

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas

Dissertação de Mestrado

**SISTEMA PARA FECHAMENTO DE BALANÇOS DE MASSAS  
COMPLEXOS E RECONCILIAÇÃO DE DADOS**

Autora: Laís Nametala Silva  
Orientador: Professor Roberto Galery

Belo Horizonte  
Fevereiro/2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas

Laís Nametala Silva

## **SISTEMA PARA FECHAMENTO DE BALANÇOS DE MASSAS COMPLEXOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas.

Área de concentração: Tecnologia Mineral

Orientador: Professor Roberto Galéry

Belo Horizonte  
2017

S586s

Silva, Laís Nametala.  
Sistema para fechamento de balanços de massas complexos  
[manuscrito] / Laís Nametala Silva. - 2017.  
xi, 62 f., enc.: il.

Orientador: Roberto Galéry.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  
Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 61-62.

1. Engenharia de minas - Teses. 2. Tecnologia mineral - Teses.  
3. Indústria mineral - Teses. 4. Modelos matemáticos - Teses. I. Galery,  
Roberto. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.  
III. Título.

CDU: 622(043)

Aos meus pais.

*"I may never prove what I know to be true,  
but I know that I still have to try."*

(John Petrucci)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, base de tudo em minha vida, por todo o apoio;

Ao meu irmão, por entender a importância do trabalho e colaborar sempre que precisei;

Ao professor Roberto Galéry, por todo apoio, orientação e paciência, essenciais nesta caminhada. Ao professor Luiz Cláudio pelo auxílio;

Ao Reneé, por sempre estar ao meu lado me apoiando;

Ao graduando Gabriel Gariba por me ajudar na construção do sistema;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica, Materiais e de Minas, em especial aos professores Antônio Peres (Toninho), Paulo Roberto Brandão, George Valadão e Alizeibek Nader, agradeço pelas preciosas lições;

Ao professor Jonathan Bispo, pelas valiosas lições de C# e auxílio vital no desenvolvimento do sistema;

Ao técnico Alberto Afonso, pelo auxílio e boa vontade;

Aos amigos que fiz durante esta jornada no PPGEM, em especial a Ana Cláudia Franca, pelo companheirismo e tornar a rotina mais leve;

À Zaine Martins, por me manter focada e motivada durante a execução deste trabalho;

À PROEX CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo apoio financeiro e ao PPGEM;

A todos os meus familiares, amigos e professores que não foram citados aqui, mas estiveram direta ou indiretamente envolvidos neste trabalho;

Por fim, agradeço a Deus por todas as oportunidades proporcionadas.

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b> .....	<b>12</b>
<b>2. Objetivo e Relevância</b> .....	<b>13</b>
<b>3. Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>14</b>
3.1 Conceitos Básicos.....	14
3.2 Teoria de Erros .....	16
3.3 Incerteza da Recuperação .....	22
3.4 Balanço de Massas.....	23
3.5 Reconciliação de Dados.....	29
<b>4. Metodologia</b> .....	<b>32</b>
4.1 Alimentação/Produtos .....	33
4.2 Classificação.....	35
4.3 Cominuição.....	37
4.4 Concentração.....	39
4.5 Separação Sólido-Líquido .....	42
4.6 Outros .....	43
4.7 Cálculos .....	45
<b>5. Resultados e Discussão</b> .....	<b>52</b>
5.1 Detecção de Erros Grosseiros .....	55
<b>6. Conclusão</b> .....	<b>58</b>
<b>7. Sugestões para Trabalhos Futuros</b> .....	<b>59</b>
<b>8. Referências Bibliográficas</b> .....	<b>60</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Função densidade da distribuição normal padrão (curva de Gauss ou curva em sino) e probabilidades associadas (MONTGOMERY & RUNGER, 2013) .....	19
Figura 3.2 – Nós simples: a) nó de separação, b) nó de junção (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006) .....	23
Figura 3.3 – Fluxograma do circuito (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006) .....	24
Figura 3.4 – Circuito representado na forma de nós (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006) 24	
Figura 3.5 – Matriz conexão C (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006).....	25
Figura 3.6 – Matriz combinada, onde s é o número de fluxos e n o número de nós (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006).....	28
Figura 3.7 – Conjunto de equações a serem resolvidas na forma matricial (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006).....	28
Figura 4.1 – Tela inicial do sistema BalData.....	32
Figura 4.2 – Circuito-exemplo montado no sistema.....	33
Figura 4.3 – Tela exibindo os ícones da aba Feed/Products .....	34
Figura 4.4 – Tela exibindo conectores dos ícones da aba Feed/Products .....	34
Figura 4.5 – Tela exibindo os ícones da aba Classification .....	35
Figura 4.6 – Conectores de um hidrociclone .....	35
Figura 4.7 – Conectores de uma peneira de um deck .....	36
Figura 4.8 – Conectores de uma peneira de dois decks.....	36
Figura 4.9 – Conectores de uma peneira de três decks .....	36
Figura 4.10 – Tela exibindo os ícones da aba Comminution .....	37
Figura 4.11 – Conectores de um britador de mandíbulas .....	37
Figura 4.12 – Conectores de um britador cônico.....	38

Figura 4.13 – Conectores de um britador giratório .....	38
Figura 4.14 – Conectores de um britador de rolos.....	38
Figura 4.15 – Conectores de um moinho vertical .....	38
Figura 4.16 – Conectores de um moinho de bolas .....	38
Figura 4.17 – Conectores de um moinho de barras.....	39
Figura 4.18 – Conectores de um moinho SAG .....	39
Figura 4.19 – Tela exibindo os ícones da aba Concentration .....	39
Figura 4.20 – Conectores de uma célula de flotação.....	40
Figura 4.21 – Conectores de uma coluna de flotação.....	40
Figura 4.22 – Conectores de uma espiral.....	40
Figura 4.23 – Conectores de uma mesa concentradora .....	41
Figura 4.24 – Conectores de um jigüe.....	41
Figura 4.25 – Conectores de um LIMS .....	41
Figura 4.26 – Conectores de um WHIMS .....	42
Figura 4.27 – Tela exibindo os ícones da aba Solid-Liquid Sep.....	42
Figura 4.28 – Conectores de um espessador .....	43
Figura 4.29 – Conectores de um filtro .....	43
Figura 4.30 – Tela exibindo os ícones da aba Others.....	44
Figura 4.31 – Conectores de uma bomba .....	44
Figura 4.32 – Conectores de um tanque .....	44
Figura 4.33 – Conectores de um divisor de fluxos.....	45
Figura 4.34 – Conectores de uma pilha.....	45
Figura 4.35 – Tela do sistema mostrando o circuito-exemplo na aba de cálculos "Calculations" .....	46

Figura 4.36 – Botões do grupo Flow Data Input: balanço de massas (esquerda) e reconciliação de dados (direita).....	46
Figura 4.37 – Botões do grupo Circuit Calculations: balanço de massas (esquerda) e reconciliação de dados (direita).....	47
Figura 4.38 – Janela de inserção de dados dos fluxos do módulo de balanço de massas	48
Figura 4.39 – Janela de resultados do módulo de balanço de massas.....	49
Figura 4.40 – Janela de inserção de dados dos fluxos do módulo de reconciliação de dados.....	50
Figura 4.41 – Janela de resultados do módulo de reconciliação de dados .....	51
Figura 5.1 – Tela do sistema mostrando um circuito de ciclonagem de uma usina de fosfato na aba de inserção de dados e cálculos .....	52
Figura 5.2 – Telas do módulo DR para o circuito de ciclonagem de fosfato: dados de entrada (esquerda) e resultados da reconciliação de dados (direita).....	55
Figura 5.3 – Tela para inserção de dados de reconciliação para o circuito com modificação do valor do fluxo 4 .....	56
Figura 5.4 – Tela de resultados de reconciliação para o circuito com modificação do valor do fluxo 4.....	56

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Dados de amostragem do circuito de ciclonagem utilizados nos balanços de massas.....	53
Tabela 5.2 – Resultados dos balanços de massas para o circuito de ciclonagem .....	53
Tabela 5.3 – Resultados do tratamento estatístico dos dados gerados nos balanços de massas.....	54
Tabela 5.4 – Resultados dos testes de erros grosseiros .....	57

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

BIPM – Bureau Internacional de Pesos e Medidas

IEC – Comissão Eletrotécnica Internacional

INMETRO – Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia

ISO – Organização Internacional de Normalização

IUPAC – União Internacional de Química Pura e Aplicada

OIML – Organização Internacional de Metrologia Legal

## RESUMO

Balanços de massas são procedimentos extremamente importantes para a indústria mineral. Eles consistem na aplicação do princípio de conservação de massas em um sistema visando quantificar as massas no processo e, também, determinar certos parâmetros como taxas de produção, concentração, teores, recuperação mássica, etc.

Os resultados gerais de um estudo sobre as propriedades mássicas dos fluxos em um processo complexo podem conter uma grande variedade de dados com diversos graus de confiança. Usando tais dados, os balanços de massas dificilmente fecham. Para produzir uma resposta significativa, os resultados devem ser ajustados afim de se fornecer balanços precisos em cada etapa, grupo de etapas e no processo global. Sob tais condições, o uso de métodos confiáveis para estimativa de massas através dos dados analisados dos fluxos é extremamente importante.

Este trabalho apresenta um sistema computacional desenvolvido para reconciliação de dados e detecção de erros grosseiros, baseado em uma metodologia tradicional fundamentada por modelos matemáticos consistentes de balanço de massas, aplicado a casos reais.

## **ABSTRACT**

Mass balances are extremely important procedures for the mineral industry. They consist in the application of the mass conservation principle in a system aiming to quantify the masses in the process, and, also, to determine some parameters such as production rates, concentration, grades, mass recovery, etc.

The general results of a study regarding the properties of the mass flows in a complex process may contain a big variety of data with different reliability degrees. Using these data, the mass balancing calculations of the process rarely match. To produce a significant response, the results must be adjusted to provide accurate balances at each stage, group of stages and at the global process. Under these conditions, the use of reliable methods for mass estimation through the analyzed flow data is extremely important.

This paper presents a computational system developed for data reconciliation and gross error detection, based on a traditional methodology that relies on consistent mass balancing mathematical models, applied to real cases.

## 1. Introdução

A indústria mineral brasileira vem enfrentado diversos desafios nos últimos anos e, para que as empresas consigam se manter em operação, seus processos produtivos devem ser otimizados, reduzindo custos e realizando um melhor aproveitamento de seus recursos. Para tal, deve se estabelecer um diagnóstico criterioso quanto ao desempenho de todas as etapas envolvidas nesses processos. Sendo assim, são feitos os balanços de massas, que consistem na aplicação do princípio de conservação de massas em um sistema a fim de fundamentar quantitativamente as massas envolvidas no processo, além de determinar parâmetros como produção, concentração, teor do elemento químico, recuperação mássica, dentre outros (CUNHA, 2013).

Nos processos de beneficiamento de minério, as amostragens representativas dos fluxos para determinação dos teores dos compostos ou minerais de interesse são de extrema importância e, por muitas vezes, complexas. Sendo assim, estas podem ser fontes de erros. Além disso, a dificuldade de acesso a determinados fluxos de um circuito inviabiliza a amostragem para avaliação de massa.

Assim, de acordo com CUTTING (1976), o resultado geral de um estudo sobre as propriedades dos fluxos de massas de um processo complexo pode conter uma grande quantidade de dados de diferentes graus de confiabilidade, variando tipicamente de boas medidas de fluxos de água de processo a suposições pouco confiáveis de dados de massa em certos fluxos do processo, por exemplo. Com o uso desses dados, os cálculos de balanços de massas com base no fluxograma do processo raramente fecham. Para produzir uma resposta significativa, os resultados têm que ser ajustados para fornecer balanços convergentes em cada etapa, combinação de etapas e no processo global.

Nessas condições, torna-se importante a utilização de métodos confiáveis para estimativa das massas a partir dos teores dos compostos analisados nos fluxos. Sendo assim, propõe-se a aplicação computacional do método matemático de ajuste de balanço de massa e metalúrgico desenvolvido por FREU (1983), aliado ao método de reconciliação de dados elaborado por PEREIRA ET. AL. (2005), a casos reais.

## **2. Objetivo e Relevância**

O objetivo deste estudo é desenvolver um sistema para fechamento do balanço de massas de um circuito genérico de processamento mineral baseado no método de FREU (1983), com ajuste dos balanços globais de massas, além da reconciliação destes dados utilizando seu erro associado, dentro de um intervalo de confiança, aplicando o método apresentado por PEREIRA ET. AL. (2005), para detecção e correção de erros grosseiros.

A abordagem desse assunto é de grande relevância no âmbito da mineração, já que o balanço de massas é a base para o desenvolvimento de projetos de usinas de beneficiamento mineral, que envolve dimensionamento dos equipamentos, das redes de utilidades e o consumo de energia. Além disso, o mesmo possibilita a avaliação do rendimento operacional, o monitoramento e controle do processo nas usinas, sendo de suma importância a confiabilidade dos cálculos.

