UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NUCLEAR

Aplicação de Métodos Autorregressivos e Coeficientes de Lyapunov para Estudos de Instabilidades em Reatores Nucleares

Wilmer Aruquipa Coloma

BELO HORIZONTE
Fevereiro, 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NUCLEAR

Aplicação de Métodos Autorregressivos e Coeficientes de Lyapunov para Estudos de Instabilidades em Reatores Nucleares

Wilmer Aruquipa Coloma

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ciências e Técnicas Nucleares da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências e Técnicas Nucleares

Área de Concentração: Engenharia Nuclear e da Energia
Orientadora: Dra. Antonella Lombardi Costa
Coorientadora: Dra. Claubia Pereira Bezerra Lima

BELO HORIZONTE
Fevereiro, 2017

Aruquipa Coloma, Wilmer.
A794a Aplicação de métodos autorregressivos e coeficientes de Lyapunov para estudos de instabilidades em reatores nucleares [manuscrito] / Wilmer Aruquipa Coloma. - 2017.
95 f., enc.: il.

Orientadora: Antonella Lombardi Costa.
Coorientadora: Claubia Pereira Bezerra Lima.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Anexos: f. 89-95.

Bibliografia: f. 86-88.

1. Engenharia nuclear - Teses. 2. Reatores nucleares - Teses. 3. Reatores a água fervente - Teses. 4. Liapunov, Funções de - Teses. 5. MATLAB (Programa de computador) - Teses. I. Costa, Antonella Lombardi. II. Lima, Cláubia Pereira Bezerra. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.039(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TÉCNICAS NUCLEARES

PCTN

FOLHA DE APROVAÇÃO

Aplicação de Métodos Autorregressivos e Coeficientes de Liapunov para Estudos de Instabilidade em Reatores Nucleares

WILMER ARUQUIPA COLOMA

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em CIÊNCIAS E TÉCNICAS NUCLEARES, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em CIÊNCIAS E TÉCNICAS NUCLEARES, área de concentração ENGENHARIA NUCLEAR E DA ENERGIA.

Aprovada em 15 de fevereiro de 2017, pela banca constituída pelos membros:

Profa. Antonella Lombardi Costa - Orientadora
Departamento de Engenharia Nuclear - UFMG

Profa. Cláubia Pereira Bezerra Lima - Coorientadora
Departamento de Engenharia Nuclear - UFMG

Dr. Marcelo Antônio Veloso
CDTN/CNEN

Prof. Clarysson Alberto Mello da Silva
Departamento de Engenharia Nuclear - UFMG

Dr. Fernando Pereira de Faria
Departamento de Engenharia Nuclear

Belo Horizonte, 15 de fevereiro de 2017.

Dedico a Viviana pelo apoio
incondicional, força e incentivo sem igual.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por todo o apoio e o amor.

À minha orientadora Profª Antonella, por sua orientação e por toda ajuda.

À minha coorientadora Profª Claubia pela orientação.

Aos membros da banca por seu tempo e valiosa contribuição.

À CAPES pelo apoio financeiro a mim e ao meu programa, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

RESUMO

Os reatores nucleares são suscetíveis a instabilidade, provocando oscilações na potência do reator em regiões de trabalho específicas caracterizadas por determinados valores de potência e vazão de refrigerante. Durante o *startup* do reator, existe uma probabilidade maior de que estas regiões de instabilidade estejam presentes; outra razão pode ser devido a processos transitórios em alguns parâmetros do reator. A análise da evolução temporal da potência revela um processo estável ou instável após a perturbação em um reator de água leve do tipo BWR (Boiling Water Reactor) – Reator de Água Fervente. Neste trabalho, o problema da instabilidade foi abordado de duas formas. A primeira forma é baseada no modelo ARMA (*Autoregressive Moving Average models*). Este modelo foi utilizado para calcular a razão de decaimento, chamada de *Decay Ratio* (DR), e frequência natural (NF) das oscilações, parâmetros que indicam se o um sinal de potência é estável ou não. Neste sentido, foi desenvolvido o código DRARMA. Na segunda forma, analisam-se os problemas de instabilidade utilizando os conceitos clássicos de sistemas não lineares, como os expoentes de Lyapunov, espaço de fase e atratores. Os expoentes de Lyapunov quantificam a divergência exponencial das trajetórias inicialmente próximas do espaço de fases e estimam a quantidade de caos em um sistema; o espaço de fase e os atratores descrevem o comportamento dinâmico do sistema. O principal objetivo do estudo dos fenômenos de instabilidade em reatores nucleares é tentar identificar pontos ou regiões de operação que possam levar a condições de oscilações de potência.

As duas abordagens foram aplicadas a dois conjuntos de sinais. O primeiro conjunto é proveniente de sinais de eventos de instabilidade dos reatores comerciais Forsmark 1 e 2, foram utilizados para validar o código DRARMA. O segundo conjunto foi obtido a partir da simulação de eventos transitórios do reator Peach Bottom; para a simulação, foram utilizados os códigos PARCS e RELAP5, para o cálculo acoplado neutrônico/termo-hidráulico. Para todas as análises feitas neste trabalho, foi usado o software Matlab, devido à sua facilidade de programação e ferramentas disponíveis. A metodologia desenvolvida e utilizada apresentou resultados satisfatórios no estudo de instabilidades em BWRs, conforme demonstrado neste trabalho.

Palavras-chave: DRARMA; Decay Ratio; Análise de Instabilidade; BWR; MatLab; Expoentes de Lyapunov

ABSTRACT

Nuclear reactors are susceptible to instability, causing oscillations in reactor power in specific working regions characterized by determined values of power and coolant mass flow. During reactor startup, there is a greater probability that these regions of instability will be present; another reason may be due to transient processes in some reactor parameters. The analysis of the temporal evolution of the power reveals a stable or unstable process after the disturbance in a light water reactor of type BWR (Boiling Water Reactor). In this work, the instability problem was approached in two ways. The first form is based on the ARMA (Autoregressive Moving Average models) model. This model was used to calculate the Decay Ratio (DR) and natural frequency (NF) of the oscillations, parameters that indicate if the one power signal is stable or not. In this sense, the DRARMA code was developed. In the second form, the problems of instability were analyzed using the classical concepts of non-linear systems, such as Lyapunov exponents, phase space and attractors. The Lyapunov exponents quantify the exponential divergence of the trajectories initially close to the phase space and estimate the amount of chaos in a system; the phase space and the attractors describe the dynamic behavior of the system. The main aim of the instability phenomena studies in nuclear reactors is to try to identify points or regions of operation that can lead to power oscillations conditions.

The two approaches were applied to two sets of signals. The first set comes from signals of instability events of the commercial Forsmark reactors 1 and 2 and were used to validate the DRARMA code. The second set was obtained from the simulation of transient events of the Peach Bottom reactor; for the simulation, the PARCS and RELAP5 codes were used for the neutronic/thermal hydraulic coupling calculation. For all analyzes made in this work, the Matlab software was used due to its ease of programming and available tools. The methodology developed and used presented satisfactory results in the study of instabilities in BWRs, as demonstrated in this work.

Keywords: DRARMA; Decay Ratio; Instability Analysis; BWR; MatLab; Lyapunov Exponents

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: a) Espaço de fases de ordem dois; b) Espaço de fases de ordem três (Theler, 2008) ..6
Figura 2.2: Exemplo de um atrator estranho (Theler, 2008).....19
Figura 3.1: Funções de autocorrelação (correlograma) (Casimiro, 2009)..... 26
Figura 3.2: Exemplo de um processo de ruído branco (Casimiro, 2009).....27
Figura 3.3: As 20 primeiras autocorrelações teóricas de um processo com (a) , (b) , (c) e (d) ; (Ehlers, 2005).....31
Figura 4.1: Condições de teste de baixo fluxo: três regiões específicas A, B e C (Adaptado de (Costa, 2007)).....41
Figura 4.2: Definição do taxa de decaimento DR 42
Figura 4.3: Polos contínuos e discretos para sistemas de 2ª ordem (Abrahamsson, 1991). 43
Figura 4.4: Diagrama de dados trocados em um acoplamento típico (adaptado de(Basualdo Perelló, 2010)).....47
Figura 4.5: Seção transversal do núcleo dos reatores Forsmark 1 e 2 mostrando a instrumentação no núcleo com LPRMs 1-36 e os sensores de fluxo de refrigerante local CF1-4 e CF11-14, respectivamente (Oguma, 1996).....48
Figura 5.1: Representação do método de Wolf. O maior exponente de Lyapunov é calculado a partir do crescimento dos elementos L_i. Quando a distância dos vetores entre os dois pontos excede ϵ, um novo ponto é escolhido próximo à trajetória de referência, minimizando a distância L (Wolf *et al.*, 1985).....60
Figura 5.2: Peach Bottom-2 - testes reais de estabilidade de baixa vazão (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).....62
Figura 5.3: Peach Bottom-2 - linha de tempo operacional planejada dos testes LFST e TT (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).....62
Figura 5.4 Parte da nodalização da planta, com os 33 canais TH no núcleo do reator Peach Bottom (Costa, 2007).....64
Figura 5.5: Pico de pressão de 0,22 MPa aplicado na turbina para simular o evento de perturbação de pressão.....65
Figura 5.6: Posição radial dos bancos de barras de controle no núcleo para a condição de teste PT3.....65
Figura 6.1: Atrator reconstruído para a série temporal da potência aprm4.....69
Figura 6.2: Atrator reconstruído para a série temporal da potência aprm14.....69
Figura 6.3: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=0,96 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.4. 70
Figura 6.4: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=1.09 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.14. 70
Figura 6.5. Oscilação de potência do evento de instabilidade Forsmark – caso 5.....73
Figura 6.6: Atrator do sinal apmr.1 para o caso 5.....74
Figura 6.7: Atrator do sinal apmr.1 para o caso 5, apresentado por (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016). 74

Figura 6.8: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=0,93 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.1.....75
Figura 6.9: PT3 perfil de potência axial médio experimental e calculado.....76
Figura 6.10: Distribuição de potência radial relativa do núcleo no estado estacionário (nível axial 12) PT3.....76
Figura 6.11: Evolução temporal de potência.....77
Figura 6.12: Evolução temporal da fração de vazio no nível axial 12 no canal 1.....77
Figura 6.13: Atrator do transitório de perturbação de pressão.....78
Figura 6.14: Evolução do tempo de potência.....79
Figura 6.15: Distribuição de potência radial do núcleo no estado transitório (nível axial 12, t=150 s) PT3, caso 1.....79
Figura 6.16: Atrator reconstruído para a série temporal da potência, caso 1..... 80
Figura 6.17: Evolução temporal da potência para o caso 2.....81
Figura 6.18: Distribuição de potência radial do núcleo no estado transitório (nível axial 12, t=125 s) PT3, caso 2..... 81
Figura 6.19: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=3,19 com base no algoritmo de Wolf, para o caso 2..... 82
Figura 6.20: Atrator reconstruído para a série temporal da potência, caso 2..... 83

