
- Antonelli, G., Arrichiello, F., Chiaverini, S., & Giordano, P. R. (2013). Adaptive trajectory tracking for quadrotor MAVs in presence of parameter uncertainties and external disturbances. *IEEE/ASME Intl. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics: Mechatronics for Human Wellbeing*, (pp. 1337–1342).
- Arleo, G., Caccavale, F., Muscio, G., & Pierri, F. (2013). Control of quadrotor aerial vehicles equipped with a robotic arm. In *21st Mediterranean Conf. on Control and Automation* (pp. 1174–1180).
- Augugliaro, F., Lupashin, S., Hamer, M., Male, C., Hehn, M., Mueller, M., Willmann, J., Gramazio, F., Kohler, M., & D’Andrea, R. (2014). The Flight Assembled Architecture Installation: Cooperative Construction with Flying Machines. *IEEE Control Systems Magazine*, 34(4), pp. 46 – 64.
- Bakari, M. J., Zied, K. M., & Seward, D. W. (2007). Development of a multi-arm mobile robot for nuclear decommissioning tasks. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 4(4), 387–406.
- Bellicoso, C., Buonocore, L., Lippiello, V., & Siciliano, B. (2015). Design, Modeling and Control of a 5-DoF Light-Weight Robot Arm for Aerial Manipulation. In *Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)* (pp. 853 – 858).
- Borst, C., Wimbock, T., Schmidt, F., Fuchs, M., Brunner, B., Zacharias, F., Giordano, P., Konietschke, R., Sepp, W., Fuchs, S., & Others (2009). Rollin’ Justin-Mobile platform with variable base. *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*, (pp. 1597–1598).
- Bouabdallah, S. & Siegwart, R. (2005). Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro Quadrotor. *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*, 2005(April), 2247–2252.

- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM.
- Buss, S. R. S. (2004). Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods. *University of California, San Diego*, 132(4), 1–19.
- Caccavale, F., Giglio, G., Muscio, G., & Pierri, F. (2014). Adaptive control for UAVs equipped with a robotic arm. *19th World Congress The International Federation of Automatic Control*, (pp. 11049–11054).
- Cano, R., Pérez, C., & Pruaño, F. (2013). Mechanical Design of a 6-DOF Aerial Manipulator for assembling bar structures using UAVs. *2nd IFAC Workshop on Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems*, (pp. 1–7).
- Chen, C.-T. (2012). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 4nd edition.
- Danko, T. W. & Oh, P. Y. (2014). Design and control of a hyper-redundant manipulator for mobile manipulating unmanned aerial vehicles. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 73(1-4), 709–723.
- Dullerud, G. E. & Paganini, F. (2005). *A Course in Robust Control Theory - A Convex Approach*. Springer.
- Fumagalli, M., Naldi, R., MacChelli, A., Carloni, R., Stramigioli, S., & Marconi, L. (2012). Modeling and control of a flying robot for contact inspection. In *IEEE Intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems* (pp. 3532–3537).
- Gahinet, P. & Nemirovskii, A. (1993). LMI Lab: A Package for Manipulating and Solving LMIs. In *INRIA*.
- Giglio, G. & Pierri, F. (2014). Selective compliance control for an Unmanned Aerial Vehicle with a robotic arm. *22nd Mediterranean Conf. of Control and Automation (MED)*, (pp. 1190–1195).
- Heredia, G. & Jimenez-Cano, A. (2014). Control of a multirotor outdoor aerial manipulator. In *Intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems IEEE/RSJ* (pp. 3417–3422).
- Hoffmann, G., Huang, H., & Waslander, S. (2007). Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, (pp. 1–20).