### 3. Revisão Bibliográfica

A determinação do balanço de massas é aplicada a qualquer processo de beneficiamento mineral, mas nem sempre é possível obter valores de massas e teores com a precisão adequada.

A coleta de dados para os cálculos é geralmente feita por amostragem dos fluxos envolvidos no processo de concentração mineral, o que pode ser bastante complexo devido à dificuldade de acesso, ao grande volume manuseado e aos erros significativos do processo de manuseio (OLIVEIRA, 1997).

A seguir, serão apresentados conceitos importantes para o cálculo do balanço de massas e tratamentos estatísticos.

#### 3.1 Conceitos Básicos

Para o desenvolvimento de um balanço de massas, é relevante que sejam revisados certos conceitos básicos relativos ao fechamento de balanços de massas.

##### 3.1.1. Fórmula de dois produtos

A fórmula de dois produtos determina o balanço de massas global de uma operação ou processo, considerando que a massa de material que entra no sistema é igual à massa do material que sai do mesmo. Matematicamente, é expressa por:

$$A = C + E \quad (3.1)$$

onde:

A = massa da alimentação;

C = massa do concentrado;

E = massa do rejeito.

Empregando a fórmula de dois produtos para o balanço de massas de um componente "i", tem-se:

$$Aa = Cc + Ee \quad (3.2)$$

onde:

a = teor do componente "i" na alimentação;

c = teor do componente "i" no concentrado;

e = teor do componente "i" no rejeito.

### 3.1.2. Recuperação em massa

A recuperação em massa (Y) de um processo é a relação entre a massa de concentrado e a massa de alimentação do sistema, a qual é dada por:

$$Y = \frac{C}{A} \times 100 \quad (3.3)$$

Expressando a recuperação em massa em função dos teores, tem-se:

$$Y = \frac{(a - e)}{(c - e)} \times 100 \quad (3.4)$$

### 3.1.3. Recuperação metalúrgica

A recuperação metalúrgica do componente "i" (R) no concentrado é dada pela equação 3.5:

$$R = \frac{Cc}{Aa} \times 100 \quad (3.5)$$

Expressando a recuperação metalúrgica em função dos teores, tem-se:

$$R = \frac{c(a - e)}{a(c - e)} \times 100 \quad (3.6)$$

## 3.2 Teoria de Erros

Quando uma grandeza física experimental  $x$  é determinada a partir de medição, o resultado é uma aproximação para o valor verdadeiro  $x_v$  da grandeza. Os objetivos da teoria de erros podem ser resumidos em:

- Obter o melhor valor para o mensurando a partir dos dados experimentais disponíveis. Isto significa determinar em termos estatísticos a melhor aproximação possível para o valor verdadeiro;
- Obter a incerteza no valor obtido, o que significa determinar em termos estatísticos o grau de precisão e confiança na medida da grandeza física.

A nomenclatura sobre metrologia e as regras básicas sobre incerteza foram discutidas nos últimos anos por grupos de trabalho constituídos de especialistas indicados por diversas organizações internacionais (BIPM, ISO, IUPAC, IUPAP, IEC, OIML) e foram publicadas em dois importantes textos: *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements* e *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*. Esta última publicação foi traduzida pela INMETRO em 1994. (ITA, 2017)

### 3.2.1 Definições

Serão apresentadas as definições dos termos mais usuais em Teoria dos Erros.

- Medição: conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza;
- Valor Verdadeiro: valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica. Ou seja, é o valor que seria obtido de uma medição perfeita e a determinação do mesmo pode ser entendida como o objetivo final da medição. Entretanto, deve ser observado que o valor verdadeiro é, por natureza, indeterminado;
- Resultado de uma medição: valor atribuído ao mensurando, obtido por medição.
- Mensurando: grandeza específica submetida à medição;
- Erro: resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando. Isto é, é a diferença entre o resultado de uma medição e o valor verdadeiro dessa grandeza;

- Desvio padrão experimental: para uma série de medições de um mesmo mensurado, a grandeza  $\sigma$ , que caracteriza a dispersão dos resultados, é dada pela fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\delta x_i)^2}{n - 1}} \quad (3.7)$$

onde  $\delta x_i$  representa a diferença entre o resultado da  $i$ -ésima medição e a média aritmética dos  $n$  resultados considerados;

- Incerteza de medição: parâmetro associado ao resultado de uma medição e que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentalmente atribuídos ao mensurando;
- Repetitividade: grau de concordância entre resultados de sucessivas medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medições;
- Reprodutibilidade: grau de concordância entre resultados de medições de um mesmo mensurando, efetuadas sob condições de medições diferentes;
- Valor médio verdadeiro ou média limite: é o valor médio que seria obtido de um número infinito de medições em condições de repetitividade;
- Erro estatístico: resultado de uma medição menos o Valor Médio Verdadeiro (ou Média Limite);
- Erro sistemático: diferença entre o Valor Médio Verdadeiro e o Valor verdadeiro;
- Exatidão ou Acurácia: grau de concordância entre o resultado de uma medição e o Valor Verdadeiro do mensurando;
- Precisão: é um conceito qualitativo para indicar o grau de concordância entre os diversos resultados experimentais obtidos em condições de repetitividade;
- Incerteza padrão: é a incerteza em resultado final dada na forma de um desvio padrão;
- Intervalo de confiança: considerando um intervalo entre  $a$  e  $b$ , pode-se fazer a seguinte afirmativa em relação a uma quantidade desconhecida  $y$ :

$$a \leq y \leq b \quad (3.8)$$

Se a afirmativa tem probabilidade  $P$  de ser correta, o intervalo definido pelos valores  $a$  e  $b$  é um intervalo de confiança  $P$  para  $y$ ;

- Nível de confiança: o coeficiente de confiança, nível de confiança ou confiança é a probabilidade  $P$  para um determinado intervalo de confiança. Por exemplo, se  $y_v$  é o valor verdadeiro de uma grandeza,  $y$  é um resultado experimental e  $\sigma$  é a incerteza padrão:

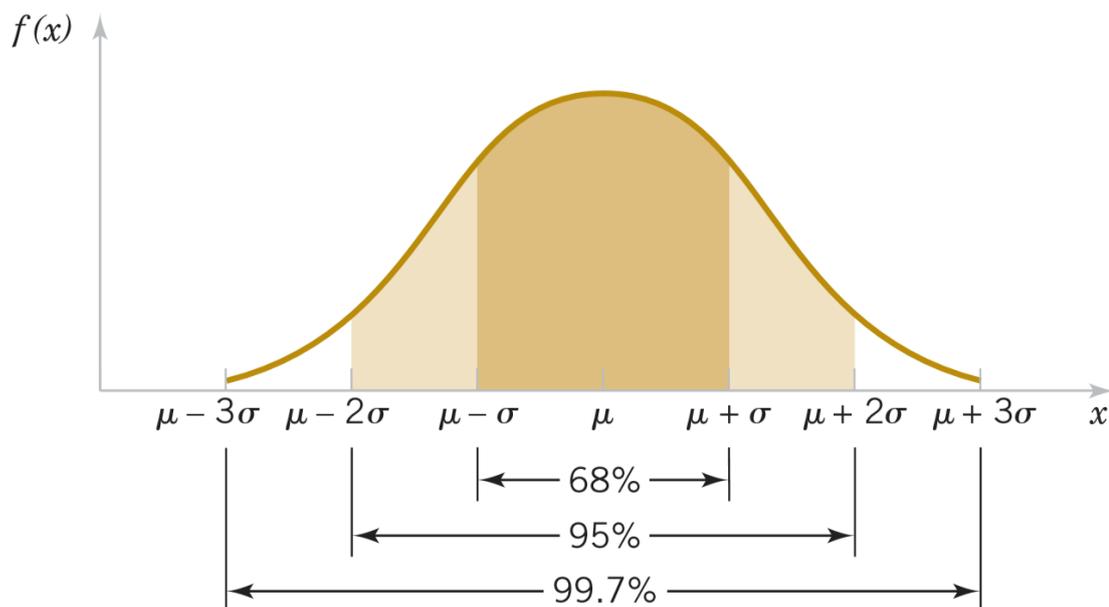
$$y - \sigma \leq y_v \leq y + \sigma \quad (\text{com } P \sim 68\%) \quad (3.9)$$

define intervalo com confiança de  $P \sim 68\%$ , para distribuição normal de erros e incerteza  $\sigma$  obtida a partir de número de graus de liberdade (número de medições) razoavelmente grande.

### 3.2.2 Distribuição Normal ou de Gauss

É um fato experimental que a frequência dos resultados (histograma) varia com o número de medições realizadas. Essas flutuações são mais acentuadas quando o número de medições é pequeno. Por outro lado, aumentando o número de medições, as flutuações decrescem. Por exemplo, a distribuição dos resultados para 5 medições mostra-se, geralmente, muito diferente da distribuição para 10 medições. Existem diferenças, embora bem menos acentuadas, entre distribuição de 50 e de 100 medições e, ao se compararem os histogramas para 500 e 1000 medições serão observadas diferenças serão ainda menores. Se forem obtidos mais algarismos significativos em cada medição, poderão ser utilizados valores cada vez menores para os intervalos  $\Delta x$ . Assim, quando o número de medições tender para o infinito e o intervalo  $\Delta x$  tender a zero, o histograma em geral tenderá para uma curva lisa e simétrica com um pico de máximo em  $\mu$ .

Pode-se concluir, então, que a distribuição dos resultados adquire uma forma cada vez mais definida em função do aumento do número de medições  $n$ . Para sumarizar, pode ser dito que existe uma distribuição limite quando  $n$  tende para o infinito e que, na ausência de erros sistemáticos, o valor tende para o valor verdadeiro (Figura 3.1).



**Figura 3.1** – Função densidade da distribuição normal padrão (curva de Gauss ou curva em sino) e probabilidades associadas (MONTGOMERY & RUNGER, 2013)

No formalismo da Teoria de Erros, a curva da distribuição limite representa de uma forma compacta toda a informação que um experimento ou amostragem pode fornecer. Tanto o mensurando quanto o sistema de medição (incluindo aqui o experimentador como parte do sistema) determinam a posição e o formato da curva.

Percebe-se que o valor de  $x$  correspondente ao máximo da curva está relacionado com o valor verdadeiro da grandeza e que a largura da curva está relacionada com a precisão dos resultados e é medida pelo desvio padrão.

Uma justificativa matemática de função gaussiana como distribuição de erros é encontrada no teorema do limite central, em sua forma mais geral. Numa linguagem bastante simplificada e adaptada ao problema em questão, este teorema diz que, se o erro total é a soma de muitos erros elementares que têm distribuições quaisquer com variâncias finitas, a distribuição de probabilidade para o erro total tende a ser gaussiana.

A expressão analítica da curva de Gauss é:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{x}} e^{-h^2 x^2} \quad (3.10)$$

onde  $h$  é chamado de índice de precisão.

### 3.2.3 Desvio Padrão

A quantidade que é de interesse chama-se desvio padrão ( $\sigma$ ), que vem a ser o desvio médio quadrático das medidas com relação à média do universo de medidas. Como é impossível fazer todas as medidas do universo de medidas para se determinar a sua média, o procedimento adotado será, a partir das  $n$  observações, por meio de considerações de ordem estatística, obter a melhor estimativa para o desvio padrão. Desta forma, a melhor estimativa para o desvio padrão será aquela apresentada pela Equação 3.7.

A função do desvio padrão é, portanto, indicar o erro que seria obtido caso fosse realizada apenas uma única observação. Ou, equivalentemente, o significado do erro padrão de um dado conjunto de  $n$  determinações é que uma dada observação tem 68% de probabilidade de estar no intervalo  $\pm\sigma$  em torno do valor médio; 95% no intervalo  $\pm 2\sigma$ , etc.

A partir de um conjunto de  $n$  determinações de uma quantidade  $x$ , a melhor estimativa para o valor verdadeiro será dada pela sua média aritmética  $\mu$  e pelo desvio padrão da média  $\bar{\sigma}$ , ou seja,  $\mu \pm \bar{\sigma}$ , onde o intervalo de  $\mu - \bar{\sigma}$  a  $\mu + \bar{\sigma}$  delimita uma faixa que tem 68,27% de probabilidade de conter o valor verdadeiro. Já o intervalo de  $\mu - 2\bar{\sigma}$  a  $\mu + 2\bar{\sigma}$  delimita uma faixa que tem 95% de probabilidade de conter o valor verdadeiro.

### 3.2.4 Variância

Dado um conjunto de dados, a variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está do valor central (médio).

Quanto menor é a variância, mais próximos os valores estão da média. Mas, quanto maior ela é, mais os valores estão distantes da média. Tal valor é dado a partir do quadrado do desvio padrão.

### 3.2.5 Intervalos de Confiança

Nível de confiança  $P$  ou, simplesmente, confiança  $P$  de uma medida é a probabilidade  $P$  de que o valor apresentado esteja correto. Portanto, quando é dito que o valor de uma quantidade  $x$  é  $x \pm \sigma_x$  com confiança de  $P\%$ , quer dizer que o valor verdadeiro de  $x$  tem probabilidade de  $P\%$  de estar dentro do intervalo  $[x - \sigma_x; x + \sigma_x]$ .