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Propriedades teóricas da fac e facp.....34
Tabela 4.1: Métodos utilizados nas soluções fornecidas.....49
Tabela 4.2: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 1 (Verdu *et al.,* 2001).....50
Tabela 4.3: Resultados de NF (em Hz) obtidos por diferentes métodos para o caso 1 (Verdu *et al.,* 2001).....50
Tabela 4.4: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 4……...51
Tabela 4.5: Resultados de NF (em Hz) obtidos por diferentes métodos para o caso 4.....52
Tabela 4.6: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 5.....53
Tabela 4.7: Resultados de NF obtidos por diferentes métodos para o caso 5.....53
Tabela 5.1. Condições dos testes LFST no reator Peach Bottom(Costa, 2007).....63
Tabela 5.2: Razão de decaimento e frequência natural para os eventos de perturbação de pressão (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).....63
Tabela 5.3: Sequência de remoção dos bancos de barras de controle para o caso 1.....66
Tabela 5.4: Movimento dos bancos de barras de controle.....66
Tabela 6.1: Resultados de DR e NF obtidos com DRARMA para o caso 1.....67
Tabela 6.2: Desvios padrão dos valores de DR e NF calculados neste trabalho em relação ao valores de referência de (Verdu *et al.,* 2001).....68
Tabela 6.3: Maior Expoente de Lyapunov para ampr4 e ampr14.....70
Tabela 6.4: Resultados de DR e NF obtidos com drarma para o caso 4.71
Tabela 6.5. Desvios porcentuais dos valores de DR e NF comprados com (Verdu *et al.,* 2001)..72
Tabela 6.6 Valores de DR e NF para o caso 5.....73
Tabela 6.7: Resultados obtidos para DR e NF utilizando o programa DRARMA.m.....77
Tabela 6.8: DR e NF obtidos com 3 programas em comparação com dados experimentais para PT3.....78
Tabela 6.9: Valores de DR e NF para o movimento das barras de controle (caso 1).....80
Tabela 6.10: Valores de DR e NF para o movimento das barras de controle (caso 2)..... 82

LISTA DE SIGLAS

AIC - Critério de Informação Akaike
aprm - *Average Power Range Monitor*
AR - Processos Autorregressivos
ARMA - *Autoregressive Moving Average Models*
ARMAX - *Autoregressive Moving Average With Exogenous Factors*
BWR - *Boiling Water Reactor*
CMFD - *Coarse Mesh Finite Diffirence*
DR - *Decay Ratio*
EF - Espaço de Fase
FAC - Função de Autocorrelação
Facp - Função de Autocovariância Parcial
FACV - Função de Autocovariância
FVP - Falsos Vizinhos Mais Próximos
LFST- *Low Flow Stability Test*
lprm- *Local Power Range Monitor*
MA - Processos de Médias Móveis
MATLAB - *Matrix Laboratory*
NEA - *Nuclear Energy Agency*
NF - *Frequência Natural*
NRC - *Nuclear Regulatory Commission*
PP - Perturbação de Pressão
PSI - *Paul Scherrer Institut*
PVM - *Parallel Virtual Machine*
SVD - Decomposição de Valor Singular
TH - Termo-Hidráulica
TT - Trip da Turbina
TVO - *Teollisuuden Voima*

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS ……..i
LISTA DE TABELAS ……..ii
LISTA DE SIGLAS……..iv

1 Introdução ……1
2 Conceitos de estabilidade 4
2.1 Sistemas dinâmicos 5
2.2 Sistemas lineares e não lineares 5
2.3 Espaço de fases 5
2.4 Projeções e seção de Poincaré 6
2.5 Teorema de Lyapunov 7
2.6 Fractais e atratores estranhos 18
2.7 Expoentes de Lyapunov 19
2.8 Expoentes de Lyapunov em tempo finito 20
3 Análise de Séries Temporais 22
3.1 Autocorrelação 22
3.2 O correlograma 24
3.3 Processos estocásticos estacionários 24
3.3.1 Estacionariedade estrita 24
3.3.2 Estacionariedade em covariância 24
3.3.3 Função de autocovariância e autocorrelação 25
3.3.4 Processo ruído branco 26
3.4 Processos de médias móveis "MA(q)" 27
3.5 Processos Autoregressivos "AR(p)" 29
3.6 Modelos Mistos ARMA 33
3.6.1 Estimativa da ordem do modelo ARMA 34
4 Análises de Instabilidades em Reatores a Água Fervente 36
4.1 Parâmetros e características principais que afetam a estabilidade 38
4.2 Efeitos não lineares em reatores 39
4.3 Mapa de operação 40
4.4 Métodos para determinar a estabilidade dos reatores 41
4.4.1 Medidas de estabilidade usando técnicas de ruído neutrônico 41
4.4.2 Razão de decaimento (DR) 42
4.4.3 Modelo DR de tempo discreto 43
4.5 Códigos termo-hidráulicos 44
4.5.1 Código RELAP5 45
4.5.2 Caraterísticas Gerais 45

4.6 Códigos neutrônicos 46
4.6.1 Código PARCS 46
4.7 Acoplamento de cálculos neutrônico/termo-hidráulico 46
4.7.1 Acoplamento RELAP5/PARCS 47
4.8 Reator Forsmark 48
5 Metodologia 54
5.1 Determinação da razão de decaimento (DR) 54
5.1.1 Determinação dos coeficientes AR 55
5.2 Construção dos atratores a partir de séries temporais 57
5.2.1 Método de time delay 58
5.3 Método de obtenção dos expoentes de Lyapunov 60
5.3.1 Algoritmo de Wolf 60
5.4 Peach Bottom-2 Testes de Estabilidade de Baixa Vazão 61
5.4.1 Modelo Neutrônico e Termo-Hidráulico 63
5.4.2 Eventos de instabilidade 64
6 Resultados 67
6.1 Resultados obtidos para o reator Forsmark 67
6.2 Resultados obtidos para o reator Peach Bottom 2 75
6.2.1 Resultados em estado estacionário 75
6.2.2 Resultados em estado transitório 77
7 Conclusões 84
Referencias Bibliograficas 86
Anexos 89

Capítulo 1

Introdução

O conceito de estabilidade de um sistema está diretamente ligado ao comportamento de um ou mais parâmetros de tal sistema dinâmico correspondente a uma perturbação interna ou externa durante seu funcionamento.

Após uma perturbação no sistema em estado estacionário, este pode ter um comportamento estável ou instável passado um intervalo de tempo. Para que o sistema seja estável após a perturbação, as variáveis dinâmicas voltam ao seu valor inicial de estado estável ou assumem novos valores estáveis, o que significa que o sistema assume um outro ponto fixo.

No caso de sistema instável, todas ou algumas das variáveis divergem em forma exponencial ou oscilatória onde a fronteira que separa os pontos fixos das instabilidades é chamada a fronteira de estabilidade.

É muito importante a análise de instabilidade em reatores nucleares. As instabilidades são fenômenos não desejáveis; a oscilação de fluxo de refrigerante pode causar vibrações mecânicas dos componentes, distúrbios dos sistemas de controle, problemas operacionais em reatores nucleares e oscilações de potência.

Fluxos bifásicos são mais propensos a apresentar instabilidades do que os fluxos monofásicos; isto acontece porque aparecem muitos efeitos não lineares devido à ebulição. Em princípio, podemos classificar instabilidades como estáticas e dinâmicas. A instabilidade mais importante no contexto termo-hidráulico, especialmente nos reatores nucleares, são os efeitos das ondas de densidade (instabilidade dinâmica).

Particularmente, o fluxo bifásico água-vapor ocorre em muitos sistemas e em várias formas, como é o caso dos reatores do tipo água fervente (Boiling Water Reactor – BWR). A transição de uma forma para outra (monofásica para bifásica) é mais contínua do que abrupta, dadas as condições de aquecimento, dependendo muito da gravidade, ou mesmo, da orientação do fluxo. O fluxo de um fluido sujeito a condições de transferência de calor de tal modo que ele possa mudar de fase gasoso-líquido, ou vice-versa, é susceptível a apresentar instabilidades. As equações para o fluxo bifásico têm características de não linearidade muito mais pronunciada do que no caso de um fluxo monofásico.

A maioria dos sistemas físicos de interesse tem uma dinâmica inerentemente não-linear e não pode ser expressa como combinações de subsistemas mais simples que podem ser analisados com ferramentas matemáticas lineares.

Sistemas dinâmicos são sistemas cujos parâmetros internos (variáveis de estado) seguem uma série de regras temporais. Os sistemas são chamados assim porque eles são descritos por um conjunto de equações (sistema) e parâmetros dinâmicos que variam em relação a alguma variável que normalmente é o tempo.

Sistemas lineares são fáceis de analisar e resolver; como a resolução do sistema está sujeita a condições complexas, a solução pode ser alcançada através da simplificação para conseguir a soma das respostas individuais. Existem técnicas amplamente utilizadas para analisar esses sistemas como a transformada de Laplace, o princípio da superposição e transformada de Fourier. Por isso, é comum encontrar soluções analíticas exatas, mas também é muito comum o uso de métodos geométricos para visualizar a evolução do sistema ao longo do tempo.

No entanto, se a condição de linearidade falhar para um sistema, é dito que ela não é linear. Sendo uma análise não linear, faz com que seja muito mais complexa (então o problema não pode ser simplificado para casos mais simples). Na maioria dos casos, não é possível encontrar soluções analíticas exatas para problemas não lineares, portanto, para a representação da dinâmica do sistema é comum usar técnicas de visualização e análise geométrica.

O sistema a ser estudado é claramente um sistema que envolve dinâmica não-linear; muitos métodos de análise numérica têm sido desenvolvidos para resolver esses sistemas. O objetivo deste trabalho foi usar o modelo auto-regressivo ARMA para determinar o parâmetro de estabilidade *Decay Ratio* (DR) e a frequência natural (NF). Para cumprir este obtivo, foi desenvolvido o código "DRARMA.m". Por outro lado, com a finalidade de estudar a dinâmica das oscilações de potência, foram usadas ferramentas matemáticas de análise de dinâmica de sistemas não lineares, tais como, espaço de fases, atratores e os expoentes de Lyapunov.

Para validar o código DRARMA, foram utilizados sinais de instabilidade de potência ocorridos nos reatores Forsmark 1 e 2. Os sinais são de medições realizadas nos BWR suecos, no período de 1989 a 1997. Esses dados estão divididos em seis casos e a taxa de amostragem de todas as séries temporais é de 25 Hz. A partir dos dados dos sinais de instabilidade, foram calculados os parâmetros DR e NF, os quais foram comparados com os valores obtidos por vários participantes em um documento Benchmark (Verdú *et al.,* 2001). Além disso, foi reconstruído o atrator dos sinais de maior interesse e também os valores dos expoentes Lyapunov utilizando os algoritmos que serão descritos no Capítulo 3.

