



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DE MANCAIS RADIAIS DE TRÊS LÓBULOS**  
**LUBRIFICADOS A GÁS UTILIZANDO PROCEDIMENTO DE**  
**ELEMENTOS FINITOS**

**RODRIGO DE ARAÚJO SIMÕES**

**Belo Horizonte, 11 de Dezembro de 2017**

Rodrigo de Araújo Simões

**ANÁLISE DE MANCAIS RADIAIS DE TRÊS LÓBULOS  
LUBRIFICADOS A GÁS UTILIZANDO PROCEDIMENTO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2017



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**  
Av. Antônio Carlos, 6627 - Campus Universitário  
31270-901 – Belo Horizonte – MG  
Tel.: +55 31 3409.5145  
E-mail: [cpgmec@demec.ufmg.br](mailto:cpgmec@demec.ufmg.br)

**"ANÁLISE DE MANCAIS RADIAIS DE TRÊS LÓBULOS  
LUBRIFICADOS A GÁS UTILIZANDO PROCEDIMENTO DE  
ELEMENTOS FINITOS"**

**RODRIGO DE ARAÚJO SIMÕES**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto Mecânico**".

Dissertação aprovada no dia 11 de dezembro de 2017.

Por:

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Marco Túlio Corrêa de Faria", written over a horizontal line.

**Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria**  
Orientador - Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Ernani Sales Palma", written over a horizontal line.

**Prof. Ernani Sales Palma**  
Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Lázaro Valentim Donadon", written over a horizontal line.

**Prof. Lázaro Valentim Donadon**  
Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG

*À minha família e aos amigos.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço a Deus.*

*Á minha família e aos amigos que me apoiaram.*

*Ao orientador, Prof. Dr. Marco Túlio Corrêa de Faria, pela oportunidade, disposição, paciência e conselhos.*

*A todos os professores e colegas da pós-graduação.*

## SUMÁRIO

SUMÁRIO .....	5
LISTA DE FIGURAS .....	6
LISTA DE TABELAS .....	9
NOMENCLATURA .....	10
RESUMO.....	13
1 INTRODUÇÃO .....	14
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	17
3 METODOLOGIA .....	25
4 RESULTADOS E ANÁLISES.....	36
4.1 Análise de Sensibilidade de Malha.....	36
4.2 Validação do Procedimento de Elementos Finitos .....	42
4.3 Análise dos parâmetros de operação e das condições de contorno .....	44
4.4 Análise do efeito da frequência de excitação utilizada nos cálculos .....	56
4.5 Análise dos parâmetros geométricos .....	57
5 CONCLUSÕES .....	64
ABSTRACT .....	65
REFERÊNCIAS.....	66

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 - Turbocompressor de alta velocidade lubrificado a gás.....	14
FIGURA 1.2 - Representações ilustrativas (fora de escala) de mancais radiais de três lóbulos .....	15
FIGURA 2.1 - Aparato experimental para estudo da lubrificação utilizando gases.....	17
FIGURA 2.2 - Geometria de um mancal radial cilíndrico convencional. ....	18
FIGURA 2.3 - Mancal com eixo ranhurado em forma de espinha de peixe.....	24
FIGURA 3.1 - Geometria de um mancal radial de três lóbulos. ....	25
FIGURA 3.2 - Elemento quadrangular de quatro nós isoparamétrico e transformação de coordenadas locais para coordenadas naturais. ....	29
FIGURA 3.3 - Estrutura básica do procedimento implementado.....	33
FIGURA 4.1 - Curvas do ângulo de posição do mancal em função do número de elementos finitos. ....	38
FIGURA 4.2 - Curvas da capacidade de carga do mancal em função do número de elementos finitos.....	38
FIGURA 4.3 - Curvas do coeficiente de rigidez cruzado $K_{YX}$ do mancal em função do número de elementos finitos.....	39
FIGURA 4.4 - Curvas do coeficiente de amortecimento cruzado $C_{YX}$ do mancal em função do número de elementos finitos.....	40
FIGURA 4.5 - Curvas do tempo de execução do procedimento em função do número de elementos finitos.....	40
FIGURA 4.6 - Curvas de capacidade de carga adimensional $f_{02}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).....	45
FIGURA 4.7 - Curvas de capacidade de carga adimensional $f_{02}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). ....	46
FIGURA 4.8 - Curvas do Número de Sommerfeld em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). ....	47
FIGURA 4.9 - Curvas do ângulo de posição em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). ....	48
FIGURA 4.10 - Posição de equilíbrio do centro do eixo para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). ....	49

FIGURA 4.11 - Curvas do ângulo de posição em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). .....	50
FIGURA 4.12 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XX}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).....	51
FIGURA 4.13 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YY}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).....	51
FIGURA 4.14 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XY}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).....	52
FIGURA 4.15 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YX}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).....	52
FIGURA 4.16 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XX}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). .....	53
FIGURA 4.17 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YY}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). .....	54
FIGURA 4.18 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XY}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). .....	54
FIGURA 4.19 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YX}$ em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). .....	55
FIGURA 4.20 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YY}$ em função da fração de velocidade e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0,1$ .....	56
FIGURA 4.21 - Curvas da capacidade de carga adimensional $f_{02}$ em função do número de compressibilidade e da razão de esbeltez para um mancal operando a uma razão de excentricidade $\varepsilon = 0,1$ . .....	57
FIGURA 4.22 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XX}$ em função da razão de esbeltez e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ . .....	58



FIGURA 4.23 - Curvas da capacidade de carga adimensional $f_{02}$ em função do número de compressibilidade e do fator de pré-carga para um mancal operando a uma razão de excentricidade $\varepsilon = 0,1$ .	59
FIGURA 4.24 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YY}$ em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ .	60
FIGURA 4.25 - Curvas do coeficiente de amortecimento adimensional $c_{XX}$ em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ .	60
FIGURA 4.26 - Curvas da capacidade de carga adimensional $f_{02}$ em função do número de compressibilidade e do número de lóbulos para um mancal operando a uma razão de excentricidade $\varepsilon = 0,1$ .	61
FIGURA 4.27 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{XX}$ em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ .	62
FIGURA 4.28 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional $k_{YY}$ em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ .	62
FIGURA 4.29 - Curvas do coeficiente de amortecimento adimensional $c_{YY}$ em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para $\varepsilon = 0$ .	63

## LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - Conjuntos de condições de contorno considerados no procedimento. ....	27
TABELA 4.1 - Parâmetros utilizados para análise direcional de sensibilidade de malha. ....	37
TABELA 4.2 - Comparação do ângulo de posição para validação. ....	42
TABELA 4.3 - Comparação da capacidade de carga adimensional para validação. ....	43
TABELA 4.4 - Parâmetros de referência para análise de mancais radiais de três lóbulos lubrificadas a gás. ....	44

# NOMENCLATURA

## Letras Latinas

$C_b$	Folga radial nominal
$C_{ij}$	Coefficientes dinâmicos de força de amortecimento
$c_{ij}$	Coefficientes adimensionais amortecimento
$C_{min}$	Folga radial mínima
$e$	Excentricidade
$e_0$	Excentricidade na condição de equilíbrio
$F_X$	Componente da força de sustentação na direção $X$
$F_Y$	Componente da força de sustentação na direção $Y$
$F_0$	Capacidade de carga do mancal / força de sustentação estacionária
$f_{01}; f_{02}$	Capacidades de carga adimensionais
$f_{\sigma_j}^e$	Vetor fluxo de primeira ordem
$h$	Espessura do filme fluido
$h_e$	Média da espessura do filme fluido nos nós do elemento finito
$h_0$	Espessura do filme fluido no regime estacionário
$i$	Unidade imaginária
$K_{ij}$	Coefficientes dinâmicos de força de rigidez
$k_{ij}$	Coefficientes adimensionais de rigidez
$k_{ji}^e$	Coefficientes da matriz de coeficientes de um elemento finito
$k_{\sigma_{ji}}^e$	Coefficientes da matriz de coeficientes complexa de primeira ordem
$L$	Largura do mancal
$L_e$	Comprimento do elemento finito na direção circunferencial
$m_p$	Fator de pré-carga
$\dot{m}_n^e$	Vazão mássica para fora do elemento finito
$\dot{m}_{\sigma_n}^e$	Vazão mássica de primeira ordem para fora do elemento finito
$n$	$n$ -ésimo lóbulo
$O_b$	Centro do mancal e origem do sistema de coordenadas cartesianas $XY$
$O_j$	Centro do eixo
$p$	Campo de pressão no filme fluido
$p_e$	Média das pressões nos nós do elemento finito
$p_a$	Pressão ambiente

$q_j^e$	Fluxo nodal através da fronteira do elemento finito
$q_{\sigma_j}^e$	Fluxo nodal de primeira ordem através da fronteira do elemento finito
$R$	Raio do eixo
$R_L$	Raio de curvatura do lóbulo
$r_p$	Pré-carga
$S$	Número de Sommerfeld
$t$	Tempo
$U$	Velocidade tangencial na superfície do eixo
$X$	Direção $X$ do sistema de coordenadas fixo $XY$
$x$	Coordenada circunferencial
$Y$	Direção $Y$ do sistema de coordenadas fixo $XY$
$Z_{\sigma\beta}$	Impedâncias complexas dinâmicas
$z$	Coordenada axial

### Letras Gregas

$\Gamma_e$	Fronteira do elemento finito
$\varepsilon$	Razão de excentricidade
$\varepsilon_X$	Componente da razão de excentricidade na direção $X$
$\varepsilon_Y$	Componente da razão de excentricidade na direção $Y$
$\eta$	Coordenada natural do elemento finito
$\theta$	Coordenada angular circunferencial
$\theta_i$	Posição angular inicial de um lóbulo
$\theta_f$	Posição angular final de um lóbulo
$\Lambda$	Número de compressibilidade
$\lambda$	Razão de esbeltez
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido
$\xi$	Coordenada natural do elemento finito
$\rho$	Massa específica do fluido
$\varphi$	Coordenada angular com referencial fixo
$\varphi_{p_n}$	Posição angular do centro do lóbulo $n$
$\phi_0$	Ângulo de posição na posição de equilíbrio
$\psi_i^e$	Funções de interpolação de alta ordem
$\Omega$	Velocidade angular de rotação do eixo

$\Omega_e$	Domínio do elemento finito
$\omega$	Frequência de excitação

## RESUMO

A utilização de mancais radiais lubrificados a gás tem aumentado e a busca por inovações que tragam aprimoramentos ao seu uso tem ganhado importância. Sendo assim, o entendimento do funcionamento desses componentes se torna fundamental, em especial, no que diz respeito à estabilidade, uma vez que a ocorrência de vibração auto-excitada é o principal obstáculo ao amplo emprego de mancais radiais lubrificados a gás. Mancais de geometria fixa não cilíndricos representam uma das soluções para a aplicação da lubrificação a gás em mancais radiais, e, dentre as soluções, é a de menor custo. Assim, o presente trabalho visa suprir parte da carência, principalmente no âmbito nacional, de procedimentos de análise e de dados sobre características de desempenho estacionárias e dinâmicas de um grupo desses componentes: os mancais multilóbulos. O foco é voltado para um dos seus representantes, o mancal de três lóbulos lubrificado a gás. Dessa forma, buscou-se a implementação e a validação de um procedimento de elementos finitos para análise de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás. O procedimento permite calcular características estacionárias – ângulo de posição e capacidade de carga – e dinâmicas – coeficientes dinâmicos de força de rigidez e de amortecimento – de mancais radiais multilóbulos lubrificados a gás para variadas condições de operação e diferentes parâmetros geométricos. Ele se baseia na aplicação do método da perturbação na equação clássica de Reynolds para obter as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem. As equações de elementos finitos são determinadas utilizando o método dos resíduos ponderados de Galerkin com funções de interpolação de alta ordem. O filme fluido é modelado por meio de elementos finitos retangulares de quatro nós isoparamétricos. Utiliza-se o método da quadratura Gaussiana para integração numérica e obtenção da matriz dos coeficientes. A partir da solução da equação de ordem zero, determinam-se as pressões hidrodinâmicas e outras características de desempenho estacionárias. As características de desempenho dinâmicas são obtidas por meio da solução da equação de primeira ordem com a utilização da distribuição de pressão da solução estática. A partir dos resultados obtidos, verificou-se que mancais radiais de três lóbulos, sujeitos à pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos, representam uma possível solução ao problema de instabilidade recorrente nos mancais lubrificados a gás.

**Palavras-Chave:** Mancais radiais a gás; mancais multilóbulos; mancais de três lóbulos; método da perturbação linear; elementos finitos.

# 1 INTRODUÇÃO

A utilização de mancais lubrificados a gás tem recebido consideravelmente mais atenção nos últimos anos, devido a suas vantagens: baixo atrito, ampla disponibilidade de lubrificante sem contaminantes, ambiente e superfícies limpas, capacidade de operar em grande faixa de temperaturas e ausência de cavitação (HAMROCK, 1994). Esses elementos de máquinas já são empregados em diversas aplicações importantes, tais como sistemas de navegação (giroscópios), unidades de disco de computadores, instrumentos e sensores de alta precisão, brocas dentárias, máquinas-ferramenta e turbomáquinas leves de alta velocidade (FARIA e ANDRÉS, 2000). A FIGURA 1.1 mostra um turbocompressor cujo rotor é sustentado por mancais lubrificados a gás. O equipamento opera a 280.000 rpm, pesa apenas 1,5 kg e a maior dimensão mede aproximadamente 185 mm (CELEROTON AG, 2017).

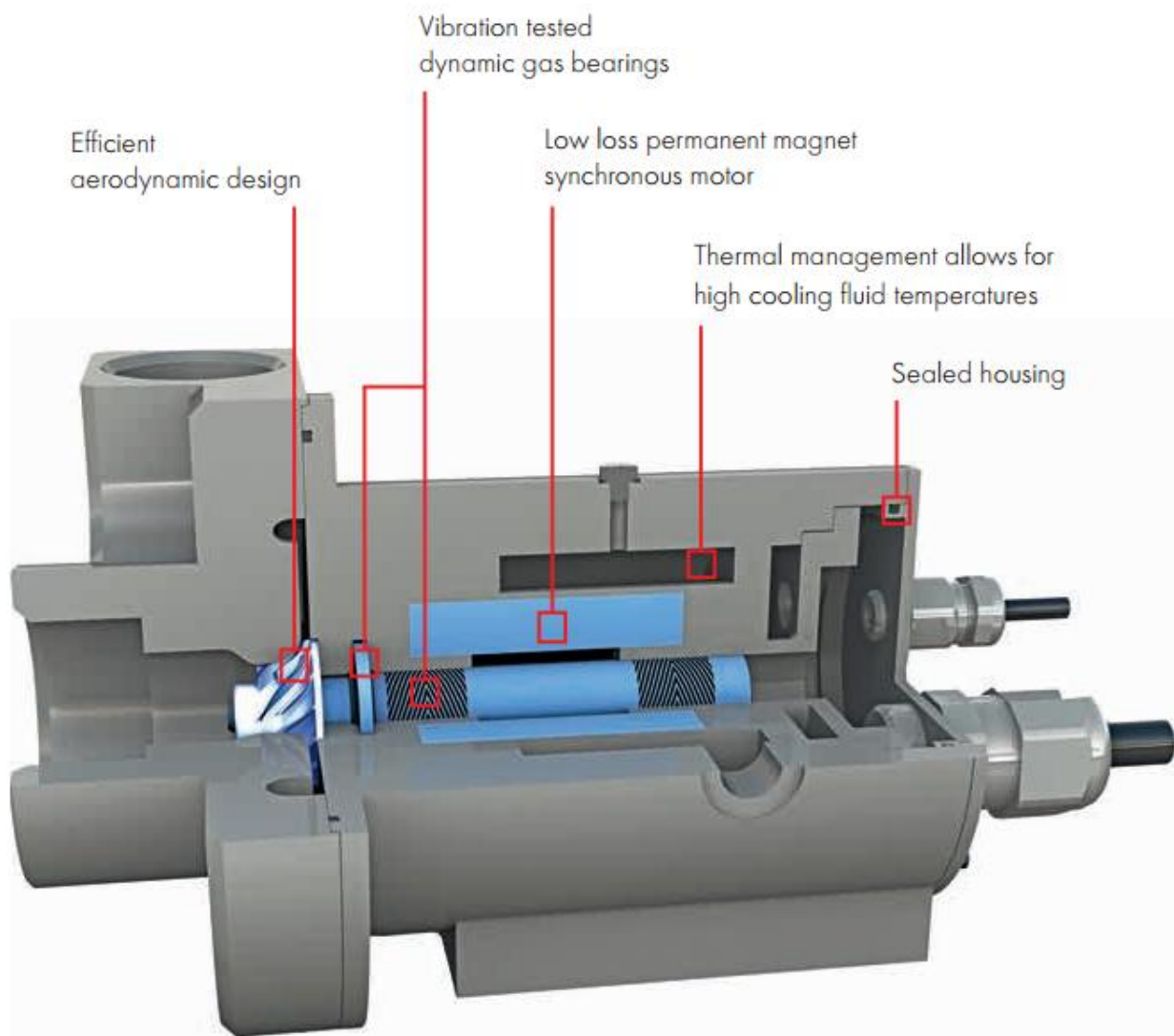


FIGURA 1.1 - Turbocompressor de alta velocidade lubrificado a gás. (CELEROTON AG, 2017)

Algumas desvantagens dos mancais a gás, entretanto, limitam o seu uso: capacidade de carga reduzida em relação a mancais lubrificados a óleo; necessidade de melhor acabamento superficial, tolerâncias dimensionais mais restritivas e melhor alinhamento, o que dificulta a fabricação e montagem; necessidade de altas velocidades de rotação; e características de estabilidade insatisfatórias (HAMROCK, 1994). A última desvantagem, de fato, representa o maior obstáculo para o amplo emprego de mancais radiais lubrificados a gás, devido, principalmente, à ocorrência de vibração auto-excitada (CZOLCZYNSKI, 1999). Para enfrentar esse problema, alguns tipos de mancais radiais têm sido propostos: mancais rígidos não cilíndricos (com ou sem ranhuras), mancais com sapatas oscilantes e mancais flexíveis. Dentre essas alternativas, os mancais rígidos não cilíndricos possuem menores custos de fabricação, operação e manutenção (ALLAIRE e FLACK, 1981) e são o foco do presente trabalho. Mais especificamente, mancais radiais de três lóbulos, como os representados na FIGURA 1.2, lubrificados a gás.

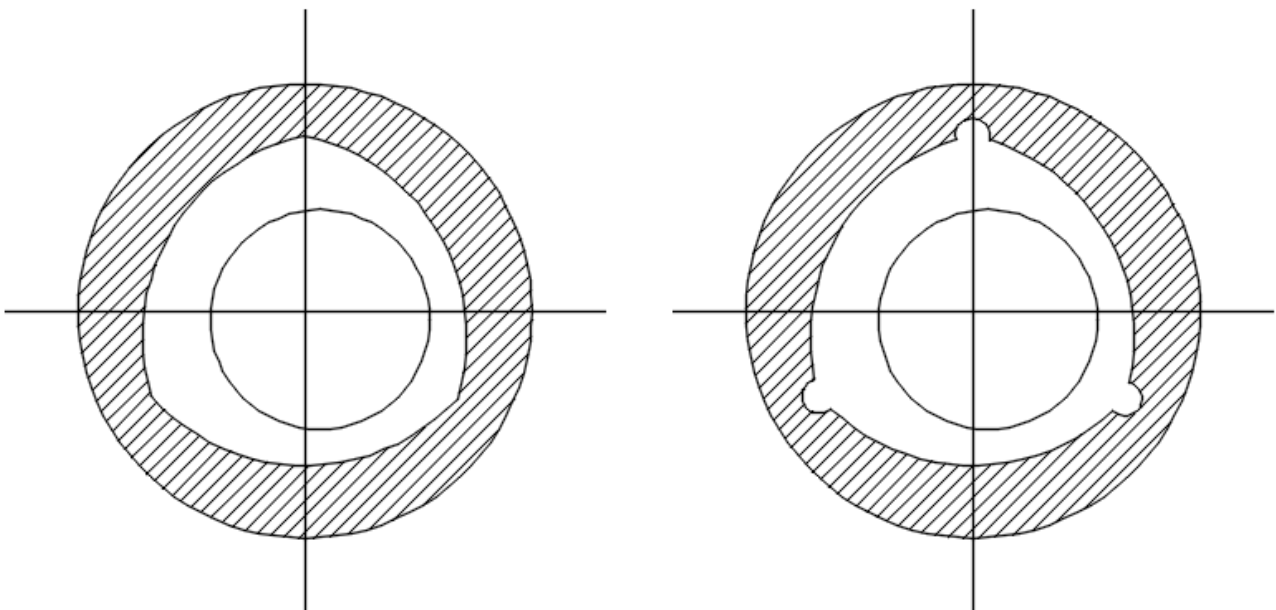


FIGURA 1.2 - Representações ilustrativas (fora de escala) de mancais radiais de três lóbulos

A carência de procedimentos de análise e de dados sobre características de desempenho estacionárias e dinâmicas desses mancais, principalmente no âmbito nacional, incentivou a realização deste trabalho, cujo objetivo é a implementação de um procedimento de elementos finitos para análise de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás. O procedimento permite calcular



características estacionárias – ângulo de posição e capacidade de carga – e dinâmicas – coeficientes dinâmicos de força de rigidez e de amortecimento – de mancais radiais multilóbulos lubrificadas a gás para variadas condições de operação e diferentes parâmetros geométricos.

O procedimento de elementos finitos implementado se baseia na aplicação do método da perturbação na equação clássica de Reynolds para obter as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem. As equações de elementos finitos são determinadas utilizando o método dos resíduos ponderados de Galerkin com funções de interpolação de alta ordem. O filme fluido é modelado por meio de elementos finitos retangulares de quatro nós isoparamétricos. Utiliza-se o método da quadratura Gaussiana para integração numérica e obtenção da matriz dos coeficientes. A partir da solução da equação de ordem zero, determinam-se as pressões hidrodinâmicas e outras características de desempenho estacionárias. As características de desempenho dinâmicas – coeficientes dinâmicos de força do mancal – são obtidas por meio da solução da equação de primeira ordem com a utilização da distribuição de pressão da solução estática.

Para apresentar o trabalho desenvolvido, esta dissertação se divide em 5 capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma breve introdução que aborda a relevância do trabalho, um resumo da metodologia empregada e os objetivos buscados. O segundo capítulo contém uma contextualização sobre lubrificação a gás aplicada a mancais radiais junto a uma revisão bibliográfica sobre publicações voltadas ao estudo de mancais radiais rígidos não cilíndricos lubrificadas a gás. O terceiro capítulo discorre sobre a metodologia empregada, em termos de modelagem e em termos do procedimento implementado. O quarto capítulo apresenta e discute os resultados alcançados, os quais foram subdivididos ao longo de cinco subcapítulos. O Subcapítulo 4.1 contempla uma análise de sensibilidade de malha, o Subcapítulo 4.2, a validação do procedimento e os Subcapítulo 4.3, 4.4 e 4.5, as características dos mancais em estudo com a análise dessas características. O quinto capítulo encerra o conteúdo principal da dissertação com as conclusões mais relevantes do trabalho.

Por fim, os objetivos específicos deste trabalho são a implementação do procedimento de elementos finitos, a validação do procedimento, a utilização do procedimento para determinação de características de mancais radiais de três lóbulos lubrificadas a gás com diversos parâmetros geométricos e em variadas condições de operação, bem como a análise desses mancais e suas características.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A ideia de utilizar gases como lubrificante não é nova, sendo que Hirn (1854) já havia sugerido o uso de ar para essa aplicação. Kingsbury (1897), após observar a formação de uma camada completa de ar separando as superfícies de um cilindro de motor e de um pistão girado manualmente em seu interior, conduziu uma série de experimentos com um aparato equivalente a um mancal radial cilíndrico lubrificado a ar, mostrado na FIGURA 2.1. Esses experimentos começaram a evidenciar algumas das diferenças que existem quando se utilizam fluidos compressíveis como lubrificante.

