UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

RONALDO PIMENTEL

LIMITAÇÕES DO HOLISMO CONFIRMATIVO NA MATEMÁTICA

Belo Horizonte
2017

RONALDO PIMENTEL

LIMITAÇÕES DO HOLISMO CONFIRMATIVO NA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia, da Universidade Federal de Minas Gerais, para obtenção do grau de Doutor em Filosofia.

Linha de Pesquisa: Lógica e Filosofia da Ciência

Orientador: Dr. Túlio Roberto Xavier de Aguiar

Belo Horizonte
2017

100

P644l Pimentel, Ronaldo

2017 Limitações do holismo confirmativo na matemática [manuscrito] / Ronaldo Pimentel. - 2017.

152 f. : il.

Orientador: Túlio Roberto Xavier de Aguiar.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

Inclui bibliografia

1.Filosofia – Teses . 2.Holismo - Teses. 3.Matemática - Teses. 4.Estruturalismo -Teses. I. Aguiar, Túlio Roberto Xavier de . II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III.Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

LIMITAÇÕES DO HOLISMO CONFIRMATIVO NA MATEMÁTICA

RONALDO PIMENTEL

Tese submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica e Filosofia da Ciência.

Aprovada em 19 de junho de 2017, pela banca constituída pelos membros:

Túlio R. X. Aguiar

Prof. Tulio Roberto Xavier de Aguiar - Orientador
UFMG

Antonio Mariano N. Coelho

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho
UFMG

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho
UFMG

Prof. Guilherme Araújo Cardoso
CEFET/MG

Prof. Daniel de Luca Silveira de Noronha
FAJE

Belo Horizonte, 19 de junho de 2017.

À minha mãe,
Maria do Carmo Pimentel.

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Bahia de Todos-os-Santos, encantos e axé.

Ao meu orientador, Tulio Roberto Xavier de Aguiar, por ter possibilitado a construção dessa Tese com confiança e tranquilidade.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, em Salvador, onde tenho exercido o meu trabalho desde 2012.

Aos membros da Banca Examinadora, por terem aceitado o convite para a avaliação dessa Tese.

A todos os estagiários, funcionários e professores do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFMG, por terem me acolhido desde 2008, no Mestrado, onde pude desenvolver-me intelectualmente em grandes saltos de aprendizado.

I never worry about action, but only inaction.
(Winston Churchill)

RESUMO

Holismo confirmativo é a tese de que qualquer sentença da ciência pode ser confirmada ou refutada, direta ou indiretamente, pela observação. O holismo confirmativo admite inclusive que a matemática pode ser revisada a partir de uma refutação por um teste empírico. O objetivo deste trabalho é mostrar as limitações dessa tese no âmbito da filosofia da matemática. De um modo geral, a tese do holismo é bem aceita nas teorias científicas, no entanto, ao confrontar essa tese com a prática e o desenvolvimento das teorias matemáticas, essa tese se mostra bastante limitada. A aplicação da matemática nas ciências empíricas, em alguns momentos de descoberta, mostra que as teorias matemáticas possuem mais estruturas que o vocabulário da ciência aplicada é capaz de interpretar. Foram expostos os vários sentidos de analiticidade na filosofia da matemática, pois analiticidade pode variar entre os filósofos, mas sem deixar de lado o caráter *a priori* da matemática. Foram expostos também os vários sentidos de holismo para depois circunscrever a discussão em torno do holismo confirmativo. Depois dessa exposição de conceitos, manteve-se uma filosofia da matemática centrada em estruturas que pode rechaçar esse holismo confirmativo.

Palavras-chave: Holismo. Matemática. Ciência. Estruturalismo. Filosofia.

ABSTRACT

Confirmational holism is the thesis that any statement of science can be confirmed or refuted, direct or indirectly, by observation. Confirmational holism also admits that mathematics can be revised from some refutation by an empirical test. The aim of this work is to show the limitations of this thesis in the field of philosophy of mathematics. Generally, Holism is well accepted in scientific theories, though, when we confront this thesis with the mathematical practices and moments of scientific discoveries, it shows that mathematical theories own more structure than the scientific vocabulary can interpret. It was exposed the various senses of analyticity in philosophy of mathematics, because analyticity can vary among philosophers, but without set aside the *a priori* character of mathematics. It was also exposed the various senses of holism to circumscribe the discussion around confirmational holism. After this exposition of concepts, it is followed a philosophy of mathematics centered in structures that can reject this confirmational holism.

Keywords: Holism. Mathematics. Science. Structuralism. Philosophy.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A diferenciação da Matemática perante as demais disciplinas que compõem a ciência em geral é reconhecida desde a antiguidade. Isso acontece porque a principal atividade de um matemático consiste na demonstração de teoremas e isso faz com que um matemático utilize métodos distintos dos demais cientistas. Essa diferenciação é refletida nas justificações filosóficas vindas da teoria do conhecimento sobre o afazer matemático através da natureza das proposições matemáticas. Para Kant, a matemática é um conjunto de proposições sintéticas *a priori*. Para Bolzano, a Matemática é tanto analítica quanto sintética *a priori*: A introdução de axiomas para a matemática é justificada de um modo sintético, mas a demonstração de teoremas é analítica. Para Frege e Carnap, a Matemática é totalmente analítica *a priori*. A diferenciação das sentenças nesses filósofos é polêmica porque o significado de analiticidade em cada um deles é distinto, assumindo características de proposições sintéticas em sentenças analíticas, como no caso de postulados de significado em Carnap ou como uma consequência do problema de Júlio César em Frege, identificando analiticidade com sentenças que possuem justificação *a priori*.

Por outro lado, o holismo é uma tese geral que aparece com maior força em Quine, mas não menos importantes para o entendimento do holismo neste Trabalho são Duhem, Putnam e Colyvan. Holismo é uma interpretação que vem diretamente da prática das ciências empíricas: para a elaboração de uma proposição que seja usada como hipótese ou predição de um fenômeno da natureza há a conjunção, num único bloco, de toda a ciência, inclusive da matemática. Esse bloco interligado de teorias precisa manter uma coesão de significado capaz de interligar, numa única proposição, o significado vindo de diversas áreas da ciência. Holismo semântico é a não diferenciação das sentenças em teóricas e empíricas, ou seja, entre sentenças analíticas e sintéticas. Se nenhuma sentença pode ser diferenciada no campo da ciência, então, qualquer sentença da ciência pode ser confirmada ou refutada, direta ou indiretamente, por um teste empírico e isso é o holismo confirmativo. O holismo confirmativo admite inclusive que a matemática pode ser revisada a partir de uma refutação por um teste empírico.

O holismo está interligado com a tese da indispensabilidade da Matemática, também defendida por Quine, Putnam e Colyvan. Essa tese afirma que os objetos matemáticos são indispensáveis às teorias científicas. No entanto, ao colocar em perspectiva a noção de indispensabilidade, as teorias matemáticas devem possuir um escopo de objetos restrito no holismo. A restrição está ligada à delimitação de objetos das teorias matemáticas aplicáveis. A teoria de conjuntos excede qualquer aplicação científica, mas é útil para a resolução de problemas que vêm da própria matemática e por isso é um tipo de teoria que desafia o universo mínimo de objetos possíveis para a aplicação na ciência a partir do Holismo confirmativo.

O abandono do holismo confirmativo leva também a um abandono do naturalismo na matemática de um modo empirista que defende esse tipo de holismo, que está baseado no desenvolvimento das ciências empíricas, forçando a introdução de normas restritivas a o que pode e o que não pode ser considerado mais importante dentro da ciência como um todo. O naturalismo de Quine e Putnam não é normativo no sentido de dizer que determinada teoria matemática tem mais valor em relação a outra teoria para a aplicação nas ciências, deixando de fora teorias mais abrangentes que tratam de objetos que até o momento não possuem nenhuma aplicação.

Uma reformulação no naturalismo na matemática se faz necessária, como a feita por Maddy, que considera as atividades genuinamente matemáticas. Nesse sentido, considera-se necessária a introdução do estudo da filosofia de Maddy. Em seu naturalismo, a matemática tem uma função específica que é de demonstrar o máximo possível de teoremas ainda não demonstrados numa teoria de conjuntos que seja o mais abrangente possível, ou seja, o princípio de maximização da teoria faz com que restrições vindas de um naturalismo que defende a normalização das teorias em modelos menos abrangentes não seja o suficiente para resolver todos os problemas da matemática. A matemática não possui um limite que a faça ser posta sob o mesmo escrutínio que as ciências empíricas como é pensado no holismo confirmativo. Ela possui um aspecto meramente teórico, principalmente quando a matemática é usada para resolver problemas da própria matemática.

No primeiro capítulo, foi tratada da noção de analiticidade em Kant, Bolzano, Frege e Carnap. Será tratada as diferentes noções de analiticidade desses autores e as suas concepções do que é a matemática, sendo ela separada das ciências empíricas pela natureza das suas proposições.

No segundo capítulo, foi explorado o holismo, definindo-o e posteriormente separando em holismo semântico e holismo confirmativo, conforme divisão proposta por Colyvan. Mostrou-se as consequências do holismo na filosofia da matemática. Por fim, foi apresentada a relação entre holismo confirmativo e teoria de conjuntos, principalmente olhando os problemas de consistência de axiomas da teoria de conjuntos. Isso é necessário para avaliar a defesa dos filósofos com uma visão holística da ciência de modelos construtivos na teoria de conjuntos.

No terceiro capítulo, apresentou-se a filosofia da matemática de Maddy principalmente em relação ao holismo e o desenvolvimento da matemática. Foi relacionada a sua posição com a concepção de aplicação da matemática em Krause e Arenhart, que divide os sistemas axiomáticos em axiomática concreta, abstrata e formal. Foi mostrada também as relações dessa filosofia com a aplicação estrutural da matemática de Bueno, Colyvan e Pincock. Mostrou-se que essa concepção de aplicação da matemática está apartada do argumento de indispensabilidade da matemática e do holismo confirmativo, mesmo que um desses autores, Colyvan, seja um defensor do holismo confirmativo.

1 A MATEMÁTICA NA TEIA DE CRENÇAS: A NOÇÃO DE ANALITICIDADE

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A principal atividade da matemática é a demonstração de teoremas através, logicamente, de axiomas. Esses axiomas possuem aspecto de verdades gerais sobre uma disciplina matemática ou um conjunto de objetos matemáticos. O universo de discurso desses axiomas são objetos abstratos que não fazem parte da realidade limitada ao que está entre o espaço e o tempo, de um ponto de vista realista. Nesse sentido, a natureza da matemática na história do pensamento, na maioria das vezes, é vista como uma teoria puramente abstrata sem ligação com a empiria.

Um dos debates dentro da filosofia da matemática está na divisão dos seus princípios em sentenças analíticas ou sintéticas *a priori*. Os argumentos em torno dessa classificação são acompanhados de uma divisão do conhecimento entre a matemática e as demais ciências, tornando-a separada em relação ao seu estatuto puramente teórico. Ao contrário dessa linha de pensamento, o holismo semântico aparece rechaçando essa divisão entre as sentenças da matemática em relação às demais disciplinas científicas, alegando que não há um limite muito claro entre os vários campos do conhecimento, tornando impossível existir um ponto exato que delimita a existência de uma matemática puramente teórica e as demais ciências. Não existe uma divisão entre sentenças analíticas e sintéticas *a priori*. As sentenças que se consideram como formadas somente do ponto de vista teórico guardam parte do repertório de significados adquiridos na empiria.

Diante do holismo, deve-se investigar a posição dos que argumentam a favor de uma divisão das sentenças entre analíticas e sintéticas. Serão vistas as concepções de analítico e sintético em Kant, Bolzano, Frege e Carnap, que compreendem o período moderno com Kant; o século XIX com Bolzano e Frege; e o início do século XX com Carnap. Não há um consenso ao considerar a matemática um conjunto de sentenças analíticas ou sintéticas *a priori*, conforme será notado, pois os autores possuem concepções distintas dessa divisão, que é inclusive um dos pontos de crítica do holismo: a falta de um significado exato para a noção de analítico e sintético. Uma vez que o argumento a favor da divisão entre sentenças analíticas e sintéticas não é um consenso, também não o é a noção de que o estatuto puramente formal da matemática a afastou das ciências empíricas. Por isso, é preciso examinar os autores que sustentam essa divisão, a noção de analítico e sintético, para então analisar uma defesa do holismo confirmativo[1], decorrente da crítica à essa divisão entre a diferenciação das sentenças em analíticas e sintéticas[2].

1.2 KANT E A MATEMÁTICA COMO SINTÉTICA *A PRIORI*

Antes de analisar a posição de Kant sobre a matemática, será apresentada a divisão das proposições em juízos analíticos e sintéticos. Vejamos como são definidas essas proposições nos *Prolegômenos*:

> Juízos analíticos não dizem nada no predicado exceto o que foi de fato pensado no conceito do sujeito, porém não tão claramente nem com a mesma consciência. Se eu digo: Todos os corpos são extensos, eu não ampliei meu conceito de corpo, mas meramente o decompus, pois a extensão já está compreendida nele, apesar de não ter sido explicitamente dita no primeiro conceito do juízo; o juízo é, portanto, analítico. Por outro lado, a proposição: Alguns corpos são pesados, contém algo no predicado que não está de fato pensado no conceito geral de corpo; portanto, isso aumenta meu conhecimento, desde que adiciona algo ao meu conceito, e deve, portanto, ser chamado de juízo sintético. (KANT, 2004, p. 16, 4:267, tradução nossa)[3]

As sentenças analíticas não acrescentam nenhum conhecimento novo ao sujeito da proposição. Como no exemplo “Todos os corpos são extensos”, não há acréscimo de nenhuma informação ao sujeito “corpo”, pois é impossível imaginar um corpo sem extensão. Assim, extensão já pertence ao conceito de corpo e a ele está numa relação de subordinação. Sentenças analíticas em Kant são vistas do ponto de vista da relação de subordinação do conceito, que podem ser expressas numa relação de contenção. Nos juízos analíticos, o predicado está contido no sujeito, portanto, o conceito do predicado está subordinado ao conceito do sujeito. Quando o conceito que aparece no predicado está subordinado ao do sujeito, então a relação é analítica, pois a mesma ação que se tem ao realizar um silogismo, que é inferir uma sentença numa conclusão, a de inferir um conceito de um conceito maior é realizada nesse tipo de sentença.

---

[1] Será descrito no próximo capítulo o holismo confirmativo.

[2] Entender como aparece o conceito de analiticidade será importante para mais tarde introduzir a discussão sobre o holismo semântico e o holismo confirmativo.

[3] Texto traduzido: Analytic judgments say nothing in the predicate except what was actually thought already in the concept of the subject, though not so clearly nor with the same consciousness. If I say: All bodies are extended, then I have not in the least amplified my concept of body, but have merely resolved it, since extension, although not explicitly said of the former concept prior to the judgment, nevertheless was actually thought of it; the judgment is therefore analytic. By contrast, the proposition: Some bodies are heavy, contains something in the predicate that is not actually thought in the general concept of body; it therefore augments my cognition, since it adds something to my concept, and must therefore be called a synthetic judgment. (KANT, 2004, p. 16, 4:267)

Proposições analíticas são regidas por uma regra lógica, o princípio de não-contradição, e essa é a característica de qualquer juízo inferido logicamente. É possível inferir logicamente do conceito de "triângulo", por exemplo, que "possui três lados". Assim, a sentença "o triângulo possui três lados" é um juízo analítico, uma vez que "possuir três lados" é inferido do conceito de "triângulo", que aparece como sujeito na proposição por conta dessa relação de subordinação. Juízos sintéticos são aqueles que ampliam o conhecimento ao acrescentar "mais uma informação" que não pode ser inferida diretamente do sujeito.

Além dessa divisão na natureza da proposição, Kant introduz a divisão de dois modos de justificação de uma proposição: ou pela experiência, que é todo juízo *a posteriori* ou é estritamente pela razão, que é todo juízo *a priori*. Sentenças *a priori* que são analíticas somente necessitam da lógica para a sua justificação. No outro extremo, tem-se casos como os da seguinte sentença: "etileno é usado no amadurecimento de frutas", que é classificada como uma sentença sintética *a posteriori*, que precisa ser justificada na experiência com o gás. Por outro lado, sentenças sintéticas *a priori* são aquelas que criam conhecimento, mas somente com o uso da razão e não pela experiência e é aí onde são construídas as proposições matemáticas. Vejamos o que Kant diz a respeito nos *Prolegômenos*:

> Primeiramente, deve ser observado que: proposições propriamente matemáticas são sempre *a priori* e não são juízos empíricos, porque elas carregam a necessidade nelas, a qual não pode ser extraída a partir da experiência. Porém, se não admitir isso como verdade, muito bem, restringirei minha proposição à matemática pura, o conceito do qual de fato transmite que [a matemática pura] não contém conhecimento empírico, mas somente cognição pura *a priori*. (KANT, 2004, p. 18, 4:268, colchete nosso, tradução nossa)[4]

A matemática é uma disciplina em que as suas verdades fundamentais são baseadas em juízos sintéticos *a priori*, ou conhecimento puro, que são juízos que não se justificam na experiência[5,6], porém, a matemática estabelece as condições para a experimentação (KANT, 1998, B267/A220) ou conhecimento *a posteriori* daquilo que pode ser numerado ou visto sob

---

[4] Texto traduzido: First of all it must be observed: that properly mathematical propositions are always *a priori* and not empirical judgments, because they carry necessity with them, which cannot be taken from experience. But if this will not be granted me, very well, I will restrict my proposition to pure mathematics, the concept of which already conveys that it contains not empirical but only pure cognition *a priori*. (KANT, 2004, p. 18, 4:268)

[5] Um exemplo de sentença sintética é o seguinte: "Uma linha reta é a menor distância entre dois pontos." Porque nem o conceito linha reta e nem o conceito de ponto possui em si o julgamento de menor distância entre pontos. Uma sentença analítica, de um modo genérico, é a do tipo "Um triângulo possui três lados", o que mostra que não há nenhum conhecimento novo acrescentado pela sentença do sujeito "triângulo" ao predicado "possuir três lados".

[6] Conhecimento puro é o mesmo que conhecimento adquirido *a priori*. *"*At issue here is a mark by means of which we can securely distinguish a pure cognition from an empirical one. (KANT, 1998, p. 137 (B2))"

o ângulo de relações geométricas. Por manter esse caráter de aplicabilidade da matemática é que ela deve ser construída dentro da intuição de espaço e tempo.

Verdades sintéticas da aritmética não são deduções lógicas e são reconhecidas nos aspectos intuitivos do tempo. Suas verdades são reconhecidas de imediato em qualquer objeto ou multiplicidade de objetos apreendidos em qualquer relação de objeto correspondente a um conceito numérico. Por isso, cada sentença verdadeira da aritmética é um postulado. A definição de postulado em Kant é qualquer verdade que pode ser aceita de imediato por um exemplo na intuição sem demonstração. Esses aspectos da aritmética serão explicados de uma melhor maneira na próxima seção desse capítulo.

1.2.1 O sintético *a priori* no entendimento da matemática

O papel da matemática é a construção de conceitos (KANT, 1998, B 177 A 138). Para definir um número, deve-se ter em mente que número é um tipo de conceito. O papel do número é comunicar uma quantidade e quantidades se referem a objetos. Assim, número é um conceito que deve ser satisfeito com objetos. Os objetos, por sua vez, servem de base para expressar conceitos numéricos. Vejamos de um modo melhor como esse processo ocorre no seguinte exemplo: quando é realizada uma operação que resulta no número 5, é imaginada a relação entre números distintos (conceitos distintos) a partir de objetos para chegar a um conjunto de objetos que corresponde à imagem do número 5. Como objetos existem somente no espaço e no tempo, são ou objetos físicos que existem atualmente como traços num papel, sementes, etc. ou imaginados na intuição *a priori*. O conceito é um procedimento de como construir ou organizar um objeto e como tal ele não existe no espaço e no tempo como o objeto, mas no processo de conhecer o objeto, o conceito é satisfeito por objetos. Vejamos o que Kant pensa a respeito disso na matemática:

> Consequentemente todos os conceitos matemáticos não são por si mesmos cognições, exceto à medida que alguém pressupõe que existem coisas que podem ser apresentadas a nós somente de acordo com a forma de tal intuição pura sensível. (KANT, 1998, p. 254, B147, tradução Nossa)[7]

O conceito numérico é o processo aplicado a objetos na intuição. Quando há o reconhecimento de algo como instanciando uma relação numérica, existe um objeto ou uma

---

[7] Texto traduzido: Consequently all mathematical concepts are not by themselves cognitions, except insofar as one presupposes that there are things that can be presented to us only in accordance with the form of that pure sensible intuition. (KANT, 1998, p. 254, B147)

multiplicidade deles que são apreendidos ou construídos *a priori*, a partir de um conceito matemático. Números não são objetos, porém, ao olhar para uma multiplicidade de objetos como representando a aplicação de um conceito matemático, o que ocorre é um esquema entre um procedimento de produção de uma ordem matemática numa multiplicidade de objetos (KANT, 1998, B 267A 220). Quando se fala de número, não é possível falar sem estar ligado a um objeto, de modo a tornar a prática matemática somente aplicada ou aplicável a um objeto na intuição. Vejamos:

> [Se] eu colocar cinco pontos seguidos, ... se torna uma imagem do número cinco. Em contrapartida, se eu somente penso em um número em geral, que poderia ser cinco ou cem, esse pensamento é mais a representação de um método de representar uma multiplicidade (p. ex.; mil) de acordo com um certo conceito do que a imagem em si, que nesse caso eu pude pesquisar e comparar com o conceito com muita dificuldade. Agora essa representação de um procedimento geral da imaginação de prover um conceito com sua imagem é o que eu chamo de esquema para esse conceito. (KANT, 1998, p. 273, B180, A141, colchete nosso, tradução nossa)[8]

O número é uma produção da imaginação (KANT, 1998, B182, A143). Ele é um ato mental de coletar entidades parecidas num único conceito. É preciso mostrar porque Kant não considera a aritmética analítica *a priori*, mas sim sintética *a priori*, para diferenciar sua posição filosófica perante as demais. Se termos como extensão de um conceito forem usados para um número por alguma definição e por essa definição for visto que dois conceitos distintos são equinuméricos (como em Frege), não é possível considerar que uma sentença que estabelece essa igualdade seja analítica, pois ambas levam a procedimentos distintos de atingir determinado número. O mais importante para Kant não é a referência numérica numa igualdade, mas o procedimento para atingir determinado número descrito pelo conceito. Numa igualdade, tem-se dois procedimentos distintos de cada lado, não a igualdade de objetos numéricos. Vejamos como Kant responde a Schultz sobre a possibilidade de considerar uma sentença de igualdade na aritmética como analítica:

> Posso formar um conceito de uma mesma quantidade por meio de várias adições e subtrações; (note que ambos desses processos são sínteses, no entanto) objetivamente, os conceitos que formo são idênticos (como em qualquer equação). Porém subjetivamente, dependendo do tipo de combinação que eu penso, de modo a chegar nesse conceito, eles são muito diferentes. Então, meu juízo vai além do conceito que eu obtenho da síntese, porque o juízo que substitui outro conceito (simples e mais apropriado na construção) no lugar do primeiro conceito, embora [esse conceito]

[8] Texto traduzido: [I]f I place five points in a row, ….. , this is an image of the number five. On the contrary, if I only think a number in general, which could be five or a hundred, this thinking is more the representation of a method for representing a multitude (e.g., a thousand) in accordance with a certain concept than the image itself, which in this case I could survey and compare with the concept only with difficulty. Now this representation of a general procedure of the imagination for providing a concept with its image is what I call the schema for this concept. (Kant, 1998, p. 273, B180, A 141, colchete nosso)

> determine o mesmo objeto. Assim, eu posso chegar a uma determinação única da quantidade por meio de 3+5, ou 12-4, ou 2x4, ou 2^3, nomeadamente 8. Mas meu pensamento “3+5” não inclui o pensamento “2x4”. (KANT, 1967/1788, p. 129, tradução nossa, colchete nosso)[9]

O que é enfatizado aqui é o conceito como um modo de apreensão do objeto. Dois conceitos ou um conceito (número) e vários outros (relação numérica), mesmo que aplicados aos mesmos objetos, levam a operações distintas, ou modos distintos de apreensão. Enfatizar o conceito é enfatizar o pensamento subjetivo que caracteriza como proceder para chegar a uma imagem numérica. Não é a referência a um objeto numérico que mais importa nas sentenças da aritmética, mesmo porque não há um objeto genuinamente numérico. As expressões de igualdade da aritmética não estão se referindo ao mesmo objeto, pois o número em si não existe como objeto. O que ocorre é a síntese de procedimentos distintos para chegar num mesmo valor numérico, o que torna as sentenças da aritmética sintéticas *a priori*.

Construir relações aritméticas, como ocorre no caso da soma, é realizar a junção de conceitos numéricos para a construção de novos conceitos, mas para o seu reconhecimento imediato é necessário mostrar na intuição que determinados conjuntos de objetos podem ser coletados e apreendidos num único conceito. Daí também a noção de que o conhecimento aritmético depende da intuição no tempo, pois para realizar essa operação é preciso dar passos de coleção de objetos desde o primeiro até o último objeto e então mostrar que tudo isso pode ser apreendido de uma única vez num valor numérico no tempo. A caracterização da sentença 2 + 2 = 4 como sintética ocorre porque na imagem do número “2” se junta duas vezes para formar uma nova imagem, que representa o conceito de “4”, o que pode ser mostrado na união de dois conjuntos de objetos distintos com dois elementos cada (KITCHER, 1992). Assim, uma sentença da aritmética sempre terá como ser avaliada como verdadeira de imediato porque sempre há a possibilidade de sua verificação na relação entre objetos no espaço e no tempo:

> Alguém talvez pense num primeiro momento: a proposição 7+5 = 12 é uma proposição puramente analítica que vem do conceito de uma soma de sete e de cinco de acordo com o princípio da contradição. No entanto, numa inspeção mais detalhada, é notado que o conceito de soma de 7 e 5 contém nada mais que a unificação dos dois números em um, através da qual por nenhum meio é pensado que esse número sozinho pode ser o que combina os dois. O conceito de doze não é de nenhum modo realmente

[9] Texto traduzido: I can form a concept of one and the same quantity by means of many different additions and subtractions; (notice that both of these processes are syntheses, however.) Objectively, the concepts I form are identical (as in every equation). But subjectively, depending on the type of combination [Zusammensetzung] that I think, in order to arrive at that concept, they are very different. So that at any rate my judgment goes beyond the concept I get from the synthesis, in that the judgment substitutes another concept (simpler and more appropriate to the construction) in place of the first concept, though it determines the same object. Thus I can arrive at a single determination of a quantity by means of 3+5, or 12-4, or 2x4, or 2^3, namely 8. But my thought "3+5" did not include the thought "2x4." (KANT, 1967/1788, p. 129)

> pensado porque eu penso apenas nesta unificação de sete e cinco, e mesmo que eu analise meu conceito de uma possível soma pelo tempo que for, ainda assim não encontrarei o doze nesse pensamento. É preciso ir além desses conceitos, fazendo uso da intuição que corresponde a uma das duas, tal como os cinco dedos de alguém, ou cinco pontos, e dessa maneira adicionando as unidades do cinco, dado em intuição passo a passo, até o conceito de sete. Então, desse modo, verdadeiramente ampliar-se-á o seu conceito através dessa proposição 7 + 5 = 12 e adicionar-se-á ao primeiro conceito um novo conceito que não foi pensado antes; isto é, uma proposição aritmética é sempre sintética, o que pode ser visto mais claramente no caso de números maiores. Logo, é evidente que, embora possamos mudar e misturar nosso conceito como desejamos, nós nunca encontraremos a soma através da mera análise de nossos conceitos, sem fazer uso da intuição. (KANT, 2004, p. 18-19, A: 269, tradução nossa)[10]

Os objetos existem ou fisicamente ou são imaginados na intuição *a priori* de espaço e tempo, mas imaginar um objeto já é considerar que esse objeto existe atualmente, pois a imaginação ocorre na intuição de espaço e de tempo (KANT, 1998, A 225 / B272). Diante dessa noção de objeto, que somente existe limitado ao que pode ser intuído no espaço e no tempo, não existe nenhum objeto que possa ser conhecido que esteja fora do espaço e do tempo. Supondo então que número seja um objeto, ora, se assim o for, e como é de conhecimento filosófico que se o número existe, então ele existe num plano fora do espaço e do tempo, então o número não pode ser conhecido segundo a teoria do conhecimento em Kant, pois estaria no campo do transcendente: "Chamaremos de princípios imanentes cujas aplicações estejam integralmente e completamente dentro dos limites da experiência possível, porém aqueles que podem voar para além desses limites, chamaremos princípios transcendentais. (KANT, 1998, p. 385, A296 tradução nossa)[11].

Portanto, a aritmética não trata de objetos matemáticos e o número é uma propriedade de objetos (KANT, 1998, A719/B747), predicado ou um conceito de objetos. Número não é um objeto, mas qualquer discurso que envolva relações numéricas deverá conter objetos que caem sob o conceito numérico. O número é o modo como a imaginação opera para perceber ou

---

[10] Texto traduzido: One might well at first think: that the proposition 7+5=12 is a purely analytic proposition that follows from the concept of a sum of seven and five according to the principle of contradiction. However, upon closer inspection, one finds that the concept of the sum of 7 and 5 contains nothing further than the unification of the two numbers into one, through which by no means is thought what this single number may be that combines the two. The concept of twelve is in no way already thought because I merely think to myself this unification of seven and five, and I may analyze my concept of such a possible sum for as long as may be, still I will not meet with twelve therein. One must go beyond these concepts, in making use of the intuition that corresponds to one of the two, such as one's five fingers, or five points, and in that manner adding the units of the five given in intuition step by step to the concept of seven. One therefore truly amplifies one's concept through this proposition 7+5=12 and adds to the first concept a new one that was not thought in it; that is, an arithmetical proposition is always synthetic, which can be seen all the more plainly in the case of somewhat larger numbers, for it is then clearly evident that, though we may turn and twist our concept as we like, we could never find the sum through the mere analysis of our concepts, without making use of intuition. (KANT, 2004, p. 18-19, A:269)

[11] Texto traduzido: "We will call the principles whose application stays wholly and completely within the limits of possible experience immanent, but those that would fly beyond these boundaries transcendent principles." (KANT, 1998, p. 385, A:296).

construir um conjunto de determinados objetos que pode ser apreendido numa única coleção ao mesmo tempo e nesse caso a coleção de objetos satisfaz ao número imaginado. Por exemplo, ao imaginar o número 3, é necessário imaginar três objetos que caem sob o conceito de 3 ao mesmo tempo. A existência de objetos na imaginação é necessária para a criação de uma imagem do objeto a ser conceituado (KANT, 1998, A 141 / B 181).

1.2.2 O infinito e a limitação do entendimento da matemática

Neste momento, serão exploradas as relações entre as concepções de infinito e a filosofia da matemática em Kant. Para isso, é preciso entender como Kant relaciona objetos e conceitos matemáticos. Os objetos que a matemática lida são objetos sensíveis ou são objetos de uma intuição pura. É possível então perguntar se a prática matemática está limitada ao tratamento do sensível ou se a matemática pode tratar de números que representam cardinais infinitos. Números sempre necessitam de um objeto para serem entendidos, conforme mostra-se em relação aos juízos que funcionam como postulados. O entendimento não é capaz de elaborar um conhecimento sobre um conjunto de objetos infinito, pois a intuição não é capaz de elaborar nenhum entendimento infinito. Sobre essa limitação, não é possível elaborar um entendimento aritmético sobre um número infinito, pois não é possível provar que existe ou não uma quantidade infinita de objetos capaz de ser apreendido numa única intuição. A intuição que imagina esse número deveria ser capaz de abarcar anteriormente todos os números construídos[12].

Um infinito atual exige uma síntese em que todos os objetos são apreendidos de uma única vez. Tal conceito somente é possível no campo *a priori*, mas nunca será satisfeito por nenhum conjunto de objetos imagináveis. Quando Kant se refere a uma quantidade infinita de objetos, essa concepção é de um infinito potencial, em que uma operação finita pode ser repetida indefinidamente, como desenhar uma linha reta ou adicionar sempre mais um a um número, mas há o limite subjetivo que impede a prolongação da operação ao infinito ao ponto de se considerar a existência de um infinito completado para todos os membros fechados nessa operação.

Fazer o salto do infinito potencial para o infinito atual é fazer uma generalização entre o que é atualmente feito, contar indefinidamente, para uma totalidade que ainda não é possível de ser conhecida por algum sujeito (KANT, 1998, p. 461, B436 A 409). É uma atividade natural

---

[12] Sobre a característica intuicionista da construção de quantidades numéricas, ver a carta de Kant à Joahan Schultz de 1788, em Kant (1967).

da razão, mas não é considerada um conhecimento, pois a definição de infinito potencial é a mais adequada para Kant: "O verdadeiro conceito (transcendental) de infinidade é que a síntese sucessiva da unidade na transversal de uma quantidade nunca pode ser completada." (KANT, 1998, p. 472, A432/B460, tradução nossa).[13] Essa definição possibilita ao conhecedor de forma intuitiva sempre acrescentar um objeto à imagem de outro número e assim, numa única síntese no tempo, imaginar outro número. A operação pode ser repetida indefinidamente, mas não há como ser pensada dentro do âmbito de um infinito completado que abranja todos os números.

Diante disso, uma síntese completa infinita dentro da aritmética é impossível. Desse modo, se a matemática é uma disciplina sempre aplicada a um objeto *a priori* ou *a posteriori*, o conhecimento sobre um infinito completado é descartado (KANT, 1998, B 179/ A 140). Vejamos a concepção de infinito em Kant para um embasamento da limitação da construção matemática:

> Pois porém, quando é dito, "desenhe uma linha" obviamente parece mais correto adicionar *in indefinitum* que ser dito *in infinitum*, porque a primeira [expressão] significa nada mais que "Estenda-a o quanto você queira," porém a segunda significa "você nunca deve parar de estendê-la" (o que não é de fato requerido aqui); além disso, se estamos falando somente sobre o que pode ser feito, então a primeira expressão é completamente correta, pois você poderia sempre tornar [a linha] maior, ao infinito. E essa é também a situação em todos os casos onde alguém está falando somente de um progresso adiante, por exemplo, de um progresso a partir da condição ao condicionado; esse progresso possível na série de aparências vai ao infinito. De um par de pais você poderia progredir numa linha descendente de geração sem fim, e você poderia também pensar que isso deve de fato progredir desse modo no mundo todo. Aqui a razão nunca precisa de uma totalidade absoluta na série, porque não é pressuposta como uma condição como dada (*datum*), mas é somente adicionada como algo condicionado, que é capaz de ser dada (*dabile*), e é sem fim. (KANT, 1998, A 513 B 541, p. 522, tradução nossa, colchete nosso)[14]

Há números que não podem ser, portanto, construídos na intuição de tempo em uma síntese finita, como os números transfinitos. Suas expressões não são números, pois para Kant, conforme tem-se visto, número é um número inteiro que pode ser criado numa única síntese no

---

[13] Texto traduzido: The true (transcendental) concept of infinity is that the successive synthesis of unity in the traversal of a quantum can never be completed. (KANT, 1998, p. 474 A432/B460)

[14]Texto traduzido: For although when it is said, "Draw a line" it obviously sounds more correct to add *in indefinitum* than if it were said *in infinitum*, because the first means a no more than "Extend it as far as you want," but the second means "You ought never to stop extending it" (which is not at all intended here); yet if we are talking only about what can be done, then the first expression is entirely correct, for you could always make it greater, to infinity. And this is also the situation in all cases where one is speaking only of a forward progress, i.e., of a progress from the condition to the conditioned; this possible progress in the series of appearances goes to infinity. From one pair of parents you could progress in a descending line of generation without end, and you could also think that it might actually progress that way in the world. For here reason never needs an absolute totality in the series, because it is not presupposed as a condition as given (*datum*), but it is only added on as something conditioned, which is capable of being given (*dabile*), and this without end. (KANT, 1998, p. 522, A 513 B 541)

tempo, possui cardinalidade finita, se assim o quiser interpretar, e não ultrapassa o limite do que pode ser criado na intuição de tempo (KANT, 1998, A717/B745).

A intuição estabelece um limite para a aritmética em Kant. As teorias não podem passar do limite do que é possível na intuição, nem do que é possível de ser elaborado na intuição *a priori*, porque esse é um modelo racional de um experimento. A própria mente está sob esse limite, o que estabelece o que pode ser conhecido pela intuição (KANT, 1998, B41).

O conhecimento na matemática se restringe a construir conceitos aceitos somente como uma possível experiência na intuição imediata de espaço e tempo, o que faz com que a matemática tenha um papel limitado a esses aspectos experimentais da percepção: uma sequência de tempo finita assim como um recorte finito do espaço (PARSONS, 1992b). Apesar de *a priori*, a matemática está limitada à atuação da intuição, onde ocorre a sua prática na construção de teorias e sua aplicação.

> [De] toda intuição, nenhuma é dada *a priori* exceto a partir das aparências, espaço e tempo, e um conceito delas, como *quanta*, pode ser exibido *a priori* na intuição pura, por exemplo, construído com sua qualidade (sua forma) ou ainda meramente sua quantidade (a mera síntese de elementos homogêneos) através de números. No caso das aparências, no entanto, através da qual as coisas no espaço e no tempo são dadas a nós, pode ser representada somente na percepção, então *a posteriori*. O único conceito que representa esse conteúdo empírico de aparências *a priori* é o conceito de coisa em geral, e a cognição sintética *a priori* disso pode nunca produzir mais de uma mera lei da síntese do que a percepção pode dar *a posteriori*, mas nunca a intuição do objeto real, já que isso deve necessariamente ser empírico. (KANT, 1998, p. 633-634, A720/B748, tradução nossa, colchete nosso)[15]

Teorias matemáticas são criadas a partir da intuição pura, ou seu critério de construtividade está limitado ao escopo da intuição *a posteriori* (THOMPSON, 1992), pois é isso que torna a matemática um conhecimento. O próprio entendimento de passos dados através do tempo depende da intuição e, portanto, a ela é limitado. Se uma teoria trata, por exemplo, da existência de números transfinitos, ou da existência de cardinais inacessíveis, já não é um conhecimento intuitivo, pois não são objetos apropriados para serem exibidos numa intuição. Esse limite, chamado também de construtivismo físico, que mostra até onde é possível construir na matemática, admite que todas as teorias que são criadas com o intuito de ser um

[15] Texto traduzido: Now of all intuition none is given a priori except the mere form of appearances, space and time, and a concept of these, as quanta, can be exhibited a priori in pure intuition, i.e., constructed, together with either its quality (its shape) or else merely its quantity (the mere synthesis of the homogeneous manifold) through number. The matter of appearances, however, through which things in space and time are given to us, can be represented only in perception, thus *a posteriori*. The only concept that represents this empirical content of appearances a priori is the concept of the thing in general, and the synthetic a priori cognition of this can never yield a more than the mere rule of the synthesis of that which perception may give *a posteriori*, but never the intuition of the real object, since this must necessarily be empirical. (KANT, 1998, p. 633-634, A720/B748)

conhecimento passam pelo crivo do que é possível de construir fisicamente, ou o fenomenalismo, combinando a razão pura com o empirismo, fugindo assim do racionalismo (POSY, 1992), mesmo que a matemática seja formada por um conjunto de sentenças sintéticas *a priori*.

Portanto, a matemática lida com a existência possível empiricamente, e as teorias mostram conceitos em que a existência de objetos que se encaixam ali é possível: "[...] pensado unicamente nas condições em que todos os objetos de experiência descansam" (KANT, 1998, p. 324, (A224/B271), tradução nossa)[16]. Isso também é chamado de modalismo, que pensa que a construção de um objeto via intuição pura implica na experiência possível, ou seja, na existência física do objeto ou na aplicação física do conceito, o que caracteriza a possibilidade da matemática como conhecimento em sua filosofia (HARPER, 1992). Objetos criados são finitos como qualquer objeto físico. Esses objetos e as relações matemáticas estão dadas para serem aplicadas em objetos da percepção sensorial (HINTIKKA, 1992b). Postulados fundamentais da matemática ou qualquer outro tipo de proposição aceita imediatamente como verdadeira na intuição pura são considerados como verdadeiros, corretos ou evidentes porque a intuição sensível, um caso particular de um juízo geral, por exemplo, é capaz de exibir isso.

A criação matemática está limitada ao campo do que é possível de ser intuído tanto pura quanto *a posteriori*, o que é conveniente para a aplicação da matemática em questões empíricas. A matemática continua separada do empírico, mas a única possibilidade de associar aritmética e álgebra a algum objeto é por via da intuição, o que a faz caminhar lado a lado paralelamente com a empiria. O esquema kantiano de construção do conhecimento é limitado. Para as necessidades de ampliação do conhecimento matemático é necessário a introdução de novos objetos teóricos abstratos e a matemática deve estar para além da intuição possível, como veremos em Bolzano. A introdução de novos procedimentos e objetos matemáticos levará ao abandono desse intuicionismo kantiano e à busca de outras fundamentações para a matemática. Mas, o que vai permanecer é a tentativa de classificação das proposições matemáticas de acordo com a sua classificação entre analítico e sintético, mesmo que com a introdução do método axiomático dentro da aritmética, que causará uma variação no conceito de analiticidade.

---

[16] Texto traduzido: thought solely under those conditions on which all objects of experience rest. (KANT, 1998, p. 324, (A224/B271)).

1.3 A MATEMÁTICA COMO ANALÍTICA *A PRIORI*

1.3.1 Bolzano: teoremas como analíticos *a priori* e axiomas como sintéticos *a priori*

Em meados do século XIX, Bolzano, principalmente em seu livro “Theory of Science” de 1837, exibe duas novas definições de analiticidade. Uma definição de analiticidade é a que a variação de termos não lógicos numa sentença não altera o seu valor de verdade – as tautologias e contradições são o caso aqui. Outra definição de analiticidade ocorre por meio de demonstração de sentenças: Uma sentença demonstrável é uma sentença analítica. Além disso, suas obras apontam para uma a preocupação do tratamento da matemática abstrata e afastada do campo da intuição possível de espaço e tempo para uma abordagem puramente analítica da álgebra, aritmética e análise, ou seja, através do uso de demonstrações de teoremas e sem analogias com figuras geométricas ou gráficos.

Há a necessidade de tornar a linguagem da análise afastada da geometria, característica que carrega noções intuitivas de espaço e tempo dentro da definição de termos como funções contínuas, que ainda eram definidas com a ajuda de termos geométricos e gráficos como, por exemplo, funções que descrevem um percurso de valores ininterrupto, como uma figura geométrica, retas, curvas ou como um lápis sem sair do papel. Para Bolzano, o uso das funções na geometria é somente um caso particular de suas aplicações e exige a criação de uma linguagem própria que pode levar à aceitação de objetos matemáticos que não se limitam ao que existe somente no espaço e no tempo.

1.3.1.1 Analiticidade em Bolzano

As definições da analiticidade em Bolzano são distintas das definições kantianas e se aproximam das definições que aparecem em Carnap e Frege, guardadas as suas peculiaridades. No seu caso, sentenças são analíticas quando são demonstradas ou quando a variação dos termos não-lógicos de uma sentença não afeta o seu valor de verdade. A última definição que Bolzano mantém de analiticidade é a clássica noção de juízo analítico que aparece em outros filósofos. A noção de sentença sintética em Bolzano é que as sentenças são axiomas específicos da matemática, criados para a justificação de uma sentença. A lógica é analítica no segundo sentido de Bolzano, uma vez que a substituição de termos não lógicos dentro de um raciocínio ou sentença logicamente válida não altera o valor de verdade da sentença:

> Mas suponha que há somente uma única ideia na qual pode ser arbitrariamente variada sem perturbar sua verdade ou falsidade, por exemplo, se todas as proposições produzidas ao substituir qualquer outra ideia por essa ideia, as sentenças serão todas verdadeiras ou todas falsas, pressupondo somente que elas têm denotação. Essa propriedade da proposição já é de fato suficientemente digna de atenção para diferenciarmos elas de todas as proposições das quais isso não é o caso. Eu me permito, então, chamar as proposições desse tipo, emprestando uma expressão de Kant, analíticas. (BOLZANO, 1973, p. 192, § 148, tradução nossa)[17]

Exemplos desse tipo de proposição são as tautologias. Obviamente esse tipo de sentença é verdadeira, mas nem toda sentença analítica é uma verdade em Bolzano. Uma sentença analítica pode ser uma sentença falsa que, pela variação dos termos não lógicos, sempre retornará um valor falso, como as contradições. Esse tipo de definição de analiticidade tem um limite que são as sentenças da lógica tautológicas ou contraditórias, que se espera serem analíticas somente quando os termos não lógicos são variados.

Essa definição de sentença analítica difere da noção kantiana de analiticidade por se basear na substituição do que podem ser conceitos ou objetos. Esses conceitos não estão numa relação de subordinação como em Kant. Por exemplo, dizer que "o triângulo possui três lados" como sendo analítico em Kant é dizer que o conceito de possuir três lados está subordinado ao conceito de ser um triângulo e, portanto, o predicado afirma o que está contido dentro do sujeito, porque o sujeito engloba o predicado como sendo uma de suas partes. A relação lógica entre conceitos numa sentença para Bolzano é distinta. Ela é mantida por relação entre operadores lógicos, o que não necessariamente indica que na sentença analítica há uma subordinação entre os conceitos. Por exemplo, a sentença "A nuvem é branca ou não é branca", o objeto "nuvem" pode variar assim como o conceito "é branca" é passível de variação sem alteração do valor de verdade porque nesse tipo de sentença, o conectivo "ou" permite aos conceitos não serem subordinados uns aos outros e leva o foco da discussão sobre analiticidade ao valor de verdade da sentença e não à análise de subordinação entre conceitos. As sentenças consideradas analíticas por subordinação de conceitos são analíticas em outro sentido, visto que podem ser interpretadas como um teorema de uma dedução com o auxílio da lógica, axiomas e definições, contemplado assim a noção de analiticidade kantiana, mas com outras ferramentas de abordagem de termos e sentenças.