Por outro lado, com finalidade de aplicar o código DRARMA e as ferramentas dos sistemas dinâmicos, um modelo de códigos acoplados para o reator BWR Peach Bottom utilizando o código de análise termo-hidráulica RELAP5 e de neutrônica PARCS, foi usado para simular casos específicos de transitórios no reator Peach Bottom como, por exemplo, certos movimentos das barras de controle ou um trip da turbina do reator, que geram instabilidades termo-hidráulicas/neutrônicas no mesmo. Dessa forma, primeiramente procurou-se identificar o mapa de instabilidade do reator Peach Bottom, conforme será descrito no Capítulo 2. Em seguida, os cálculos em estado estacionário foram refeitos para verificar o funcionamento do sistema acoplado RELAP5/PARCS. Posteriormente, transitórios de potência foram simulados para obter os sinais de oscilação dos principais parâmetros termo-hidráulicos do reator. A partir dos sinais de perturbação obtidos, foram utilizados algoritmos para calcular os maiores expoentes de Lyapunov e reconstrução dos atratores, conforme serão detalhados na metodologia. Também foi utilizado o código DRARMA para a obtenção dos parâmetros de estabilidade DR e NF.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no presente capítulo, Capítulo 1, apresenta-se uma introdução do assunto e os principais aspectos a serem abordados neste trabalho.

No Capítulo 2, descreve-se o estado da arte sobre os métodos e modelos matemáticos para a análise da estabilidade de sistemas dinâmicos.

No Capítulos 3, séries temporais e modelos de autorregressão de séries temporais são apresentados.

Aborda-se o problema da instabilidade em BWRs no Capítulo 4 e os parâmetros envolvidos na análise do mesmo, além de apresentar uma breve descrição sobre os códigos RELAP5 e PARCS, os quais foram usados no estudo dos eventos de instabilidades.

No Capítulo 5 é descrita a metodologia utilizada para a realização do trabalho, desde os cálculos dos transitórios simulados para um BWR até os algoritmos desenvolvidos para as análises das perturbações. A fim de analisar os dados gerados pela simulação, apresentam-se os métodos numéricos empregados neste trabalho.

No Capítulo 6 são apresentados os resultados das análises e a verificação dos algoritmos aplicados. Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Conceitos de Estabilidade

O funcionamento de numerosos dispositivos mecânicos, elétricos e outros tipos são descritos por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Estes sistemas possuem sempre uma infinidade de soluções, e para obter uma solução determinada é necessário definir seus valores iniciais. Os dispositivos usualmente funcionam em uma região de trabalho bem determinada e, à primeira vista, não é possível mostrar a presença de uma infinidade de regiões de funcionamento que correspondem às diversas soluções dos sistemas de equações. Isto pode ser explicado pelo fato de que os valores iniciais da solução são escolhidos de certa maneira, tal que estes valores iniciais perdem a sua importância após um funcionamento prolongado, e o dispositivo estabiliza-se por si mesmo quando trabalha em estado dito estacionário.

Por exemplo, um relógio de pêndulo funciona com uma amplitude completamente determinada, apesar de o estado inicial estar ligeiramente desviado da posição vertical. Se no momento de colocar em marcha o relógio, o pêndulo não se desvia suficientemente, ele irá parar após algumas oscilações. Se o desvio é suficientemente grande, a amplitude das suas oscilações é completamente determinada depois de um curto tempo, e o relógio trabalhará com essa amplitude durante grandes períodos, praticamente durante um tempo infinito. O sistema de equações diferenciais, o qual descreve o funcionamento de um relógio de pêndulo, tem duas soluções estacionárias: uma posição de equilíbrio, que correspondente à ausência de movimento; e uma solução periódica, que corresponde à marcha normal do relógio, e é óbvio que existe uma infinidade delas, e a solução aproxima-se rapidamente a uma destas duas soluções estacionárias. Cada uma dessas soluções estacionárias é estável; isto significa que, se começamos de alguma solução que se desvia um pouco da região estacionária no instante inicial, haverá uma rápida aproximação da solução estacionária. Também é possível verificar que o espaço de fases do sistema de equações que descreve o funcionamento do relógio considerado decompõe-se em dois domínios de atração. Quando o valor inicial é escolhido em um deles, a solução tende à posição de equilíbrio; se os valores iniciais são tomados em outro domínio, a solução tenderá à solução periódica.

Para compreender como funciona qualquer dispositivo, é conveniente imaginar perfeitamente o espaço das fases do sistema de equações que descreve o funcionamento. O mais importante é conhecer todas as soluções estáveis do sistema.

Já é conhecido pelo teorema sobre a dependência contínua (Theler, 2008) que, dado um intervalo de tempo finito e determinado, com uma varredura suficientemente pequena dos valores iniciais, também lhe corresponde uma variação pequena da solução durante o intervalo de tempo dado. No entanto, esta propriedade da solução não significa de forma alguma a estabilidade. Para que exista estabilidade, o desvio em um intervalo de tempo infinitamente grande deve ser pequeno unicamente se é também o desvio dos valores iniciais.

2.1 Sistemas dinâmicos

Consideremos um sistema físico com um número n finito de graus de liberdade, que evolui no tempo de acordo com as leis físicas determinadas. É possível encontrar um vetor de estado $\boldsymbol{x} \in R^n$ que define completamente o estado do sistema, e n funções escalares em forma de um vetor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ tais que:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

Se as funções $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$**,** tais como suas derivadas em relação às componentes do vetor $\boldsymbol{x}$**,** são contínuas num domínio $U \subset R^n$, então a evolução temporária $x(t)$ a partir de uma condição inicial $x(0) = 0$ é única no domínio U, onde $x(t)$ é a solução do sistema dinâmico (2.1) e o número n, é a ordem do sistema.

Se as equações dinâmicas do sistema físico envolvem derivadas de ordens superiores ou dependem explicitamente do tempo, sempre é possível introduzir novas variáveis e chegar a um sistema de equações de primeira ordem da forma (2.1).

2.2 Sistemas lineares e não lineares

Em geral, não é possível encontrar a solução explícita $x(t)$ do problema (2.1)

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \boldsymbol{F}\big(x(\tau)\big)d\tau \tag{2.2}$$

exceto quando as funções $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ obedecem certas condições muito particulares, em cujo caso o sistema é integrável. Os sistemas dinâmicos integráveis são estruturalmente instáveis, como é o caso dos sistemas mecânicos Hamiltonianos.

Definição 2.1. Seja um sistema dinâmico da forma da equação (2.1), e sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas soluções para duas condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$. Se qualquer combinação linear $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ é também solução para a condição inicial $\alpha_1 x_1(0) + \alpha_2 x_2(0)$, dizemos então que o sistema dinâmico é *linear*. Como a derivada do vetor de estado da equação (2.1) não depende explicitamente do tempo, a definição de sistema linear equivale a um sistema linear invariante no tempo.

2.3 Espaço de fases

Para uma condição inicial x_0 dada, em cada instante de tempo t, a solução $x(t)$ ocupa uma posição bem definida num espaço euclidiano de dimensão n. Chamamos a este "espaço das fases", e ao lugar geométrico das sucessivas posições que toma o vetor de estado $x(t)$, "*retrato"*. O retrato de fase é uma representação geométrica de todas as trajetórias de um sistema dinâmico no plano. Cada curva representa uma diferente condição inicial.

O retrato de fase é uma ferramenta valiosa no estudo dos sistemas dinâmicos autônomos de segunda ordem. A configuração das curvas no espaço de fase revela informações sobre a existência de atratores, repulsores e ciclos limites. Além disso, se for levado em conta o sentido temporário da evolução no espaço das fases, é possível estabelecer o fluxo da solução no espaço das fases (Figura 2.1).

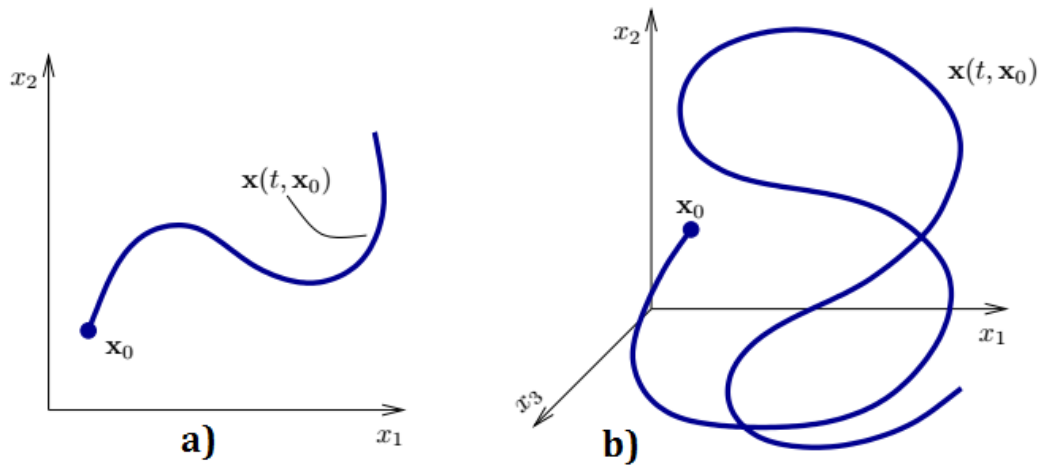


Figura 2.1: a) Espaço de fases de ordem dois; b) Espaço de fases de ordem três (Theler, 2008)

Dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de um mesmo sistema dinâmico correspondente a duas condições iniciais diferentes, é possível demonstrar que se há pelo menos um ponto em comum, então seus fluxos devem ser iguais para o restante do tempo. Supondo que existe um ponto $x^\dagger$ tal que $x_1(t_1) = x_2(t_2) = x^\dagger$; consideramos também a solução $x(t)$ que resulta em tomar a condição inicial $x(0) = x^\dagger$. Como a solução é única, $x(t) = x_1(t - t_1)$ e $x(t) = x_2(t - t_2)$. Depois, $x_1(t - t_1) = x_2(t - t_2)$.

Corolário 2.1 Retratos no espaço das fases correspondentes a diferentes soluções não podem se interceptar.

Definição 2.2 Se $x(t, w)$ é a solução de um sistema dinâmico para a condição inicial $x(0) = w$, denomina-se o conjunto dos pontos

$$O(w) = \{x \in \mathbb{R}^n / x = x(t, w) \text{ para algum } t \in \mathbb{R}\}$$

como a *órbita* que passa pelo ponto w.

Devido ao corolário 2.1, as órbitas são conjuntos bem definidos. Mais ainda, uma órbita é invariante em relação ao fluxo no sentido de que para todo $z \in O(w)$ e todo o tempo t, sucede que $x(t, z) \in O(w)$. Em geral, um conjunto S é invariante em frente ao fluxo se a imagem de qualquer ponto do conjunto através da solução $x(t)$ também está em S, para qualquer tempo.

Os diagramas de fases constituem uma das ferramentas mais úteis no estudo qualitativo dos sistemas autônomos. O diagrama de fase de um sistema constrói-se marcando no espaço de fases os pontos estacionários do sistema e desenhando as órbitas com a direção em que evolui o sistema sobre essa órbita

2.4 Projeções e seção de Poincaré

Quando o espaço de fase $'E'$ é de dimensão maior que três, não há a possibilidade de observar graficamente o diagrama de fase, então recorre-se a dois mecanismos para as análises. O

primeiro deles é usar uma projeção que consiste em tomar a imagem projetada pelo diagrama de fase sobre um subespaço de dimensão menor e realizar a análise sobre tal projeção; o segundo mecanismo é tomar uma "Seção de Poincaré" (Theler, 2008) em $P \in E$; esta consiste em um subespaço S aberto de dimensão menor do que um espaço de fase que contém P que seja transversal ao fluxo. Dada S a seção de Poincaré em P e uma órbita $O(\boldsymbol{x_o})$ que passa por P, se constrói a transformação de Poincaré ψ definido por

$$\psi: \{S \cap O(\boldsymbol{x}_0)\} \longrightarrow \{S \cap O(\boldsymbol{x}_0)\}$$

Onde $\psi(W)$= o seguinte ponto onde $O(\boldsymbol{x}_0)$ corta S a partir de $W \in \{S \cap O(\boldsymbol{x}_0)\}$,

o qual fornece informação sobre o comportamento ao longo do sistema sobre a órbita $O(\boldsymbol{x_0})$. Quando a órbita é periódica, pode-se pensar que a seção de Poincaré corresponde a uma foto estroboscópica que se toma à órbita.