Para se chegar a esse resultado, basta integrar a densidade de probabilidade  $f(x)$  dentro do intervalo  $[x - \sigma_x; x + \sigma_x]$ . No caso de uma distribuição Gaussiana, a Equação 3.10 integrada dentro desse intervalo retorna um valor de 0,6827, isto é, 68,27% de confiança.

### 3.2.6 Erros Grosseiros

Medidas portadoras de erros grosseiros são aquelas com grau de imprecisão muito maior que o suposto no modelo de medição. Em casos práticos, tais medidas são resultantes de uma variedade de causas, tais como erro nos canais de amostragem, instrumentos de medição defeituosos ou com ajustes imperfeitos, falhas humanas, etc.

Os dados mais flagrantemente errôneos devem ser rejeitados ou recuperados. Para que sejam identificados, devem-se efetuar testes das medidas, podendo ser citados os seguintes:

- Comparação do valor medido com o valor nominal;
- Comparação do valor medido numa amostragem com o valor da amostragem anterior;
- Avaliação dos limites determinados pelo intervalo de confiança.

É necessário, portanto, desenvolver procedimentos tanto para detectar a existência de medidas contendo erros grosseiros quanto para recuperá-las através da substituição por pseudomedidas.

No contexto de usinas de beneficiamento, acontecimentos normais de processos, porém indesejáveis, como vazamentos, movimentações manuais de material e instrumentação descalibrada, geram o aparecimento de grandes erros no fechamento do balanço.

Usualmente, ao analisar-se um processo, em estado estacionário, as variáveis são arbitrariamente interpretadas como tendo comportamento normal, ou seja, sua função de distribuição de probabilidade pode ser caracterizada por uma média ( $\mu$ ) e um desvio padrão ( $\sigma$ ). Com isto, o intervalo de confiança com 95% de chances de a variável ocorrer é dado por  $[-2\sigma + 2\sigma]$ , como discutido na subseção anterior.

A presença de um erro grosseiro seria, portanto, a ocorrência de um valor de medida para um determinado fluxo que supere os intervalos de confiança da mesma, indicando assim alguma falha ocorrida na própria medição ou alguma outra anomalia na usina.

### 3.3 Incerteza da Recuperação

O cálculo da recuperação metalúrgica ( $R$ ) através das equações 3.5 e 3.6 implica em incertezas, já que este parâmetro será calculado através de dados originados de amostragens e análises químicas. A variação de  $R$  em relação aos teores  $a$ ,  $c$ , e  $e$  pode ser determinada aplicando o método de derivação parcial na equação 3.6.

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 100 \times \frac{ce}{a^2(c-e)} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial c} = -100 \times \frac{e(a-e)}{a(c-e)^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -100 \times \frac{c(c-a)}{a(c-e)^2} \quad (3.13)$$

A variância de uma função pode ser obtida a partir das derivações, conforme equação 3.14:

$$V_R = \left(\frac{\partial R}{\partial a}\right)^2 V_a + \left(\frac{\partial R}{\partial c}\right)^2 V_c + \left(\frac{\partial R}{\partial e}\right)^2 V_e \quad (3.14)$$

Sendo  $V_a$ ,  $V_c$  e  $V_e$  as variâncias associadas à determinação de  $a$ ,  $c$ ,  $e$ , podendo ser calculadas a partir das equações 3.15 a 3.17, em que  $\sigma$  é o desvio padrão relativo.

$$V_a = (a\sigma_a)^2 \quad (3.15)$$

$$V_c = (c\sigma_c)^2 \quad (3.16)$$

$$V_e = (e\sigma_e)^2 \quad (3.17)$$

Substituindo as equações 3.15, 3.16, e 3.17 em 3.14, tem-se:

$$V_R = \frac{100^2}{a^2(c-e)^2} \left[ \frac{c^2 e^2}{a^2} V_a + \frac{e^2 (a-e)^2}{(c-e)^2} V_c + \frac{c^2 (c-a)^2}{(c-e)^2} V_e \right] \quad (3.18)$$

O erro é aproximadamente  $2\sigma$ , para um intervalo de confiança de 95%, considerando-se uma distribuição normal (VALADÃO, 2012).

### 3.4 Balanço de Massas

Segundo WILLS & NAPIER-MUNN (2006), um circuito, não importa o quão complexo seja, pode ser desmembrado em uma série de operações unitárias, onde cada uma delas pode ser calculada através do método dos dois produtos. Contudo, para se fechar um balanço de massas de um circuito complexo em estado estacionário, requer-se um método mais analítico de geração de  $n$  equações lineares para  $n$  variáveis desconhecidas.



**Figura 3.2** – Nós simples: a) nó de separação, b) nó de junção (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

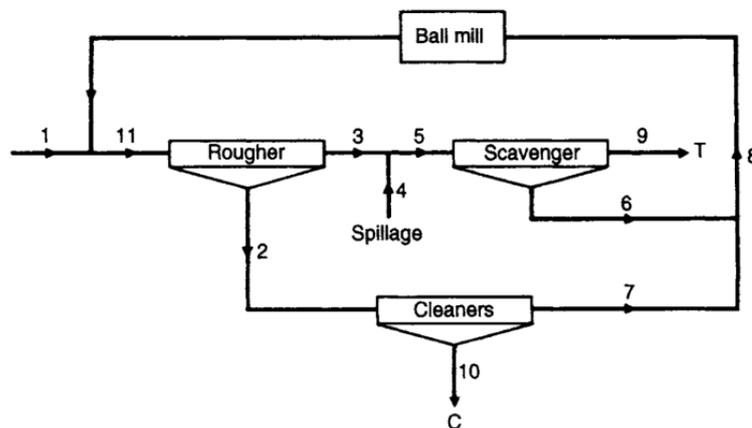
É fato comprovado (SMITH & FREW, 1983) que, tendo-se como referência o valor de um dos elementos de fluxo da usina (usualmente, o valor da taxa de alimentação da

usina), para efeito de fechamento do balanço de massas, o número mínimo de fluxos que devem ser amostrados é dado pela Equação 3.19.

$$N = 2(F + S) - 1 \quad (3.19)$$

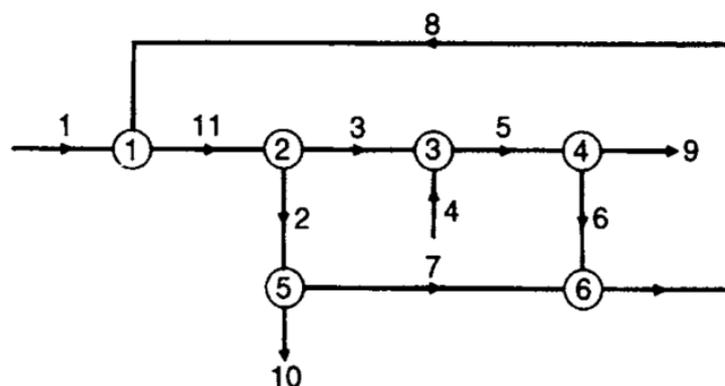
onde  $F$  é o número de fluxos de alimentação e  $S$  é o número de nós de separação.

O circuito de flotação apresentado na Figura 3.3 será utilizado como exemplo.



**Figura 3.3** – Fluxograma do circuito (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

A Figura 3.4 exibe a representação do circuito em forma de nós.



**Figura 3.4** – Circuito representado na forma de nós (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

Para o circuito exemplo, é necessário que sejam amostrados 13 fluxos. Contudo, somente onze fluxos estão disponíveis. Seria necessário, então, que fossem obtidos

mais dois produtos para o fechamento do balanço. Esses dois pontos extras são denominados "pontos cegos" de amostragem.

Na checagem de situações deste tipo, um procedimento singular foi desenvolvido por FREW (1983), o qual permite tanto a conferência na contagem de nós como pode ser empregado em ajustes de balanços de massas realizados via computador.

O método envolve o uso da matriz conexão C (CUTTING, 1976), onde cada elemento ( $C_{ij}$ ) da matriz é determinado da seguinte forma:

- +1 para o fluxo  $j$  indo em direção ao nó  $i$ ;
- -1 para o fluxo  $j$  saindo do nó  $i$ ;
- 0 para o fluxo  $j$  não conectado ao nó  $i$ .

Utilizando como exemplo o circuito apresentado na Figura 3.3, tem-se que a matriz conexão (Figura 3.5) deverá conter 11 colunas e 6 linhas, já que o circuito apresenta 11 fluxos e 6 nós de separação.

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**Figura 3.5** – Matriz conexão C (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

Cada uma das onze colunas da matriz representa um fluxo individual e quando somadas devem resultar em valores iguais a +1, -1 ou zero. Qualquer outro resultado é um indicativo de erro na entrada de dados. Se a soma da coluna for +1, significa que se trata de um fluxo de alimentação. Se a soma for -1, trata-se de um fluxo de produto. Já, se a soma for 0, trata-se de um fluxo interno do processo. Sendo assim, a soma das colunas da matriz conexão mostra que os fluxos 1 e 4 são alimentação, os fluxos 9 e 10 são produtos, e os demais fluxos são internos ao circuito.

Os elementos de cada linha representam os nós individuais. Se os números de fluxos com valor igual a +1, ( $n_p$ ) e o número de nós com o valor de -1, ( $n_n$ ) forem computados, esses valores podem ser utilizados para o cálculo de nós simples. Isto pode ser feito

calculando o número de junções simples ( $J$ ) e o de separadores simples ( $S$ ), como mostra a Equação 3.20 e a Equação 3.21.

$$J = n_p - 1 \quad (3.20)$$

$$S = n_n - 1 \quad (3.21)$$

Para o exemplo em questão, existem três separadores simples e três junções. Sendo assim, o número mínimo de fluxos que devem ser amostrados é 9, embora haja 11 fluxos disponíveis. Para a escolha dos pontos de amostragem, é importante frisar que todos os fluxos de alimentação e produto sejam incluídos como pontos de amostragem. Sendo assim, se nesse exemplo o fluxo 1 é o fluxo de referência, então os fluxos de 2 a 11 são desconhecidos e devem ser determinados. Então, dez equações lineares independentes são necessárias para determinar o valor de cada fluxo em relação ao fluxo 1. O balanço de materiais para cada nó fornece seis equações. As outras equações necessárias são as que envolvem as alimentações e os produtos. Além disso, deve-se ter em mente que dados de amostragem estão sujeitos a erros experimentais, por isso a escolha dos fluxos a serem amostrados pode afetar a sensibilidade do ajuste deste balanço ao erro.

Sendo assim, SMITH & FREW (1983) desenvolveram uma técnica de análise de sensibilidade que determina quais equações devem ser utilizadas para a obtenção da menor variância possível em função dos erros experimentais associados à amostragem. Este procedimento confirma também que, sempre que possível, é preferível que se realizem medidas diretas das massas associadas aos fluxos, pois reduzem a sensibilidade associada aos erros experimentais.

Para a resolução de sistemas deste tipo, a matriz de conexão  $C$  pode ser utilizada para gerar um conjunto de equações lineares que têm que ser resolvidas para a determinação de cada um dos fluxos. Uma matriz material  $M$  é utilizada e seus elementos definidos pela Equação 3.22:

$$M_{ij} = C_{ij} B_j \quad (3.22)$$

onde  $B_j$  representa o taxa de sólidos no fluxo  $j$ .

Utilizando o circuito-exemplo da Figura 3.3, cada linha da matriz conexão gera uma equação linear representando um balanço de material. Levando em consideração a segunda linha da matriz conexão do exemplo, é dada a Equação 3.23.

$$C_{2j} = 0 - 1 - 100000001 \quad (3.23)$$

Sendo assim, a matriz material  $M_{2j}$  no nó 2 é dada pela Equação 3.24.

$$-B_2 - B_3 + B_{11} = 0 \quad (3.24)$$

A matriz denominada matriz dos componentes  $A$  pode ser definida pela Equação 3.25.

$$A_{ij} = C_{ij} B_j a_j = M_{ij} a_j \quad (3.25)$$

onde  $a_j$  representa o valor do componente (teor, % fracional, razão de diluição etc.) no fluxo  $j$ . Então, para o nó 2, tem-se a Equação 3.26.

$$-B_2 a_2 - B_3 a_3 + B_{11} a_{11} = 0 \quad (3.26)$$

Os componentes devem ser escolhidos através de análise de sensibilidade. Componentes diferentes podem ser utilizados para os cálculos de outros fluxos em diferentes nós. Entretanto é importante que o mesmo componente seja sempre utilizado para cálculo naquele nó.