---

[17] Texto traduzido: But suppose there is just a single idea in it which can be arbitrarily varied without disturbing its truth or falsity, i.e. if all the propositions produced by substituting for this idea any other idea we pleased are either true altogether or false altogether, presupposing only that they have denotation. This property of the proposition is already sufficiently worthy of attention to differentiate it from all those propositions for which this is not the case. I permit myself, then, to call propositions of this kind, borrowing an expression from Kant, analytic. (BOLZANO, 1973, p. 192, § 148)

Na noção de analiticidade por demonstração lógica, a sentença pode parecer num primeiro momento, sintética, mas a partir do momento que a sentença se torna demonstrável, essa sentença já pode ser considerada analítica. Essa noção de analiticidade baseia-se na justificação da sentença. Vejamos o seguinte exemplo:

“Todo efeito possui uma causa”. Essa sentença não é considerada analítica. Por outro lado, supondo que todo efeito é “efetuado” por algo. Ora, o que leva a um efeito é a “causa” desse efeito, por definição. Portanto, “todo efeito possui uma causa” é uma sentença analítica, pois é uma consequência lógica dessas duas outras sentenças.

Vejamos agora o seguinte exemplo, que não é de Bolzano, mas ilustra melhor o caso:

“2 + 2 = 4” em termos kantianos, é uma sentença sintética. Mas, se introduzir como axiomas as sentenças “$x + 0 = x$” e “$Sx + y = S(x + y)$” e definir cada número natural a partir do zero e da relação de sucessão, a sentença por sua vez pode ser considerada uma sentença analítica, pois é uma decorrência lógica dos axiomas da soma e das respectivas definições (BOLZANO, 1973, §148). Vejamos o que pensa Bolzano sobre esse tipo de analiticidade:

> Uma proposição pode ser analítica, também logicamente analítica, até mesmo idêntica, sem qualquer indicação disso por expressão verbal. Mais uma vez, muitas proposições podem ser reconhecidas como analíticas, e até mesmo como uma proposição idêntica e ainda ser sintética em sentido. Então alguém pode não ver de modo correto que a proposição “todo efeito possui uma causa” é idêntica, ou em qualquer caso analítica, como de fato ela é. Já que nós sempre entendemos por um efeito algo efetivado por algo mais, e pela locução, tendo uma causa, a mesma coisa como sendo efetivada por alguma coisa mais, o que essa proposição realmente diz é: “O que é efetivado por algo mais é efetivado por algo mais.” – O mesmo se mantém para as proposições: Se A é maior que B, então B é menor que A; se P = M.m, então M = P/m; e muitas outras. (BOLZANO, 1973, p. 193-194, tradução nossa)[18]

Nessa noção de analiticidade, é preciso provar que a sentença é analítica, ao contrário da consideração dessa sentença como analítica por termos lógicos, em que basta uma interpretação dos conectivos e quantificadores envolvidos. Dada a noção de analiticidade lógica, supondo então que para a demonstração de um teorema matemático há a necessidade de unir a lógica com algum axioma não lógico que introduz um novo conceito matemático, esse axioma matemático é sintético, portanto. Nesse caso, um teorema a ser demonstrado a partir

---

[18] Texto traduzido: A proposition can be analytic, logically analytic as well, even identical, without any indication of it by its verbal expression. Again, many a proposition can read in words just like an analytic, even an identical proposition and still be synthetic in meaning. Thus one might not see right away that the proposition, "every effect has its cause," is identical, or in any case analytic, as it really is. For since we always understand by an effect something effected by something else, and by the locution, having a cause, the same thing as being effected by something else, what that proposition really means is: "What is effected by something else is effected by something else." - The like holds of the propositions: If A is larger than B, then B is smaller than A; if P = M·m, then M=P/m; and many others. (BOLZANO, 1973, p. 193-194)

dessa teoria axiomática, que une sentenças analíticas e sintéticas, é considerado uma verdade analítica porque foi demonstrado com a lógica, pois a analiticidade não é reconhecida de imediato, conforme visto.

> […] compreende-se que proposições puramente analíticas às vezes não são também somente notáveis o suficiente para merecer uma posição num manual, mas que elas em si impõem sobre nós a obrigação de provê-las com a prova de suas verdades. De fato, não se pode negar que tais proposições analíticas, cuja verdade não é diretamente evidente, podem ser facilmente conhecidas como verdadeiras se for obtido o primeiro conhecimento de alguma verdade sintética da qual é seguida. (BOLZANO, 1837/1973, §447, apud JONG, 2010, tradução nossa)[19]

Em Bolzano, toda proposição matemática que demandou uma demonstração é uma sentença analítica *a priori*. Porém, a introdução de axiomas numa teoria matemática sempre é de sentenças sintéticas *a priori*. Quanto à introdução de sentenças sintéticas *a priori* como axiomas, devem ser aceitas pelo sucesso na resolução de problemas ou demonstração de teoremas, e podem abranger domínios mais abstratos como, por exemplo, conjuntos.

1.3.1.2 Justificação dos axiomas: demonstração de teoremas

A introdução de um axioma aparentemente deve se basear na sua incapacidade de ser demonstrado pelas demais sentenças, porque os axiomas são fundamentos de uma demonstração[20]. Para que isso aconteça numa teoria, o axioma deve introduzir um conceito ainda não posto pelos demais naquela teoria e que não apareça nas definições também propostas. Introduzir um axioma sobre o infinito, seja na teoria de conjuntos ou na aritmética, por exemplo, satisfaz o critério de ser necessário para a demonstração de teoremas úteis e que exigem o conceito de infinito e que sem esse axioma não poderiam ser demonstrados. Assim, o axioma funciona como uma hipótese que se admitida como verdadeira leva a resultados úteis para as teorias. Quando um teorema é demonstrado, se diz que ele é consequência necessária de um axioma (BOLZANO, 1810, p. 183).

Aceitar uma parte da matemática como aplicável não significa essencialmente que essa parte seja totalmente dependente de aspectos empíricos, mas pode ser que essa matéria se

---

[19] Texto traduzido: (…) one understands rather that pure analytic propositions at times are also not only remarkable enough to earn a position in a textbook, but that they themselves impose on us the obligation to provide them with a proof of their truth. Indeed it cannot be denied that such analytic propositions, the truth of which is not directly evident, can easily be known as true if one has achieved first knowledge of some synthetic truth from which they follow. (BOLZANO, Wissenshaftslehre, Sec. 447, apud JONG, 2010)

[20] "[…] ser considerado como um fundamento e nunca como consequência". (BOLZANO, 1810, p. 198, tradução Nossa) Texto Original : "[…] be considered as ground and never as consequence." (BOLZANO, 1810, p. 198)

desenvolveu e se justificou a sua existência em aspectos puramente teóricos e a necessidade em teorias aplicadas surge depois da sua criação: “Portanto nenhum juízo empírico aparece em toda a exposição, e a Ciência é, portanto, *a priori*” (BOLZANO, 1810, p. 189, tradução nossa)[21]. Os axiomas e as definições podem ser introduzidos com a função de demonstrar algo alguma sentença que na teoria demanda tal demonstração (BOLZANO, 1810). Diferente do axioma, a definição permite a relação entre conceitos distintos postos pelos axiomas. Por exemplo, quando há a definição de função a partir de um caso especial de relações entre membros de conjuntos. Essa definição exige previamente o conhecimento do conceito de conjunto e esse, por sua vez, somente pode ser introduzido por meio de axiomas. Por outro lado, a definição de uma função utiliza do conceito de igualdade, que é um termo lógico. Assim, teoremas sobre funções podem ser demonstrados a partir da teoria de conjuntos e da lógica, mesmo que os axiomas mais fundamentais da teoria não partam do conceito de função.

Para efeitos práticos, pressupondo o conhecimento da teoria matemática em questão ou por falta de um axioma que torne explícito um conceito que está tacitamente contido numa demonstração, essa demonstração pode partir de uma definição, sem o uso dos axiomas que introduzem os conceitos ali utilizados. Nesse caso, o reconhecimento de conceitos ali utilizados permanece implícito na demonstração, como acontece em (BOLZANO, 1817a) com a demonstração do teorema do valor intermediário:

1.3.1.2.1 *Teorema do Valor Intermediário*: Seja uma função contínua $f(x)$ num intervalo $[a, b]$ em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, assim haverá um c tal que $f(c) = 0$.

Essa versão do teorema indica a existência de raiz para uma função contínua. Um exemplo de exibição da evidência desse caso é a seguinte:

> O tipo mais comum de demonstração [do teorema do valor intermediário] depende de uma verdade emprestada da geometria, nomeadamente, que qualquer linha contínua de curvatura simples da qual as ordenadas são primeiramente positivas e então negativas (ou inversamente) deve necessariamente cruzar o eixo x em algum lugar num ponto entre essas ordenadas. Não há certamente nenhuma objeção contra essa exatidão, nem de fato contra a obviedade dessa proposição geométrica. (BOLZANO, 1817a, p. 228, tradução nossa, colchete nosso)[22]

---

[21] Texto traduzido: Hence no empirical judgment appears in the whole exposition, and the Science is therefore a priori. (BOLZANO, 1810, p. 189)

[22] Texto traduzido: The most common kind of proof depends on a truth borrowed from geometry, namely, that every continuous line of simple curvature of which the ordinates are first positive and then negative (or conversely) must necessarily intersect the *x*-axis somewhere at a point that lies in between those ordinates. There is certainly no objection against the correctness, nor indeed against the obviousness of this geometrical proposition. (BOLZANO, 1817a, p. 228)

Esse exemplo utiliza da geometria para justificar uma característica de uma função contínua e é uma das aplicações dessa noção, mas a demonstração de Bolzano é uma generalização de aspectos de funções sem a necessidade de conhecimentos geométricos ou da análise do movimento, em que a definição de alguns conceitos matemáticos não depende de conceitos da física nem muito menos da geometria:

> Porém é igualmente claro que é uma ofensa intolerável contra o método correto de derivar verdades da matemática pura (ou geral) (p. ex., aritmética, álgebra, análise) a partir de considerações que pertencem a uma parte meramente aplicável (ou especial), nomeadamente a geometria. (BOLZANO, 1817a, p. 228, tradução nossa)[23]

Isso ocorre porque demonstrar um teorema não é a mesma atividade que pode ser feita numa outra ciência que necessita de procedimentos metodológicos ligados a experimentação e, portanto, a aplicação de uma teoria em objetos particulares. A demonstração de uma sentença na matemática é mais uma justificação. Justificar é usar uma verdade como base para a consequência de outra verdade, ou seja, uma "verdade que leva a outra verdade" e não necessita ser uma verdade intuitivamente evidente, mas a consequência de uma verdade geral e isso não é aceito de imediato.

É possível aceitar como evidente o teorema do valor intermediário a partir de uma aplicação, mas a sua demonstração não é evidente, não é uma evidência física, mas uma proposição sobre funções analíticas, onde a introdução de noções estritamente matemáticas é necessária. Vejamos a definição de uma função contínua e, como consequência dela, o teorema do valor intermediário:

> Se duas funções fx e φx, eles dizem, variam de acordo com a lei da continuidade e se, para $x=\alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, mas para $x = \beta$, $f\beta > \varphi\beta$, então deve haver um valor u, entre α e β para o qual $fu = \varphi u$. Pois se é considerado que a quantidade variável x em ambas essas funções gradualmente toma todos os valores entre α e β, e o mesmo valor é sempre extraído por eles ambos no mesmo momento, então no início de sua mudança contínua em x, $fx < \varphi x$, e no fim, $fx > \varphi x$. Porém uma vez que ambas as funções, em virtude da continuidade, devem primeiro percorrer todos os valores intermediários antes de alcançar um valor maior, deve haver algum momento intermediário no qual eles devem ser iguais um ao outro. (BOLZANO, 1817a, p. 229, tradução nossa)[24]

---

[23] Texto traduzido: But it is equally clear that it is an intolerable offence against correct method to derive truths of pure (or general) mathematics (i.e. arithmetic, algebra, analysis) from considerations which belong to a merely applied (or special) part, namely geometry. (BOLZANO, 1817a, p. 228)

[24] Texto traduzido: If two functions fx and φx, they say, vary according to the law of continuity and if for $x=\alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, but for $x = \beta$, $f\beta > \varphi\beta$, then there must be some value u, lying between α and β for which $fu=\varphi u$. For if one imagines that the variable quantity x in both these functions gradually takes all values between a and β, and the same value is always taken by them both at the same moments, then at the beginning of this continuous change in x, $fx < \varphi x$, and at the end, $fx > \varphi x$. But since both functions, by virtue of their continuity, must first go through all

Como comentado por (BELL, 2005), o desenvolvimento da matemática ligado às funções analíticas está ligado aos problemas do movimento e a construção de gráficos sobre essas funções, ou a geometria, como a definição de função contínua em Leibniz, em 1673, a que diz ser o movimento de um ponto numa curva ou Euler que caracteriza a função contínua como uma função única capaz de representar uma evolução sem gaps num gráfico. (BELL, 2005, p. 242). A definição de Bolzano, como uma característica da apresentação de sua matemática, é mais abstrata, livrando-a de noções de movimento e de geometria.

A definição de função exige a definição de relação entre conjuntos. Sendo assim, há uma exigência da criação de uma teoria de conjuntos e a partir de seus axiomas sintéticos *a priori* para então demonstrar teoremas matemáticos que então serão considerados analíticos. A criação de axiomas não deve possuir um limite intuitivo, mas sim suprir exigências da própria teoria, tais como a necessidade de criação de objetos "grandes" como conjuntos infinitos.

1.3.1.3 O Infinito atual na matemática

Outro exemplo que surge na prática matemática de Bolzano (1851) é a definição de um conjunto infinito completo, algo que possibilita a existência de quantidades infinitas maiores que outras quantidades infinitas, sendo esse tema de grande influência nos fundamentos da matemática. Seria paradoxal para os que pautam a matemática pela física ou intuição de espaço e tempo considerar o infinito pelos elementos de um conjunto, ou seja, dado um conjunto completo, a quantidade de seus membros é infinita. Esse tipo de infinito completo se faz necessário introduzir para a mensuração de quantidades infinitas de objetos que aparecem nas teorias matemáticas, quando eles são equivalentes a conjuntos como, por exemplo, o conjunto dos números naturais ou reais, ordinais enumeráveis, não-enumeráveis, cardinais trasnfinitos, etc.

Bolzano reconhece que a definição de infinito até então introduzida não é capaz de lidar com certas coleções infinitas da matemática, porque são introduzidas de acordo com as demandas de ciências particulares ou filosóficas, como uma noção de infinito que convém à física, por exemplo. Vejamos o que Bolzano tem a dizer sobre a noção de infinito potencial, uma noção de infinito dependente de percepção, por exemplo:

---

intermediate values before they can reach a higher value, there must be some intermediate moment at which they are both equal to one another. (BOLZANO, p. 229, 1817a,)

> Não mais satisfatória é a definição [...]: o infinito é aquilo que não tem fim. Se eles estão pensando nessa definição somente a partir de um tempo finito, somente a partir de uma cessação, então nenhuma outra coisa deveria ser infinita a não ser o fluxo temporal, ao passo que nós também investigamos coisas [...] como linhas ou quantidades abstratas, se elas são finitas ou infinitas. [...] Como uma consequência, a questão se um dado objeto ser finito ou infinito certamente não pode depender da condição se essa quantidade cai ou não dentro de nossa percepção, ou se somos ou não capazes de comandar uma visão dele. (BOLZANO, 1851, p. 256-257, tradução nossa)[25]

Vejamos como Bolzano constrói um exemplo desse infinito a partir de um conjunto de sentenças verdadeiras:

> O conjunto de todas as proposições absolutas verdadeiras [...] é facilmente visto como infinito. Pois se fixarmos nossa atenção sobre qualquer verdade tomada aleatoriamente, como a proposição de que existem tais coisas como verdades, ou qualquer outra proposição, e nomeá-la A, notamos que a proposição transmitida pelas palavras 'A é verdadeira' é diferente da proposição A em si, uma vez que se tem a proposição completa A [...]. Agora, pela mesma lei que nos permitiu derivar de uma proposição A outra proposição diferente, que devemos chamar B, estamos de novo habilitados para derivar uma terceira proposição C de B, e assim por diante sem fim. O agregado de todas essas proposições, todas as quais estão relacionadas com sua predecessora por ter a última em sua própria constituição, e a verdade da última para a sua própria asserção, compreende um conjunto de membros (cada membro uma proposição) que é maior que qualquer conjunto particular finito. Há um conjunto que não precisa ser lembrado a partir da similaridade vinda dessa série com seu princípio de construção da série de números considerada em §8. A similaridade consiste no fato que cada membro do [número] anterior corresponde a um membro no [número] posterior; no fato que quanto maior o inteiro escolhido, existe um conjunto de várias proposições; e finalmente no fato que podemos sempre continuar a construção de tais proposições – ou ainda, que tais proposições existem para além da proposição dada se as construímos ou não. De onde segue que o agregado de todas as proposições acima compõe uma multiplicidade que vai além de qualquer número inteiro, e é, portanto, infinito. (BOLZANO, 1851, p. 257-258, tradução nossa, colchete nosso)[26]

---

[25] Texto traduzido: No more satisfactory is the definition given by those whole another derivation of the word and say: the infinite is that which has no end. If they are thinking in this definition only of an ending time, only of a cessation, then no other thing should be infinite but those subject to temporal flux, whereas we also ask of things not so subject, like lines or abstract quantities, whether they be finite or infinite. But if they take the word end in a wider sense, say as equivalent with limit as such, then I call attention to two points: Here I must really ask people whether they do not in every case use the words finite and infinite in such a sense (and whether their use full employment in science do not make it necessary to use them in such a sense) that they refer to a definite internal property of the things so described, and by no means exclusively to a relation they bear to our power of knowledge, and still less to a relation they bear to our sensitive faculties—and this, quite irrespectively of whether were able or unable to collect experience of them. As a consequence, the question whether a given object be finite or infinite certainly cannot depend on whether its quantity does or does not fall within our perception, or on whether we are able or unable to command a view of it. (BOLZANO, 1851, p. 256- 257)

[26] Texto traduzido: The set of all absolute propositions and truths (…) is easily seen to be infinite. For if we fix our attention upon any truth taken at random, say the proposition that there exist such things as truths, or any other proposition, and label it A, we find that the proposition conveyed by the words 'A is true' is distinct from the proposition A itself, since it has the complete proposition A for its own subject. Now by the same law which enabled us to derive from the proposition A another and different one, which we shall call B, we are further enabled to derive a third proposition C from B, and so forth without end. The aggregate of all these propositions, everyone of which is related to its predecessor by having the latter for its own subject, and the latter's truth for its own assertion, comprises a set of members (each member a proposition) which is greater than any particular finite set. There a set does not need to be reminded of the similarity borne by this series together with its principle of construction to the series of numbers considered in §8. The similarity consists in the fact that to each member of

Esse tipo de construção consiste em encontrar um procedimento regular que pode ser aplicado num primeiro elemento para se conseguir todos os demais elementos. Uma vez que se tem sentença "A" como verdadeira e admitido que o processo de formação de uma sentença verdadeira consiste em, por exemplo, usar de regras lógicas que conservam o valor de verdade na sentença resultante, então tem-se uma nova sentença verdadeira e assim por diante.

Um conjunto finito é um conjunto vazio ou existe um número natural correspondente à cardinalidade desse conjunto. Um conjunto é infinito se não é finito e não é possível a partir de Bolzano mostrar uma relação com a concepção de infinito Dedekind. Um conjunto infinito de Dedekind é aquele que possui uma relação 1-1 com um subconjunto próprio. Um conjunto é finito se não é um conjunto infinito Dedekind. Para mostrar que um conjunto infinito é um conjunto infinito Dedekind começa-se analisando a partir de uma função que seleciona sempre conjuntos ou elementos desse conjunto para formar outro conjunto. C é um conjunto infinito no sentido de Bolzano, não é vazio, então pode-se selecionar c_0 de C, tendo o conjunto C - x_0 não vazio. A função pode selecionar x_1 de C, então tem-se C – $\{x_0, \ x_1\}$ não vazio e assim por diante. Para cada x_n selecionado, sempre será possível selecionar x_{n+1} de C. A própria função de seleção formará um conjunto D de infinitas seleções em C, que é subconjunto de C. Os elementos de D podem ser postos numa relação 1-1 de *C*, mostrando que há uma relação 1-1 entre subconjuntos de C com o próprio C que formam o conjunto D. Essa relação estabelece que há uma equivalência entre conjuntos infinitos de Bolzano com conjuntos infinitos em Dedekind, mas exige a presença de uma função capaz de fazer infinitas seleções num conjunto infinito já posto, ou seja, exige uma versão do axioma da escolha.

Noções como essa de infinito atual podem aparecer nas teorias em forma de axiomas, pois para uma teoria tratar de coleções de objetos infinitas é preciso introduzir o conceito de infinito em forma de um axioma. Tal axioma não é uma verdade da lógica, pois da lógica não é possível inferir a existência de coleções infinitas e, portanto, a sua introdução corresponde a uma sentença sintética *a priori*, útil para o tratamento de noções que requerem a definição de infinito, seja a totalidade dos números naturais, ou dos números reais, por exemplo. Ou até mesmo o tratamento da noção de continuidade ou de limite. Sentenças derivadas a partir de axiomas que introduzem esses conceitos são consideradas analíticas, conforme visto, mas a

---

the former there corresponds a member of the latter; in the fact that howsoever large an integer be chosen, there exists a set of just so many among the above propositions; and finally, in the fact that we can always continue the construction of such propositions — or rather, that such further pro-positions exist whether we construct them or not. Whence it follows that the aggregate of all the above propositions enjoys a multiplicity surpassing every individual integer, and is therefore infinite. (BOLZANO, 1851, p. 257-258) introdução dessas sentenças sobre o infinito como axioma é sintética *a priori* cuja justificação é somente a demonstração desses teoremas analíticos.

1.3.1.4 Considerações sobre a analiticidade em Bolzano

A primeira coisa que se deve notar na analiticidade em Bolzano é que uma sentença não demonstrada, que é considerada um axioma para um matemático ou grupo de matemáticos, pode ser demonstrada pela introdução de novos axiomas em outra teoria. A sentença deixaria de ser sintética a priori, ou seja, deixaria de ser um axioma ou sentença indecidível, para se tornar um teorema. Assim, a definição de sentença analítica ou sintética é dependente da teoria em que a sentença está ocorrendo ou do poder de demonstração dessa teoria. Ou mesmo, um teorema analítico para um matemático, pode ser um axioma para outro matemático. Isso acontece com o Princípio de Hume em Frege como um axioma e não um teorema da proposição V.

Segundo, a referência dos termos nos exemplos dados por Bolzano, na primeira definição de analiticidade, mostra que o reconhecimento da analiticidade de uma sentença depende do nível de conhecimento da linguagem e do conhecimento da referência dos termos em que a sentença foi expressa. Nesse caso, toma-se uma mesma sentença numa lógica clássica e numa lógica não-clássica. Como os valores de verdade dos operadores lógicos podem variar em outras lógicas, a analiticidade de uma sentença também pode variar em outra linguagem. A analiticidade ou não de uma sentença depende do reconhecimento de ampla parte da linguagem e de seu uso, pois é isso que estabelecerá a referência dos termos.

O terceiro ponto é em relação às sentenças analíticas por demonstração lógica como “Todo efeito possui uma causa”, ora, para ter conhecimento do que é a causa de algum fenômeno é preciso passar por um processo de aprendizagem de uma linguagem científica ou filosófica extenso, para então julgar tal sentença como analítica, uma verdade indubitável. Isso ocorre porque o conhecimento da definição de causa não é algo simples e depende de uma ampla rede de conhecimentos que pode envolver inclusive sentenças sintéticas vindas do conhecimento empírico, o que implicaria num holismo semântico para o estabelecimento de uma rede de referências e definições.

O problema da referência de termos de numa sentença não está restrito somente à sentença específica em que esses termos ocorrem. Na verdade, o problema da referência de termos engloba toda a linguagem em que a sentença ocorre, o conjunto de falantes dessa linguagem e o contexto. Nesse caso específico, o conhecimento de toda a ciência, não apenas de vários campos da matemática, como também das ciências empíricas, para então considerar a sentença como analítica. Visto dessa maneira, a analiticidade em Bolzano e suas variações não são úteis para o entendimento de uma definição definitiva de analiticidade, mesmo que essas definições de analiticidade estejam embebidas no desenvolvimento de uma matemática puramente teórica, mas retirar a legitimidade das definições de analiticidade estabelecidas por Bolzano não invalida a sua busca por uma matemática afastada de questões empíricas, em que a introdução de axiomas é sintética *a priori* e sem ligação com problemas vindos da experiência.

Em Bolzano, a introdução de axiomas dentro da matemática pode levar à criação de "grandes objetos" que existem fora do espaço e do tempo. Tais objetos como conjuntos infinitos são úteis para a prática matemática fora da intuição de espaço e do tempo. Esse tipo de prática, ao contrário da divisão em sentenças analíticas e sintéticas, leva ao questionamento do holismo confirmativo, a ideia de que qualquer teoria matemática dentro da teia de crenças está passível de sofrer uma revisão em resposta a uma refutação da ciência em outros campos e que será visto nos próximos capítulos. A criação teórica pode partir de um problema prático, como visto em relação ao teorema do valor intermediário, mas não significa que as teorias matemáticas estão limitadas em seu desenvolvimento ao que é aplicável, como é o exemplo da introdução da noção de infinito, e que é um sério problema para o holismo confirmativo.

1.3.2 Analiticidade em Frege

1.3.2.1 A natureza da aritmética em Frege

Uma das obras em que Frege defende analiticidade é em seu livro *The Foundations of Arithmetic*. Para ele, a aritmética é decorrência da lógica. Assim como Bolzano, Frege caracteriza a matemática como uma arte generalista e platônica, que lida com a relação entre conceitos e objetos matemáticos. A pergunta "Qual a conexão entre conceitos objetivamente válidos para todos?" é essencial para Frege. A lógica é a linguagem objetiva que lida com conexões entre os conceitos e transmite o pensamento. Todo conceito possui um número sendo que esses "existem" uma realidade objetiva que não é nem espaço-temporal e nem está sob os aspectos psicológicos de um sujeito particular.

Separada da intuição de espaço e tempo, a aritmética não está relacionada com o mundo externo. O desenvolvimento da aritmética está intimamente relacionado com a lógica e objetos tratados na aritmética são objetos lógicos. Toda proposição lógica verdadeira é um fato atemporal sobre o pensamento. Todo pensamento se refere ao verdadeiro ou ao falso de uma maneira imutável[27] independentemente do tempo ou do espaço. Quando a matemática ou a lógica é introduzida na prática científica, ela aparece como uma ferramenta dedutiva capaz de unir os juízos. Mas, como diz Frege:

> As leis dos números, portanto, não são realmente aplicáveis às coisas externas; elas não são leis da natureza. Elas são, no entanto, aplicáveis aos juízos sobre coisas no mundo externo: elas são leis das leis da natureza. Elas não afirmam conexões entre fenômenos, mas conexões entre juízos; e entre os juízos estão inclusas as leis da natureza. (FREGE, 1953, p. 99, §87, tradução nossa)[28]

A lógica é um conjunto de juízos analíticos *a priori*. Partindo desse princípio, é preciso mostrar também que a aritmética é composta de juízos analíticos, se todos os princípios da lógica são analíticos. Dentro da própria lógica está inclusa a matemática, o que torna lógico os objetos matemáticos como números. Todas as sentenças da aritmética são demonstráveis, fora os axiomas da lógica que são sentenças que possuem uma demonstração de si mesmas, toda proposição na matemática exige uma demonstração ou uma razão suficiente que demonstre o seu "porquê":

> As verdades da aritmética deveriam então estar relacionadas àquelas da lógica do mesmo modo que os teoremas da geometria aos axiomas [da geometria]. Cada uma contém concentrada em seu interior toda uma série de deduções para uso futuro, e o uso dela deveria ser o que precisamos sem mais fazer a série de deduções uma a uma, mas pode expressar simultaneamente o resultado de toda a série. Se assim o é, então de fato o prodigioso desenvolvimento de estudos aritméticos, com suas várias aplicações, será suficiente para finalizar o amplo conteúdo de juízos analíticos e para [por um fim à] lenda da esterilidade da lógica pura. (FREGE, 1953, p. 24 §17, tradução nossa, colchete nosso)[29]

Demonstrações têm como ponto de partida as leis gerais da lógica e algumas definições. O caráter apriorístico da aritmética é justificado pelo fato de essa teoria não se tratar de julgamentos do mundo da experiência, mas porque as leis da aritmética são leis que tratam de

---

[27] Pensamentos, Frege concorda com Platão, são essências eternas, imutáveis, que não são nem criadas, nem sustentadas, nem alteradas de qualquer modo pela atividade humana; nem são perceptíveis por qualquer sentido humano. (BELL, 2002, p. 109, tradução nossa). Texto em inglês: Thoughts, Frege agrees with Plato, are eternal, immutable essences which are neither created, nor sustained, nor in any way altered by any human activity; nor are they perceivable by any human sense. (BELL, 2002, p. 109)

[28] Texto traduzido: The laws of number, therefore, are not really applicable to external things; they are not laws of nature. They are, however, applicable to judgements holding good of things in the external world: they are laws of the laws of nature. They assert not connections between phenomena, but connections between judgements; and among judgements are included the laws of nature. (FREGE, 1953, p. 99, §87)

[29] Texto em inglês : The truths of arithmetic would then be related to those of logic in much the same way as the theorems of geometry to the axioms. Each one would contain concentrated within it a whole series of deductions for future use, and the use of it would be that we need no longer make the deductions one by one, but can express simultaneously the result of the whole series. If this be so, then indeed the prodigious development of arithmetical studies, with their multitudinous applications, will suffice to put an end to the widespread contempt for analytic judgments and to the legend of the sterility of pure logic. (FREGE, 1953, p. 24 §17)

números: “Quando falamos ‘o número um’, indicamos por meio do artigo definido um único objeto de estudo científico definido. Não existem diversos números um, porém somente um.” (FREGE, 1953, p. 49, §38, tradução nossa)[30]. Os objetos que são tratados como existindo logicamente para que então sejam apreendidos imediatamente pela razão[31]. Por esse motivo, a justificação para os axiomas da aritmética são *a priori* e ao mesmo tempo analíticas:

> Desse modo, a questão é removida do domínio da psicologia e atribuída à matemática, se ela diz respeito a uma verdade matemática. Agora, depende de se achar uma demonstração e retornar às verdades primitivas. Se, de outro modo, somente leis lógicas gerais e definições gerais são encontradas [nesse retorno], então a verdade é analítica, assumindo que proposições nas quais a admissibilidade que qualquer definição repousa também é tomada em consideração. Se não é possível providenciar uma demonstração, no entanto, sem usar verdades que não são de uma natureza lógica geral, mas pertencem, em vez disso, ao domínio de uma ciência particular, então a proposição é sintética. Pois uma verdade para ser *a posteriori*, deve ser impossível para sua demonstração evitar apelo aos fatos, isto é, verdades indemonstráveis e não gerais que contenham asserções sobre objetos particulares. Se, por outro lado, é possível providenciar uma demonstração a partir de leis completamente gerais, que em si não são nem necessárias e nem admitem demonstração, então a verdade é *a priori*. (FREGE, 1953, p. 93, §80, tradução nossa, colchete nosso)[32]

Objetos que aparecem na aritmética são os que caem sob os conceitos. O conceito é concebido como não saturado. Quando o conceito não está saturado, existe uma variável no lugar de um objeto. Por exemplo, na sentença “Há um x tal que x = 2+3”, o conceito “= 2+3” não está saturado. “5 = 2+3” é um conceito saturado, que resulta numa sentença verdadeira. Uma função proposicional que retorna um valor de verdade possui um objeto ocupando a expressão vazia no conceito. Assim, a expressão saturada é verdadeira ou falsa. Todos os objetos que saturam os conceitos definem o seu valor de verdade. A sentença verdadeira para algum objeto pode ser quantificada com um quantificador existencial que indica a existência de pelo menos um objeto que cai sob esse conceito. Sendo assim, existem objetos dos quais

[30] Texto traduzido: When we speak of “the number one”, we indicate by means of the definite article a definite unique object of scientific study. There are not divers numbers one, but only one. (FREGE, 1953, p. 49, §38).

[31] Frege e Kant dizem que a geometria é sintética a priori e que a validade dos axiomas depende da intuição. Para Frege, a aritmética é um ramo da lógica e, portanto, analítica a priori e tem que ser assim porque diferentemente da geometria que se aplica ao que é intuível no espaço, a aritmética se aplica primeiramente ao que é pensável. O que não é intuitivo é pensável na pura lógica. O que é pensável possui uma objetividade que não está ligada à intuição: são objetos da razão e da lógica.

[32] Texto traduzido: In this way the question is removed from the domain of psychology and assigned to that of mathematics, if it concerns a mathematical truth. It now depends on finding a proof and following it back to the primitive truths. If, on the way, only general logical laws and definitions are encountered, then the truth is analytic, assuming that propositions on which the admissibility of any definition rests are also taken into account. If it is not possible to provide a proof, however, without using truths that are not of a general logical nature, but belong instead to the domain of a particular science, then the proposition is synthetic. For a truth to be *a posteriori*, it must be impossible for its proof to avoid appeal to facts, that is, to unprovable and non-general truths that contain assertions about particular objects. If, on the other hand, it is possible to provide a proof from completely general laws, which themselves neither need nor admit of proof, then the truth is *a priori*. (FREGE, 1953, p. 93, § 80)

satisfazem os conceitos. Números são objetos que caem sob esses conceitos, como qualquer outro objeto. Não são generalizações do que está no espaço, mas são objetos que são introduzidos através de leis lógicas. Por serem objetos lógicos, não estão limitados aos objetos acessíveis à intuição de espaço e tempo como em Kant.

> Agora é claro que os limites de uma disciplina são determinados pela natureza de seus blocos mais fundamentais. Se, como é o caso da geometria, esses fundamentos são configurações espaciais, então a ciência também será restrita a o que é espacial. Portanto, se a aritmética é independente de todas as propriedades particulares das coisas, isso deve também manter como verdade seus blocos fundamentais: eles devem ser de natureza puramente lógica. Disso segue o requerimento de que tudo da aritmética é redutível à lógica por meio de definições. (FREGE, 1953, p. 113 – 114, §103, tradução nossa)[33]

1.3.2.2 Princípio de Hume e o problema de Júlio César

Dados esses pormenores sobre como os objetos se relacionam com conceitos, será introduzida a Lei Básica V, das Leis Básicas da Aritmética, de onde Frege deduz o princípio de Hume, juntamente com algumas definições e excertos da dedução do Princípio de Hume encontrada em Zalta (1998, 1998b). A lógica e o princípio de Hume são essenciais para o projeto de Frege de mostrar que as leis da aritmética são analíticas *a priori*. A Lei Básica V é uma lei de relação entre extensões de conceitos e sua equivalência.

1.3.2.2.1 *Convenção de Notação*: Considere ε*F* como "a extensão do conceito F".

1.3.2.2.2 Tem-se a seguinte Lei (Lei Básica V):

$$\varepsilon F = \varepsilon G \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

1.3.2.2.3 *Convenção de Notação*: #F significa "o número do conceito F"[34].

---

[33] Texto traduzido: Now it is clear that the boundaries of a discipline are determined by the nature of its ultimate building blocks. If, as in the case of geometry, these ultimately are spatial configurations, then the science too will be restricted to what is spatial. Therefore if arithmetic is to be independent of all particular properties of things, this must also hold true of its building blocks: they must be of a purely logical nature. From this there follows the requirement that everything arithmetical be reducible to logic by means of definitions. (FREGE, 1953, p. 113 – 114 § 103)

[34] Será introduzido o conceito de número mais abaixo.

$\varepsilon F = \varepsilon G$ significa que F e G possuem a mesma extensão, mas não é uma identidade numérica. $\#F = \#G$ significa que ambos possuem o mesmo número. *"#F = x*" significa que "*x* é o número do conceito F" e "*x = #G" significa "x é o número do conceito G"*. Nesse caso, a extensão desses conceitos se limita unicamente a números, pois a única possibilidade de uma sentença da forma "*x = #G" ser verdadeira ocorre quando o objeto que cai sob o conceito de "ser o número de G"* ser um número especificado pelas condições de estabelecidas pelo conceito G.

O outro lado da sentença da Lei Básica V, $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$, é uma equivalência que implica a reflexividade, transitividade e simetria. Com essas informações, qualquer relação que se estabeleça entre os membros das extensões de F e de G será reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, há uma relação 1-1 entre as extensões desses conceitos. Isso pode ser explicado pela seguinte citação, onde é possível relacionar esses aspectos da Lei Básica V como os escritos dos fundamentos da Aritmética de Frege:

> Se agora qualquer objeto que cai sob o conceito F está numa relação φ com um objeto caindo sob o conceito G, e se qualquer objeto que cai sob G está numa relação φ com um objeto caindo sob F, então os objetos caindo sob F e sob G estão correlacionados um com o outro pela relação φ. (FREGE, 1953, §71, p. 83, tradução nossa)[35]

Essa citação pode esclarecer o conceito de equinumerosidade, que mostra que, quando os conceitos estão numa relação 1-1, eles são equinuméricos:

1.3.2.2.4 *Definição*: $F \approx G$ é a relação de equinumerosidade 1-1 entre os conceitos F e G.

A definição de número em Frege depende da noção de extensão e da noção de equinumerosidade, pois número em Frege, segundo Zalta (1998) é a "extensão que contém todas e somente aquelas extensões de conceitos que são equinuméricas a F":

1.3.2.2.5 *Definição de Número*: $\#F = \varepsilon F^{\approx}$

---

[35] Texto em inglês: If now every object which falls under the concept F stands in the relation φ to an object falling under the concept G, and if every object which falls under G there stands in the relation φ to an object falling under F, then the objects falling under F and under G are correlated with each other by the relation φ. (FREGE, 1953, §71, p. 83)

1.3.2.2.6 *Princípio de Hume*: $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$

O princípio de Hume diz que dois números de dois conceitos são idênticos se e somente se esses dois conceitos são equinuméricos. A principal função da lei básica V é a demonstração do Princípio de Hume. Como a lei básica V leva a uma contradição, ela não deve ser considerada uma lei lógica e, portanto, não é uma sentença analítica *a priori*[36]. Por ouro lado, se for admitido o princípio de Hume como um axioma da lógica, então a lógica não é um conjunto de sentenças analíticas *a priori*, pois o princípio introduz dentro da lógica um objeto específico da matemática que são os números naturais, não pelo princípio em si, mas pelo contexto que a noção de número aparece subjacente, necessitando de definições sobre números como a listada acima ou um conhecimento prévio sobre o que seja número.

O Princípio de Hume é uma definição contextual. Aqui, o termo a ser definido, o número, deve ser entendido no contexto de toda a sentença em que o termo ocorre. Isso acontece porque ao introduzir o Princípio de Hume, não há uma definição explícita dentro do princípio dizendo que o número é algo, nem no próprio princípio há uma limitação da quantificação para somente números.

A extensão de conceitos é algo amplo. Qualquer coisa pode ser a extensão de conceitos. Por exemplo, o conceito "*x* conquistou a Gália" cai somente o objeto Júlio César. Mas ao estabelecer que número está relacionado a extensão de um conceito, há o risco de confundir qualquer extensão com um tipo específico de extensão que são os objetos numéricos. Isso é tratado na seção 69 dos Fundamentos da Aritmética, na qual Frege começa a discutir qual noção de número é mais interessante:

> Eu acredito que para "extensão do conceito" poderíamos simplesmente escrever "conceito". Porém isso poderia estar aberto para duas objeções:
> 1. Que isso contradiz minha declaração anterior que os números individuais são objetos, como é indicado pelo uso do artigo definido em expressões como "o número dois" e pela impossibilidade de dizer uns, dois, etc. no plural, como também pelo fato de que o número constitui somente um elemento no predicado de uma proposição de número;
> 2. que conceitos podem ter extensões idênticas sem coincidirem entre si.
> Estou convencido, como acontece, que ambas essas objeções podem se encontrar; porém fazer isso nos levaria muito além das propostas presentes. Eu assumo que é sabido o que a extensão de um conceito é. (FREGE, 1953, §69, p. 80, tradução nossa)[37]

---

[36] Para a demonstração da contradição contida na Lei Básica V, consultar Zalta, 1998.
[37]Texto traduzido: I believe that for "extension of the concept" we could write simply "concept". But this would be open to the two objections:
1. that this contradicts my earlier statement that the individual numbers are objects, as is indicated by the use of the definite article in expressions like "the number two" and by the impossibility of speaking of ones, twos, etc. in the plural, as also by the fact that the number constitutes only an element in the predicate of a statement of number;
2. that concepts can have identical extensions without themselves coinciding.

Para evitar essa confusão é necessário que o conhecedor assuma a existência de objetos numéricos antes mesmo do estabelecimento de uma teoria aritmética e que essa teoria trate somente de objetos numéricos na extensão dos conceitos, conforme visto na citação; ou pela introdução de objetos específicos que sejam números através de uma definição. Número não é um termo reconhecidamente como lógico, sendo que uma teoria sobre números exige axiomas não lógicos e essa é a principal questão sobre o princípio de Hume. Se o princípio pode ser considerado não lógico por tratar de objetos específicos, a justificação da sua aceitação não poderia ser analítica, pois o próprio princípio não é capaz de resolver um problema denominado problema de Júlio Cesar (HECK, 1997).

É necessário compreender que número de um conceito não é o objeto que cai sob esse conceito, mas é uma característica de segunda ordem sobre esse conceito. Isso fará com que número de um conceito não se identifique com qualquer outro objeto que cai sob esse conceito e pode também numerar os próprios números que caem sob um conceito. Por exemplo, o conceito de "número natural entre 3 e 5" somente se satisfaz com o número 4, a sua extensão, mas o número do conceito não é o número 4 e sim o número 1, pois o número de objetos que cai sob o conceito é 1: $\#(3<x<5) = 1$. Assim, o reconhecimento de números se dá não pelos objetos que caem sob o conceito, mas pela expressão de segunda ordem que qualifica o conceito "o número de Fs", #F. Mas ao mesmo tempo, número não é uma propriedade de um conceito, e sim um objeto que é expresso como um dos lados de uma igualdade, portanto, também pode ser considerado uma extensão.

Quando se expressa uma fórmula sobre a quantidade numérica de um conceito, há uma identidade entre dois objetos que é o número do conceito[38]. Vejamos como isso pode ser demonstrado a partir do princípio de Hum. Suponha um único conceito em que: $\#F = \#F \leftrightarrow F \approx F$; pela tautologia $F \approx F$, é destacado $\#F = \#F$. Como #F é uma variável numérica, substitui-se uma das partes por n: $(EF)(n = \#F)$. A sentença diz que "Existe um conceito F em que n é o número de F". Uma sentença que envolve números, portanto, deve ser transformada numa sentença de identidade, em que a sentença acima se transforma em "O número do conceito 'número natural entre 3 e 5' = 1". Agora imagine o conceito "x=0". Nesse caso, o número do

I am, as it happens, convinced that both these objections can be met; but to do this would take us too far afield for present purposes. I assume that it is known what the extension of a concept is. (FREGE, 1953, §69, p. 80)

[38] "A expressão 'n é um Número' significa o mesmo que a expressão 'existe um conceito tal que n é o Número que pertence a ele'. (FREGE, 1953, p. 85, § 72, tradução nossa). Texto traduzido: "The expression 'n is a Number' is to mean the same as the expression. 'there exists a concept such that n is the Number which belongs to it." (FREGE, 1953, p. 85, § 72)

conceito também é 1: $\#(x=0) = 1$. Isso impede de dizer que 0 = 4, um erro de referência chamado Problema de Júlio Cesar. Essa conclusão somente é conseguida com a compreensão no princípio de Hume de que há números que são argumentos do conceito e números que são propriedades de um conceito. Observe o seguinte exemplo de aplicação do princípio de Hume:

$$\#(x = 0) = \#(y \text{ conquistou a Gália}) \leftrightarrow (x = 0) \approx (\text{y conquistou a Gália})$$

Tem-se dois conceitos com o mesmo número, como o conceito sob o qual 0 cai e o conceito sob o qual Júlio Cesar cai. Ora, se ambos possuem o mesmo número, que seja 1, então o problema está na sentença que não faz sentido Júlio Cesar = 0. O que ocorre aqui é a confusão entre predicado de um conceito e o objeto que cai sob esse conceito. Para dar conta dessa resolução, toda distinção complexa entre objeto simples, conceito, predicado sobre o conceito e relação de identidade deveria ser entendida dentro do próprio princípio de Hume, mas essa compreensão não é atingida dentro do próprio princípio, dependendo do nível de aprendizado do conhecedor ou de demais definições explícitas dentro da própria teoria. Para evitar o problema de Júlio Cesar, é preciso entender a diferença entre números e predicados sobre números de antemão para a aceitação do Princípio de Hume. É preciso então ter conhecimento de como o número emerge em toda a sentença, como associar esse tipo de objeto com um conceito e, depois, como diferenciar o número dos demais objetos que caem sob o conceito.