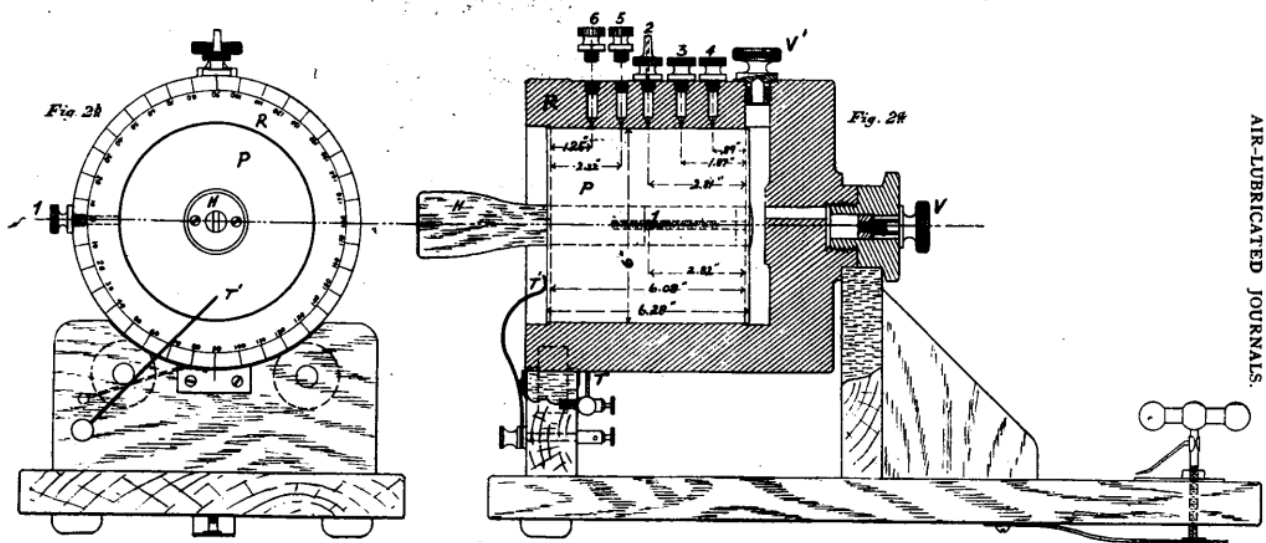


FIGURA 2.1 - Aparato experimental para estudo da lubrificação utilizando gases. (KINGSBURY, 1897)

A teoria que fundamenta o estudo da lubrificação a gás pode ser considerada uma extensão do trabalho de Reynolds (1886) e, historicamente, começou a ser desenvolvida por Harrison (1913). A equação básica que rege a teoria é a Equação de Reynolds para fluidos compressíveis, expressa pela EQ. (2.1), já na forma adequada ao presente trabalho (FARIA, 2001). Tal equação considera: fluido como meio contínuo, escoamento viscoso laminar (forças inerciais desprezíveis), fluido newtoniano, escoamento isotérmico e isoviscoso de um gás ideal.

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ph^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (ph) + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (2.1)$$

Nessa equação,  $R$  é o raio do eixo,  $p$  é o campo de pressão no filme fluido,  $h$  é a espessura do filme fluido,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido,  $U$  é a velocidade tangencial na superfície do eixo,  $t$  é o tempo e  $\theta$  e  $z$  são as variáveis espaciais que descrevem o problema, sendo que  $z$  se refere à coordenada axial, e  $\theta$ , à coordenada angular circunferencial.

A FIGURA 2.2 apresenta a geometria de um mancal radial cilíndrico convencional e alguns parâmetros utilizados na sua descrição. A velocidade angular de rotação do eixo é  $\Omega$ ,  $\varphi$  é uma coordenada angular com referencial fixo e  $O_b$  é o centro do mancal, que é origem do sistema de coordenadas cartesianas indicado por  $X$  e  $Y$ . O centro do eixo é indicado por  $O_j$ , a excentricidade na condição de equilíbrio, por  $e_0$ , e o ângulo de posição na condição de equilíbrio, por  $\phi_0$ .

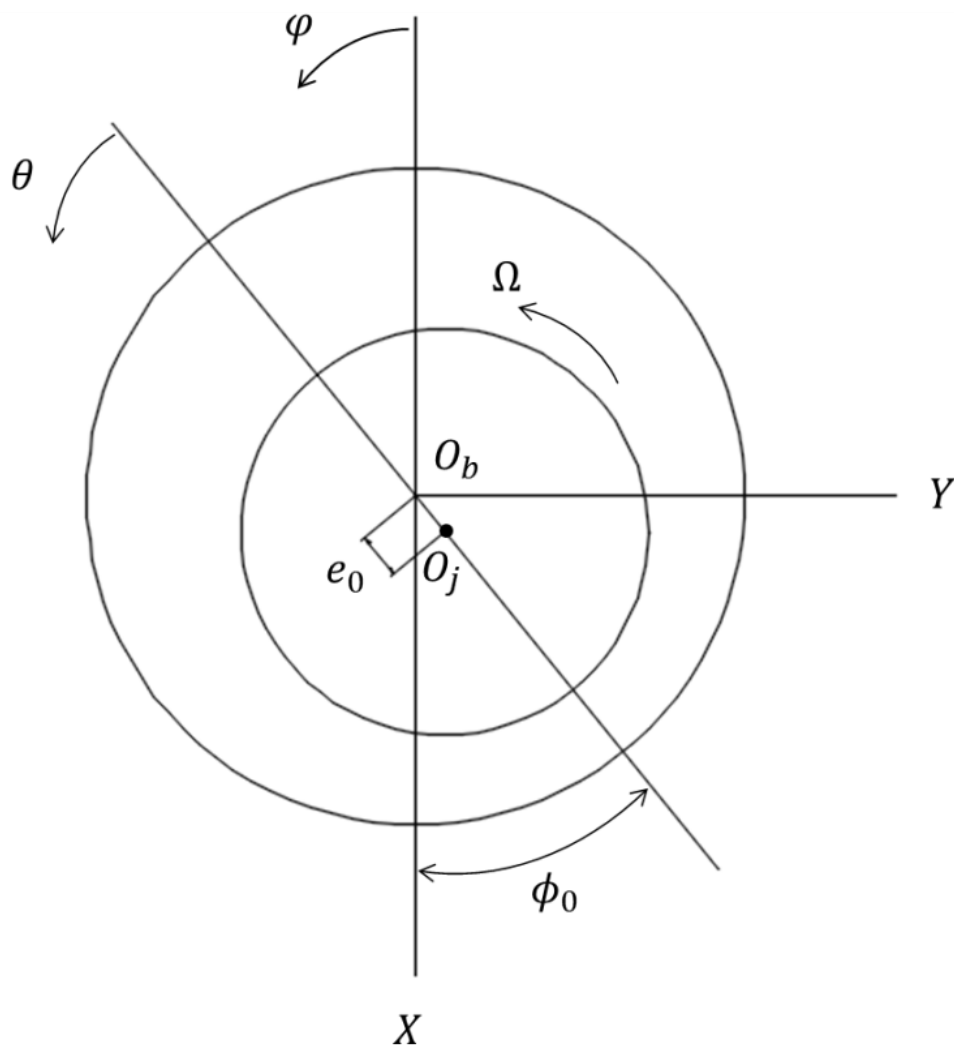


FIGURA 2.2 - Geometria de um mancal radial cilíndrico convencional.

Nesse caso, a espessura do filme fluido  $h_0$ , no regime estacionário, é dada pela EQ. (2.2):

$$h_0 = C_b [1 + \varepsilon_x \cos \varphi + \varepsilon_y \sin \varphi] \quad (2.2)$$

em que  $C_b$  é a folga radial nominal, e  $\varepsilon_X$  e  $\varepsilon_Y$  são as componentes da razão de excentricidade nas direções  $X$  e  $Y$  respectivamente. A EQUAÇÃO (2.3) e a EQ. (2.4) expressam as condições de contorno clássicas às quais a EQ. (2.1) está sujeita, sendo que  $p(\theta, z, t)$  é o campo de pressão no filme fluido,  $L$  é a largura do mancal, e  $p_a$ , a pressão ambiente.

$$p(\theta, -L/2, t) = p(\theta, L/2, t) = p_a \rightarrow \text{pressão ambiente nas laterais do mancal} \quad (2.3)$$

$$p(\theta, z, t) = p(\theta + 2\pi, z, t) \rightarrow \text{periodicidade} \quad (2.4)$$

Ford, Harris e Pantall (1957) apresentam uma investigação experimental de propriedades de mancais a gás e abordam alguns desenvolvimentos na utilização desses componentes. O foco é voltado para mancais hidrodinâmicos, em detrimento de mancais hidrostáticos, embora eles mencionem que, para algumas aplicações, pode ser interessante a aplicação de uma pressão por meio de fonte externa durante a partida e a parada de mancais a gás que operam de maneira hidrodinâmica em regime normal. Segundo os autores, mancais de filme fluido a gás permaneceram sem receber muita atenção até meados da década de 1950, mas a experiência deles mostrava que esses componentes seriam adequados a muitas aplicações práticas. Entretanto, as técnicas de projeto e construção empregadas para mancais a gás deveriam diferir significativamente das usadas para mancais convencionais lubrificados a óleo. Devido aos efeitos de compressibilidade, a teoria da lubrificação para fluidos incompressíveis não poderia prever com precisão suficiente o desempenho de mancais lubrificados a gás.

A partir de 1960, o uso de mancais radiais lubrificados a gás para suportar rotores em equipamentos se tornou mais relevante (CZOLCZYNSKI, 1999). Porém, foi constatado que o fenômeno da vibração orbital auto-excitada representava o principal entrave ao emprego desses componentes. Assim, buscou-se conhecer mais as características dinâmicas desses mancais, principalmente sob a forma de coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento, e, com isso, desenvolver soluções para enfrentar tal problema. De forma geral, as formas de melhorar as características de estabilidade desses elementos englobam mancais de sapatas móveis, mancais porosos, mancais flexíveis e mancais rígidos não cilíndricos. No caso de mancais rígidos não cilíndricos, as geometrias mais estudadas são o mancal multilóbulo de dois lóbulos (também denominado de mancal elíptico), de três lóbulos e de quatro lóbulos, o mancal com ranhuras e o mancal com *offset*.

O método da perturbação linear é um dos métodos mais populares utilizado para determinar os coeficientes dinâmicos de mancais radiais (CZOLCZYNSKI, 1999). Considerando

pequenas perturbações na posição e na velocidade do centro do eixo, é possível linearizar a força exercida pelo filme fluido sobre eixo representando-a por uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, EQ. (2.5) e EQ. (2.6) (ANDRÉS, 2010). A componente da força na direção  $X$  é  $F_X$  e na direção  $Y$  é  $F_Y$ . A força de sustentação estacionária exercida pelo filme fluido no eixo, ou seja, a capacidade de carga do mancal é  $F_0$ .

$$F_X = F_{0X} + \frac{\partial F_X}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_X}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} \quad (2.5)$$

$$F_Y = F_{0Y} + \frac{\partial F_Y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial F_Y}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \Delta \dot{X} + \frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \Delta \dot{Y} \quad (2.6)$$

Assim, os coeficientes dinâmicos são:

$$K_{XX} = -\frac{\partial F_X}{\partial X} \quad (2.7)$$

$$K_{XY} = -\frac{\partial F_X}{\partial Y} \quad (2.8)$$

$$K_{YY} = -\frac{\partial F_Y}{\partial Y} \quad (2.9)$$

$$K_{YX} = -\frac{\partial F_Y}{\partial X} \quad (2.10)$$

$$C_{XX} = -\frac{\partial F_X}{\partial \dot{X}} \quad (2.11)$$

$$C_{XY} = -\frac{\partial F_X}{\partial \dot{Y}} \quad (2.12)$$

$$C_{YY} = -\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{Y}} \quad (2.13)$$

$$C_{YX} = -\frac{\partial F_Y}{\partial \dot{X}} \quad (2.14)$$

Sendo que  $K_{XX}$  e  $K_{YY}$  são denominados coeficientes de rigidez diretos,  $K_{XY}$  e  $K_{YX}$ , coeficientes de rigidez cruzados,  $C_{XX}$  e  $C_{YY}$ , coeficientes de amortecimento diretos e  $C_{XY}$  e  $C_{YX}$ , coeficientes de amortecimento cruzados, os quais podem ser computados diretamente por meio de diferenciação numérica. Em uma variação mais precisa do método (LUND, 1987), supõe-se uma solução perturbada, isto é, um campo de pressão perturbado também expresso como uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, EQ. (2.15) (LUND e THOMSEN, 1978), para obter equações perturbadas de primeira ordem, cuja solução permite a determinação dos coeficientes dinâmicos após a realização de uma integração ao longo de todo o domínio.

$$p = p_0 + p_X \Delta X + p_Y \Delta Y + p_{\dot{X}} \Delta \dot{X} + p_{\dot{Y}} \Delta \dot{Y} \quad (2.15)$$

Portanto, nessa equação  $p_0$  é o campo de pressão estacionário e:

$$p_X = \frac{\partial p}{\partial X} \quad (2.16)$$

$$p_Y = \frac{\partial p}{\partial Y} \quad (2.17)$$

$$p_{\dot{X}} = \frac{\partial p}{\partial \dot{X}} \quad (2.18)$$

$$p_{\dot{Y}} = \frac{\partial p}{\partial \dot{Y}} \quad (2.19)$$

Klit e Lund (1986) desenvolveram uma formulação em elementos finitos do método da perturbação do campo de pressão aplicando princípios variacionais às equações perturbadas (equações de primeira ordem).

Reddi (1969) foi pioneiro na utilização de procedimentos de elementos finitos para solução da Equação de Reynolds. Além da flexibilidade quanto à definição de geometria e aplicação de condições de contorno, procedimentos de elementos finitos permitem obter qualquer grau de exatidão, uma vez que, no limite, convergem para a solução exata. A matriz do sistema de

equações gerado por procedimentos de elementos finitos é esparsa e pode ser solucionada diretamente com mínimos requisitos de armazenamento e tempo de processamento.

A seguir são apresentados os principais trabalhos sobre características de desempenho de mancais radiais não cilíndricos lubrificadas a gás.

Lund (1968) aplicou o método da perturbação para obter os coeficientes dinâmicos de mancais a gás de três lóbulos sem carga, considerando sapatas parciais. Para solução do problema, o autor utilizou uma mudança de variável e procedimentos de diferenças finitas. Com isso, ele verificou que, para esse mancal, o amortecimento diminui com o aumento da velocidade de rotação e que ele não é inerentemente instável como o cilíndrico. O método empregado é aplicável à vibração orbital em regime estacionário para cálculo de velocidades críticas, respostas a desbalanceamentos e limiar de instabilidade hidrodinâmica.

Pinkus (1975) constatou que mancais radiais a gás não cilíndricos, em comparação com mancais cilíndricos convencionais, apesar de apresentarem menor capacidade de carga para pequenas excentricidades, poderiam ser uma solução ao problema de instabilidade recorrente nos mancais radiais lubrificadas a gás. O autor considerou em sua análise mancais elípticos (ou de dois lóbulos) e mancais de três lóbulos. Ele apresenta em seu trabalho a EQ. (2.20):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial}{\partial x} (\rho h) + 12\rho V + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.20)$$

na qual  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $x$  a coordenada circunferencial dada por  $x = \theta R$ . Entretanto, o autor desconsidera o termo  $12h \partial \rho / \partial t$ , solucionando a equação sem esse termo.

As condições de contorno utilizadas por Pinkus (1975) foram parcialmente diferentes das condições de contorno clássicas, uma vez que a condição de periodicidade foi substituída pela condição de contorno dada pela EQ. (2.21), na qual cada lóbulo é considerado isoladamente e entre eles é imposta pressão ambiente.  $\theta_i$  e  $\theta_f$  referem-se, respectivamente, às posições angulares iniciais e finais de cada lóbulo. Tal condição de contorno, a qual passou a ser trivial quando se trata de mancais multilóbulos, é razoável quando ranhuras axiais estão presentes entre os lóbulos e, principalmente, quando alimentação de fluido à pressão ambiente é feita por essas regiões. O autor fez uso de procedimento iterativo de diferenças finitas para resolver a equação. Ele destaca que no caso de mancais não cilíndricos a direção de aplicação da carga se torna algo a ser levado em consideração.

$$p(\theta_i, z, t) = p(\theta_f, z, t) = p_a \rightarrow \text{pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos} \quad (2.21)$$

O procedimento de elementos finitos implementado neste trabalho pode efetuar os cálculos considerando ou as condições de contorno clássicas – EQ. (2.3) e EQ. (2.4) – ou as condições de contorno triviais – EQ. (2.3) e EQ. (2.21) – bastando alterar um dado de entrada de configuração do programa. Para validação do procedimento são utilizadas as condições de contorno triviais, permitindo comparar os resultados obtidos pelo procedimento com os resultados obtidos por Pinkus (1975). Para análise de desempenho de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás são usadas ambas as condições de contornos, clássicas e triviais, a fim de comparar os resultados obtidos por meio delas.

Singh, Sinhasan e Wadhwa (1982) estendem a formulação sugerida por Reddi e Chu (1970), aplicada a mancais axiais, para mancais radiais elípticos e de três lóbulos lubrificados a gás, incluindo desalinhamento entre o eixo do rotor e o eixo do mancal. Por procedimentos de elementos finitos, ele obtém características de desempenho estacionárias dos mancais mencionados.

Chandra, Malik e Sinhasan (1983) determinaram características de desempenho estacionárias e dinâmicas de mancais radiais de dois, três e quatro lóbulos e de dois lóbulos com *offset* lubrificados a gás, utilizando procedimentos de elementos finitos. Cada lóbulo foi considerado como um mancal parcial independente e foi aplicada a condição de contorno trivial para essa consideração, pressão ambiente no início e fim do lóbulo. Os autores constataram que mancais de dois lóbulos com *offset*, na condição sem carga, oferece melhor estabilidade dinâmica, seguido do mancal de três lóbulos, depois o de quatro lóbulos, sendo o mancal de dois lóbulos o menos estável entre os mencionados.

Wadhwa, Sinhasan e Singh (1983) determinaram características de desempenho dinâmicas de mancais elípticos e de três lóbulos lubrificados a gás por meio do método da perturbação (LUND, 1968) modificado, utilizando procedimentos de elementos finitos. Com os resultados, os autores concluem que mancais de três lóbulos apresentam uma faixa de operação estável mais ampla, em comparação com mancais elípticos, porém exigem tolerâncias de fabricação mais restritivas, devido à menor espessura mínima do filme.

Faria (2001) utilizou procedimentos de elementos finitos, com funções de interpolação de alta ordem, para determinar características de desempenho estáticas e dinâmicas de mancais com ranhuras em forma de espinha de peixe lubrificados a gás. As ranhuras podem ser na superfície do mancal ou na superfície do eixo, FIGURA 2.3. O método da perturbação do campo de pressão é aplicado para obtenção das equações de Reynolds de ordem zero e de primeira ordem. O autor constata que esse tipo de mancal apresenta boa característica de estabilidade aliada a um baixo custo de fabricação.



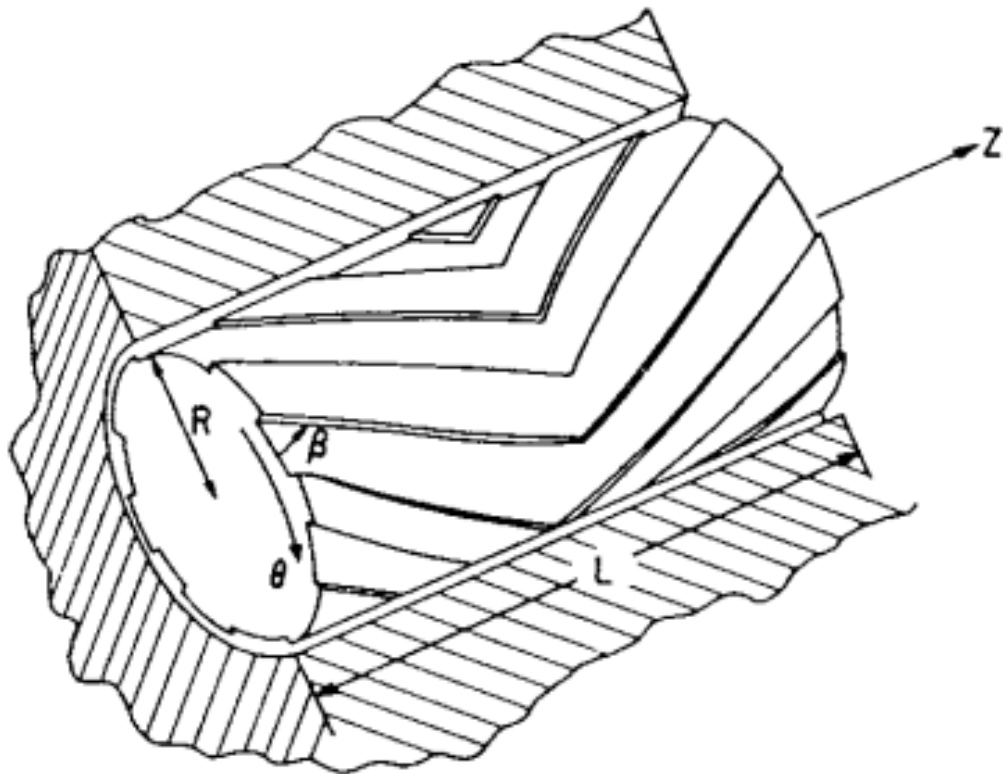


FIGURA 2.3 - Mancal com eixo ranhurado em forma de espinha de peixe.  
(FARIA, 2005)

Faria (2014) realiza uma análise comparativa do desempenho estacionário e dinâmico de mancais cilíndricos e elípticos lubrificadas a gás utilizando procedimentos de elementos finitos para determinar a solução das equações de Reynolds de ordem zero e de primeira ordem. O autor verifica que mancais elípticos, apesar do custo de fabricação similar, apresentam desempenho superior aos mancais cilíndricos convencionais, sendo, portanto, uma alternativa industrial viável. Além disso, ele constata que os coeficientes de amortecimento de mancais lubrificadas a gás são praticamente desprezíveis.

### 3 METODOLOGIA

A FIGURA 3.1 apresenta a geometria de um mancal radial de três lóbulos e alguns parâmetros utilizados para a sua descrição. A velocidade angular de rotação do eixo é  $\Omega$ ,  $\varphi$  é uma coordenada angular com referencial fixo na vertical,  $\theta$  é uma coordenada angular com referencial no ângulo de posição,  $\phi_0$ , e  $O_b$  é o centro do mancal, que é origem do sistema de coordenadas cartesianas indicado por  $X$  e  $Y$ . O centro do eixo é indicado por  $O_j$ , a excentricidade na condição de equilíbrio, por  $e_0$ .

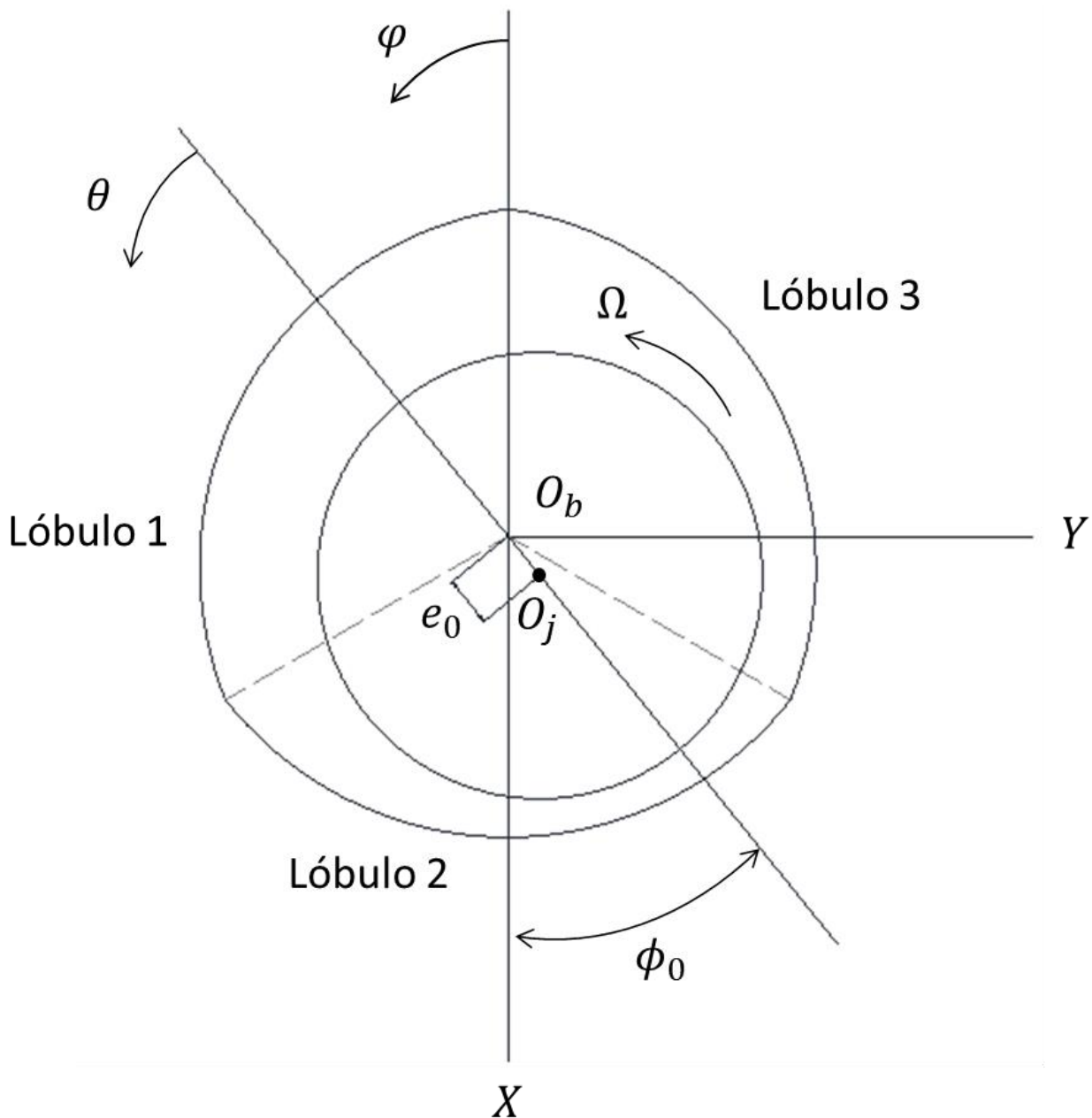


FIGURA 3.1 - Geometria de um mancal radial de três lóbulos.