Agora, combinando as matrizes  $M_{ij}$  e  $A_{ij}$  em uma única matriz, será obtida a matriz apresentada na Figura 3.6.

$$\begin{array}{c}
 M_{11}M_{12} \cdots \cdots M_{1s} \\
 M_{21}M_{22} \cdots \cdots M_{2s} \\
 \vdots \\
 M_{n1}M_{n2} \cdots \cdots M_{ns} \\
 A_{11}A_{12} \cdots \cdots A_{1s} \\
 \vdots \\
 A_{n1}A_{n2} \cdots \cdots A_{ns}
 \end{array}$$

**Figura 3.6** – Matriz combinada, onde  $s$  é o número de fluxos e  $n$  o número de nós (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

Se  $s$  é o fluxo de referência (preferencialmente a alimentação do circuito ou usina), e  $B_s$  vale 1, então  $B_j$  representa a fração de fluxo em relação ao fluxo de referência que se dirige ao fluxo  $j$ . Então, se  $B_s$  for igual a 1,  $M_{1s}$  será igual a  $C_{1s}$  e  $A_{1s}$  será igual a  $C_{1s}a_s$ . Com isso, na forma matricial, teremos o sistema apresentado na Figura 3.7.

$$\begin{bmatrix}
 C_{11} \cdots \cdots C_{1(s-1)} \\
 C_{21} \cdots \cdots C_{2(s-1)} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{n1} \cdots \cdots C_{n(s-1)} \\
 C_{11}a_1 \cdots \cdots C_{1(s-1)}a_{(s-1)} \\
 C_{21}a_1 \cdots \cdots C_{2(s-1)}a_{(s-1)} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{n1}a_1 \cdots \cdots C_{n(s-1)}a_{(s-1)}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 B_1 \\
 B_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 B_{(s-1)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -C_{1s} \\
 -C_{2s} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 -C_{ns} \\
 -C_{1s}a_s \\
 -C_{2s}a_s \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 -C_{ns}a_s
 \end{bmatrix}$$

**Figura 3.7** – Conjunto de equações a serem resolvidas na forma matricial (WILLS & NAPIER-MUNN, 2006)

Resolvidas as equações matriciais, são obtidas as massas dos fluxos estudados e, por fim, fechado o balanço de massas do circuito em questão.

Como pode ser observado, a matriz conexão é de fundamental importância, sendo a base geral dos pacotes envolvendo cálculos de balanço de massas via computador.

### 3.5 Reconciliação de Dados

Reconciliação de dados é um método ou algoritmo que permite ajustar os valores das medidas realizadas para que a equação de balanço de massas seja obedecida. Por este processo deve-se atribuir maior erro à medição de maior incerteza. A soma dos erros é em geral ponderada pela precisão de cada instrumento ou pelo grau de confiança das estimativas realizadas para os valores não medidos. Sendo assim, o método descrito nesta seção, desenvolvido por PEREIRA ET. AL. (2005), é bastante útil para distribuir erros residuais de natureza randômica.

O problema inicial pode ser definido como:

$$\min F(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (M_i - \hat{M}_i)^2$$

sujeito a:

$$\phi_1(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_N) = 0$$

$$\phi_2(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_N) = 0$$

...

$$\phi_k(\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_N) = 0$$
(3.27)

onde:

$F$  = função a ser minimizada;

$N$  = número de amostras;

$\sigma_i$  = desvio padrão da medida;

$M_i$  =  $i$ -ésima medida;

$\hat{M}_i$  = valor reconciliado da  $i$ -ésima medida;

$k$  = número de elementos no circuito (restrições);

$\phi_k$  = equações lineares (ou quase) de balanço de cada elemento do circuito

A equação pode, também, ser reescrita na forma matricial:

$$\begin{aligned} \min (M - \widehat{M})^T Q^{-1} (M - \widehat{M}) \\ \text{sujeito a: } A \cdot \widehat{M} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde:

$M$  = vetor contendo todas as medições;

$\widehat{M}$  = vetor contendo todas as medições reconciliadas;

$Q$  = matriz de variância/covariância das variáveis que tem em sua diagonal principal as incertezas elevadas ao quadrado ( $\sigma_i^2$ );

$A$  = matriz contendo os coeficientes das equações lineares (ou quase) de balanço do circuito (restrições).

Portanto, conclui-se ser necessária a minimização da soma dos erros quadráticos dos ajustes realizados, ponderados pelas incertezas de cada medição. É também obrigatório que todo elemento do circuito feche sua equação de balanço individualmente.

A metodologia mais comum utilizada em problemas semelhantes é a minimização de funções multivariáveis, sujeitas a restrições, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Sendo  $f(x,y)$  a função a ser minimizada e  $\varphi(x,y) = 0$  a equação de restrição ou constrangimento a ser obedecida, Lagrange define uma função auxiliar  $F(x,y,\lambda)$  tal que:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \quad (3.29)$$

onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

No ponto de mínimo (ou máximo) da função, as derivadas parciais da função em relação a  $\lambda$ ,  $x$  e  $y$  se anulam, gerando o seguinte sistema resolvível:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrange para encontrar o mínimo da função descrita pela Equação 3.27, gera-se a Equação 3.31.

$$\phi = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} (M_i - \widehat{M}_1)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \widehat{M}_j \quad (3.31)$$

Tal equação pode ser escrita na forma matricial, como é mostrado na Equação 3.32:

$$\phi = (M - \widehat{M})^T Q^{-1} (M - \widehat{M}) + 2\lambda^T A \widehat{M} \quad (3.32)$$

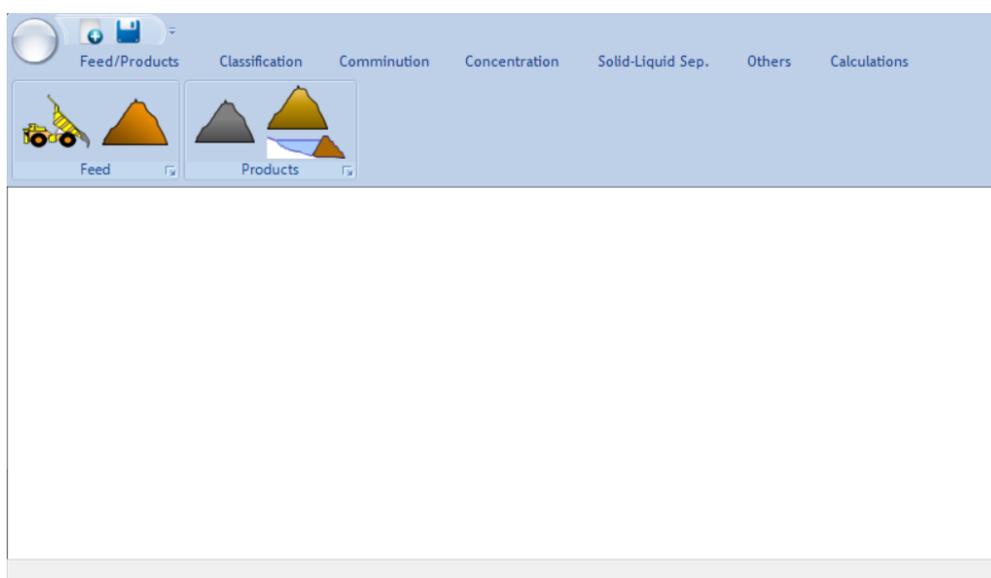
Com isto, é gerado o sistema determinado como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{M}_1} = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{M}_2} = 0 \\ \dots \frac{\partial \phi}{\partial \widehat{M}_N} = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_1} = 0; \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_k} = 0 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

De acordo com a formulação acima, a Equação 3.33 fornecerá um sistema de equações lineares de  $(m+k)$  equações e  $(m+k)$  incógnitas, podendo ser facilmente resolvido.

## 4. Metodologia

O *BalData* é um sistema para realização de cálculos de fechamento de balanço de massas e reconciliação de dados. Para o desenvolvimento do aplicativo, utilizou-se o programa *Microsoft Visual Studio* como compilador para a linguagem de programação C#. O sistema faz uso dos modelos empíricos apresentados na revisão bibliográfica. A Figura 4.1 apresenta a tela inicial do sistema, na aba de ícones de alimentação e produtos.

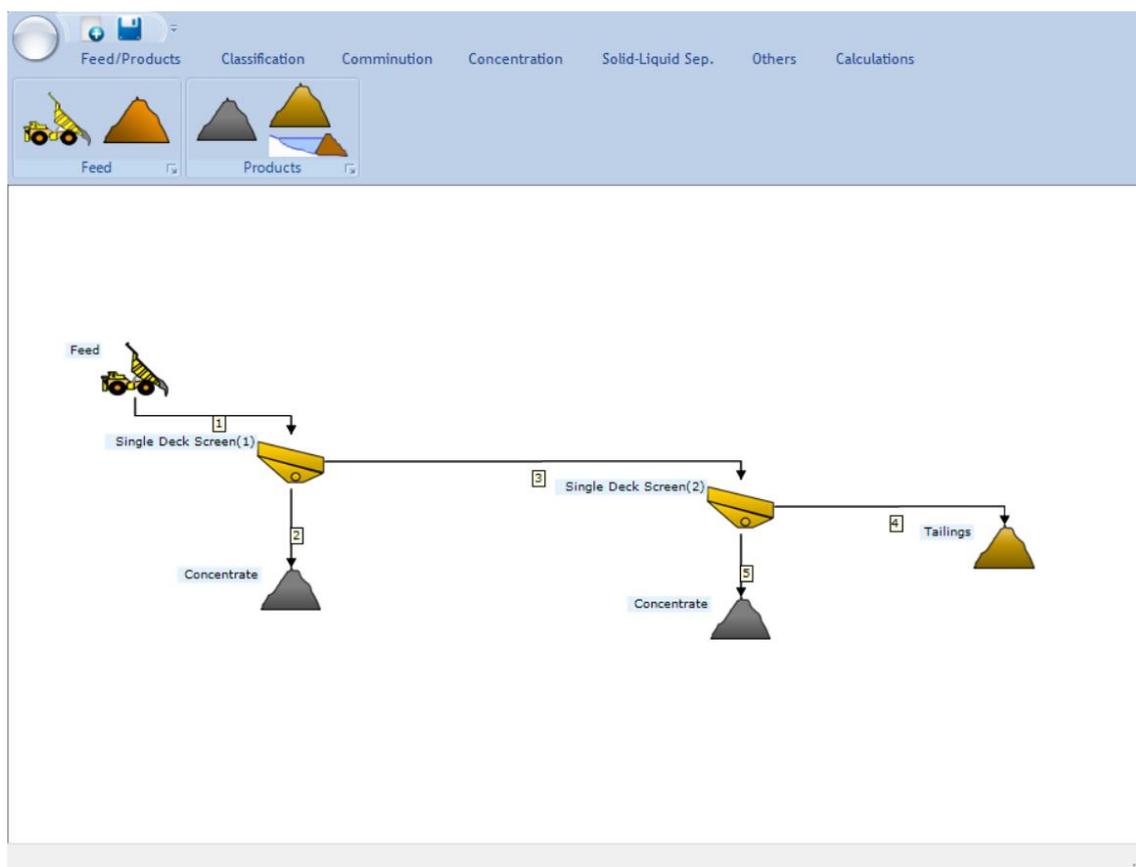


**Figura 4.1** – Tela inicial do sistema *BalData*

O funcionamento do sistema se dá por meio da construção de circuitos na área de trabalho, onde as unidades se conectam por meio de linhas que representarão os fluxos do circuito, sendo estas numeradas de forma automática.

Cada unidade pode representar uma entrada, saída ou nó do circuito, sendo os primeiros representados pelas unidades de alimentação e produtos. Os nós, representados pelas demais unidades, são numerados automaticamente, assim como os fluxos, em ordem de adição à tela de desenho.

A Figura 4.2 apresenta um circuito-exemplo fictício que será utilizado neste capítulo para algumas explicações relativas ao funcionamento do sistema.



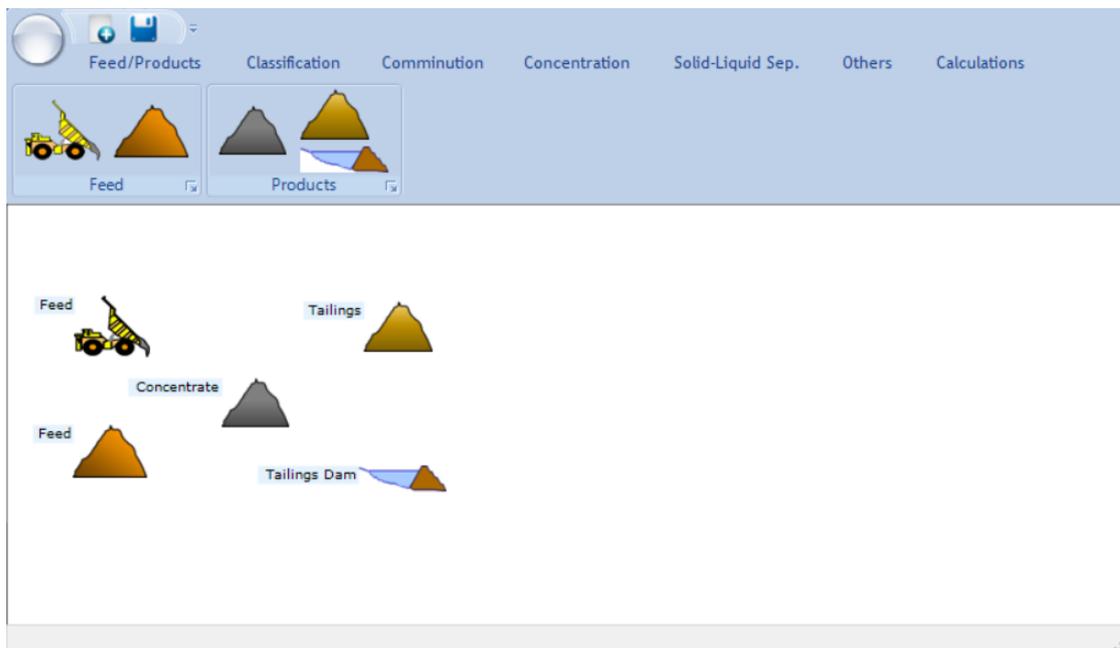
**Figura 4.2** – Circuito-exemplo montado no sistema

O circuito-exemplo apresenta duas peneiras como nós e também é composto por uma alimentação, três produtos e cinco fluxos.