2.5 Teorema de Lyapunov

A seguir, serão descritos o conceito de estabilidade de Lyapunov e as condições suficientes de estabilidade para a posição de equilíbrio de um sistema autônomo.

Estabilidade da posição de equilíbrio. Seja

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots., x^n), \quad i = 1, \dots \dots, n \tag{2.3}$$

um sistema normal autônomo, e

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

sua expressão vetorial. Suporemos as funções:

$$f^i(x^1, \dots., x^n), \quad i = 1, \dots \dots, n \tag{2.5}$$

É um sistema normal autônomo, e as funções são contínuas, e possuem derivadas parciais de primeira ordem contínuas para algum aberto Δ do espaço das variáveis $x^1, \dots., x^n$ ao estabelecer mais adiante o critério de estabilidade, reforçaremos as condições de diferenciabilidade; com mais precisão, suporemos que as funções (2.3) admitem Δ derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

Eludindo a definição formal de estabilidade de acordo com Lyapunov, trataremos primeiro de expor a ideia de estabilidade. Diz-se que a posição de equilíbrio $\boldsymbol{a} = (a^1, \dots, a^n)$ da equação (2.4) é estável se toda a solução, que parte no instante t = 0 de um ponto suficientemente próximo à $\boldsymbol{a}$, continua no transcurso da sua variação anterior na vizinhança do ponto $\boldsymbol{a}$. O significado físico de estabilidade é óbvio: um objeto físico (por exemplo, qualquer máquina), cuja lei de movimento é expressa pela equação (2.4) só pode ser encontrado na posição de equilíbrio se esta é estável; de outro modo, um desvio insignificante a partir da posição de equilíbrio, causada por um impulso aleatório, é capaz de afastar substancialmente o objeto a partir da posição de equilíbrio.

Designaremos por $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ a solução da equação (2.4) que corresponde aos valores iniciais $t=0$, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$, onde $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ representa uma função vectorial da variável escalar t e de variável vetorial $\boldsymbol{\xi}$, que verifica a condição

$$\varphi(0,\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi} \tag{2.6}$$

Definição 2.3 A posição de equilíbrio $\boldsymbol{a}$ da equação (2.4) diz-se estável de acordo com Lyapunov, se: 1º, existe um número positivo ρ suficientemente pequeno tal que, para $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\rho$, a solução $\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$ da equação (2.4) é determinada para todos os valores positivos de t; 2º, para todo número positivo ϵ é possível encontrar outro número positivo $\delta<\rho$ tal que, para $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\delta$, seja $|\varphi(t,\xi)-a|<\epsilon$ para todo $t>0$. Ademais, a posição de equilíbrio a, estável de acordo com Liapunov, denomina-se assintoticamente estável se existe um número positivo $\sigma<\rho$ suficientemente pequeno, e tal que, para $|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{a}|<\sigma$, temos:

$$\lim_{t\to+\infty}|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})-\boldsymbol{a}|=0$$

Enunciaremos, em primeiro lugar, as condições suficientes de estabilidade da posição de equilíbrio para um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes.

<u>Condição A)</u> Seja

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x} \tag{2.7}$$

uma equação linear homogênea com coeficientes constantes, escritos na forma vetorial. Denota-se $\psi(t,\boldsymbol{\xi})$ a solução que corresponde aos valores iniciais 0, ξ. Se todos os valores próprios da matriz A têm partes reais negativas, existem dois números positivos α e r tal que a desigualdade é verificada:

$$|\psi(t,\boldsymbol{\xi})|\le r|\boldsymbol{\xi}|e^{-\alpha t},\qquad t\ge 0. \tag{2.8}$$

Deduz-se imediatamente de (2.8) que a posição de equilíbrio $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ da equação (2.7) é estável de acordo com Liapunov, e é também, assintoticamente estável.

Para estabelecer a desigualdade (2.8), seja

$$A=(a_j^i);\qquad L(p)=\left(a_j^i-p\delta_j^i\right).$$

Utilizando o símbolo de derivação $p,\left(p^k=\frac{d^k}{dt^k}\right)$, podemos escrever escalarmente a equação (2.7) como um sistema:

$$\sum_{j=1}^{n}L_j^i(p)x^j=0,\quad i=1,\dots\dots,n. \tag{2.9}$$

Seja $M_i^j(p)$ o menor elemento $L_j^i(p)$ na matriz $L(p)$, com o sinal apropriado, então, se verifica a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^k(p) L_j^i(p) = \delta_j^k D(p),$$

onde $D(p)$ representa o determinante de $L(p)$. Multiplicando (2.9) pelo polinômio $M_i^k(p)$; e fazendo a soma sobre i, obtém-se:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_i^k(p) L_j^i(p) x^j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^k D(p) x^j = D(p) x^k$$

Portanto, se

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \dots\dots, x^n)$$

é uma solução da equação (2.7), cada uma das funções x satisfaz à equação diferencial

$$D(p) x^i = 0$$

Como, por hipótese, todas as raízes do polinômio $D(p)$ têm partes reais negativas, a função x^i verifica a desigualdade

$$\left|x^i\right| \leq R e^{-\alpha t}, \qquad i = 1, \dots\dots, n; \quad t \geq 0,$$

em que R e α são números positivos independentes do índice i. A partir desta desigualdade segue esta:

$$|\boldsymbol{x}| \leq \sqrt{n} R e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0).$$

Seja $\boldsymbol{e}_i$ o vetor unitário que corresponde à i-ésima coordenada,

$$\boldsymbol{e}_i = (0, \dots\dots, 1, \dots\dots 0),$$

Seja, ademais, $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ a solução de (2.7) para o valor inicial $\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{\psi}_i(0) = \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1, \dots\dots, n.$$

Por conseguinte, a solução de $\boldsymbol{\psi}_i(t, \boldsymbol{\xi})$da equação (2.7), correspondente ao valor inicial

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots\dots, \xi^n),$$

Obviamente, é escrito na forma:

$$\psi(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \boldsymbol{\psi}_i(t). \tag{2.10}$$

Uma vez que cada solução $\boldsymbol{\psi}_i(t)$ satisfaz a desigualdade

$$|\psi_i(t)| \leq \sqrt{n} R e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0),$$

a solução $\psi(t, \boldsymbol{\xi})$ obviamente satisfaz a desigualdade (2.8).

A estabilidade, segundo Lyapunov, da posição de equilíbrio $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ resulta diretamente da desigualdade (2.8); efetivamente: se ϵ é um número positivo dado, basta eleger para δ o valor ϵ/r. A estabilidade assintótica é deduzida também da mesma desigualdade.

Função de Lyapunov. A fim de estabelecer um critério de estabilidade da posição de equilíbrio para o sistema não-linear (2.1), a derivação em relação a um sistema de equações é utilizado.

<u>Condição</u> B) Seja

$$F(x^1, \dots., x^n) = F(\boldsymbol{x})$$

uma função das variáveis $x^1, \dots., x^n$, definidos e diferenciáveis no domínio Δ. Sua derivada em relação a t "sobre o sistema de equações (2.3), no ponto $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots., x^n)$" é definida como se segue: Seja $\varphi(t)$ a solução da equação (2.5) que verifica, para algum valor $t = t_0$, a condição inicial:

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{x}$$

A derivada $\dot{\boldsymbol{F}}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ do sistema (2.1) é definido pela fórmula

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dt} F\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)\Big|_{t=t_0},$$

ou, lembrando a expressão do diferencial total,

$$\dot{\boldsymbol{F}}_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} f^i(\boldsymbol{x}). \tag{2.11}$$

A última fórmula expressa que $\dot{\boldsymbol{F}}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ não é dependente da solução $\boldsymbol{\varphi}(t)$, mas é determinado unicamente pela escolha do ponto $\boldsymbol{x}$.

A seguir, será mostrada uma propriedade do sistema autônomo.

<u>Condição</u> C) Como antes, denotamos por $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ a solução do sistema autônomo (2.4) com os valores iniciais 0, $\boldsymbol{\xi}$. A função $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ verifica a identidade

$$\boldsymbol{\varphi}\big(t, \varphi(s, \boldsymbol{\xi})\big) = \boldsymbol{\varphi}(s + t, \boldsymbol{\xi}), \tag{2.12}$$

Seja

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varphi}(s, \boldsymbol{\xi}), \tag{2.13}$$

onde s é um numero fixo, e consideremos a solução

$$\boldsymbol{\varphi_1}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta})$$

da equação (2.4). Como $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$, além de ser solução da equação (2.4), é autônoma, a função $\boldsymbol{\varphi_2}(t)$ definida pela relação

$$\boldsymbol{\varphi_2}(t) = \boldsymbol{\varphi}(s + t, \boldsymbol{\xi})$$

é também solução de (2.4)

Assim, temos duas soluções $\boldsymbol{\varphi_1}(t)$ e $\boldsymbol{\varphi_2}(t)$ da equação (2.4). Por outro lado:

$$\boldsymbol{\varphi_1}(0) = \boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta},$$

$$\boldsymbol{\varphi_2}(0) = \boldsymbol{\varphi}(s, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}.$$

Assim, as soluções $\boldsymbol{\varphi_1}(t)$e $\boldsymbol{\varphi_2}(t)$ têm os mesmos valores iniciais e, por conseguinte, coincidem; isto significa que se cumpre a relação (2.10) .

Na prova do teorema de Lyapunov, primeiro vamos dar algumas propriedades de formas quadráticas definidas positivas antes de construir a função de Lyapunov.

Condição D) Seja

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \dots \dots, x^n) \tag{2.14}$$

um vetor variável do espaço de n dimensões. É chamada *forma quadrática* a função $W(\boldsymbol{x})$ do vetor $\boldsymbol{x}$ definida pela forma

$$W(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} x^i x^j,$$

onde $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ representam números reais. A forma quadrática $W(\boldsymbol{x})$ se diz definida positiva se, para $x \neq 0$, temos:

$$W(x) > 0$$

Daqui, resulta que, para todas as formas quadráticas positivas $W(x)$, é possível escolher dois números μ e ν positivos tais que, qualquer que seja o vetor $\boldsymbol{x}$, as desigualdades são verificadas

$$\mu|\boldsymbol{x}|^2 \leq W(x) \leq \nu|\boldsymbol{x}|^2. \tag{2.15}$$

Então, segue que, para qualquer vetor arbitrário $\boldsymbol{x}$, temos a desigualdade

$$\left|x^i\right| \leq \sqrt{\frac{1}{\mu} W(x)} \tag{2.16}$$

Vamos provar a existência dos números μ e ν. Para este fim, consideramos os valores da função W $(\boldsymbol{\xi})$, quando o vector $\boldsymbol{\xi}$ pertence à esfera unitária; ou seja, ele satisfaz a condição

$$|\boldsymbol{\xi}| = 1 \tag{2.17}$$

Dado que a esfera (2.17) é um conjunto fechado e limitado, a função contínua $W(\boldsymbol{\xi})$ atinge o seu máximo ν e seu mínimo μ. Como todos os vetores da esfera (2.17) são diferentes de zero, os números ν e μ serão positivos. Se $\boldsymbol{x}$ é um vetor arbitrário, temos $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{\xi}$ pertencente à esfera (2.17) e, por conseguinte, verificam-se as desigualdades

$$\mu \leq W(x) \leq \nu.$$

Multiplicando ambos os lados por λ^2, obtém-se a desigualdade (2.15).