A expressão para espessura do filme, dependente do lóbulo em questão  $n$ , é dada pela Equação (3.1). Nesse caso, a folga radial nominal,  $C_b$ , é tomada com base no raio de curvatura do lóbulo  $R_L$ , isto é,  $C_b = R_L - R$ . A razão de excentricidade é dada por  $\varepsilon = e/C_b$ . O fator de pré-carga é dado por  $m_p = (C_b - C_{min})/C_b$ , sendo a pré-carga  $r_p = C_b - C_{min}$  e a folga radial mínima  $C_{min}$ .  $\varphi_{p_n}$  é a posição angular do centro do lóbulo  $n$ . Para um mancal radial cilíndrico convencional  $m_p = 0$ .

$$h_0 = C_b \left[ 1 + \varepsilon_x \cos \varphi + \varepsilon_y \sin \varphi - m_p \cdot \cos \left( \varphi - \varphi_{p_n} \right) \right] \quad (3.1)$$

As seguintes transformações de coordenadas se aplicam:

$$\begin{aligned} \varphi &= \theta + \phi_0 \\ d\varphi &= d\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} x &= \theta R \\ dx &= R d\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

A equação de Reynolds para um gás ideal isotérmico e isoviscoso pode ser descrita como (FARIA, 2001):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{ph^3}{12 \mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ph^3}{12 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (ph) + \frac{\partial}{\partial t} (ph) \quad (3.4)$$

O domínio do filme fluido é  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $-L/2 \leq z \leq L/2$ , e os dois conjuntos de condições de contorno considerados são especificados na TABELA 3.1

TABELA 3.1 - Conjuntos de condições de contorno considerados no procedimento.

<p><b>Conjunto de condições de contorno clássicas</b></p> <p>(sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos)</p>	$p(\theta, -L/2, t) = p(\theta, L/2, t) = p_a$ <p>(pressão ambiente nas laterais do mancal)</p> $p(\theta, z, t) = p(\theta + 2\pi, z, t)$ <p>(periodicidade)</p>
<p><b>Conjunto de condições de contorno triviais</b></p> <p>(com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos)</p>	$p(\theta, -L/2, t) = p(\theta, L/2, t) = p_a$ <p>(pressão ambiente nas laterais do mancal)</p> $p(\theta, z, t) = p(\theta + 2\pi, z, t)$ <p>(periodicidade)</p> $p(\theta_i, z, t) = p(\theta_f, z, t) = p_a$ <p>(pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos)</p>

O método da perturbação linear é aplicado na equação clássica de Reynolds para obter as equações de lubrificação de ordem zero e de primeira ordem. Tal análise é capaz de prever os coeficientes dinâmicos de força com acurácia para razões de excentricidade de até 0,4 (LUND, 1987). A posição de equilíbrio é perturbada por movimentos de pequenas amplitudes com frequência de excitação  $\omega$ . Assim, a espessura do filme passa a ser:

$$h = h_0 + (\Delta e_X h_X + \Delta e_Y h_Y) e^{i\omega t} = h_0 + \Delta e_\sigma h_\sigma e^{i\omega t}$$

$$\sigma = X, Y \tag{3.5}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

Sendo:

$$h_X = \cos \varphi$$

$$h_Y = \sin \varphi \tag{3.6}$$

Com a perturbação, a distribuição de pressão passa a ser:

$$p(\theta, z, t) = p_0(\theta, z) + (\Delta e_X p_X + \Delta e_Y p_Y)e^{i\omega t} = p_0(\theta, z) + \Delta e_\sigma p_\sigma e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

Substituindo as expressões das Equações (3.5) e (3.7) na Equação de Reynolds, Equação (3.4), eliminando os termos de ordem superior, devido à consideração de pequenas amplitudes, obtêm-se, respectivamente, as Equações de Ordem Zero e de Primeira Ordem:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p_0 h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p_0 h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (p_0 h_0) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{3p_0 h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial (p_\sigma p_0)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{3p_0 h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial (p_\sigma p_0)}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{2} \frac{U}{R} \left( \frac{\partial (h_0 p_\sigma)}{\partial \theta} + \frac{\partial (p_0 h_\sigma)}{\partial \theta} \right) + i\omega (h_0 p_\sigma + p_0 h_\sigma) + \frac{\partial (p_0 h_\sigma)}{\partial t} \\ + \frac{\partial (h_0 p_\sigma)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sendo:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \Omega \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial h_\sigma}{\partial t} = \Omega \frac{\partial h_\sigma}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

As equações de elementos finitos são determinadas utilizando o método dos resíduos ponderados de Galerkin (FARIA, 2001). O domínio do filme é dividido em elementos quadrangulares de quatro nós isoparamétricos, conforme FIGURA 3.2, onde é representada a transformação de coordenadas locais para coordenadas naturais do elemento.

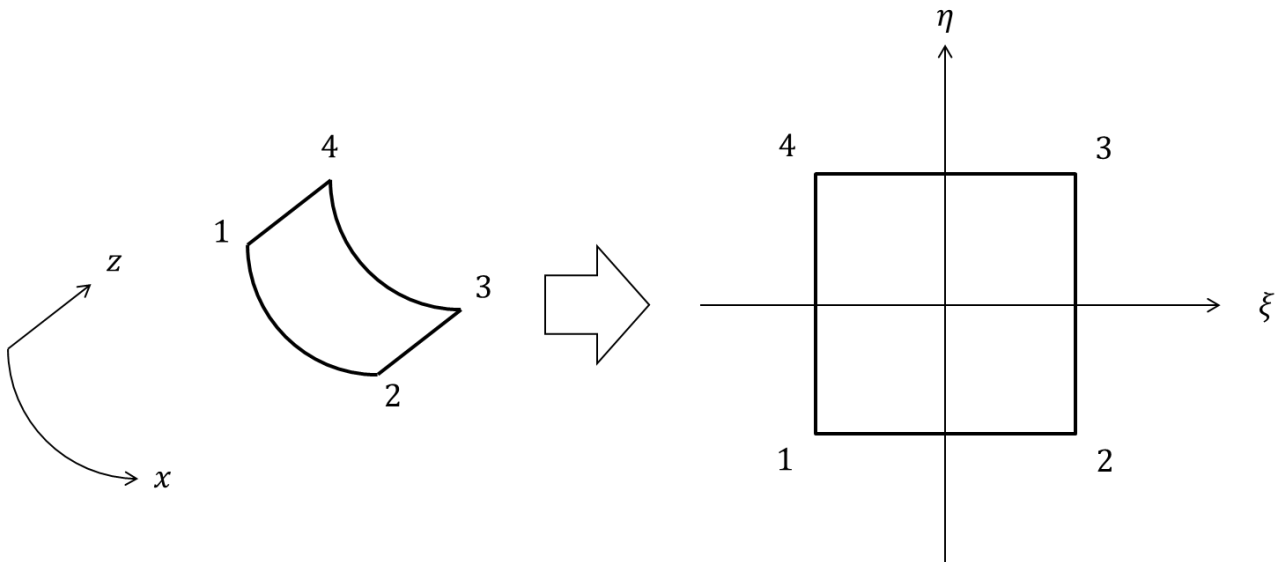


FIGURA 3.2 - Elemento quadrangular de quatro nós isoparamétrico e transformação de coordenadas locais para coordenadas naturais.

As funções de interpolação de alta ordem empregadas são (FARIA, 2001):

$$\begin{aligned}
 \psi_1^e &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \left( \frac{e^{\lambda_e} - e^{\lambda_e \xi}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\
 \psi_2^e &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \left( \frac{e^{\lambda_e \xi} - e^{-\lambda_e}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\
 \psi_3^e &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \left( \frac{e^{\lambda_e \xi} - e^{-\lambda_e}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right) \\
 \psi_4^e &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \left( \frac{e^{\lambda_e} - e^{\lambda_e \xi}}{e^{\lambda_e} - e^{-\lambda_e}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Em que:

$$\lambda_e = \frac{6\mu UL_e}{p_e h_e^2} \tag{3.13}$$

sendo que  $L_e$  é o comprimento do elemento na direção circunferencial,  $p_e$  é a média das pressões nos nós do elemento, e  $h_e$ , a média da espessura do filme fluido nos nós do elemento.

Assim:

$$p_0^e = \sum_{i=1}^4 (\psi_i^e p_{0_i}^e) \quad (3.14)$$

$$p_\sigma^e = \sum_{i=1}^4 (\psi_i^e p_{\sigma_i}^e) \quad (3.15)$$

As equações de elementos finitos de ordem zero passam a ser:

$$k_{ji}^e p_{0_i}^e = q_j^e \quad (3.16)$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

Sendo:

$$k_{ji}^e = \iint_{\Omega_e} \left( \frac{p_0 h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} \right) - \frac{U h_0}{2R} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} \psi_i^e \right) d\Omega_e \quad (3.17)$$

$$q_j^e = - \oint_{\Gamma_e} \psi_j^e \dot{m}_n^e d\Gamma_e \quad (3.18)$$

$k_{ji}^e$  representa os coeficientes da matriz de coeficientes de um elemento finito,  $\Omega_e$  é o domínio do elemento finito.  $q_j^e$ , por sua vez, representa o fluxo nodal através da fronteira do elemento  $\Gamma_e$ . A vazão mássica para fora do elemento é  $\dot{m}_n^e$ . Para solução da equação de Reynolds não linear global o método das substituições sucessivas é empregado (STEWART, 1996). Pressão ambiente em todo o domínio é utilizada como estimativa inicial do campo de pressão. Com isso, calcula-se o campo de pressão, o qual é integrado, conforme mostrado mais adiante, para obtenção da força resultante da ação do filme fluido. O processo iterativo é realizado até que:

$$\left| \frac{F_{0_i} - F_{0_{i-1}}}{F_{0_i}} \right| < 0,001 \quad (3.19)$$

As equações de elementos finitos de primeira ordem são:

$$k_{\sigma_{ji}}^e p_{\sigma_i}^e = f_{\sigma_j}^e + q_{\sigma_j}^e \quad (3.20)$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

Em que:

$$k_{\sigma_{ji}}^e = \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} \right) \psi_i^e + \frac{p_0 h_0^3}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial z} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} \right) - \frac{U h_0}{2 R} \psi_i^e \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} + i\omega h_0 \psi_j^e \psi_i^e \right\} d\Omega_e \quad (3.21)$$

$$f_{\sigma_j}^e = \iint_{\Omega_e} \left\{ \frac{-3p_0 h_0^2 h_\sigma}{12\mu} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} + \frac{\partial p_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} \right) + \frac{U}{2} p_0 \frac{h_\sigma}{R} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \theta} - i\omega p_0 h_\sigma \psi_j^e \right\} d\Omega_e \quad (3.22)$$

$$q_{\sigma_j}^e = - \oint_{\Gamma_e} \psi_j^e \dot{m}_{\sigma_n}^e d\Gamma_e \quad (3.23)$$

$k_{\sigma_{ji}}^e$  representa os coeficientes da matriz de coeficientes complexa de primeira ordem.  $f_{\sigma_j}^e$  representa o vetor fluxo de primeira ordem e  $q_{\sigma_j}^e$ , o fluxo nodal de primeira ordem através da fronteira do elemento.  $\dot{m}_{\sigma_n}^e$  é vazão mássica de primeira ordem para fora do elemento.

As soluções das equações de ordem zero e de primeira ordem fornecem, respectivamente, os campos de pressão de ordem zero e de primeira ordem, os quais são integrados ao longo do domínio para determinar as forças do filme fluido, EQ. (3.24), e as impedâncias complexas dinâmicas, EQ. (3.25). As integrais são avaliadas por meio do método da quadratura Gaussiana.

$$F_{\sigma_0} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} (p_0 - p_\alpha) h_\sigma R d\theta dz \quad (3.24)$$



$$Z_{\sigma\beta} = K_{\sigma\beta} + i\omega C_{\sigma\beta} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} p_{\beta} h_{\sigma} R d\theta dz \quad (3.25)$$

Esta última que também pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} p_X h_X & p_Y h_X \\ p_X h_Y & p_Y h_Y \end{bmatrix} R d\theta dz \quad (3.26)$$

O procedimento apresentado até aqui permite determinar as características estacionárias e dinâmicas para uma dada posição de equilíbrio, isto é, a razão de excentricidade  $\varepsilon$  e o ângulo de posição  $\phi_0$  ou as componentes da razão de excentricidade  $\varepsilon_X$  e  $\varepsilon_Y$ . Mas, de forma geral, deseja-se saber qual o ângulo de posição que o eixo assume para uma dada excentricidade e condição de operação, representada pela velocidade de rotação  $\Omega$ . Para isso, soluciona-se repetidas vezes o sistema de equações de ordem zero, buscando o ângulo de posição que dá origem a uma força de sustentação aproximadamente vertical. O processo funciona da seguinte forma: considera-se inicialmente que o ângulo de posição é zero, portanto  $\varepsilon_X = \varepsilon$  e  $\varepsilon_Y = 0$ ; o procedimento é realizado até a determinação de  $F_{0X}$ ,  $F_{0Y}$  e  $F_0$ , sendo que  $F_0 = \sqrt{F_{0X}^2 + F_{0Y}^2}$ ; calcula-se o ângulo entre  $F_{0X}$  e  $F_0$ , valor esse que será deduzido do ângulo de posição para corrigi-lo; o procedimento até esse ponto é feito utilizando agora o novo ângulo de posição corrigido; repete-se esse processo até que o ângulo entre  $F_{0X}$  e  $F_0$  seja menor ou igual a  $1^\circ$ . Com isso, procede-se para a solução do sistema de equações de primeira ordem para determinação das características dinâmicas.

O procedimento de elementos finitos foi implementado na linguagem FORTRAN 90, visando aproveitar partes das sub-rotinas já implementadas pelo Grupo de Dinâmica de Rotores da UFMG para análise de mancais. Foi utilizado o compilador Intel(R) Visual Fortran, por meio do programa de ambiente de desenvolvimento Microsoft Visual Studio. A FIGURA 3.3 mostra a estrutura básica do procedimento, por meio de um fluxograma com as principais sub-rotinas de alto nível.

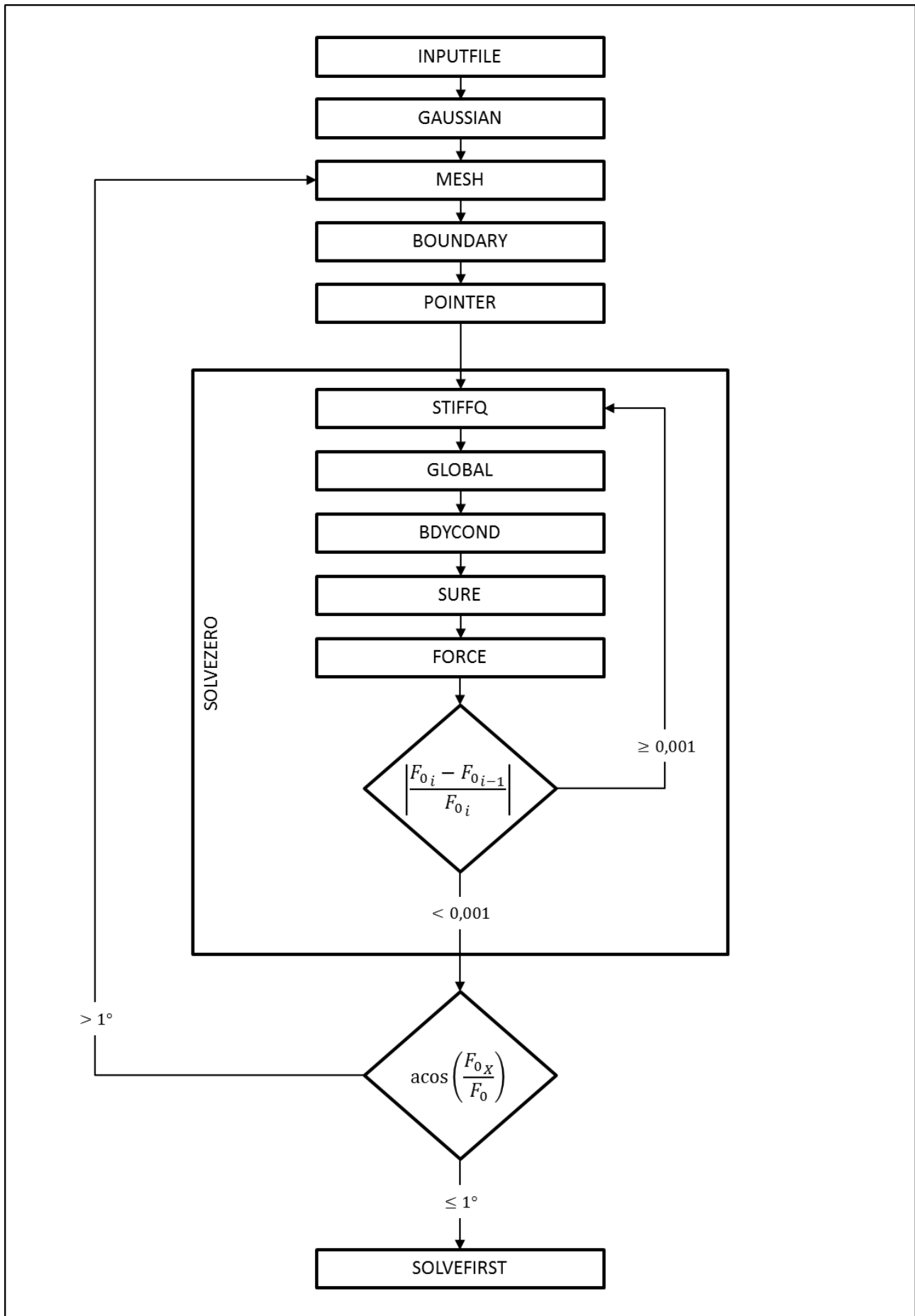


FIGURA 3.3 - Estrutura básica do procedimento implementado.

A sub-rotina denominada INPUTFILE lê de um arquivo de texto os dados de entrada para o programa implementado. Os dados de entrada necessários são: pré-carga, folga radial nominal, diâmetro do eixo, comprimento do mancal, posição angular do início de um lóbulo, componentes da razão de excentricidade, viscosidade do gás, massa específica do gás, pressão ambiente, velocidade de rotação do eixo, frequência de vibração orbital (frequência de excitação), número de elementos na direção axial e número de elementos na direção circunferencial por lóbulo. Ainda nesta etapa de entrada de dados, são selecionadas as condições de contorno, se serão as clássicas ou as triviais.

A sub-rotina GAUSSIAN inclui os pontos e pesos para realização da integração numérica utilizando o método da quadratura Gaussiana. Foram utilizados dois pontos na quadratura Gaussiana.

A sub-rotina MESH gera a malha de elementos finitos, registrando para cada nó a sua posição axial, posição circunferencial e espessura do filme fluido. Além disso, ela gera a matriz de conectividade nodal, que associa a numeração local do nó  $i$  do elemento  $j$  à numeração global  $NCM(i, j)$  desse nó na malha.

A sub-rotina BOUNDARY gera o vetor que associa a numeração dos nós onde são aplicadas condições de contorno à numeração global dos nós na malha.

A sub-rotina POINTER gera os vetores de endereçamento para alocação da matriz dos coeficientes em perfil *Skyline*. A matriz dos coeficientes é alocada sob a forma de um vetor  $KU$  para a parte triangular superior da matriz e um vetor  $KL$  para a parte triangular inferior. Para mapeamento de cada um desses vetores são necessários outros dois vetores:  $ISU$  e  $ISL$  registram a quantidade de coeficientes armazenados por coluna da matriz dos coeficientes e  $IPU$  e  $IPL$  registram o endereço do coeficiente na diagonal principal associado àquela coluna.

Com isso, a sub-rotina SOLVEZERO é iniciada. Um ciclo de varredura por todos os elementos da malha é realizado, fazendo com que a sub-rotina STIFFQ determine os coeficientes da matriz dos coeficientes de cada elemento. Ainda nesse ciclo, a sub-rotina GLOBAL armazena os coeficientes da matriz dos coeficientes elementar na matriz dos coeficientes global. Conforme mencionado no parágrafo anterior, a matriz dos coeficientes global é alocada em perfil *Skyline* sob a forma de dois vetores, um para parte superior, outro para a parte inferior. Para determinar os coeficientes da matriz dos coeficientes de cada elemento, a sub-rotina STIFFQ chama a sub-rotina SHAPE, que avalia as funções de interpolação, e calcula as integrais pela quadratura Gaussiana.

A sub-rotina BDYCOND aplica as condições de contorno, clássicas ou triviais, de acordo com o que foi selecionado nos dados de entrada. Pressão ambiente nos nós sujeitos a essa condição de contorno é aplicada da seguinte maneira: os termos das linhas e colunas associadas a

nós sujeitos à pressão ambiente são iguais a 0, exceto o termo das diagonais principais que são iguais a 1. As alterações necessárias para efetuar tais mudanças são realizadas no lado direito do sistema de equações.

A sub-rotina SURE resolve o sistema de equações armazenado como vetores em *Skyline* utilizando procedimento de eliminação de Gauss. A solução fornece o campo de pressão de ordem zero. A sub-rotina FORCE integra o campo de pressão de ordem zero para determinar as forças de sustentação exercidas pelo filme fluido.

Por fim, a sub-rotina SOLVEFIRST determina os coeficientes dinâmicos de força de maneira análoga à sub-rotina SOLVEZERO, chamando, também, sub-rotinas análogas às mencionadas anteriormente.

Os critérios de parada dos processos iterativos do procedimento foram selecionados a partir da experiência prévia do Grupo de Dinâmica de Rotores da UFMG e de testes realizados com o procedimento desenvolvido, objetivando resultados com exatidão apreciável, mas com tempos de execução viáveis.

Após a implementação do procedimento de elementos finitos, foi efetuada a análise de sensibilidade de malha. Em seguida, o procedimento foi validado comparando os resultados obtidos com os resultados divulgados na publicação de Pinkus (1975). Por fim, para analisar os mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás, foram determinadas as características de desempenho estáticas e dinâmicas desses componentes com diversas configurações geométricas e em variadas condições de operação.

## 4 RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com o procedimento de elementos finitos para a análise estacionária e dinâmica de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás. Por conveniência, este capítulo encontra-se dividido em cinco partes: o Subcapítulo 4.1 contempla uma análise de sensibilidade de malha; o Subcapítulo 4.2 aborda a validação do procedimento de elementos finitos; os Subcapítulos 4.3, 4.4 e 4.5 contêm a análise de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás propriamente dita. Diversas simulações são realizadas para essa análise. Primeiramente, no Subcapítulo 4.3, analisa-se o efeito dos parâmetros de operação nas características de desempenho de um mancal radial de três lóbulos lubrificado a gás sujeito às condições de contorno clássicas e triviais (sem e com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos, respectivamente). Em um segundo momento, no Subcapítulo 4.4, estuda-se a influência da frequência de excitação  $\omega$  considerada no cálculo dos coeficientes dinâmicos de força, frequência essa que é inserida no procedimento como fração da velocidade de rotação. Por último, no Subcapítulo 4.5, verifica-se o efeito de parâmetros geométricos nas características de desempenho dos mancais lubrificados a gás. De forma geral, os resultados são apresentados de maneira normalizada, por meio de parâmetros adimensionais apresentados à medida que forem sendo utilizados.

### 4.1 Análise de Sensibilidade de Malha

Inicialmente, realiza-se uma análise de sensibilidade de malha. Conforme mencionado no capítulo Metodologia, a malha bidimensional de elementos finitos é formada pela especificação do número de elementos finitos na direção circunferencial por lóbulo e pelo número de elementos finitos na direção axial. É importante observar que apenas o número total de elementos da malha não é suficientemente adequado para selecionar a malha a ser utilizada, pois uma malha com número total de elementos finitos menor pode gerar resultados mais precisos e em menor tempo de execução, sendo, portanto, necessário analisar a quantidade de elementos finitos nas duas direções.