Para que as unidades e dados do circuito sejam inseridos, podem ser utilizadas as diversas abas no menu, as quais estão separadas por tipo: alimentação e produtos (*Feed/Products*), classificação (*Classification*), cominuição (*Comminution*), concentração (*Concentration*), separação sólido-líquido (*Solid-Liquid Separation*) e outros (*Others*), como bombas, tanques, etc. Todas as abas e unidades presentes no sistema serão detalhadas nas seções a seguir.

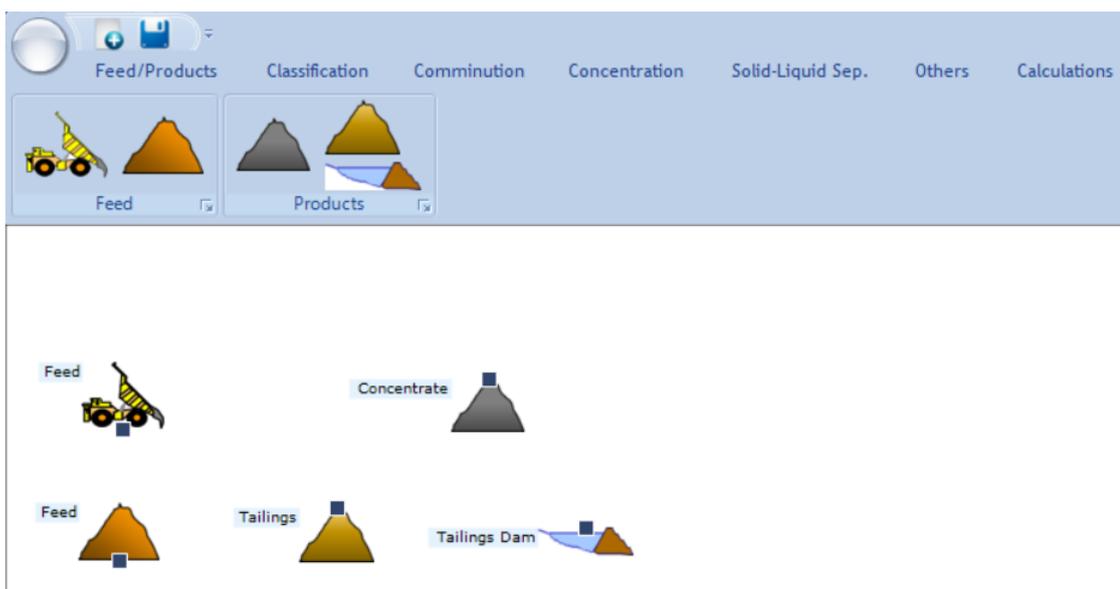
#### 4.1 Alimentação/Produtos

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades de alimentação e produtos. A Figura 4.3 exibe a aba de alimentação e produtos com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo dois ícones de alimentação (pilha e caminhão), uma pilha de concentrado e dois ícones representando rejeitos (pilha e barragem).



**Figura 4.3** – Tela exibindo os ícones da aba Feed/Products

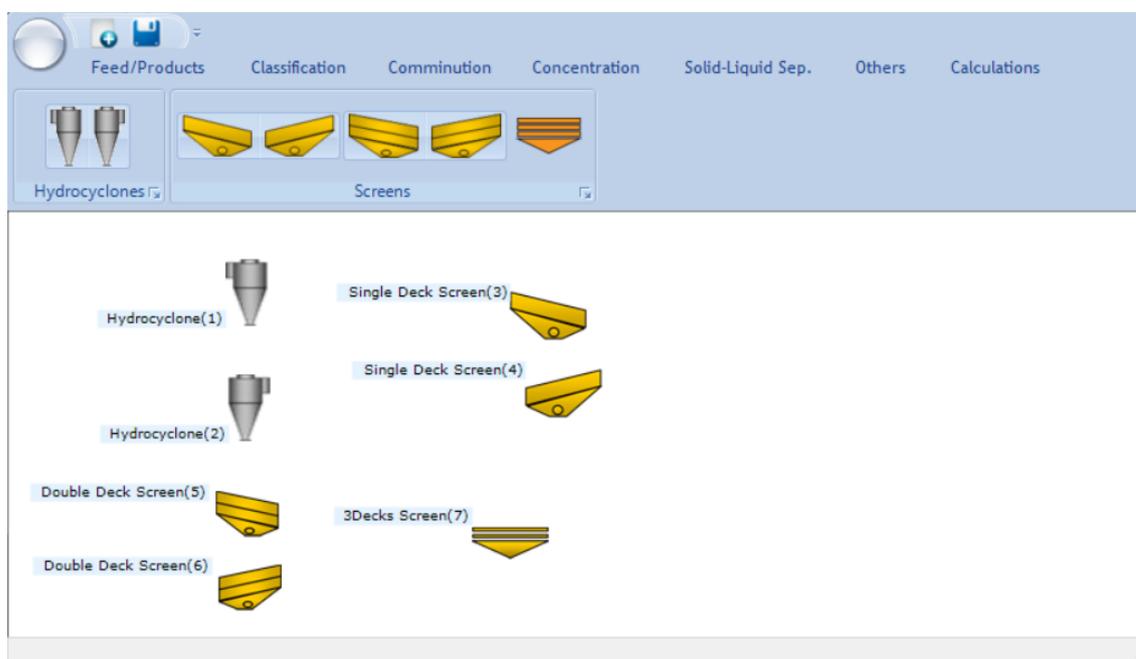
Os ícones de alimentação possuem apenas conectores para saída de fluxos, enquanto os ícones de produtos possuem apenas conectores de entrada. A Figura 4.4 mostra a posição dos conectores.



**Figura 4.4** – Tela exibindo conectores dos ícones da aba Feed/Products

## 4.2 Classificação

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades de classificação. Figura 4.5 exibe esta aba com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo dois ícones de hidrociclones, e cinco de peneiras, sendo duas de um deck, duas de dois decks e uma de três decks. Alguns destes ícones apresenta uma versão espelhada para otimização visual do fluxograma, caso necessário.



**Figura 4.5** – Tela exibindo os ícones da aba Classification

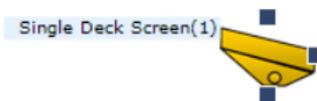
A Figura 4.6 mostra a posição dos conectores dos hidrociclones.



**Figura 4.6** – Conectores de um hidrociclone

O hidrociclone possui três conectores: um lateral, indicando a alimentação, um superior, indicando o *overflow* e um inferior, indicando o *underflow*.

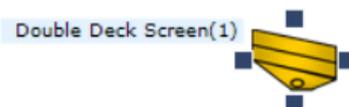
A Figura 4.10 mostra a posição dos conectores das peneiras de um deck.



**Figura 4.7** – Conectores de uma peneira de um deck

A peneira de um deck possui três conectores: um superior, indicando a alimentação, um lateral, indicando o *oversize* e um inferior, indicando o *undersize*.

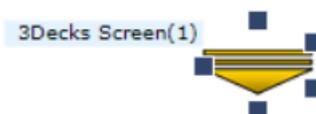
A Figura 4.8 mostra a posição dos conectores das peneiras de dois decks.



**Figura 4.8** – Conectores de uma peneira de dois decks

A peneira de dois decks possui quatro conectores: um superior, indicando a alimentação, um inferior, indicando o *undersize*, e dois laterais, sendo um à esquerda, indicando o *oversize*, e um à direita, indicando o primeiro *undersize*.

A Figura 4.9 mostra a posição dos conectores das peneiras de três decks.

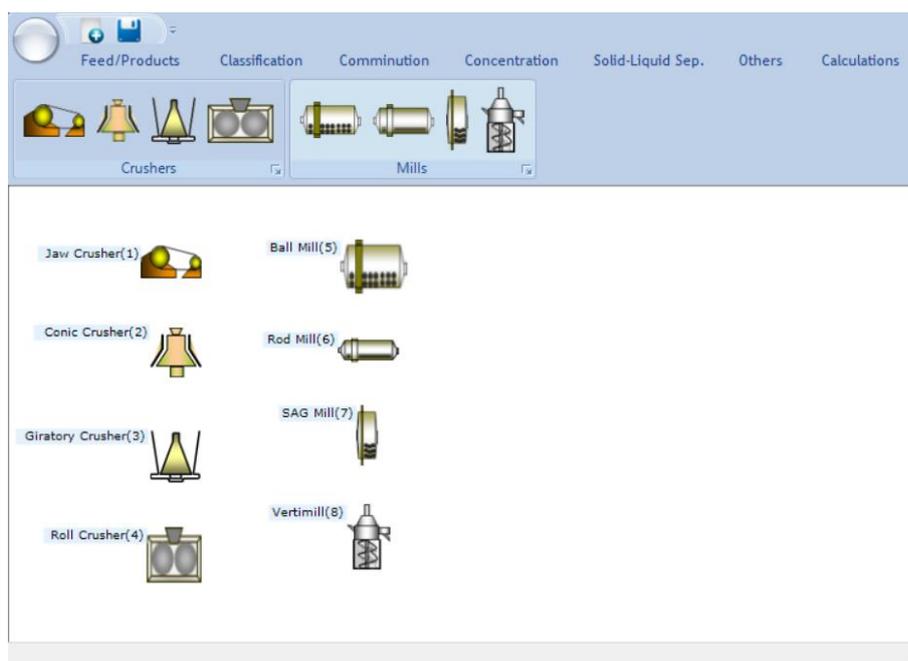


**Figura 4.9** – Conectores de uma peneira de três decks

A peneira de três decks possui cinco conectores: um lateral à esquerda, indicando a alimentação, um inferior, indicando o *undersize*, um superior, indicando o *oversize*, e outros dois laterais à direita, sendo um superior, indicando o segundo *oversize*, e um inferior, indicando o terceiro *oversize*.

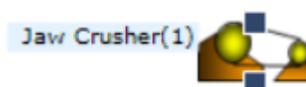
### 4.3 Cominuição

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades de cominuição. A Figura 4.10 exibe a aba de cominuição com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo quatro ícones de britagem (mandíbulas, cônico, giratório e de rolos) e quatro ícones representando moinhos (de bolas, de barras, SAG e vertical).



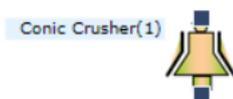
**Figura 4.10** – Tela exibindo os ícones da aba Comminution

A Figura 4.11 mostra a posição dos conectores do britador de mandíbulas.

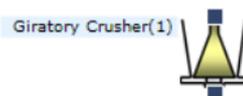


**Figura 4.11** – Conectores de um britador de mandíbulas

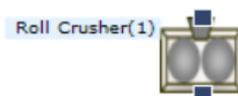
O britador de mandíbulas possui dois conectores: um superior, indicando a alimentação e um inferior, indicando o produto. Este posicionamento de conectores também foi adotado para os britadores cônico (Figura 4.12), giratório (Figura 4.13) e de rolos (Figura 4.14), e para o moinho vertical (Figura 4.15).



**Figura 4.12** – Conectores de um britador cônico



**Figura 4.13** – Conectores de um britador giratório



**Figura 4.14** – Conectores de um britador de rolos



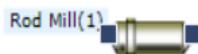
**Figura 4.15** – Conectores de um moinho vertical

A Figura 4.16 mostra a posição dos conectores do moinho de bolas.

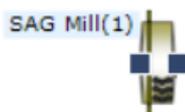


**Figura 4.16** – Conectores de um moinho de bolas

O moinho de bolas possui dois conectores: um à esquerda, indicando a alimentação e um à direita, indicando o produto. Este posicionamento de conectores também foi adotado para os moinhos de barras (Figura 4.17) e SAG (Figura 4.18).