> Um modo de explicar a força dessa ideia poderia ser observando que, uma vez que os nomes dos números têm sido introduzidos por meio do Princípio de Hume, nenhuma explicação *a mais* de tais expressões como ‘o número de números menores que 5’ deveria ser requerida. Espera-se que os falantes entendam imediatamente tais expressões e saibam, por exemplo, que ‘o número de imperadores romanos é o mesmo que o número de números menores que 5’ é verdadeira, se e somente se, há uma correlação um-a-um entre os imperadores romanos e os números menores que 5. Isso poderia parecer seguir a ideia que os predicados ‘ξ foi um imperador romano’ e ‘ξ é um número menor que 5’ deve ser do mesmo tipo, pois os nomes explicados pelo princípio de Hume contém predicados de um único tipo, nomeadamente, aqueles da mesma sorte que ‘ξ foi um imperador romano’. Mas predicados desse tipo são predicados verdadeiros ou falsos para objetos do mesmo tipo como objetos básicos (pois os tipos de predicados são determinados pelos tipos de argumentos aceitáveis). Então, números devem ser do mesmo tipo que objetos básicos, logo, a questão é o que fazer com a expressão ‘César é o número zero’. (HECK, 1997, p. 287, tradução nossa)[39]

[39] Texto traduzido: One way to explain the force of this idea would be to observe that, once names of numbers have been introduced by means of Hume’s Principle, no *further* explanation of such expressions as ‘the number of numbers less than 5’ would appear to be required. One would expect speakers immediately to understand such expressions and to know, for example, that ‘the number of Roman emperors is the same as the number of numbers less than 5’ is true if, and only if, there is a one-one correlation between the Roman emperors and the numbers less than 5. It would appear to follow that the predicates ‘ξ was a Roman emperor’ and ‘ξ is a number less than 5’ must be of the same Sort, for the names explained by Hume’s Principle contain predicates of a single Sort, namely,

O problema está justamente na seguinte sentença: (EF)(n = #F) decorrente do princípio de Hume. Nessa sentença, n é um objeto que cai sob um conceito. Então, a variável pode ser instanciada pelo objeto Júlio Cesar, o que geraria uma sentença totalmente sem sentido como "Existe um conceito F em que Júlio Cesar é o número de F". Número é o único tipo de objeto que pode cair sob um conceito e ser identificado como a qualidade de um conceito, mas isso não está dito no princípio de Hume. É preciso então introduzir um holismo semântico, ou seja, reconhecer que em toda sentença com identidade numérica, o escopo das variáveis que não são conceitos ou objetos que caem sob esse conceito são exclusivamente números. Ou seja, o primeiro lado da bicondicional em que aparecem as expressões #F=#G, em que os objetos começam com "O número de", é preciso reconhecer de antemão o que é "O número de" para satisfazer uma igualdade numérica. Mas o princípio de Hume é justamente o que introduz o conceito de número na lógica. A única saída para o problema de Júlio Cesar, portanto, é definir o escopo da utilização das variáveis numéricas antes da introdução do princípio de Hume e introduzir definições específicas para números dentro da teoria. Com isso, reconhecer a verdade do princípio de Hume é algo mais complexo que reconhecer a verdade de sentenças da lógica. A limitação do escopo das variáveis foi proposta por Heck (1997). Vejamos uma do Princípio de Hume para a solução do Problema de Júlio Cesar (HECK, 1997):

$$\#F = \#G \leftrightarrow \exists R_{bn}[\forall x \forall y \forall z \forall w R_{bn}xy \wedge R_{bn}zw \rightarrow x = z \leftrightarrow y = w]$$
$$\wedge \forall x[Fx \rightarrow \exists y(Gy \wedge R_{bn}xy) \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists x(Fx \wedge R_{bn}xy)\,]$$

Nota-se que nesse caso, as variáveis que podem ser substituídas por números estão indicadas por n e as que podem ser substituídas por qualquer objeto básico, que também pode ser um número, estão indicadas por b. Mas, ao introduzir esse tipo de limitação, o axioma passa a ser visto como uma sentença não lógica e, portanto, sintética *a priori*, pois como visto em Bolzano, uma sentença aceita como um axioma na matemática não é verdadeira para todos os objetos, e sim para um universo específico de objetos determinados previamente. O princípio de Hume trata de números, portanto, sua verdade deve ser reconhecida num universo sobre números, mesmo que esse esteja contido dentro do universo das coisas básicas, pois também são extensões de conceitos.

---

those of the same Sort as 'ξ was a Roman emperor'. But predicates of this Sort are predicates true or false of objects of the same Sort as basic objects (for the Sorts of predicates are determined by the Sorts of their acceptable arguments). So numbers must be of the same Sort as basic objects; hence the question what to make of 'Caesar is the number zero'. (HECK, 1997, p. 287)

Sendo assim, não é possível reconhecer a verdade do princípio como analítica *a priori* porque é preciso ter um complexo conhecimento anterior de como funciona toda a linguagem e seus objetos, se o princípio é introduzido sem a limitação do universo das variáveis. Isso implica no holismo semântico para estabelecer a referência a termos possíveis de serem substituídos pelas variáveis numéricas. Se o princípio é introduzido com uma limitação das variáveis, então definitivamente o princípio não é um princípio lógico, e, portanto, não é um princípio analítico *a priori* e implica novamente o holismo semântico. Há a necessidade de compreensão prévia da teoria, de uma limitação do escopo das variáveis, pois é preciso chegar à conclusão que o princípio de Hume trata exclusivamente de introduzir números na lógica, mas não sendo expresso no seu princípio e nem nos demais axiomas essa limitação.

1.3.2.3 Considerações sobre a analiticidade em Frege

Toda linguagem é analisada em Frege para se chegar de modo claro ao objeto e o objeto é dependente de uma linguagem que o introduz do ponto de vista de quem estuda o objeto pela linguagem. Para explicar a referência de um termo numa linguagem é necessário usar uma sentença diferente dessa onde o termo ocorre. E para o entendimento dessa segunda sentença, é preciso introduzir outra sentença que a explique, o que torna nenhuma verdade que não seja uma demonstração lógica uma verdade analítica em que o significado pode ser atribuído aos termos que somente ali ocorrem. Toda a ciência para ser entendida precisa estabelecer uma rede de significados. Os principais objetos a serem tratados numa teoria são introduzidos por meio de definições explícitas ou axiomas para compor essa rede de significados coesa e esse tipo de sentença não é analítica.

Sendo assim, o estabelecimento de significado de termos está ligado à linguagem que é usada para expressar esse tipo de conteúdo e a comunidade linguística que reconhece e está disposta a aceitar tais princípios e objetos, pois para o reconhecimento desses objetos é necessária a sua compreensão. Ao não introduzir limitações úteis dentro da própria linguagem para evitar confusões ontológicas, aquele que está construindo essa linguagem admite que o conhecedor tem condições de assumir a existência de determinados objetos e as limitações das sentenças perante o tratamento desses objetos, mas mesmo assim isso não justifica a aceitação de sentenças como o princípio de Hume como analítica. O escopo das variáveis numéricas é reconhecido por quem conhece as relações matemáticas e o entendimento de uma parte específica dessa linguagem como a lógica e a aritmética pode depender do entendimento de outras partes da linguagem, o que pode levar ao questionamento da divisão entre as verdades de uma teoria em analítico e sintético e ao holismo semântico (BELL, 2005).

1.3.3 Carnap e a analiticidade

O problema da analiticidade desde Bolzano se confunde com o problema da divisão da matemática em uma teoria puramente abstrata e as demais ciências, conforme visto. Carnap, vendo a matemática como um conjunto de teorias abstratas, mantém essa divisão e considera que verdades matemáticas são independentes de fatos. Por outro lado, a física é dependente, pelo seu método, do fato. Isso acontece porque teoremas matemáticos e físicos são distintos em suas condições de aceitação. Teoremas matemáticos e físicos se combinam para gerar novas predições, mas a ciência física trata de fatos, observações, testes, em que o que está em jogo não é somente a linguagem, mas também a sua aplicação.

Carnap procura estabelecer uma distinção entre valores de verdade das sentenças da linguagem que são fatuais ou não. Dentro da linguagem de uso da matemática e da lógica, suas verdades e falsidades são determinadas formalmente, o que o autor denomina de verdades L-determinadas (CARNAP, 1947). Já as verdades ou falsidades que são determinadas empiricamente são verdades/falsidades factuais, ou seja, não são L-determinadas. A sentença é factual quando ela não tem seu valor de verdade estabelecido somente por leis do formalismo da linguagem, mas precisa ser levada à experiência. As sentenças da lógica podem ser escolhidas de modo arbitrário e, portanto, de modo convencional. Diz a respeito Carnap:

> [...] [E]las são [as leis lógicas da dedução] tomadas como as bases da construção do sistema de linguagem e se a interpretação do sistema é depois superposta. Por outro lado, um sistema da lógica não é uma matéria de escolha, mas ou certo ou errado, se uma interpretação de signos lógicos é dada antecipadamente. Mas mesmo aqui, convenções são de fundamental importância; pois a base na qual a lógica é construída, nomeadamente, a interpretação dos signos lógicos (p. ex. pela determinação das condições de verdade) pode ser livremente escolhida. (CARNAP, 1939, p. 28, tradução nossa, colchete nosso)[40]

Essa divisão estabelecida entre verdades de fato e verdades puramente formais permite o aparecimento de distintas lógicas. Esses sistemas devem ser estudados do ponto de vista

---

[40] Texto traduzido: (…) they are [the logic laws of deduction] taken as the basis of the construction of the language system and if the interpretation of the system is later superimposed. On the other hand, a system of logic is not a matter of choice, but either right or wrong, if an interpretation of the logical signs is given in advance. But even here, conventions are of fundamental importance; for the basis on which logic is constructed, namely, the interpretation of the logical signs (e.g., by a determination of truth conditions) can be freely chosen. (CARNAP, 1939, p. 28, colchete nosso)

formal, interpretados e verificadas a sua aplicação na ciência, mas a aplicação em ciências não está ligada ao estudo formal do comportamento desse sistema ou em relação aos teoremas gerados por esses sistemas. Seu estudo formal está ligado às verdades formais. Essas verdades são chamadas de analíticas e quando não são verdades lógicas, elas são introduzidas pelo que Carnap chama de Postulados de Significado.

1.3.3.1. Analiticidade como postulado de significado

Em 1952, no artigo *Meaning Postulates*, Carnap introduz suas considerações sobre as verdades analíticas dentro de uma linguagem L-determinada. De imediato, as formulas lógicas que podem ser consideradas verdadeiras são aquelas que são (i) universalmente válidas, (ii) que possuem uma fórmula lógica verdadeira quantificada universalmente, (iii) uma fórmula que é satisfeita por qualquer constante que ocorra na linguagem ou que é sustentada por toda descrição-estado da linguagem. Então, uma sentença verdadeira que contenha somente termos lógicos como a sentença $(p \vee \neg p)$ é considerada analítica segundo essas definições, considerando que nessa linguagem foram postas todas as regras de inferência e tabelas de verdade dos conectivos que ali ocorrem (CARNAP, 1952, p. 67).

Por outro lado, há um conjunto de sentenças que devem ser consideradas analíticas que possuem termos além da lógica. Vejamos o famoso exemplo em inglês: "All the bachelors are unmaried", que não se encaixa nas regras de analiticidade acima. Conforme estabelece Bolzano, ela é uma sentença analítica que não aparenta ser num primeiro momento, pois os termos "bachelors" e "unmaried" são distintos. É preciso estabelecer o significado de seus termos, para entender que essa sentença é analítica. Então, Carnap introduz a ideia de postulado de significado dentro de uma linguagem L-determinada. Assim, uma sentença poderá ser considerada analítica se ela for verdadeira de acordo com o significado dos termos, desde que seja introduzido o seu significado dentro da linguagem L-determinada.

Nesse caso, uma sentença desse tipo seria considerada analítica se fosse introduzido o seguinte postulado $\forall x(Bx \rightarrow \neg Mx)$, sendo que cada termo ali expresso significasse: Bx "x is Bachelor" e ¬Mx "x is not Married". Obviamente, a introdução desses postulados para Carnap não deve ser motivada por crenças de fatos, mas pelo uso que será feito das constantes que ali ocorrem. Se essa sentença é analítica e supondo que existe uma proposição derivada logicamente de um postulado desse tipo, então essa proposição também é uma sentença analítica ou possui o valor de verdade L-determinado. Uma vez introduzido o postulado de significado, Carnap acredita ter resolvido o problema da analiticidade numa linguagem formal.

1.3.3.2 A natureza da matemática em Carnap

Toda linguagem puramente teórica está totalmente desvinculada da empiria. A aplicação das sentenças vindas de teorias puramente formais, sejam essas sentenças L-determinadas ou derivadas delas, é somente o guia que leva de uma sentença factual a outra sentença factual prevista pela aplicação de um formalismo. O sentido da matemática em si na aplicação da sentença não é levado em conta porque as teorias matemáticas para Carnap não possuem uma única interpretação. Uma sentença na matemática é a abreviação de definições da lógica ou aritmética pela introdução de outros símbolos. Diz respeito da aplicação da matemática em Carnap:

> A função da matemática nas ciências empíricas consiste em providenciar, primeiro, formas de expressões menores e mais eficientes que as formas não-matemáticas e linguísticas e, segundo, modos de dedução lógica menores e mais eficientes que aqueles da lógica elementar. (CARNAP, 1939, p. 44, tradução nossa)[41]

Visto que a matemática é analítica, a aplicação da matemática basicamente é a interpretação de um cálculo em objetos ou eventos. Medir é dar a magnitude de uma coisa ou lugar e os dois métodos necessitam de deduções para chegarem a resultados. A dedução em si é vazia de conteúdo, seu estudo é puramente formal e as verdades da proposição são determinadas na linguagem. A matemática é uma linguagem com um modo de apresentar melhor os fatos conhecidos e a utilidade da matemática é justamente o tratamento de dados vindos dos fatos. O que é tratado na matemática, separadamente de sua aplicação, não são fatos, mas deduções determinadas por uma linguagem puramente formal que podem ser interpretadas nos fatos e é assim que as derivações na matemática levam às previsões. Essas previsões não se tratam de fatos, porque são L-determinadas, mas podem ser testadas em fatos caso sejam interpretadas e a aplicação da fórmula não é uma questão da matemática. O grande problema dessa definição de analiticidade de Carnap é a arbitrariedade ao considerar um termo como analítico, visto que qualquer termo pode ser introduzido a partir do postulado de significado dentro de uma teoria.

---

[41] Texto traduzido: The function of mathematics for empirical science consists in providing, first, forms of expression shorter and more efficient than non-mathematical linguistic forms and, second, modes of logical deduction shorter and more efficient than those of elementary logic. (CARNAP, 1939, p. 44)

1.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ficaram expostas aqui quatro concepções distintas de analiticidade tendo como base a relação entre matemática e ciências empíricas. Em Kant, apesar de a matemática ser considerada um conjunto de juízos sintéticos *a priori*, a matemática caminha em ligação com a intuição possível. A possibilidade é do que pode ser construído na realidade física ou no espaço e no tempo, no campo dos fenômenos. Essas construções estão limitadas ao fenômeno e o que não pode ser representado no espaço e no tempo não é considerado matemática, porque não está baseado na intuição possível. Essa característica do pensamento de Kant pode levar a dissolver a separação entre a intuição *a priori* e *a posteriori*, porque uma vez que tudo o que é intuído *a priori* pode ser representado *a posteriori*, já que o papel de qualquer teoria científica é representar um fenômeno.

O aparecimento de questões mais abstratas na matemática exige o comprometimento com uma teoria fora da intuição espaço-temporal, conforme mostrado em Bolzano. Uma sentença analítica não muda o seu valor de verdade com a variação dos termos não lógicos ou é um teorema. Nessa segunda concepção de sentença analítica há uma coerência com a metodologia de desenvolvimento da matemática em Bolzano. A justificação para a introdução de novos métodos de demonstração não depende de aspectos intuitivos. Sendo assim, a criação de teorias matemáticas está apartada das teorias físicas. A introdução de objetos como conjuntos infinitos veio para solucionar problemas que envolvem unicamente aspectos das teorias matemáticas, sem o apelo de intuições possíveis. As sentenças que introduzem esse tipo de conceito ou objeto dentro da matemática são axiomas sintéticos *a priori*.

Por outro lado, o conceito de analiticidade terá outro significado em Frege. Aqui, além de a analiticidade estar ligada a um sentido de justificação de um teorema pela demonstração, as sentenças consideradas axiomas fundamentais da lógica são analíticos. Mas os fundamentos da matemática em Frege exigem o comprometimento ontológico com a existência de números no Princípio de Hume. Isso introduz um problema para a definição da matemática como um conjunto de juízos analíticos a priori, uma vez que a introdução de objetos na teoria envolve juízos sintéticos a priori, o que põe o conceito de analiticidade em xeque.

A concepção de analiticidade muda também em Carnap para cobrir qualquer sentença que não tenha compromisso com verdades factuais, podendo assim cobrir todos os sistemas dedutivos concebidos e suas variações não clássicas, podendo ser introduzidas por meio de postulados de significado. Qualquer sentença que é fruto de uma convenção linguística é considerada analítica em Carnap. A matemática em Carnap é um grande conjunto de convenções linguísticas, mas isso leva a uma grande elasticidade ao problema da analiticidade.

As definições de analiticidade listadas são problemáticas. O que pode ser considerado uma sentença sintética *a priori* em Kant não o é em Carnap, Frege e Bolzano, como no caso das sentenças da aritmética que podem ser demonstradas dentro de uma teoria e que em Kant não há sentenças da aritmética que são demonstráveis dessa maneira. Uma sentença que é sintética *a priori* em Bolzano, não é em Frege e nem em Carnap, pois em Bolzano os axiomas de uma teoria podem ser considerados sintéticos *a priori*. Por outro lado, uma sentença que é analítica *a priori* em Frege, não o é ou por ser uma contradição ou por introduzir termos não lógicos. Além disso, é preciso ver se, uma vez abandonado o conceito de analiticidade e adotando o holismo semântico, se não é possível aceitar o holismo confirmativo. É possível abandonar o holismo confirmativo tornando a matemática ou uma parte de seu desenvolvimento uma disciplina puramente teórica.

2 HOLISMO SEMÂNTICO E HOLISMO CONFIRMATIVO

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, serão estudadas as várias formas de holismo e suas consequências. No holismo, a preocupação se volta para o desenvolvimento das ciências empíricas em que as teorias funcionam como um bloco unificado de sentenças, conforme será visto no holismo de Duhem (1982). No entanto, a principal crítica à divisão entre sentenças analíticas e sintéticas é feita por Quine (1951) no artigo "Two Dogmas of Empiricism". Nesse artigo, há uma crítica à divisão das sentenças entre analíticas e sintéticas ou entre as sentenças divididas entre teóricas e empíricas. A divisão não faz sentido quando se olha para a prática científica em seu objetivo maior, que é predizer fenômenos na experiência, uma atividade que exige uma teia de crenças em toda a ciência sem a separação entre o que é *a priori* ou *a posteriori*.

Toda sentença possui um conteúdo empírico, conforme será visto no holismo de Putnam (1983), que exclui a existência de sentenças *a priori*, apesar de sustentar a existência de sentenças analíticas. De qualquer modo, tanto o holismo de Quine quanto o de Putnam tem a seguinte consequência: ao modificar uma teoria científica por meio da refutação de uma predição, o significado de uma sentença que é considerada puramente teórica pode vir a mudar, ou seja, não existem sentenças puramente teóricas. O que sustenta essa situação é a noção de que toda a ciência está em desenvolvimento e ligada à empiria, inclusive as ciências ditas puramente teóricas, uma vez que todas as teorias científicas podem ser refutadas levando a drásticas mudanças em sua estrutura. Esse tipo de holismo não é sustentado somente por Quine e Putnam, mas por Colyvan (2001) também. Introduzida a noção inicial de holismo em Duhem, será visto depois o que se trata do holismo em Putnam para, em seguida, introduzir a partir de Quine e Colyvan, a divisão do holismo em holismo semântico e holismo confirmativo.

2.2 O HOLISMO

Holismo é a tese de que toda a ciência está interligada formando um corpo unificado de crenças. Esse corpo de crenças possui sentenças que formam as teorias. Essas sentenças estão interligadas em relações lógicas ou matemáticas, formando um "campo de força". A analogia do campo de força parece convir para o holismo, pois uma perturbação nas extremidades de um campo de força pode ser tão forte que atinge o centro do campo. Assim também é o holismo. Uma mudança numa sentença que compõe o corpo teórico reverbera, a partir de relações lógicas entre as sentenças, em todo o campo científico. Como as sentenças estão interligadas, todas elas são úteis para a constituição de significado dos termos utilizados e as consequências de um teste empírico reverberam em toda a ciência. Um exemplo de uma mudança mínima que pode acarretar numa mudança de significado em toda a teoria pode ser a relação entre as transformadas de Galileu e as transformadas de Lorentz. Nesse caso, introdução de uma constante nas transformadas de Galileu, a constante de contração γ, tem como consequência a teoria da relatividade especial ou as transformadas de Lorentz[42]. As transformadas de Galileu representam a física clássica e as transformadas de Lorentz a teoria da relatividade especial. No holismo mais radical, o holismo confirmativo, qualquer verdade que se considera analítica *a priori* pode ser confrontada com a experiência. E será visto esse caso ao expor mudanças na lógica que podem ser justificadas pela mecânica quântica.

2.2.1 Holismo disciplinar em Duhem

Duhem (1982) afirma que um experimento nunca refuta unicamente uma hipótese quando testada, mas todo o grupo teórico é exposto ao teste empírico. Uma hipótese sozinha de uma teoria não é capaz de levar a nenhuma derivação empírica:

> Em suma, o físico nunca pode submeter uma hipótese isolada ao teste empírico, mas somente todo um grupo de hipóteses; quando o experimento está em desacordo com suas predições, o que ele aprende é que ao menos uma das hipóteses constituindo esse grupo é inaceitável e precisa ser modificada; mas o experimento não designa qual delas deve ser modificada. (DUHEM, 1982, p. 187, tradução nossa)[43]

O que ocorre é que, quando se elabora uma teoria científica, toda a teoria está numa teia de significados para então ocorrer o processo de derivação: predição ou explicação. Em Duhem (1982), uma lei é entendida analogamente ao processo de referência de um corpo: A depender do sistema referencial que se olha um corpo, é possível coletar dados distintos sobre esse corpo, então, toda a informação a respeito desse corpo pode mudar, pois o valor das variáveis das equações mudará perante os vários sistemas referenciais possíveis. Ao transpor essa visão para o aspecto teórico, uma modificação numa lei pode significar, na tese do holismo, uma modificação em conjunto de todo o sistema teórico:

---

[42] Será apresentado o que são as transformadas de Galileu e de Lorentz mais abaixo.
[43] Texto traduzido: In sum, the physicist can never subject an isolated hypothesis to experimental test, but only a whole group of hypotheses; when the experiment is in disagreement with his predictions, what he learns is that at least one of the hypotheses constituting this group is unacceptable and ought to be modified; but the experiment does not designate which one should be changed. (DUHEM, 1982, p. 187)

> A ciência física é um sistema que deve ser tomado como um todo; é um organismo no qual uma parte não pode ser feita para funcionar, exceto quando as partes que são as mais remotas dessa ciência são requisitadas, algumas mais que as outras, mas todas em algum grau. Se algo der errado, se algum desconforto é sentido no funcionamento do organismo, o físico terá de pesquisar esses efeitos em todo o sistema, qual órgão precisa ser remediado com modificações sem a possibilidade de isolar esse órgão e examiná-lo aparte. (DUHEM, 1982, p. 187-188, tradução nossa)[44]

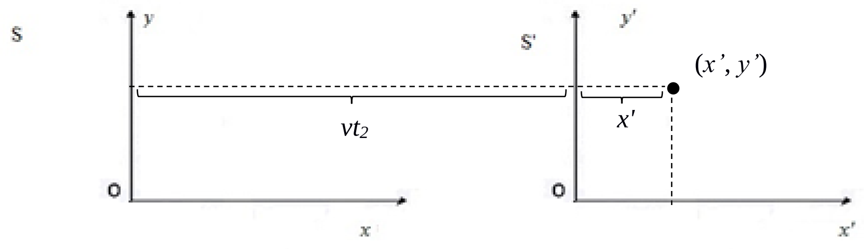
Bush (2011) chama esse tipo de holismo de “disciplinar sobre a derivação de consequências empíricas”. Essa nomenclatura se justifica porque uma lei sempre deve ter uma teoria como pano de fundo, ou seja, uma pequena mudança numa lei pode acarretar em mudanças em toda a teoria científica. Para ver como isso funciona, serão examinadas abaixo as transformadas do movimento e da velocidade em Lorentz e em Galileu. Ao apenas adicionar uma constante nas transformadas de Galileu, a constante de contração γ, leva-se a todas as mudanças teóricas vindas da teoria da relatividade especial de Einstein. No exemplo abaixo, que são excertos das derivações de Kopot (2014a, b, c, d), será visto como funciona esse tipo de holismo disciplinar com respeito à noção de velocidade na física clássica e a velocidade na teoria da relatividade especial. Será vista a variação profunda de significado de um termo usado na física que reverbera no significado dos conceitos mais fundamentais de toda uma disciplina. Na física clássica, a velocidade possui um significado e na teoria da relatividade especial possui outro significado.

As transformadas de Galileu são úteis para lançar os dados de um sistema referencial S’ em outro sistema referencial S (KOPOT, 2014a). S e S’ podem ter a posição referencial representada em gráficos cartesianos de duas dimensões. Nesses gráficos, x e y são os eixos de coordenadas de S e x’ e y’ são os eixos de coordenadas do sistema S’. Supondo que num momento inicial S e S’ estejam no mesmo lugar e parados, então, no tempo $t = 0$, os sistemas referenciais estão superpostos e permanecem em repouso. A configuração dos referenciais será $x = x'$ e $y = y'$. Se o sistema referencial S’ vir a se movimentar como por exemplo um avião taxiando numa pista de decolagem e S permaneça em repouso, como por exemplo a torre de controle do aeroporto em frente a essa pista, ocorrerão modificações na posição de S’. Quando S’ inicia o movimento, ele se move à velocidade $\vec{v}$ no sentido positivo do eixo x. Assim, o sistema referencial S’ se movimenta juntamente com o avião ao longo do eixo x. No tempo t_2

[44] Texto traduzido: Physical science is a system that must be taken as a whole; it is an organism in which one part cannot be made to function except when the parts that are most remote from it are called into play, some so than others but all to some degree. If something goes wrong, if some discomfort is felt in the functioning of the organism, the physicist will have to ferret out throught its effect on the entire system which organ needs to be remedied of modified without the possibility of isolating this organ and examining it apart. (DUHEM, 1982, p. 187-188)

com o sistema S’ em movimento, se quer saber a posição do ponto (x', y') do sistema S’ em relação ao sistema S. A Figura 1 mostra o esquema do evento nos dois sistemas referenciais:

Figura 1 - Movimento no referencial S’ em relação à S



Fonte: Adaptado de Kopot (2014a)

Quando o tempo passa, S’ se movimenta no sentido positivo do eixo x de S a uma velocidade $\vec{v}$ e S permanecendo constante. Até o tempo t_2, S’ moveu-se vt_2 ao longo do eixo x. Mas a posição do evento em evidência está em x', que deve ser acrescentado a vt_2 para a transformação ser mais exata, de onde pode-se extrair a seguinte equação (KOPOT, 2014a):

$$(1)\ x = x' + vt$$

Supondo, agora, que o objeto descrito no Sistema S’ começa a se movimentar a uma velocidade $\vec{w}$ dentro do avião, como se fosse um passageiro caminhando em direção à cabine de comando, ou seja, no sentido positivo do eixo x'. No tempo t_2, o passageiro tem um vetor de velocidade $\vec{w}$ = (w'_x, w'_y,). No sistema S, a velocidade desse passageiro no eixo x é dada pela equação (KOPOT, 2014a):

$$(2)\ w_x = w'_x + v$$

Isso mostra que o acréscimo de velocidade na física clássica é uma simples soma de termos, mas o significado muda em relação à relatividade especial, onde as fórmulas são demonstradas a partir das transformadas de Lorentz. A diferença entre as transformadas de Galileu e as transformadas de Lorentz é que as equações de Lorentz incorporam a dilatação do tempo e a contração do espaço que, na Física Clássica, são quantidades absolutas para qualquer sistema. Supondo dois sistemas referenciais distintos R e R’, que no tempo $t = t' = 0$s, os dois sistemas encontram-se em repouso num mesmo lugar. Supondo agora que R’ começa a se mover com uma velocidade $\vec{v}$ pelo eixo x em relação ao sistema referencial estacionário R da esquerda para a direita. O movimento de R' em relação a R é dado pela seguinte equação, com a constante de contração γ[45] de Lorentz (KOPOT, 2014c):

$$(3) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

Se o movimento é relativo e num dos sistemas referenciais é estacionário, então, para as partículas contidas no sistema referencial R', as partículas do sistema referencial R estão em movimento ao longo do eixo x' com uma velocidade $-\vec{v}$ de onde obtém-se a seguinte equação de transformação (KOPOT, 2014c):

$$(4) \qquad x' = \gamma(x - vt)$$

As equações 3 e 4 devem passar pela constante de contração γ. Quando a velocidade se torna extremamente alta, próxima a velocidade da luz, o tempo t' tende a dilatar-se enquanto o espaço x' tende a contrair-se. Como se está na teoria da relatividade, o tempo e o espaço não são absolutos. O tempo do referencial em repouso terá a seguinte fórmula (KOPOT, 2014c):

$$(5)\ t = \gamma\left[\frac{v\prime}{c^2} + t'\right]$$

Mas o tempo t' passa a ser mensurado de acordo com a seguinte fórmula (ERNSTY; HSU, 2001):

$$(6)\ t' = \gamma t(c - v)/c$$

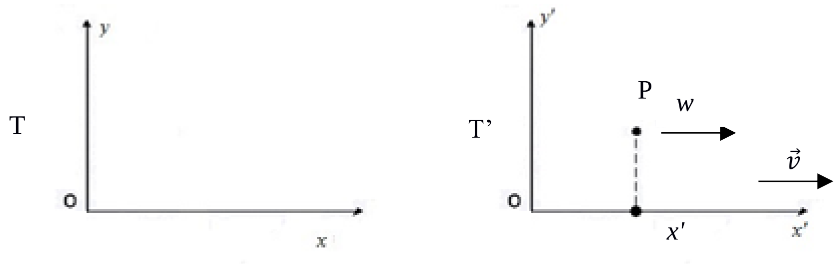
Agora, tem-se as três equações críticas para a noção de adição de velocidade na teoria da relatividade especial: a transformada de deslocamento de Lorentz, a transformada de variação do tempo e a constante de contração do espaço. Essas três equações incorporam uma ideia fundamental da Teoria da Relatividade Especial: (a) espaço e tempo são relativos. Com a adição da velocidade relativística, será mostrada a incorporação de outra ideia fundamental: (b)

---

[45] A constante de contração de Lorentz é a seguinte: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

nenhuma partícula no universo ultrapassa a velocidade da luz no vácuo. Isso significa que se um fóton cruza com outra partícula se movimentando na mesma direção, mas em sentido oposto, o somatório das velocidades sempre será c. Agora, para o entendimento da equação da velocidade de Lorentz, o exemplo será dois sistemas distintos: a Terra, sistema T, parado em relação ao sistema T', um satélite orbitando a Terra a alta velocidade em que há nesse satélite um canhão P disparando partículas com velocidade w no mesmo sentido e direção de seu movimento:

Figura 2 - Terra T estacionária, satélite em movimento T' e fóton P sendo disparado a partir desse satélite



Fonte: Adaptação de Kopot (2014d)

O que se quer é descobrir a velocidade W da partícula em relação ao sistema estacionário da Terra. A velocidade do móvel é w. A fórmula derivada por Kopot (2014d) é a seguinte:

$$(7)\ W = \frac{w+v}{1+\frac{wv}{c^2}}$$

O que dá a velocidade da partícula em relação ao sistema referencial T. Nota-se que a velocidade aqui possui um significado distinto em relação à transformada de Galileu porque a velocidade possui um limite c. Na física clássica, a velocidade pode ser adicionada indefinidamente, mas, ao longo do tratamento das transformadas de Lorentz, nota-se que a velocidade possui um limite. Será visto como exemplo o acréscimo de duas velocidades correspondentes à velocidade da luz:

$$(8)\ W = \frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

Velocidade, tempo e espaço, portanto, admitem significados distintos em cada uma das teorias e foi visto que os três termos vão se modificando à medida que são introduzidos novos elementos na ciência. A mecânica clássica passa a sofrer uma limitação que somente será transposta com a teoria da relatividade, em que a velocidade da luz se torna um termo central e limitativo na construção de toda a rede de crenças, levando à reinterpretação do termo velocidade, a ponto de uma proposição verdadeira sobre a velocidade numa teoria não o ser na outra teoria.

O exemplo das diferenças das interpretações dos termos está de acordo com o holismo disciplinar de Duhem. Teorias novas são criadas para dar conta dos fenômenos e experiências, evidentemente, mas isso tem consequências semânticas nos termos usados pela ciência, levando a reinterpretação de termos dentro da linguagem e é esse fenômeno que sustenta a tese do holismo (COLYVAN, 2001, p. 30). Nesse exemplo, apesar de não se levar em conta nenhuma ruptura com sentenças que são consideradas analíticas vindas da matemática ou da lógica, ele mostra que a alteração de significado dentro de uma mudança teórica leva a reinterpretação de termos muito simples para a ciência. O holismo disciplinar de Duhem não atinge a matemática, que é vista como um instrumento ou estrutura para ser usado nas teorias físicas.

> Com esses materiais, a teoria constrói uma estrutura lógica; desenhar o plano dessa estrutura é então limitar-se escrupulosamente com respeito às leis que essa lógica impõe a todo o raciocínio dedutivo e as leis que a álgebra prescreve para qualquer operação matemática. (DUHEM, 1982, p. 205, tradução nossa)[46]

Em Duhem, a matemática é livre em sua construção em relação à física. Em física, os valores vindos das deduções matemáticas precisam ser interpretados e essas interpretações estabelecem limites circunscritos aos fenômenos e aos resultados. Suponha que se tem uma função matemática que é usada para descrever um evento em termodinâmica em que a escala de um termômetro é feita em Kelvin, como a equação geral dos gases:

$$(9)\ \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

A equação permite calcular o valor da temperatura a partir da mudança das condições de volume, pressão e temperatua. Matematicamente, nada impediria que se substitua qualquer

[46] Texto traduzido: With these materials theory builds a logical structure; in drawing the plan of this structure it is hence bound to respect scrupulously the laws that logic imposes on all deductive reasoning and the rules that algebra prescribes for any mathematical operation. (DUHEM, 1982, p. 205)

uma das variáveis referentes à temperatura por um valor negativo e se chegue a um valor matemático possível. No entanto, se a temperatura do sistema é medida em escala absoluta Kelvin, a temperatura nunca atingirá um valor negativo. Essa limitação de valor é introduzida circunstancialmente. Matematicamente, essa limitação nunca seria introduzida a não ser que fosse uma característica do comportamento da própria função. Ajustes entre uma estrutura matemática e a adequação das circustâncias físicas se estabelecem pragmaticamente independentemente da matemática.

> Por requerer que operações matemáticas [...] devam sempre ter um sentido físico, nós impomos obstáculos injustificáveis diante do matemático e mutilamos o seu progresso. G. Robin chega a questionar o uso do cálculo diferencial; se o Professor Robin está decidido em constantemente e escrupulosamente satisfazer seu requerimento, ele poderia praticamente estar incapaz de desenvolver qualquer cálculo; a dedução teórica poderia ser parada em seu caminho logo no início. Uma ideia mais acurada do método da física e uma linha mais exata de demarcação entre as proposições que têm de se submeter ao teste factual e aquelas que estão livres disso, deveria dar de volta ao matemático toda a sua liberdade e permiti-lo usar os recursos da álgebra para o maior desenvolvimento de teorias físicas. (DUHEM, 1982, p. 208, tradução nossa)[47]

O holismo de Duhem, ao contrário do holismo confirmativo de Quine e Putnam, não atinge a matemática e a lógica, pois os aspectos de desenvolvimento da matemática são distintos do desenvolvimento da física. Uma teoria matemática não se desenvolve pela confirmação ou refutação de fatos vindos da experiência, apesar de o físico sempre usar das relações estruturais estabelecidas dentro das teorias matemáticas. O papel da matemática perante a física é somente estabelecer relações dedutivas e por isso é natural o físico pensar a matemática como um conjunto de deduções. Há deduções matemáticas que podem permanecer eternamente sem uso na física e isso não é um problema para o holismo disciplinar de Duhem. É papel do físico adaptar a matemática à física e não do matemático limitar-se à física. Essa constatação será importante e será tratado esse tema no próximo capítulo.

---

[47] Texto traduzido: By requiring that mathematical operations by which postulates produce their consequences shall always have a physical meaning, we set unjustifiable obstacles before the mathematician and cripple his progress. G. Robin goes so far as to question the use of the differential calculus; if Professor Robin is intent on constantly and scrupulously satisfying this requirement, he would practically be unable to develop any calculation; theoretical deduction would be stopped in its tracks form the start. A more accurate idea of the method of physics and a more exact line of demarcation between the propositions which have to submit to factual test and those which are free to dispense with it would give back to the mathematician all his freedom and permit him to use all the resources of algebra for the greatest development of physical theories. (DUHEM, 1982, p. 208)

2.2.2 Uma interpretação mais radical do holismo

Uma interpretação mais radical do holismo pode ser feita ao relacionar o Princípio da Incerteza de Heisenberg e a possibilidade de uma lógica não-clássica introduzida tanto para ajustar o *framework* lógico à complexidade de uma teoria física quanto ao compromisso ontológico com a indeterminação[48]. A tese da indeterminação afirma que é impossível determinar ao mesmo tempo o momento linear e a posição de um elétron. As medidas podem ser feitas, mas não simultaneamente.

Para uma compreensão do contexto da introdução da tese da indeterminação, vejamos um rápido resumo das descobertas da Física sobre a física de partículas[49]. As transformadas de Lorentz emergem no contexto em que a grande preocupação na Física era a interação entre a radiação eletromagnética da luz e todo tipo de matéria. A radiação especialmente constatada nos elétrons é um fato que merecia atenção, pois a interação é maior quanto menor a partícula. Hertz, no final do século XIX, descobriu que a luz ultravioleta poderia facilitar a descarga entre eletrodos. Einstein explicou esse fenômeno ao propor que a energia luminosa é quantizada em pequenos pacotes chamados fótons. Ao entrar em contato com um elétron, esse fóton é completamente absorvido e a energia recebida altera o movimento do elétron aumentando o seu momento linear.

Essa teoria corpuscular foi confirmada ao mesmo tempo que se confirmou o comportamento ondulatório das radiações eletromagnéticas. A teoria ondulatória explica os fenômenos de difração e interferência como o do experimento das duas fendas e a teoria corpuscular explica o fenômeno fotoelétrico de Hertz. Louis de Broglie propôs relacionar os aspectos ondulatórios e os corpusculares: um fóton possui uma onda luminosa relacionada a sua energia (seu movimento) assim como um elétron tem seu movimento relacionado a um comprimento de onda. O comprimento de onda λ, a massa *m* e a velocidade ν da partícula então são relacionadas da seguinte maneira, onde P é o momento linear (ALMEIDA; SANTOS, 2001):

$$(10)\ \lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m\nu}$$

[48] A justificação para a adaptação teórica perante a complexidade e o compromisso ontológico com um fenômeno da natureza será explorada abaixo, na tese da indispensabilidade e seu papel no holismo.

[49] Para um melhor entendimento sobre o período, conferir (ALMEIDA; SANTOS, 2001)

De onde tem-se então o momento linear:

$$(11)\ P = \frac{h}{\lambda}$$

Com essa fórmula em mente, supondo que se deseje medir a posição de um elétron com um microscópio potente, conforme é descrito por Kopot (2014e). Para isso, é preciso usar um microscópio que emite um feixe de luz em direção a esse elétron que em seguida é direcionado a um mecanismo que detecta as alterações nesse feixe. As alterações observadas nesse feixe de luz são úteis para interpretar as medidas a serem feitas nesse elétron. Para captar o comportamento dos elétrons, o comprimento de onda dessa luz deve ser do mesmo tamanho que o elétron, ou seja, um comprimento de ondas bem pequeno.

Considerando as fórmulas acima, à medida que o comprimento de onda da luz diminui, a energia do fóton aumenta. Quando esse feixe de luz interage com o elétron, o que se tem é um fóton com um momento P colidindo com o elétron. Nessa colisão, a energia do momento é transferida para o elétron que, ao absorver essa energia, muda as características do seu movimento. Mas, como se está falando de comprimentos de ondas muito curtos, mais energia possui o momento do fóton e, consequentemente, na interação, mais energia é transferida para o elétron.

Ao se saber a posição exata de um elétron, a velocidade será desconhecida, pois após o evento dessa medição, o elétron receberá uma carga de energia que alterará seu movimento, sem a possibilidade de saber a sua posição futura. No entanto, ao saber exatamente a velocidade com que o elétron se movimenta, não é possível saber a posição exata do elétron no futuro, pois ao realizar a medição da posição, o fóton irá transferir uma quantidade muito grande de energia para o elétron. Considere (Δx) a mudança da posição do elétron ao longo do eixo x do átomo e (ΔP) a mudança do momento do elétron ao longo desse eixo x, esse princípio de incerteza pode ser expresso pela seguinte fórmula:

$$(12)\quad (\Delta x)(\Delta Px) \geq \hbar$$

Como $\hbar$ é a constante de Planck, se Δx diminui, o momento ΔPx aumenta consideravelmente. Esse fenômeno da indeterminação pode acarretar em uma mudança drástica dentro de leis consideradas muito elementares, caso se queira estabelecer uma interpretação científica de justificação das mudanças das leis lógicas. Supondo que os que sustentam um estatuto especial para verdades da lógica não admitem que as teorias físicas podem levar a uma reinterpretação dos seus termos. Por outro lado, num holismo mais radical, mudanças da lógica podem ser justificadas por meio de adequações às teorias físicas. Vejamos um problema desses que vem da lógica quântica nas tão discutidas leis do terceiro excluído e distribuição da disjunção. A seguinte equivalência que expressa a distribuição da disjunção com o terceiro excluído:

$$p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

Segundo a mecânica quântica e o princípio de Heisenberg, a velocidade de partículas subatômicas é indeterminada quando observada. Como há fatos com valor de verdade indeterminado nessa teoria, convém então introduzir uma lógica em que o valor de verdade das sentenças seja indeterminado, ou seja, uma lógica não clássica que dê conta da complexidade da teoria quântica e que, portanto, está relacionada ontologicamente com a teoria. Uma lógica desse tipo é a lógica trivalente de Kleene (1938), que Bergmann (2008) denomina lógica K_3 ou lógica forte de Kleene. Nessa lógica, os três valores de verdade são V, verdadeiro, F, falso e I, indeterminado. A interpretação para a negação "¬", conjunção "∧", disjunção "∨", implicação "→" e bicondicional "↔" é a seguinte:

Tabela 1 - Interpretação dos operadores lógicos na Lógica K_3

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
V	I	I	V	I	I
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V
F	I	F	I	V	I
I	V	I	V	V	I
I	F	F	I	I	I
I	I	I	I	I	I

p	$\neg p$
V	F
F	V
I	I

Fonte: Kleene (1938, p. 153)

Sendo assim, tome o segundo conjunto que aparece na primeira parte da equivalência $(q \vee \neg q)$ e admita que cada uma dessas sentenças exibe a possível velocidade de uma partícula.

Ora, a velocidade da partícula é indeterminada, portanto, o conjunto como um todo é indeterminado, se for interpretada a negação de uma sentença indeterminada como também possuindo o valor de verdade indeterminado, pois nenhuma das sentenças é capaz de exibir exatamente a velocidade da partícula. Ao adicionar p, não importando o valor de verdade de p, a sentença $p \wedge (q \vee \neg q)$ é uma sentença indeterminada. Supondo agora que se quer estabelecer o valor de verdade para a equivalência:

$$p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

A sentença acima possui valor de verdade indeterminado, pois basta um dos lados da equivalência ser indeterminado que toda a sentença se torna indeterminada. Como dito acima, esse caso mostra a necessidade de revisão das leis lógicas como o terceiro excluído e a lei da distribuição. Isso também mostra que no holismo, o caráter analítico das sentenças pode ser questionado (PUTNAM, 1983, p. 96). No holismo, não há leis lógicas como ideias claras e distintas ou a priori como no caso dos positivistas lógicos em que as sentenças são verdadeiras pelos seus significados apenas. Leis da física, assim como da lógica, não são imunes à revisão. Diz Quine no Two Dogmas: "Revisão, inclusive da lei do terceiro excluído, foi proposta como um meio de satisfazer a mecânica quântica." (QUINE, 1951, p. 40, tradução nossa)[50].

Para a tese do Holismo, não há separação nítida entre os vários tipos de teorias científicas, de modo a eliminar a separação entre ciências teóricas e ciências empíricas. Não existe, aqui, uma separação nítida entre Matemática e Lógica de um lado e as demais ciências, ditas empíricas, do outro. No holismo essas teorias têm conteúdo empírico. Não há, nesse caso, uma separação entre matemática e o restante das ciências, porque tudo está embebido na ciência como um todo e as teorias estão interligadas por uma ampla rede de implicações.

No holismo radical, que será detalhado abaixo como holismo confirmativo, toda a ciência possui um único modo de significância, que é o teste empírico. Com essa unidade de significado, a diferença entre as sentenças analíticas – sentenças justificadas como verdadeiras de acordo com a linguagem ou por não terem nenhuma ligação com a experiência – ou as sintéticas, verdadeiras pela experiência, deve ser abandonada porque essa distinção não é capaz de sustentar os padrões vindos dos testes.

---

[50] Texto traduzido: Revision even of the logical law of the excluded middle has been proposed as a means of simplifying quantum mechanics. (QUINE, 1951, p. 40).

O que Quine considera é que a linguagem usada na ciência, para compor uma unidade de significado, possui ambos os componentes teóricos e empíricos. Isso acontece principalmente para criticar o positivismo lógico que sustenta que as sentenças analíticas *a priori* são verdadeiras para qualquer experiência possível, o que retira então de sua semântica questões ligadas à atribuição de significado pela experiência. Sentenças analíticas *a priori* são verdadeiras nesse caso somente em função do seu significado atribuído numa linguagem *a priori*. Para Carnap, as sentenças L-determinadas possuem como definidoras de seus significados somente a linguagem e os conceitos nelas envolvidos sem extrapolar para a experiência.

Uma aplicação de uma teoria física exige a aplicação não somente de teorias físicas, mas também de teorias matemáticas ou lógicas. A aplicação das teorias científicas exige o comprometimento com a existência de objetos físicos abstratos, úteis para a teoria[51]. O mesmo acontece com a matemática, indispensável para as teorias científicas, o conhecedor também se vê assumindo a existência de objetos matemáticos abstratos como números, conjuntos, funções, etc. que são úteis somente nas teorias científicas, mas não são objetos completamente desligados das ciências empíricas. A sua introdução está determinada por uma teia de crenças que perpassa toda a ciência e define o holismo que é a relação direta ou indireta com as teorias testáveis. (QUINE, 1979). Toda essa concepção holística de linguagem, ontologia e aplicação da ciência possui o seu contrário no estruturalismo, que examinaremos no terceiro capítulo.