O número de elementos finitos testados na direção circunferencial varia de 20 a 110, por lóbulo, aumentando de 15 em 15, ou seja, de 60 a 330 variando de 45 em 45 considerando três lóbulos no mancal. Na direção axial, o número de elementos finitos testados varia de 5 a 30, aumentando de 5 em 5. Assim, são realizadas um total de 48 simulações, combinando 6 tamanhos de malha na direção axial com 8 tamanhos de malha na direção circunferencial. Os demais parâmetros do sistema rotor-mancal são mantidos constantes, sendo selecionados parâmetros com valores intermediários em relação à faixa de análise empregada na seção 4.3. Os parâmetros

selecionados constam na TABELA 4.1. Nessa análise, não é considerada pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos, ou seja, são aplicadas as condições de contorno denominadas como clássicas neste trabalho (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

TABELA 4.1 - Parâmetros utilizados para análise direcional de sensibilidade de malha.

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
Número de lóbulos	3	..
Pré-carga	2,50E-06	m
Folga nominal	5,00E-06	m
Diâmetro	0,0500	m
Comprimento	0,0500	m
Posição angular do primeiro lóbulo	0,00	°
Viscosidade	1,90E-05	Pa.s
Massa específica	1,32	kg/m <sup>3</sup>
Pressão de referência	1,01E+05	Pa
Razão de excentricidade	0,200	..
Velocidade de rotação	3384	rpm
Número de compressibilidade	10	..
Fração da velocidade de rotação para cálculo dos coeficientes dinâmicos	1,0	..
Pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno)	não (clássicas)	..

A FIGURA 4.1 e a FIGURA 4.2 mostram, respectivamente, como o ângulo de posição e a capacidade carga calculados pelo procedimento variam de acordo o número de elementos finitos utilizados, sendo que cada curva corresponde a um número de elementos finitos na direção axial (NEA) e que no eixo das abscissas consta o número de elementos finitos na direção circunferencial. Tanto para o ângulo de posição quanto para a capacidade de carga, verifica-se uma estabilização dos valores obtidos a partir de 105 elementos finitos na direção circunferencial, sendo a diferença, em relação a uma malha menos refinada nessa direção, inferior a 1%. No caso da direção axial, essa estabilização com diferença inferior a 1% ocorre a partir de 20 elementos para o ângulo de posição e a partir de 15 elementos para a capacidade de carga.

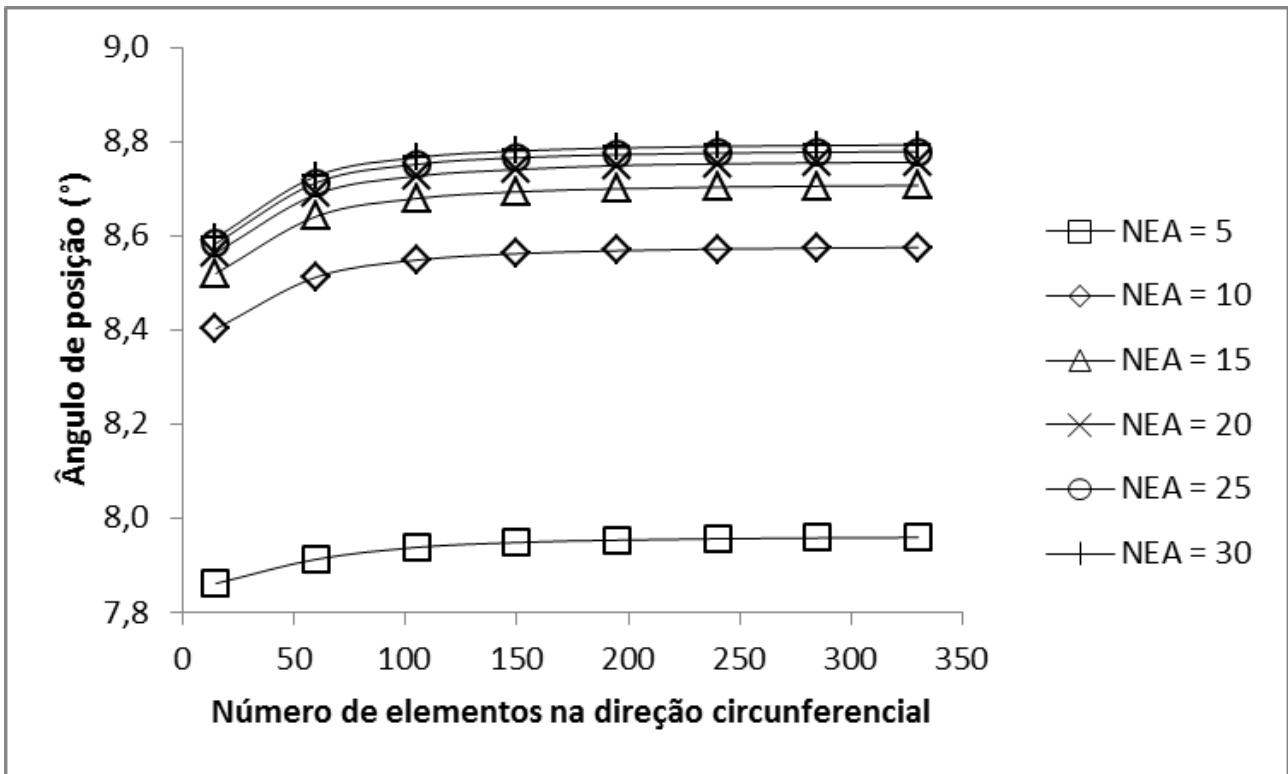


FIGURA 4.1 - Curvas do ângulo de posição do mancal em função do número de elementos finitos.

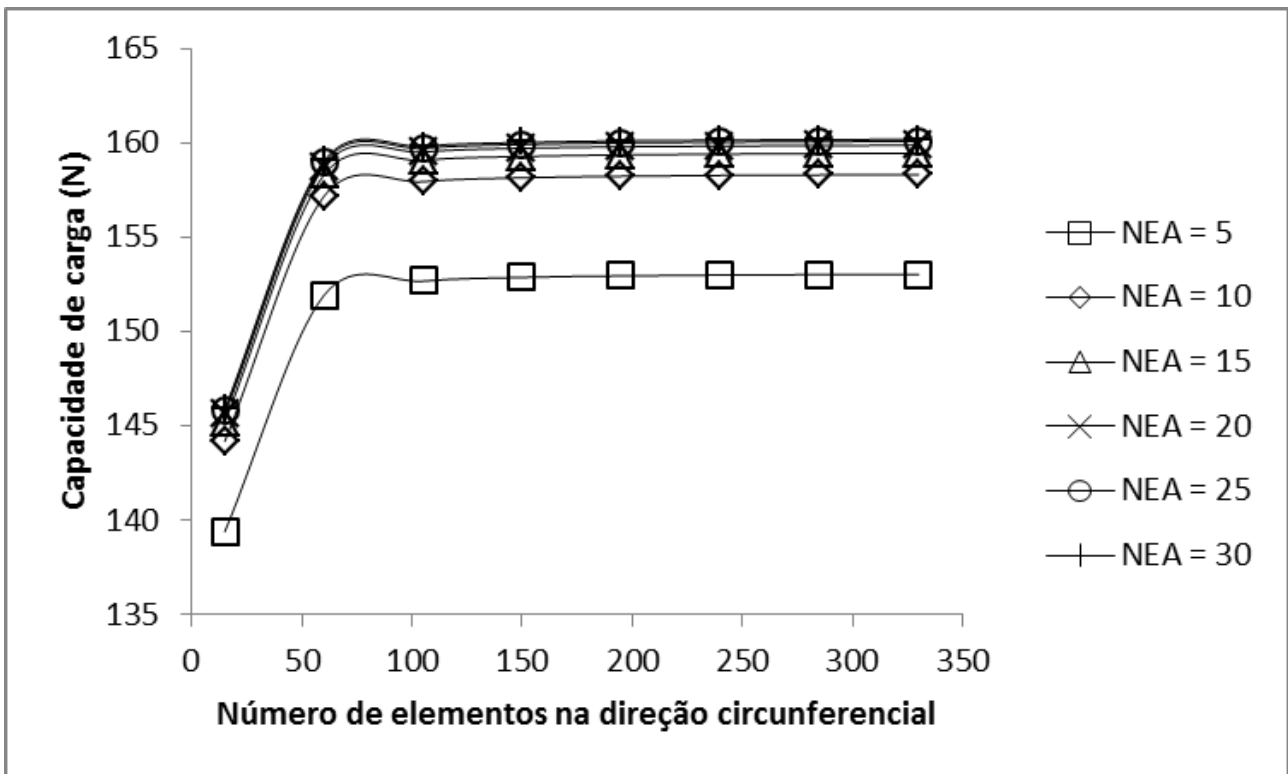


FIGURA 4.2 - Curvas da capacidade de carga do mancal em função do número de elementos finitos.

De maneira análoga, dois coeficientes dinâmicos de força, um de rigidez e outro de amortecimento, são selecionados para verificar a dependência das características dinâmicas em

relação ao tamanho da malha. A FIGURA 4.3 e a FIGURA 4.4 mostram, respectivamente, como o coeficiente de rigidez cruzado  $K_{YX}$  e o coeficiente de amortecimento cruzado  $C_{YX}$  calculados pelo procedimento variam de acordo o número de elementos finitos utilizados, sendo que cada curva corresponde a um número de elementos finitos na direção axial (NEA) e que no eixo das abscissas consta o número de elementos finitos na direção circunferencial. Na direção circunferencial, a estabilização com diferença inferior a 1% ocorre também a partir de 105 elementos finitos, para ambos os coeficientes avaliados. Na direção axial, para o coeficiente de amortecimento  $C_{YX}$ , a estabilização com diferença inferior a 1% ocorre a partir de 20 elementos. Para o coeficiente de rigidez  $K_{YX}$ , na direção axial a diferença relativa não chega a ser inferior a 1%. A partir de 20 elementos na direção axial, a diferença relativa passa a ser inferior a 5%.

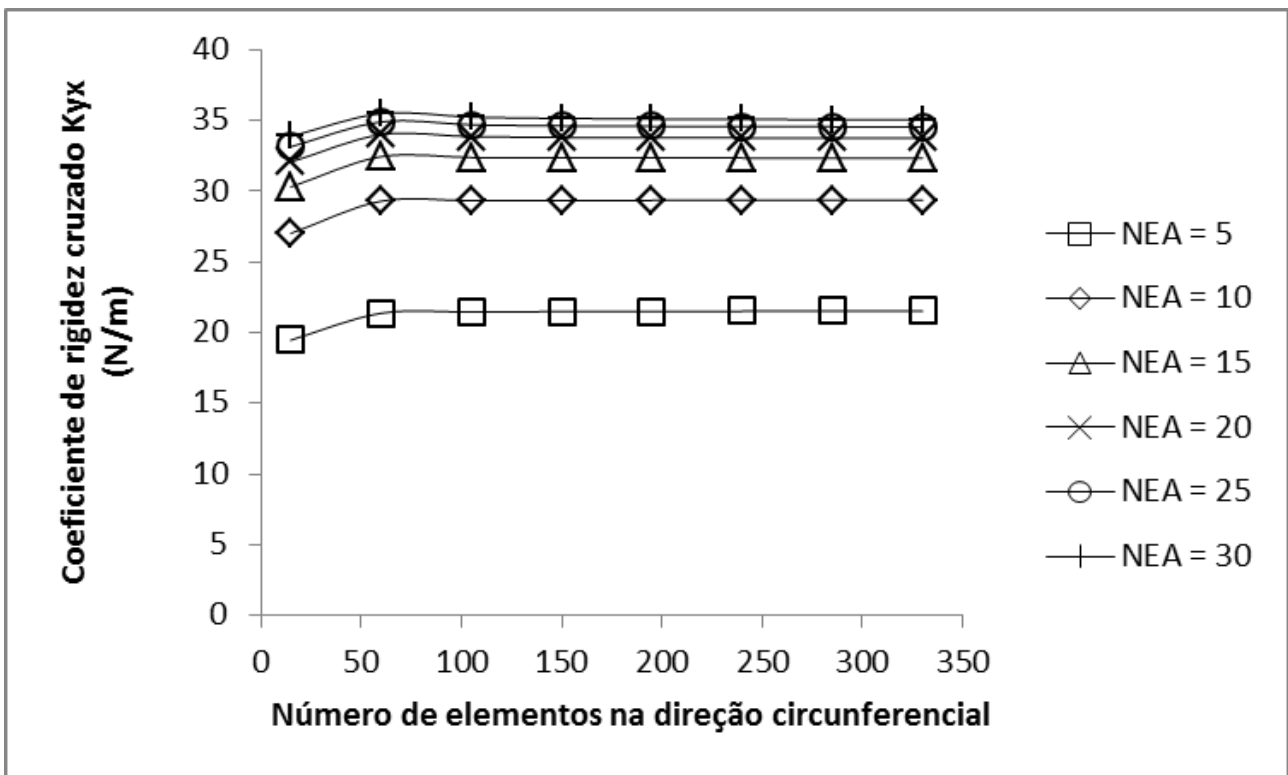


FIGURA 4.3 - Curvas do coeficiente de rigidez cruzado  $K_{YX}$  do mancal em função do número de elementos finitos.



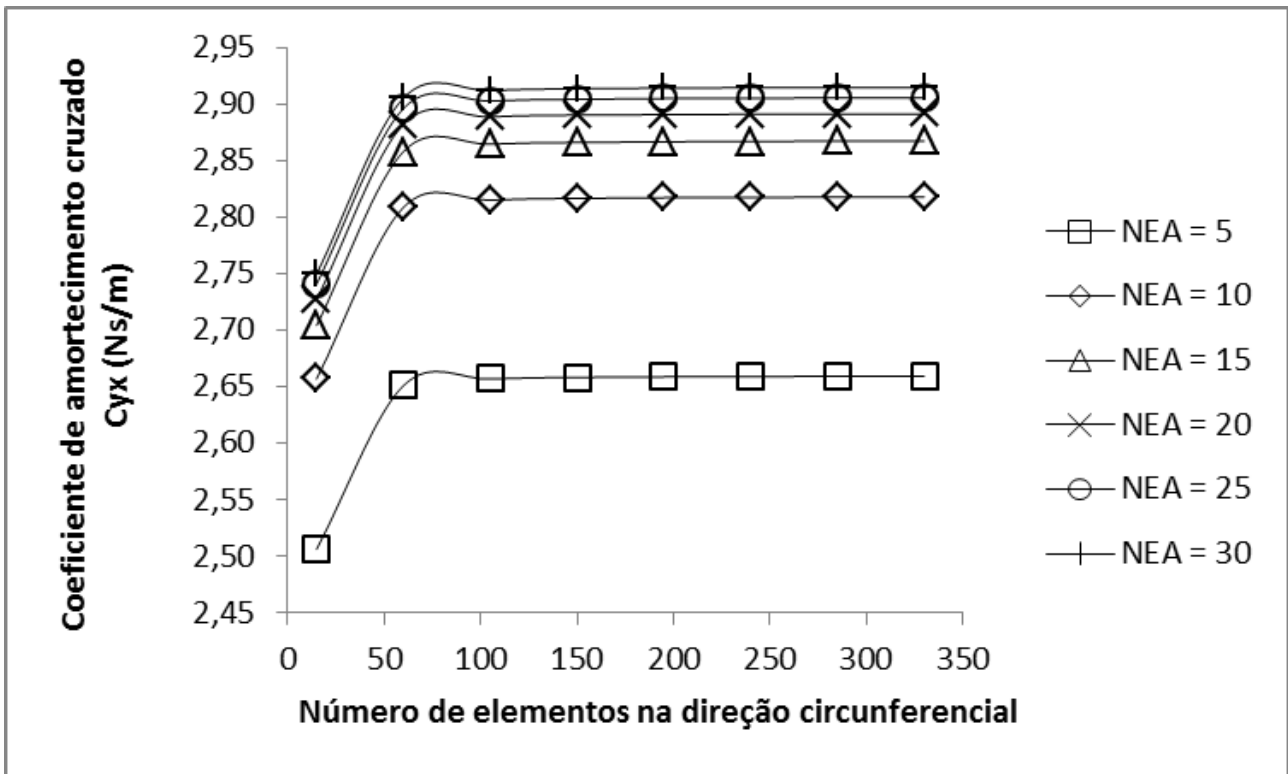


FIGURA 4.4 - Curvas do coeficiente de amortecimento cruzado  $C_{YX}$  do mancal em função do número de elementos finitos.

O tempo de execução de cada simulação foi averiguado e é apresentado na FIGURA 4.5, sendo que cada curva corresponde a um número de elementos finitos na direção axial (NEA) e que no eixo das abscissas consta o número de elementos finitos na direção circunferencial. As simulações foram realizadas em um computador pessoal com processador Intel(R) Core(TM) i5-3230M com 2,60 GHz de velocidade de processamento e 8 GB de memória RAM.

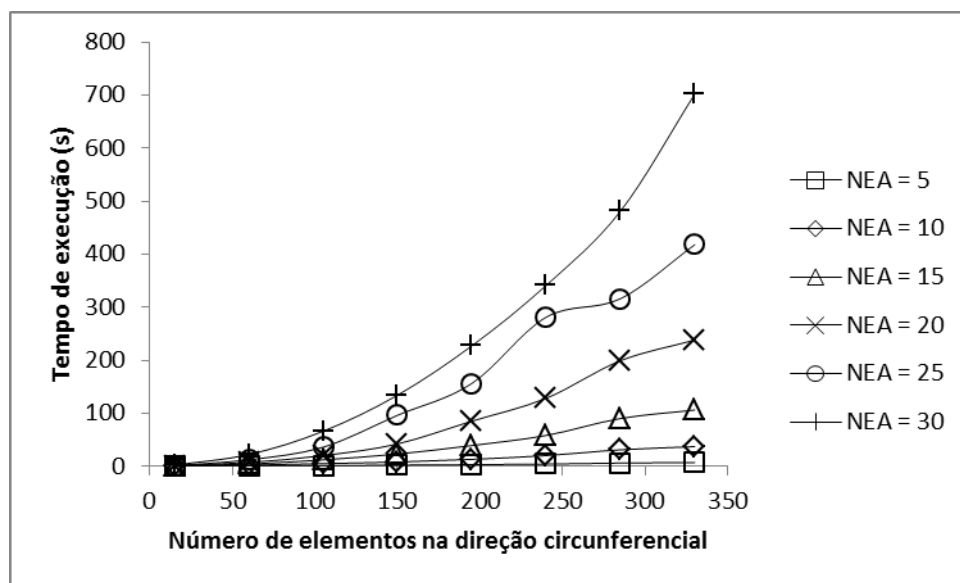


FIGURA 4.5 - Curvas do tempo de execução do procedimento em função do número de elementos finitos.

Considerando as diferenças relativas e os tempos de execução, optou-se por utilizar uma malha com 150 elementos finitos na direção circunferencial e 25 elementos finitos na direção axial, o que garante, portanto, resultados com diferenças relativas inferiores a 5% em relação a malhas menos refinadas. Assim, a malha selecionada tem um total de 3750 elementos finitos, e a simulação foi executada em 96 s. Considerando a necessidade do presente trabalho de executar diversas simulações para analisar como variados parâmetros afetam as características de desempenho, o tempo de execução de aproximadamente 100 s já é apreciável, tornando razoável aceitar uma diferença relativa inferior a apenas 5%. Tal tamanho de malha (150 por 25, totalizando 3750 elementos finitos) é adotado nas próximas seções deste trabalho.

## 4.2 Validação do Procedimento de Elementos Finitos

Compararam-se os resultados obtidos por Pinkus (1975) com os calculados por meio do procedimento para validação do mesmo. Uma vez que o autor considera pressão atmosférica nos recessos axiais entre lóbulos, são aplicadas as condições de contorno denominadas como triviais neste trabalho (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). Pinkus (1975) apresenta resultados de ângulo de posição e de capacidade de carga para variadas velocidades de rotação e razões de excentricidade. Os demais parâmetros utilizados nas simulações para validação são os que constam na TABELA 4.1, apresentada na seção anterior. Dois números adimensionais são utilizados nessa seção: o número de compressibilidade  $\Lambda$ , expresso pela EQ. (4.1), e a capacidade de carga adimensional  $f_{01}$ , expressa pela EQ. (4.2).

$$\Lambda = \frac{6\mu\Omega R^2}{p_a C_b^2} \quad (4.1)$$

$$f_{01} = \frac{F_0}{p_a R^2} \quad (4.2)$$

A TABELA 4.2 apresenta uma comparação entre o ângulo de posição obtido por Pinkus (1975) e o obtido pelo procedimento para mancais de três lóbulos lubrificados a gás. Os números de compressibilidade  $\Lambda$  mostrados na tabela são alcançados variando apenas a velocidade de rotação.

TABELA 4.2 - Comparação do ângulo de posição para validação.

Número de compressibilidade $\Lambda$	Razão de excentricidade $\varepsilon$	Ângulo de posição $\phi_0$ ( $^\circ$ )		Diferença relativa em módulo
		Pinkus (1975)	Presente trabalho	
0,5	0,1	70	67,7	3,32%
	0,2	67	66,2	1,27%
	0,3	63	61,4	2,47%
	0,4	53	52,3	1,35%
1	0,1	55	55,3	0,54%
	0,2	55	54,3	1,31%
	0,3	50	50,1	0,25%
	0,4	39	39,0	0,12%
3	0,1	44	43,2	1,81%
	0,2	42	42,2	0,42%
	0,3	37	38,3	3,41%

A TABELA 4.3, por sua vez, apresenta uma comparação entre a capacidade de carga adimensional  $f_{01}$  obtida por Pinkus (1975) e a obtida pelo procedimento para mancais de três lóbulos lubrificadas a gás. Os números de compressibilidade  $\Lambda$  mostrados na tabela são alcançados variando apenas a velocidade de rotação.

TABELA 4.3 - Comparação da capacidade de carga adimensional para validação.

Número de compressibilidade $\Lambda$	Razão de excentricidade $\varepsilon$	Capacidade de carga adimensional $f_{01}$		Diferença relativa em módulo
		Pinkus (1975)	Presente trabalho	
0,5	0,1	0,1811	0,1838	1,50%
	0,2	0,3959	0,4015	1,42%
	0,3	0,7228	0,7256	0,39%
	0,4	1,434	1,4218	0,85%
1	0,1	0,3525	0,3518	0,19%
	0,2	0,7802	0,7829	0,35%
	0,3	1,4460	1,4371	0,62%
	0,4	3,0140	2,9472	2,22%
3	0,1	0,7284	0,7144	1,93%
	0,2	1,6410	1,5996	2,52%
	0,3	3,0030	2,9120	3,03%

Ao comparar os resultados do presente trabalho com os obtidos por Pinkus (1975), observa-se que a diferença relativa, em módulo, fica limitada a 4%.

### 4.3 Análise dos parâmetros de operação e das condições de contorno

Na TABELA 4.4 constam os valores dos parâmetros utilizados como referência para análise do efeito dos parâmetros de operação e das condições de contorno nas características de desempenho de um mancal radial de três lóbulos lubrificado a gás. Esses valores são valores intermediários normalmente utilizados na literatura para mancais multilóbulos lubrificados a gás.

TABELA 4.4 - Parâmetros de referência para análise de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás.

Parâmetro	Valor	Unidade
Número de lóbulos	3	..
Pré-carga	2,50E-06	m
Folga nominal	5,00E-06	m
Fator de pré-carga ( $m_p$ )	0,5	..
Diâmetro	0,0500	m
Comprimento	0,0500	m
Razão de esbeltez ( $\lambda$ )	1	..
Posição angular do primeiro lóbulo	0,00	grau
Viscosidade	1,90E-05	Pa.s
Massa específica	1,32	kg/m <sup>3</sup>
Pressão de referência (pressão atmosférica)	1,01E+05	Pa
Razão de excentricidade	0 até 0,4	..
Velocidade de rotação	33,8 até $33,8 \times 10^3$	rpm
Número de compressibilidade	0,1 até 100	..
Fração da velocidade de rotação para cálculo dos coeficientes dinâmicos	1	..

A FIGURA 4.6 mostra o gráfico da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função da razão de excentricidade para quatro números de compressibilidade distintos, para um mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). A capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  é expressa pela EQ. (4.3).