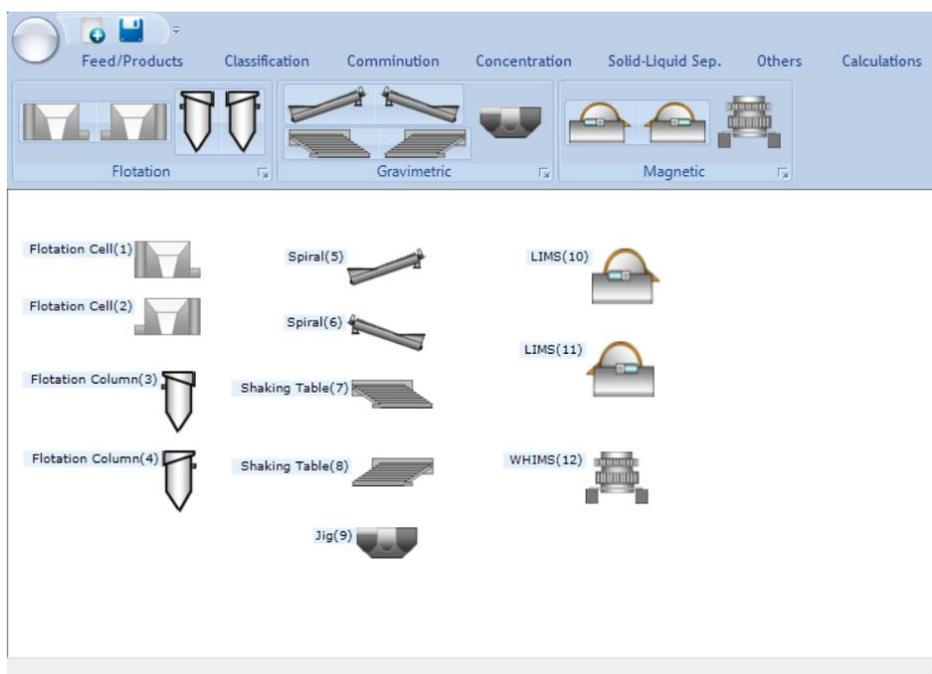
**Figura 4.17** – Conectores de um moinho de barras



**Figura 4.18** – Conectores de um moinho SAG

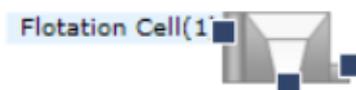
#### 4.4 Concentração

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades de concentração. A Figura 4.19 exibe a aba de concentradores com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo dois ícones de flotação (célula e coluna), três unidades de concentração gravítica (espiral, mesa e jig) e duas unidades representando concentradores magnéticos (LIMS e WHIMS).



**Figura 4.19** – Tela exibindo os ícones da aba Concentration

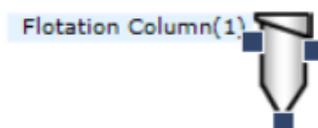
A Figura 4.20 mostra a posição dos conectores das células de flotação.



**Figura 4.20** – Conectores de uma célula de flotação

A célula de flotação possui três conectores: um lateral à esquerda, indicando a alimentação, um inferior, indicando a espuma e um à direita, indicando o afundado.

A Figura 4.21 mostra a posição dos conectores das colunas de flotação.



**Figura 4.21** – Conectores de uma coluna de flotação

A coluna de flotação possui três conectores: um lateral à esquerda, indicando a alimentação, um à direita, indicando a espuma e um inferior, indicando o afundado.

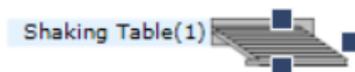
A Figura 4.22 mostra a posição dos conectores das espirais.



**Figura 4.22** – Conectores de uma espiral

A espiral possui três conectores: um lateral à direita, indicando a alimentação, um à esquerda, indicando o rejeito e um inferior, indicando o concentrado.

A Figura 4.23 mostra a posição dos conectores das mesas concentradoras.



**Figura 4.23** – Conectores de uma mesa concentradora

A mesa concentradora possui três conectores: um superior, indicando a alimentação, um à direita, indicando o rejeito e um inferior, indicando o concentrado.

A Figura 4.24 mostra a posição dos conectores dos jiges.



**Figura 4.24** – Conectores de um jig

O jig possui três conectores: um superior, indicando a alimentação, um à direita, indicando o rejeito e um inferior, indicando o concentrado.

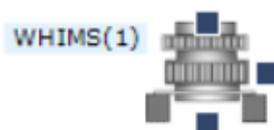
A Figura 4.25 mostra a posição dos conectores dos LIMS, separadores magnéticos de baixa intensidade.



**Figura 4.25** – Conectores de um LIMS

O LIMS possui três conectores: um à esquerda, indicando a alimentação, um à direita, indicando o concentrado e um inferior, indicando o rejeito.

A Figura 4.26 mostra a posição dos conectores dos WHIMS, separadores magnéticos a úmido de alta intensidade.

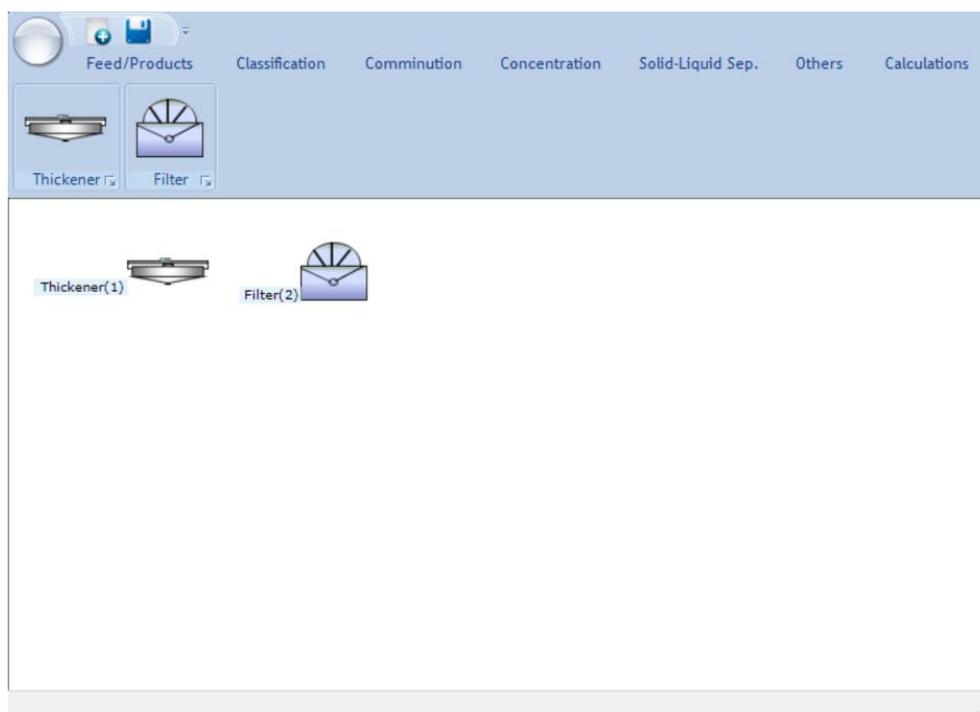


**Figura 4.26** – Conectores de um WHIMS

O WHIMS possui três conectores: um superior, indicando a alimentação, um à direita, indicando o rejeito e um inferior, indicando o concentrado.

#### 4.5 Separação Sólido-Líquido

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades de separação sólido-líquido. A Figura 4.27 exibe a aba de unidades de separação sólido-líquido com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo uma unidade de espessamento e outra de filtração.



**Figura 4.27** – Tela exibindo os ícones da aba Solid-Liquid Sep.

A Figura 4.28 mostra a posição dos conectores do espessador.



**Figura 4.28** – Conectores de um espessador

O espessador possui três conectores: um à esquerda, indicando a alimentação, um superior, indicando o *overflow* e um inferior, indicando o *underflow*.

A Figura 4.29 mostra a posição dos conectores do filtro.

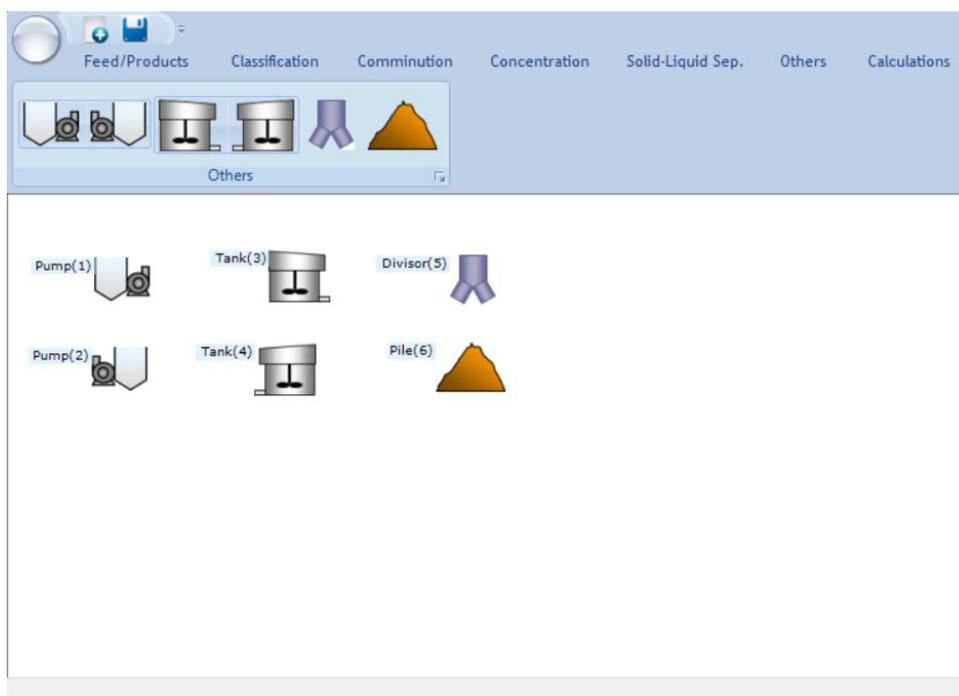


**Figura 4.29** – Conectores de um filtro

O filtro possui três conectores: um à esquerda, indicando a alimentação, um à direita, indicando a torta de filtragem e um inferior, indicando o filtrado.

## 4.6 Outros

Esta é a aba onde se encontram os ícones para as unidades não categorizadas. A Figura 4.30 exibe a aba com todos os seus ícones na área de desenho de fluxogramas, contendo ícones para bomba, tanque, divisor de fluxos e pilha.



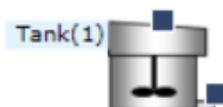
**Figura 4.30** – Tela exibindo os ícones da aba Others

A Figura 4.31 mostra a posição dos conectores da bomba.



**Figura 4.31** – Conectores de uma bomba

A bomba possui dois conectores: um superior, indicando a alimentação, e um à direita, indicando a saída. Este posicionamento de conectores também foi adotado para o tanque (Figura 4.32).



**Figura 4.32** – Conectores de um tanque

A Figura 4.33 mostra a posição dos conectores do divisor de fluxos.



**Figura 4.33** – Conectores de um divisor de fluxos

O divisor possui três conectores: um superior, indicando a alimentação e dois inferiores, indicando as saídas.

A Figura 4.34 mostra a posição dos conectores da pilha.

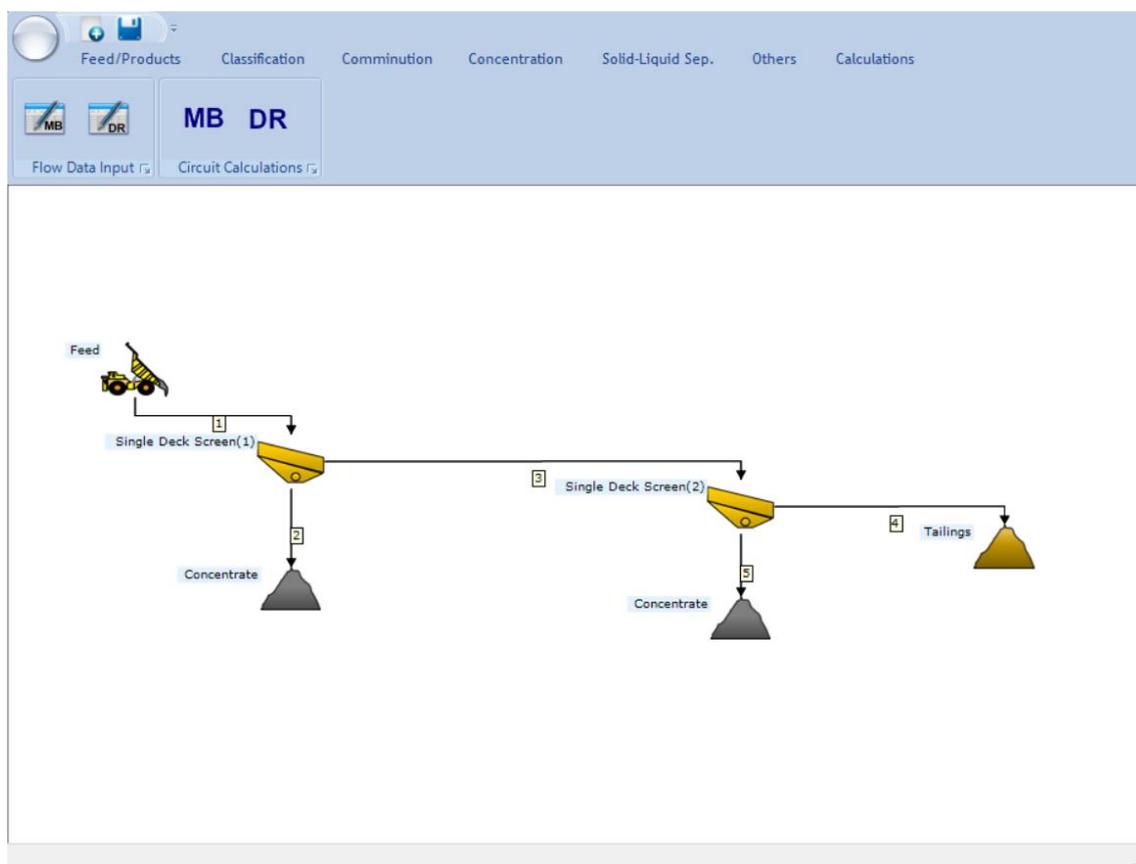


**Figura 4.34** – Conectores de uma pilha

A pilha possui dois conectores: um à esquerda, indicando a entrada, e um à direita, indicando a saída.