Passamos agora a construir a função de Lyapunov.

<u>Condição</u> E) Seja

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \qquad i = 1, \ldots\ldots, n \tag{2.18}$$

um sistema linear homogêneo de equações com coeficientes constantes, de tal forma que todos os valores próprios da matriz $A = (a_j^i)$ têm partes reais negativas. Há então uma forma quadrática definida positiva $W(\boldsymbol{x})$, cuja derivada em relação ao sistema (2.18) satisfaz a desigualdade

$$\dot{W}_{(18)}(\boldsymbol{x}) \leq -\beta W(\boldsymbol{x}), \tag{2.19}$$

onde $\boldsymbol{x}$ é um vetor arbitrário, e β um número positivo independente de $\boldsymbol{x}$.

Construímos a forma $W(\boldsymbol{x})$. Vamos supor que o sistema (2.18) é a expressão escalar da equação-vetor (2.7). Como na proposição A), denotada por $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$, a solução da equação (2.7) corresponde aos valores iniciais 0, $\boldsymbol{\xi}$, então, tem-se:

$$\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\xi}^i \boldsymbol{\psi}_i(t) \tag{2.20}$$

Fazendo

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{\infty} |\psi(\tau, \boldsymbol{\xi})|^2 d\tau \tag{2.21}$$

de acordo com (2.18),

$$W(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi^i \xi^j \int_0^{\infty} \left(\psi_i(\tau), \psi_j(\tau)\right) d\tau \tag{2.22}$$

Uma vez que cada função $\boldsymbol{\psi_i}(t)$ satisfaz a desigualdade (2.8), todas as integrais impróprias contidas no segundo elemento (2.22) são convergentes; de modo que $W(x)$ é uma forma quadrática relativa ao vector $\boldsymbol{\xi}$, que é definida positiva, porque, para $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, a expressão com sinal de integral na fórmula (2.21) é positiva e, por conseguinte, $W(\boldsymbol{\xi}) > 0$. Agora, vamos calcular a derivada $\dot{W}_{(16)}(\boldsymbol{\xi})$ relativa ao sistema (2.18) da função $W(\boldsymbol{\xi})$ de acordo com a proposição B); será traçado para isso, pelo ponto $\boldsymbol{\xi}$**,** a solução $\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\xi})$, e serão encontradas as derivadas para $t = 0$ da função $W(\psi(t, \boldsymbol{\xi}))$. De acordo com C)

$$\psi(\tau, \psi(t, \boldsymbol{\xi})) = \psi(\tau + t, \boldsymbol{\xi})$$

$$W(\psi(t,\xi)) = \int_0^\infty \left|\psi\left(\tau,\psi(t,\xi)\right)\right|^2 d\tau = \int_0^\infty |\psi(\tau+t,\xi)|^2 d\tau = \int_0^\infty |\psi(t,\xi)|^2 d\tau$$

Daqui, obtém-se:

$$\dot{W}_{(18)}(\xi) = \frac{d}{dt} W\left(\psi(t,\xi)\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty |\psi(t,\xi)|^2 d\tau|_{t=0} = -|\psi(t,\xi)|^2|_{t=0} = -|\xi|^2;$$

Mas, de acordo com as desigualdades (2.15), obtem-se:

$$-|\xi|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(\xi)$$

Deduzimos que

$$\dot{W}_{(18)}(\xi) \leq -\frac{1}{\nu} W(\xi)$$

o que comprova a desigualdade (2.19).

TEOREMA DE LYAPUNOV. Finalmente, será enunciado e provado o teorema de Lyapunov. Seja

$$\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots . a^n)$$

Uma posição de equilíbrio do sistema autônomo (2.3). Fazemos

$$x^i = a^i + \Delta x^i, \qquad i = 1,2, \ldots \ldots, n, \tag{2.23}$$

E tem-se novas funções incógnitas

$$\Delta x^1, \ldots \ldots \ldots \Delta x^n. \tag{2.24}$$

Fazendo a mudança de variáveis (2.23) no sistema (2.3) e desenvolvendo o segundo membro em série de Taylor, obtem-se:

$$\Delta \dot{x}^i = f^i(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j} \Delta x^j + R^i, \qquad i = 1, \ldots . , n \tag{2.25}$$

onde R^i é infinitesimal de segunda ordem em relação à incógnita (2.24). Como $\boldsymbol{a}$ é uma posição de equilíbrio do sistema (2.3), então

$$f^i(\boldsymbol{a}) = 0;$$

Fazendo

$$a_j^i = \frac{\partial f^i(\boldsymbol{a})}{\partial x^j}, \tag{2.26}$$

O sistema (2.25) é escrito da seguinte forma

$$\Delta\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \, \Delta x^j + R^i, \qquad i = 1, \ldots\ldots, n \tag{2.27}$$

Teorema 2.1. Se todos os valores próprios da matriz a_j^i tem partes reais negativas, a posição de equilíbrio do sistema (2.3) é assintoticamente estável; mais precisamente: existe um número positivo σ suficientemente pequeno, de modo que $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}| < \sigma$, temos a desigualdade

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}| < r|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}|e^{-\alpha t},$$

Onde r e α são números positivos independentes de $\boldsymbol{\xi}$.

Demonstração. Vamos supor que a posição de equilíbrio $\boldsymbol{a}$ do sistema (2.3) coincide com a origem das coordenadas; ou seja, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Isto é sempre possível; caso necessário, uma translação do sistema de coordenadas é realizada, a qual não altera a matriz A. Assumindo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, tem-se

$$\Delta x^i = x^i, \tag{28}$$

de modo que o sistema (2.27) é escrito na forma:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + R^i, \qquad i = 1, \ldots\ldots n, \tag{2.29}$$

onde

$$R^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f^i(\theta \boldsymbol{x})}{\partial x^j \partial x^k} x^j x^k.$$

Seja $W(x)$ a função de lyapunov para o sistema linear

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j, \qquad i = 1, \ldots\ldots\ldots, n \tag{2.30}$$

obtida a partir do sistema (2.29) por linearização; ou seja, eliminando os restos R^i. Calculamos a derivada, $\dot{W}_{(27)}(x)$, da função $W(x)$ para o sistema (2.29). Obtém-se:

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} a_j^i \, x^j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} R^i = \dot{W}_{(28)}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} R^i$$

Como a função $W(\boldsymbol{x})$ satisfaz a condição de (2.19)

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leq -\beta W(\boldsymbol{x}) + \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} R^i.$$

Então, escolhe-se um número suficientemente pequeno b que, para

$$W(\boldsymbol{x}) \leq b \tag{2.31}$$

o vetor $\boldsymbol{x}$ pertence ao domínio Δ (um número que existe em (2.15)). Como as segundas derivadas $\frac{\partial^2 f^i(\theta \boldsymbol{x})}{\partial x^j \partial x^k}$ são funções contínuas, elas vão ser limitadas no elipsóide (2.31); dessa forma, no elipsóide, é obtido:

$$\left|R^i\right| \leq k|\boldsymbol{x}|^2 \leq \frac{k}{\mu} W(\boldsymbol{x}),$$

Onde k é uma constante. Por outro lado, como $\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$ é uma forma linear em relação a $x^1, \ldots \ldots x^n$, verifica-se a desigualdade

$$\left|\frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\right| \leq l\sqrt{W(\boldsymbol{x})},$$

Onde l é uma constante. Então, existe um número positivo q tal que, para $W(\boldsymbol{x}) \leq b$, é obtido:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} R^i \leq q W(\boldsymbol{x})^{3/2}.$$

Agora escolhemos um número positivo c de tal forma que

$$c \leq b, \qquad q\sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}$$

Então, obtem-se

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leq -\frac{\beta}{2} W(\boldsymbol{x})$$

É verdade apenas no caso em que a desigualdade é verificada:

$$W(x) \leq c \tag{2.32}$$

Fazendo $\alpha = \frac{\beta}{4}$, é obtida a desigualdade:

$$\dot{W}_{(27)}(\boldsymbol{x}) \leq -2\alpha W(\boldsymbol{x}),$$

que deve ser satisfeita se $\boldsymbol{x}$ satisfaz (2.32).

Seja $\boldsymbol{\xi}$ um ponto interior do elipsóide (2.30); ou seja, um ponto que satisfaz a desigualdade

$$W(\boldsymbol{\xi}) < c. \tag{2.33}$$

Como antes, denotamos $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ a solução do sistema (2.29) correspondente aos valores iniciais 0, $\boldsymbol{\xi}$.

$$\omega(t) = W\big(\varphi(t, \boldsymbol{\xi})\big).$$

A função $\omega(t)$ é determinada para todos os valores de $t \geq 0$ para os quais a solução é definida $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ e, de acordo com E), satisfaz a condição

$$\dot{\omega}(t) \leq -2\alpha\omega(t) \tag{2.34}$$

sempre que

$$\omega(t) \leq c.$$

Se a solução $\varphi(t, \boldsymbol{\xi})$ não existe para qualquer valor positivo de t positivo, o ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ deve estar necessariamente fora do elipsóide (2.32) quando t toma valores suficientemente grandes. Suponhamos que o ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ deixa o elipsóide, e seja $t' > O$ o valor de t para o qual atravessa pela primeira vez a fronteira. Então, no intervalo $0 \leq t \leq t'$ o ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ pertence ao elipsóide (2.32) e verifica-se, portanto, a desigualdade (2.34), de modo que $\dot{\omega}(t)$ não é positivo; portanto, $c = \omega(t') \leq \omega(0) < c$, o que é uma contradição.

A solução $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ e a função $\omega(t)$ são encontradas, definidas para todos os valores de t positivos, e para todos eles a desigualdade (2.34) se mantém. Se $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, será $\omega(t) > 0$, e a desigualdade (2.34) resulta nas seguintes consequências:

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \leq -2\alpha; \qquad \int_0^t \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} dt \leq -2\alpha t, \qquad t \geq 0$$

$$\ln \omega(t) - \ln \omega(0) \leq -2\alpha t \tag{35}$$

Pela desigualdade anterior, obtemos:

$$W\big(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})\big) \leq W(\boldsymbol{\xi}) e^{-2\alpha t},$$

Utilizando (2.15) é obtido:

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})|^2 \leq \frac{\nu}{\mu} |\boldsymbol{\xi}|^2 e^{-2\alpha t}, \qquad t \geq 0, \tag{2.36}$$

limitação que é válida somente se $\boldsymbol{\xi}$ verifica (2.33)

De acordo com a segunda desigualdade (2.15), a condição (2.33) é deduzida a partir da relação

$$|\boldsymbol{\xi}| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{v}} \tag{2.37}$$

Portanto, se (2.37) é verificada, também poderá ser verificada a desigualdade (2.36), e encontrando a raiz quadrada, resulta em

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |\xi| e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

que coincide com a desigualdade (2.28) para $r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$ e $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Portanto, o teorema 2.1 é demonstrado.