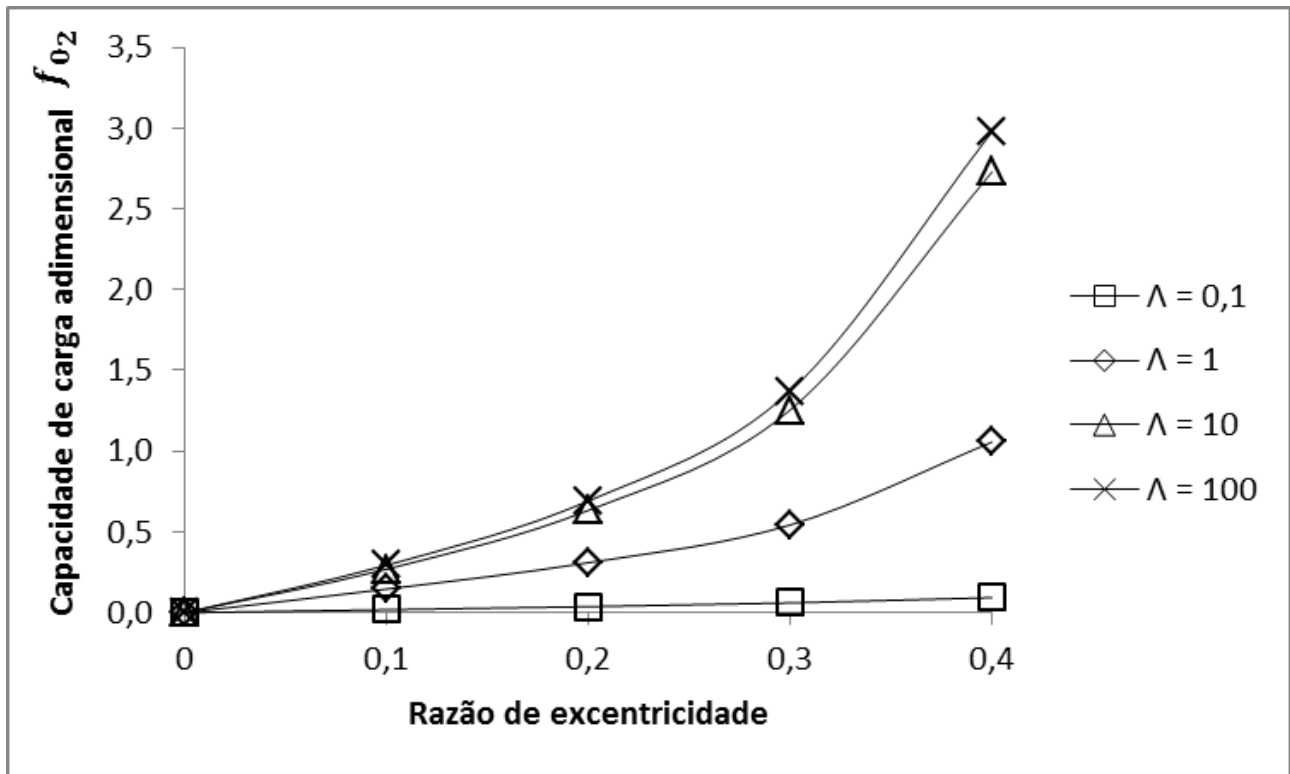


FIGURA 4.6 - Curvas de capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

$$f_{02} = \frac{F_0}{p_a LD} \quad (4.3)$$

Conforme esperado, a capacidade de carga aumenta com o aumento da excentricidade, devido ao aumento do efeito cunha. Observa-se que a capacidade de carga tende a valores assintóticos à medida que o número de compressibilidade aumenta, fato esse também constatado por Faria (2001) para mancais com ranhuras em forma de espinha de peixe lubrificadas a gás. Assim, pode-se dizer que para  $\Lambda \geq 10$  os efeitos da compressibilidade do fluido já começam a se tornar relevantes no caso do mancal em questão. Além disso, verifica-se que o aumento da capacidade de carga com o aumento da excentricidade é mais pronunciado para maiores valores do número de compressibilidade.

A FIGURA 4.7 mostra o gráfico da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função da razão de excentricidade para quatro números de compressibilidade distintos, para um mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). Observa-se que o aspecto das curvas é semelhante ao da FIGURA 4.6, para mancais sem pressão ambiente nos recessos axiais, porém, de forma geral, a capacidade carga adimensional é inferior, principalmente para números de compressibilidade menores. A maior redução da capacidade de

carga adimensional em relação às duas possibilidades de condições de contorno ocorre para  $\varepsilon = 0,1$  e  $\Lambda = 0,1$  e corresponde a uma redução de 50%. A redução média foi de 19%.

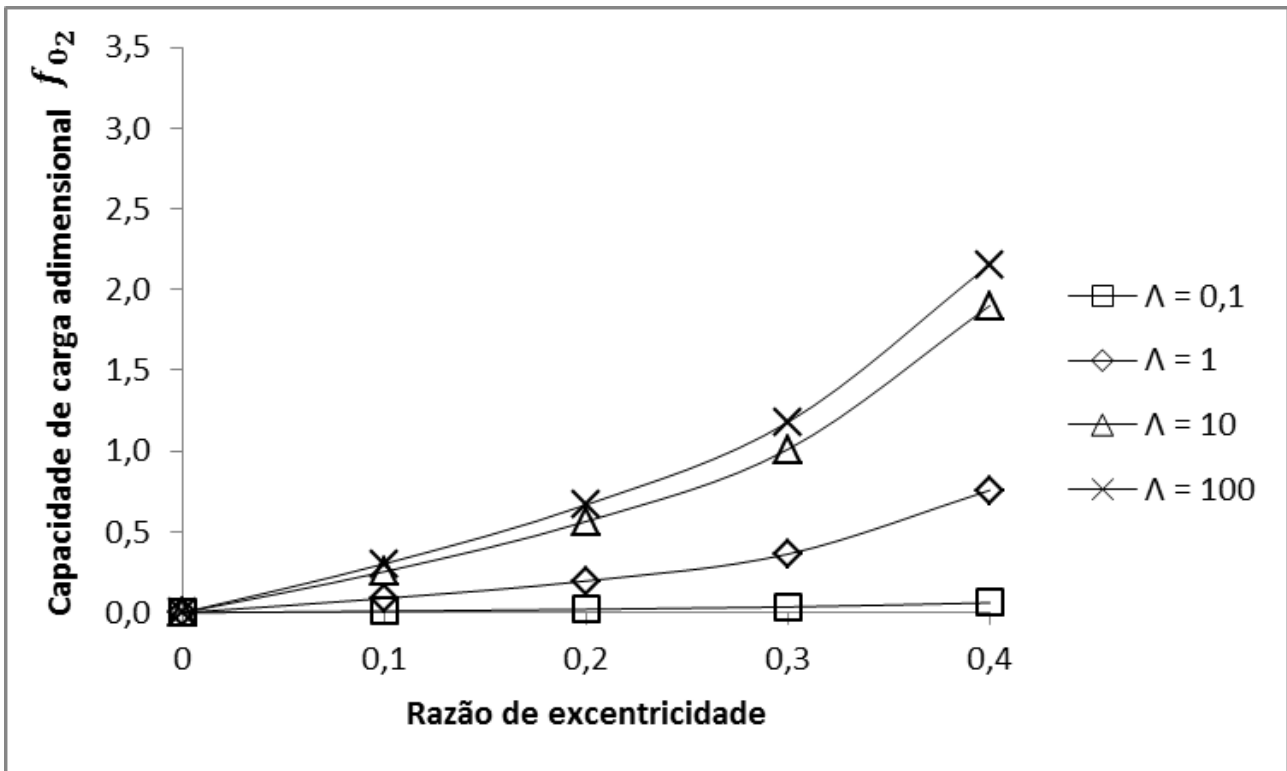


FIGURA 4.7 - Curvas de capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

O Número de Sommerfeld, EQ. (4.4), é muito utilizado para seleção ou projeto de mancais radiais, inclusive para os lubrificadas a gás. Para um determinado mancal com geometria e fluido de trabalho definidos, ele expressa uma relação entre a capacidade de carga e a velocidade de rotação, unificando esses dois parâmetros em um único valor.

$$S = \frac{\mu\Omega LD}{F_0} \left(\frac{R}{C_b}\right)^2 \quad (4.4)$$

A FIGURA 4.8 representa o Número de Sommerfeld em função da razão de excentricidade para os quatro números de compressibilidade considerados anteriormente, para um mancal sem pressão ambiente nos recessos axiais. Com o objetivo de melhorar a qualidade das curvas ajustadas, em trechos nos quais ocorre grande variação de inclinação, resultados adicionais foram obtidos para razões de excentricidade de: 0,001; 0,01; 0,05 e 0,15.

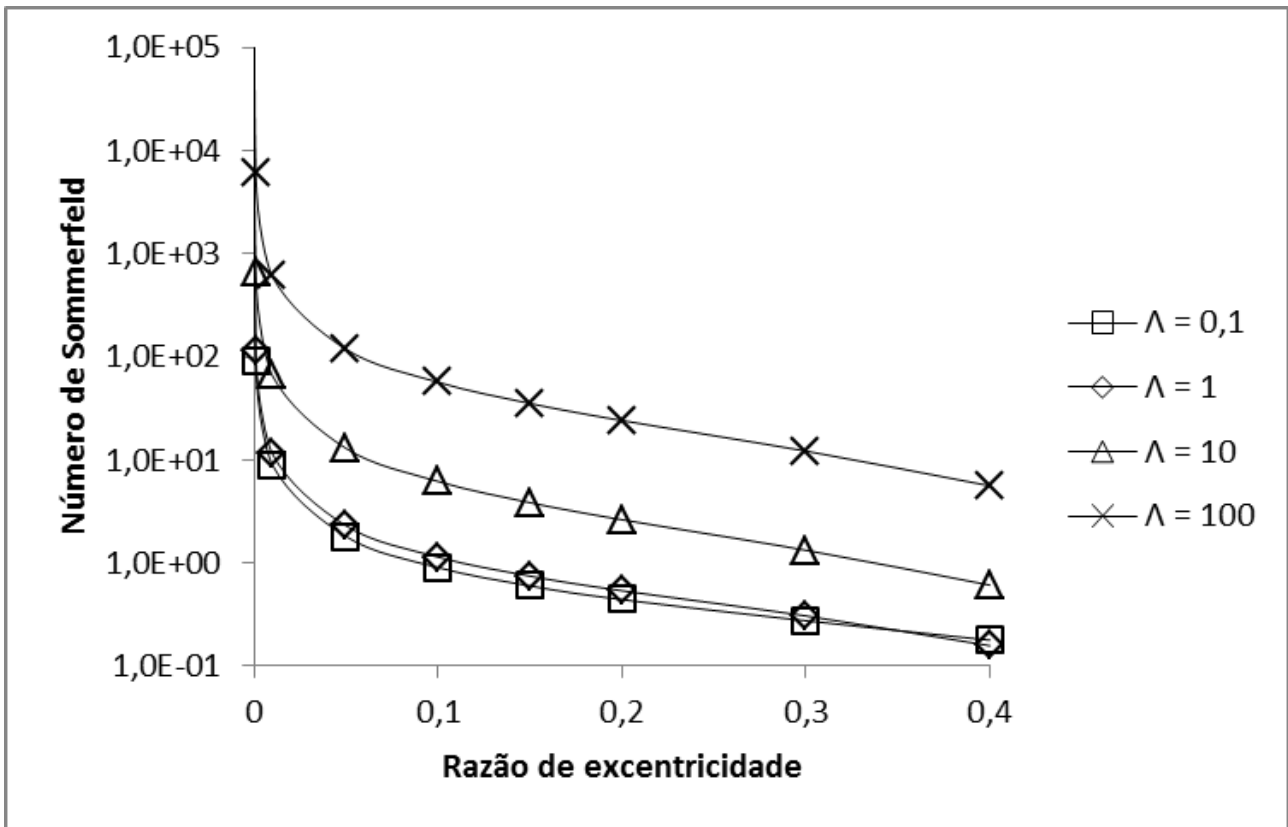


FIGURA 4.8 - Curvas do Número de Sommerfeld em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

Para um mesmo número de compressibilidade, ou seja, uma mesma velocidade de rotação, o Número de Sommerfeld diminui com o aumento da excentricidade, indicando um aumento da capacidade de carga. O comportamento assintótico mencionado no parágrafo anterior é observado novamente, mas sob uma perspectiva diferente. Uma vez que o efeito da compressibilidade faz com que a capacidade de carga se comporte de maneira assintótica com o aumento da velocidade de rotação, o Número de Sommerfeld, que se relaciona de forma inversa à capacidade de carga, se comporta de maneira assintótica com a redução da velocidade de rotação, e, portanto, do número de compressibilidade. Assim como ocorreu para a capacidade de carga adimensional, no caso de mancais sujeitos à pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno triviais) as curvas também são semelhantes, porém, devido à relação inversa entre o Número de Sommerfeld e a capacidade de carga, mancais sujeitos a essas condições de contorno apresentam maiores Números de Sommerfeld.

A compressibilidade do fluido também afeta o comportamento do sistema rotor- mancal em termos do ângulo de posição, como pode ser observado por meio da FIGURA 4.9 e da FIGURA 4.10, para mancais sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno clássicas). A FIGURA 4.9 mostra o gráfico do ângulo de posição em função razão de excentricidade para os quatro números de compressibilidade distintos. A FIGURA 4.10, por sua



vez, representa a posição de equilíbrio do centro do eixo para cada uma das simulações. Por meio de ambas as figuras é possível perceber que para maiores números de compressibilidade o ângulo de posição é menor, fazendo com que a componente horizontal da excentricidade também seja menor. Assim, o centro do eixo na posição de equilíbrio afaste-se menos do eixo vertical  $X$  do mancal. Notam-se dois comportamentos bem distintos: nos casos em que o efeito da compressibilidade é expressivo, para  $\Lambda \geq 10$ , os ângulos de posição são pequenos e o centro do eixo desloca-se pouco na horizontal; para números de compressibilidade inferiores, o comportamento é parecido com aquele já conhecido para fluidos incompressíveis, sendo que a medida que a excentricidade aumenta o centro do eixo percorre uma trajetória em forma de arco.

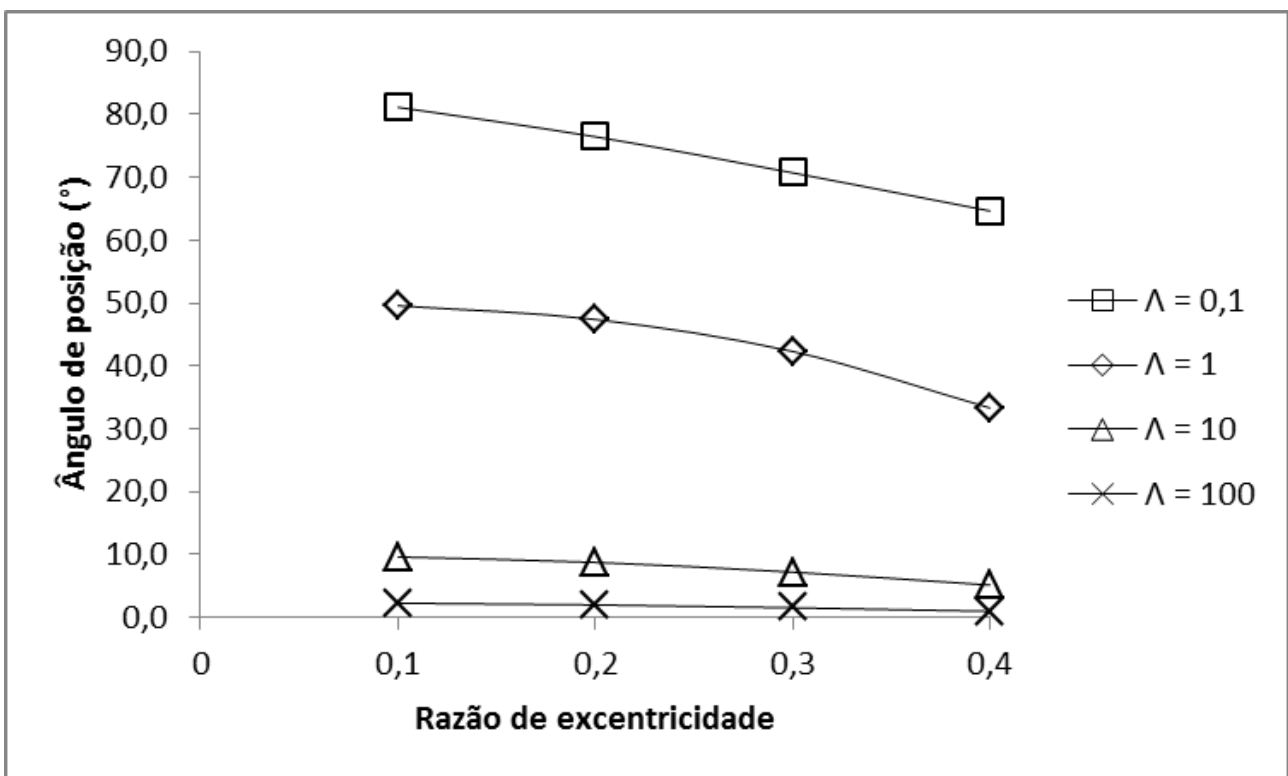


FIGURA 4.9 - Curvas do ângulo de posição em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

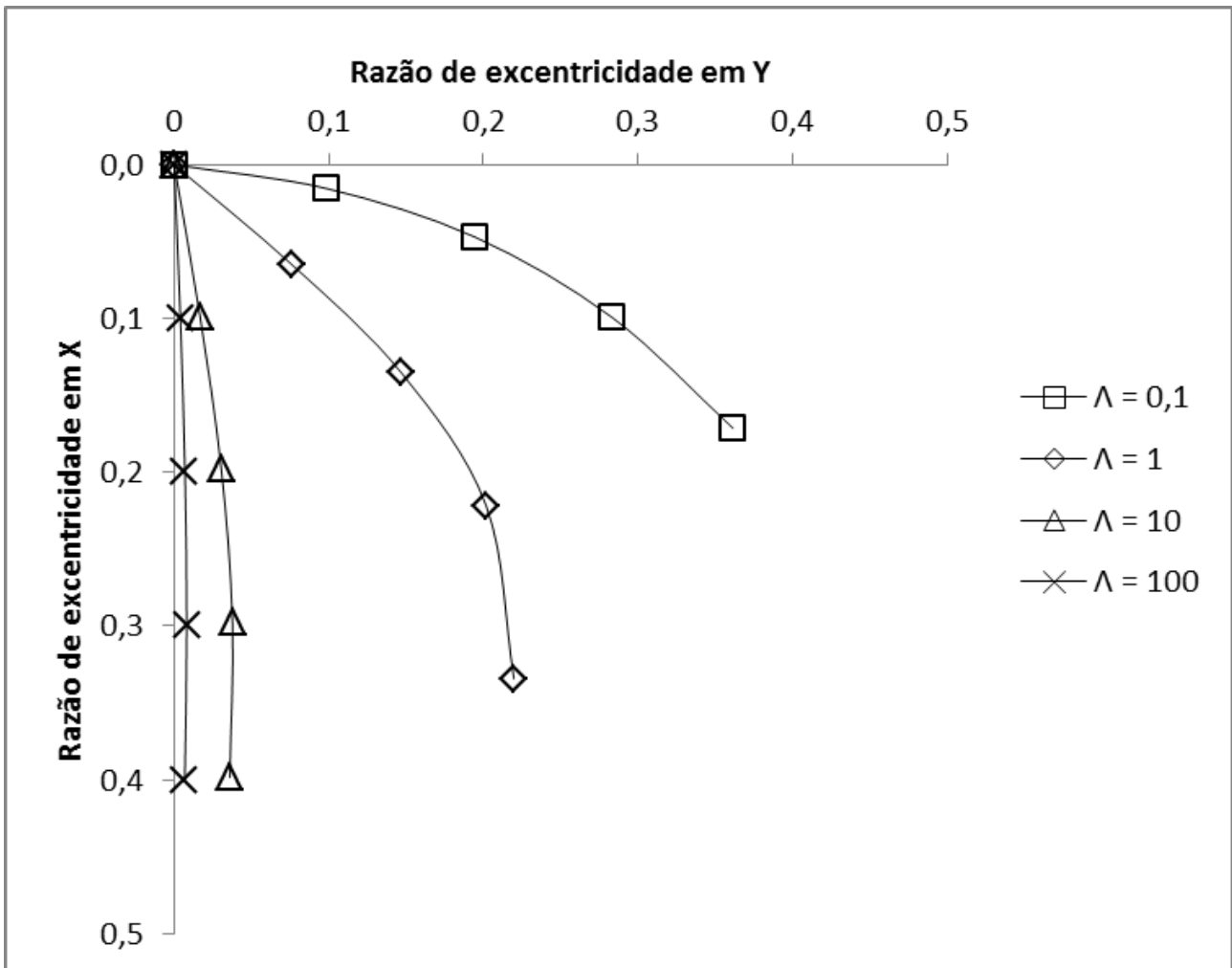


FIGURA 4.10 - Posição de equilíbrio do centro do eixo para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

A FIGURA 4.11 mostra o gráfico do ângulo de posição em função razão de excentricidade para os quatro números de compressibilidade distintos para mancal sujeito à pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno triviais). O efeito da compressibilidade é semelhante ao que foi observado para o mancal com as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos). Comparando-se as diferenças desses resultados para cada uma das possibilidades de condições de contorno, verifica-se que mancais sujeitos à pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos apresentam maiores ângulos de posição.

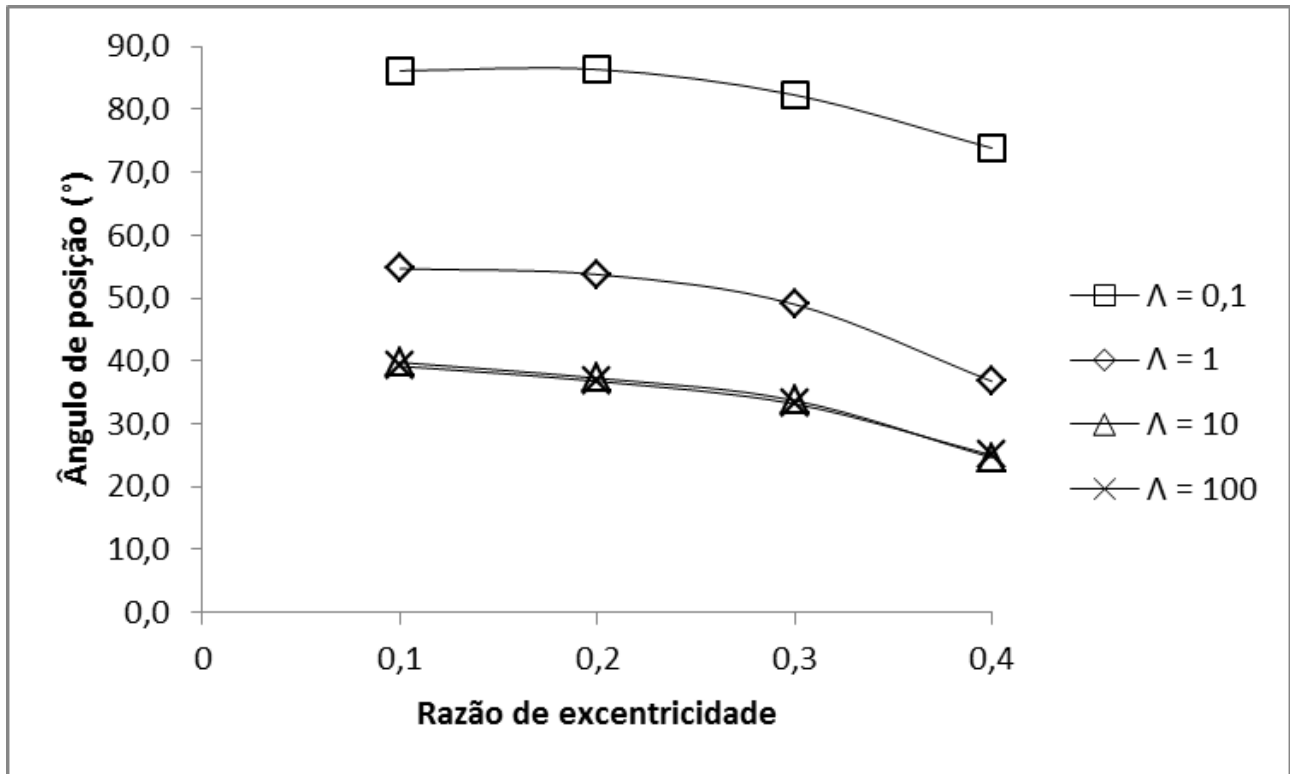


FIGURA 4.11 - Curvas do ângulo de posição em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

Para o estudo das características de desempenho dinâmicas, os coeficientes dinâmicos de força são adimensionalizados conforme a EQ. (4.5) e a EQ. (4.6).

$$k_{ij} = K_{ij} \frac{C_b}{p_a LD} \quad (4.5)$$

$$c_{ij} = C_{ij} \frac{C_b \Omega}{p_a LD} \quad (4.6)$$

A FIGURA 4.12, a FIGURA 4.13, a FIGURA 4.14 e a FIGURA 4.15 mostram os gráficos dos coeficientes de rigidez adimensionais em função da razão de excentricidade, para os quatro números de compressibilidade em consideração para mancal sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno clássicas).