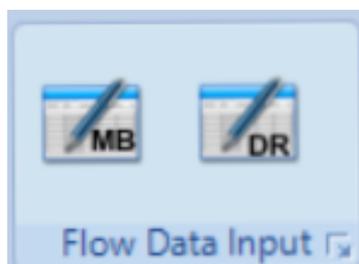
## 4.7 Cálculos

A Figura 4.35 mostra a tela do sistema com o circuito-exemplo, na aba de cálculos “*Calculations*”.



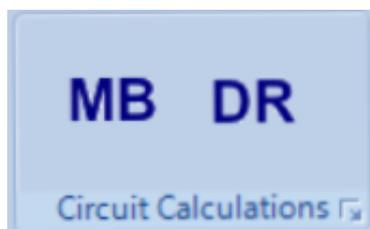
**Figura 4.35** – Tela do sistema mostrando o circuito-exemplo na aba de cálculos "Calculations"

Na aba de cálculos mostrada na Figura 4.35, os dados de cada fluxo do circuito podem ser inseridos clicando em um dos dois primeiros ícones inseridos no grupo *Flow Data Input*: um para o módulo de balanço de massas, outro para reconciliação de dados (Figura 4.36).



**Figura 4.36** – Botões do grupo *Flow Data Input*: balanço de massas (esquerda) e reconciliação de dados (direita)

Para que o sistema exiba os resultados de fechamento de balanço ou de reconciliação de dados, basta clicar nos respectivos botões do grupo *Circuit Calculations* (Figura 4.37).



**Figura 4.37** – Botões do grupo *Circuit Calculations*: balanço de massas (esquerda) e reconciliação de dados (direita)

A seguir, serão explicados com maior detalhe os módulos de cálculo existentes no sistema.

#### 4.7.1 Módulo Balanço de Massas

O módulo de balanço de massas (MB) permite o fechamento do balanço de um circuito a partir de dados de amostragem como taxa de sólidos, teores, granulometria, %sólidos. O cálculo deste fechamento se dá através do método de FREU (1983), detalhado na Seção 3.4.

A Figura 4.38 exibe a janela de entrada de dados deste módulo.

Flow	Grade	Reference	Main	Mass
1	30	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="radio"/>	161
2	55	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	
3	20	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	
4	25	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	
5	10	<input type="checkbox"/>	<input type="radio"/>	

OK

**Figura 4.38** – Janela de inserção de dados dos fluxos do módulo de balanço de massas

A janela de inserção de dados dos fluxos neste módulo apresenta 5 colunas. A primeira exibe os fluxos, identificados por sua numeração. Como isto varia de acordo com cada circuito, as linhas são geradas automaticamente após a construção do circuito na área de desenho.

A segunda coluna é o espaço onde devem ser inseridos os dados de amostragem de cada fluxo, como teor, dados de granulometria, %sólidos, etc. É importante destacar que deve ser utilizado o mesmo tipo de dado para todos os fluxos para um único balanço.

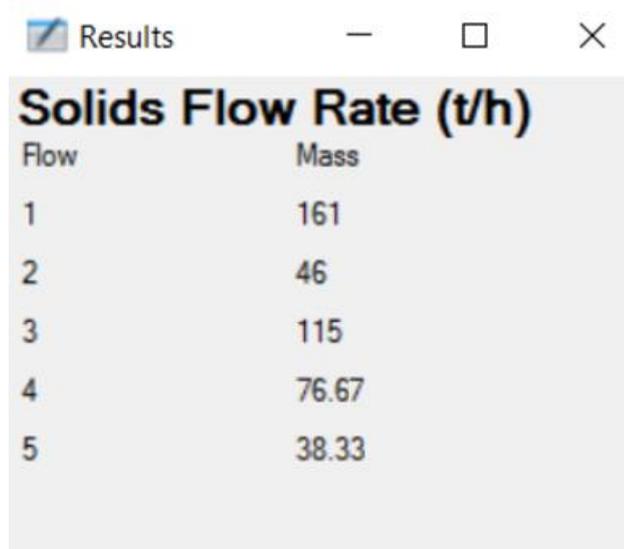
A terceira coluna apresenta *checkboxes* que devem ser marcadas caso algum fluxo não tenha sido amostrado.

Na quarta coluna, deve-se identificar o fluxo principal do circuito. Isto é, o fluxo cuja medida de taxa de sólidos (t/h) será utilizada como base para os cálculos dos valores dos demais fluxos.

Na quinta coluna, o valor da medida de taxa de sólidos do fluxo de referência deve ser inserido. Tanto para estes quanto para os dados de teor, os campos de preenchimento aceitam somente algarismos e suas pontuações, sendo as casas decimais separadas por pontos.

Uma vez inseridos todos os dados, o botão OK deve ser clicado para que estes sejam armazenados no banco de dados e os cálculos possam ser realizados.

A Figura 4.39 exibe a tela de resultados para o circuito-exemplo.



Flow	Mass
1	161
2	46
3	115
4	76.67
5	38.33

**Figura 4.39** – Janela de resultados do módulo de balanço de massas

Nesta tela, são exibidos os números dos fluxos na primeira coluna e, na segunda coluna, as massas calculadas para cada um.

#### 4.7.2 Módulo Reconciliação de Dados

O módulo de reconciliação de dados (DR) realiza a reconciliação de dados de taxa de sólidos de acordo com o erro associado ao respectivo fluxo. O sistema recebe os dados de erro para cada fluxo e também pode receber os dados de massa, ou obtê-los a partir do fechamento de balanço no próprio sistema. O cálculo deste módulo se dá através do método de PEREIRA ET AL. (2005), detalhado na Seção 3.5.

A Figura 4.40 exibe a janela de entrada de dados deste módulo.

Flow	Mass	Error
1	161	0.05
2	79	0.01
3	80	0.01
4	20	0.1
5	63	0.05

*Fill mass data*

**Figura 4.40** – Janela de inserção de dados dos fluxos do módulo de reconciliação de dados

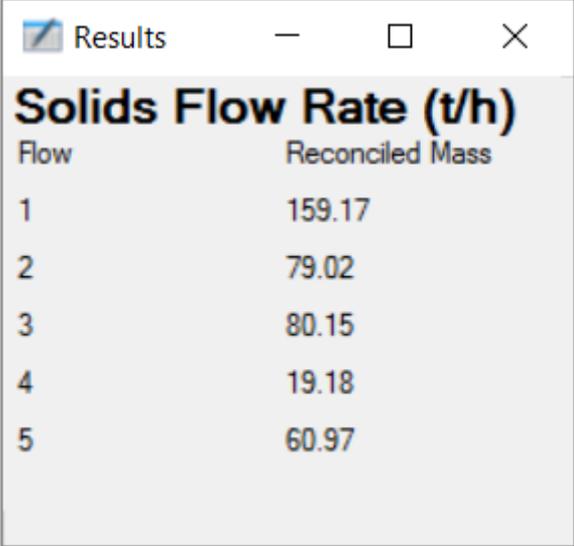
A janela de inserção de dados dos fluxos neste módulo apresenta 3 colunas. A primeira exibe os fluxos, identificados por sua numeração. Assim como no módulo de balanço de massas, as linhas são geradas automaticamente após a construção do circuito na área de desenho.

A segunda coluna é o espaço onde devem ser inseridos os dados de taxa de sólidos para todos os fluxos. Caso o sistema já não tenha gerados estes dados através do módulo de balanço de massas, estes podem ser preenchidos mediante marcação da *checkbox* “*Fill mass data*”, situada na parte inferior da janela.

Na terceira coluna, os valores de erro das medidas de taxa de sólidos de cada fluxo devem ser inseridos. Tanto para estes quanto para os dados de teor, os campos de preenchimento aceitam somente algarismos e suas pontuações, sendo as casas decimais separadas por pontos. Usualmente, as medidas de erro se dão na forma percentual. Contudo, para este sistema, os valores de erro devem ser inseridos na forma decimal.

Uma vez inseridos todos os dados, o botão OK deve ser clicado para que estes sejam armazenados no banco de dados e os cálculos possam ser realizados.

A Figura 4.41 exibe a tela de resultados para o circuito-exemplo.



The screenshot shows a window titled "Results" with a table of data. The table has two columns: "Flow" and "Reconciled Mass". The data is as follows:

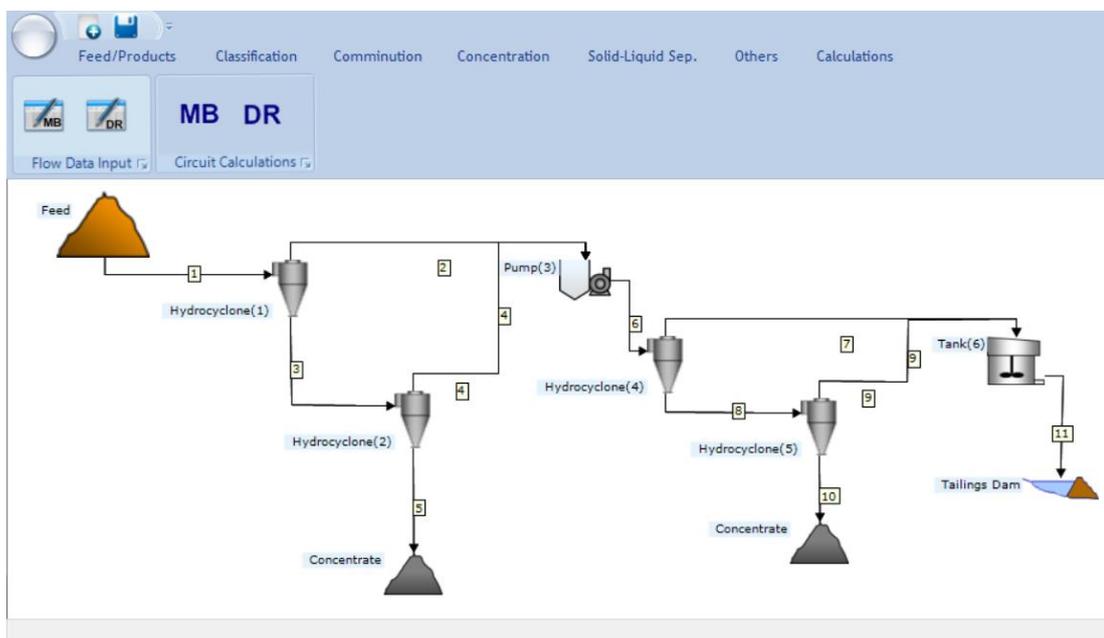
Flow	Reconciled Mass
1	159.17
2	79.02
3	80.15
4	19.18
5	60.97

**Figura 4.41** – Janela de resultados do módulo de reconciliação de dados

Nesta tela, são exibidos os números dos fluxos na primeira coluna e, na segunda coluna, as massas reconciliadas de cada um.

## 5. Resultados e Discussão

Para testar os cálculos, foram utilizados dados de amostragem de um circuito de ciclonagem de uma usina de fosfato real, apresentado na Figura 5.1.



**Figura 5.1** – Tela do sistema mostrando um circuito de ciclonagem de uma usina de fosfato na aba de inserção de dados e cálculos

O circuito consiste em 4 etapas de ciclonagem, possui apenas um ponto de alimentação e três produtos. São, ao todo, 6 nós e 11 fluxos.

Para geração de dados e teste dos cálculos do módulo BM, três balanços de massas foram realizados utilizando como referência dados de teor ( $P_2O_5$  e  $Fe_2O_3$ ) e granulometria (%passante em 0,037mm) provenientes de amostragem na usina, mostrados na Tabela 5.1, em forma de porcentagem. O fluxo 11 não foi amostrado. O fluxo de alimentação do circuito (Fluxo 1) foi adotado como fluxo principal, sendo sua taxa de sólidos 1113,66t/h.