Na Proposição F) descrevemos o caso oposto considerado no Teorema 2.1.

<u>Condição</u> F) Diremos que a posição de equilíbrio $\boldsymbol{a}$ da equação (2.4) é completamente instável quando existe um número positivo σ tal que qualquer solução $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ da equação (2.4), que começa a partir do ponto $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{a}$ da esfera $|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{a}| < \sigma$ necessariamente abandonará aquele ponto e não vai voltar a ele; de outro modo: existe, um número positivo $T = T(\boldsymbol{\xi})$ de tal modo que, para $t = T$, a solução $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})$ é determinada e verifica a desigualdade $|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}| \geq \sigma$ para todos os valores $t > T$ para os quais é determinada a solução. Se todos os valores próprios da matriz $\left(\partial f^i(\boldsymbol{a})/\partial x^j\right)$ tem partes reais positivas, a posição $\boldsymbol{a}$ de equilíbrio da equação (2.4) é completamente instável.

Para provar a proposição F), usaremos alguns resultados que foram obtidos na prova do Teorema 2.1; também aqui será assumido $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. Seja

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -f(x), \tag{2.38}$$

de tal forma que, o ponto 0 satisfaz as condições do Teorema 2.1. Com a lógica usada para provar o teorema 2.1, segue-se para a equação (2.38) a existência de uma função de Lyapunov $W(x)$ satisfazendo a desigualdade

$$\dot{W}_{(38)}(\boldsymbol{x}) \leq -2\alpha W(\boldsymbol{x}),$$

sempre que $W(\boldsymbol{x}) \leq c$. Desenvolvendo o primeiro membro da desigualdade anterior, obtem-se

$$\dot{W}_{(38)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\left(-f^i(x)\right) \leq -2\alpha W(x);$$

Ou seja,

$$\dot{W}_{(1)}(\boldsymbol{x}) \geq 2\alpha W(\boldsymbol{x}).$$

Esta desigualdade é automaticamente satisfeita quando $W(\boldsymbol{x}) \leq c$. Seja agora $\boldsymbol{\xi}$ um ponto dentro do elipsóide (2.32)

$$\omega(t) = W\left(\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\xi})\right).$$

Esta função $\omega(t)$ satisfaz a condição

$$\dot{\omega}_{(1)}(t) \geq 2\alpha\omega(t) \tag{2.39}$$

Sempre que: $\omega(t) \leq c$.

Como $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, teremos $\omega(t) > 0$, e então (2.39) pode ser escrito:

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} \geq 2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} dt \geq 2\alpha t \text{ para } t \geq 0;$$

$$\omega(t) \geq \omega(0)e^{2\alpha t}; \quad W\big(\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})\big) \geq W(\boldsymbol{\xi})e^{2\alpha t}$$

Esta última desigualdade é deduzida como quando t cresce, o ponto $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$ alcança necessariamente as fronteiras do elipsóide (2.32) e deixará de ser, portanto, um ponto interior. Supondo o contrário, existirá um valor t' positivo tal que $\omega(t') = c$, e, para todos os valores suficientemente pequenos de Δt se obterá a desigualdade $\omega(t' + \Delta t) < c$. A partir das duas últimas relações, obtemos que $\omega(t') \leq 0$, a qual é contrária à desigualdade (2.39), que se verifica para $t = t'$.

É, portanto, provado que o caminho $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\xi})$, onde $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ é um ponto dentro do elipsóide (2.32), que deixa necessariamente esta elipsóide e não retorna mais.

2.6 Fractais e atratores estranhos

As estruturas geométricas geradas no espaço de fase são muito complexas; como pôde ser visto na seção de Poincaré. Tais estruturas são exemplos de conjuntos chamados "fractal". Não será aprofundado o estudo das suas características.

Agora será introduzida a noção de *atrator* estranho (Figura 2.2). Um subconjunto A do espaço de fase, é um atrator estranho para a transformação T, se existe um subconjunto R com as seguintes propriedades:

i) R é uma vizinhança de A (A é um atrator), isto é, para cada ponto $\boldsymbol{x} \in A$ há um n-disco centrado em $\boldsymbol{x}$ que está completamente contido em R. Isto implica, em particular, que A está contido em R. A cada órbita que se inicia em R , permanece ali. Além disso, a órbita permanece vizinha de A.

ii) As órbitas que começam em A são sensíveis às condições iniciais. A é, então, um atrator caótico.

iii) O atrator tem uma estrutura fractal. A é, então, um atrator estranho.

iv) A não pode ser dividido em dois atratores independentes.

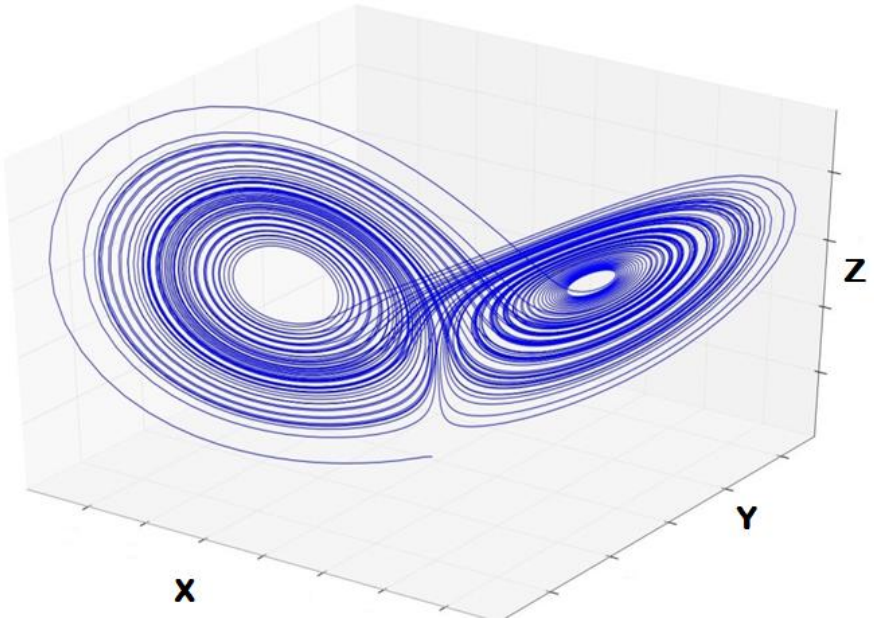


Figura 2.2: Exemplo de um atrator estranho (Theler, 2008).

2.7 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov caracterizam as trajetórias da separação próximas, supondo que esta separação tem um comportamento exponencial ao longo do tempo.

Para defini-lo assume-se, para simplificar, um sistema discreto de uma dimensão da forma:

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^n(x_0)$$

onde x_0 é a condição inicial.

Suponha duas trajetórias x e y, tais que as suas condições iniciais estão próximas

$$|x_0 - y_0| = \varepsilon$$

A diferença entre estas duas trajetórias na enésima iteração pode ser expressa como:

$$|f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)| = \varepsilon e^{n\lambda} \tag{2.40}$$

Onde λ é o expoente de Lyapunov. No limite de muitas iterações e pequena distância inicial, obtemos:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|f_n(x_0 + \varepsilon) - f_n(x_0)|}{\varepsilon}\right)$$

A definição derivada aparece no segundo termo, de modo que o expoente de Lyapunov, que, obviamente, depende da condição inicial, será:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\left|\frac{df_n(x_0)}{dx_0}\right|\right)$$

Aplicando a regra da cadeia à derivada da enésima interação de f obtemos:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right)$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(f'(x_i)) \tag{2.41}$$

O expoente de Lyapunov positivo implica separação exponencial de trajetórias, e é, portanto, uma condição necessária para a existência de caos. Nos casos em que o movimento é limitado no espaço de fase, $\lambda > 0$ é uma condição suficiente para que haja caos.

Para um sistema de dimensão d, O expoente de Lyapunov é definido como:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(|\Lambda_i(x_0, t)|) \tag{2.42}$$

Onde Λ_i são os valores próprios da matriz Jacobiana $J^n(x_0)$, sendo ${J_{ij}}^n = \left.\frac{\delta f_i^n(x)}{\delta x_j}\right|_{x=x_0}$

Em geral, os λ dependem do estado inicial x_0. Porém, em muitos casos, eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fases.

Da equação (2.41), tem-se

a) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas;
b) para uma solução caótica, associada a um atrator estranho, a dependência sensitiva às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov λ>0;
c) para uma solução periódica ou quasi-periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial.

2.8 Expoentes de Lyapunov em tempo finito

Os expoentes de Lyapunov são definidos através do comportamento do tempo infinito de incertezas infinitesimais sobre o estado $\boldsymbol{x}$ de um sistema dinâmico em um espaço de estado m-dimensional (Eckmann e Ruelle, 1985). O propagador linear $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t)$, também chamado de mapa tangente, desenvolve qualquer incerteza inicial infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}_0 \in \mathbb{R}^m$ sobre $\boldsymbol{x}(0)$ por um tempo Δt ao longo da trajetória não-linear $\boldsymbol{x}(t)$,

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\Delta t} = \mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t)\boldsymbol{\epsilon}_0 \tag{2.43}$$

Em sistemas de tempo contínuo, onde $\dot{\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x})$, $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t)$ é definido pela integração simultânea das equações não lineares e das primeiras equações variacionais; em sistemas de tempo discretos

(mapas) onde $\boldsymbol{x}_{i+1} = F(\boldsymbol{x}_i)$, o mapa de uma etapa tangente é simplesmente o Jacobiano: $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t = 1) = J(\boldsymbol{x})$. Se Δt for interpretado como o tempo de propagação fundamental do problema em questão e k como um número inteiro de passos de propagação, então para cada k e cada $\boldsymbol{x}$ tem-se as matrizes $m \times m$:

$$\mathcal{O}(x, k\Delta t) = [\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, k\Delta t)^T \mathcal{M}(\boldsymbol{x}, k\Delta t)]^{1/(2k\Delta t)} \tag{2.44}$$

e

$$\mathcal{O}(x) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{O}(x, k\Delta t)$$

Onde o A^T indica a transposição de A. Oseledec (Oseledets, 1968) provou que se o limite de $k \to \infty$ existe, então em uma ampla gama de condições, os autovalores de $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})$ são independentes de $\boldsymbol{x}$. Um sistema dinâmico m dimensional tem assim m expoentes de Lyapunov, $\Lambda_i, i = 1, 2, \ldots, m$ definido (Eckmann and Ruelle, 1985), os autovalores de $\mathcal{O}(\boldsymbol{x})$, como $\Lambda_i = \log_2(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; Por convenção $\Lambda_i \geq \Lambda_j$ para $i < j$. Os valores próprios da matriz $\mathcal{M}^T\mathcal{M}$ são simplesmente os quadrados dos valores singulares de $\mathcal{M}$. Assim, no limite $k \to \infty$, o logaritmo do primeiro valor singular de $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t)$, σ_1, se aproxima do primeiro expoente global de Lyapunov, Λ_1 :

$$\Lambda_1 = \lambda_1{}^{(\infty)} \equiv \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k\Delta t} \log_2(\sigma_1) \tag{2.45}$$

Note que todos os logaritmos são tomados como base dois, assim os expoentes têm unidades de bits por unidade de tempo (Δt).