2.3 HOLISMO SEMÂNTICO E HOLISMO CONFIRMATIVO

O holismo pode ser entendido ou como uma única tese como em Quine ou em duas teses a partir de Colyvan (2001). Quando visto em duas teses, pode ser dividido em holismo semântico e holismo confirmativo. O holismo semântico pode ser expresso numa única frase: “A unidade de significância empírica é o todo da ciência” (QUINE, 1951, p. 39, tradução nossa)[52]. Ora, para o bom funcionamento da ciência, a linguagem como um todo age de forma a manter o padrão do significado dos termos. O que Quine chama de holismo moderado, esse holismo semântico, aparece também em Quine (1981):

---

[51] A aceitação necessária de objetos matemáticos na elaboração de teorias científicas é o argumento de indispensabilidade e será tratado mais abaixo nesse capítulo. Sua ligação com o holismo consiste em aceitar os objetos matemáticos abstratos que são necessários somente para a elaboração de teorias científicas.
[52] Texto traduzido: “The unit of empirical significance is the whole of science.” (QUINE ,1951, p. 39)

> Também seria errado supor que *nenhuma* única sentença de uma teoria tem seu significado empírico separável. Sentenças teóricas classificam as frases de observação; observacionalidade é uma questão de grau, nomeadamente, a gradação de aceitação espontânea que a sentença deveria comandar a partir das testemunhas presentes. E embora se possa argumentar que mesmo uma sentença de observação pode ser retratada à luz do restante da teoria, esse é um caso extremo e felizmente não característico. (QUINE, 1981, p. 71, tradução nossa)[53]

Por outro lado, a tese do holismo confirmativo, o holismo mais radical que aparece no em Quine (1992), é a seguinte:

> [A] falsidade da observação categorial não refuta conclusivamente a hipótese. O que ela refuta é a conjunção de sentenças que foi necessária para implicar a observação categorial. A fim de retratar essa conjunção nós não temos de retratamos a hipótese em questão; em vez disso, nós poderíamos retratar algumas outras sentenças da conjunção. Esse é o importante *insight* chamado holismo. (QUINE, 1992, p. 13-14, tradução nossa, colchete nosso)[54]

A não aceitação da divisão entre verdades analíticas e verdades sintéticas é uma consequência do holismo semântico. Nesse holismo, há a unidade de significado das sentenças usadas na ciência sem pressupor nenhuma distinção entre sentenças teóricas ou empíricas. Como não há essa divisão entre linguagem que possui o sentido das sentenças determinado linguisticamente e outra linguagem em que o sentido das sentenças é factual, não há a divisão entre verdades puramente teóricas e verdades empíricas. Daí a não aceitação da divisão entre verdades analíticas e sintéticas. Já a aceitação de que a teoria como um todo é que é verificada no teste empírico, é o que será chamado de holismo confirmativo. A passagem abaixo resume bem a definição de holismo confirmativo:

> Holismo confirmativo é a visão de que as teorias são confirmadas ou refutadas como um todo. Então, se uma teoria é *confirmada* por meios empíricos, o *todo* da teoria é confirmado. Em particular, qualquer matemática que é usada na teoria é também confirmada. (COLYVAN, 2001, p. 13, tradução nossa)[55]

---

[53]Texto traduzido: It would also be wrong to suppose that *no* single sentence of a theory has its separable empirical meaning. Theoretical sentences grade off to observation sentences; observationality is a matter of degree, namely, the degree of spontaneous agreement that the sentence would command from present witnesses. And while it may be argued that even an observation sentence may be recanted in the light of the rest of one's theory, this is an extreme case and happily not characteristic. (QUINE, 1981 p. 71)

[54] Texto traduzido: [T]he falsity of the observation categorical does not conclusively refute the hypothesis. What it refutes is the conjunction of sentences that was needed to imply the observation categorical. In order to retract that conjunction we do not have to retract the hypothesis in question; we could retract some other sentence of the conjunction instead. This is the important insight called holism. (QUINE ,1992, p. 13. colchete nosso)

[55] Texto traduzido: Confirmational holism is the view that theories are confirmed or refuted as wholes. So, if a theory is *confirmed* by empirical findings, the *whole* theory is confirmed. In particular, whatever mathematics is made use of in the theory is also confirmed. (COLYVAN, 2001, p. 13-14)

O holismo confirmativo procede a partir da prática de aplicação da ciência. A construção de uma explicação necessita da presença de um bloco muito grande de várias disciplinas distintas para a elaboração de uma proposição, obviamente posta na conclusão de uma condicional. Testada a proposição, o antecedente do condicional pode sofrer modificações em caso de refutação, não importando qual ramo da ciência usado na proposição será modificado.

Para mostrar que a total separação de verdades analíticas *a priori* do restante da ciência não pode ser sustentada, Quine (2003) admitirá que todas as verdades da lógica podem ser revistas pela experiência e, além disso, as verdades mais importantes da matemática e da lógica não podem ser consideradas pura convenção, mas devem ser consideradas importantes para a aplicação das ciências empíricas, de modo a se pensar que o que força o desenvolvimento da matemática é o próprio desenvolvimento das ciências empíricas. Se as verdades da lógica e da matemática podem ser revistas a partir da refutação de um teste empírico, porque a ciência como um todo não pode ser vista como compartimentada em campos distintos em sua aplicação, então não há a necessidade de divisão entre verdades analíticas *a priori* e sintéticas.

Não existe aqui a ênfase na divisão entre os departamentos nas ciências. Uma aplicação de uma teoria científica envolve a matemática e a lógica e quando isso ocorre não há como separar as teorias que estão sendo aplicadas. Todos os componentes da teoria estão suscetíveis às mudanças vindas dos testes empíricos, de modo a levar Quine a manter que a experiência é útil para a introdução de mudanças em todas as teorias científicas. Não existe um *a priori* absoluto e nem alguma sentença verdadeira analítica por convenção que não possa ser revista, apesar de essa ser a história contada pela teoria do conhecimento tradicional: verdades das ciências naturais possuem um processo de justificação pela experiência enquanto que a justificação das verdades da matemática e da lógica não precisam ser justificadas pela experiência. Mas isso não significa que a matemática e a lógica não possam ser modificadas assim como as ciências empíricas, por conta de uma adaptação ao teste empírico.

Em suma, no holismo semântico, as verdades lógicas não devem ser consideradas verdades aparte das outras ciências. Isso acontece porque, segundo Quine, as verdades da lógica são uma construção que inclui toda a ciência (QUINE, 1986). O mesmo raciocínio vale para a matemática em que o seu desenvolvimento anda de mãos dadas com o desenvolvimento de toda a ciência. Não existe uma separação entre verdades da lógica, ciência e da matemática.

> Quaisquer que sejam os links remotos que esse componente tenha com a observação, através do funcionamento como parte de um contexto da física teórica, eles são vistos como evidência empírica somente para a parte física reconhecida do contexto. O erro vem ao responder excessivamente ao limite terminológico entre as ciências. Em vez de ver evidência empírica como evidência para todo o sistema científico interligado,

> incluindo a matemática e a lógica como partes integrais, as pessoas pensam na evidência como infiltrando o sistema até à interface entre o que eles chamam de física teórica e o que eles chamam de matemática. (QUINE, 1986, p. 100, tradução nossa)[56]

Por outro lado, para resumir o Holismo Confirmativo, todas as ciências, da história à matemática, possuem alguma relação com o confrontar dos fatos. Qualquer sentença da ciência pode ser modificada a partir da refutação de algum fato. A ciência é como um campo de força em que o fato define as mudanças que vão ocorrer no interior desse campo. Todas as sentenças da ciência podem ser modificadas por estarem numa grande teia de crenças. As sentenças consideradas analíticas podem ser confrontadas com os fatos porque não há a necessidade de separar sentenças que são analíticas de sentenças sintéticas com a alegação de que as sentenças analíticas não encontrarão a possibilidade de serem modificadas a partir da refutação de um teste empírico.

Fica claro, então, que o holismo confirmativo faz parte da não divisão de sentenças em analíticas e sintéticas, ou seja, mais uma vez, qualquer proposição pode ser modificada a partir do teste empírico. Não há a necessidade de separação entre as sentenças: "[...] nenhuma proposição está imune à revisão*."* (QUINE, 1951, p. 40, tradução nossa)[57]. Nem a matemática escapa do holismo confirmativo. Quine (1951) diz que a matemática, com a sua ontologia, assim como a ontologia da física, é como mitos úteis para o entendimento do que acontece na experiência sensível. Por isso, os objetos não podem ser vistos como objetos vindos de situações teóricas tão distintas como o que é concebido na divisão do conhecimento entre analítico e sintético: "A ciência total, matemática, natural e humana, é similarmente mas não mais extremamente evidenciada pela experiência" (QUINE, 1951, p. 42, tradução nossa)[58].

Colyvan e Quine sustentam teses sobre o holismo idênticas do ponto de vista da ontologia, das consequências e alcance radical das teses. A diferença é que em Colyvan, a divisão entre holismo semântico e holismo confirmativo é posta, o que em Quine aparece como sendo a mesma tese do holismo, o que não impede de também dividir a tese do holismo de Quine nessa dualidade, o que detalha melhor o holismo.

---

[56] Texto traduzido: Whatever remote links this component had with observation, through functioning as part of a context of theoretical physics, are seen as empirical evidence only for the recognized physical part of the context. The mistake comes of responding excessively to the terminological boundaries between sciences. Instead of viewing empirical evidence as evidence for the whole interlocked scientific system, including mathematics and logic as integral parts, people think of the evidence as seeping through the system only as far as the interface between what they call theoretical physics and what they call mathematics. (QUINE, 1986, p. 100)
[57] Texto traduzido: "*(...) no statement is immune to revision."* (QUINE, 1951, p. 40)
[58] Texto traduzido: *"Total science, mathematical and natural and human, is similarly but more extremely underdetermined by experience."* (QUINE, 1951, p. 42).

2.3.1 Holismo confirmativo em Putnam

A tese do holismo de Putnam (1983) é um pouco diferente em relação ao termo "analítico", pois a analiticidade continua existindo, mas o *a priori* não. Por isso, Putnam abandona o holismo semântico e mantém o holismo confirmativo. Para Putnam, Quine comete o mesmo erro de Carnap ao confundir *a priori* com a noção de analítico. *A priori* é algo que não veio da experiência. Analítico é algo que é a consequência lógica de um raciocínio. Ao mostrar essa confusão de Quine, Putnam propõe reformular a noção de holismo abolindo a diferença entre *a priori* e *a posteriori*, dizendo não ser possível falar nessa diferenciação.

No entanto, é possível falar que uma sentença é analítica. O argumento de Putnam para mostrar que não existe um *a priori* absoluto nas teorias usa da lógica quântica em que a lei da distribuição e do terceiro excluído, considerados *a priori*, são abolidos por força dos testes coletados em mecânica quântica:

> Proposições analíticas não deveriam ter revisão tão quanto elas são verdades por convenção. Deveriam ser verdades pela linguagem somente. Mas na visão adiantada aqui, não existem verdades por linguagem somente. Elas são verdades analíticas: verdades pela lógica e pela linguagem. Mas verdades analíticas não são irrevisáveis (nenhuma verdade é). Elas são irrevisáveis a não ser que revisássemos a lógica ou a linguagem, o que é uma situação muito diferente. (PUTNAM, 1983, p. 97, tradução nossa)[59]

A manutenção da existência de sentenças analíticas em Putnam indica a existência e permanência da analiticidade por consequência lógica. É uma definição de analiticidade dependente da linguagem, pois depende de uma lógica, e pode mudar assim que se acrescenta outra lógica. Isso faz sentido quando se entende que qualquer teoria científica necessita de mecanismos de dedução e que os resultados dessas deduções são analíticos. Mudando na ciência em questão a lógica subjacente de uma teoria, novas sentenças analíticas podem ser produzidas sem prejuízo para as sentenças analíticas deduzidas a partir de outra lógica nessa ciência. Essas consequências podem ser testadas apesar de serem analíticas, por serem o resultado de uma dedução. A pressão por mudanças dentro da ciência pode fazer aparecer uma nova lógica, mas isso não significa que as verdades vindas de uma outra lógica serão abandonadas.

Há aqui, diferentemente do que é expresso em Quine e Colyvan, a admissão de novas lógicas sem se descartar as anteriores, possibilitando portando a proliferação de vários métodos

---

[59] Texto traduzido: Analytic statements would be as unrevisable as if they were true by convention. It would be as if there were truths by language alone. But on the view advanced here, there are no truths by language alone. There are analytic truths: truths by logic and language. But analytic truths are not unrevisable (no truth is). They are only unrevisable unless we revise the logic or the language, which is a very different matter. (PUTNAM, 1983, p. 97)

de raciocínios ou estruturas. Novas mudanças podem atingir toda a ciência que novamente criará novos mecanismos de decisão, o que mostra que as sentenças na lógica não são *a priori*, mas o processo de criar sentenças analíticas continuará, pois esse é o dever de uma teoria lógica.

2.4 SETE ARGUMENTOS A FAVOR DO HOLISMO

A seguir, serão mostrados sete argumentos a favor do holismo, sendo que quatro deles vêm da busca natural de argumentos para defender o holismo, que é o artigo "Two Dogmas of Empiricism." (QUINE, 1951) e os demais três argumentos são encontrados em Colyvan e Putnam. Quine (1951) possui as seguintes possibilidades de defesa do holismo: (2.4.1) mostrar a circularidade da definição de analiticidade; (2.4.2) um argumento que mostra que as sentenças podem variar seus significados de acordo com a circunstância em que é posta, portanto uma crítica à analiticidade de modo "absoluto"; (2.4.3) a perda de sentido da noção de analiticidade pela possibilidade de uma sentença sempre ser revista pelo teste empírico; e (2.4.4), que é um argumento contra a prevalência da analiticidade *ad hoc*.

Um argumento (2.4.5) a favor do holismo é encontrado em Putnam (1975) relacionando o teorema da incompletude da aritmética e o holismo semântico, pois uma sentença considerada analítica num sentido de ser a consequência lógica em um sistema não é consequência lógica em outro sistema, o que mostra a fragilidade da analiticidade para lidar com essa situação; outro argumento de Putnam (1975) a favor do holismo é o sucesso da matemática na ciência (2.4.6); (2.4.7) está presente em Colyvan (2001), ao mostrar que o aprendizado matemático que vem desde a empiria sugere que a tese de que a matemática é totalmente *a priori* não se sustenta.

2.4.1 Circularidade na definição de Analiticidade

O principal argumento de Quine contra a noção de analiticidade é que há circularidade na definição de analiticidade. Vejamos novamente o que é analiticidade. Carnap entende uma sentença analítica como qualquer sentença que, quando tem a sua verdade justificada, não há nenhum apelo aos dados da experiência, apenas há o apelo à linguagem. Para mostrar que uma sentença é analítica, alguém deve mostrar que essa sentença é equivalente a outra sentença analítica da lógica, matemática ou qualquer disciplina que tenha suas verdades estabelecidas *a priori*. Como toda sentença da lógica é considerada verdadeira, não importa os objetos que caem em suas variáveis, a sentença será analítica se é verdadeira para qualquer experimento, ou seja, a sentença será considerada analítica não importa o que seja confrontado a ela. Como a verdade não é mantida pela experiência, só pode ser mantida por estipulação, ou postulados de significado, e é nesse sentido que a verdade de uma sentença analítica é mantida: somente pelos significados da linguagem. Qualquer verdade lógica em Kant, uma sentença é analítica se a sua negação é uma contradição, é um caso dessa noção de analiticidade.

Supondo que p seja uma sentença considerada analítica, é preciso então criar um conjunto de regras para mostrar que q, uma sentença qualquer que é sinônima de p, também é uma sentença analítica, ao constatar uma equivalência entre p e q. Esse é o caso em que, numa demonstração, é usado um axioma com as substituições adequadas para a demonstração de um teorema. A sentença resultante dessa substituição é dita sinônima da sentença posta como axioma, em alguns casos.

Sentenças analíticas entre si carregam o mesmo significado, o que pode ser expresso em equivalências como $p \leftrightarrow q$. Então, ao se dizer que uma sentença é analítica, o que se faz é uma comparação com essa sentença já convencionada como analítica pela sinonímia. Aqui já se faz necessário introduzir a definição de sinonímia para que a definição de analiticidade seja completa. Sinonímia é uma convenção em que, dadas duas sentenças, se uma for substituída pela outra, o valor de verdade da sentença resultante não muda, ou seja, sinonímia é uma equivalência lógica. A equivalência lógica das duas sentenças é uma sentença analítica, pois se ambas possuem o mesmo valor de verdade, no fundo temos uma equivalência do tipo $p \leftrightarrow p$ mas, o que é a analiticidade? Aqui temos completado o círculo: Primeiro, começa-se definindo analiticidade, depois, define-se sinônimos, mas, como sinônimos resultam numa equivalência lógica verdadeira, também considerada analítica, termina-se sem definir analiticidade, pois a regra universal de qualquer definição é que não caia em nenhum círculo em que o termo a ser definido aparece no *definiens* e no *definiendum.*

Essa circularidade pode ser contornada se a analiticidade fosse posta em relação à teoria. Nesse caso, uma sentença é analítica numa teoria específica, mas não é analítica em outra teoria, de acordo com a lista de proposições dadas para a consideração de uma sentença como analítica na teoria. Isso impede a existência de uma sentença analítica de modo "absoluto", ou seja, para qualquer teoria. Se esse caminho for seguido, as regras passam a ser dependentes da teoria em questão, o que enfraqueceria o caráter "absoluto" dessas definições, mas assim cai-se na situação de avaliar as sentenças em relação ao seu contexto.

2.4.2 Analiticidade e contexto

Vejamos o emblemático exemplo de suposta analiticidade posto por Quine (1951): “No bachelor is marrided”. Essa sentença, num primeiro momento, parece óbvia em inglês, pois ela significa em português que “Nenhum solteiro é casado”. O termo “Solteiro” pode ser substituído a qualquer momento pelo termo “não casado”, o que torna a sentença analítica, pois decorre de uma igualdade de termos definidos previamente. Notado que um termo substitui o outro, a sentença resultante na substituição terá a forma lógica de uma tautologia, ou seja, uma sentença analítica como “Nenhum não-casado é casado”, comprovando a analiticidade da sentença ao notar que a sentença é sinônima de uma forma lógica verdadeira ou analítica[60].

“No bachelor is marrided” é o tipo de sentença que deixaria de ser analítica se o significado de “bachelor” for modificado para algo completamente diferente de “unmarried man”, algo como, por exemplo, um título acadêmico, pois “bachelor” em inglês também significa “bacharel”. Então, “John is Bachelor” ou “John é bacharel” e “John is married”, “John é casado”, podem não ser sentenças contraditórias. Nesse sentido, a sentença deve deixar de ser analítica quando o significado a ser anexado aos termos dependerem do contexto em que a sentença se encontra. O que acontece nesse caso é que a analiticidade não pode ser garantida *ad eternum* para uma sentença, pois os sinônimos dos termos podem variar constantemente, conforme visto acima no exemplo do termo “velocidade” numa perspectiva de evolução das teorias físicas.

Vejamos até onde a definição de “bachelor” pode levar. Tautologias são essenciais para mostrar que “No bachelor is married” é uma sentença analítica e nesse caso é “No unmarried man is married”. Agora, pegando como exemplo a seguinte sentença “John is a bachelor” e “John is married.” Ora, pode-se formar a seguinte sentença analítica então: “No bachelor is marrided, then John is a bachelor and John is married.” Ou ainda formar um argumento válido utilizando as mesmas sentenças. Mas, uma vez que o consequente da sentença dada é falso e admitido que a primeira sentença é uma sentença verdadeira e analítica, a sentença como um todo passa a ser falsa segundo a interpretação do condicional, pois o fato de John ser casado

---

[60] Sentenças óbvias podem possuir uma característica de analiticidade ligada à noção de que uma negação dessa sentença levaria a uma contradição, como visto em Kant. Negar uma tautologia como “Nenhum não-casado é casado” produz realmente uma contradição e nesse caso a contradição seria “*a* é não-casado e *a* é casado”. Sendo assim, essa sentença é classificada como analítica em Kant, mesmo que para Carnap seja apenas um postulado de significado. Em Bolzano, esse tipo de analiticidade também é aceito pela sua obviedade, mas pode ser reconhecida se demonstrada com o auxílio de argumentos trocando os sinônimos que ali ocorrem anteriormente apresentados por meio de definições, se a analiticidade não for aceita sem uma prova, mostrando que a noção de analiticidade em Bolzano pode ser incorporada à noção de analiticidade posta por Quine.

não influencia no fato de John ser bacharel. Sendo as sentenças desconexas na formação de seus significados, e uma vez que se aparecerem juntas num argumento, podem levar à contradição. Sentenças que demandam uma demonstração com a ajuda de definições que utilizam termos não lógicos não são consideradas um ponto firme para a construção da noção de analiticidade (QUINE, 2003, p. 24).

Esse problema do contexto desaparece quando as sentenças são bem entendidas pelos falantes da linguagem. Posto que uma sentença é considerada analítica de acordo com as regras da linguagem, a variação de significado pelo contexto seria perceptível caso todos os falantes possuíssem informação suficiente para isso. Juntando a isso a noção de que a analiticidade de uma sentença depende da teoria em que a sentença é expressa, a variação contextual não seria um problema para a analiticidade. Assim, poder-se-ia falar numa analiticidade contextual sem nenhum problema.

2.4.3 Revisão das sentenças consideradas analíticas

A verdade das sentenças depende de aspectos linguísticos e extralinguísticos para Quine, já que pelo seu ponto de vista é impossível fazer essa distinção, conforme visto. Esses aspectos extralinguísticos são factuais, portanto, o limite entre sentenças analíticas e sintéticas não pode ser estabelecido por meio de regras puramente formais. Parte da verdade de uma sentença se relaciona com o modo com que ela é confirmada ou refutada. Uma sentença até então dita analítica é um caso limite em que ela é considerada verdadeira, não importando o estado de coisas, mas, mesmo assim, seu status de sentença verdadeira depende do método de confirmação e refutação de sentenças da linguagem, mesmo que de modo indireto e remoto.

Sentenças são sinônimas se elas possuem o mesmo modo de confirmação e refutação. Sentenças ditas analíticas são sinônimas às sentenças que remotamente são confirmadas ou refutadas remotamente dentro da teia de crenças que compõem a ciência. O grande problema é a relação entre a proposição e a experiência que contribui ou não para a sua confirmação/refutação. Ora, se todas as sentenças estão sujeitas ao método de confirmação e refutação, não importando o quão teorética pode ser a sentença, então não existe nenhuma razão para se considerar a divisão entre sentenças analíticas e sintéticas. Com isso em mente, a saída de Quine é admitir que qualquer sentença possui um conteúdo empírico que pode ser expresso direta ou indiretamente, inclusive as sentenças que são consideradas analíticas ou *a priori* que mantém a estrutura de crenças em qualquer sentença. Não é uma linguagem específica que vai definir o que é a analiticidade, pois a verdade das sentenças depende também de fatores extralinguísticos:

> Então a tentação é supor em geral que a verdade de uma proposição é algo como analisável num componente linguístico e num componente factual. Dada essa suposição, parece razoável que em algumas proposições o componente factual deveria ser nulo; e essas são proposições analíticas. Mas, por toda sua razoabilidade *a priori*, um limite entre proposições analíticas e sintéticas simplesmente não pode ser traçado. O fato de haver uma tal distinção a ser feita ao todo é um dogma não empírico do empirismo, um artigo de fé metafísico. (QUINE, 1951, p. 34, tradução nossa)[61]

Todas as sentenças podem ser testadas de modo indireto num teste empírico e não uma proposição por vez, nem numa separação das proposições entre empíricas e teóricas, mas envolvendo uma grande teia de crenças, tornando todos os componentes linguísticos e factuais úteis para a principal tarefa da ciência. A justificação disso é que a separação sentença por sentença em analíticas e sintéticas não é notada no momento da aplicação das teorias na experiência, onde toda a teoria se fecha em bloco. Isso que ocorre com toda a ciência é chamado de holismo confirmativo, porque qualquer campo do conhecimento se relaciona de alguma maneira com a experiência[62].

Refutar a analiticidade leva a uma crítica ao verificacionismo. O que não deixa de ser também um argumento a favor do holismo. No círculo de Viena, proposições com sentido são redutíveis a proposições sobre a experiência sensorial. Nessa visão, cada proposição individualmente é confirmada ou não pela experiência. Verdades analíticas são aquelas como alcance universal de experiências confirmadas, não importa que esteja sendo confirmado. Ora, como não há uma divisão entre tipos se sentença, todas as sentenças da ciência podem ser submetidas à confirmação/refutação. Assim, um argumento para a defesa do holismo semântico leva à defesa do holismo confirmativo.

---

[61] Texto traduzido: Hence the temptation to suppose in general that the truth of a statement is somehow analyzable into a linguistic component and a factual component. Given this supposition, it next seems reasonable that in some statements the factual component should be null; and these are the analytic statements. But, for all its a priori reasonableness, a boundary between analytic and synthetic statements simply has not been drawn. That there is such a distinction to be drawn at all is an unempirical dogma of empiricists, a metaphysical article of faith. (QUINE, 1951, p. 34)

[62] A totalidade de nosso chamado conhecimento ou crenças, desde os assuntos mais triviais da geografia e história às leis mais profundas da física atômica ou mesmo da matemática pura e da lógica, é uma tessitura feita pelo homem que atinge a experiência somente nas extremidades. Ou, para mudar de ilustração, a ciência total é como um campo de força em que as condições limites são a experiência. Um conflito com a experiência nas zonas periféricas ocasiona reajustes no interior do campo. (QUINE, 1951, p. 39, tradução nossa). Texto traduzido: The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics or even of pure mathematics and logic, is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges. Or, to change the figure, total science is like a field of force whose boundary conditions are experience. A conflict with experience at the periphery occasions readjustments in the interior of the field. (QUINE, 1951, p. 39)

2.4.4 Mudanças *ad hoc* para a prevalência da analiticidade

Dentro do holismo confirmativo, nenhuma sentença está livre da revisão. Diante de uma possível mudança teórica a ser feita – em que há uma tentativa de salvar parte da teoria da revisão – o holismo aparece para mostrar que essa tentativa de sustentação do *a priori* é *ad hoc*. Qualquer sentença pode ser mantida como verdadeira perante algumas mudanças dentro do sistema em que a sentença se encontra como resposta a uma experiência recalcitrante. Mudar a teoria diante de uma experiência recalcitrante não muda a situação do holismo, mesmo que a sentença que está sendo confrontada tenha seu significado mantido.

> Qualquer proposição pode ser mantida verdadeira dessa maneira, se fizermos ajustes drásticos o suficiente em outro lugar do sistema. Mesmo uma proposição muito perto dos limites pode ser sustentada como verdadeira em face da experiência recalcitrante alegando alucinação ou alterando certas proposições chamadas leis lógicas. (QUINE, 1951, p. 40, tradução nossa)[63]

Esse tipo de argumento é válido também para Carnap. Em Carnap, há a tentativa de manutenção de um conjunto de definições ou convenções de leis lógicas consideradas válidas para qualquer tipo de experiência e imune a qualquer tipo de revisão. Verdades lógicas nesse sentido não podem ser mantidas imunes, mesmo que convencionadas como verdades *a priori*. Na aplicação da ciência, não importa o que é considerado verdade lógica *a priori* ou não. Um corpo teórico posto à prova não salva nenhum de seus componentes ali confrontados, nem mesmo as definições postas sob o rótulo de *a priori*.

2.4.5 Analiticidade perante a incompletude

Um argumento a favor do holismo desenvolvido por Putnam vem da incompletude das teorias matemáticas formalizadas. Gödel, em 1931, mostrou que em sistemas formais poderosos o bastante para o desenvolvimento da aritmética como Principia Mathematica ou o de Zermelo é possível construir uma sentença *G* indecidível pelos axiomas e regras de inferência da teoria. Uma teoria matemática formalizada através da lógica como a aritmética ou a teoria de conjuntos possui sentenças indecidíveis, mas a sentença *G*, possível de ser construída em qualquer um desses sistemas matemáticos formais, é uma generalização da situação em que existem

[63] Texto traduzido: Any statement can be held true come what may, if we make drastic enough adjustments elsewhere in the system. Even a statement very close to the periphery can be held true in the face of recalcitrant experience by pleading hallucination or by amending certain statements of the kind called logical laws. (QUINE, 1951, p. 40)

sentenças que não podem ser decididas nesses sistemas. Essas sentenças podem ser acrescentadas aos sistemas como verdadeiras ou como uma negação das mesmas, sem a perda da consistência do sistema. No caso da aritmética, o exemplo emblemático é a conjectura Goldbach.

No entanto, filósofos como Frege ou Carnap mantêm que a aritmética ou outras teorias matemáticas são um conjunto de sentenças analíticas derivadas de outras sentenças previamente aceitas ou convencionadas como analíticas. Assim, a matemática é uma ciência cujas proposições são analíticas *a priori*. Como existem proposições que são indecidíveis em determinados sistemas axiomáticos, elas são aceitas simplesmente porque se verificadas são verdadeiras (PUTNAM, 1975). Esse tipo de aceitação não pode ser justificado por uma demonstração, então a sentença não é analítica no sentido de ser demonstrável mas pode ser verificada "empiricamente". Putnam sugere a partir de fatos como esse que existem verdades da matemática que não são analíticas, pois não estão contidas nesse conjunto de postulados de significado e nem são demonstradas. Vejamos:

> Em particular, então, mesmo que se fosse o caso que todos os axiomas que usamos na matemática fossem 'analíticos', como alguns filósofos têm argumentado, e que a dedução preserve a 'analiticidade' (que nunca é mostrada), não ia seguir a ideia que todas as verdades da matemática são analíticas. De fato, se sentenças analíticas são todas consequências da mesma lista finita de Postulados de Significado (no sentido de 'consequências' na lógica de primeira ordem), então é uma consequência do teorema citado a pouco que deve haver verdades sintéticas na matemática. Pior, é uma consequência dessa visão que todas as proposições que podemos demonstrar são analíticas; que, apesar de haver verdades sintéticas em matemática, nossa recusa de usar métodos quase-empíricos nos atrapalha na descoberta de pelo menos uma delas [sentenças sintéticas]. Uma vez que filósofos que são a favor desse jargão geralmente mantêm que verdades analíticas têm 'nenhum conteúdo' e que verdades sintéticas têm 'conteúdo factual', alguém poderia se perguntar por que esses filósofos não sustentam a ideia que devemos usar métodos quase-empíricos! (PUTNAM, 1975, p. 63-64, tradução nossa, colchete nosso)[64]

O método "quase empírico" é um modo de verificar proposições matemáticas indecidíveis em relação a uma teoria formalizada. Tomemos como exemplo a conjectura de

---

[64] Texto traduzido: In particular, then, even if it were the case that all the axioms we use in mathematics are 'analytic', as some philosophers have claimed, and that deduction preserves ' analyticity' (which is never shown), it would not follow that all truths of mathematics are analytic. Indeed, if the analytic sentences are all consequences of some finite list of Meaning Postulates (in the first order logic sense of 'consequences'), then it is a consequence of the theorem just cited that there must be synthetic truths in mathematics. Worse, it is a consequence of this view that all the statements we can prove are analytic; that, although there are synthetic truths in mathematics, our refusal to use quasi-empirical methods debars us from ever discovering a single one of them. Since philosophers who favor this jargon generally hold that analytic truths have 'no content' and that synthetic truths have 'factual content', one wonders why these philosophers do not insist that we must use quasi-empirical methods! (PUTNAM, 1975, p. 63-64)

Goldbach, que diz que qualquer número par maior que 2 é a soma de dois números primos. Essa sentença é indecidível até o momento, mas ela tem uma característica universal que é válida para qualquer número par maior que 2. O conjunto de números com essa característica é infinito, portanto, essa sentença é uma generalização. Mas, para confirmar essa sentença, é necessário verificar para cada número par maior que 2, se realmente é a soma de dois números primos. Um conjunto de computadores pode verificar essa sentença para um grande número de possibilidades, gerando números inteiros cada vez maiores.

A semelhança entre esse método e a física está na postulação de hipóteses gerais (sentenças indecidíveis que não fazem parte do conjunto dos axiomas convencionados como analíticos) para serem confirmadas mais tarde num “experimento”. Porém, o experimento aqui são os testes em números cada vez maiores. O método quase empírico é diferente de um método demonstrativo, pois as sentenças não podem ser aceitas como analíticas, mas, como possuem um caráter hipotético de aceitação, são sentenças sintéticas que ou necessitam ser verificadas numa sequência de números ou postas como axioma numa teoria, mesmo que não sendo verificadas para todos os números, o que vai de encontro à noção de analiticidade num sentido absoluto. Termina-se aqui mais uma vez numa noção circunstancial de analiticidade, como discutido acima em Putnam: uma teoria específica possui um conjunto de sentenças analíticas em relação à essa teoria. Uma sentença indecidível em relação à essa teoria não pode ser considerada analítica, mas, se for construída uma teoria em que essa sentença é deduzida por um axioma novo, nessa circunstância, a sentença passa a ser analítica. Assim, mais uma vez, pode-se manter a noção de analiticidade, mas será uma noção teórico-dependente.

2.4.6 Analiticidade e o sucesso da matemática perante as teorias físicas

Outro argumento de Putnam para o holismo é a correspondência entre números reais e objetos ou fenômenos físicos que possuem extensão contínua. É um método quase empírico para justificar o sucesso de teorias matemáticas por meio de sua fertilidade para o desenvolvimento de teorias físicas:

> A existência de números reais e a correspondência entre números reais e pontos na linha foram descobertas em parte quase-empiricamente, em parte empiricamente. Este é tanto um exemplo do uso de métodos hipotético-dedutivos como qualquer coisa na física é. O ponto é que a real justificação do cálculo é seu sucesso – seu sucesso em

> matemática, e seu sucesso em ciência física. (PUTNAM, 1975, p. 65-66, tradução nossa)[65]

Esse argumento a favor do holismo tem muito a ver com a indispensabilidade da matemática para a ciência, de modo que não há um limite exato entre uma teoria bem-sucedida na matemática e uma teoria bem-sucedida na ciência. Esse argumento é resultante da metodologia científica de aplicação da matemática. De fato, o desenvolvimento da matemática pode ser impulsionado pelo desenvolvimento de demais ciências como ocorreu da elaboração da física clássica, do cálculo e da geometria analítica no período moderno. Por outro lado, o desenvolvimento da matemática pode levar ao desenvolvimento da ciência em geral, pois a aplicação de novas teorias matemáticas leva a novas descobertas científicas. Para que tudo isso ocorra é necessário que toda a ciência esteja unificada numa linguagem única, compreensível em todos os campos de investigação e, portanto, é necessário um holismo semântico por toda a ciência.

2.4.7 O aprendizado matemático

Por último, tem-se o argumento vindo da ideia de que as verdades da matemática consideradas *a priori* por conta do aprendizado da matemática (COLYVAN, 2001). A matemática é ensinada de modo mais rudimentar nos primeiros anos de educação de uma criança, e à medida que a linguagem a ser aprendida vai ganhando abstração, algumas noções matemáticas parecem ser óbvias. O exemplo abaixo cita o aprendizado da aritmética desde a infância até o conhecimento dos axiomas de Peano e porque dá um status *a priori* para esses axiomas:

> A despeito do fato que os teoremas elementares da teoria dos números são frequentemente usados para demonstrar a alegada natureza *a priori* do conhecimento matemático, eu penso que a teoria dos números não está bem ajustada para essa proposta. A razão é que aprendemos os rudimentos da teoria dos números muito jovens e sem qualquer preocupação com sua ontologia. Consequentemente, quando vamos considerar exemplos da teoria dos números no contexto de decidir se a matemática é *a priori* ou *a posteriori*, nossas intuições são corrompidas por esse profundamente arraigado, indiscriminado, treinamento primitivo em aritmética. Por exemplo, quando você primeiro entra em contato com os axiomas de Peano, usualmente na universidade, eles parecem óbvios, até *a priori*. Para emprestar uma frase de Gödel, eles "se forçam [forçam a sua verdade] sobre nós" (1947, p. 484). Tente imaginar nunca tendo qualquer treino em matemática até esse momento.

[65] Texto traduzido: The existence of real numbers and the correspondence between real numbers and points on the line were discovered in part quasi-empirically, in part empirically. This is as much an example of the use of hypothetico-deductive methods as anything in physics is. The point is that the real justification of the calculus is its success - its success in mathematics, and its success in physical science (PUTNAM, 1975, p. 65-66)

> Poderia os axiomas de Peano forçar-se [forçar a sua verdade] sobre você? Eu sugiro que não. (COLYVAN, 2001, p. 121-122, tradução nossa, colchete nosso)[66]

O mesmo argumento aparece em Quine (1995), mas a ideia básica é que nenhuma ciência, por ser apreendida do modo mais rudimentar ao mais abstrato, pode conferir a si o título de *a priori* aparte de qualquer experiência. O aprendizado de qualquer teoria se inicia na experiência e a experiência é o ponto de chegada de qualquer teoria científica como quer o holismo.

2.5 CINCO CONSEQUÊNCIAS DO HOLISMO DENTRO DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

2.5.1 Possibilidade de revisão das teorias matemáticas

Uma das consequências do holismo é a possibilidade de revisão[67] na matemática. Nenhuma teoria matemática está a salvo disso, como acontece na lógica, com a introdução de novos valores de verdade ou até mesmo na aritmética ou a teoria de conjuntos. De certa maneira, essa possibilidade de revisão está envolvida no avanço da ciência em geral, que exige a criação de novas teorias matemáticas. Teorias matemáticas, quando adquirem um status de evidência e aceitação fortes, podem chegar ao ponto de serem consideradas impossibilitadas de revisão.

Isso não acontece unicamente por motivos da teoria matemática, mas porque a teoria se torna parte integrante essencial para a ciência padrão. Essa integração é tão forte que a sua indispensabilidade torna impossível pensar em algo diferente do que pode ser conseguido com aquela teoria matemática. É o que acontece com os axiomas da aritmética. Não são os axiomas em si indubitáveis e verdades absolutas, mas são aceitos à medida que são úteis para o

---

[66] Texto traduzido: Despite the fact that elementary theorems of number theory are frequently used to demonstrate the alleged *a priori* nature of mathematical knowledge, I think that number theory is not well suited to this purpose. The reason is that we learn the rudiments of number theory very young and without any concern for ontology. Consequently, when we come to consider examples from number theory in the context of deciding whether mathematics is *a priori* or *a posteriori*, our intuitions are corrupted by this deeply ingrained, undiscriminating, early training in arithmetic. For example, when you first come across the Peano axioms, usually at university, they seem obvious, even *a priori*. To borrow a phrase from Gödel, they "force themselves upon us" (1947, p. 484). Try to imagine never having had any training in mathematics up until that time. Would the Peano axioms still force themselves upon you? I suggest not. (COLYVAN, 2001, p. 121-122)

[67] E em geral, mesmo se uma proposição matemática tenha sido dmeonstrada, sua falsidade não pode ser literalmente impossível de imaginar; e não há uma lei que diga 'nada conta contra isso'. (PUTNAM, 1975, p. 10, tradução nossa). Texto traduzido: And, in general, even if a mathematical statement has been proved, its falsity may not be literally impossible to imagine; and there is no rule that 'nothing is to count against this'. (PUTNAM, 1975, p. 10)

entendimento das teorias científicas. O que importa para a manutenção de tais teorias é a sua utilização na ciência, de tal modo que é impossível falar num único fundamento da matemática.

Dentro da tese do holismo, se sustentado o revisionismo das teorias matemáticas e a sua ligação com as demais teorias científicas sem a sustentação de um único fundamento para a matemática, é possível chegar à conclusão que a matemática tem como principal finalidade a busca de soluções para problemas vindos da ciência. (PUTNAM, 1975, p. 51). Não há uma visão de introdução de objetos matemáticos abstratos em teorias inúteis à ciência. A matemática é indispensável às teorias científicas, mas o preço a se pagar é a desconsideração da introdução de objetos "inúteis"[68] às teorias científicas, ao mesmo tempo em que a ideia de um fundamento puramente convencionalista da matemática é rejeitado, pois a matemática cria objetos abstratos indispensáveis às teorias científicas.

2.5.2 Holismo e realismo na matemática: o escopo dos objetos matemáticos

Segundo o holismo, qualquer objeto abstrato introduzido dentro da matemática se relaciona direta ou indiretamente com as experiências. O teorema do valor intermediário de Bolzano é um exemplo disso. O teorema diz que duas funções contínuas com coeficientes contrários possuem um valor igual para um dos elementos do domínio das funções. A motivação desse teorema é empírica, pois envolve problemas de movimento em que os vetores são contrários entre si ou ultrapassagem. A introdução da matemática dentro da descrição desse tipo de movimento leva à constatação do valor intermediário, a contrapartida matemática para a descrição do movimento. A demonstração do teorema, por outro lado, exige a presença de objetos matemáticos abstratos como conjuntos infinitos, de onde emergem as definições de continuidade e de limite. A presença de relações matemáticas entre conjuntos se faz necessária para a definição de função, pois uma função é uma relação entre conjuntos. Assim, novas ferramentas matemáticas abstratas são criadas a partir desses objetos e é necessário acreditar na existência desses objetos para a construção da demonstração e a sua posterior utilização.

Por outro lado, os objetos passam a introduzir questões próprias de suas características. Uma vez que a continuidade é um conjunto infinito de segmentos, qual é a cardinalidade de um conjunto contínuo? Justamente aqui é necessário criar axiomas para a demonstração de proposições que envolvem a cardinalidade dos números reais, sua relação com os demais conjuntos numéricos e problemas subsequentes à cardinalidade como ordenamento,

---

[68] Será explicada melhor essa situação abaixo.

correspondência entre conjuntos do pondo de vista da cardinalidade e do ordenamento, etc. e por fim problemas de consistência e independência dos axiomas da teoria de conjuntos.

Esse questionamento levará ao desenvolvimento da teoria de conjuntos para além da sua aplicação na experiência, juntamente com problemas envolvendo a consistência da teoria de conjuntos e a independência de seus axiomas. Esse é o principal desafio a uma visão holística na ciência. As ciências, num sentido, estão interligadas entre si, mantendo uma coerência semântica que torna possível a sua aplicação, mas em relação ao desenvolvimento de teorias matemáticas que tratam de questões estritamente matemáticas há uma limitação de aplicação. Há a necessidade de se questionar uma posição holística perante todas as teorias matemáticas. Diante dessa necessidade, Quine em seus textos tem muito a dizer sobre os objetos matemáticos abstratos. Quine diz:

> O campo da álgebra e dos números irracionais é subdeterminado pelos números racionais, mas é mais suave e mais conveniente; e inclui a álgebra de números racionais como composto. A ciência total, matemática e natural e humana, é similarmente, mas mais extremamente subdeterminada pela experiência. O limite do sistema deve ser mantido esquadrinhado com a experiência; o resto, com todos os seus mitos elaborados ou ficções, tem sua simplicidade objetiva de leis. (QUINE, 2003, p. 42, tradução nossa)[69]

Ao partir do ponto de vista de que qualquer sentença, seja ela das ciências empíricas ou da própria matemática, objetos matemáticos dentro da própria matemática têm alguma ligação com as ciências empíricas e à essas questões estão limitadas.

2.5.3 O papel da experiência dentro do holismo

As verdades mais fundamentais da ciência não são frutos de mera convenção, mas qualquer teoria científica está sintonizada com a experiência. Mesmo que seja necessária a introdução de convenções na ciência, elas estão condicionadas ao melhor entendimento das experiências. Aprender o significado dos termos de uma linguagem envolve um aprendizado contextualizado, o que condiciona o significado dos termos a uma interpretação e o aprendizado mais básico em qualquer ciência se dá por meio da experiência. Mesmo que pessoas aprendam

[69] Texto traduzido: The over-all algebra of rational and irrational numbers is underdetermined by the algebra of rational numbers, but is smoother and more convenient; and it includes the algebra of rational numbers as a jagged or gerrymandered part. Total science, mathematical and natural and human, is similarly but more extremely underdetermined by experience. The edge of the system must be kept squared with experience; the rest, with all its elaborate myths or fictions, has as its objective the simplicity of laws. (QUINE, 1951, p. 42)

significados distintos para a mesma palavra ou termos de uma linguagem e isso possa "comprometer" a analiticidade de uma sentença:

> Aprendemos nossas palavras muito largamente aprendendo em quais contextos afirmar como verdadeiras tais circunstâncias; devemos dizer que sentenças analíticas são aquelas que aprendemos serem verdadeiras quando aprendemos suas palavras? Esse critério se adequa aos exemplos populares de analiticidade muito bem, tais como 'nenhum solteiro é casado', porém também se adequa a várias proposições que filósofos não deveriam querer incluir. De fato, não há como dizer quais proposições deveriam contar como analíticas para um ou outro falante, uma vez que as pessoas aprendem as mesmas palavras através de diferentes primeiros contextos e ainda esquecem quais contextos eram aqueles. Aqui está uma melhor aproximação: Uma proposição é analítica se virtualmente *todos* os falantes da linguagem presumir ter aprendido a verdade da proposição ao longo do aprendizado de algumas das palavras. (QUINE, 1972, p. 52, tradução nossa)[70]

Pode-se dizer com Hylton (2010) que, para Quine, a verdade de uma proposição, se ela quer encontrar um lugar na grande teia de crenças filosóficas e científicas precisa ter um significado empírico, conforme foi mostrado em relação ao teorema do valor intermediário. A verdade das sentenças precisa estar ligada ao seu significado empírico, ou seja, o seu significado para toda a ciência. Nenhuma verdade ou significado de sentenças deve se afastar de sua aplicação na experiência empírica e, portanto, da ciência. A noção de verdade para uma sentença não pode ser separada das ciências a que essa verdade pertence. A ciência, já que está em última análise interessada na justificação das sentenças de observação empírica, possui as condições de verdade de um conjunto de sentenças no teste empírico.

2.5.4 Holismo e a indispensabilidade da matemática

Ao partir do ponto de vista realista da filosofia da matemática o que se admite é que uma teoria matemática leva à aceitação de objetos matemáticos abstratos. Ao unir isso ao holismo, o que se admite é que os objetos da teoria são introduzidos de acordo com a utilidade desses objetos na ciência em geral, mesmo que indiretamente. Num caso indireto, a introdução

---

[70] Texto traduzido: We learn our words very largely by learning what contexts to affirm as true and in what circumstances; shall we say that the analytic sentences are those that we learn to be true in learning their words? This criterion fits the popular examples of analyticity well enough, such as 'No bachelor is married', but it also fits many statements that philosophers would not want to include. In fact there is no telling what statements it would count as analytic for one or another speaker, since people learn the same words through different first contexts and even forget which contexts those were. Here is a better approximation: a statement is analytic if virtually *all* speakers of the language may be presumed to have learned the truth of the statement in the course of learning some of the words. (QUINE, 1972, p. 52)

de objetos matemáticos abstratos através de axiomas é útil para a demonstração de teoremas e esses são úteis para as demonstrações dentro das teorias científicas.