- Jimenez-Cano, A. E., Martin, J., Heredia, G., Ollero, A., & Cano, R. (2013). Control of an aerial robot with multi-link arm for assembly tasks. In *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation* (pp. 4916–4921).
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 3rd edition.
- Kim, H. J. & Shim, D. H. (2003). A flight control system for aerial robots: Algorithms and experiments. *Control Engineering Practice*, 11(12), 1389–1400.
- Kim, S., Choi, S., & Kim, H. J. (2013). Aerial manipulation using a quadrotor with a two DOF robotic arm. *IEEE Intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, (pp. 4990–4995).
- Kim, S., Seo, H., & Kim, H. J. (2015). Operating an Unknown Drawer Using an Aerial Manipulator. *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, (pp. 5503–5508).
- Kondak, K., Huber, F., Schwarzbach, M., Laiacker, M., Sommer, D., Bejar, M., & Ollero, a. (2014). Aerial manipulation robot composed of an autonomous helicopter and a 7 degrees of freedom industrial manipulator. *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*, (pp. 2107–2112).
- Kondak, K., Krieger, K., Albu-Schaeffer, A., Schwarzbach, M., Laiacker, M., Maza, I., Rodriguez-Castano, A., & Ollero, A. (2013). Closed-loop behavior of an autonomous helicopter equipped with a robotic arm for aerial manipulation tasks. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10, 1–9.
- Korpela, C., Orsag, M., & Oh, P. (2014). Towards Valve Turning using a Dual-Arm Aerial Manipulator. In *Intl. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 3411–3416).
- Korpela, C., Orsag, M., Pekala, M., & Oh, P. (2013). Dynamic stability of a mobile manipulating unmanned aerial vehicle. In *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation* (pp. 4922–4927).
- Korpela, C. M., Danko, T. W., & Oh, P. Y. (2011). Designing a system for mobile manipulation from an Unmanned Aerial Vehicle. *IEEE Conf. on Technologies for Practical Robot Applications*, (pp. 109–114).
- Korpela, C. M., Danko, T. W., & Oh, P. Y. (2012). MM-UAV: Mobile manipulating unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 65(1-4), 93–101.
- Lindsey, Q., Mellinger, D., & Kumar, V. (2012). Construction of Cubic Structures with Quadrotor Teams. *MIT Press*, (pp. pp. 177 – 184).
- Lippiello, V. & Ruggiero, F. (2012a). Cartesian impedance control of a UAV with a robotic Arm. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, (pp. 704–709).



- Lippiello, V. & Ruggiero, F. (2012b). Exploiting redundancy in Cartesian impedance control of UAVs equipped with a robotic arm. *IEEE Intl. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, (pp. 3768–3773).
- Marconi, L., Basile, F., Caprari, G., Carloni, R., Chiacchio, P., Hurzeler, C., Lippiello, V., Naldi, R., Nikolic, J., Siciliano, B., Stramigioli, S., & Zwicker, E. (2012). Aerial service robotics: The AIRobots perspective. *2nd Intl. Conf. on Applied Robotics for the Power Industry (CARPI)*, (pp. 64–69).
- Mello, L. S., Adorno, B. V., & Raffo, G. V. (2015). Whole-body Modeling and Control of an Unmanned Aerial Manipulator. In *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)* (pp. 1–6).
- Mistler, V., Benallegue, A., & M’Sirdi, N. (2001). Exact linearization and noninteracting control of a 4 rotors helicopter via dynamic feedback. In *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation* (pp. 586–593).
- Orsag, M., Korpela, C., & Oh, P. (2013). Modeling and control of MM-UAV: Mobile manipulating unmanned aerial vehicle. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 69(1-4), 227–240.
- Palunko, I. & Fierro, R. (2011). Adaptive Control of a Quadrotor with Dynamic Changes in the Center of Gravity. *18th IFAC World Congress*, (pp. 2626–2631).
- Raffo, G. (2011). *Robust Control Strategies for a QuadRotor Helicopter an Underactuated Mechanical System*. PhD thesis, Universidad de Sevilla.
- Raffo, G. V., Ortega, M. G., & Rubio, F. R. (2011). Nonlinear Hinf controller for the quadrotor helicopter with input coupling. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 18, 13834–13839.
- Raza, S. A. & Gueaieb, W. (2010). Intelligent Flight Control of an Autonomous Quadrotor. In F. Casolo (Ed.), *Motion Control* chapter 12. InTech, Chapters published.
- Ruggiero, F., Trujillo, M. A., Cano, R., Ascorbe, H., Viguria, A., Perez, C., Lippiello, V., Ollero, A., & Siciliano, B. (2015). A multilayer control for multirotor UAVs equipped with a servo robot arm. In *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation* (pp. 4014–4020).
- Salazar-Sangucho, F. R. & Adorno, B. V. (2014). Modelagem e Controle de Corpo Completo Usando Quatérnios Duais para um Manipulador Móvel. In *Congresso Brasileiro de Automática* (pp. 1–8).
- Selig, J. M. (2005). *Geometric fundamentals of robotics*. Springer-Verlag New York Inc., 2nd edition.

- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics - Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlag London, 1nd edition.
- Siegwart, R. & Nourbakhsh, I. R. (2004). *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, volume 23. MIT Press.
- Skogestad, S. & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- Slotine, J. & Li, W. (1990). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall.
- Spong, M., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2006). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 6nd edition.
- Trofino, A., Coutinho, D., & Barbosa, K. A. (2003). *Sistemas multivariáveis: Uma abordagem via LMIs (versão preliminar)*.
- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear Systems Analysis*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd edition.



## Matrizes de ganhos $H_\infty$ Linear

Neste apêndice, são apresentadas as matrizes de ganhos proporcionais e derivativos do controlador  $H_\infty$  linear para o manipulador aéreo com três elos, apresentadas na subseção 4.2.3.

$$K_{pc} = \begin{bmatrix} 2.0068 & 0 & -0.0113 & 0 & 0 & 0 & 1.1351 & 0 & 0.5005 \\ 0 & 1.1182 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3341 & 0 & 0.3906 & 0 & 0 & -2.9921 & 0 & 0 & -1.3017 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8081 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 56.0707 & 0 & 3.7225 & 0 & 0 \\ 0.0266 & 0 & -0.0024 & 0 & 0 & 53.0018 & 0 & 0.8883 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.0528 & 0 & 39.9526 & 0 & 0 \\ 0.0087 & 0 & -0.0008 & 0 & 0 & 0.6564 & 0 & 58.0267 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{dc} = \begin{bmatrix} 0.1239 & 0 & -0.0009 & 0 & 0 & 0.0479 & 0 & 0.0215 & 0 \\ 0 & 0.0666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0206 & 0 & 0.0320 & 0 & 0 & -0.1262 & 0 & -0.0559 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1693 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4025 & 0 & 0.1564 & 0 & 0 \\ 0.0016 & 0 & -0.0002 & 0 & 0 & 2.2350 & 0 & 0.0381 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2165 & 0 & 1.6790 & 0 & 0 \\ 0.0005 & 0 & -0.0001 & 0 & 0 & 0.0277 & 0 & 2.4914 & 0 \end{bmatrix}$$

# B

## Matrizes de ganhos $H_\infty$ Linear

Neste apêndice, são apresentadas as matrizes de ganhos proporcionais e derivativos do controlador  $H_\infty$  linear para o manipulador aéreo com cinco elos, apresentadas na subseção 4.3.2.

$$K_{pc} = \begin{bmatrix} 0.123 & 0 & 0.0031 & 0 & 0 & -0.0016 & 0 & 0.0029 \\ 0 & 0.128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0029 & 0 & 0.125 & 0 & 0 & -0.0007 & 0 & 0.0012 \\ 0 & 0 & 0 & 0.119 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.310 & 0 & -0.0020 & 0 \\ -0.0023 & 0 & -0.0013 & 0 & 0 & 0.323 & 0 & -0.0016 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0021 & 0 & 0.315 & 0 \\ 0.0041 & 0 & 0.0023 & 0 & 0 & -0.0016 & 0 & 0.325 \end{bmatrix}$$

$$K_{dc} = \begin{bmatrix} 19.245 & 0 & 0.4830 & 0 & 0 & -0.0391 & 0 & 0.0690 \\ 0 & 18.997 & 0 & 0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4865 & 0 & 19.678 & 0 & 0 & -0.0168 & 0 & 0.0293 \\ 0 & 0.0004 & 0 & 19.189 & -0.0001 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 25.978 & 0 & -0.0501 & 0 \\ -0.0386 & 0 & -0.0164 & 0 & 0 & 25.478 & 0 & -0.0390 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & -0.0501 & 0 & 24.999 & 0 \\ 0.0682 & 0 & 0.0287 & 0 & 0 & -0.0390 & 0 & 26.130 \end{bmatrix}$$