Seguindo Lorenz (Lorenz, 1965), usamos $\sigma_i^{(k)}$ (os valores singulares do mapa tangente $\mathcal{M}(\boldsymbol{x}, \Delta t)$) para definir os expoentes de Lyapunov de tempo finito como:

$$\lambda_i{}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{k\Delta t} \log_2 \left(\sigma_i{}^{(k)}(\boldsymbol{x}) \right) \tag{2.46}$$

Existe uma vasta literatura sobre a estimativa do espectro de Lyapunov, em particular neste trabalho será utilizado o algoritmo proposto por Wolf (Wolf *et al.*, 1985).

Capítulo 3

Análise de Séries Temporais

São chamadas Séries Temporais o conjunto de valores que uma variável assume em diferentes momentos do tempo. Os dados podem se comportar de diferentes formas através do tempo, podem se apresentar como uma tendência, um ciclo; não ter uma forma definida ou aleatória, variações estacionárias, entre outros. As observações de uma série temporal serão denotadas por $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$, onde Y_t, é o valor no tempo t.

Os modelos de séries temporais têm uma abordagem puramente preditiva e neles os prognósticos são baseados no comportamento passado da variável de interesse. De acordo com (Casimiro, 2009), podemos distinguir dois tipos de modelos de séries de tempo:

- **Modelos determinísticos**: tratam-se de métodos de extrapolação simples, em que não se faz referência às fontes ou natureza da aleatoriedade subjacente na série. Sua simplicidade relativa geralmente vai acompanhada de menor precisão. Exemplos de modelos determinísticos são os modelos de média móvel onde a variável de previsão é calculada a partir de uma média dos "n" valores imediatamente anteriores.
- **Modelos estocásticos:** baseiam-se na descrição simplificada do processo aleatório subjacente na série. Em termos simples, presume-se que a série observada $Y_1, Y_2, \ldots, Y_t$ é extraída a partir de um grupo de variáveis aleatórias com alguma distribuição conjunta difícil de determinar, portanto, se constroem modelos aproximados que sejam úteis para a geração de prognósticos.

A série $\{Y_t\}$ poderá ser estacionária ou não estacionária (Casimiro, 2009).

- **Séries não estacionárias:** são aquelas cujas características de média, variância e covariância mudam ao longo do tempo, o que dificulta seu modelamento. No entanto, em muitas ocasiões, se a série é diferenciada uma ou mais vezes, a série resultante será estacionária (processos não estacionários homogêneos).
- **Série estacionária:** é aquela cuja média e variância não mudam ao longo do tempo e cuja covariância só é função do atraso. Graças a estas características poderemos modelar o processo subjacente através de uma equação com coeficientes fixos estimados a partir dos dados passados.
  - Média: $E(Y_t) = E(Y_{t+m})$ para todo t, m
  - Variância: $\sigma(Y_t) = \sigma(Y_{t+m})$ para todo t, m
  - Covariância: $cov(Y_t, Y_{t+k}) = cov(Y_{t+m}, Y_{t+m+k})$ para todo t, m, k

3.1 Autocorrelação

A ferramenta fundamental para analisar as propriedades das séries temporais em termos da inter-relação temporária de suas observações é chamada *coeficiente de autocorrelação* que mede a correlação, ou seja, o grau de associação linear entre as observações separadas em k períodos. Estes coeficientes de autocorrelação fornecem muita informação sobre como estão inter-

relacionadas as observações de uma série de tempo, e isso ajuda a construir o modelo adequado para os dados.

O coeficiente de correlação ρ_{xy} entre duas variáveis x_t e y_t, mede o grau de associação linear entre duas variáveis, e é definido como:

$$\rho_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} \tag{3.1}$$

onde V é a variância. Este coeficiente não tem unidades, por definição, e assume valores $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$. Se $\rho_{xy} = 0$, não existe relação linear entre x e y. Se $\rho_{xy} = 1$, existe relação linear perfeita e positiva entre x e y. Se $\rho_{xy} = -1$, existe uma relação linear perfeita e negativa entre x e y.

Uma vez que temos uma mostra das variáveis x e y, é possível estimar este coeficiente mediante seu correspondente coeficiente de correlação amostral:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}} \tag{3.2}$$

Aqui, no entanto, deseja-se medir a correlação entre as observações de uma mesma variável em diferentes horizontes de tempo, i.e., correlações entre observações defasadas 1, 2, . . . períodos de tempo. Assim, dadas n observações $x_1,\ldots,x_n$ de uma série temporal discreta podem-se formar os pares (x_1, x_2), . . .,(x_{n-1}, x_n). Considerando $x_1,\ldots,x_{n-1}$ e $x_2,\ldots,x_n$ como duas variáveis o coeficiente de correlação entre elas é dado por

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}(x_t - \bar{X})(x_{t+1} - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1}(x_t - \bar{X})^2 \sum_{t}^{n-1}(x_{t+1} - \bar{Y})^2}} \tag{3.3}$$

onde as médias amostrais são

$$\bar{X} = \sum_{t=1}^{n-1} x_t/(n-1) \;\; e \;\; \bar{Y} = \sum_{t=2}^{n} x_t/(n-1)$$

Como o coeficiente r_1 mede as correlações entre observações sucessivas ele é chamado de coeficiente de autocorrelação ou coeficiente de correlação serial.

Na prática, é mais usual calcular primeiro os coeficientes de autocovariância $\{c_k\}$, definidos por analogia com a fórmula usual de covariância, i.e

$$c_k = \sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})/n\,, k = 0,1,\ldots..$$

Os coeficientes de autocorrelação são então obtidos como $r_k = c_k/c_0$.

3.2 O correlograma

Um gráfico com os k primeiros coeficientes de autocorrelação como função de k é chamado de correlograma e pode ser uma ferramenta poderosa para identificar características da série temporal. Porém, isto requer uma interpretação adequada do correlograma, i.e. devem-se associar certos padrões do correlograma com determinadas características de uma série temporal. Esta nem sempre é uma tarefa simples e, a seguir, são dadas algumas indicações.

3.3 Processos estocásticos estacionários

Na análise de séries de tempo, o objetivo é usar a teoria de processos estocásticos para determinar qual processo estocástico tem sido capaz de gerar as séries de tempo em estudo para caracterizar o comportamento da série. Se se desejam obter métodos de previsão consistentes, não é possível usar qualquer tipo de processo estocástico, é necessário que a estrutura probabilística seja estável ao longo do tempo.

O conceito de estacionariedade pode ser caracterizado em termos da função de distribuição ou dos pontos do processo. No primeiro caso, será descrito sobre a estacionariedade em sentido estrito e, no segundo, estacionariedade de segunda ordem ou em covariância.

3.3.1 Estacionariedade estrita

Um processo estocástico Y_t é estacionário em sentido estrito, se e somente se:

$$F\left[Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots., Y_{t_n}\right] = F\left[Y_{t_{1+k}}, Y_{t_{2+k}}, \ldots., Y_{t_{n+k}}\right] \quad \forall(t_1, t_2, \ldots., t_n)$$

isto é, se a função de distribuição de qualquer conjunto finito de variáveis aleatórias n do processo não é alterada se é deslocada k períodos no tempo.

3.3.2 Estacionariedade em covariância

Um processo estocástico Y_t é estacionário em covariância, se e somente se:

a) É estacionário em média, isto é, todas as variáveis aleatórias do processo têm a mesma média e é finita:
$$E(Y_t) = \mu < \infty, \ \forall t$$
b) Todas as variáveis aleatórias têm a mesma variância, e é finito, isto é, a dispersão em relação à média constante ao longo do tempo é igual para todas as variáveis do processo:
$$V(Y_t) = E[Y_t - \mu]^2 = \sigma_Y^2 < \infty, \qquad \forall t$$
c) A autocovariância depende apenas do número de períodos de separação entre as variáveis e não do tempo, ou seja, a covariância linear de duas variáveis aleatórias do processo que distem k períodos de tempo é a mesma que entre quaisquer duas outras variáveis, também separadas k períodos.
$$cov(Y_t, Y_s) = E[Y_t - \mu][Y_s - \mu] = \gamma_{|t-s|} = \gamma_k < \infty, \qquad \forall t$$

Um processo estocástico estacionário em covariância é caracterizado se é conhecido: μ, $V(Y_t)$ e γ_k

3.3.3 Função de autocovariância e autocorrelação

Em princípio, considerando um processo estocástico Y_t, começando em algum momento no passado distante e terminando em um futuro indeterminado, pode ser calculado um número indefinido de autocovariâncias, então pode-se definir uma função que agrupa a todas.

3.3.3.1 Função de autocovariâncias

A função de autocovariâncias de um processo estocástico estacionário é uma função de k (número de períodos de separação entre as variáveis) que recolhe o conjunto das autocovariâncias do processo e se denota por:

$$\gamma_k, \quad k = 0,1,2, \ldots..$$

Características da função de autocovariâncias:

- Inclui a variância do processo para $k = 0$: $\gamma_0 = E[Y_t - \mu][Y_t - \mu] = V(Y_t)$
- É uma função simétrica: $\gamma_k = E[Y_t - \mu][Y_{t+k} - \mu] = E[Y_t - \mu]E[Y_{t-k} - \mu] = \gamma_{-k}$

A função de autocovariâncias de um processo estocástico recolhe toda a informação sobre a estrutura dinâmica linear, mas depende das unidades de medida da variável; então, em geral, se costuma utilizar a função de autocorrelação.

3.3.3.2 Função de autocorrelação (FAC)

O coeficiente de autocorrelação de ordem k de um processo estocástico estacionário mede o grau de associação linear entre duas variáveis aleatórias, separadas por k períodos (Casimiro, 2009):

$$\rho_k = \frac{cov(Y_t Y_{t+k})}{\sqrt{V(Y_t)V(Y_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{3.4}$$

Sendo um coeficiente de correlação, o mesmo não depende de unidades, e: $\gamma_k \leq 1, \ \forall k$

A função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário é uma função de k, que agrupa todos os coeficientes de autocorrelação do processo e é denotado ρ_k, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. A função de autocorrelação é normalmente representada graficamente por um *correlograma*, como ilustrado na Figura 3.1.

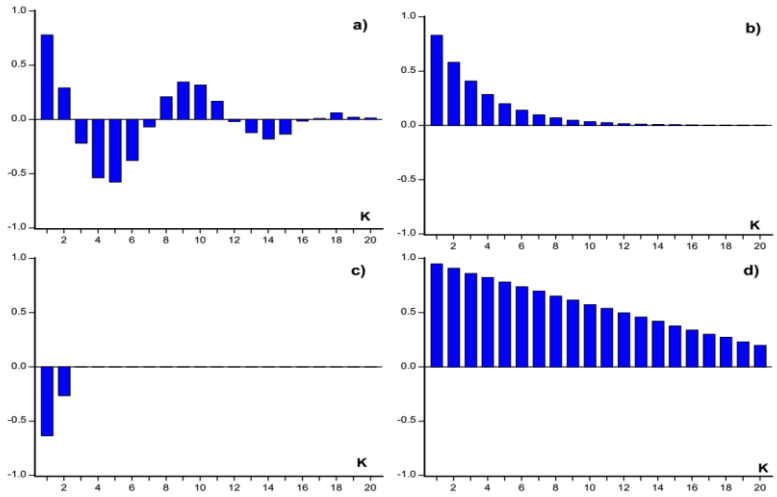


Figura 3.1: Funções de autocorrelação (correlograma) (Casimiro, 2009).