Negar a existência de objetos matemáticos abstratos para a ciência pode levar à não-aceitação da matemática como uma ferramenta importante na sistematização e desenvolvimento de teorias. Assim, o papel da matemática dentro do holismo leva à aceitação de objetos matemáticos abstratos, através do argumento de indispensabilidade da matemática para a ciência. A aceitação dos objetos matemáticos abstratos ocorre porque eles são indispensáveis ou úteis ao melhor entendimento dos fenômenos. Esse tipo de argumento aparece em "Success and Limits of Mathematization", no qual Quine diz:

> O discurso científico ordinário está tão irremediavelmente comprometido com objetos matemáticos abstratos – nações, espécies, números, funções, conjuntos, etc. – como está para maças e outros corpos. Todas essas coisas figuram como valores das variáveis em todo o nosso sistema do mundo. Os números e as funções contribuem genuinamente com a teoria física da mesma maneira que as partículas hipotéticas. (QUINE, 1981, p. 149-150, tradução nossa)[71]

Essa indispensabilidade da matemática caminha lado a lado com o holismo semântico, também denominada indispensabilidade semântica, ela é contrária a uma indispensabilidade que propõe a aceitação de objetos que são somente aceitos por meio de sua cadeia causal de eventos até influenciar os sentidos. A indispensabilidade semântica de objetos matemáticos abstratos infla a ontologia das melhores teorias científicas:

> Argumentos de indispensabilidade semântica tipicamente produzem mais entidades abstratas que os argumentos de indispensabilidade científica. O último argumento provê entidades abstratas suficientes para satisfazer as necessidades da ciência, enquanto o primeiro provê todas essas e mais além. Por exemplo, considerações semânticas parecem requerer um objeto abstrato para qualquer predicado na linguagem em questão. Isso destaca um dos pontos fortes [...] desse tipo de argumento - não é preciso se ater ao problema de *abtracta* insuficientes. Por outro lado, isso parece ser uma das fraquezas desse tipo de argumento [...]. (COLYVAN, 2001, p. 22, tradução nossa)[72]

---

[71] Texto traduzido: Ordinary interpreted scientific discourse is as irredeemably committed to abstract objects — to nations, species, numbers, functions, sets—as it is to apples and other bodies. All these things figure as values of the variables in our overall system of the world. The numbers and functions contribute just as genuinely to physical theory as do the hypothetical particles. (QUINE, 1981, p. 149-150)

[72] Texto traduzido: [S]emantic indispensability arguments typically yield more abstract entities than scientific indispensability arguments. The later only provide enough abstract entities to satisfy the needs of science, while the former provide all those and many more besides. For example, semantic considerations seem to require an abstract object for every predicate in the language in question. This highlights one of the strengths (according to some) of this style of argument—one does not have the problem of not enough abstracta. On the other hand, this is seen by others to be one of the weaknesses of this style of argument—we get an extremely (COLYVAN, 2001, p. 22, colchete nosso).

Sendo assim, a matemática está intimamente ligada ao processo de teste empírico das teorias e isso é suficiente para aceitar que a matemática também pode ser testada empiricamente quando as afirmações das proposições envolvem objetos matemáticos abstratos como números e conjuntos. Mas isso não quer dizer testar diretamente teorias matemáticas, mas sim a indispensabilidade de determinados objetos para a confecção de teorias úteis à experiência. Na verdade, o que está em jogo é que quando uma teoria científica é aceita, aceita-se também todos os objetos teóricos envolvidos na confecção daquela teoria. Uma teoria científica necessita usar teoremas matemáticos. Esses, por sua vez, necessitam de teorias matemáticas que tratam de objetos matemáticos abstratos para serem demonstrados. Para demonstrar algo como a consistência dessas teorias matemáticas, outros objetos matemáticos são introduzidos. Assim, as teorias científicas terminam formando uma grande teia de crenças em objetos. Alguns mais frequentemente testados e outros menos, pela sua posição secundária na realização de testes teóricos, mas se fazendo presente na construção de uma proposição a ser testada.

As teorias científicas são o suficiente para garantir o status de realidade de qualquer objeto, mesmo que provisoriamente, pois qualquer teoria científica pode ser refutada e levar consigo a semântica por tais termos que se referem a esses objetos. Colyvan (2001) defende que a matemática é um método empírico por estar ligado exatamente a elaboração de hipóteses empíricas. A formulação de uma hipótese a ser testada, portanto, é uma longa cadeia que atinge os fundamentos mais básicos da matemática, tornando assim a própria matemática um método hipotético-dedutivo semelhante aos métodos de formulação de uma hipótese empírica.

Na interpretação de Colyvan, assim como a de Putnam descrita acima, há um "falso" *a priori* dentro da prática matemática (COLYVAN, 2001, p. 28-29). O que há é uma ilusão com o *a priori* por assemelhar às experiências de pensamento postas para contextualizar a introdução de hipóteses teóricas plausíveis. A matemática também introduz hipóteses teóricas que levam aos objetos dos mais abstratos possíveis, mas o holismo semântico, que faz com que se sustente com a ideia de que o significado de um termo permeia toda a teia de crenças, leva essa prática matemática até à elaboração de teorias úteis na experiência.

Nessa interpretação, as teorias matemáticas são elevadas ao grau de conhecimento *a posteriori*, pois o método empírico estabelece um papel para os objetos matemáticos a partir da indispensabilidade da matemática nas ciências empíricas (COLYVAN, 2001, p. 116). Basicamente, a matemática é indispensável às melhores teorias científicas, mas a sua fundamentação exige a produção de mais matemática, considerada abstrata, mas inteiramente ligada com as teorias matemáticas em sua implementação. Essa consideração somente pode ser mantida se também for mantida uma indispensabilidade semântica dentro da matemática.

O argumento da indispensabilidade torna possível a interpretação de que pela prática da física é que se possibilita a introdução de objetos matemáticos como o contínuo, conjuntos, funções, figuras geométricas, etc. Nesse caso, não faz sentido falar em uma ciência como a matemática, pois essa se tornaria somente um apêndice da física. A despeito do argumento de indispensabilidade, a história da matemática aponta para outro caminho. A ontologia de objetos matemáticos, o que pode ou não existir, é uma questão que diz respeito somente à matemática.

2.5.5 A ilusão de um *a priori* na matemática

Nada nas teorias científicas está a salvo da reformulação, nem mesmo a matemática e a lógica. O sentimento que se tem de que a lógica e a matemática não estão suscetíveis a mudanças e de que suas verdades são necessárias e imutáveis, pode vir de um princípio que Quine denomina máxima da mutilação mínima (QUINE, 1992). Esse princípio afirma que as mudanças nas teorias científicas devem ser mínimas, de modo a impedir uma mudança tão drástica nas teorias a fim de as tornarem irreconhecíveis. Nessa situação, a matemática pode parecer ser uma teoria permanente, sem nenhuma modificação, a despeito das mudanças que ocorrem nas outras teorias. A mudança na matemática seria o resultado de mudanças drásticas dentro da ciência como um todo, comparáveis a verdadeiras revoluções científicas. Porém, mesmo assim, Quine não vê com bons olhos as mudanças em teorias fundamentais, dado a máxima da mutilação mínima, a lógica e matemática clássica devem ser preservadas ao máximo, justamente para não perder a familiaridade com as demais ciências:

> Eu coloco os argumentos da física sobre aqueles da teoria de conjuntos, porque vejo a justificação da matemática somente no que ela contribui para nossa ciência integral da natureza. É uma questão de distanciamento dos dados da observação; a física é menos distante que a teoria de conjuntos. Mas em qualquer evento não nos deixemos subestimar pelo valor de uma lógica desviante. Há uma séria perda de simplicidade, especialmente quando a nova lógica não é nem mesmo uma lógica multivalorada. E há uma perda, ainda mais séria, no ganho de simplicidade. (QUINE, 1986, p. 85-86, tradução nossa)[73]

É por isso que as sentenças da lógica ou da matemática, quando tomadas sozinhas, elas não podem possuir um significado empírico. Seu significado empírico é adquirido na grande

[73] Texto traduzido: I do place the claims of physics somewhat above those of set theory, because I see the justification of mathematics only in what it contributes to our integral science of nature. It is a question of remoteness from the data of observation; physics is less remote than set theory. But in any event let us not underestimate the price of a deviant logic. There is a serious loss of simplicity, especially when the new logic is not even a many-valued truth-functional logic. And there is a loss, still more serious, on the score of familiarity. (QUINE, 1986, p. 85)

teia de conhecimento que termina nas sentenças de observação. Portanto, a distinção entre uma sentença teórica ou empírica não funciona. É uma distinção sem significado algum. Quando a sentença é analisada dentro da grande teia de crenças científicas, ela possui um significado direto ou indireto com a experiência.

2.6 HOLISMO E TEORIA DE CONJUNTOS

O holismo implica numa ligação entre a teoria de conjuntos e as demais ciências, pois a teoria de conjuntos é útil para a matemática e essa por sua vez é útil para as ciências empíricas. A discussão entre holismo e teoria de conjuntos possui um viés ontológico, uma vez que a teoria de conjuntos se compromete com objetos abstratos como os conjuntos e em alguns casos, classes de conjuntos. Pelo holismo, qualquer comprometimento teórico envolve objetos úteis à ciência em geral. A discussão ontológica na teoria de conjuntos é se é possível aceitar objetos somente úteis às teorias científicas em geral ou se é possível introduzir objetos não tão ligados às teorias científicas.

Uma das funções da teoria de conjuntos consiste em propor um sistema formal com o uso da lógica de predicados e um conjunto de axiomas adequados para deduzir dentro desse sistema os teoremas úteis para a matemática em geral, sendo isso uma justificação para a introdução de um axioma na teoria. Outro modo de justificar um axioma da teoria de conjuntos consiste em analisar esses objetos como úteis às demonstrações matemáticas, inclusive nas demonstrações de consistência.

2.6.1 Consistência da teoria de conjuntos

A consistência da teoria de conjuntos se baseia no teorema da correção: uma teoria é consistente se possuir um modelo e no segundo teorema de incompletude de Gödel, se uma teoria é consistente, essa teoria não demonstra a própria consistência (SANTOS, 2012, p. 42). Serão expostos os axiomas da teoria de conjuntos ZFC, a hierarquia cumulativa, a consistência relativa de ZFC pelo axioma da construtividade V = L e os inacessíveis (ZFC + inacessíveis). V = L introduz uma propriedade específica na hierarquia e decide o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo (KRAUSE; ARENHART, 2017; TILES, 2004; SANTOS 2012; MADDY 1997).

2.6.1.1 *Definição*: $x \subseteq y$ um conjunto *x* é um subconjunto de um conjunto *y* se todo elemento de *x* é um elemento de *y*[74].

2.6.1.2 Axioma da extensionalidade: $\forall x \forall y \forall z\ [(z \in x\ \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$

Se dois conjuntos têm os mesmos elementos, então eles são o mesmo conjunto.

2.6.1.3 Axioma da fundação:

$$\forall x \left[\neg(x = \emptyset) \rightarrow \exists y \left(y \in x\ \wedge \forall z\big(z \in x \rightarrow \neg(z\ \in y)\big)\right)\right]$$

O axioma diz que todo conjunto não-vazio possui uma interseção vazia com algum de seus elementos.

2.6.1.4 Axioma do Par: $\forall x \forall y \exists z \forall w\ (w \in z\ \leftrightarrow w = x\ \vee w = y)$

O axioma diz que existe um conjunto *z* da forma {*x*, *y*}, ou um conjunto de pares.

2.6.1.5 Axioma do conjunto potência: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

O axioma diz que para qualquer conjunto *x*, o conjunto potência (*y*) de *x* cujos elementos são subconjuntos de *x*.

2.6.1.6 Axioma da União: $\forall x \exists y \forall z [z \in y\ \leftrightarrow\ \exists w (w \in x\ \wedge z \in w)]$

O axioma diz que para qualquer conjunto *x* há um conjunto correspondente à $\cup\,(x)$ cujos elementos são os elementos de *x*.

2.6.1.7 Axioma-esquema da separação: F(*z*) é uma fórmula em que *y* não ocorre livre,

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \in x\ \wedge F(z)]$$

[74] Nota-se que $x \subseteq x$ mas $x \notin x$.

O axioma diz que a fórmula F(z) define um subconjunto de x e assim escapa do paradoxo do axioma da compreensão.

2.6.1.8 *Definição de conjunto sucessor*: y é um conjunto, $S(y) \coloneqq y \cup \{y\}$

2.6.1.9 Axioma da Infinidade: $\exists x\big(\emptyset \in x \ \wedge \ \forall y \in x(S(y) \in x)\big)$

O axioma diz que existe um conjunto x que o vazio pertence a x e, para qualquer conjunto y que pertence a x, o sucessor de y pertence a x.

2.6.1.10 Axioma da Substituição: A fórmula F(x, y) não possui z livre.

$$\forall x \in w \exists!\, yF(x,y) \rightarrow \ \exists z \forall y(y \in z \ \leftrightarrow \exists x \in w \ F(x,y))$$

O axioma diz que para a fórmula F(x, y), existe um conjunto z que é a imagem da função. Ou seja, qualquer função possui um conjunto como uma imagem.

2.6.1.11 Axioma da Escolha: $\forall A \exists R \ (R \ bem \ ordena \ A)$

O universo da hierarquia cumulativa V possui um estágio inicial V_0 que corresponde ao conjunto vazio e segue crescendo, de modo a todos os conjuntos construídos anteriormente ao estágio corrente terminam por pertencer a esse estágio numa relação de transitividade. A noção de transitividade fica completa aqui quando for constatado que todo subconjunto de um conjunto construído num determinado estágio também pertence ao conjunto do estágio imediatamente posterior.

2.6.1.12 *Definição*: ω é o primeiro ordinal infinito ou primeiro ordinal limite.

2.6.1.13 *Definição*: V(θ) é uma função que define a construção de todos os ordinais finitos que pode ser definida da seguinte maneira:

$$V(0) = \ \emptyset \ \ , \ \ V(\beta + 1)_{\beta+1} = \ \mathcal{P}\big(V(\beta)\big) \ \ , \ \ V_\alpha \ = \bigcup\nolimits_{\beta<\alpha} V_\beta \ \text{ para um ordinal limite } \alpha$$

Vejamos um exemplo de como os axiomas de Z – axioma do Par – que é satisfeito por esse universo bem fundamentado. O axioma é satisfeito, pois os estágios da hierarquia incluem vários conjuntos da forma $\{x, y\}$, ora, x e y ocorrem em algum estágio V_x e V_y anterior ao estágio de formação de $\{x, y\}$, $V_{\{x, y\}}$. Os conjuntos podem ser coletados posteriormente nesse estágio pela transitividade entre os estágios da hierarquia. Raciocínio parecido pode ser feito para todos os axiomas acima, exceto o axioma do conjunto potência e o axioma da escolha[75].

2.6.2 Hierarquia construtiva e o axioma da construtividade V = L

Gödel (1938) mostrou que ZF é relativamente consistente com a adição do axioma da construtividade (V=L) e que ZF + V=L implica na decisão do axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo de Cantor, ou seja, ZF + V=L → AC + GCH. O universo construtivo possui conjuntos definidos por expressões próprias da linguagem de ZF como o cálculo de predicados, axiomas e definições dadas em ZF. A linguagem em que ZF é desenvolvida é chamada de L. O universo dos conjuntos tratados em L são os que tão somente podem ser construídos a partir da linguagem L. Um conjunto construtivo é definido por uma fórmula $\varphi(m, a_1, \dots, a_n)$ de ZF e possui todas as variáveis e constantes restritas aos conjuntos formados no modelo em estágios anteriores. Assim, a hierarquia mantém a característica de transitividade herdada da hierarquia cumulativa.

2.6.2.1 *Definição de Hierarquia construtiva L*

$L(\gamma)$ é uma função para a construção de todos os conjuntos construtíveis:

$$L_0 = \emptyset \quad , \quad L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \cup L_\alpha \quad ,$$
$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \; para\; um\; ordinal\; limite\; \alpha$$

A diferença entre a hierarquia construtiva e a hierarquia cumulativa é que um estágio posto na hierarquia cumulativa somente pode existir depois da formação de todos os conjuntos dados anteriormente, o que exige o funcionamento completo do axioma do conjunto potência. Na hierarquia construtiva, um estágio somente é construído sobre todos os conjuntos

[75] Essa situação será explicada mais abaixo.

construtíveis anteriores. Nem todos os conjuntos dados pela aplicação do conjunto potência são construtíveis.

A aplicação do conjunto potência sobre ω deve gerar um conjunto maior ω_1 e a aplicação do conjunto potência sobre esse, gera um conjunto ainda maior ω_2 ,e assim por diante seguindo na hierarquia. No caso de conjuntos construtíveis, dado o conjunto ω, os conjuntos definíveis a partir de ω são subconjuntos do conjunto potência de ω, ou seja, estão em ω_1 e os conjuntos construtíveis a partir de ω_1 são os subconjuntos construtíveis do conjunto potência de ω_1, ou seja, estão num estágio de ω_2 e assim por diante, tornando o modelo construtivo um modelo inerente ao modelo que compõe toda a hierarquia cumulativa, mas Gödel põe como axioma uma restrição ao universo de todos os conjuntos na extensão de toda a hierarquia, que é o axioma da construtividade.

Para entender a legitimidade desse axioma é necessário entender a noção de sentença absoluta. Quando a sentença é absoluta, ela é satisfeita para qualquer objeto contido no universo dos dois modelos. Qualquer sentença verdadeira num modelo construtivo é verdadeira no universo da hierarquia cumulativa e vice-versa, o que torna as sentenças absolutas nos dois modelos e, portanto, os axiomas de ZF também são consistentes no modelo construtivo. ZF sendo consistente também no modelo construtivo, é também o axioma V = L, que afirma que todo universo é construtivo.

Assumindo ZF + V = L, é possível mostrar que AC + GCH são consistentes com ZF + V = L, ou seja, ZF + V = L implicam AC + GCH. AC se mantém porque todos os conjuntos construtíveis são bem ordenados. No nível dos ordinais finitos, é facilmente constatado. Dado um número α, construído num estágio L_{α}, esse conjunto pode ser bem ordenado num estágio $L_{\alpha+1}$. A ideia por trás é que como todo conjunto ao ser introduzido é construído por uma fórmula de ZF, então o conjunto de fórmulas que definem esses conjuntos podem ser ordenadas “alfabeticamente”. Conjuntos construídos abaixo desses introduzidos por essas fórmulas são ordenados. Conjuntos no mesmo estágio corrente serão ordenados pelos estágios superiores e assim por diante, porque um estágio somente pode existir se for construtível por uma fórmula de ZF. Assim, para qualquer conjunto de L, existe uma relação que bem ordena esse conjunto.

Para mostrar que a hipótese do contínuo é consistente com os demais axiomas, é preciso analisar a lei de formação dos conjuntos a partir de ordinais limite. O primeiro ordinal limite é formado no estágio L_{ω} e é o limite para qualquer ordinal sucessor. A formação do próximo estágio L_{ω_1}, o estágio de todos os conjuntos construtíveis de L_{ω} não é enumerável. Se a cardinalidade de ω é $\aleph_0$, a cardinalidade de ω_1 não pode ser $\leq \aleph_0$, pois o conjunto é não-enumerável e não-sucessor. Portanto, a cardinalidade de ω_1 é > $\aleph_0$. Supondo agora que a cardinalidade de ω_1 construtível não pode ser igual à cardinalidade de ω_1 na hierarquia cumulativa, nesse caso, pode-se ter a cardinalidade de $\omega_1 \leq \aleph_1$. Como a cardinalidade de ω_1 é > $\aleph_0$ e $\leq \aleph_1$, a cardinalidade de ω_1 só pode ser $\aleph_1$. A hipótese do contínuo afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ou que a cardinalidade do conjunto dos subconjuntos do primeiro ordinal limite é $\aleph_1$. Essa hipótese está de acordo com o modelo de ZF + V=L, porque o universo V=L permite essa relação através do conjunto dos subconjuntos dos ordinais definíveis num próximo nível.

2.6.3 ZFC + inacessíveis

Diferentemente da demonstração da consistência de Gödel, a introdução de cardinais inacessíveis leva a uma interpretação "impredicativa" do modelo transitivo a ser aceito[76]. Um conjunto é inacessível quando, dada a sua cardinalidade, todas as operações possíveis dentro da teoria somente conseguem chegar a conjuntos menores que esse inacessível. A hierarquia cumulativa, em sua versão impredicativa, cresce à medida que o axioma do conjunto potência é aplicado.

Para qualquer conjunto que não seja um inacessível *n*, a cardinalidade do conjunto potência de *n* é 2^n. Ou seja, por CH, $\mathcal{P}(\aleph_0) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ou pela versão da hipótese generalizada do contínuo: $\mathcal{P}(\aleph_\alpha) = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. $\mathcal{P}(\aleph_\alpha)$ é uma função da qual é possível aplicar o axioma da substituição. O axioma da substituição afirma a existência de um conjunto que, para cada elemento em que $\mathcal{P}(\aleph_\alpha)$ se aplica, o conjunto resultante também pertence a esse elemento. Começa-se então a formar esse conjunto justamente com $\mathcal{P}(\aleph_0)$, em seguida com $\mathcal{P}(\aleph_1)$, $\mathcal{P}(\aleph_2)$, $\mathcal{P}(\aleph_3)$, ..., $\mathcal{P}(\aleph_\omega)$, ... $\mathcal{P}\left(\aleph_{\omega_1}\right)$, $\mathcal{P}\left(\aleph_{\omega_2}\right)$, ..., que estão todos inclusos no conjunto $\left\{\aleph_0, \mathcal{P}(\aleph_0), \mathcal{P}(\aleph_1), \mathcal{P}(\aleph_2), \mathcal{P}(\aleph_3), \ldots, \mathcal{P}(\aleph_\omega), \ldots \mathcal{P}\left(\aleph_{\omega_1}\right), \mathcal{P}\left(\aleph_{\omega_2}\right), \ldots,\right\}$. Um cardinal inacessível é o limite entre todas as possibilidades de geração de conjuntos como esses.

[76] Impredicatividade na concepção de filósofos da matemática como Putnam e Maddy é a noção de que o universo contém conjuntos não-construtíveis. Um universo com conjuntos construtíveis, nessa concepção, é um universo "predicativo". Os conjuntos nesse caso são introduzidos por fórmulas. Fórmulas são um predicado $\varphi(x)$ de uma linguagem *L* da teoria de conjuntos.

2.6.3.1 *Definição de um cardinal inacessível*:

Um conjunto com cardinalidade *e* é um cardinal inacessível se e somente se, para qualquer cardinal $c < e$, $2^c < e$.

Os axiomas de Z são satisfeitos nesse universo, pois dentro dele está a hierarquia cumulativa. A introdução de um cardinal inacessível é consistente e independente em relação aos axiomas de ZFC. Se ZFC não é consistente com um cardinal inacessível, então ZFC implica a existência de um inacessível. Ora, cardinais inacessíveis não podem ser formados pela operação de conjunto potência e nem pelo axioma da substituição, pois a própria definição de inacessível impede que tal conjunto seja formado por essas operações, o que seria uma contradição dentro de ZFC. (DRAKE, 1974, cap. 04).

Por não serem formados dentro de ZF, é consistente com ZF adicionar ou a afirmação ou a negação da existência de um cardinal inacessível. Por outro lado, caso seja adicionado um inacessível à ZF, não há impedimento de criar uma hierarquia de cardinais inacessíveis semelhante à hierarquia dos *alephs*. Uma vez que um cardinal é inacessível, então pode existir um segundo cardinal inacessível em relação ao primeiro inacessível. Se a teoria $\mathrm{ZFC} + \mathrm{In}_0$ é consistente, então um próximo cardinal inacessível, digamos, In_1 é impossível de ter a sua existência demonstrada por meio de $\mathrm{ZFC} + \mathrm{In}_0$. A consistência de uma teoria nunca pode ser demonstrada de dentro da teoria. A capacidade de geração de hiperinacessíveis é infinita.

Alguém pode negar a possibilidade de existência de cardinais inacessíveis, alegando que a matemática parece não necessitar da existência desses cardinais. Por outro lado, alguém pode assumir a existência desses cardinais para então mostrar que eles não contradizem nenhum axioma de ZFC ou de qualquer teoria matemática. O único papel dos inacessíveis até o momento é na demonstração de consistência da teoria de conjuntos ZF (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1973). Os inacessíveis não decidem o axioma da escolha e não decidem a hipótese do contínuo, nesse sentido, apesar de introduzir um novo estágio de formação na hierarquia cumulativa, ele não é tão poderoso quando V = L na decisão de AC e GCH. Volta-se a tratar do poder de V = L em relação às demais teorias de conjuntos quando for discutir a defesa de V = L em Quine e Putnam.

2.7 A DEFESA DE V = L NO HOLISMO

Na filosofia da matemática, os filósofos que defendem o holismo estão ao lado dos que defendem uma economia de objetos matemáticos abstratos. A introdução de modelos satisfazendo os axiomas da teoria de conjuntos tem que estar alinhados com a prática matemática ligada à aplicação nas ciências empíricas. É preciso mostrar que isso é uma inferência do holismo e que isso pode encontrar uma dificuldade dentro da teoria de conjuntos no que diz respeito à consistência e independência dos axiomas da teoria de conjuntos, conforme os modelos de teoria de conjuntos postos na seção anterior.

Reconhecer que os axiomas da teoria de conjuntos produzem teoremas úteis ao entendimento de teorias para o uso científico torna essa teoria indispensável para o desenvolvimento da ciência. A concepção iterativa se inicia por um conjunto vazio do qual não há nenhum conjunto anterior e cresce ao adicionar mais conjuntos a cada nível que a hierarquia desses conjuntos vai crescendo. Níveis são transfinitos a partir do momento que um nível da hierarquia coleta todos os conjuntos finitos para formar o próximo nível, pressupondo a existência de todos os níveis anteriores para a formação de um novo nível. Se uma estrutura sobre um determinado conjunto é possível, então a noção de hierarquia cumulativa afirma que existe uma estrutura sobre toda uma família de conjuntos como esse que também é possível. Outra grande estrutura pode ser sobreposta sobre essa, à medida que se avança sobre os níveis transfinitos, mas pressupondo a existência de uma totalidade de conjuntos nos níveis anteriores.

Esse tipo de construtividade é defendido tanto por Putnam quanto por Quine, pois segundo esses autores, a matemática necessária para a aplicação nas ciências é dada de modo satisfatório na teoria de conjuntos ZF + V=L. A pergunta que deve ser feita e que Putnam faz é: “A ciência precisa da noção “forte” (impredicativa) da teoria de conjuntos, ou somente a versão “fraca” (predicativa)?” (PUTNAM, 1971, p. 53, tradução nossa)[77]. Nessa perspectiva, a ciência não precisa de uma teoria impredicativa de conjuntos. Cardinais transfinitos que aparecem na hierarquia cumulativa não possuem nenhuma aplicação na ciência empírica, nem os axiomas dos cardinais inacessíveis.

A teoria de conjuntos de Zermelo e Fraenkel mais o axioma da escolha seriam suficientes para grande parte do aparato científico e, sendo assim, $\mathrm{ZFC} \subseteq \mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$. $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ é muito mais forte que ZFC e também produz resultados que estão para além de qualquer aplicação. Não se saberia se há realmente uma economia ontológica em $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$, porém

[77] Texto traduzido:“(...) [D]oes science need the "strong" (impredicative) notion of set, or only the "weak" (predicative) notion'[?]” (PUTNAM, 1971, p. 53, colchete nosso).

em ZFC há essa economia, mas é uma economia que impossibilita a demonstração da consistência dessa teoria. Os resultados de consistência relativa em $\mathrm{ZF} + \mathrm{V} = \mathrm{L}$ já mostram o seu poder de demonstração para além de qualquer aplicação.

Esse questionamento sobre se ZF + V = L é uma teoria que sustenta uma economia ontológica é importante porque, no pensamento de Quine, essa noção aparece justificada pela aplicabilidade nas ciências, apesar e todo o poder demonstrativo da teoria. Algo como ele sugere para a geometria, no parágrafo citado logo abaixo, pode ser realizado na teoria de conjuntos para que essa esteja de acordo com o holismo confirmativo:

> Se era melhor ter mantido as três dimensões espaciais para os nossos objetos geométricos, ou se era melhor por elas para além do espaço, ao espaço-tempo, acaba por depender de ser ou não uma boa ideia pressupor uma distinção absoluta entre repouso e movimento. Essa questão, por seu lado, é a de saber que teoria ira sistematizar melhor os dados da física. Assim, podemos dizer corretamente que a natureza dos objetos geométricos e, como a natureza das partículas da física, uma questão de teoria física. Sem dúvida que os dados laboratoriais apenas nos inclinam, mas não nos constrangem no nosso geometrizar; mas analogamente só nos constrangem na nossa invenção de uma teoria física. Não deixemos a moda e a terminologia fazer-nos enganadoramente ver a geometria de maneira demasiadamente diferente da física. (QUINE, 2010, p. 317)

Observa-se nessa citação que Quine tem uma preferência à física, pois é uma das ciências que possui em seu conjunto de sentenças as maiores possibilidades de serem testadas na experiência. Ciências que auxiliam no elaborar das teorias físicas são constrangidas a limitarem o seu desenvolvimento de modo a não “extrapolar” aquilo que pode possivelmente ser testado juntamente com uma hipótese física. Assim, a descrição de uma curva geométrica que extrapola todas as possibilidades de serem úteis às construções teóricas de ciências que são testadas constantemente é vista não como uma atividade científica, mas como conjecturas desinteressadas de um grupo de matemáticos.

Em matemática, Quine somente admite objetos que são usados na elaboração de teorias testáveis. É preciso então relacionar esse tipo de entidade estruturante da matemática com os demais objetos que emergem nas ciências empíricas, como conjuntos úteis para a resolução de problemas nas ciências empíricas. Decock (2002), afirma que Quine, ao especificar uma ontologia em objetos concretos ou úteis à teorias testáveis, o que ocorre é uma extensa ideologia limitadora da própria prática matemática: Ocorre uma grande perda de objetos matemáticos abstratos para somente objetos úteis às teorias científicas.

A existência de conjuntos de grande cardinalidade não é aceita no holismo. A consequência disso é que o naturalismo de Quine é mais normativo que propriamente descritivo, pois é preciso que especificações às teorias impeçam de explorar ao máximo a capacidade demonstrativa de uma teoria ou a ontologia da teoria, considerando ciência o que é útil e o que é mais abstrato como uma pura especulação desinteressada dos matemáticos. Quine (1992) demonstra simpatia com a teoria construtiva de conjuntos ZF+V=L, pois essa teoria é suficientemente útil para o tratamento de teorias matemáticas úteis à ciência, apesar da possibilidade de Infinitos modelos a partir de ZF. A conclusão disso é que a limitação de teorias de conjuntos às teorias úteis somente na experiência limita diretamente o desenvolvimento da matemática. O problema aqui é que, ao fazer a opção por ZF + V = L não se sabe se está se fazendo uma economia ontológica, apesar de toda a tentativa de Quine de promover a economia nos sistemas ontológicos. Insistir em uma suposta economia ontológica acarreta em revisões na matemática e o que ocorre de fato é uma mutilação da matemática por questões fora da matemática como a sua própria adequação às ciências empíricas[78].

Quine insiste na economia ontológica ao propor que existem motivações pela escolha de uma teoria de conjuntos, dentre elas a economia do universo, o tratamento de paradoxos e tudo isso sem mutilar a matemática clássica.

> Os principais axiomas da teoria de conjuntos são generalidades operativas já na parte aplicável do domínio. Mais sentenças como a hipótese do contínuo e o axioma da escolha, que são independentes desses axiomas, podem ainda ser submetidos às considerações de simplicidade, economia e naturalidade que contribui com o molde de teorias científicas em geral. Tais considerações sustentam o axioma da construtividade de Gödel, 'V = L'. Isso desativa os voos mais gratuitos da alta teoria de conjuntos, e incidentalmente implica no axioma da escolha e a hipótese do contínuo. (QUINE, 1992, p. 95, tradução nossa)[79]

Para Quine, as teorias científicas somente criam objetos inobserváveis como os números, com o objetivo de atingir o conhecimento de objetos observáveis, ou seja, capazes de sustentar uma sentença de observação: "É uso comum dizer que a evidência da ciência é a observação, e que o que predizemos são observações." (QUINE, 1992, p. 2, tradução nossa)[80]. Portanto, objetos matemáticos não podem ser criados para responder questões que se

[78] O que ocorre aqui é que uma teoria de conjuntos deve se limitar a demonstrar teoremas úteis às ciências. Teorias ou axiomas que demonstram a existência de conjuntos ou relações entre conjuntos além das que são úteis à ciência não são compatíveis com o holismo confirmativo. É por isso que Quine tem uma simpatia pela teoria ZF + V=L. O que Quine acredita é que essa teoria possui um universo de discurso suficiente para tratar de todas as relações matemáticas úteis para a ciência.

[79] Texto traduzido: The main axioms of set theory are generalities operative already in the applicable part of the domain. Further sentences such as the continuum hypothesis and the axiom of choice, wich are independent of those axioms, can still be submitted to the considerations of simplicity, economy, and naturalness that contribute to the molding of scientific theories generally. Such considerations support Gödel's axiom of construtibility, 'V=L'. It inactivates the more gratitutous flights of higher set theory, and incidentally it implies the axiom of choice and the continuum hypothesis. (QUINE, 1992, p. 95)

[80] Texto traduzido: Its common usage to say that the evidence of Science is observation, and that what we predict are observations. (QUINE, 1992, p. 2)

"desliguem" da grande teia de crenças relacionadas com a observação e assim deve ser com a teoria de conjuntos.

Quine não tem uma resposta para o fato de matemáticos aderirem a teorias de conjuntos mais poderosas que ZF + V=L diferente da noção de que a busca de tais modelos são meras especulações:

> Porém conjuntos de altos tipos ou de cardinalidade muito alta (maiores que o contínuo, por exemplo), deveriam hoje ser investigados num espírito de "se-então". Um dia eles podem ser tão indispensáveis quanto a própria afirmação das leis físicas, como os números racionais são hoje; então a dúvida da "existência" deles será tão fútil quanto o extremo nominalismo é agora. Mas para o presente devemos olhá-los como o que eles são, extensões especulativas e ousadas do aparato matemático básico da ciência. (QUINE, 1986, p. 56, tradução nossa)[81]

A defesa, por Quine e Putnam, de uma teoria como ZF + V=L e a sua conclusão, o axioma da escolha, se faz porque o axioma da escolha se força a ser aceito pela sua fertilidade de consequências nas teorias matemáticas úteis na ciência e a sua suposta economia ontológica perante teorias com objetos "maiores" e aparentemente sem nenhuma aplicação na ciência.[82,83]

2.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se com isso que o importante para a ideia de holismo é que as sentenças, quando tomadas isoladamente, não possuem uma implicação na experiência porque ela perde o seu significado empírico. É a teoria como um todo que vai implicar na evidência empírica das sentenças e é a teoria como um todo que é testada. O holismo vai contra o dualismo analítico-sintético e tal dualismo só pode ser mantido se for analisada sentença por sentença: a sentença interligada com toda a teoria não possui uma justificação que não seja a empírica. Por outro lado, se cada sentença for tomada isoladamente, ela perde todo o seu significado dado pela

[81] Texto traduzido: But sets of very high type or very high cardinality (higher than the continuum, for example), should today be investigated in an "if-then" spirit. One day they may be as indispensable to the very statement of physical laws as, say, rational numbers are today; then doubt of their "existence" will be as futile as extreme nominalism now is. But for the present we should regard them as what they are speculative and daring extensions of the basic mathematical apparatus of science. (QUINE, 1986, p. 56)

[82]Moreover, the notion of set is not the only notion which can be taken as basic; we have already indicated that predicative set theory, at least, is in some sense intertranslatable with talk of formulas and truth; and even the impredicative notion of set admits of various equivalents: for example, instead of identifying functions with certain sets, as I did, I might have identified sets with certain functions. My own view is that none of these approaches should be regarded as "more true" than any other; the realm of mathematical fact admits of many" equivalent descriptions". (PUTNAM, 1983, p. 75)

[83] To be sure, our acceptance of choice is not arbitrary; all kinds of 'intuitions' (based, most likely, on experience with the finite) support it; its mathematical fertility supports it; but none of this is so strong that we could say that an equally successful culture which based its mathematics on principles incompatible with choice (e.g., on the so-called 'axiom of determinacy') was irrational. (PUTNAM, 1983, p. 9)

teoria como um todo e, portanto, tal dualismo pode ser mantido, mas as teorias científicas não podem ser analisadas sentença por sentença quando o assunto é a justificação de crenças; daí, a distinção entre sentenças analíticas e sintéticas perde todo o sentido.

É sem sentido afirmar que existe um componente linguístico e outro componente factual na ciência. Não faz sentido falar dessa dualidade na ciência ao pegar as sentenças que são tratadas na ciência: a diferenciação entre analítico e sintético (Quine) ou a diferença entre um componente empírico e um componente linguístico na ciência (Putnam) não ajuda no esclarecimento de questões semânticas e de justificação de crenças na ciência. A ciência possui uma dependência mútua entre as sentenças e essa diferenciação é difícil de ser sustentada. Como é desnecessária essa diferenciação, mas como toda ciência é dependente da experiência, a unidade da significação de toda ciência está na significância empírica.

Apesar da caracterização do holismo em Quine e Colyvan, como mostrou-se nesse capítulo, o caráter *a priorístico* da lógica e da matemática ainda aparece como fundamental para autores que serão vistos no próximo capítulo: uma teoria matemática pode ser consistente mesmo que não venha a ser aplicada, como grande parte da teoria de conjuntos, inclusive em ZF + V = L. O mesmo pode ser argumentado sobre teorias matemáticas que são abandonadas por uma teoria científica porque não se adequam ao sistema como um todo: a teoria pode continuar a ser desenvolvida sem uma aplicação aparente mesmo que outra teoria variante da teoria que foi abandonada seja criada para satisfazer as condições dos testes empíricos ou aplicação da teoria em outras ciências, e nisso o holismo disciplinar de Duhem acertou. O que possibilita o desenvolvimento da matemática não é necessariamente a sua aplicação e nem a sua ligação com a ciência empírica que, supostamente, dota-a de sentido. Não é o seu lugar na grande teia de uma teoria que culmina numa justificação pela aplicação. O que chama-se de justificação aqui é o processo de confirmar ou refutar uma teoria pela experiência. Diz Hylton:

> Porém, uma proposição matemática não é justificada pela sua aplicação; ela é justificada pelo papel que ela ocupa no sistema matemático – em particular, se ela pode ser demonstrada por outras proposições. O papel que a matemática possui em nosso conhecimento empírico, no entanto, é a justificação da consideração do sistema como um todo como parte de nosso conhecimento. Nesse tipo de caminho, podemos fazer justiça ao fato inegável que não justificamos teoremas matemáticos apenas notando o quão útil eles são aos outros ramos do conhecimento; justificamo-los em modos internos da matemática – por demonstrações. (HYLTON, 2010, p. 80, tradução nossa)[84]

[84]Texto traduzido: But a mathematical statement is not justified by its application; it is justified by the role that it occupies in the mathematical system – in particular, whether it can be proved from others. The role that mathematics plays in our empirical knowledge, however, is the justification for counting the system as a whole as part of our knowledge. In this sort of way, we can do justice to the undeniable fact that we do not justify

A justificação de teorias matemáticas pode depender de teorias unicamente matemáticas. Nesse caso, se não aparecer nenhuma ligação com teorias que se comprometem com aspectos empíricos do conhecimento, o holismo confirmativo pode estar com um grande problema. Uma crítica ao holismo confirmativo pode ser feita como a que é apresentada abaixo, sobre teorias testáveis:

> Deixe-me ilustrar isso por meio de um exemplo. Deixe R ser a teoria geral da relatividade. Eu sustento que R não é testável no sentido de Quine. Muitas outras teorias e hipóteses auxiliares, incluindo algumas matemáticas, são necessárias para derivar observações sintéticas categoriais. Se A é uma conjunção de teorias auxiliares, a teoria composta RA é testável. (RA é a conjunção de R e A). Agora deixe C ser o axioma da construtividade de Gödel, 'V=L', que diz que todos os conjuntos são construtíveis. Assumo que C não é implicado por RA, não é necessário derivar observações categoriais da relatividade geral e não é parte da teoria de conjuntos ordinária. Se C é adicionado à RA temos RAC, presumidamente, RA e RAC têm o mesmo conteúdo empírico (para a comunidade científica num dado momento). C não deve adicionar nada ao conteúdo empírico de RA. Mas não diríamos provavelmente que qualquer observação que pudesse ser contada a favor ou contra RA, poderia contar a favor ou contra RAC. Presumidamente, RA e RAC são empiricamente equivalentes em um dos sentidos de Quine mas não em outro. (BERGSTRÖM, 2004, p. 96-97, tradução nossa)[85]

Parecida com a crítica de Bergström, a de Isaacson (2004) estabelece que a matemática não pode possuir uma base de sustentação empírica como, por exemplo, do Cálculo, na confirmação de uma teoria empírica como a órbita dos planetas. Os critérios de correção de teorias na matemática são particulares da matemática, já que a matemática é *sui generis*, mesmo nas teorias do mundo em que ela entra como um fator de grande importância para o desenvolvimento da teoria. O que importa é que nenhuma sentença da matemática, nem mesmo um conjunto delas, implica em sentenças de observação categóricas.

O holismo confirmativo somente funciona se houver uma limitação nas próprias teorias matemáticas em relação às teorias que são usadas em teorias testáveis. Para elucidar melhor: o

---

mathematical theorems by seeing how useful they are to other branches of knowledge; we justify them in ways internal to mathematics – by proofs. (HYLTON, 2010, p. 80)

[85] Texto traduzido: Let me try to illustrate this by means of an example. Let R be the general theory of relativity. I take it that R is not by itself testable in Quine's sense. A lot of other theories and auxiliary hypotheses, including mathematical ones, are needed to derive syntetic observation categoricals. If A is the conjunction of the auxiliary theories, the compound theory RA is testable. (RA is the conjunction of R and A). Now let C be Gödel's axiom of contructibility, 'V=L', which says that all sets are constructible. I assume that C is not implied by RA, it is not needed to derive observation categorials from gereral relativity and it is not part of ordinary set theory. If C is added to RA we get RAC, Presumably, RA and RAC have the same empirical content (for the scientific community as a given time). C does not add anything to the empirical content of RA. But we would probably not say that whatever observation would be counted for or against RA would count equally for or against RAC. Presumably, RA and RAC are empirically equivalent in one of Quine's senses but not in the other. (BERGSTRÖM, 2004, p. 96-97)

holismo confirmativo somente é valido se todas as teorias matemáticas forem comprometidas com teorias testáveis e para fazer isso em teoria de conjuntos é necessário limitar as teorias de conjuntos àquelas mais econômicas tanto na produção de teoremas produzidos pelos axiomas quanto na ontologia da teoria.

Quine, Colyvan e Putnam são filósofos empiristas no sentido de admitir somente teorias testáveis. A filosofia deles mostra esse caminho, porque não existe uma verdade unicamente *a priori* (Putnam/Colyvan) ou analítica (Quine/Colyvan). As teorias científicas são nada mais do que construções humanas. As teorias tratam de objetos, mas a ontologia das teorias não pode extrapolar o estado corrente das teorias científicas: Conhecimento, epistemologia e ontologia andam juntos e o elo de ligação entre eles são as teorias científicas. Isso implica que as teorias científicas devem ter uma economia na sua ontologia, se possível, somente aquela ontologia de teorias testáveis.

De fato, como ele afirma em “Set Theory and its Logic” (QUINE, 1969), teorias de conjuntos podem ser “econômicas” e a economia pode ser uma motivação filosófica para a construção de uma teoria de conjuntos, como, por exemplo, uma teoria de conjuntos com o mínimo de objetos tratáveis. As motivações também podem ser metodológicas como, por exemplo, o tratamento de paradoxos, mas o mais importante é não mutilar a matemática clássica, porque a matemática clássica possui grande utilidade nas teorias testáveis. A teoria de conjuntos está restrita ao mínimo possível de objetos que não correspondem a conjuntos definidos de maneira impredicativa e por isso, parte da análise matemática clássica também é perdida. Grande parte da teoria dos infinitos é uma “grande viagem” para Quine, sem nenhuma contribuição importante para a matemática. É nesse sentido que o holismo confirmativo deve ser criticado: nem todas as teorias matemáticas possuem uma aplicação. Sendo assim, nem todas as sentenças da matemática são refutáveis no padrão do holismo confirmativo.

3 HOLISMO E A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE MADDY

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, serão vistos dois argumentos contra o holismo. Um do ponto de vista da aplicação da matemática e um do ponto de vista da justificação dos axiomas da teoria de conjuntos. O sucesso da matemática aplicada conta como um ponto muito importante para a manutenção do holismo, mas um argumento contra o holismo vem da própria aplicação da matemática como uma estrutura.

Filósofos holísticos costumam usar o argumento de que o sucesso da matemática nas aplicações da ciência reforça esse holismo. Isso tem uma consequência que é o argumento de indispensabilidade de objetos matemáticos abstratos para as teorias científicas. Maddy mostra que a crença na existência de objetos matemáticos abstratos não é garantida pela ciência aplicada. Pelo contrário, e aqui apelando aos resultados de sua filosofia da teoria de conjuntos, é a matemática que sustenta a crença em seus próprios objetos.

O cientista tende a ver a matemática como um depósito de estruturas vazias que ele visita de vez em quando para criar teorias e ter como consequência as descobertas científicas, mas isso não é o suficiente para sustentar o holismo confirmativo. Além disso, dado que as teorias matemáticas precisam ser adaptadas na aplicação, não há legitimidade nenhuma nas teorias científicas para tratar de objetos matemáticos abstratos.

A história da ciência mostra que a refutação de uma teoria científica não altera a matemática aplicada por essa teoria, o que também desconstrói a crença num holismo confirmativo. Em nenhum momento, na aplicação da matemática nas ciências, houve uma refutação de teorias matemáticas pela experiência. O holismo confirmativo não conseguiu provar que existe uma teoria matemática "errada", pois os métodos matemáticos são outros em relação à ciência. A metodologia científica está baseada na aplicação de um modelo frente a vários modelos (interpretações) num determinado campo do saber e nem sempre uma estrutura matemática é uma estrutura totalmente aplicável.

Do ponto de vista da matemática teórica, há a possibilidade de extrair outro argumento que envolve uma reflexão sobre os candidatos a axiomas da teoria de conjuntos. A prática consiste em introduzir axiomas para responder a problemas em aberto dos fundamentos da matemática. Esses axiomas não são ferramentas úteis à ciência unicamente, o que vai de encontro ao argumento de indispensabilidade da existência de objetos matemáticos abstratos para as nossas melhores teorias científicas. Será visto que os filósofos que defendem um holismo confirmativo terminam por defender ambas as ideias que serão criticadas por Maddy e a consequência nesses casos é uma limitação metodológica da prática matemática.