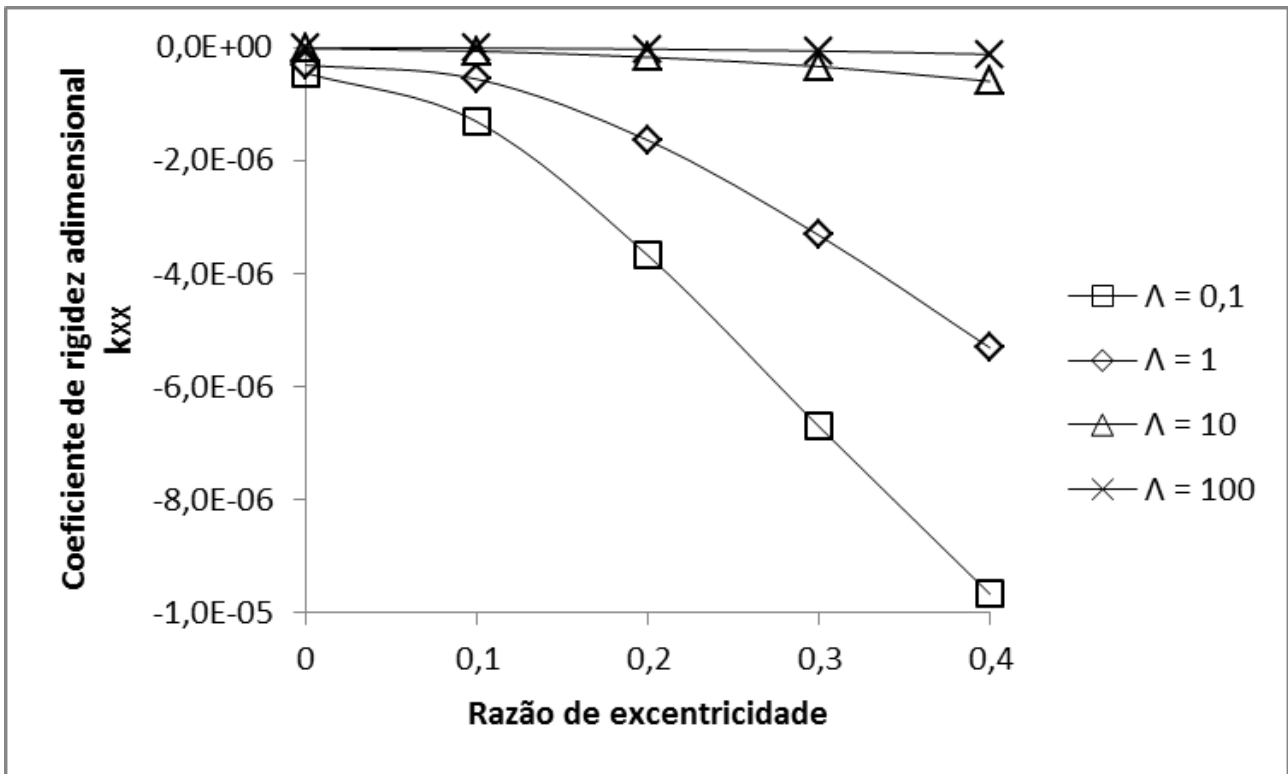


FIGURA 4.12 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XX}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

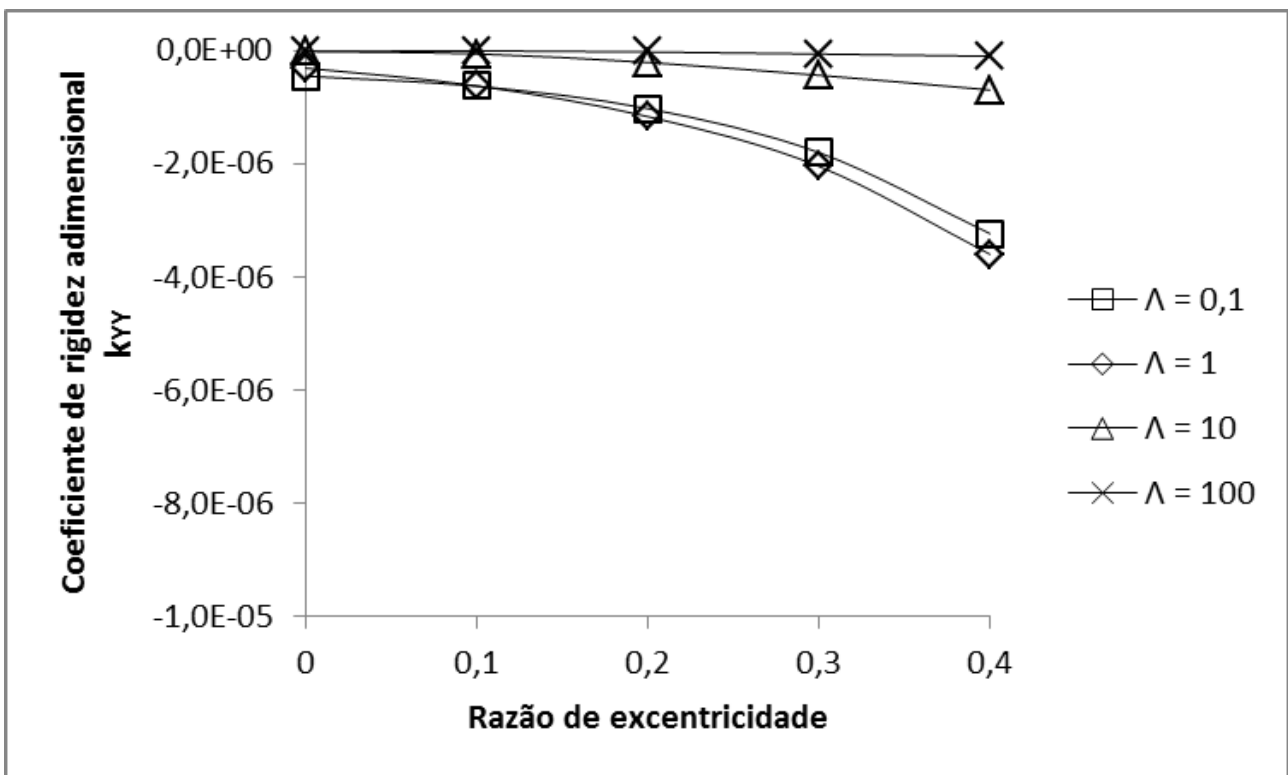


FIGURA 4.13 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

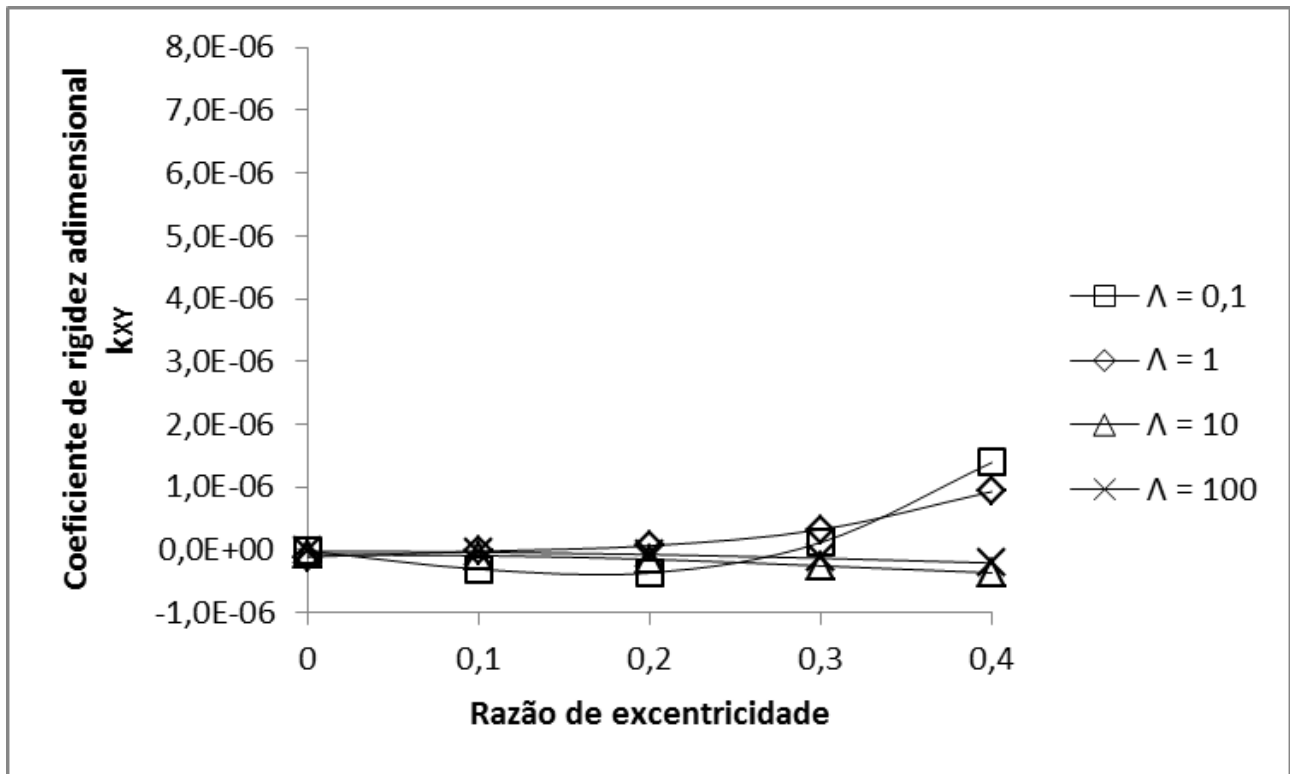


FIGURA 4.14 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XY}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

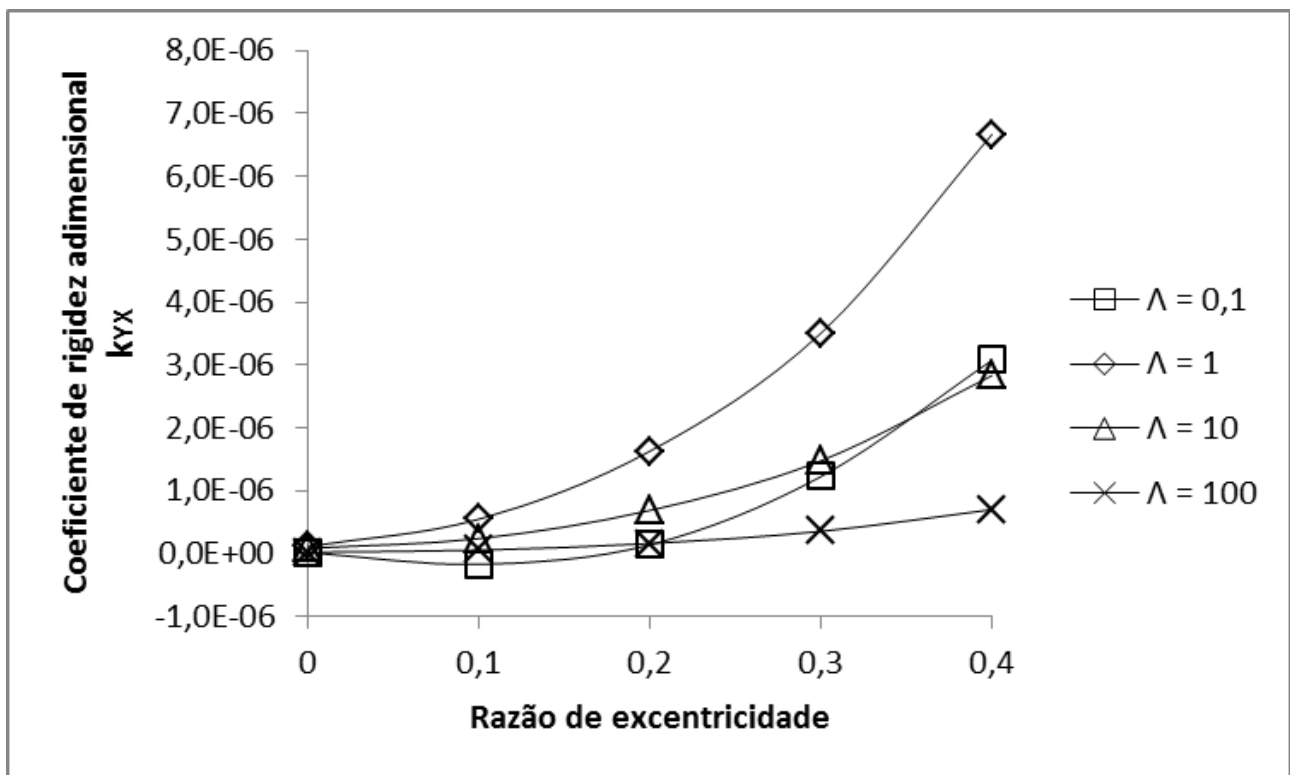


FIGURA 4.15 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YX}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno clássicas (sem pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

Observa-se que, de forma geral, para maiores números de compressibilidade, os coeficientes de rigidez tendem a zero e são menos sensíveis à variação da razão de excentricidade. Para os coeficientes de amortecimento, não apresentados nesta parte da dissertação, essa tendência não é notada. Além disso, nota-se que os coeficientes de rigidez diretos são essencialmente negativos, o que favorece a ocorrência de instabilidade nesses mancais, uma vez que forças não regenerativas estarão atuando.

A FIGURA 4.16, a FIGURA 4.17, a FIGURA 4.18 e a FIGURA 4.19 mostram os gráficos dos coeficientes de rigidez adimensionais em função da razão de excentricidade, para os quatro números de compressibilidade em consideração para mancal com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos (condições de contorno triviais).

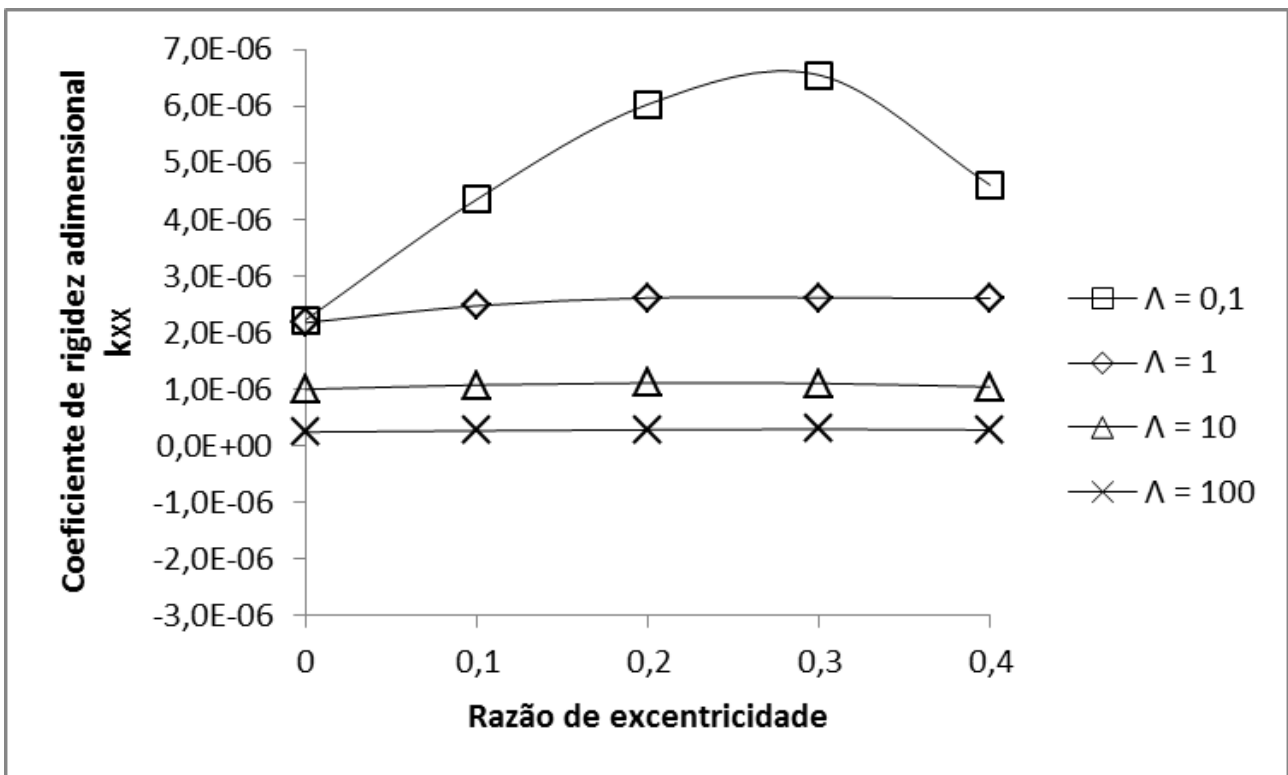


FIGURA 4.16 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XX}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

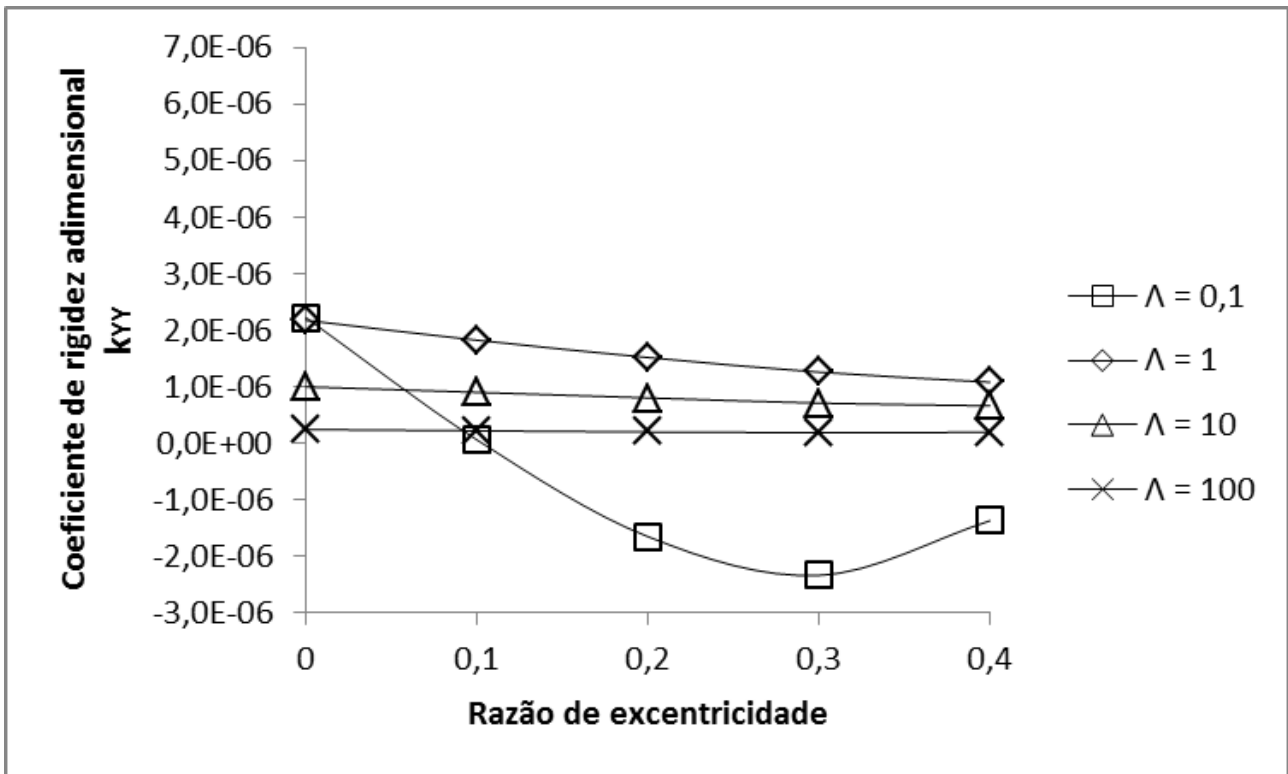


FIGURA 4.17 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

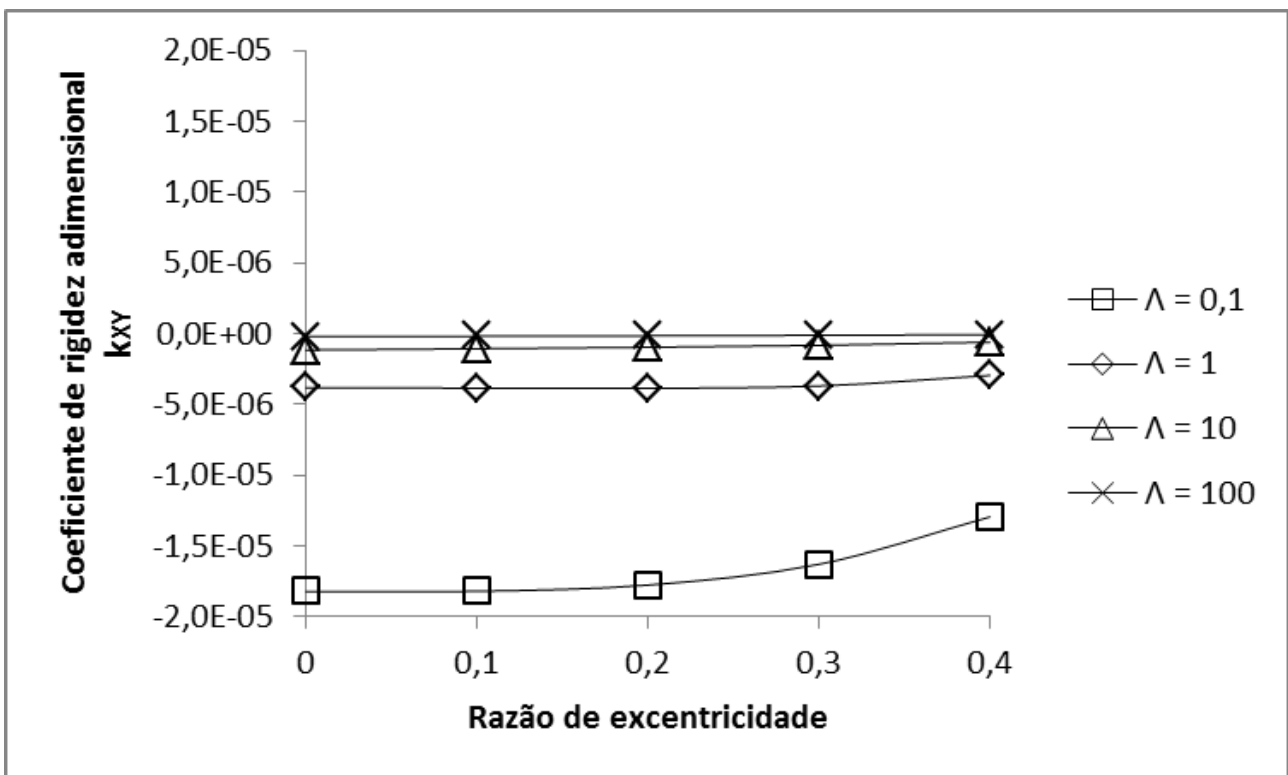


FIGURA 4.18 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XY}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

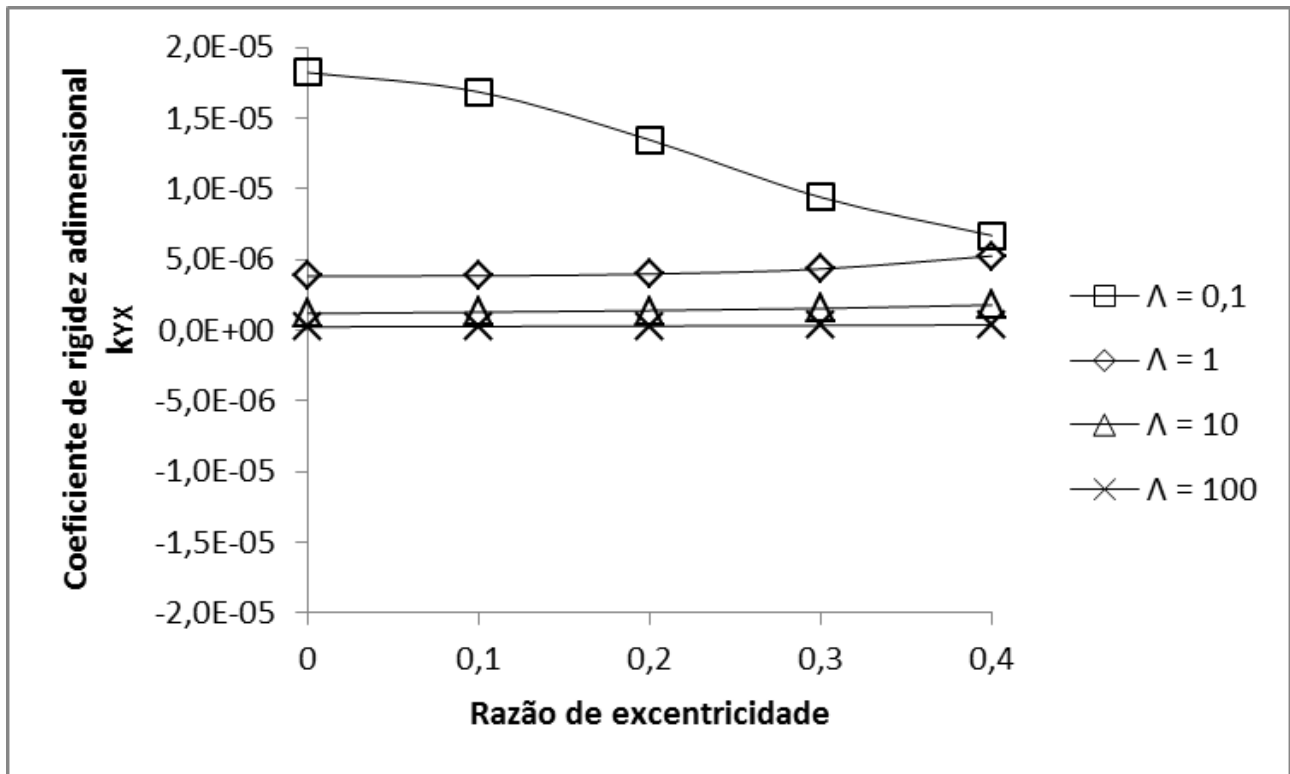


FIGURA 4.19 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YX}$  em função da razão de excentricidade e do número de compressibilidade para mancal sujeito as condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).