**Tabela 5.1** – Dados de amostragem do circuito de ciclonação utilizados nos balanços de massas

Fluxo	Dados de referência (%)		
	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	-0,037mm
1	10,57	15,35	31,01
2	8,34	17,17	47,78
3	13,99	12,38	9,13
4	7,28	19,88	14,41
5	13,90	12,00	3,81
6	7,96	17,60	49,85
7	7,08	19,13	71,90
8	8,98	16,33	34,52
9	7,27	20,50	62,88
10	9,62	16,94	25,77
11	N/A	N/A	N/A

Os resultados dos três balanços de massas são apresentados na Tabela 5.2.

**Tabela 5.2** – Resultados dos balanços de massas para o circuito de ciclonação

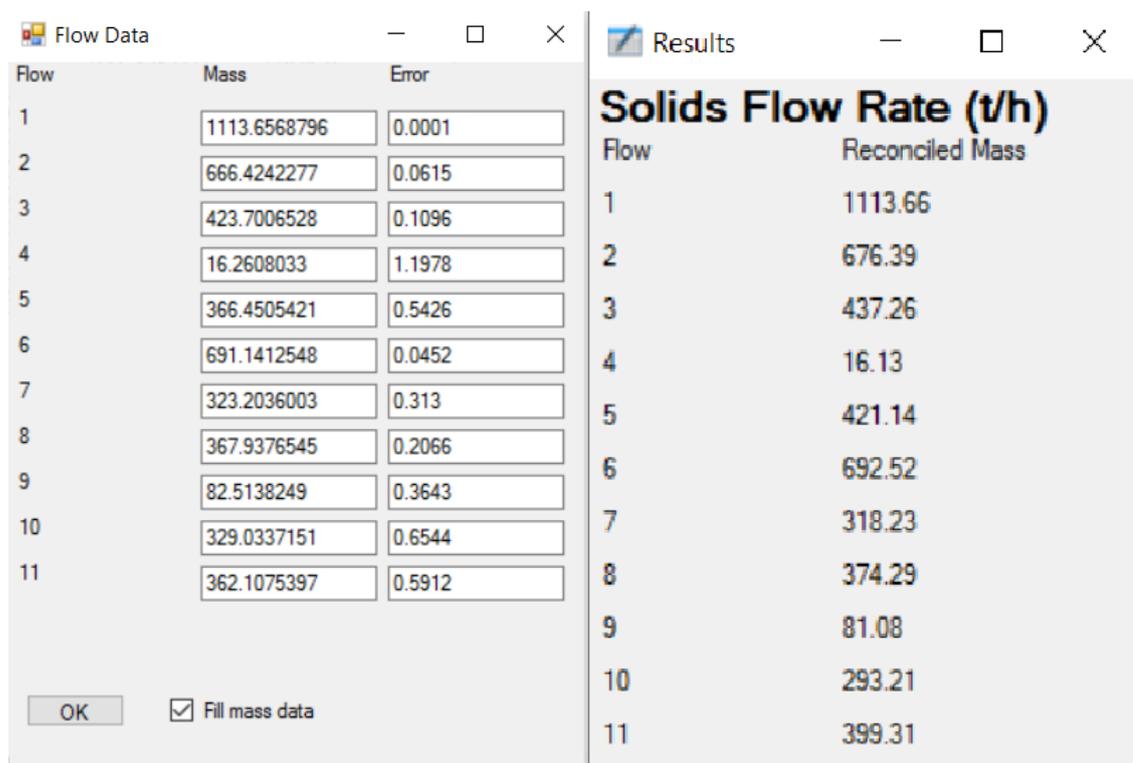
Fluxo	Taxa de Sólidos (t/h)		
	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	-0,037mm
1	1113,66	1113,66	1113,66
2	665,18	687,50	646,59
3	444,89	427,32	398,89
4	5,61	24,71	18,47
5	444,81	399,94	254,61
6	701,58	698,66	673,19
7	376,64	316,89	276,08
8	324,94	381,77	397,10
9	88,50	65,41	93,63
10	236,45	447,18	303,47
11	465,13	251,48	369,71

Pode ser observado que os balanços de massas realizados com dados de referência distintos retornaram valores extremamente variáveis. Sendo assim, foi realizado um estudo estatístico com estes dados, cujos resultados estão apresentados na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3** – Resultados do tratamento estatístico dos dados gerados nos balanços de massas

<b>Fluxo</b>	<b>Média</b>	<b>Variância</b>	<b><math>\sigma</math></b>	<b>Erro</b>	<b>Máximo</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Erro/Média</b>
<b>1</b>	1113,66	0,000	0,000	0,000	1113,66	1113,66	0,00%
<b>2</b>	666,42	279,752	20,485	40,970	707,39	625,45	6,15%
<b>3</b>	423,70	359,150	23,210	46,421	470,12	377,28	10,96%
<b>4</b>	16,26	63,228	9,739	19,477	35,74	-3,22	119,78%
<b>5</b>	366,45	6589,799	99,422	198,844	565,29	167,61	54,26%
<b>6</b>	691,14	162,596	15,617	31,234	722,38	659,91	4,52%
<b>7</b>	323,20	1705,172	50,574	101,149	424,35	222,06	31,30%
<b>8</b>	367,94	963,498	38,016	76,033	443,97	291,90	20,66%
<b>9</b>	82,51	150,585	15,029	30,058	112,57	52,46	36,43%
<b>10</b>	329,03	7728,019	107,666	215,333	544,37	113,70	65,44%
<b>11</b>	362,11	7637,220	107,032	214,064	576,17	148,04	59,12%

Os dados de média e erro/média foram utilizados como entrada para os cálculos de reconciliação através do método desenvolvido por PEREIRA *et al.* (2005). A Figura 5.2 exibe as telas de entrada de dados e de resultados.



**Figura 5.2** – Telas do módulo DR para o circuito de ciclonação de fosfato: dados de entrada (esquerda) e resultados da reconciliação de dados (direita)

Os resultados de taxa de sólidos se encaixam nos intervalos de confiança de 95% determinados para cada fluxo no estudo estatístico.

### 5.1 Detecção de Erros Grosseiros

Certos eventos indesejáveis em usinas podem acabar por gerar informações levando a erros grosseiros nas amostragens e, conseqüentemente, nos fechamentos de balanços de massas. Tais erros grosseiros consistem em medições que se encontram fora dos limites do intervalo de confiança do valor de um determinado fluxo  $[-2\sigma; +2\sigma]$ .

Para testar a metodologia de reconciliação de dados aplicada visando à correção de tais erros, foi testado o fluxo 4, que tem como limites do intervalo os valores de 35,74 e -3,22. Foi atribuído ao mesmo um valor de 40, fora dos limites.

A Figura 5.3 mostra a tela com os dados de entrada para a reconciliação, com destaque para o valor modificado do fluxo 4, mantendo os valores originais dos demais fluxos.

Flow	Mass	Error
1	1113.6568796	0.0001
2	666.4242277	0.0615
3	423.7006528	0.1096
4	40	1.1978
5	366.4505421	0.5426
6	691.1412548	0.0452
7	323.2036003	0.313
8	367.9376545	0.2066
9	82.5138249	0.3643
10	329.0337151	0.6544
11	362.1075397	0.5912

OK  Fill mass data

**Figura 5.3** – Tela para inserção de dados de reconciliação para o circuito com modificação do valor do fluxo 4

Após a inserção dos dados, foi realizado o cálculo de reconciliação e seu resultado é exibido na Figura 5.4.

Results	
Solids Flow Rate (t/h)	
Flow	Reconciled Mass
1	1113.66
2	671.12
3	442.54
4	26.37
5	416.17
6	697.49
7	321.31
8	376.17
9	81.06
10	295.12
11	402.37

**Figura 5.4** – Tela de resultados de reconciliação para o circuito com modificação do valor do fluxo 4

Como pode ser visto, a reconciliação retorna dados contidos no intervalo de confiança de 95%, corrigindo o valor do fluxo 4 e provando a eficácia do método para erros únicos.

O mesmo teste foi repetido nos demais fluxos, com exceção do fluxo 1, que possui um erro praticamente nulo. Os resultados são mostrados na Tabela 5.4.

**Tabela 5.4 – Resultados dos testes de erros grosseiros**

Fluxo	Máximo	Mínimo	Valor de Entrada	Valor Reconciliado
2	707,39	625,45	600	651,13
3	470,12	377,28	500	453,10
4	35,74	-3,22	40	26,37
5	565,29	167,61	150	401,41
6	722,38	659,91	730	712,73
7	424,35	222,06	450	343,21
8	443,97	291,9	280	311,46
9	112,57	52,46	115	110,30
10	544,37	113,7	100	195,07
11	576,17	148,04	600	409,60

## 6. Conclusão

Este trabalho apresentou um sólido sistema computacional utilizando métodos consistentes para fechamento de balanços de massas e reconciliação de dados. Este sistema pode ser utilizado em diversas usinas de beneficiamento mineral diariamente, para corrigir indicadores de dados históricos e, também, para calcular mais precisamente dados de fluxos não amostrados.

O sistema *BalData* possui uma interface intuitiva, amigável e parâmetros fáceis de serem mensurados, transformando estas informações em resultados confiáveis, necessários para o fechamento de balanços e ajuste de dados de circuitos inseridos no sistema.

Com o estudo estatístico, é possível que sejam calculados balanços de massas utilizando valores randômicos dentro dos intervalos determinados. Além disto, a determinação de um intervalo de confiança permite a detecção e correção de erros grosseiros únicos através da aplicação do método de reconciliação de dados embutido no sistema, como foi mostrado durante o desenvolvimento dos testes do sistema com dados industriais.

## 7. Sugestões para Trabalhos Futuros

- Realização de aprimoramento nos cálculos de balanço de massas, introduzindo alguma metodologia mais robusta (HOUDOIN & MAKNI, 1996), incorporando métodos de fechamento *online* (MAKNI et al., 1995);
- Aprimoramento do sistema para que seja possível sua integração com outros sistemas para coleta e envio de dados;
- Realização de metodologia para fechamento dinâmico de balanço;
- Desenvolvimento de métodos para detecção e correção de múltiplos erros grosseiros.

## 8. Referências Bibliográficas

CUNHA, F. T. A. Balanço de Massas, Monografia de Curso de Especialização em Engenharia de Recursos Minerais, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

CUTTING, G.W. Estimation of interlocking mass-balances on complex mineral beneficiation plants, *International Journal of Mineral Processing*, volume 3, p207-218, 1976.

FREW, J.A. Computer-aided design of sampling schemes, *International Journal of Mineral Processing*, volume 11, p255-265, 1983.

HOUDOIN, D., MAKNI, S. Real-time reconciliation of mineral processing plant data using bilinear material balance equations coupled to empirical dynamic models, *International Journal of Mineral Processing*, volume 48, p245-264, 1996.

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Apostila de Laboratório de Física. Disponível em: <[http://www.fis.ita.br/labfis24/erros/errostextos/teor\\_erros1.htm](http://www.fis.ita.br/labfis24/erros/errostextos/teor_erros1.htm)>. Acesso em janeiro de 2017.

MAKNI, S., HOUDOIN, D., BAZIN, C., A recursive node imbalance method incorporating a model of flowrate dynamics for on-line material balance of complex flowsheets. *Minerals Engineering*, Vol. 8, No. 7, p753-766, 1995.

MONTGOMERY, D.C., RUNGER, G.C. *Applied statistics and probability for engineers*. 6<sup>th</sup> edition, New York, John Wiley and Sons, 2013. 811p.

OLIVEIRA, M.L.M. Método de Estimativa de Balanços de Massa e Metalúrgico. Campinas: Faculdade de Engenharia Química, Unicamp, 1997. 243p. (Tese, Doutorado, Sistemas de Processos Químicos e Informática).

PEREIRA, M.V.L, NICOLATO, R.D.S, GALÉRY, R. Balanço de massas: desenvolvimento de sistemas robustos para a reconciliação de dados. XXI ENTMME. Novembro, 2005, Natal/RN.

SMITH, H.W.; FREW, J.A. Design and analysis of sampling experiments - a sensitivity approach. International Journal of Mineral Processing, volume 11, p267-284, 1983.

VALADÃO, G.E.S., MONTENEGRO, L.C.M., GALERY, R. Balanço de Materiais. In: VALADÃO, G.E.S., ARAÚJO, A.C. Introdução ao Tratamento de Minérios, 1 reimpr., Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012. 234p.

WILLS, B. A.; NAPIER-MUNN, T.J. Mineral Processing Technology: an introduction to the practical aspects of ore treatment and mineral recovery. 2006, Oxford.

ZHAO, Y.H., SHAO, Z.J. Steady data reconciliation and gross error detection based on the assumption of bounded error distribution, Proceedings of 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics (IEEE Cat. No.04EX826), 2004, pp. 1696-1700 vol.3.