3.2 ESTRUTURALISMO E SUCESSO DA APLICAÇÃO DA MATEMÁTICA

3.2.1 Concepção da matemática como ciência das estruturas

A tese do holismo se fundamenta principalmente no sucesso da aplicação da matemática nas teorias científicas. Isso pode ser usado como um argumento em defesa do holismo confirmativo na matemática, pois o sucesso da matemática nas aplicações científicas pode sugerir que ambas – ciência e matemática – seguem o mesmo caminho e praticamente usam a mesma metodologia. Segundo a interpretação holística, a prática matemática tende a ser vista como um método semelhante ao das ciências empíricas. Enquanto a ciência mantém um método empírico, a matemática mantém um método quase empírico: Matemática e ciências em geral postulam hipóteses (axiomas) e derivam resultados a partir disso (teoremas). Isso é uma tentativa de aproximar as duas áreas sempre com uma tendência às ciências empíricas no sentido de Putnam e Colyvan.

Pode-se inverter essa situação a favor do método axiomático, afirmando que as hipóteses científicas podem ser formalizadas em axiomas e então imergir essa estrutura[86] em outra maior, que é a matemática, apesar de a matemática "não ter nada a ver" com a ciência formalizada em axiomas. Essa última interpretação está de acordo com a constatação de Maddy de que a matemática é uma "fábrica de estruturas", não importando a utilidade ou não dessa estrutura.

Considerar a matemática como ciência das estruturas não retira o papel importante da matemática na descoberta e explicação de fenômenos. A ideia de Hempel (1983) de que a matemática é um "extrator de suco" é uma analogia que será explorado. Nessa analogia, as estruturas matemáticas são vazias de conteúdo empírico, mas leva a ciência a extrair mais informação dos fenômenos. Isso é relevante nessa discussão sobre aplicação da matemática e suas consequências teóricas:

> A função da matemática aqui aplicada não é nem um pouco preditiva; mas, sim, analítica ou explicativa: ela torna explícita certas hipóteses ou asserções que estão inclusas no conteúdo das premissas do argumento (...); o raciocínio matemático revela que aquelas premissas contêm – escondidas nelas, por assim, dizer – uma asserção sobre o caso que ainda não foi observada. (...) O raciocínio matemático, bem como o

---

[86] Será detalhada a noção de estrutura mais abaixo.

> raciocínio lógico, é uma técnica de tornar explícito o que está implicitamente contido num conjunto de premissas. As conclusões as quais essas técnicas levam não afirmam nada que é *teoricamente novo* no sentido de não estar no conteúdo das premissas. (HEMPEL, 1983, p. 390, tradução nossa)[87]

Essas características da analogia de Hempel podem ser exploradas no estruturalismo. A concepção de aplicação estrutural tem sido mais reconhecida entre os estruturalistas e o naturalismo metodológico de Maddy também. O naturalismo de Maddy admite uma grande estrutura, uma teoria de conjuntos específica, onde qualquer outra estrutura pode ser embebida. Isso acontece porque na ciência, ao construir modelos, busca-se um formalismo matemático em que se acredita estar pronto para o uso em alguma aplicação e esse formalismo deve ser uma estrutura já mapeada dentro da teoria de conjuntos, que deve ser muito maior. Essas modelagens serão exploradas quando for tratado Krause e Arenhart (2017) e Bueno e Colyvan (2011).

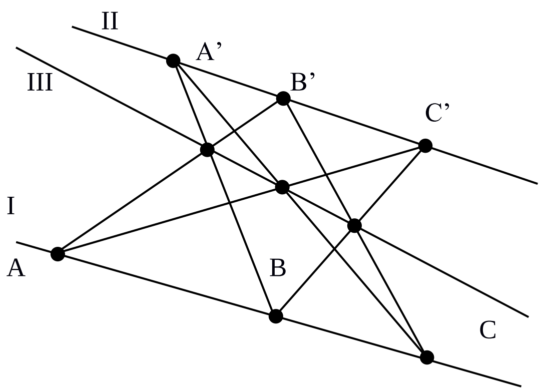
Mesmo que essa interpretação quase empírica seja feita, conforme mostrado no capítulo anterior, ela não esclarece em nenhum momento sobre a proximidade da matemática em relação às demais ciências. Matemáticos podem propor hipóteses até então não demonstradas, podem propor novos axiomas como hipóteses, mas o "teste" dessas hipóteses não é o mesmo em relação às demais ciências, o que torna inapropriada essa denominação de método quase empírico. Não há como sustentar um método quase empírico numa concepção da matemática que envolve a produção de teorias até então não aplicadas. O apontamento das metodologias constantes na matemática para um estruturalismo se tornou mais comum e dá conta de tratar a situação dessas teorias matemáticas não aplicadas.

A concepção ontológica da matemática como estrutura pode ser feita da seguinte maneira: Uma estrutura é uma multiplicidade de objetos e as relações entre esses objetos (RESNIK, 1997). A estrutura matemática é padrão de relação. Números naturais podem ocupar o lugar de conjuntos específicos e compartilhar padrões específicos da teoria de conjuntos se a teoria possuir um tipo isomórfico dentro da teoria de conjuntos. Assim, uma estrutura pode ser explorada em qualquer linguagem matemática disponível. Um caso interessante de isomorfismo entre estruturas da geometria projetiva consiste em mostrar resultados a partir de teoremas duais. Nagel e Newman (2004, p. 65), por exemplo, mostram o teorema Pappus e sua forma dual. Vejamos:

---

[87] Texto traduzido: The function of the mathematics here applied is not predictive at all; rather, it is analytic or explicative: it renders explicit certain assumptions or assertions which are included in the content of the premises of the argument (…); mathematical reasoning reveals that those premises contain – hidden in them, as it were, - an assertion about the case as yet unobserved. (…) Mathematical as well as logical reasoning is a conceptual technique of making explicit what is implicitly contained in a set of premises. The conclusions to which this technique leads assert nothing that is *theoretically new* in the sense of not being contained in the content of the premises. (HEMPEL, 1983, p. 390)

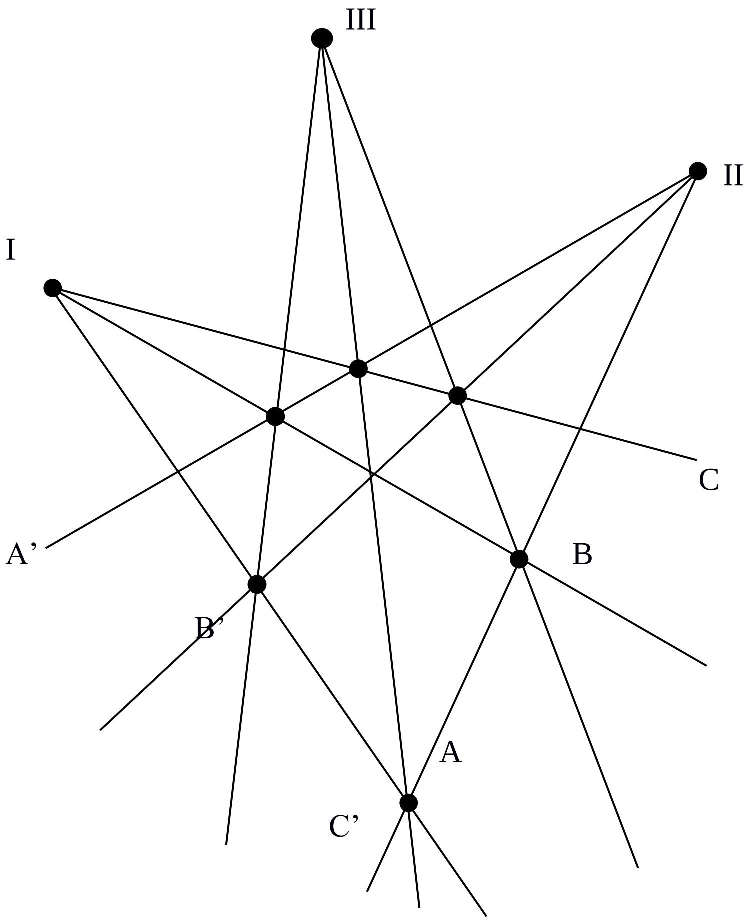
Figura 3 - Teorema de Pappus



Fonte: Adaptado de Nagel e Newman (2004, p. 65)

A figura acima mostra três pontos distintos na linha I, A, B, C. E outros três pontos distintos na linha II, A’, B’, C’. Ao traçar uma reta ligando todos os pontos de ambas as retas, sem que haja uma ligação entre os pontos que possuem a mesma letra conforme a sua posição, tem-se a figura acima. Observa-se que o ponto de cruzamento das semirretas de ligação são colineares, ou seja, é possível traçar uma reta entre esses pontos. Aqui tem-se uma estrutura que trata dois objetos matemáticos: "reta" e "ponto" que estão numa determinada relação. Agora, ao trocar de posição na estrutura os objetos para "ponto" e "reta", mas conservando as mesmas relações, tem-se o teorema dual da seguinte forma: a figura abaixo mostra três retas distintas a partir do ponto I, A, B, C. E outras três retas distintas a partir do ponto II, A’, B’, C’. Ao marcar um ponto ligando todas as retas de ambos os pontos sem que haja uma ligação entre as retas que possuem a mesma letra conforme a sua posição, tem-se a Figura 4 abaixo. Observa-se que a reta de cruzamento das retas de ligação são copontuais, ou seja, é possível traçar um ponto de cruzamento entre essas retas:

Figura 4 - Teorema dual de Pappus



Fonte: Adaptado de Nagel e Newman (2004, p. 65)

O famoso exemplo de Nagel e Newman (2004) mostra que há uma repetição de padrão no mesmo campo por conservar as mesmas estruturas. Nota-se que essa prática de estabelecimento de tipos isomórficos é algo comum e corriqueiro na prática matemática e faz com que alguns resultados possam ser conseguidos simplesmente interpretando a estrutura com um domínio de objetos distinto.

A situação pode servir para campos diversos da ciência em relação à aplicação da matemática onde se tenta realizar isomorfismos e então inferir descobertas no campo da ciência. Tudo que importa aqui é preservar a estrutura, não os objetos, mas as relações entre os objetos. Um matemático estruturalista está preocupado com a relação entre objetos, que pode ser modificada a partir dos axiomas da teoria. Isso facilita a criação de novas teorias, pois cada estrutura possui seu próprio conjunto de axiomas. Quando se quer fazer a mudança de uma estrutura, muda-se, deleta-se ou acrescenta-se um ou alguns dos axiomas. Como resultado desse processo, novas teorias matemáticas são criadas. As estruturas podem modelar dentro delas o que ocorre em outras estruturas, o que ocorre quando a teoria de conjuntos interpreta a teoria dos números ou qualquer outra teoria matemática dentro de si. Da mesma maneira, teorias científicas podem ser modeladas dentro da teoria de conjuntos, pois teorias científicas fazem uso de teorias matemáticas ali mapeadas.

Essa concepção da matemática como uma estrutura tem consequências sobre o holismo. Uma das consequências é que há mais relações entre objetos matemáticos que os objetos que satisfazem as partes de estruturas úteis às teorias científicas. Apesar do sucesso da matemática, ela está além de qualquer aplicação, pois as teorias científicas estão imersas em teorias matemáticas ou estruturas com cardinalidade maior que as suas aplicações. Vejamos o que Krause e Arenhart (2017) dizem a respeito:

> Essa estrutura pode então ser imersa em estruturas, algumas ainda maiores, antes de ser imersa num modelo da teoria. Modelos da teoria em geral usam conceitos matemáticos que não têm análogos na experiência, e então não podem ser diretamente aplicados à natureza. Então, embora esta seja uma descrição muito superficial da relação entre teorias e dados, isomorfismos estão envolvidos durante todo o processo. (KRAUSE; ARENHART, 2017, locais do Kindle 591-594, tradução nossa)[88]

É importante notar que a prática matemática pode ser completamente teórica, tanto na criação de modelos quanto na demonstração de teoremas e verificação da consistência das teorias. Esses processos terminam "gerando mais (meta)matemática" para tratar de assuntos da própria matemática, o que aumenta o escopo de tratamento das teorias matemáticas para além das questões concretas inevitavelmente. Como há mais relações matemáticas dentro das estruturas, a noção de holismo pode se perder. Será possível entender melhor como isso ocorre quando for visto a noção de método axiomático mais abaixo.

3.2.2 Métodos axiomáticos e aplicação nas ciências

Feynman (1985) sustenta que a matemática é um conjunto de raciocínios. Hempel (1983) sustenta algo parecido em relação à matemática. Isso se aproxima de certa maneira dessa

[88] Texto traduzido: This structure then may be embedded in still some larger structures before being embedded in a model of the theory. Models of the theory in general use mathematical concepts that don't have analogous in experience, and so cannot be directly applied to nature. So, even though this was a very rough description of the relation between theories and data, isomorphisms are involved throughout the whole process. (KRAUSE; ANHEHART, 2017, Locais do Kindle 591-594)

interpretação estrutural, pois uma estrutura pode ser vista como um conjunto de relações (raciocínios) a serem preenchidas com informações sobre a situação empírica. Por outro lado, tanto Feynman quanto Krause e Arenhart (2017), apesar de defenderem um ponto de vista axiomático, não veem a aplicação da matemática excepcionalmente como um sistema axiomático. A axiomatização de teorias científicas ocorre em estágios e a matemática usada nessas teorias tende a ser aceita sem se apelar para os fundamentos da matemática, onde ocorre a demonstração das sentenças matemática úteis à ciência. Eles classificam dois tipos de prática matemática: uma babilônica e uma grega. A pratica matemática babilônica é algébrica e não demonstrativa. A prática grega é demonstrativa ou axiomática.

Para Feynman, a prática grega é teórica, ligada a fundamentos e a prática babilônica é a aceitação de fórmulas sem demonstração. A prática babilônica está mais próxima à aplicação da matemática que a prática de realizar demonstrações, pois a aplicação da matemática à física pode ocorrer, na maioria das vezes, somente pela utilização de fragmentos de demonstrações, usando teoremas matemáticos sem a preocupação de demonstrá-los a partir dos fundamentos da matemática, o que Krause e Arenhart (2017) também reconhecem: "Axiomatização não é uma marca do status científico *per se*" (Posição Kindle 2155, tradução nossa)[89].

A prática grega leva a mais complexidades matemáticas que aparentemente não têm utilidade na ciência em geral para os que praticam a ciência com bases matemáticas no estilo babilônico. Por exemplo, a prática grega pode unificar uma teoria num conjunto sucinto de proposições. A matemática moderna está concentrada na prática matemática grega, demonstrativa ou axiomática. A prática focada no método axiomático claramente possui vantagens relacionadas à metamatemática, estudos de fundamentos e descobertas de relações teóricas que não são perceptíveis no método babilônico. Não é dever do cientista investigar os fundamentos da matemática, mas essas duas concepções matemáticas distintas não são excludentes.

Dentro da própria ciência há a utilização do método axiomático se considerar um conjunto de fórmulas como um conjunto de axiomas de uma teoria, mas sem levar ao extremo dos fundamentos da matemática. Um modelo matemático de uma determinada situação, como o conjunto de leis físicas de um lançamento de satélites, pode ser visto como a derivação a partir de um sistema axiomático das leis de Newton. Das fórmulas desse modelo podem ser geradas várias conclusões a partir de deduções que podem relacionar, por exemplo, o peso do foguete

---

[89] Texto traduzido: Axiomatization is not a mark of scientific status *per se*. (KRAUSE; ARENHART, 2017, Kindle 2155)

que carrega o satélite, a velocidade e a altura necessária para que o satélite permaneça em órbita. Obviamente que isso não é um modelo axiomático geral como na matemática, mas um conjunto de fórmulas derivadas de um conjunto de axiomas que são formalizações de hipóteses numa teoria. Isso mostra que os axiomas possuem uma gradação a ser considerada abaixo em axiomática concreta, axiomática abstrata e axiomática formal.

3.2.2.1 Axiomática concreta

Krause e Arenhart (2017, posição Kindle 827-829) elaboram uma gradação dos axiomas das teorias: axiomática concreta, abstrata e formal. Axiomática concreta é feita quando há um domínio de aplicação, seja uma teoria científica como a física ou a biologia, seja uma teoria matemática com um domínio de objetos bem definido, como a aritmética, a teoria de conjuntos e a geometria. O papel dos axiomas aqui é prover um corpo de conhecimentos "limpo" e a principal proposta é que todo o desenvolvimento da teoria seja demonstrado a partir de um conjunto finito de axiomas. Esse tipo de axiomática, como no caso da aritmética, não é completa e pode ter potencialmente mais axiomas acrescentados.

Não somente as teorias matemáticas podem ser desenvolvidas na forma axiomática. Se a axiomática concreta é sobre uma teoria científica de base empírica, seus axiomas tendem a mudar acompanhando as mudanças da teoria científica. Uma teoria axiomática sobre uma teoria biológica pode sofrer mudanças mais drásticas que uma teoria matemática. Por exemplo, se um cientista elabora teoria axiomática sobre a relação parental entre humanos, um axioma verdadeiro para esse universo de discurso é "Todo ser humano tem somente um único pai que é um ser humano macho" (KRAUSE; ARENHART, 2017, posição kindle 851, tradução nossa)[90]. Se no futuro, por manipulação do material genético contido nos óvulos, conseguir-se fecundar um óvulo com o material de outro óvulo, e nascer um ser humano em condições aceitáveis de saúde, a sentença desse sistema axiomático deve ser revista. Assim, uma axiomática concreta de base científica tende a mudar mais que uma axiomática de base matemática. Vejamos o que pensa Hempel (1983) a respeito:

> E enquanto as proposições da ciência empírica, que são sintéticas e podem ser validadas somente *a posteriori*, são constantemente sujeitas à revisão sob a luz de

[90] Texto traduzido: All living human being have only one father who is a male human being. (KRAUSE; ARENHART, 2017, posição kindle 851)

> nova evidência, a verdade de uma proposição analítica pode ser estabelecida definitivamente, de uma vez por todas. (HEMPEL, 1983, p. 379, tradução nossa)[91]

Esse tipo de axiomática se relaciona com a confirmação e refutação de hipóteses científicas, pois a refutação de uma hipótese teórica acarreta em uma mudança no sistema axiomático dessa teoria quando há a criação de uma nova teoria. Mas isso não atinge a matemática da teoria, então, ao se desenvolver um sistema axiomático (ou um modelo) sobre uma teoria científica e essa venha a ser refutada, não significa que a matemática envolvida venha a ser refutada.

3.2.2.2 Axiomática abstrata e formal

Ao contrário da axiomática contreta, a axiomática abstrata engloba todas as relações numa única estrutura de uma única vez. Esse é o caso das teorias matemáticas. Como resultado dessa abstração, a sua característica é unificar campos teóricos distintos, evitando assim uma proliferação de disciplinas, padronizando-as numa única forma de raciocínio, como é o caso da teoria de conjuntos que, mesmo sendo considerada uma axiomática concreta por elucidar relações entre um objeto bem definido, mapeia várias teorias matemáticas sob a forma de conjuntos. A teoria de conjuntos pode ser alçada ao nível de uma axiomática abstrata nesse sentido, pois o matemático estruturalista pode construir uma estrutura que seja válida para um domínio de objetos extenso a partir da axiomática concreta e obter resultados além dos esperados na axiomática concreta.

Na criação de um modelo científico, é a axiomática abstrata que dará conta da derivação de novas proposições sobre o campo científico ou matemático. A teoria de conjuntos que está sendo tratada nesse exemplo de axiomática abstrata possui inúmeros resultados matemáticos que, se adequadamente interpretados, podem ser úteis ao serem interpretados nas teorias científicas. Os resultados, inclusive, podem ser incorporados por teorias matemáticas com axiomática concreta, como um resultado da teoria de conjuntos sendo incorporado pela teoria dos grafos e esse resultado, por sua vez, pode ser útil num modelo científico de economia ou estatística.

---

[91] Texto traduzido:And while the statements of empirical science, which are synthetic and can be validated only *a posteriori*, are constantly subject to revision in the light of new evidence, the truth of an analytic statement can be established definitely, once and for all. (HEMPEL, 1983, p. 379)

A axiomática formal é aquela que deixa explícita a lógica formal concatenada à teoria, que inclusive pode ser uma lógica não-clássica. Vejamos uma citação de Hempel que resume bem o papel da lógica nas teorias axiomatizadas:

> Para ser inteiramente preciso, é necessário também especificar os princípios da lógica que serão usados na demonstração da proposição, por exemplo, em suas deduções a partir dos postulados. Esses princípios podem ser afirmados explicitamente. Eles caem em dois grupos: Sentenças primitivas, ou postulados, da lógica (tais como: Se *p* e *q* é o caso, então *p* é o caso), e leis da dedução ou inferência (incluindo, por exemplo, e regra familiar modus ponens e as regras de substituição que tornam possível inferir, de uma proposição geral, qualquer uma de suas instâncias de substituição). (HEMPEL, 1983, p. 381, tradução nossa)[92]

É a parte do método axiomático que define a lógica a ser usada numa teoria axiomatizada. Uma teoria axiomatizada deixa explícita a lógica, os axiomas da teoria e os axiomas da matemática usada na teoria. No entanto, na ciência, alguns axiomas podem ser suprimidos e o cientista pode usar somente alguns resultados como no sentido da prática babilônica.

O cientista usa números reais, pois são úteis em medições, equações, etc. Números reais podem ser formalizados dentro da teoria de conjuntos a partir dos cortes de Dedekind ou das sequências de Cauchy, mas na ciência não é necessário fazer tais demonstrações. Essas construções podem ser feitas em grande parte dentro da teoria de conjuntos de Zermelo, Z, que é base de uma variedade de teoria de conjuntos ao se adicionar mais axiomas em Z. Diante dessa situação, ao criar teorias axiomáticas em que há a utilização de teoria de conjuntos unicamente útil para a ciência, a discussão sobre os axiomas concatenados a Z não são interessantes, pois o resultado matemático útil não deverá mudar muita coisa, assim como há muito o que mudar em relação a um universo de conjuntos equivalente aos números naturais e inteiros. Não importa ao cientista saber em qual teoria de conjuntos se está trabalhando. Sempre haverá um novo axioma a ser adicionado em Z como axiomática abstrata, guardada a consistência da teoria resultante, que não afeta os resultados teóricos propostos por Z.

Questões de fundamentos da matemática pouco afetam a matemática aplicada. Algumas teorias científicas podem ser apresentadas sem método axiomático, mas o que importa para um cientista não é a axiomática da matemática teórica. Tudo na matemática pode ser apresentado

---

[92] Texto traduzido: To be entirely precise, it is necessary also to specify the principles of logic which are to be used in the proof of the proposition, i.e. in their deductions from the postulates. These principles can be stated quite explicitly. They fall into two groups: Primitive sentences, or postulates, of logic (such as: If *p* and *q* is the case, then *p* is the case), and rules of deduction or inference (including, for example, the familiar modus ponens rule and the rules of substitution which make it possible to infer, from a general proposition, any one of its substitution instances). (HEMPEL, 1983, p. 381)

em forma axiomática e mesmo as sentenças que não são demonstradas, há o programa de tentar demonstrar todas as sentenças. Diante dessa situação, o cientista tem duas opções: construir uma axiomatização que use os três níveis concreto, abstrato e formal, concatenando os axiomas da teoria que deseja desenvover ou deixar esses axiomas implícitos e introduzir somente os axiomas da teoria. O papel do matemático é gerar novas teorias que podem ser aproveitadas em novas teorias físicas, mas não ocorre necessariamente, no caso da física, apresentar a matemática utilizada na forma de axiomas da teoria de conjuntos:

> A atitude babilônica – ou o que eu chamo matemática babilônica – é que você conhece todos dos vários teoremas e muitas das conexões entre eles, mas você nunca notou que eles todos vêm de um punhado de axiomas. A maioria dos matemáticos modernos concentra-se em axiomas e demonstrações em que um esquema bem definido de convenções do que é aceitável e o que não é aceitável como axiomas. (FEYNMAN, 1985, p. 47, tradução nossa)[93]

Um físico não está necessariamente interessado no caminho que um matemático percorreu para demonstrar algum teorema específico, mas nos resultados que podem ser úteis. Mesmo que uma teoria científica venha a ser axiomatizada, não há um interesse científico unicamente pela axiomatização proporcionada pelos fundamentos da matemática. Na ciência, pode haver uma axiomatização das três leis de Newton, da teoria da evolução de Darwin, das várias teorias quânticas, mas apenas aceitando os teoremas das teorias matemáticas e lógicas como dados. Nesse sentido, a axiomatização mais usada para a ciência tem sido a axiomatização concreta com um objeto bem definido e sem extrapolar muito do que a sua própria teoria diz.

Da axiomatização concreta, aquilo que define as regras básicas de uma teoria, são estabelecidas as modelagens matemáticas de uma situação empírica. Essa modelagem matemática pode ser usada para a derivação de algumas consequências teóricas, mas o alcance dessas demonstrações não atinge a axiomática abstrata ou formal usada pela teoria. A axiomática abstrata e formal é admitida para a operação das demonstrações e derivações dentro de modelos científicos e como essas axiomáticas são estruturas, basta ao cientista escolher uma ou mais entre as várias estruturas abstratas existentes.

---

[93] Texto traduzido: The Babylonian attitude - or what I call Babylonian mathematics - is that you know all of the various theorems and many of the connections in between, but you have never fully realized that it could all come up from a bunch of axioms. The most modern mathematics concentrates on axioms and demonstrations within a very definite framework of conventions of what is acceptable and what is not acceptable as axioms. (FEYNMAN, 1985, p. 47)

A ciência também lida com axiomas para então elaborar a modelagem matemática de teorias e situações, mas esses axiomas possuem um alcance explicativo muito curto. Eles são satisfeitos por um conjunto específico de fenômenos, onde as teorias mudam de situação para situação. Um axioma numa teoria pode ser mudado para que a teoria dê conta de explicar um fenômeno quântico específico, por exemplo. Em alguns casos, todos os axiomas da teoria devem ser abandonados. O que se faz então é construir outra teoria que dê conta dos fenômenos. Vale lembrar mais uma vez que isso não implica em abandonar a matemática usada nessas elaborações, que, apesar de possuir um papel decisivo na explicação, mantém as suas estruturas inertes vindas da axiomática abstrata.

A matemática é preparada especialmente pelos matemáticos em outro momento até o ponto de se desenvolver uma axiomática abstrata, em alguns casos, e usada de modo específico nas teorias físicas, mas as constantes trocas de axiomas na física não afetam de maneira nenhuma as construções matemáticas: "Matemáticos estão somente lidando com a estrutura de raciocínio, e eles não se importam realmente com o que eles estão falando" (FEYNMAN, 1985, p. 55, tradução nossa)[94]. Uma hipótese científica, axiomática concreta, não é tão generalista quanto os axiomas da matemática e da lógica. A refutação de uma hipótese científica não significa que a matemática envolvida será refutada, apesar da matemática ser parte responsável pelo sucesso de teorias científicas. Isso não caracteriza a matemática como quase empírica.

Pode-se esquematizar esses níveis de axiomatização da seguinte maneira:

i) Axiomática formal: Lógica;
ii) Axiomática abstrata: Teoria de conjuntos;
iii) Axiomática concreta:
    a. Teoria matemática específica;
    b. Teoria científica específica;
        i. Modelagem matemática aplicada.

É interessante notar como contraponto à ideia de sucesso da aplicação da matemática que existem teorias científicas que usam da matemática corretamente, mas que foram refutadas logo em seguida, mostrando que a ciência aplicada é que não garantiu êxito, mas as teorias matemáticas nunca foram envolvidas nessas refutações. Apesar de muitas teorias científicas serem descartadas, descartar um modelo específico não significa estar descartando ou

[94] Texto traduzido: "Mathematicians are only dealing with the structure of reasoning, and they do not really care what they are talking about." (FEYNMAN, 1985, p. 55)

falsificando. Vejamos abaixo o que Hempel (1983) diz a respeito de uma possibilidade de o holismo confirmativo ser aplicado na matemática. Essa possibilidade pode gerar um absurdo:

> À luz dessa observação, considere agora uma simples "hipótese" da aritmética: 3+2 = 5. Se isso é de fato uma generalização empírica de experiências do passado, então deve ser possível declarar qual tipo de evidência nos obrigaria a conceder a hipótese não como verdadeira. Se qualquer evidência de refutação para a dada proposição pode ser pensada, a seguinte ilustração pode bem ser um tipo disso: Colocamos alguns micróbios numa lâmina, depositamos primeiro três deles e então outros dois. Depois contamos todos os micróbios para testar se nessa instância 3 e 2 de fato são somados até dar 5. Suponha agora que contamos 6 micróbios juntos. Poderíamos considerar isso como uma refutação empírica à dada proposição, ou ao menos como uma demonstração de que isso não se aplica a micróbios? Claramente não; em vez disso, poderíamos assumir que erramos ao contar um dos micróbios ou separamos em dois um dos micróbios entre a primeira e a segunda contagem. (HEMPEL, 1983, p. 378-379, tradução nossa)[95]

O exemplo pode parecer absurdo, mas mostra que as teorias matemáticas não podem ser refutadas pela experiência como se prevê no holismo confirmativo. As funções trigonométricas usadas por Ptolomeu ou a teoria dos sólidos platônicos usadas por Kepler para compreender o funcionamento das órbitas dos planetas são exemplos desse caso. Ambas as teorias matemáticas são coerentes, mas essas hipóteses astronômicas foram refutadas. Nesses casos, a ciência foi refutada, mas a matemática não.

Há muito fracasso na ciência que usa de boa matemática e a matemática usada numa teoria refutada é útil novamente em outros campos da ciência em alguns casos. De qualquer modo, casos como esses não são o suficiente para se inferir um holismo confirmativo dentro da matemática, pois a estrutura das teorias matemáticas sempre se manteve intacta no caso de falha das explicações não-matemáticas do mundo. Tampouco o sucesso da aplicação da matemática nas ciências, por mais que ele ocorra, não deve ser visto como o único fator para se avaliar a possibilidade de crença na tese do holismo.

Algumas fórmulas de modelos matemáticos de teorias distintas podem levar à novas descobertas científicas. Um exemplo disso é o uso das transformadas de Lorentz na teoria da

---

[95] Texto traduzido: In the light of this remark, consider now a simple "hypothesis" from arithmetic: 3+2 = 5. If this is actually an empirical generalization of past experiences, then it must be possible to state what kind of evidence would oblige us to concede the hypothesis was not generally true after all. If any disconfirming evidence for the given proposition can be thought of, the following illustration might well be typical of it: We place some microbes on a slide, putting down first three of them and then another two. Afterwards we count all the microbes to test whether in this instance 3 and 2 actually added up to 5. Suppose now that we counted 6 microbes altogether. Would we consider this as an empirical disconfirmation of the given proposition, or at least as a proof that it does not apply to microbes? Clearly not; rather, we would assume we had made a mistake in counting or that one of the microbes had split in two between the first and the second count. (HEMPEL, 1983, p. 378-379)

relatividade especial vista no capítulo 2. As transformadas aparecem a primeira vez em um artigo de Voight sobre o princípio de Doppler, onde o tempo local $t' = \gamma t(c - v)/c$ (ERNSTY; HSU, 2001) para o sistema de referências em movimento era considerado apenas um artifício matemático[96]. Lorentz usou as transformadas em seus estudos sobre o movimento dos elétrons e os fenômenos eletromagnéticos envolvidos. Para Lorentz, o elétron sofre uma contração por se movimentar em altas velocidades contra o éter. Em suas transformadas, o tempo em relação a esse éter em repouso sofre uma dilatação, mas mesmo assim o tempo local e a sua dilatação foram desconsiderados, sendo vistos apenas como um artifício matemático. Lorentz e Voight ainda estavam imersos no paradigma do tempo absoluto da física clássica e da complicada noção de um éter que ocuparia todo o espaço e representaria o repouso absoluto.

Einstein mais tarde interpretou o tempo local t' não como um artifício matemático, mas como realmente a dilatação do tempo (EINSTEIN, 2015, p. 46) e Einstein limpou as transformadas de Lorentz da noção de contração de um corpo contra um éter, introduzindo a noção de contração do espaço em altas velocidades. Isso elevou as transformadas de Lorentz ao patamar da criação de outro paradigma para a física, mas a história nos mostra como alguns cálculos matemáticos e variáveis ainda não interpretadas podem demorar a ter uma interpretação física bem-sucedida. Isso acontece quando os físicos estão prestes a entrarem em um novo paradigma, onde as estruturas matemáticas (ou fórmulas usadas nos modelos matemáticos) carregam mais informações do que a linguagem da física é capaz de suportar, mostrando que o isomorfismo entre matemática e física não é perfeito e deve-se analisar essa relação mais abaixo.

3.3 APLICAÇÃO ESTRUTURAL E A SEPARAÇÃO DAS CIÊNCIAS

A partir do século XIX, matemática passou a ser um repositório de estruturas matemáticas. Estruturas são teorias que até podem ser úteis, mas que não são criadas exatamente para essa finalidade, tornando a aplicação da matemática somente mais uma das funções da matemática:

---

[96] Lorentz reconhece que a ideia do tempo local é de Voight numa carta pessoal: "Claro que eu não perderei a oportunidade de mencionar, que a transformada en questão e a introdução de um tempo local foi sua ideia. Sinceramente, H. A. Lorentz" (*Apud* ERNSTY e HSU, 2001 pág. 214, tradução nossa). Texto traduzido: Of course I will not miss the first opportunity to mention, that the concerned transformation and the introduction of a local time has been your idea. Sincerely, Your H. A. Lorentz. (*Apud* ERNSTY e HSU, 2001 p. 214)

> Em contraste, após os desenvolvimentos que estamos traçando, a matemática foi libertada para perseguir questões sem aplicação, ela foi encorajada a estocar os depósitos com estruturas e deixar as escolhas para os cientistas naturais, e até mesmo as construções matemáticas que funcionam em aplicações o fazem assim com uma nova autonomia como modelos abstratos livres. (MADDY, 2011, p. 31, tradução nossa)[97]

A matemática como estrutura possui uma condição metodológica diferente. Sem o lastro vindo da própria experiência, os matemáticos estão livres para criar teorias. É certo que, no desenvolvimento da ciência, a matemática pôde ser desenvolvida com a ajuda da física, da mesma maneira que existem casos em que as teorias matemáticas foram desenvolvidas antes da sua aplicação na física. Mesmo que os cientistas venham a forçar o desenvolvimento da matemática, quando essa teoria é entregue aos matemáticos, seu desenvolvimento pode rapidamente rumar para uma atividade unicamente teórica. Aqui, o aparecimento da matemática como abstrata é importante e isso não significa que teorias matemáticas foram postas em teste como pensam os defensores do holismo. Vejamos o que Feynman diz a respeito:

> Quando os problemas na física se tornam difíceis podemos sempre olhar para os matemáticos, que podem de fato ter estudado tais coisas e terem preparado uma linha de raciocínio para nós seguirmos. Por outro lado, eles podem não ter feito isso, e nesse caso temos que inventar nossa própria linha de raciocínio, que então é repassada para os matemáticos. Todo mundo que raciocina cuidadosamente sobre qualquer coisa está fazendo uma contribuição para o conhecimento do que acontece quando você pensa sobre alguma coisa, e se você abstrai ao máximo e envia isso para o departamento de matemática, eles colocam isso em livros como um ramo da matemática. Matemática, então, é um modo de ir de um conjunto de proposições a outro. (FEYNMAN, 1985, p. 45, tradução nossa)[98]

Essa atitude de um físico perante a matemática mostra que, dentro das várias ciências existentes, há uma espécie de divisão do trabalho natural para cada campo da ciência. O físico toma do matemático aquilo que lhe interessa e o matemático desenvolve as teorias ao máximo ou à sua vontade (RESNIK, 1997) e (MADDY, 2011). Vejamos o que afirma a respeito o filósofo estruturalista Michael Resnik:

---

[97] Texto traduzido: In contrast, after the developments we've been tracing, mathematics has been freed to pursue inquiries without application, it's encouraged to stock the warehouses with structures and leave the choices to the natural scientists, and even the mathematical constructs that do function in application do so with a new autonomy as free-standing abstract models. (MADDY, 2011, p. 31)

[98] Texto traduzido: When the problems in physics become difficult we may often look to the mathematicians, who may already have studied such things and have prepared a line of reasoning for us to follow. On the other hand, they may not have, in which case we have to invent our own line of reasoning, which we then pass back to the mathematicians. Everybody who reasons carefully about anything is making a contribution to the knowledge of what happens when you think about something, and if you abstract it away and send it to the Department of Mathematics they put it in books as a branch of mathematics. Mathematics, then, is a way of going from one set of statements to another. (FEYNMAN, 1985, p. 45)

> A matemática é a nossa teoria mais global como é pressuposta pela física, que por sua vez é pressuposta pela química, etc. Nós não somente usamos as verdades da matemática em derivações físicas, nós também usamos padrões matemáticos para criticar argumentos físicos e teorias (por exemplo, nós reclamamos sobre a respeitabilidade matemática da teoria quântica de campo). Ao longo dessa divisão das ciências uma divisão de trabalho é envolvida: matemáticos normalmente não se intrometem na física nem físicos na matemática, e biólogos e químicos não são normalmente competentes para sugerir mudanças na matemática ou física mesmo quando eles querem vê-las mudadas. (RESNIK, 1997, p. 125, tradução nossa)[99]

Vemos em Resnik a divisão entre o que é matemática e o que não é, separando claramente a ciência aplicada da matemática. É daí que Wigner pode alegar que o sucesso da aplicação da matemática é um milagre, exaltando o papel da matemática nas teorias científicas, mesmo que essa não tenha nenhuma ligação com a ciência. Wigner, ao olhar para a matemática teórica até então não aplicada, chamaria de um milagre caso a matemática pura tenha aplicação[100]:

> É difícil evitar a impressão de que um milagre nos confronta aqui, quase comparável em sua impressionante natureza como o milagre de que a mente humana pode construir vários argumentos juntos sem cair em contradição, ou os dois milagres da existência de leis da natureza e da capacidade mente humana de dividi-los. (WIGNER, 1960, p. 5, tradução nossa)[101]

Wigner não defende o holismo. Seu espanto mostra, ao contrário, que a matemática está realmente apartada da física. Isso está de acordo com o pensamento de que as teorias matemáticas podem ser criadas sem nenhuma motivação física, pois há casos em que a teoria matemática se desenvolve livremente anteriormente a qualquer aplicação e caso venha a ser aplicada é aí que mora o mistério. Uma direção para sair dessa situação miraculosa ocorre se

---

[99] Texto em inglês: Mathematics is our most global theory as it is presupposed by physics, which in turn is presupposed by chemistry, etc. We not only use mathematical truths in physical derivations, we also use mathematical standards to criticize physical arguments and theories (for example, we complain about the mathematical respectability of quantum field theory). Along with this rough division of the sciences a division of labor has evolved: mathematicians normally do not meddle in physics nor physicists in mathematics, and biologists and chemists are normally not competent to suggest changes in mathematics or physics even when they might want to see them changed. (RESNIK, 1997, p. 125)

[100] Esse tipo de alegação não é novo. Desde a antiguidade, grandes matemáticos, físicos e filósofos têm envolvido a matemática em elementos culturais fora da matemática. Pitágoras considerava os números e a matemática como o princípio de todas as coisas. Galileu afirmava que a matemática é a linguagem da natureza. Cantor e Bolzano, ao introduzirem teorias sobre o infinito atual apelam para argumentos teológicos. Essas motivações ou espantos teóricos não têm nenhuma ligação entre as teorias matemáticas ou científicas criadas. A grande diferença aqui é o apelo ao espanto na aplicação da matemática.

[101] Texto traduzido: It is difficult to avoid the impression that a miracle confronts us here, quite comparable in its striking nature to the miracle that the human mind can string a thousand arguments together without getting itself into contradictions, or to the two miracles of the existence of laws of nature and of the human mind’s capacity to divine them. (WIGNER, 1960, p. 5)

entendesse a aplicação da matemática como a aplicação de uma estrutura, salvaguardando as possíveis modificações a serem feitas nessa estrutura para a aplicação.

A prática matemática de demonstrar teoremas leva a resultados que são indispensáveis na ciência. Mantém-se assim a constatação do sucesso da matemática nas teorias científicas, mas a sua aplicação estrutural na construção de teorias científicas não implica no holismo. O argumento de indispensabilidade da matemática é uma consequência do holismo. As teorias matemáticas são vistas como um apêndice da ciência aplicada nesse caso e não é a matemática uma teoria que garante a justificação de sua própria ontologia e sim as melhores teorias sobre o mundo, as que foram bem-sucedidas, que são as garantidoras da indispensabilidade da existência de objetos matemáticos abstratos.

Devido ao alto grau de especialização das teorias matemáticas ou científicas e a proliferação de vários modelos para teorias científicas do mesmo campo, é comum em pensadores sobre a aplicação da matemática defenderem uma filosofia da matemática estruturalista. Essa concepção filosófica possibilita a existência de uma pluralidade de teorias matemáticas possíveis. Contrapondo a isso, filósofos preocupados com a matemática teórica argumentam a favor de um realismo, quando defendem um platonismo mais (ou menos) forte.

O estruturalismo consegue conciliar o realismo em seu interior e Maddy aceita essa interpretação como uma das faces de seu naturalismo metodológico. Aqui, o desafio é propor uma filosofia da matemática que dê conta da proliferação de estruturas que não se preocupa necessariamente com o realismo na matemática. Wigner por exemplo diz que a matemática é um conjunto de raciocínios: “[...] a ciência das operações hábeis com conceitos e regras de inferência inventadas somente para essa proposta.” (WIGNER, 1960, p. 2, tradução nossa)[102]. Hamming (1980), num artigo que segue a mesma linha de Wigner, pensa a mesma coisa sobre a matemática, enxergando-a como uma ferramenta de raciocínio:

> Nossa principal ferramenta para levar adiante as cadeias de raciocínio requeridas pela ciência é a matemática. De fato, a matemática deve ser definida como sendo a ferramenta mental para essa proposta. (HAMMING, 1980, p. 81, tradução nossa)[103]

E também Feynmann sustenta que a matemática é uma generalização de raciocínios, uma espécie de linguagem lógica vazia de conteúdo:

---

[102] Texto traduzido: [...] the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose. (WIGNER, 1960, p. 2)

[103] Texto traduzido: Our main tool for carrying out the long chains of tight reasoning required by science is mathematics. Indeed, mathematics might be defined as being the mental tool designed for this purpose. (HAMMING, 1980, p. 81)

> A matemática é uma linguagem mais raciocínio; é como uma linguagem mais a lógica. Matemática é uma ferramenta para o raciocínio. É de fato uma grande coleção dos resultados do pensamento de uma pessoa cuidadosa. (FEYNMAN, 1985, p. 40, tradução nossa)[104]

Esse comportamento sobre a ontologia é compreensível quando um cientista está focado na aplicação matemática, pois a noção metodológica de simplificação de raciocínio é feita com a ajuda da matemática vista como uma axiomática abstrata válida para qualquer domínio de objetos.

A posição filosófica sobre a aplicação da matemática que se baseia esses pensadores tem suas origens em Carnap que, como visto no primeiro capítulo, entende a matemática como analítica por não ter os seus significados concedidos pela experiência e sim pela própria linguagem. Nessa concepção, a matemática não possui significado empírico nenhum, é vazia de conteúdo empírico, mas não perde a sua utilidade como uma otimizadora do raciocínio. O estruturalismo de certo modo carrega essa noção ao propor que o que se estuda nas teorias matemáticas são as relações estruturais sem se importar com os objetos que se encaixam nessas relações. A prática de aplicação da matemática é exatamente isso, pois a criação de um modelo científico somente se interessa pelas relações matemáticas e não pelos objetos matemáticos.

Essa concepção da matemática é explorada por Pincock (2004), Krause e Arenhart (2017) e por Bueno e Colyvan (2011). Na concepção de aplicação estrutural de Pincock (2004) e Krause e Arenhart (2017), o processo de criação de um modelo matemático é concebido como um mapeamento das estruturas físicas em estruturas matemáticas com a criação de um isomorfismo entre estruturas. Um modelo científico é uma estrutura. Um modelo matemático é outra estrutura e, quando ambas são equivalentes, ocorre o isomorfismo entre as estruturas. A matemática capta as relações entre os objetos das estruturas físicas para então realizar cálculos que serão interpretados na teoria científica tratada. Dentro dessa concepção estrutural é possível manter uma suspensão do juízo sobre o realismo na matemática e por isso aceita a crença comum entre os cientistas de que a matemática se comporta como uma estrutura vazia pronta para receber o conteúdo dos objetos tratados pela ciência. Aqui, o interesse da matemática, seus objetos e métodos, continuam distintos do restante das demais ciências.

A matemática aplicada é mesmo uma estrutura vazia que será preenchida com informações empíricas. Quando aplicada às demais ciências, a matemática pode ser vista como

---

[104] Texto traduzido: Mathematics is a language plus reasoning; it is like a language plus logic. Mathematics is a tool for reasoning. It is in fact a big collection of the results of some person's careful thought and reasoning. (FEYNMAN, 1985, p. 40)

uma ferramenta de representação da física, ao passo que o matemático pode manter uma posição realista na matemática independente do que pensa o físico ou qualquer outro cientista sobre a sua aplicação. Essa concepção realista sobre a matemática não influencia na concepção estruturalista de aplicação da mesma nem na concepção estruturalista em geral, pois o que muda são os objetos tratados em cada situação. Nas ciências, um tipo de objeto, na matemática teórica, outro tipo de objeto, mas permanecendo a estrutura da teoria matemática.

O argumento de indispensabilidade da matemática diz que se deve aceitar a existência de objetos matemáticos, impondo um tipo de platonismo a partir da ciência aplicada. Na aplicação estrutural isso não acontece necessariamente. No estruturalismo, como o de Resnik (1997), a concepção ontológica da matemática é diferente nesse sentido, pois há um lugar de um possível objeto que pode ser substituído por qualquer objeto que se encaixe nos padrões ou relações entre os objetos. A matemática para ele é a ciência dos padrões das relações entre os objetos. Por exemplo, a teoria de conjuntos possui um objeto específico que são os conjuntos que estão numa hierarquia de relação de pertença, enquanto visto sob o ângulo da axiomática concreta.