Novamente, observa-se que, de forma geral, para maiores números de compressibilidade, os coeficientes de rigidez tendem a zero e são menos sensíveis à variação da razão de excentricidade. Entretanto, agora, os coeficientes de rigidez diretos não são essencialmente negativos. Assim, a presença de ranhuras axiais entre os lóbulos pode favorecer a estabilidade de mancais multilóbulos, uma vez que forças regenerativas estarão mais presentes. Devido a essa diferença entre os resultados de mancais com e sem pressão ambiente nos recessos axiais, os subcapítulos e respectivas análises que se seguem são realizadas com foco em mancais sujeitos às condições de contorno triviais (com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos).



#### 4.4 Análise do efeito da frequência de excitação utilizada nos cálculos

A FIGURA 4.20 apresenta curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função da razão  $\omega/\Omega$  e do número de compressibilidade, para  $\varepsilon = 0,1$ . Verifica-se que as variações são desprezíveis e imperceptíveis no gráfico. As maiores variações ocorrem para  $\Lambda = 0,1$ , chegando a até 1,3%.

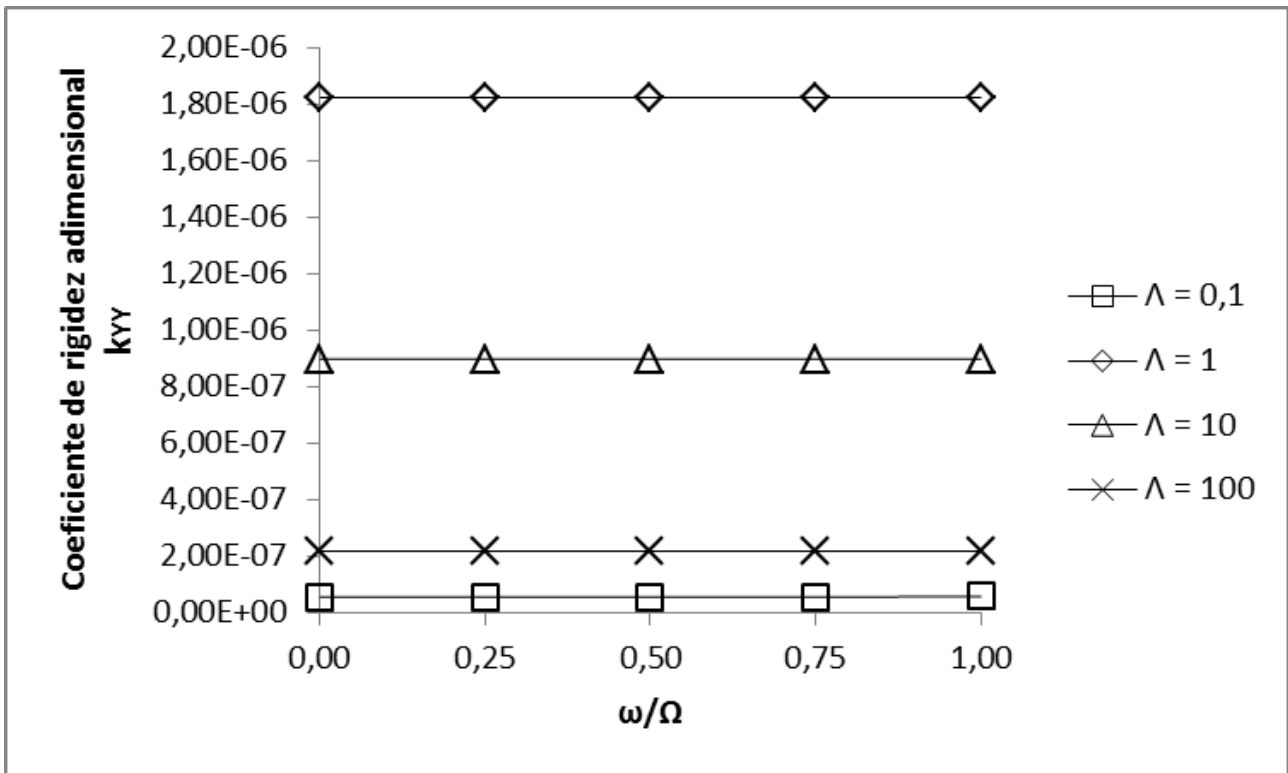


FIGURA 4.20 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função da fração de velocidade e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0,1$ .

#### 4.5 Análise dos parâmetros geométricos

Este subcapítulo se divide em três partes. Primeiro, avalia-se o efeito de razão de esbeltez (razão de aspecto) do mancal  $\lambda$ , EQ. (4.7), nas características de desempenho dos mancais de três lóbulos lubrificadas a gás. Na segunda parte, verifica-se a influência do fator de pré-carga. Por último, é feita uma comparação entre as características de desempenho de mancais cilíndricos, de dois lóbulos e de três lóbulos lubrificadas a gás.

$$\lambda = \frac{L}{D} \quad (4.7)$$

A FIGURA 4.21 apresenta a variação da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função do número de compressibilidade para mancais com três razões de aspecto distintas.

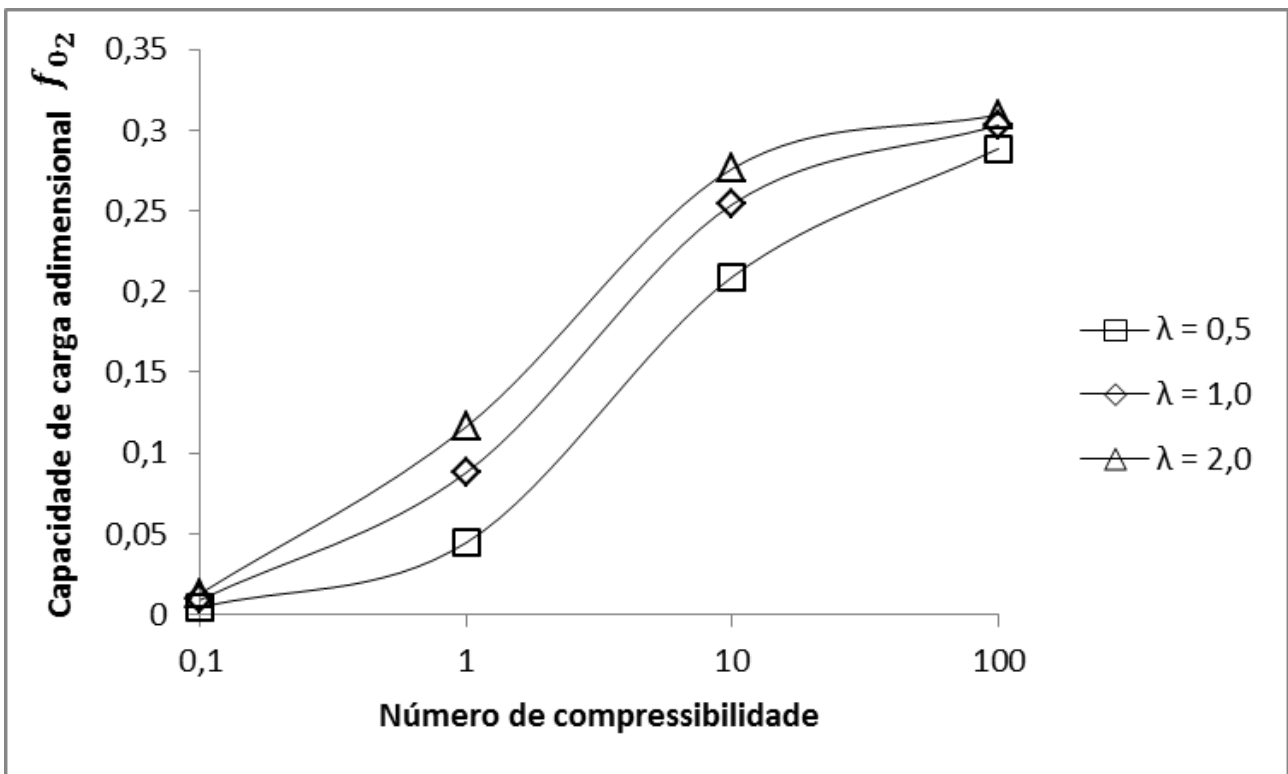


FIGURA 4.21 - Curvas da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função do número de compressibilidade e da razão de esbeltez para um mancal operando a uma razão de excentricidade  $\varepsilon = 0,1$ .

Verifica-se que a capacidade de carga adimensional aumenta à medida que a razão de esbeltez aumenta, sendo que o aumento é maior para valores intermediários do número de compressibilidade. Esse resultado é um indicativo de que razões de aspectos maiores que a unidade

podem vir a ser mais recomendadas para mancais de três lóbulos lubrificados a gás, ao contrário de mancais lubrificados a óleo, cuja razão de esbeltez comumente varia entre 0,5 e 1,0.

A FIGURA 4.22 mostra a variação do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XX}$  em função da razão de esbeltez e do número de compressibilidade para um mancal operando centrado ( $\varepsilon = 0$ ). Destaca-se que menores razões de aspectos resultam, de forma geral, em maiores coeficientes de rigidez diretos para toda a faixa do número de compressibilidade avaliada. Assim, mancais com razões de aspecto maiores estariam mais susceptíveis a deslocamentos verticais e horizontais. Dessa forma, pela análise da razão de esbeltez, seriam recomendados valores intermediários desse parâmetro buscando balancear o desempenho estático e dinâmico. Os coeficientes de amortecimento não são significativamente afetados pela variação da razão de esbeltez.

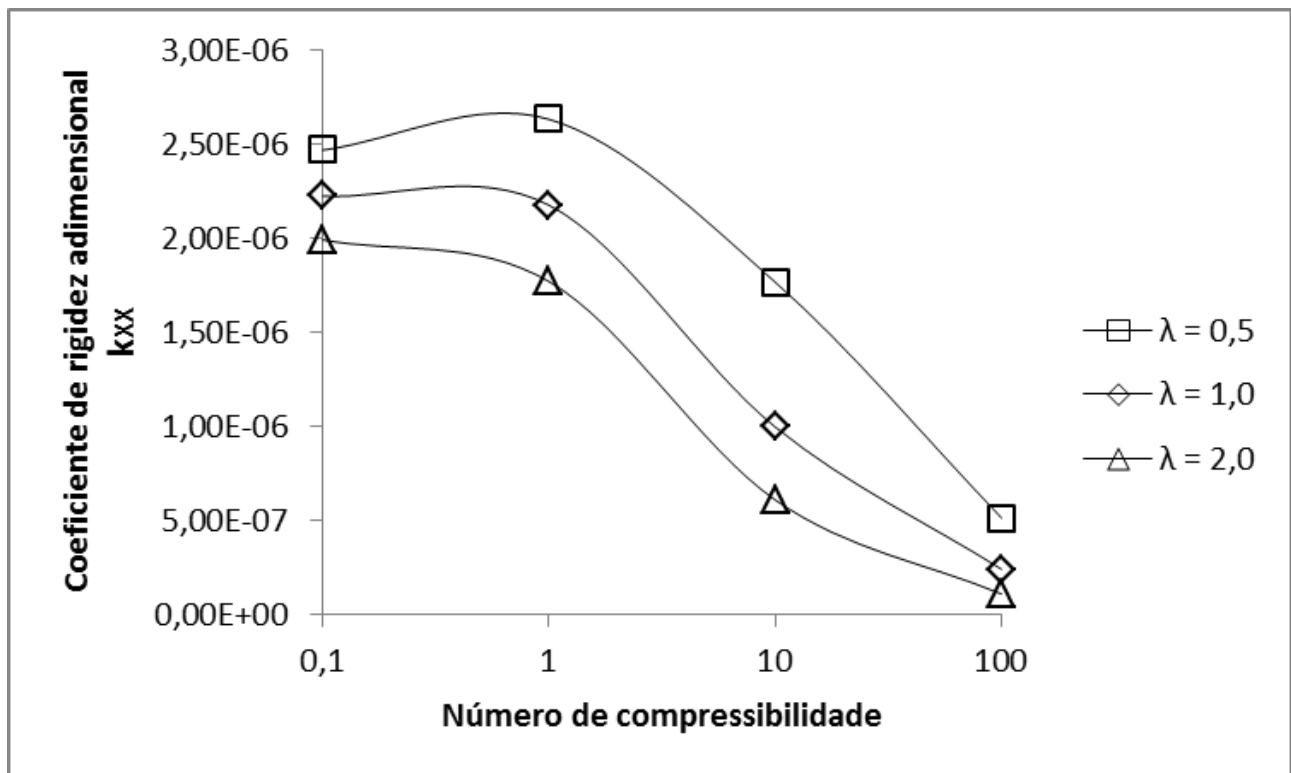


FIGURA 4.22 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{XX}$  em função da razão de esbeltez e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .

A seguir apresenta-se uma análise do efeito do fator de pré-carga nas características de desempenho. A FIGURA 4.23 representa a variação da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função do número de compressibilidade para mancais com quatro fatores de pré-carga distintos. Observa-se que maiores fatores de pré-carga proporcionam maiores capacidades de carga.

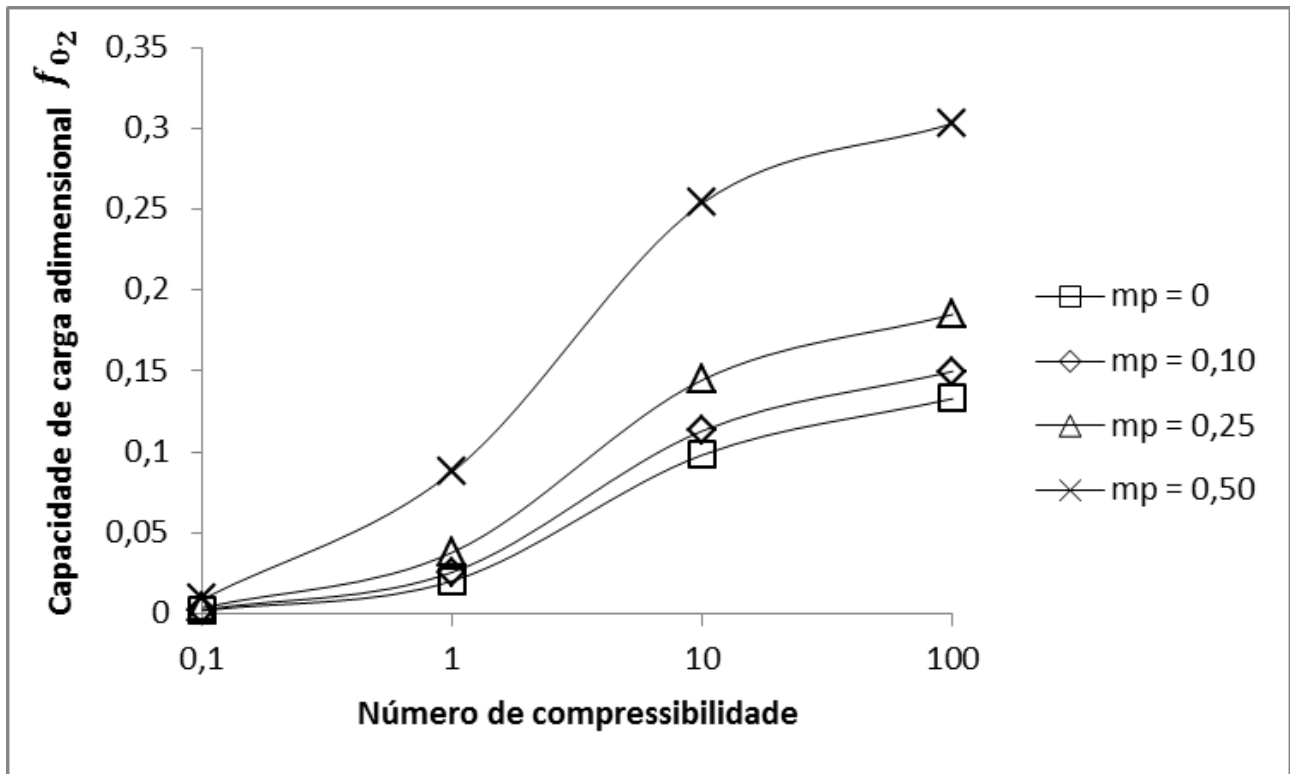


FIGURA 4.23 - Curvas da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função do número de compressibilidade e do fator de pré-carga para um mancal operando a uma razão de excentricidade  $\varepsilon = 0,1$ .

A FIGURA 4.24 representa as curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para um mancal operando centrado ( $\varepsilon = 0$ ). Observa-se que maiores fatores de pré-carga resultam em maiores coeficientes de rigidez diretos para toda a faixa do número de compressibilidade avaliada. Assim, mancais com fatores de pré-carga maiores estariam menos susceptíveis a deslocamentos verticais e horizontais. A FIGURA 4.25 mostra a variação do coeficiente de amortecimento adimensional  $c_{XX}$  em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para um mancal operando centrado ( $\varepsilon = 0$ ). Destaca-se que os coeficientes de amortecimento não variam conforme uma relação direta com os fatores de pré-carga. Com isso, mancais com fatores de pré-carga maiores seriam mais recomendados, pois fornecem maiores capacidades de carga e são menos susceptíveis a deslocamento laterais.

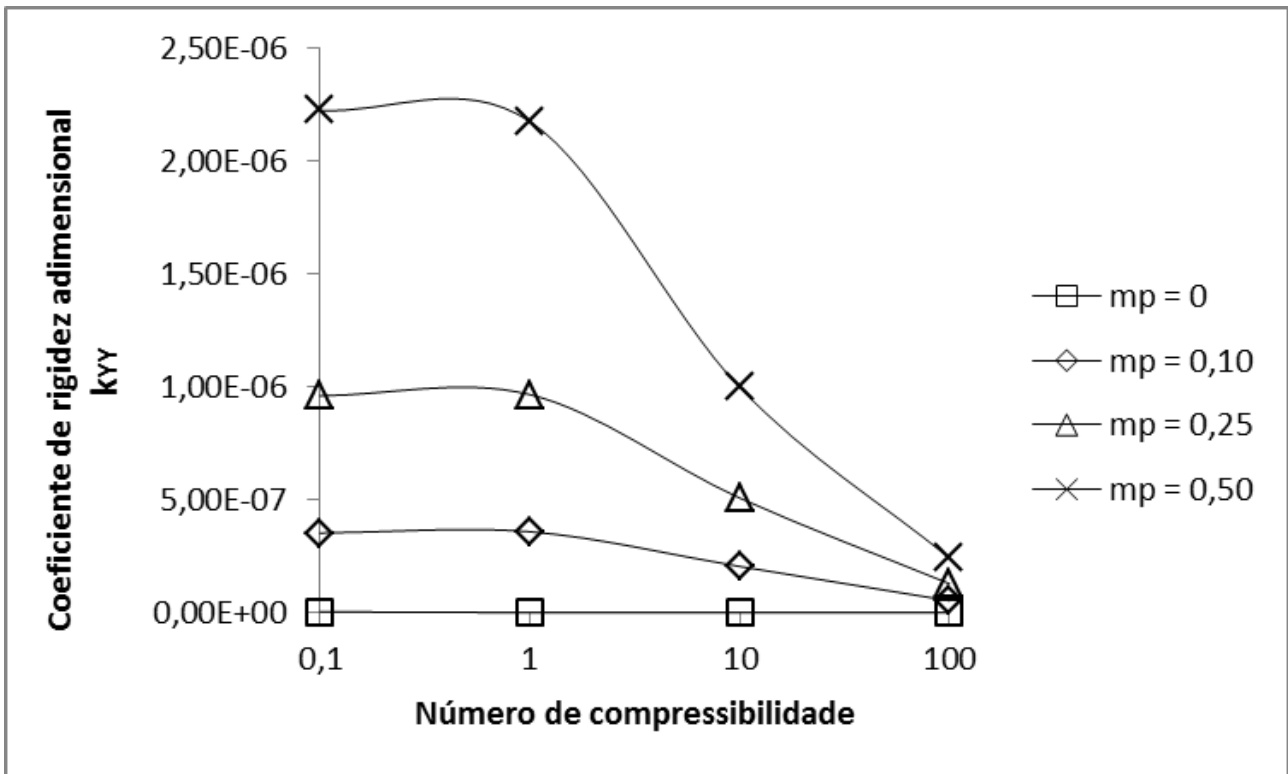


FIGURA 4.24 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{YY}$  em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .

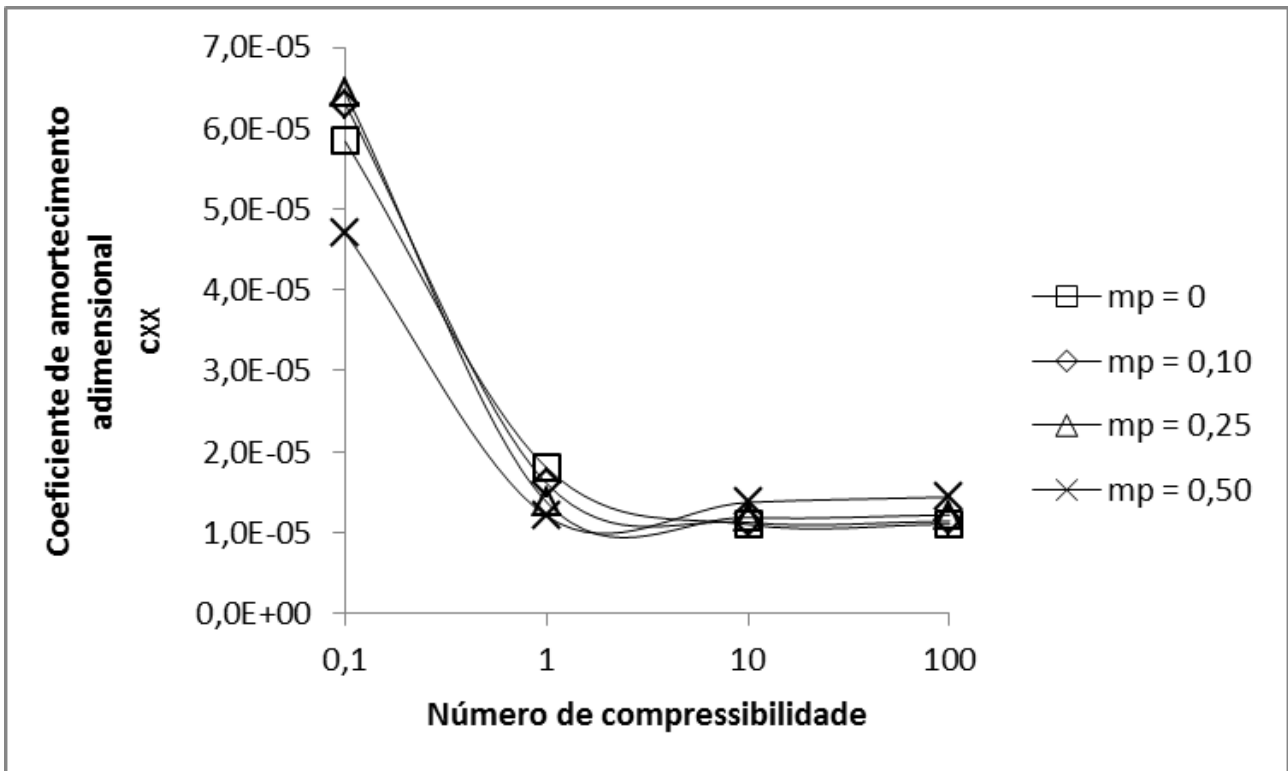


FIGURA 4.25 - Curvas do coeficiente de amortecimento adimensional  $c_{XX}$  em função do fator de pré-carga e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .

Por último, comparam-se as características de desempenho de mancais de três lóbulos com mancais elípticos e mancais cilíndricos lubrificadas a gás. Nos gráficos a seguir essas

geometrias são indicadas pelo número de lóbulos  $\#L$  presentes, sendo, respectivamente, 3 lóbulos, 2 lóbulos e 1 lóbulo. A FIGURA 4.26 representa a curva de capacidade de carga de cada uma dessas geometrias de mancal em função do número de compressibilidade para mancais operando não centrado ( $\varepsilon = 0,1$ ). No caso de mancais elípticos e de três lóbulos, o fator de pré-carga utilizado é de 0,5. Verifica-se que o mancal elíptico, ou de dois lóbulos, é o que possui maior capacidade de carga, seguido do mancal de três lóbulos. O mancal cilíndrico possui a menor capacidade de carga.

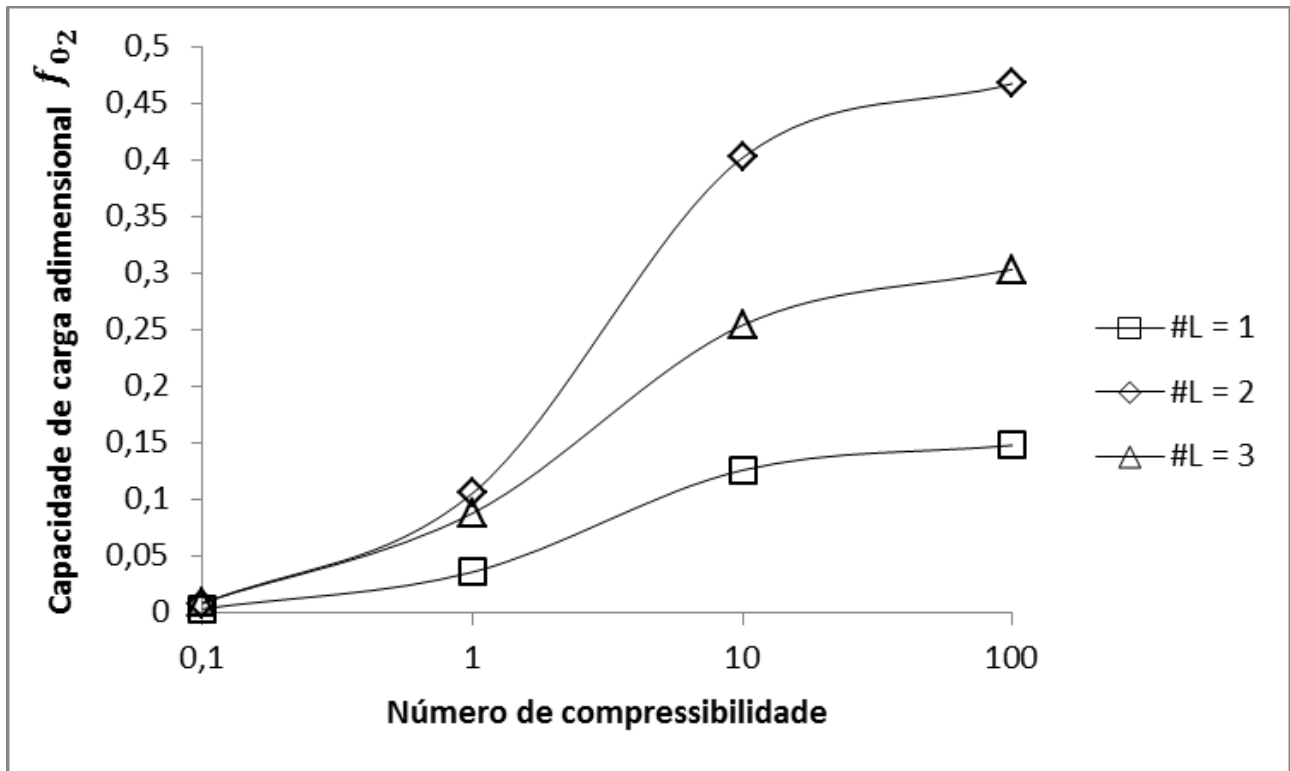


FIGURA 4.26 - Curvas da capacidade de carga adimensional  $f_{02}$  em função do número de compressibilidade e do número de lóbulos para um mancal operando a uma razão de excentricidade  $\varepsilon = 0,1$ .

A FIGURA 4.27 e a FIGURA 4.28 mostram as curvas dos coeficientes de rigidez adimensionais diretos  $k_{XX}$  e  $k_{YY}$  de cada uma dessas geometrias de mancal em função do número de compressibilidade para mancais operando centrado ( $\varepsilon = 0$ ).

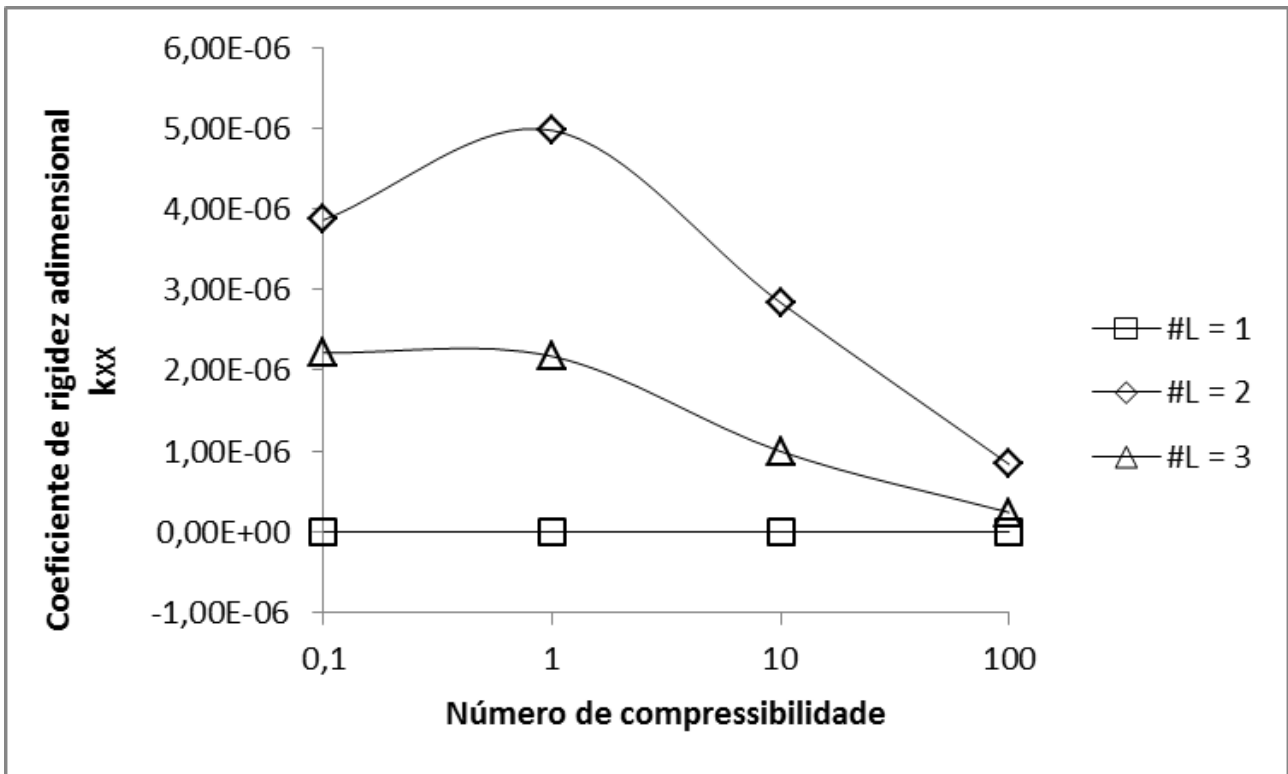


FIGURA 4.27 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{xx}$  em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .

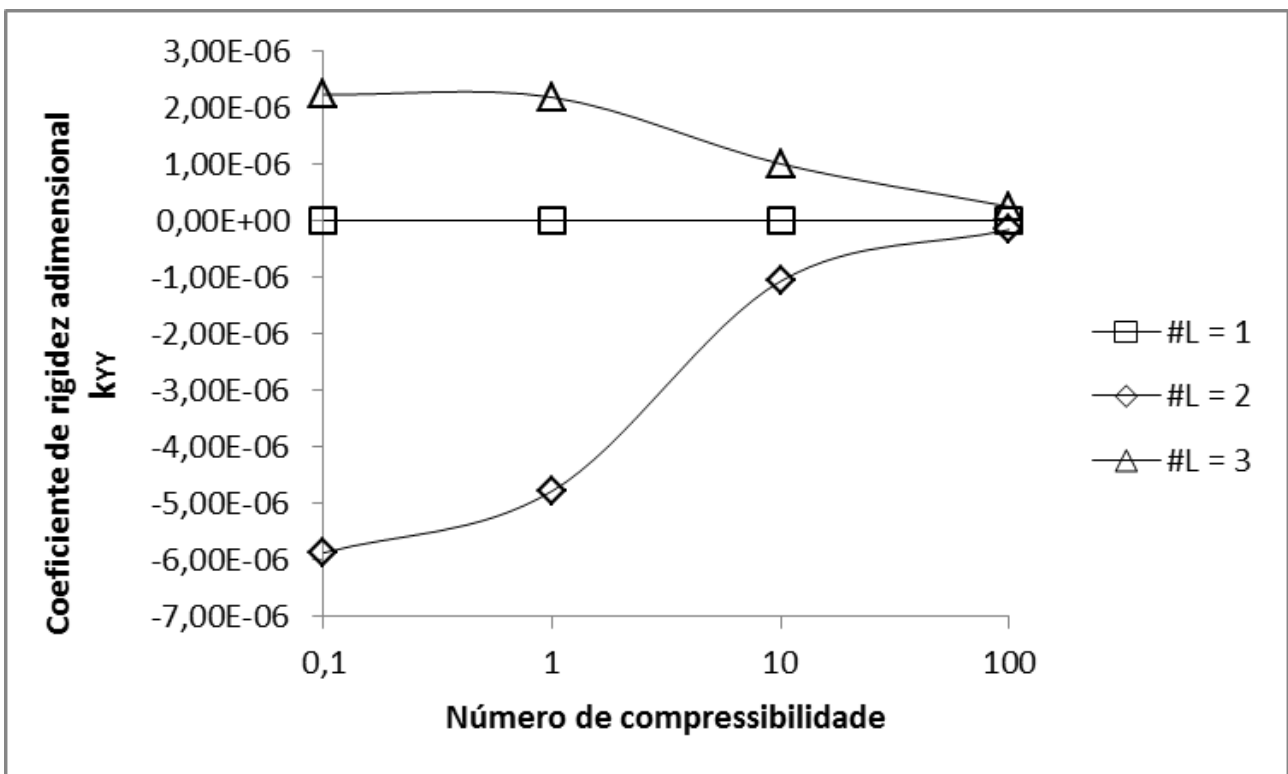


FIGURA 4.28 - Curvas do coeficiente de rigidez adimensional  $k_{yy}$  em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .

Observa-se que na direção vertical,  $X$ , os mancais elípticos apresentam maiores coeficientes de rigidez diretos, seguidos dos mancais de três lóbulos, sendo os mancais cilíndricos o que possuem os menores coeficientes de rigidez diretos verticais, sendo os valores muito próximos de zero. Entretanto, na direção horizontal,  $Y$ , os mancais de três lóbulos possuem os maiores coeficientes de rigidez diretos, sendo os coeficientes de rigidez diretos do mancal elípticos negativos. Nesse caso, mancais elípticos estão mais susceptíveis a deslocamentos na horizontal, o que pode vir a comprometer a estabilidade de rotores apoiados por mancais com essa geometria.

A FIGURA 4.29 exibe as curvas dos coeficientes de amortecimento adimensionais diretos  $c_{YY}$  de cada uma dessas geometrias de mancal em função do número de compressibilidade para mancais operando centrado ( $\varepsilon = 0$ ). Nota-se que os mancais cilíndricos e elípticos praticamente não oferecem amortecimento direto na horizontal, em comparação com mancais de três lóbulos, o que pode favorecer um pouco a estabilidade deste último.

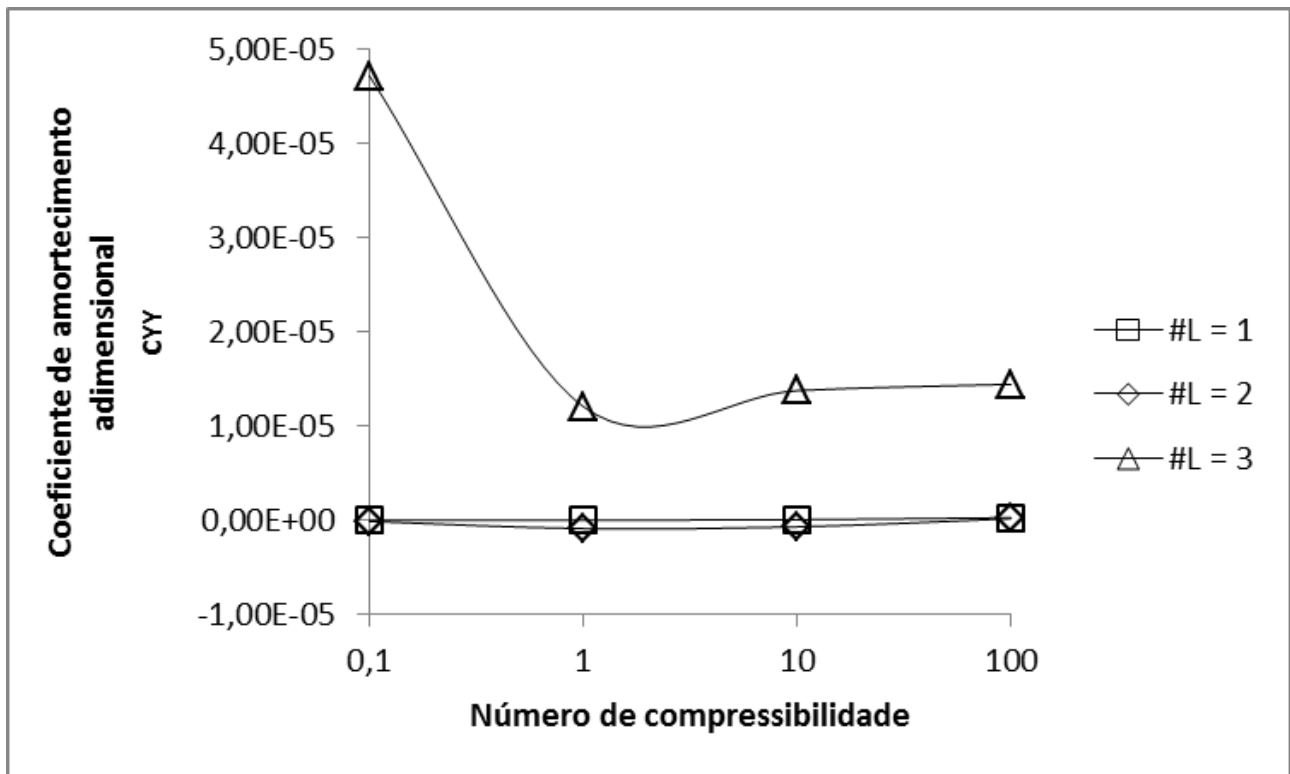


FIGURA 4.29 - Curvas do coeficiente de amortecimento adimensional  $c_{YY}$  em função do número de lóbulos e do número de compressibilidade para  $\varepsilon = 0$ .



## 5 CONCLUSÕES

O uso da lubrificação a gás em mancais tem ganhado mais importância nas últimas décadas e, com isso, torna-se necessário ampliar o conhecimento sobre o funcionamento desses componentes, bem como desenvolver soluções para enfrentar as barreiras que existem para sua plena utilização. Um procedimento de elementos finitos foi implementado, validado e utilizado para o estudo de mancais radiais de três lóbulos lubrificados a gás. O estudo foi realizado considerando diversos parâmetros geométricos e variadas condições de operação. Características estacionárias, tais como capacidade de carga e ângulo de posição, e características dinâmicas, representadas por oito coeficientes dinâmicos de força, foram obtidas por meio do procedimento e analisadas.

Alguns resultados obtidos com a aplicação do procedimento de elementos finitos merecem destaque: foi verificado que os efeitos da compressibilidade do gás, considerado ideal, já começam a se manifestar a partir de  $\Lambda \geq 10$ ; em geral, os coeficientes dinâmicos de força são mais sensíveis à variação de parâmetros para menores números de compressibilidade; o comportamento estacionário dos mancais com ambos os conjuntos de condições de contorno empregados foi semelhante, porém o comportamento dinâmico foi distinto, indicando que mancais com pressão ambiente nos recessos axiais entre lóbulos estariam menos susceptíveis a deslocamentos laterais e, portanto, à ocorrência de instabilidades, fazendo com que a presença de ranhuras axiais entre os lóbulos, e, principalmente, a alimentação de gás realizada através dessas ranhuras melhore as características dinâmicas de mancais de três lóbulos; o efeito do valor da frequência de excitação utilizado nos cálculos do procedimento é desprezível para a faixa do número de compressibilidade avaliada; valores intermediários de razão de esbeltez, próximos a  $\lambda = 1$ , são ideais para balancear o desempenho estático com dinâmico, visto que o aumento da razão de esbeltez aumenta a capacidade de carga, mas também a susceptibilidade a deslocamentos laterais; mancais de três lóbulos com fator de pré-carga igual a 0,5 possuem maiores capacidades de carga aliadas a uma menor susceptibilidade a deslocamento laterais; mancais de três lóbulos representam uma possível solução ao problema de estabilidade de mancais lubrificados a gás, sendo menos susceptíveis a deslocamentos laterais do que mancais elípticos e cilíndricos.

A determinação teórica dos coeficientes dinâmicos de força de mancais representa um importante passo compreender melhor o funcionamento desses componentes, mas por si só não representam um trabalho finalizado. Como recomendação de pesquisa correlata, sugere-se a utilização desses coeficientes para análise dinâmica da estabilidade de sistemas rotor-mancal, bem como a validação e comparação experimental do comportamento desses sistemas.

## ABSTRACT

There is an increasing trend in the industrial application of gas-lubricated journal bearings and the search for innovations that bring improvements in their use has become very important in the past half century. A better understanding about the behavior and stability of those bearings is crucial, since that gas journal bearings are subject to self-excited vibration. Fixed-geometry non-cylindrical journal bearings consist of one of the feasible and low-cost solution for efficient gas-lubricated journal bearings. The lack of technical data about the behavior of non-cylindrical gas journal bearings nationwide is the main motivation for the development of this work. Therefore, the focus of this work is the implementation of a procedure to analyze some steady-state and dynamic performance characteristics of one type of non-cylindrical journal bearings, which are the three-lobe journal bearings. A finite element procedure is implemented to analyze the behavior of gas three-lobe journal bearings under several operating conditions. This procedure can estimate some steady-state performance characteristics, such as the bearing attitude angle and carrying-load capacity, and some dynamic performance characteristics, such as the dynamic stiffness and damping coefficients, for different three-lobe bearings. The foundation of this procedure is the application of a linearized perturbation method on the Reynolds equation for compressible fluids in order to render the zero-th and first-order lubrication equations. The weighted-residual Galerkin method is applied on the lubrication equations and high-order interpolation functions are employed to generate the discrete finite element equations. The thin gas film domain is discretized by using four-node quadrilateral isoparametric finite elements. Gauss quadrature is employed in the computation of the finite element vectors and matrices generated in the formulation. The steady-state or zero-th-order pressure field rendered by the zero-th-order lubrication equation, which renders the steady-state performance characteristics, enters the first-order lubrication equation to estimate the dynamic performance characteristics. From the predictions rendered by the procedure implemented in this work, it is possible to state that gas three-lobe journal bearings, under the condition of atmospheric pressure between lobes, represent a feasible solution for mitigating the hydrodynamic instability problem observed in gas lubricated cylindrical journal bearings.

**Keywords:** Gas journal bearings; mulilobe bearings; three-lobe bearings; linear perturbation method; finite elements.

## REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, P. E.; FLACK, R. D. **Design of Journal Bearings for Rotating Machinery**. Proceedings of the 10th Turbomachinery Symposium. [S.l.]: [s.n.]. 1981. p. 25-45.
- ANDRÉS, L. S. Modern Lubrication Theory: Notes 5 - Dynamics of a Rigid Rotor-Fluid Film Bearing System. **Texas A & M University Digital Libraries**, 2010. Disponível em: <<http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93197>>. Acesso em: 22 Agosto 2017.
- CELEROTON AG. Products: Compressors. **Site da Celeroton AG**, 2017. Disponível em: <<http://www.celeroton.com>>. Acesso em: 29 ago. 2017.
- CHANDRA, M.; MALIK, M.; SINHASAN, R. Comparative study of four gas-lubricated noncircularjournal bearing configurations. **Tribology International**, v. 16, p. 103-108, Abril 1983.
- CZOLCZYNSKI, K. **Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems**. [S.l.]: Springer, 1999.
- FARIA, M. T. C. Some Performance Characteristics of High Speed Gas Lubricated Herringbone Groove Journal Bearings. **JSME International Journal**, 2001. 775-781.
- FARIA, M. T. C. **Performance Characteristics Curves for Gas Lubricated Herringbone Groove Journal Bearings**. Proceedings of COBEM 2005. Ouro Preto: [s.n.]. 2005.
- FARIA, M. T. C. A Comparative Performance Analysis of Gas Lubricated Cylindrical and Elliptical Journal Bearings. **International Review of Mechanical Engineering**, Setembro 2014. 901-907.
- FARIA, M. T. C.; ANDRÉS, L. S. On the Numerical Modeling of High-Speed Hydrodynamic Gas Bearings. **Journal of Tribology**, Janeiro 2000. 124-130.
- FORD, G. W. K.; HARRIS, D. M.; PANTALL, D. Principles and Applications of Hydrodynamic-Type Gas Bearings. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, 1 Junho 1957. 93-128.
- HAMROCK, B. J. **Fundamentals of Fluid Film Lubrication**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1994.
- HARRISON, W. J. The hydrodynamical theory of lubrication with special reference to air as a lubricant. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, 1913. 39-54.
- HIRN, G. A. **Bulletin de la Societe Industrielle**, Mulhausen, 1854. 195.
- KINGSBURY, A. Experiments with an Air-lubricated Journal Bearing. **Journal of the American Society for Naval Engineers**, Maio 1897. 267-292.

- KLIT, P.; LUND, J. W. Calculation of the Dynamic Coefficients of a Journal Bearing, Using a Variational Approach. **Journal of Lubrication Technology**, 1986. 421-425.
- LUND, J. W. Calculation of Stiffness and Damping Properties of Gas Bearings. **Journal of Lubrication Technology**, Outubro 1968. 793-803.
- LUND, J. W. Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings. **Journal of Tribology**, Janeiro 1987. 37-41.
- LUND, J. W.; THOMSEN, K. K. A Calculation Method And Data For The Dynamic Coefficient of Oil-Lubricated Journal Bearings. **Dyrobex Rotordynamics**, 1978. Disponível em: <<https://dyrobex.com/paper/a-calculation-method-and-data-for-the-dynamic-coefficients-of-oil-lubricated-journal-bearings/>>. Acesso em: 23 Agosto 2017.
- PINKUS, O. Analysis of Noncircular Gas Journal Bearing. **Journal of Lubrication Technology**, Outubro 1975. 616-623.
- REDDI, M. M. Finite-Element Solution of the Incompressible Lubrication Problem. **Journal of Lubrication Technology**, Julho 1969. 524-533.
- REDDI, M. M.; CHU, T. Y. Finite Element Solution of the Steady-State Compressible Lubrication Problem. **Journal of Lubrication Technology**, Julho 1970. 495-502.
- REYNOLDS, O. On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, London, 11 Fevereiro 1886. 157-234.
- SINGH, D. V.; SINHASAN, R.; WADHWA, S. S. Analysis of Non-Circular Gas Bearing Including Skewed Axes. **Wear**, 1 Julho 1982. 209-220.
- STEWART, G. W. **Afternotes on Numerical Analysis**. Philadelphia: SIAM, 1996.
- SZERI, A. Z. **Fluid film lubrication: theory and design**. New York: Cambridge University Press, 1998.
- WADHWA, S. S.; SINHASAN, R.; SINGH, D. V. Dynamic Performance of Non-Circular Gas Bearings. **Periodica Polytechnica Mechanical Engineering**, Budapest, 14 Setembro 1983. 367-389.