Do ponto de vista da axiomática abstrata, qualquer objeto que se comporte como um conjunto e obedeça aos padrões da hierarquia cumulativa pode ser substituído no lugar de um conjunto, preservando as relações entre os objetos, ou seja, quando certos objetos substituem outros, tem-se a manutenção de um isomorfismo entre as teorias:

> Tome os conjuntos, os objetos composicionais paradigmáticos da matemática. A matemática da teoria de conjuntos se aplica a qualquer hierarquia iterativa se é gerada por uma relação composicional ou não. Essa é a razão pela qual, do ponto de vista da teoria de conjuntos, conjuntos são simplesmente posições nas hierarquias iterativas. Eles aparecem para nós tendo uma estrutura interna somente porque usamos a linguagem composicional e analogias ao elucidar suas relações. Mas, embora essa heurística possa ser essencial para nosso pensamento sobre a hierarquia, e talvez para compreender os axiomas e demonstrações, isso não se reflete no conteúdo da teoria de conjuntos em si. Por outro lado, pode-se distinguir hierarquias iterativas composicionais – aquelas com uma relação ‘real’ de pertença – daquelas que não têm uma “real” relação de pertença. (RESNIK, 1997, p. 213, tradução nossa)[105]

[105] Texto traduzido: Take sets, the paradigmatic compositional mathematical objects. The mathematics of set theory applies to any iterative hierarchy whether it is generated by a compositional relation or not. That is why, from the point of view of set theory, sets are simply positions in iterative hierarchies. They appear to us to have an internal structure only because we use compositional language and analogies in elucidating their relationships. But while this heuristic may be essential for our thinking about the hierarchy, and perhaps even in grasping axioms and proofs, it is not reflected in the content of set theory itself. For otherwise it could distinguish compositional iterative hierarchies — those with a ‘real’ membership relation — from those that have no "real" membership relation. (RESNIK, 1997 p. 213)

Ao considerar o ponto de vista do isomorfismo entre estruturas, o problema ontológico do realismo não desaparece, mas se torna periférico em relação à discussão da aplicação de uma estrutura, que é a repetição de um padrão matemático num modelo científico. Pouco importa qual objeto realmente se encaixa numa posição de objeto, mas o que importa é que as relações estruturais sejam respeitadas e úteis para a ciência. Assim, o problema da existência de objetos matemáticos se situa fora do problema da aplicação da matemática. A respeito disso, diz Pincock: "Se as relações são genuinamente externas, então a conexão entre matemática e o mundo físico não afetará a necessidade da verdade matemática." (PINCOCK, 2004, p. 145, tradução nossa)[106]. Pouco importa se as teorias matemáticas afirmam ou negam a existência de objetos matemáticos, a verdade sobre a existência desses objetos está além da prática de criação de estruturas, sendo restrita, e, portanto, sustentada num conjunto restrito de situações.

O cientista pode restringir o que ele considera como objeto somente os objetos científicos, o matemático pode considerar, para efeitos da prática, que números e conjuntos existem, como está descrito nos axiomas, mas, fora da matemática, essa constatação não faz nenhum sentido, restando a estrutura como um conjunto de raciocínios pronto para ser utilizado. O que interessa são os lugares dos objetos nas estruturas que podem ser preenchidos com objetos físicos. Objetos físicos e objetos matemáticos possuem realidades independentes entre si.

O isomorfismo não estabelece nenhuma influência entre objetos físicos e objetos matemáticos e como os objetos e estruturas matemáticas possuem existências independentes disso, as relações são meramente externas às relações da matemática pura. A aplicação é possível somente porque existe um mapeamento entre as estruturas físicas e matemáticas. O mapeamento adequado a ser realizado das estruturas físicas nas estruturas matemáticas é aquele que tende a conservar as estruturas físicas de modo que a aplicação da matemática seja útil na dedução de explicações testáveis na física e não refutadas. A partir dessa perspectiva, o argumento de indispensabilidade de objetos matemáticos não se sustenta pela aplicação da matemática.

[106] Texto traduzido: If the relations are genuinely external, then the connection between mathematics and the physical world will not affect the necessity of mathematical truth. (PINCOCK, 2004, p. 145)

3.3.1 Isomorfismo e a aplicação da matemática

Isomorfismo entre estruturas funciona bem entre estruturas de teorias matemáticas. As estruturas são imersas em estruturas com cardinalidade maior e terminam gerando uma teoria tão geral que engloba numa única estrutura uma quantidade muito grande de teorias. Já o mapeamento de estruturas científicas em uma estrutura de uma teoria matemática não é tão perfeito. Numa teoria científica sempre há um conjunto de fórmulas que são o modelo ou axiomática concreta da teoria (axiomática concreta). Para a derivação das consequências dessa teoria, os raciocínios matemáticos são concatenados (axiomática formal e abstrata). O isomorfismo pode falhar quando se considera a axiomatização de teorias que não são matemáticas, exigindo uma série de adaptações, generalizações e bricolagens para a tradução de proposições da física numa proposição matemática.

O isomorfismo funciona muito bem em exemplos bem simples: a soma das maçãs numa mesa é um deles, basta mapear a situação na aritmética que o isomorfismo do resultado é garantido. Em modelos científicos mais complexos essa situação não ocorre, conforme visto acima nas transformadas de Lorentz. Modelos matemáticos de teorias científicas são assintóticos, eles não descrevem completamente uma situação empírica, sempre são a caricatura de uma situação real. Essa concepção de aplicação estrutural tem características pragmáticas para que as leis físicas criadas nessa aplicação não percam informações essenciais para a explicação de fenômenos: as leis não podem ser nem gerais demais como a matemática e nem informativas demais de modo a dificultar os cálculos. Para que as teorias não sejam gerais demais, elas precisam se ater somente numa parte da estrutura das teorias matemáticas, não a toda a teoria.

Não só a matemática leva a um avanço das teorias pela interpretação da sua complexidade como também há uma necessidade de “simplificação” dos fenômenos para um tratamento objetivo e acurado dos fenômenos. A ciência no seu nascimento com Galileu é um exemplo disso. Ao matematizar os fenômenos, Galileu classifica as características em primárias e secundárias. Isso acontece com a intenção de procurar uma regularidade nos fenômenos da natureza, de modo a poder sustentar a mesma lei em qualquer lugar e poderem ser expressos matematicamente. Leis universais e matemáticas unificaram a mecânica e a astronomia, os movimentos terrestres e os celestes. As propriedades primárias de um corpo são forma, figura, número, movimento e contato. Essas propriedades são o que garante a descrição matemática com o uso da geometria e quantidades matemáticas. Qualidades secundárias não são essenciais para o entendimento dos fenômenos, como cor, odor, sabor e som. Essas características são subjetivas e não se encaixam na descrição matemática do mundo. São elementos que resistem ao tratamento matemático (MARICONDA, 2006). Além dessas características primárias, o cientista deve lidar com qual teoria matemática quer utilizar e o nível de complexidade da teoria matemática pode influenciar no entendimento do fenômeno.

Na maioria das vezes em que se recorre à matemática, não ocorre um isomorfismo completo preservando a cardinalidade das estruturas de ambos os lados. Isso acontece porque teorias matemáticas tendem ter uma estrutura de cardinalidade maior que as usadas dentro das teorias científicas ou porque a complexidade das situações não pode ser mapeada completamente sem que se perca a objetividade da teoria.

Não é simplesmente um mapeamento de uma estrutura dentro da outra estrutura o que se faz na aplicação da matemática. Existem inúmeras maneiras de mapear uma teoria científica numa estrutura matemática (BUENO; COLYVAN, 2011, p. 345). A natureza não se comporta totalmente como a matemática. Se uma teoria física é mapeada completamente dentro das estruturas matemáticas, corre-se o risco de acontecer uma extrema idealização no modelo matemático da teoria, tornando os cálculos matemáticos possíveis, mas com uma distância enorme entre o real e o calculado. Por outro lado, um modelo complexo que represente fielmente uma situação empírica torna os cálculos muito mais complexos, impedindo a inferência de qualquer dado empírico relevante. Um modelo científico matemático é considerado uma caricatura que simplifica a realidade de um lado e adapta a riqueza das estruturas matemáticas do outro.

Para resumir essas pressões teóricas que surgem dentro do desenvolvimento de uma teoria científica com o uso da matemática, tem-se as duas seguintes situações (Bueno; Colyvan, 2011):

Uma situação que ocorre é a que a física exige a criação de uma teoria matemática, um novo campo de estudo para a matemática que vem de problemas da ciência. Essa teoria passa a ser mais uma das possíveis de serem encontradas na vasta gama de estruturas matemáticas e então passa a ser desenvolvida até o ponto de se tornar uma teoria axiomática abstrata.

Outra situação é a que as teorias abstratas, quando interpretadas, levam à novas descobertas científicas. Wigner usou de uma teoria matemática ainda não aplicada em sua época para resolver problemas da teoria de grupos. Nesse caso, um problema científico é levado a se adaptar a uma teoria matemática, uma axiomática abstrata, ainda não utilizada em nenhuma teoria científica anteriormente.

Em ambos os casos acima, a matemática é vista como um depósito de estruturas pronto para ser usado nas aplicações das ciências empíricas que, circunstancialmente, leva ao avanço da ciência: “Acima de tudo, em vários casos, é patentemente claro que há mais estrutura ou no mundo ou na matemática” (BUENO; COLYVAN, 2011, p. 348, tradução nossa)[107].

De um ponto de vista estruturalista, essas duas situações podem ser vistas da seguinte maneira:

Quando não ocorre um isomorfismo entre as teorias matemáticas e as teorias físicas, uma estrutura é mais rica que a outra ao representar ou uma situação no mundo ou uma relação matemática. Ou o mundo possui mais estruturas ou a matemática possui mais estruturas. Quando o mundo possui mais estruturas que a que está sendo usada para representar a teoria através da matemática, adaptações teóricas com o intuito de simplificar as teorias podem ser feitas ou adaptações na matemática usada podem ser feitas, como a troca para uma geometria não-euclidiana na teoria da relatividade geral.

Quando a matemática possui mais estrutura que a teoria sobre o mundo, significa que a teoria foi desenvolvida como matemática teórica antes da aplicação em alguma teoria física. A teoria fica disponível como possível estrutura a ser utilizada e é aqui que entra o papel da matemática nas descobertas da física (BUENO; COLYVAN, 2011).

O uso de matemática teórica nunca antes usada pela ciência pode levar a algum avanço através de novas descobertas. O exemplo dessa situação é a dilatação do tempo de Lorentz, dado por Bueno e Colyvan, descoberto na era antes da teoria da relatividade especial. No início do século XX, a dilatação do tempo para Lorentz era um mero artefato matemático, sem nenhuma importância para a física. Lorentz possuía algumas intuições pré-relativísticas sobre o tempo, mas nesse período não chegou a tecer considerações sobre isso. A surpresa é que a matemática aqui não era um mero facilitador de cálculos, mas as expressões passaram a ganhar sentido físico nas aplicações com a dilatação do tempo.

> Frequentemente, a matemática empregada ou captura mais estrutura física que o que era esperado, ou soluções que, de considerações somente da física, parecem não ser fisicamente significantes ainda passam a ser fisicamente significantes. Como Heinrich Hertz uma vez sugeriu, a matemática parece mais sábia do que nós somos. (BUENO; COLYVAN, 2011, p. 349, tradução nossa)[108]

Por isso que a consideração da aplicação não pode ser vista como um isomorfismo estrutural completo. Há adaptações que dependem do contexto em que a matemática é aplicada.

[107] Texto traduzido: After all, in most cases it is patently clear that there is more structure in either the world or the mathematics. (BUENO; COLYVAN, 2011, p. 348).

[108] Texto traduzido: [V]ery often the mathematics employed either captures more physical structure than was intended, or solutions that, from physical considerations alone, appear not to be physically significant yet turn out to be physically significant. As Heinrich Hertz once suggested, mathematics, it seems, is wiser than we are. (BUENO; COLYVAN, 2011, p. 349, colchete nosso).

Essas adaptações é que tem a ver com as idealizações matemáticas, as interpretações, etc. da física. É nesse sentido que Bueno e Colyvan chamam a aplicação de inferencial (BUENO; COLYVAN, 2011). Levar a novas descobertas na ciência é um importante papel da aplicação da matemática, mas isso não indica em nenhum momento uma realidade pitagórica em que há a necessidade de confiar na existência de objetos matemáticos. A própria prática de aplicação da matemática envolve um processo de idealização que deve buscar um equilíbrio. A adaptação de cálculos do lado que um físico faz sobre as suas teorias deve estar em equilíbrio com as idealizações matemáticas que são necessárias para a criação de um modelo matemático.

Um modelo matemático força a simplificação da realidade, enquanto um modelo físico tende a introduzir elementos que aumentam a complexidade do cálculo, forçando a adaptações do resultado matemático. Um modelo matemático, mesmo que seja uma idealização grotesca da realidade, funciona. Sempre algumas variáveis dos fenômenos são desconsideradas, números e medidas são arredondadas, generalizadas, etc.:

> Ao mudar nossa atenção para o lugar que a matemática pura ocupa, primeiro notamos que ela ocorre em contextos muito frequentemente idealizados, onde fatores causais foram isolados (p. ex. fricção ignorada) ou simplificações introduzidas (p. ex. a superfície da terra tomada como um plano ou o oceano como infinitamente profundo). Também encontramos matematizações completas, onde um objeto matemático puro substitui um item físico (p. ex. distância é substituída por um número real, uma órbita planetária por uma elipse, ou uma partícula por um ponto). De fato, simplificações e matematizações sempre caminham juntas, por exemplo, quando representamos um fluido como uma substância contínua para aplicar a matemática da fluido dinâmica. Em todos esses casos, as posições matemáticas aparecem em descrições que não parecem verdadeiras, da qual poderia ser inapropriado para esquematizar morais ontológicas de qualquer tipo. (MADDY, 2007, p. 316, tradução nossa)[109]

A própria matemática é aplicada de modo a simplificar os fenômenos e as medidas nesse sentido. Isso não ocorre de modo misterioso, mas seletivo ou muitas vezes a partir de cópias de equações matemáticas já usadas em outros campos. Como diz Maddy (2007), equações usadas em fluxo de calor podem ser as mesmas para fluxo de fluidos ou tensão de membranas. Essa situação é muito semelhante ao nosso exemplo de geometria projetiva, pois a estrutura permanece a mesma mudando unicamente os objetos:

[109] Texto traduzido: Turning our attention to the placement of pure mathematical posits, we first notice that they occur most frequently in idealized contexts, where causal factors have been isolated (e.g., friction ignored) or simplifications introduced (e.g., the earth's surface taken to be perfectly flat or the ocean as infinitely deep). We also find outright mathematizations, where a pure mathematical object stands in for a physical item (e.g., distance is replaced by a real number, a planetary orbit by an ellipse, or a particle by a point). Indeed, simplification and mathematization often go together, for example, when we regard a fluid as a continuous substance so as to apply the mathematics of fluid dynamics. In all such cases, the mathematical posits appear in descriptions that we don't regard as true, from which it would be inappropriate to draw ontological morals of any kind. (MADDY, 2007 p. 316)

> Além disso, algumas vezes nós matematizamos sem qualquer noção clara do que o fenômeno físico é independentemente da matematização: por exemplo, representamos o espaço-tempo como uma quantidade contínua e o campo eletromagnético como valores dessa quantidade sem sermos capazes de descrever sem a matemática, e, portanto, sem um sentido claro de ter ou não idealização (por simplificação) envolvida. (MADDY, 2007, p. 316, tradução nossa)[110]

Essa característica da aplicação da matemática mostra que os cientistas promovem uma simplificação dos fenômenos e medidas ou uma simplificação nas teorias matemáticas que eles querem usar. Novamente, essas estruturas não englobam todas as possíveis estruturas da matemática. A realidade da matemática é muito mais rica que aquilo que é selecionado para estudos em ciência aplicada. Disso se conclui que não há uma repercussão das teorias físicas na matemática: "(...) nossa descrição científica do mundo físico não nos diz nada sobre ontologia abstrata." (MADDY, 2007, p. 317, tradução nossa)[111]. A aplicação da matemática não é um milagre e não há outra explicação que não seja mera coincidência de estruturas e quando essa semelhança não é alcançada, o cientista manipula e adapta de acordo com a sua necessidade. Esse aspecto é puramente circunstancial, pois cada adaptação matemática ou empírica é motivada pelas limitações presentes no contexto da aplicação e é nesse sentido que a aplicação da matemática deve ser entendida. Mesmo que a matemática seja um instrumento usado com sucesso nas teorias científicas, ela não é a linguagem do mundo e não tem condições nenhuma de responder de modo exato o que realmente existe no mundo e nem as teorias do mundo podem dizer o que existe ou o que não existe dentro da matemática.

3.4 ARREALISMO E REALISMO NA MATEMÁTICA

3.4.1 Arrealismo

Maddy possui duas ontologias distintas sobre a matemática que são o arrealismo e o realismo fraco, que não são antagônicas, mas que se encaixam em contextos distintos. O arrealismo na matemática convém aos que possuem uma visão da matemática como vazia de conteúdo pronta para ser preenchida por algum conteúdo empírico. Essa visão da matemática se baseia numa concepção filosófica que impede o holismo, pois uma vez que a matemática

---

[110] Texto traduzido: Furthermore, we sometimes mathematize without any clear sense of what the physical phenomenon is like independently of the mathematization: for example, we represent space-time as a continuous manifold and the electromagnetic field as taking values over this manifold without being able to describe either one without the mathematics, and hence, without a clear sense of whether or not there is any idealization (by simplification) involved. (MADDY, 2007, p. 316)

[111] Texto traduzido: (...) our scientific description of the physical world tell us nothing about abstract ontology. (MADDY, 2007, p. 317)

seja vista como vazia de conteúdo, não há, pelos que se interessam pela ciência, nenhum meio de influenciar no conhecimento matemático. O que foi visto na seção anterior está completamente de acordo com o arrealismo, uma das posições ontológicas defendida por Maddy (2011). O arrealismo é a suspensão do juízo sobre a existência ou não de objetos matemáticos abstratos. Ora, a aplicação da matemática não está interessada em problemas profundos da ontologia matemática, das teorias e seus procedimentos de formação e discussão sobre os axiomas e quais axiomas devemos admitir[112].

É possível manter duas posições ontológicas distintas porque a prática matemática da criação teórica é muito diferente da matemática aplicada. Na primeira, o realismo fraco se mantém. Na segunda, o arrealismo se encaixa melhor. Na criação de modelos matemáticos para as ciências empíricas não importa se existe algo fora da empiria ou não. Nota-se que o arrealismo não significa antirrealismo, que é a negação da existência de objetos matemáticos abstratos. O arrealismo é a suspensão do juízo, ou seja, sem a afirmação e nem a negação da existência de objetos matemáticos. Assim, quando um cientista aplicado afirma que a matemática é um conjunto de estruturas, uma ajuda ao desenvolvimento de raciocínios, etc. é possível fazer essa interpretação teórica. A aplicação da matemática é feita por modelagem para a explicação de certos fenômenos, por outro lado, a prática matemática pura está criando novas teorias, novas combinações para que então essas teorias fiquem disponíveis para o uso nas teorias científicas, se algum cientista se interessar pela teoria matemática em questão.

Segundo Maddy, a matemática é um grande depósito de estruturas, o cientista somente escolhe a melhor estrutura para o que ele quer aplicar. A matemática é indispensável à ciência no sentido de organizar melhor as deduções e quantificações de objetos, mas isso não implica que se deve aceitar o argumento de indispensabilidade para os objetos da matemática. O arrealismo não afirma e nem nega que tais objetos teóricos existem. Muitas questões sobre a natureza de objetos físicos ainda não possuem consenso, ora, como então essa teoria física tem condições de estabelecer o sucesso da matemática abstrata? Mais uma vez, a aplicação da matemática não diz respeito a nada dos objetos matemáticos abstratos.

> Formamos um modelo abstrato simples; por que deveríamos acreditar em todas as coisas extras que a matemática avançada nos diz sobre nosso modelo? Quero colocar isso de modo diferente: o modelo abstrato tem todos aqueles aspectos para iniciar,

[112] Uma justificação para essa posição seria a seguinte: Muita matemática que vem sendo desenvolvida é matemática usada para resolver problemas da própria matemática. Ao utilizar-se da matemática para resolver problemas científicos, o cientista não está interessado necessariamente em todos os problemas da matemática. Basta utilizar as teorias que ele bem queira. Sendo assim, problemas teóricos para além dos que surgem na aplicação da matemática não fazem sentido de serem propostos nessas circunstâncias. Assim, é admitida a suspensão do juízo sobre a existência ou não de objetos matemáticos abstratos por exemplo.

> como parte de seu pedigree matemático; a questão é por que – dado um modelo cujos aspectos simples guiam o mundo razoavelmente bem – por que deveríamos esperar que seus aspectos matemáticos esotéricos continuem a guiar o mundo razoavelmente bem? Parece que precisamos saber não é o tanto que a matemática avançada é verdadeira, mas que os aspectos mais esotéricos que ela revela continuarão a ser efetivos ao modelar o mundo. (MADDY, 2011, p. 92, tradução nossa)[113]

Novas descobertas físicas podem ser extraídas a partir da matemática pura com certeza. Isso mostra o sucesso da matemática na descoberta. A matemática é útil para as ciências mesmo que ela persiga as suas próprias razões, mas o desenvolvimento de teorias matemáticas que não têm "nada a ver" com qualquer outra coisa que não seja científica não pode ser barrado porque não possui aplicação. De qualquer modo, as verdades das ciências não são suficientes para dizer nada sobre objetos matemáticos abstratos. Com isso em mente, pouco importa se eles existem ou não, o arrealismo não está interessado em fazer alguma afirmação sobre esses objetos. Ele não quer julgar os objetos matemáticos pois isso é irrelevante para a prática matemática:

> Ela [filósofa da matemática arrealista] não faz as suas investigações com qualquer prejulgamento contra objetos abstratos ou com qualquer preconceito sobre o que o conhecimento deve ser ou como deveria parecer para eliminar o conhecimento de conjuntos. Ela não argumenta que a teoria de conjuntos é problemática ou impossível por causa de um princípio; ela simplesmente pesquisa a evidência em mãos e conclui que isso não confirma a existência de conjuntos ou a verdade de nossa teoria sobre eles. (MADDY, 2011, p. 97-98, tradução nossa, colchete nosso)[114]

O arrealismo não pode negar a existência de conjuntos em sua prática, ao mesmo tempo que não pode afirmar. Se o matemático fala que na sua teoria que conjuntos existem objetos, então a filósofa da matemática arrealista aceita essa fala sobre a existência. Não há como negar que a teoria de conjuntos está lidando com uma realidade objetiva: "Para ambas as posições, o desenvolvimento da teoria de conjuntos responde a uma realidade objetiva – e de fato a uma mesma realidade objetiva." (MADDY, 2011, p. 101, tradução nossa)[115]. O arrealismo não está interessado nessas questões. No entanto, teorias matemáticas lidam com objetos matemáticos

---

[113] Texto traduzido: [W]e form a simple abstract model; why should we believe all the extra things that advanced mathematics tells us about our model? I'd put it somewhat differently: the abstract model has all those features to start with, as part of its mathematical pedigree; the question is why—given a model whose simple features track the world reasonably well—why should we expect its mathematically esoteric features to continue to track the world reasonably well? It seems what we need to know isn't so much that the advanced mathematics is true, but that the more esoteric features it reveals will continue to be effective in modeling the world. (MADDY, 2011, p. 92, colchete nosso)

[114] Texto traduzido: She doesn't come to her investigations with any a priori prejudice against abstract objects or with any preconceptions about what knowledge must be like that would seem to rule out knowledge of sets. She doesn't argue that set-theoretic knowledge is problematic or impossible on principle; she simply surveys the evidence at hand and concludes that it doesn't confirm the existence of sets or the truth of our theory of them. (MADDY, 2011, p. 97)

[115] Texto traduzido: For both positions, the development of set theory responds to an objective reality — and indeed to the very same objective reality. (MADDY, 2011, p. 101)

abstratos em sua ontologia. Essa proposta de entendimento da ontologia matemática tem de estar de acordo com o realismo, ou seja, não pode negar o realismo.

3.4.2 Realismo fraco

Dentro da filosofia da matemática, o realismo é a tese de que existem objetos matemáticos como números, conjuntos, funções, etc. Um teorema matemático ou um axioma afirmam a existência de objetos matemáticos, ou seja, é algo frequente e aceito na prática matemática. Assim é como falou-se de um mundo objetivo como conjuntos. Dentro dessa concepção de realismo existe a concepção do realismo fraco.

A teoria de conjuntos é autônoma, com a possibilidade de introdução de objetos matemáticos abstratos a partir da sua prática matemática e nada além da própria teoria pode afirmar a existência desses conjuntos. Se a teoria de conjuntos afirma a existência de entidades abstratas e grande parte da comunidade que desenvolve essa teoria as aceita, então esses objetos existem. "(...) Os métodos da teoria de conjuntos são as vias confiáveis para os fatos sobre conjuntos, que nenhuma garantia externa é necessária ou possível." (MADDY, 2011, p. 63, tradução nossa)[116]. Esse tipo de consideração ontológica pode ser estendido a qualquer ramo da matemática que lida com objetos matemáticos abstratos. O realismo de Maddy assume também o terceiro excluído: sentenças são verdadeiras ou falsas. Diante disso, sentenças não decididas como a hipótese do contínuo, como qualquer sentença da teoria de conjuntos deve necessariamente possuir um valor de verdade verdadeiro ou falso:

> CH tem um determinado valor de verdade, a despeito da sua independência de ZFC. Como será nossa nova visão realística no caso da CH? Sua análise é mais simples: 'CH ou não-CH' é um teorema, estabelecido pelos seus melhores métodos como um fato. (MADDY, 2011, p. 63, tradução nossa)[117]

Isso aparece como um contraposto ao realismo robusto, pois o realismo robusto se baseia não somente na teoria de conjuntos, mas também na metafísica sobre conjuntos para além da matemática e até mesmo isso pode ser dito em relação à indispensabilidade da matemática de Quine/Putnam, pois esses põem outras ciências como as responsáveis por se manter uma ontologia sobre conjuntos. Ora, foi visto até aqui que é possível manter uma

---

[116] Texto traduzido: (...) the set-theoretic methods are the reliable avenue to the facts about sets, that no external guarantee is necessary or possible. (MADDY, 2011, p. 63)

[117] Texto traduzido: CH has a determinate truth value, despite its independence from ZFC. How will be our new realist view the case of CH? Her analysis is simpler: 'CH or not-CH' is a theorem, established by her best methods as a fact. (MADDY, 2011, p. 63)

concepção de aplicação da matemática coerente com a prática feita pelos cientistas que não afirma nem nega a existência de objetos matemáticos abstratos como consequência de uma concepção de aplicação estrutural da matemática. O mesmo vai acontecer aqui: a prática da matemática teórica pode ser interpretada de um ponto de vista realista, mas isso não confere a nenhuma ciência a capacidade de julgar sobre a existência ou não de objetos matemáticos abstratos.

Responder à questão do tamanho do contínuo é um problema da própria teoria de conjuntos sem implicações na ciência em geral e a busca da solução de CH significa desenvolver a teoria para responder a um problema da própria teoria. Uma grande quantidade de membros da comunidade matemática está disposta a investigar questões teóricas vindas dessa teoria. A mesma situação vale para os cardinais inacessíveis ou qualquer axioma que relate a existência de um grande cardinal. Esses casos envolvem consistência da teoria e também a topografia do grande universo de objetos matemáticos:

> Essa topografia está além das conexões meramente lógicas entre proposições, e mais, ela é inteiramente objetiva; assim como não depende de nós quais as partes da matemática pura que servem melhor às necessidades da ciência natural, [...] também não depende de nós que o apelo a conjuntos e ordinais transfinitos nos permitam capturar fatos sobre a unicidade de representações trigonométricas, que o Axioma da Escolha tome uma impressionante variedade de diferentes formas e tenha um importante papel em muitas diferentes áreas, que grandes cardinais se organizem numa hierarquia que sirva como uma medida efetiva de força consistente, que a determinância seja a raiz da propriedade da regularidade para conjuntos projetivos e inter-relacione com grandes cardinais, e assim por diante. (MADDY, 2011, p. 80-81, tradução nossa)[118]

O realismo fraco afirma que conjuntos existem e a teoria de conjuntos é um corpo de verdades. O arrealismo não afirma nem um nem outro. Por outro lado, ambos possuem semelhanças metodológicas. A existência de conjuntos é sempre pressuposta durante o desenvolvimento da teoria ou posta em discussão perante a consistência da teoria. Conjuntos são uma peça importante no afazer matemático, mas não é aplicada em sua totalidade, situação que usa somente parte das estruturas.

---

[118] Texto traduzido: This topography stands over and above the merely logical connections between statements, and furthermore, it is entirely objective: just as it's not up to us which bits of pure mathematics best serve the needs of natural science, just as it's not up to us that it would be counter-productive to insist that all 'groups' be commutative, it's also not up to us that appealing to sets and transfinite ordinals allows us to capture facts about the uniqueness of trigonometric representations, that the Axiom of Choice takes an amazing range of different forms and plays a fundamental role in many different areas, that large cardinals arrange themselves into a hierarchy that serves as an effective measure of consistency strength, that determinacy is the root regularity property for projective sets and interrelates with large cardinals, and so on. (MADDY, 2011, p. 80-81)

O arrealismo e o realismo fraco estão de acordo com a prática matemática em duas frentes, pois ambos aceitam a prática matemática como está dada na aplicação nas ciências e nas questões de fundamento. A diferença é que o realismo fraco acredita na existência desses conjuntos e na sua verdade. “A arrealista, como o realista fraco, formulará o axioma numa forma existencial e o chamará de ‘verdadeiro’ no sentido de ser sustentado em V.” (MADDY, 2011, p. 101, tradução nossa)[119]. Se a matemática pura lida com objetos abstratos, deve-se aceitar esses objetos assim como qualquer outra ciência que lida com objetos concretos.

> A Arrealista não rejeita a matemática ou recomenda que matemáticos mudem seus caminhos; como temos visto, a Arrealista é indistinguível do Realista Fraco no que se refere à prática matemática. Ainda, como temos visto, a Arrealista não está negando a verdade da matemática em bases filosóficas gerais (...). Ela não está ‘intrigada’ com a existência matemática; ela toma a posição do Realista Fraco para ser coerente, e em alguns aspectos atrativa. Ela somente não vê que a evidência sustenta isso. [...] A Arrealista não discorda com o que os matemáticos dizem *qua* matemáticos, mas quando eles se ramificam para questões de verdade e existência externas à própria matemática – o que é a natureza da atividade matemática humana? Qual é o objeto de estudo e como fazemos para conhecê-lo? E assim por diante – então ela se reserva ao direito de discordar. (MADDY, 2011, p. 99-100, tradução nossa)[120]

Para o realismo fraco ou para o arrealismo, não importa os aspectos científicos ou psicológicos ou religiosos para a aceitação de objetos matemáticos. O arrealismo não nega a existência de tais objetos. O realismo fraco também não. O arrealismo não se importa, no caso da aplicação da matemática, com a existência de objetos matemáticos abstratos se na circunstância de aplicação isso não for algo importante. O realismo pode aceitar esses objetos mas dará uma consideração mais elaborada dessa aceitação. Ambas as considerações mostram lados diferentes da prática matemática. Um para o lado da aplicação da matemática e outro para o lado da matemática teórica. Isso mostra que durante a aplicação da matemática não são os objetos matemáticos que são importantes, portanto, o argumento de que os objetos matemáticos abstratos são indispensáveis para a aplicação da matemática, um dos componentes do holismo, perde a sua força. A matemática é realmente indispensável à ciência, mas somente as estruturas

[119] Texto traduzido: “[T]he Arrealist like the Thin Realist will formulate the axiom in existential form and call it ‘true’ in the sense of holding in V.” (MADDY, 2011, p. 101, colchete nosso)

[120] Texto traduzido: The Arealist doesn’t reject mathematics or recommend that mathematicians change their ways; as we’ve seen, the Arealist is indistinguishable from the Thin Realist as far as the practice of mathematics is concerned. Furthermore, as we’ve also seen, the Arealist isn’t denying the truth of mathematics on general philosophical grounds (...). She isn’t ‘puzzled’ by mathematical existence; she takes the Thin Realist’s position to be coherent, even in some ways attractive. She just doesn’t see that the evidence supports it. (…) The Arealist doesn’t disagree with what mathematicians say qua mathematicians, but when they branch out into questions of truth and existence external to mathematics proper—what is the nature of human mathematical activity? what is its subject matter and how do we come to know about it? and so on—then she reserves her right to differ. (MADDY, 2011, p. 99-100, colchete nosso)

de raciocínio matemático é que são realmente importantes, o que possibilita a aplicação estrutural da matemática. Questões sobre quais objetos matemáticos abstratos existem são questões de fundamentos da matemática, que serão vistos na próxima seção.

3.5 HOLISMO E TEORIA DE CONJUNTOS

3.5.1 Justificação dos axiomas da teoria de conjuntos

Na teoria de conjuntos, à medida que os axiomas são introduzidos, a teoria cresce em poder demonstrativo. Esses axiomas, quando introduzidos, são defendidos ou justificados. A defesa desses axiomas pode ser classificada em intrínseca, quando os princípios de uma teoria são justificados em termos de evidência, obviedade, parte do significado de "conjunto", conceito de conjunto ou hierarquia cumulativa, é um tipo de justificação intrínseca dos axiomas, algo introduzido por Zermelo (1930) ou até Gödel, conforme descreve Maddy:

> Seguindo a descrição de Gödel, conjuntos são entendidos como gerados numa série de estágios (‘um conjunto é algo alcançável... pela aplicação iterada da operação “conjunto de”’); a cada estágio tomamos todas as combinações possíveis de elementos disponíveis, ‘não importa se podemos definir isso num número finito de palavras (de modo que conjuntos aleatórios não sejam excluídos) ou não’; esse processo é iterado indefinidamente ao transfinito (então, por exemplo, ‘a totalidade de conjuntos obtidos por iteração finita é considerada em si um conjunto e a base para posteriores aplicações da operação “conjunto de”’). Claro, a linguagem de ‘geração’ e ‘aplicação’ é vista como metafórica, meramente um modo colorido de descrever a estrutura do universo da teoria de conjuntos, V. (MADDY, 2011, p. 124, tradução nossa)[121]

Exemplo de defesa axiomas pela justificação intrínseca é dizer que o axioma da infinidade é verdadeiro porque em algum momento num estágio V da teoria de conjuntos passa a se formar conjuntos de cardinalidade infinita ou dizer que é natural e evidente para a teoria de conjuntos existir um conjunto de tamanho infinito ou ainda dizer que o axioma da infinidade clarifica o conceito de conjunto, pois é inerente ao conceito de conjunto possivelmente ser infinito. O mesmo pode ser feito em relação ao axioma do par que mostramos em 2.6.1.11, ao dizer que é evidente à teoria de conjuntos que há conjuntos na forma $\{a, b\}$ ou que os estágios

[121] Texto traduzido: [F]ollowing Gödel’s description, sets are understood as generated in a series of stages (‘a set is something obtainable . . . by iterated application of the operation “set of ”’); at each stage we take every possible combination of the available elements, ‘no matter whether we can define it in a finite number of words (so that random sets are not excluded)’; this process is iterated indefinitely into the transfinite (so, for example, ‘the totality of sets obtained by finite iteration is considered to be itself a set and a basis for further applications of the operation “set of”’). Of course, the language of ‘generation’ and ‘application’ is regarded as metaphorical, merely a colorful way of describing the structure of the set-theoretic universe, V. (MADDY, 2011, p. 124, colchete nosso)

da hierarquia cumulativa produzem conjuntos dessa forma. Vejamos abaixo um exemplo de justificação intrínseca usada para níveis transfinitos de conjuntos por Maddy para o axioma dos cardinais inacessíveis:

> Um pouco menos imediato, mas ainda um caso tipicamente intrínseco diz respeito aos pequenos grandes cardinais. Por exemplo, um cardinal inacessível não contável κ é bem mais alto que seus predecessores em dois modos: você não pode subir até κ em passos menores que κ passos (ao contrário de $\aleph_\omega$, que pode ser alcançado em somente $\aleph_0$ passos: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, . . .); e se um conjunto tem menos que κ elementos, então deve ter seu conjunto potência (ao contrário, $\aleph_1$: $\aleph_0$ é menor que $\aleph_1$, mas seu conjunto potência tem ao menos $\aleph_1$ membros). Se κ é inacessível, então V_κ é um modelo de ZFC – é grande o bastante para satisfazer os axiomas do Conjunto Potência e Substituição – mas nós sabemos a partir do teorema de incompletude de Gödel que nenhum sistema consistente desse tipo pode demonstrar sua própria consistência, então ZFC (se consistente) não pode demonstrar a existência de cardinais inacessíveis. Mas a concepção iterativa presumivelmente envolve a ideia de que a sucessão de estágio após estágio não deveria parar em algum ponto fixo, e afirmar a existência de um inacessível é um modo de dizer que ela continua indo além, mesmo que ela exaurisse as operações de Conjunto Potência e Substituição. (MADDY, 2011, p. 125, tradução nossa)[122]

O axioma dos inacessíveis está de acordo com a hierarquia cumulativa. Já no caso da justificação extrínseca, o caso mais conhecido é a justificação do axioma da escolha, que é baseado no sucesso do axioma em produzir resultados satisfatórios para a teoria de conjuntos e a matemática em geral. Na teoria de conjuntos, o axioma é útil para a demonstração do teorema da boa ordem e para a teoria dos cardinais transfinitos, por exemplo. O axioma tem se mostrado útil também para vários campos da matemática.

Maddy (2011) adotou essa divisão de justificações dos axiomas da teoria de conjuntos até quando a divisão foi abandonada, pois a sua reflexão leva a considerar somente a justificação extrínseca dos axiomas da teoria de conjuntos. Isso ocorre porque quando se fala de axioma, não faz sentido sustentar que um axioma é verdadeiro por estar clara e distintamente evidente de acordo com um conceito ou universo. Um axioma é algo que diz respeito a uma teoria específica, como teoria dos grupos, geometria Hilbertiana, espaços topológicos, etc. Ou seja, os axiomas estão restritos às estruturas que os dizem respeito. A justificação desse tipo de

[122] Texto traduzido: A slightly less immediate, but still typically intrinsic case concerns small large cardinals. For example, an uncountable inaccessible cardinal κ is one that towers over its predecessors in two ways: you can't climb up to κ in fewer than κ steps (unlike $\aleph_\omega$, which can be reached in only $\aleph_0$ steps: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, . . .); and if a set has fewer than κ elements, then so does its power set (unlike $\aleph_1$: $\aleph_0$ is less than $\aleph_1$, but its power set has at least $\aleph_1$ members). If κ is inaccessible, then V_κ is a model of ZFC— it's big enough to satisfy the axioms of Power Set and Replacement— but we know from Gödel's incompleteness theorem that no consistent system of this sort can prove its own consistency, so ZFC (if consistent) can't prove the existence of an inaccessible cardinal. But the iterative conception presumably involves the idea that the succession of stage after stage shouldn't stop at some fixed point, and asserting the existence of an inaccessible is a way of saying it keeps going on and on, even after it exhausts the operations of Power Set and Replacement. (MADDY, 2011, p. 125)

axioma não tem nada a ver com evidência conceitual, mas sim quanto à que tipo de relação essa estrutura está tratando ou para aumentar o poder de demonstração de uma estrutura enriquecendo as relações estruturais que pode ser traduzido mais facilmente na ideia de que um axioma foi introduzido para demonstrar um teorema específico.

A axiomática concreta pode ser derivada ou espelhada em estruturas mais gerais, axiomática abstrata, como a teoria de conjuntos sendo uma estrutura mais geral capaz de sustentar todas as estruturas descritas como concretas. A teoria de conjuntos, por sua vez, sendo imensamente maior que aquelas, tem seus próprios problemas, o que faz com que novos axiomas sejam aceitos na estrutura e justificados extrinsecamente. Isso não é esclarecer um conceito geral, tornar evidente algo ou trabalhar sobre uma hierarquia cumulativa. É adicionar axiomas para aprimorar o poder demonstrativo da teoria. Considerações ontológicas sobre os conjuntos podem surgir no decorrer do desenvolvimento da teoria.

Isso significa que o conceito de conjunto esclarecido pelos axiomas desenvolveu-se a partir das demandas de formalização da teoria de conjuntos, com a exigência de novas demonstrações para a resolução de problemas em aberto e para responder a questões metamatemáticas como a de consistência. A formalização da teoria de conjuntos é de 1904 e 1908 e a introdução da noção de um universo de conjuntos é de a partir de 1930 com Zermelo, com a hierarquia cumulativa. A justificação intrínseca traz para a teoria de conjuntos princípios básicos que possibilitam justificar seus axiomas, algo que pode ser recorrido a qualquer momento para se justificar os axiomas da teoria. A hierarquia cumulativa introduz uma noção de consistência e a possibilidade de mais axiomas pode surgir sem perder grande parte da intuição do que seria um conjunto. Mas todos os axiomas que se encaixam nos princípios da hierarquia cumulativa podem ser justificados extrinsecamente. Não é um consenso entre os que se interessam pela justificação o fato de que exista somente uma justificação intrínseca. Sendo assim, quando se quer justificar os axiomas da teoria de conjuntos com o apelo a um conceito de conjunto ou um universo de conjuntos o que se quer é mostrar que um conceito de conjunto específico é elaborado para dar conta de um problema matemático bem definido e, portanto, extrinsecamente na classificação de Maddy.

Sempre uma justificação intrínseca pode ser convertida numa justificação extrínseca. Mas essa situação não resolve alguns problemas da teoria de conjuntos, visto que é possível falar de vários tipos de universos de conjuntos à medida que os axiomas da estrutura vão sendo modificados. Maddy propõe avaliar caso a caso para que se escolha o axioma que define um universo de conjuntos específico segunda o seu sucesso demonstrativo.

> Suponha que alguém proponha um novo axioma da teoria de conjuntos que é matematicamente frutífero nos modos que estávamos considerando, mas que não se origina de nosso conceito atual de conjunto, ou ainda pareça entrar em conflito [com esse conceito]. Seria razoável rejeitar esse axioma em bases intrínsecas? Esse cenário pode soar exagerado, mas ao menos um pouco da reação negativa ao Axioma da Escolha teve essa característica: à medida que a concepção lógica de um conjunto como uma extensão estava no ar, a existência de um conjunto escolha parecia problemática; não há propriedade específica que seleciona todos e somente aqueles seus membros. (MADDY, 2011, p. 136, tradução nossa, colchete nosso)[123]

A pergunta acima feita por Maddy evidencia uma tensão entre as justificações intrínseca e extrínseca dos axiomas. Do ponto de vista intrínseco, o axioma da escolha traz um problema: O axioma torna possível derivar o "paradoxo" de Banach-Tarski e nesse sentido, introduz um universo de conjuntos "paradoxal". A consequência do axioma da escolha não desejada seria a seguinte: ao tomar uma esfera que possa ser particionada em um número finito de vezes, ao reunir novamente essas partes, o resultado seria duas esferas idênticas. Não seria possível pensar num universo de conjuntos que possua uma característica tão problemática quanto essa. Por outro lado, esse suposto paradoxo não introduz grandes problemas para a prática matemática, o que força a aceitação do axioma entre os que são possíveis pela teoria de conjuntos. O axioma produz mais bons frutos para toda a matemática em relação aos problemas que o axioma cria. A situação mostra que o axioma da escolha desafia a visão ontológica sobre os conjuntos. Por isso, a justificação da sua introdução é feita, pela classificação de Maddy, extrinsecamente. Sendo possível assumir extrinsecamente o axioma, isso deve forçar a aceitação do axioma intrinsecamente que deve ser feita num momento posterior. A justificação extrínseca tem mais valor que a própria justificação intrínseca. O verdadeiro valor da justificação extrínseca:

> Em última análise, queremos teorias consistentes, para meios efetivos de organizar e estender nosso pensamento matemático, para heurísticas úteis para gerar novas hipóteses produtivas, e assim por diante; considerações intrínsecas são valiosas, mas somente à medida que elas se correlacionam com aqueles desfechos extrínsecos. Isso sugere que a importância das considerações extrínsecas é meramente instrumental; que a força justificatória fundamental é toda extrínseca. Isso lança sérias dúvidas à opinião comum que justificações intrínsecas são a grande aristocracia e justificações extrínsecas os primos pobres. A verdade pode muito bem ser o contrário! (MADDY, 2011, p. 136, tradução nossa)[124]

---

[123] Texto traduzido: Suppose someone proposes a new set-theoretic axiom that's mathematically fruitful in the sorts of ways we've been considering, but which doesn't follow from, or perhaps even appears to conflict with, our current concept of set. Would it be reasonable to reject the axiom on intrinsic grounds? This scenario may sound far-fetched, but at least one thread in the initial negative reaction to the Axiom of Choice had this character: insofar as the logical conception of a set as an extension was in the air, the existence of a choice set appeared problematic; there's no specifiable property that picks out all and only its members. (MADDY, 2011, p. 136)

[124] Texto traduzido: Ultimately we aim for consistent theories, for effective ways of organizing and extending our mathematical thinking, for useful heuristics for generating productive new hypotheses, and so on; intrinsic considerations are valuable, but only insofar as they correlate with these extrinsic payoffs. This suggests that the

A justificação dos axiomas da teoria de conjuntos dividida nessas duas modalidades tem como consequência afastar questões alheias à matemática no processo de justificação como é o caso do platonismo na matemática que em Gödel chega a justificar a introdução de novos axiomas na teoria de conjuntos a partir da intuição matemática (MADDY, 2011, p. ix). Não há um constrangimento da experiência para regular todo o corpo do conhecimento, mas há um foco no que Maddy considera ser a prática matemática contemporânea. Essa prática é voltada para a resolução de problemas de cunho teórico da própria matemática mais que propriamente a confecção de teorias úteis para a aplicação nas ciências. Há uma grande quantidade de matemáticos envolvidos na aplicação da matemática como na física teórica, em programas de pesquisa de todo tipo, ciência da computação, etc. A filosofia da matemática de Maddy não exclui essa comunidade. O programa de pesquisa criado em torno dos conjuntos funciona de maneira diferente em relação aos matemáticos envolvidos em matemática aplicada. Justificar pela experiência ou evidência em outra teoria científica que não seja a matemática o desenvolvimento da teoria de conjuntos não é um bom procedimento para Maddy e o próprio desenvolvimento da teoria mostra isso. O contexto de surgimento da teoria de conjuntos, no século XIX, é de uma ênfase da matemática em questões da própria teoria e de fundamentos da matemática, tornando a finalidade da teoria de conjuntos e seus métodos totalmente afastados de qualquer questão empírica e, portanto, do holismo.

3.5.2 Maximizar e unificar

Defender ou criticar métodos de demonstração na teoria de conjuntos na verdade é analisar as várias alternativas de axiomas para a teoria existentes, pois alguns axiomas introduzem a existência de objetos que outros negam em suas consequências. O mesmo pode ser pensado em relação às questões em aberto da teoria de conjuntos. Essas questões podem ser aceitas de imediato sem demonstração, podem forçar o desenvolvimento da teoria na busca de uma demonstração dessa questão ou podem ser abandonadas.

Maddy argumenta que há regras a serem seguidas pela prática matemática que favorecem somente um tipo de teoria de conjuntos, aquela que é satisfeita pelos conjuntos que

---

importance of intrinsic considerations is merely instrumental, that the fundamental justificatory force is all extrinsic. This casts serious doubt on the common opinion that intrinsic justifications are the grand aristocracy and extrinsic justifications the poor cousins. The truth may well be the reverse! (MADDY, 2011, p. 136) estão no universo V de conjuntos, e que pode ser a única teoria de conjuntos, preferencialmente, a ser desenvolvida. Podem existir outras teorias de conjuntos que se satisfazem em universos comparativamente menores que V ou diferentes de V, mas essas teorias não são consideradas por Maddy em suas avaliações. Isso é explicado pelas regras de desenvolvimento da teoria segundo Maddy, que são Unificar e Maximizar.

Manter uma teoria de conjuntos como fundamento da matemática exige que essa teoria seja poderosa o bastante para demonstrar o máximo possível de teoremas que podem ser interpretados nas teorias matemáticas, sendo essa umas das máximas da teoria de conjuntos: Maximizar. Esse objetivo é alcançado somente numa teoria com uma estrutura "máxima", ou seja, para qualquer teoria matemática concreta ou específica, há a possibilidade de embeber essa teoria na estrutura da teoria de conjuntos. Essa teoria tem que decidir o máximo possível de sentenças relevantes. Essa máxima é um dos guias para a introdução de axiomas na teoria de conjuntos e escolha entre axiomas alternativos. Ou seja, a decisão sobre os axiomas alternativos da teoria de conjuntos também se baseia no poder de demonstração da introdução desse axioma. Se o axioma a ser introduzido tem como consequência a diminuição do domínio de objetos a serem tratados pela teoria ou reduz o número de sentenças que a teoria decide, esse axioma não deveria ser aceito.

Dentro da teoria de conjuntos, os defensores do holismo sustentam a valorização de ZF + V = L como uma teoria satisfatória para a aplicação da matemática. A teoria que assume V = L surgiu com Gödel em 1938. Nas décadas posteriores, Dana Scoth descobriu que a existência de cardinais mensuráveis implicaria a existência de pelo menos um conjunto não construtivo no sentido estabelecido em V = L. Pela regra de "maximizar", V = L, deve ser posto de lado para logo em seguida assumir o axioma dos cardinais mensuráveis. Assim, segundo Maddy, os que defendem V = L defendem uma teoria "fraca", apesar de V=L decidir a hipótese do contínuo e o axioma da escolha.

> Dada as interrelações entre vários novos candidatos a axiomas, um modo de argumentar contra V = L poderia ser pela existência de cardinais mensuráveis (MC), então derivar V ≠ L. […] De fato, como Gödel (1947) mostra, houve considerável sentimento contra V = L mesmo antes desse resultado. (MADDY, 1997, p. 110, tradução nossa)[125]

[125] Texto traduzido: Given the interrelations between the various new axiom candidates, one way to argue against V = L would be to argue for the existence of measurable cardinals (MC), then derive V ≠ L. (…) In fact, as Gödel (1947) shows, there was considerable sentiment against V = L even before this result. (MADDY, 1997, p. 110)

“Maximizar” é o que possibilita a teoria de conjuntos “alargar” a cardinalidade da sua estrutura, suas relações, para possibilitar o isomorfismo de teorias matemáticas ainda não imersas dentro da teoria de conjuntos. Isso é claramente contra um pluralismo dentro da teoria de conjuntos, que defenderia a existência de múltiplas teorias de conjuntos, admitindo que algumas delas não possuem a capacidade de ter um isomorfismo com todas as teorias matemáticas. A busca dos axiomas para essa teoria passa por uma avaliação de acordo com essas máximas, pois essa característica de abarcar todas as teorias numa única é o que permite a realização na teoria de conjuntos dos fundamentos da matemática. Vejamos o que Maddy afirma a respeito da regra de maximizar:

> O desfecho dessas observações sobre a metodologia da teoria de conjuntos é simples. Se a matemática é permitida expandir livremente desse modo, e se a teoria de conjuntos tem o papel esperado nos fundamentos, então a teoria de conjuntos não deveria impor qualquer limitação própria: a arena da teoria de conjuntos na qual a matemática é modelada deveria ser tão generosa quanto possível; os axiomas da teoria de conjuntos dos quais os teoremas matemáticos são demonstrados deveriam ser tão poderosos e frutíferos quanto o possível. Assim, o objetivo de fundar a matemática sem dificultá-la gera a recomendação metodológica para MAXIMIZAR. E, dado que a teoria de conjuntos está aí para prover modelos para todos os objetos matemáticos e instanciações para todas as estruturas matemáticas, um modo no qual deveria MAXIMIZAR é o alcance de tipos isomórficos disponíveis. (MADDY, 1997, p. 210, tradução nossa)[126]

Ocorre uma tensão dentro do debate de aceitação dos axiomas da teoria e as regras de “maximizar” e “unificar”. Por “maximizar” indicar a necessidade de ampliar as estruturas da teoria de conjuntos, propor a teoria ZF + V = L pode gerar um conflito, visto que a adição de mais axiomas na teoria faz com que V não seja L. Deletar esse axioma faz com que se crie uma teoria diferente, portanto não unificada a ZF + V=L. A solução segundo Maddy é se ater em “maximizar” e selecionar a partir desse princípio teorias que possuem uma estrutura maior o universo V = L e que guarde os mesmos benefícios de decisão de ZF + V = L:

> O ponto é que [a teoria de conjuntos] ZFC + V = L será classificada como restritiva, não porque as teorias que maximizam sobre isso são mostradas como ‘melhores’ numa comparação direta, mas porque elas provêm alguns benefícios identificáveis delas próprias enquanto preservam todos os benefícios de ZFC + V = L. O caso de ZFC + MC é um pouco mais fácil que o de ZFC + ‘$0^{\#}$ existe’. Temos visto [...] que a

[126] Texto traduzido: The pay-off of these observations for set theoretic methodology is simple. If mathematics is to be allowed to expand freely in this way, and if set theory is to play the hoped-for foundational role, then set theory should not impose any limitations of its own: the set theoretic arena in which mathematics is to be modelled should be as generous as possible; the set theoretic axioms from which mathematical theorems are to be proved should be as powerful and fruitful as possible. Thus, the goal of founding mathematics without encumbering it generates the methodological admonition to MAXIMIZE. And, given that set theory is out to provide models for all mathematical objects and instantiations for all mathematical structures, one way in which it should MAXIMIZE is in the range of available isomorphism types. (MADDY, 1997, p. 210)

> existência de um cardinal mensurável resolve um pouco das questões abertas da teoria de conjuntos descritiva; dado que providencia uma teoria completa de conjuntos de reais em um dos objetivos originais da teoria de conjuntos, podemos ver que isso é uma consequência bem-vinda. É também significante que a existência de um cardinal mensurável pode ser vista como uma generalização da colocação original de Cantor do infinito completo em CH; o sucesso vívido da hipótese de Cantor leva à promessa de grandes cardinais, que a generaliza. Na mesma linha, o modo que a mensurabilidade pode ser generalizada – com base na sua formulação elementar imersa – para uma grande variedade de cardinais ainda maiores, incluindo Woodins e supercompactos, é ainda mais evidente a sua frutificação. (Sem mencionar que isso implica a existência de $0^{\#}$!) (MADDY, 1997, p. 231, tradução nossa, colchete nosso)[127]

Maximizar e unificar, portanto, forçam o desenvolvimento da teoria para muito além do aplicável. Se uma parte mínima da teoria, Z, é o suficiente para dar conta de grande parte da matemática praticada na ciência, todos os demais axiomas concatenados à teoria de conjuntos não têm nenhuma relação direta com a ciência, rechaçando assim o holismo discutido no capítulo 2. O holismo não é suficiente para discutir a ontologia da teoria de conjuntos, o escopo máximo da teoria e muito menos qual teoria de conjuntos deve ser assumida como a mais favorável para a ciência.

3.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo, foi discutido como a matemática é aplicada na ciência de acordo com a metodologia da aplicação estrutural. Essa aplicação não introduz nenhuma questão, a partir da aplicação, sobre o escopo dos objetos matemáticos abstratos, de quais axiomas devem ser assumidos pelas teorias e nem o limite entre o que é uma ciência aplicável ou não. Essas questões são deixadas em aberto. Por outro lado, o matemático realista que está interessado nessas discussões não possui uma visão limitativa do desenvolvimento da teoria de conjuntos, introduzindo como regras máximas de uma prática teórica a unificação e a maximização dos resultados, o que pode ser visto nas discussões sobre aceitação dos axiomas da teoria de conjuntos de Maddy. Como consequência disso, mais uma vez, essa prática não está ligada ao

---

[127] Texto em inglês: The point is that ZFC + V = L will be classified as restrictive, not because the theories that maximize over it are shown to be 'better' in a direct comparison, but because they provide some identifiable benefits of their own while preserving all the benefits of ZFC + V = L. The case of ZFC + MC is a bit easier than that of ZFC + '$0^{\#}$ exists'. We've seen (in I. 5) that the existence of a measurable cardinal settles a few of the open questions of descriptive set theory; given that providing a complete theory of sets of reals in one of the original goals of set theory, we can see that this is a welcome consequence. It is also significant that the existence of a measurable cardinal can be viewed as a generalization of Cantor's original positing of the completed infinite at CH; the vivid success of Cantor's hypothesis lends promise to large cardinal axioms, which generalize it. Along the same lines, the way measurability can itself be generalized—on the basis of its elementary embedding formulation—to a rich array of further large cardinals, including Woodins and supercompacts, is further evidence of its fruitfulness. (Not to mention that it implies the existence of $0^{\#}$!) (MADDY, 1997, p. 231)

holismo confirmativo e as suas limitações. Não é a prática científica que vai delimitar a ontologia e o sucesso da matemática baseada apenas no sucesso da matemática aplicada. Nenhum objeto matemático abstrato é indispensável à prática científica. A ciência está interessada somente em padrões de raciocínio, mas isso não significa que a matemática não seja indispensável à ciência. As estruturas matemáticas são indispensáveis a qualquer teoria científica.

4 CONCLUSÃO

Durante a história do pensamento, a matemática tem sido vista apartada das demais ciências empíricas. No período moderno, conforme mostrado em Kant, a matemática foi vista como composta de juízos sintéticos *a priori*, em contraposição aos juízos analíticos *a priori*. Pela classificação proposta por Kant, um juízo analítico é uma proposição em que o predicado não acrescenta nenhuma informação nova ao sujeito e é um juízo que se negado leva a uma contradição (KANT, 2004, p. 16 e 18 (4:267) e (4:268)). Leis lógicas são juízos analíticos *a priori* nessa classificação, pois se negadas levam a uma contradição. Sentenças como "todo corpo é extenso" ou "o triângulo possui três lados" são analíticas nesse sentido, pois "extensão" ou "três lados" são componentes que participam da definição do termo sujeito das proposições.

O caso da matemática é diferente, é sintética *a priori* e por isso precisa ser construída dentro de uma forma de intuição pura (KANT, 1998, p. 254, B147). Qualquer sentença de caráter algébrico é um postulado no sentido kantiano de postulado: uma verdade que é justificada na relação imediata entre conceitos e objetos da intuição. A matemática é construção de conceitos de onde se vai de um passo a outro em direção a conceitos diferentes e a verdade vai sendo justificada por postulados. Nem mesmo a soma é analítica, pois o resultado de uma soma é a construção de um conceito diferente dos que foram somados (KANT, 1788, p. 129) e justificada na intuição com exemplos de soma entre objetos. O caráter sintético da matemática em Kant impede a introdução de um conceito de infinito que seja atual, pois a construção matemática não consegue mostrar por postulados da aritmética as relações desse tipo de conceito: trazer o infinito atual para o campo da intuição é o mesmo que trazer a existência de Deus para o campo da intuição (KANT, 2004, p. 522, A513, B541). O infinito atual somente aparece na matemática em Bolzano, mas sem nenhuma preocupação com questões de espaço ou de tempo.

O estatuto da matemática e as concepções de analítico/sintético são diferentes para Bolzano, pois o aparato linguístico em que a matemática se expressa começa a mudar: aproxima-se do método geométrico de demonstração, mas nega-se todo o aspecto da intuição espaço-temporal que a geometria pode trazer (BOLZANO, 1817a, p. 228). Analiticidade em Bolzano adquire dois sentidos: (a) Tautologia/contradição ou (b) um teorema. Por Tautologia ou contradição, Bolzano entende uma sentença que não varia o seu valor de verdade, apesar da variação dos termos (ideias) contidos nessa proposição (BOLZANO, 1973, p. 192 §148)[128].

A noção de analiticidade como um teorema é problemática. A Matemática como sintética em Kant pode conflitar com a noção de analiticidade em (b) de Bolzano. Em Bolzano, a matemática pode ser vista como analítica ou sintética. A criação de axiomas é uma atividade criativa, voltada para a resolução de problemas da matemática. Dois exemplos emblemáticos desse caso são a demonstração do teorema do valor intermediário e a introdução do infinito atual na matemática. Quando se introduz uma sentença do tipo “existe um conjunto infinito”, o que se faz é introduzir o infinito atual, completo. Esse tipo de sentença é sintético *a priori*, mas que pode ser útil para a demonstração de sentenças relacionadas ao infinito, sendo essas analíticas.

No caso do teorema do valor intermediário, a aceitação de que uma função contínua possuir uma raiz ou um valor equivalente ao de outra função era justificado geometricamente e obviamente é uma constatação útil para problemas de ultrapassagem, estudo de funções analíticas ou qualquer evento que possa ser descrito nesse tipo de função. Esse teorema, para ser demonstrado, exige a criação de novas ferramentas na matemática, como a noção de continuidade não em termos geométricos, mas em termos da teoria de conjuntos, assim como a noção de função deve ser definida em termos de conjuntos. Definidos os termos, introduz-se a noção de função contínua e de limite. Então, a pressão para a criação de novas teorias matemáticas com novos axiomas existe, é uma atividade sintética *a priori* para a demonstração de teoremas que, por serem demonstrados, são analíticos. Não há outra justificação para a introdução de axiomas que não seja a demonstração de teoremas, que é a justificação extrínseca que veremos em Maddy.

Uma consequência dessa noção de analiticidade é que uma sentença pode ser analítica (demonstrada) numa teoria e não em outra teoria, porque dentro das teorias matemáticas que tratam de um mesmo assunto. Há teorias que decidem mais proposições que outras teorias. Assim, essa noção de analiticidade por demonstração é dependente da teoria, do grupo de matemáticos em que essa sentença se apresenta ou até do nível de entendimento do conhecedor. Teorias matemáticas menos poderosas podem ser imersas em teorias mais poderosas que são capazes de decidir um número maior de sentenças. Será visto esse fenômeno de imersão de teorias mais abaixo, quando se tratar da filosofia da matemática de Maddy (2011) e Krause e

[128] Uma peculiaridade que não é tão fundamental aqui, é que Bolzano admite que as sentenças falsas também são analíticas.

Arenhart (2017), o que corrobora a teoria do método axiomático proposta por Bolzano. Foi visto até aqui o caráter problemático da noção de analiticidade em Bolzano e Kant e constatamos que a noção de analítico/sintético de Kant é problemática, pois a noção kantiana não comporta os avanços que Bolzano propôs e que será visto que são plausíveis até o presente momento da teoria do método axiomático. Bolzano adianta a noção de analiticidade de Carnap e Frege que serão discutidas abaixo.

Em Frege e em Carnap (1952), as sentenças da lógica são analíticas, mesmo os axiomas lógicos são analíticos. A diferença de Carnap em relação à Frege é que qualquer postulado de significado que não seja empírico é uma sentença analítica *a priori*. Bolzano sustenta a mesma noção sobre a analiticidade dos axiomas da lógica, assim como os teoremas são analíticos, mas não sustenta, assim como Carnap, que todo postulado de significado seja analítico. Se é necessário criar um postulado de significado, a forma criativa como a sentença foi criada se encaixa na noção de sentenças sintéticas *a priori* de Bolzano, mas as consequências lógicas dessa sentença são analíticas de qualquer maneira.

Em Frege, os axiomas da lógica são suficientes para a demonstração dos teoremas da aritmética. A aritmética possui um domínio de objetos bem definido que são os números. Se a aritmética é parte da lógica, então os números são objetos lógicos. A aritmética é um tipo de linguagem que não se aplica diretamente aos objetos físicos, pois, conforme diz Frege (1953, p. 99), a aritmética não se constitui de leis sobre a natureza, mais um conjunto de leis sobre as leis da natureza. Isso diz muito sobre o caráter teórico da aritmética, pois não está ligada aos aspectos empíricos da ciência. As ciências que criam modelos matemáticos que depois devem ser analisados do ponto de vista da aritmética. Esse nível de detalhamento será tratado mais abaixo nessa conclusão quando for introduzido Krause e Arenhart (2017), e Maddy (2011).

Objetos da aritmética são da razão e *a priori* (FREGE, 1953, p. 49, §38) mas, para introduzir leis sobre números, Frege tem que mostrar que eles são ao mesmo tempo uma propriedade de conceitos e objetos, pois um número é uma propriedade de um conceito mas também é um objeto. A aritmética lida com esse objeto, não com a propriedade. Para isso, Frege introduz uma lei sobre extensões em sua lógica, a lei básica V, para então deduzir o princípio de Hume. A lei Básica V não pode ser considerada analítica *a priori*, pois introduz uma inconsistência na teoria. A opção de salvar o projeto de Frege é introduzir o Princípio de Hume sem demonstração, mas ao introduzir o princípio de Hume não é o suficiente para entender esse princípio como verdadeiro. Antes, é preciso introduzir uma série de definições e restrições ao princípio para se evitar o problema de Júlio Cesar, que consiste numa confusão entre quais objetos podem cair sob o conceito "número de F". A resolução desse problema retira o caráter analítico do princípio (HECK, 1997).

Diante dessa constatação, o problema da analiticidade e a resposta de Bolzano parece se adequar: o princípio de Hume é considerado sintético *a priori*, no sentido de Bolzano, e então pode-se dizer que qualquer sentença derivada do princípio é analítica. Nada disso ainda retiraria o caráter *a priori* da matemática: o abandono da noção de que os fundamentos da matemática são analíticos em Frege não retira o caráter *a priori* no sentido de Bolzano.

Em contraposição a essa noção do *a priori* na matemática, tem-se o holismo. No holismo, os termos e as sentenças adquirem significado numa grande teia de crenças. É possível verificar isso no exemplo da noção de velocidade tanto em Galileu quanto nas transformadas de Lorentz, ou teoria da relatividade: não é somente a noção de velocidade que muda de uma teoria para a outra, mas a mudança radical da noção de espaço e de tempo. Espaço e tempo deixam de ser absolutos de uma teoria para outra.

Outro exemplo é o indeterminismo de Heisenberg que pode forçar a introdução de uma nova lógica para dar aporte a uma teoria quântica. Nesse caso mais radical, inclusive a lógica ou a matemática são postas em perspectiva de confirmação/refutação. Apesar do holismo ter como consequência a interpretação de que a matemática e a lógica podem ser confirmadas/refutadas na experiência, pois nenhuma está a salvo disso, a concepção de aplicação estrutural da matemática dá uma resposta contrária: o que há é a possibilidade de trocar as estruturas lógicas ou matemáticas, contidas no grande repositório de estruturas matemáticas, de axiomáticas abstratas, concretas e formais.

No holismo de Duhem (1982) não há como testar uma única sentença da física, mas toda a teoria é testada num corpo unificado de crenças. Essa tese veio a ser conhecida como a tese de Duhem/Quine ou o holismo confirmativo. No entanto, a tese de Duhem é mais restrita a questões da própria física, não se aplicando a questões da matemática que possui um desenvolvimento teórico mais livre da experiência. Sentenças da ciência que são expressas em relações matemáticas precisam ser carregadas de sentido empírico e isso é uma atividade extremamente circunstancial. Um exemplo disso é a delimitação do valor de uma variável correspondente à temperatura absoluta em valores positivos, o que dentro da matemática não há limite.

No holismo de Quine, o caráter da matemática como analítica passa a ser rechaçado. O sentido de analiticidade que Quine critica é o de que a matemática é feita de postulados de significado e esses postulados são analíticos. Em Colyvan, o holismo é dividido em holismo semântico e holismo confirmativo. O holismo semântico é a não diferenciação entre analítico e sintético. O holismo confirmativo, conforme vimos em Duhem, é a noção de que qualquer sentença pode ser refutada na ciência, inclusive as sentenças da matemática, e isso somente ocorre pela experiência.

Putnam tende a manter o sentido de analítico como o sentido de decorrência lógica, mas não mantém a diferenciação entre *a priori* e *a posteriori* e critica Quine por considerar analiticidade como a noção de *a priori*. O sentido de analiticidade em perspectiva aqui é o de que, se a sentença não é sintética *a posteriori*, então ela é analítica. Ora, a matemática não é uma ciência empírica sintética *a posteriori*, portanto, nesse esquema conceitual, a matemática é composta de proposições analíticas. As duas concepções tanto de Putnam quanto de Quine podem levar ao holismo confirmativo, pois ambos consideram que as sentenças podem passar pelo crivo da experiência.

Uma das consequências do holismo na filosofia da matemática envolve o escopo dos objetos matemáticos abstratos. Objetos matemáticos são úteis para o desenvolvimento das ciências empíricas, no entanto, ao sustentar-se o holismo confirmativo, o escopo dos objetos matemáticos se restringe aos objetos matemáticos úteis na ciência. Os objetos matemáticos que não são úteis na ciência são considerados pura ludicidade sem sentido para um holístico mais radical. Por exemplo, Quine e Putnam vêm a defender uma teoria de conjuntos como ZF + V = L pois decide o axioma da escolha, a hipótese generalizada do contínuo e contém dentro da teoria os conjuntos úteis para a imergir a matemática útil para a teoria científica.

Defender ZF + V = L implica em não aceitar conjuntos “muito grandes”, mas a questão aqui ainda se mantém quanto a confirmação/refutação das teorias científicas. Não existe em nenhum momento na história da ciência alguma refutação de uma teoria matemática na experiência. As teorias científicas podem vir a ser refutadas, mas a matemática pode continuar intacta, inclusive algumas fórmulas matemáticas usadas em teorias rechaçadas podem vir a ser usadas em teorias bem-sucedidas posteriormente. Convém a essa visão uma aplicação estrutural da matemática, concepção que vem sendo adotada na filosofia da matemática por Pincock (2004), Bueno e Colyvan (2011), Krause e Arenhart (2017) e por Maddy (2007, 2011).

Para o estruturalismo, uma teoria matemática pode ser captada numa estrutura. Uma estrutura são objetos e as relações entre os objetos, mas ontologicamente, para o estruturalismo, é considerado o lugar do objeto. Numa ontologia estruturalista, objetos se encaixam nos padrões postos pela teoria. Relações entre estruturas são os isomorfismos. Então, quando uma teoria é espelhada dentro de uma estrutura, o que se tem é um isomorfismo e a aplicação de uma estrutura matemática consiste em procurar um tipo isomórfico em que uma teoria científica se encaixe.

Isomorfismos podem ser perfeitos entre estruturas matemáticas, como por exemplo os que ocorrem entre o teorema de Pappus (NAGEL; NEWMAN, 2004) e o seu teorema dual, mas esse isomorfismo completo não acontece entre uma estrutura matemática e uma estrutura que esboça relações da realidade natural, exigindo adaptações teóricas tanto do lado da matemática quanto do lado da ciência. Quando a matemática possui mais estrutura que a física, ela pode levar ao desenvolvimento da física, pois variáveis que não possuem uma interpretação da estrutura natural podem vir a ter uma interpretação futura. O exemplo dado sobre isso é o das transformadas de Lorentz, que possuía como resultado matemático a existência de um tempo *t*' com dimensões distintas do tempo *t* de um referencial estacionário. O tempo de um referencial em movimento tende a dilatar-se. Para Lorentz, ainda imerso no paradigma da física clássica, *t*' era um artifício matemático. Somente com a Relatividade Especial que *t*' passou a ter uma interpretação física.

O exemplo acima é um caso em que as equações matemáticas podem forçar o desenvolvimento das ciências da natureza. Isso retira o caráter de que a matemática somente é uma ferramenta do raciocínio que não leva a novas descobertas científicas, mas isso acontece somente no caso em que a matemática possui mais estrutura que as teorias científicas. Pode acontecer o caso em que as teorias científicas possuem mais relações estruturais que a própria matemática, forçando-a a criar mais relações estruturais para então atender a ciência, como no caso da física newtoniana que fez a matemática evoluir muito. Mas é inevitável que, quando uma teoria é entregue aos matemáticos, essa teoria passa a ser desenvolvida ao máximo pela comunidade, ao ponto de criar problemas e soluções internos da própria teoria.

Cientistas têm reconhecido a matemática como uma estrutura vazia de conteúdo empírico. Maddy fará essa situação casar com o seu arrealismo na matemática, que parece convir com uma tendência nas concepções de filosofia da matemática aplicada. Por outro lado, o seu realismo fraco, que é a crença em objetos matemáticos e no terceiro excluído, pode servir para uma defesa de um realismo fora do contexto de aplicação da matemática. Isso responde aos apelos realistas vindos da prática da matemática pura. Diante desse realismo, Maddy estuda as justificações dos axiomas da teoria de conjuntos, dando ênfase às justificações extrínsecas. Uma justificação extrínseca é semelhante à justificação da introdução de axiomas por Bolzano: a demonstração de teoremas ou a resolução de problemas matemáticos em aberto.

As teorias matemáticas podem ser avaliadas em relação ao seu poder de demonstração. Vimos que ZF + V = L é poderosa o bastante para decidir a hipótese do contínuo de Cantor e o Axioma da Escolha. ZFC + Inacessíveis não decide nem a hipótese do contínuo nem o axioma da escolha, no entanto, ZF + MC mantém L em seu interior, mantém as vantagens demonstrativas de ZF + V = L mas tem como consequência V ≠ L. Diante dessa situação, Maddy opta por ZF + MC, mas com a justificativa de que essa teoria maximiza as possibilidades de demonstração de teoremas em detrimento da unificação da teoria. De fato, as teorias matemáticas devem maximizar e unificar, ou seja, resolver o máximo de problemas numa única teoria. No entanto, como a teoria de conjuntos possui teorias conflitantes, unificar não se casa com maximizar em alguns casos, como o caso de MC e V = L.

Essa grande estrutura da teoria de conjuntos abarca uma ampla quantidade de teorias matemáticas mais restritas, como as teorias científicas, que na classificação de Krause e Arenhart (2017) são axiomáticas concretas. No entanto, o desenvolvimento da axiomática concreta aplicável na matemática exige muito pouco da teoria de conjuntos, pois é o suficiente que se tenha Z para se produzir grande parte da matemática útil nas ciências. Mesmo essa matemática útil não é aproveitada ao máximo, alguns casos exigem adaptações, bricolagens ou até mudanças drásticas para que a matemática funcione em modelos científicos. Esses modelos científicos não precisam nem serem postos de maneira axiomática, ou seja, o cientista não precisa iniciar uma demonstração a partir de Z para se chegar a algumas fórmulas úteis ao lançamento de satélites no espaço, ou seja, o seu modelo científico. O cientista pode deixar esse trabalho para o matemático.

O que se constrói acima de Z pode ser que não tenha utilidade para a ciência. Isso não impede que a teoria de conjuntos acima de Z possa vir a ter utilidade nas ciências após o momento da criação de novos axiomas, porque não é papel da teoria de conjuntos introduzir axiomas que sejam úteis à ciência. Eles podem ser úteis, como há a esperança que MC tenha alguma consequência para os ordinais finitos e, portanto, venha a ter alguma aplicação. Axiomas da teoria de conjuntos são introduzidos para resolverem problemas da teoria de conjuntos. Conjuntos são objetos, mas são relevantes aos fundamentos da matemática. Axiomas da teoria de conjuntos são leis sobre conjuntos. Conjuntos podem espelhar leis da natureza, mas não o são necessariamente criados para servirem às leis da natureza.

Cientistas estão interessados em manter um realismo restrito à sua teoria. Eles não se interessam por manter um realismo ligado aos objetos matemáticos abstratos. Assim, cientistas não têm condições de manter uma indispensabilidade de objetos matemáticos abstratos. A indispensabilidade de objetos matemáticos diz respeito aos matemáticos teóricos. O que há na ciência é uma indispensabilidade de estruturas matemáticas, ou de métodos de raciocínios. Mudar de uma estrutura matemática para outra na ciência não significa refutar uma teoria matemática, de onde o holismo confirmativo não atinge a matemática. Muito menos, o holismo confirmativo atinge a matemática que lida com grandes cardinais. Essas teorias estão restritas ao campo teórico. Essas são as razões para se rechaçar o holismo confirmativo, um mito epistemológico recente na filosofia da ciência que envolve a filosofia da lógica e da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Wagner B; SANTOS, Hélio F. **Modelos Teóricos para a Compreensão da Estrutura da Matéria.** Cadernos Temáticos de Química Nova na Escola. n. 4. São Paulo. 2001. p. 6-13.

BELL, David. **Frege's theory of judgement**. 1. ed. Oxford: Claredon Press, 2005.

BENACERRAF, Paul; PUTNAM, Hilary. **Philosophy of mathematics:** selected readings. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

BERGMANN, Merrie. **An introduction to many-valued and fuzzy logic**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

BERGSTRÖM, Lars. Underdetermination of physical theory. In: GIBSON Jr., Roger F. (Ed.) **The Cambridge companion to Quine**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 91-114.

BOLZANO, Bernard. **Theory of science**. 1. ed. Boston, D. Reidel, 1973.

______. Preface to considerations on come objects of elementary geometry. (1804). In EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1999. p. 172-173

______. Contributions to a Better-grounded Presentation of Mathematics. (1810). In EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1999. p. 174-224.

______. Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation. (1817a). In EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1999. p. 225-248.

______. From paradoxes of the infinite. (1851). In EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. 1. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1999. p. 249-291.

BRITIAN JR, Gordon G. Algebra and intuition, 1992. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992 p. 315-340

BURGE, Tyler. Frege on apriority. In NEWEN, Albert, NORTMANN, Ulrich, STUHLMANN-LAEISZ, Rainer, (2001). **Building on Frege:** New Essays on Sense, Content, and Concept**.** 1. ed. Stanford: CSLI Publications, 2001. p. 53-87

BUENO, Otavio; COLYVAN, Mark. An Inferential Conception of the Application of Mathematics. **Noûs.** Vol. 45, Issue 2. San Diego. 2011. p. 354-374

BUSH, Jacob. Indispensability and Holism**. Journal for General Philosophy of Science**. 42. Dordrecht. 2011. p. 47-59

CANTOR, Georg. Letter to Dedekind. In van Heijenoort, Jean. **From Frege to Gödel:** a source book in mathematical logic 1879-1931. 1. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1967. p. 113-117

CARNAP, Rudolf. **Foundations of logic and mathematics**. 1.ed. Chicago: Chicago University Press, 1939.

______. **Meaning and Necessity:** a study in semantics and modal logic. 1. ed. Chicago: Chicago University Press, 1947.

______. Meaning Postulates. **Philosophical Studies**. Vol. III. n. 5. Dordrecht. 1952. p. 65-73.

COLYVAN, Mark. **The Indispensability of Mathematics.** 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2001.

CREATH, Richard. Quine on the intelligibility and relevance of analyticity. In: GIBSON Jr., Roger F. (Ed.) **The Cambridge companion to Quine**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 47-64

DECOCK, Lieven. **Trading ontology for ideology:** the interplay of logic, set theory and semantics in Quine's philosophy. 1. ed. Boston: Springer, 2002.

DRAKE, Frank R. **Set theory:** An Introduction to Large Cardinals. 1. ed. Amsterdan: North-Holland, 1974.

DUHEM, Pierre. **The aim and structure of physical theory**. Tradução de Marcel Rivière. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1982.

EINSTEIN, Albert. **A teoria da relatividade geral e especial**. Traduzido por Carlos Almeida Pereira. 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2015.

ERNSTY, Andreas; HSU, Jong-Ping. First Proposal of the Universal Speed of Light by Voight in 1887. **Chinese Journal of Physics**. vol. 39. n. 3. 2001.

EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, vol. 1. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1999.

______.**From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics. vol. II. 1. ed. New York. Oxford University Press, 2005.

FEYNMAN, Richard. **The character of physical law**. 1. ed. Cambridge: MIT Press, 1985.

FORST-ARNOLD, Greg. **Carnap, Tarski and Quine at Harvard:** conversations on logic, mathematics, and science. 1. ed. Chicago: Open Court Press, 2013.

FOSTER, Thomas. Quine's New Foundations. 2006. In **Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Stanford. Disponível em: http://plato.stanford.edu/entries/quine-nf/. Acesso em: 03 ago 2014.

FRAENKEL, Abraham A; BAR-HILLEL, Yehoshua; LEVY, Azriel. **Foundations of set theory.** 1. ed. New York: Elsevier, 1973.

FREGE, Gottlob. **The foundations of arithmetic**. 2. ed. Traduzido por J. L. Austin, New York: Harper & Brothers, 1953.

______. On formal theories of arithmetic. 1885. In FREGE, Gottlob. **Collected papers on mathematics, logic, and philosophy**. 1. ed. Oxford: Basil Blackwell, 1984. p. 112-121.

______. **Collected papers on mathematics, logic, and philosophy**. 1. ed. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

FRIEDMAN, Michael. **Kant and the exact sciences**. 1. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1992.

______. Kant's theory of geometry. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 177-220.

GABRIEL, Gottfried. Frege, Lotze, and the continental roots of early analytic philosophy. NEWEN, Albert, NORTMANN, Ulrich, STUHLMANN-LAEISZ, Rainer, (2001). **Building on Frege:** New Essays on Sense, Content, and Concept**.** 1. ed. Stanford: CSLI Publications, 2001. p. 19-33

GIBSON JR., ROGER F. **The Cambridge companion to Quine**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

GINZBURG, Lev R., JENSEN, Christopher X. J. Aiming the "unreasonable effectiveness of mathematics" at ecological theory. **Ecological Modelling**. n. 207, 2007, p. 356–362.

GRAPOTTE, Sophie; LEQUAN, Mai; RUFFING, Margit, (Editores), **Kant et les sciences:** un dialogue avec la pluralité des savoirs. 1. ed. Paris: Libraire Philosophique, 2011.

HADDOCK, Guillermo E. Rosado. **A critical Introduction to the Philosophy of Gottlob Frege.** 1. ed. Hampshire: Ashgate, 2006.

HALLETT, Michael. Introductory note to 1904 and 1908a. In ZERMELO, Ernst. **Collected Works**, Heinz-Dieter Ebbinghaus, Craig G. Fraser, Akihiro Kanamori, (editores). vol.1. 1. ed. New York, Springer, 2000.

HAMMING, R. W. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. **The American Mathematical Mounthly**. vol. 87. n. 2. Washington. 1980. p. 81- 90.

HARPER, William. Kant on space, empirical realism, and the foundations of geometry. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 257-292.

HECK, Richard G. Jnr. **Language, thought, and logic:** essays in honour of Michael Dummett. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1997.

______. The Julius Caesar Objection HECK, Richard G., Jnr. **Language, thought, and logic: essays in honour of Michael Dummett.** 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1997. p. 273-308.

HEMPEL, Carl G. On the Nature of Mathematical Truth. In BENACERRAF, Paul; PUTNAM, Hilary. **Philosophy of mathematics:** selected readings. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983 p. 377-393.

HINTIKKA, Jaakko. Kant on the mathematical method. (1992a). In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 21-42

______. Kant's transcendental method and his theory of mathematics. (1992b). In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 341-360.

HYLTON, Peter. **Quine**. 2. ed. New York: Routledge, 2010.

ISAACSON, Daniel. Quine and logical positivism. In: GIBSON Jr., Roger F. (Ed.) **The Cambridge companion to Quine**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. p. 214.

JONG, Willem R. The analytic-synthetic distinction and the classical model of science: Kant, Bolzano and Frege. In **Synthese**. no.174, 2010, p. 237-261.

KANT, Immanuel, **The critique of pure reason**. Translated by Paul Guyer e Allen W. Wood. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

______. **Philosophical correspondence:** 1759-99. 1. ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1967.

______. Letter to Schultz – 1788. 1788, In: KANT, Immanuel. **Philosophical correspondence:** 1759-99. 1. ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1967.

______. **Prolegomena to any future metaphysics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

KITCHER, Philip. Kant and the foundations of mathematics. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 109-133.

KLEENE, Stephen Cole. On Notation for Ordinal Numbers. **The Journal of Symbolic Logic**. Vol.3. New York. 1938. p. 150-155

KLUGE, E.-H. W. **The metaphysics of Gottlob Frege:** an essay on ontological reconstruction. 1. ed. Dordrecht: Springer. 1980

KOPOT, Andrey. **Galilean transformation equations for position.** Disponível em <http://www.aklectures.com/lecture/galilean-position-transformation>. 2014a. Acesso em: 09 abr 2017.

______. **Galilean equations for velocity.** Disponível em <http://www.aklectures.com/lecture/galilean-velocity-transformation>. 2014b. Acesso em: 09 abr 2017.

______. **Lorentz transformation equations.** Disponível em <http://www.aklectures.com/lecture/lorentz-transformation-equations>. 2014c. Acesso em: 09 abr 2017.

______. **Lorentz velocity transformations.** Disponível em <http://www.aklectures.com/lecture/lorentz-transformation-equations>. 2014d. Acesso em: 09 abr 2017.

______. **Heisenberg uncertainty principle.** Disponível em <http://www.aklectures.com/lecture/heisenberg-uncertainty-principle>. 2014e. Acesso em: 09 abr 2017.

KRAUSE, Decio; ARENHART, Jonas R. B. **The logical foundations of scientific theories:** languagens, structures and models. 1. ed. New York: Routledge, 2017. Versão em livro eletrônico Kindle.

LAKATOS, Imre. **Mathematics, science and epistemology**. vol. 2. 1. ed. Cambridge Mass: Cambridge University Press, 1978.

______.. A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In LAKATOS, IMRE. **Mathematics, science and epistemology**. vol. 2. 1. ed. Cambridge Mass: Cambridge University Press, 1978. p. 24.

LAPOINTE, Sandra. **Bolzano's theoretical philosophy:** an introduction**.** 1. ed. Manhattan: Palgrave Macmillan. 2011.

MADDY, Penelope. Naturalism: friends and foes**. Philosophical Perspectives**, 15, Metaphysics. Medford. 2001. p. 37-67

______. Some naturalistic reflections on set theoretic method. **Topoi.** 20. 2001. p. 17–27

______. Indispensability and Practice. **The Journal of Philosophy**. vol. 89. n. 6, 1992, p. 275-289.

______. Ontological Commitment: Between Quine and Duhem. **Philosophical Perspectives.** vol. 10, Metaphysics, 1996, p. 317-341.

______. Believing the Axioms. I. **The Journal of Symbolic Logic**. vol. 53, no. 2. 1988, p. 481-511.

______. **Realism in mathematics**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1990.

______. **Naturalism in mathematics**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1997.

______.**Second philosophy:** a naturalistic method. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2007.

______.**Defending the axioms:** on the philosophical foundations of set theory. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2011.

MARICONDA, Pablo Rubén. Galileu e a Ciência Moderna. **Cadernos de Ciências Humanas**. vol. 09, n. 16, 2006.

MELNICK, Arthur, The geometry of a form of intuition. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 245-256.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. **Gödel's Proof**. 1. ed. London: Routledge, 2004.

NEEDHAM, Paul. **Duhem and Quine.** Dialectica, 54, n. 2, 2000.

NEWEN, Albert; NORTMANN, Ulrich; STUHLMANN-LAEISZ, Rainer. (2001). **Building on Frege:** New Essays on Sense, Content, and Concept**.** 1. ed. Stanford: CSLI Publications, 2001.

PARSONS, Charles. Kant's philosophy of arithmetic. (1992a). In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 43-68.

______. Arithmetic and the Categories. (1992b). In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 135-158.

PIEROBON, Frank, La conception kantienne des mathématiques. In GRAPOTTE, Sophie; LEQUAN, Mai; RUFFING, Margit, (Editores), **Kant et les sciences:** un dialogue avec la pluralité des savoirs. 1. ed. Paris: Libraire Philosophique, 2011. p. 25-53

PINCOCK, Crhistopher. A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics. **Philosophia Mathematica**. vol. 12, 3 ed., 2004.

POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

______. Introduction: Mathematics in Kant's Critique of pure reason. (1992a) In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 1-20.

______. Kant's mathematical realism. (1992b) In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 393-314.

PUTNAM, Hilary. **Mathematics, Matter and Method**. 1. ed. vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

______. **Philosophy of Logic**. 1. ed. London: Routledge Revivals, 1971.

______. **Realism and Reason**. 1.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

QUINE, Willard Van Orman. Two dogmas of empiricism. In QUINE, Willard Van Orman. **From a logical point of view**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 2003.

______. **From a logical point of view**. 2. ed. Cambridge mass: Harvard University Press, 2003.

______. Main Trends in Recent Philosophy: Two Dogmas of Empiricism. **The Philosophical Review.** vol. 60, n. 1, 1951, p. 20-43

______. New foundations for mathematical logic. In QUINE, Willard Van Orman. **From a logical point of view**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 2003. p. 80-102

______. **Palavra e objeto**. Tradução de Sofia Inês Albornoz Stein e Desidério Murcho. 1.ed. Petrópolis: Ed. Vozes, 2010.

______. **Pursuit of truth**. 2. ed. Harvard: Harvard University Press, 1992.

______. Facts of the matter. In MERRILL, Kenneth R. & SHAHAN, RobertW.. **American philosophy:** from Edwards to Quine. Oklahoma, University of Oklahoma Press, 1979.

______. **Set theory and its logic**. 2. ed., Cambridge mass: Harvard University Press, 1969.

______. **From Stimulus to Science**. 2. ed. Harvard: Harvard University Press, 1995.

______. **Philosophy of logic**. 2. ed. Harvard: Harvard University Press, 1986.

______. Unification of universes in set theory. **Journal of Symbolic** Logic, vol. 21, Issue 3, September, 1956, p. 267-249.

______. Vagaries of definition. 1972. In QUINE, Willard Van Orman. **The ways of paradox and other essays**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1976.

______. Foundations of mathematics. 1964. **The ways of paradox and other essays**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1976.

______. **The ways of paradox and other essays**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1976.

______. **Theories and things**. 1. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1981.

______. Five milestones of empiricism. In QUINE, Willard Van Orman. **Theories and things**. 1. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1981. p. 67-72.

______. Truth by convention. In: QUINE, Willard Van Orman. **The ways of paradox and other essays**. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1976.

______. Carnap and logical truth. 1954. In: QUINE, Willard Van Orman. **The Ways of Paradox and Other Essays**. 2. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1976.

______. ULLIAN, J. S. **The web of belief.** 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1978.

RESNIK, Michael D., **Mathematics as a Science of Patterns**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 1997.

RUSS, Steve. The Unreasonable Effectiveness of Mathemathics in the Natural Sciences. **Interdisciplinary Reviews**. vol. 36, n. 3. 2011, p. 209-13

SANTOS, César Frederico dos. **O naturalismo de Maddy e a avaliação de candidatos a axioma em teoria dos conjuntos.** 2012. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Filosofia. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/100796/315046.pdf?sequence=1. Acesso em: 12 nov 2016.

SEGEL, Lee A; EDELSTEIN-KESHET, Leah. **A primer on mathematical models in Biology**. 1. ed. Philadelphia: Siam, 2013.

SLUGA, Hans D., **Gottlob Frege**. 1. ed. London: Routledge, 1999.

STUHLMANN-LAEISZ, Rainer, The context-principle. In NEWEN, Albert; NORTMANN, Ulrich; STUHLMANN-LAEISZ, Rainer, (2001). **Building on Frege:** New Essays on Sense, Content, and Concept**.** 1. ed. Stanford: CSLI Publications, 2001. p. 251-264.

THOMPSON, Manley. Singular terms and intuitions in Kant's epistemology. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant’s philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 81-101.

TILES, Mary. **The philosophy of set theory:** An Historical Introduction to Cantor’s Paradise. 1. ed. Mineola: Dover, 2004.

VAN HEIJENOORT, Jean. **From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic 1879-1931**. 1. ed. Cambridge Mass: Harvard University Press, 1967.

WIGNER, Eugene. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. **Communications in Pure and Applied Mathematics**. vol. 13, no. I, 1960. New York: John Wiley & Sons. Disponível em: http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/wigner.pdf. Acesso em: 14 jan 2017.

WRIGHT, Crispin. **Frege's conception of numbers as objects**. 1. ed. Aberdeeen: Aberdeen University Press, 1983.

YOUNG, Michael J. Construction, Schematism and Imagination. In POSY, Carl J. (Ed.). **Kant's philosophy of mathematics:** modern essays. (1. ed.) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. p. 159-176

ZALTA, Edward N. **Frege's Theorem and Foundations for Arithmetic**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (1998) Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/frege-theorem/ Acesso em: 02 jun 2017.

______, **Proof of Hume's Principle from Basic Law V-Grundgesetze-style** The Stanford Encyclopedia of Philosophy, (1998b) Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/frege-theorem/subproof2.html. Acesso em: 02 jun 2017.

ZERMELO, Ernst. **Collected Works**, Heinz-Dieter Ebbinghaus, Craig G. Fraser, Akihiro Kanamori, (editores). vol.1. 1. ed. New York, Springer, 2000.

______. On boundary numbers and domains of sets: new investigations in the foundations of set theory. 1930. In: EWALD, William (Ed.). **From Kant to Hilbert:** A Source Book in the Foundations of Mathematics, Vol. II. 1. ed. New York. Oxford University Press, 2005.

______. Proof that every set can be well-ordered. 1904. In: ZERMELO, Ernst. **Collected Works**, Heinz-Dieter Ebbinghaus, Craig G. Fraser, Akihiro Kanamori, (editores). vol.1. 1. ed. New York: Springer, 2000. p. 115-119.

______. A new proof of the possibility of a well-ordering. 1908a. In: ZERMELO, Ernst. **Collected Works**, Heinz-Dieter Ebbinghaus, Craig G. Fraser, Akihiro Kanamori, (editores). vol.1. 1. ed. New York: Springer, 2000. p. 121-159.