As características da função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário são:

- O coeficiente de autocorrelação de ordem 0 é, por definição, 1. Portanto, muitas vezes não é explicitamente incluído na função de autocorrelação.
- É uma função simétrica: $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_{-k}}{\gamma_0} = \rho_{-k}$ Portanto, nos correlogramas, apenas é apresentada a função de autocorrelação para valores positivos.
- A função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário tende rapidamente a zero quando k tende a ∞.

A função de autocorrelação será o principal instrumento utilizado para definir a estrutura dinâmica linear do modelo. Os gráficos da Figura 3.1 mostram quatro correlogramas correspondentes a diferentes séries temporais. Os correlogramas a), b) e c) diminuem rapidamente para zero à medida que aumenta k, portanto, são correlogramas correspondentes a séries estacionárias. Em contraste, os coeficientes de autocorrelação do correlogramas d) diminuem lentamente, de forma linear, por isso não correspondem a uma série estacionária.

3.3.4 Processo ruído branco

O processo estocástico mais simples é chamado de ruído branco que é uma sequência de variáveis aleatórias com média zero, variância constante e covariâncias zero. É usualmente representada por, em $t = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$:

$$E(a_t) = 0, \qquad V(a_t) = \sigma^2, \qquad cov(a_t a_s) = 0\,, \qquad \forall t \neq s$$

Assim, um processo de ruído branco, $a_t \sim RB(0, \sigma^2)$, é estacionário se a variância σ^2 é finita, com função de autocovariância (FACV):

$$\gamma_k = \sigma^2, \quad k = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma_k = 0, \qquad k > 0$$

e a função de autocorrelação (FAC):

$$\gamma_k = 1, \qquad k = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_k = 0, \qquad k > 0$$

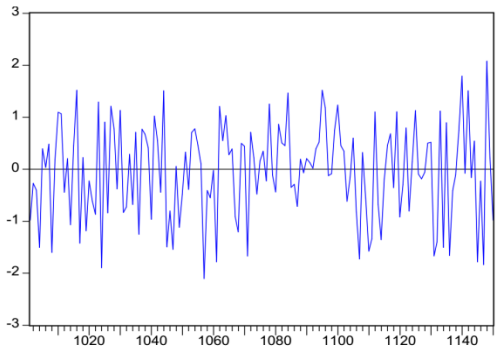


Figura 3.2: Exemplo de um processo de ruído branco (Casimiro, 2009).

A Figura 3.2 mostra um processo de ruído branco com variância unitária. Note-se que a série simulada oscila em torno de um nível constante de zero com uma dispersão constante e aleatoriamente sem nenhum padrão de comportamento. Dado que a característica fundamental das séries temporais é a dependência do tempo entre as observações, portanto, não é esperado que muitas séries apresentem um comportamento que responda a uma ausência de correlação temporal, no sentido de que o que acontece em um instante de tempo, não está relacionado de forma linear com o que aconteceu no passado. De qualquer forma, o processo de ruído branco é muito útil para a análise de séries de tempo, porque é a base para a construção dos modelos "*ARMA (q, p)*", que serão descritos na seção 3.6.

3.4 Processos de médias móveis "MA(q)"

Seja $\{\epsilon_t\}$ um processo discreto puramente aleatório com média zero e variância σ_t^2. Um processo $\{X_t\}$ é chamado de processo de médias móveis de ordem q, ou MA(q), se:

$$X_t = \epsilon_t + \beta_1\epsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q\epsilon_{t-q} \tag{3.5}$$

sendo $\beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, q$. Não é difícil verificar como ficam a média e a variância deste processo,

$$E(X_t) = E(\epsilon_t) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j E\left(\epsilon_{t-j}\right) = 0$$

$$V(X_t) = V(\epsilon_t) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2 V\left(\epsilon_{t-j}\right) = \left(1 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_q^2\right)\sigma_\epsilon^2.$$

Além disso, como $cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = \sigma_\epsilon^2$ para $t = s$ e $cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ para $t \neq s$, a função de autocovariância é dada por

$$\gamma(k) = cov(X_t, X_{t+k})$$

$$\gamma(k) = cov(\epsilon_t + \beta_1\epsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q\epsilon_{t-q}, \epsilon_{t+k} + \beta_1\epsilon_{t+k} + \cdots + \beta_q\epsilon_{t+k-q})$$

$$\gamma(k) = \begin{cases} 0 & k > q \\ \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} & k = 0, \dots, q \\ \rho(-k) & k < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

com $\beta_0 = 1$. Como a média e a variância são constantes e $\gamma(k)$ não depende de t , o processo é (fracamente) estacionário para todos os possíveis valores de $\beta_1, \dots, \beta_q$. Além disso, se os ϵ_t forem normalmente distribuídos os X_t também serão e, portanto, o processo será estritamente estacionário (Ehlers, 2005).

A função de autocorrelação pode ser facilmente obtida dividindo-se (3.6) por $\gamma(0)$,

$$\rho(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} \Big/ \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q \\ \rho(-k) & k < 0 \end{cases}$$

Note que a função tem um ponto de corte na defasagem q, i.e. $\rho(k) = 0$ para $k > q$. Esta é uma característica específica de processos de médias móveis e será útil na especificação do valor de q na prática.

Vamos analisar agora com mais detalhes o caso particular do processo $MA(1)$. A função de autocorrelação fica

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \beta_1/(1+\beta_1^2) & k = \pm 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

O processo é estacionário para qualquer valor de β_1 , mas em geral é desejável impor restrições para que ele satisfaça uma condição chamado invisibilidade. Consideremos os seguintes processos $MA(1)$

$$X_t = \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

$$X_t = \epsilon_t + \frac{1}{\theta} \epsilon_{t-1}.$$

Substituindo em (3.5) não é difícil verificar que estes dois processos diferentes têm exatamente a mesma função de autocorrelação. Assim, não é possível identificar um processo MA(1) único a partir da função de autocorrelação. Por outro lado, podemos fazer substituições sucessivas e reescrever estes dois processos colocando ϵ_t em função de $X_t, X_{t-1}, \dots$, i.e.

$$\epsilon_t = X_t - \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} - \theta^3 X_{t-3} + \cdots$$

$$\epsilon_t = X_t - \frac{1}{\theta} X_{t-1} + \frac{1}{\theta^2} X_{t-2} - \frac{1}{\theta^3} X_{t-3} + \cdots$$

Se $|\theta| < 1$, a primeira série converge e o modelo é dito ser inversível, mas a segunda não converge e o modelo é não inversível. Ou seja, a condição de inversibilidade (neste caso $|\theta| < 1$) garante que existe um único processo $MA(1)$ para uma dada função de autocorrelação. Outra consequência da inversibilidade é que o processo $MA(1)$ pode ser reescrito como uma regressão de ordem infinita nos seus próprios valores defasados.

Para um processo $MA(q)$ esta condição pode ser melhor expressa usando-se o operador de retardo, denotado por B e definido como

$$B^j X_t = X_{t-j} \quad \text{para todo } j. \tag{3.8}$$

A equação (3.5) pode então ser reescrita como

$$X_t = \left(1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q\right)\epsilon_t = \theta(B)\epsilon_t \tag{3.9}$$

onde $\theta(B)$ é um polinômio de ordem q em B. Um processo MA(q) é inversível se as raízes da equação

$$\theta(B) = 1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q \tag{3.10}$$

estiverem fora do círculo unitário. Ou seja, se $\delta_1, \ldots, \delta_q$ são q soluções de $\theta(B) = 0$ então o processo é imersível se $|\delta_i| > 1, i = 1, \ldots, q$. Teremos então 2^q modelos com a mesma função de autocorrelação mas somente um deles será inversível.

Finalmente, vale notar que uma constante μ qualquer pode ser adicionada ao lado direito de (3.5) dando origem a um processo com média μ. O processo continuará sendo estacionário com $E(X_t)$ = μ e em particular a função de autocorrelação não será afetada (Ehlers, 2005).

3.5 Processos Autorregressivos "AR(p)"

Suponha que $\{\epsilon_t\}$ seja um processo puramente aleatório com média zero e variância σ_ϵ^2. Um processo $\{X_t\}$ é chamado de processo autorregressivo de ordem p, ou $AR(p)$, se

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t. \tag{3.11}$$

Os processos AR podem ser usados como modelos se for razoável assumir que o valor atual de uma série temporal depende do seu passado imediato mais um erro aleatório.

Por simplicidade, começa-se mostrando em detalhes processos de primeira ordem, AR(1), i.e.

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \epsilon_t. \tag{3.12}$$

Nota-se que o processo $AR(1)$, dado X_{t-1}, X_t não depende de $X_{t-2}, X_{t-3}, \ldots$. Fazendo substituições sucessivas em (3.12), obtem-se que

$$X_t = \alpha(\alpha X_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = \alpha^2 X_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$$

$$X_t = \alpha^2(\alpha X_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \alpha\epsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t = \alpha^3 X_{t-3} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \alpha\epsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

.
.
.

$$X_t = \alpha^{r+1} X_{t-r-1} + \sum_{j=0}^{r} \alpha^j \epsilon_{t-j}.$$

Se X_t for estacionário com variância finita σ_X^2 podemos escrever que

$$E\left[X_t - \sum_{j=0}^{r} \alpha^j \epsilon_{t-j}\right]^2 = \alpha^{2r+2} E(X_{t-r-1}^2) = \alpha^{2r+2}\sigma_X^2$$

e se $|\alpha| < 1$ temos que $\alpha^{2r+2} \to 0$ quando $r \to \infty$. Portanto, esta condição nos permite escrever X_t como o seguinte processo MA infinito,

$$X_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \cdots \tag{3.13}$$

e assim $|\alpha| < 1$ é uma condição suficiente para que X_t seja estacionário. Neste caso, reescrevendo o processo k períodos à frente, i.e.,

$$X_{t+k} = \epsilon_{t+k} + \alpha\epsilon_{t+k-1} + \cdots + \alpha^k\epsilon_t + \cdots \tag{3.14}$$

note como o efeito de $\epsilon_t$sobre X_{t+k} diminui à medida que k aumenta e por isso é chamado *efeito transitório.*

Podemos também usar o operador de retardo reescrevendo a equação (3.14) como

$$(1-\alpha)X_t = \epsilon_t$$

ou equivalentemente

$$X_t = \frac{1}{(1-\alpha B)}\epsilon_t = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \cdots)\epsilon_t = \epsilon_t + \alpha\epsilon_t + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \cdots$$

Escrevendo o processo $AR(1)$ neste formato de MA infinito fica fácil ver que a sua média e variância são dados por

$$E(X_t) = 0 \quad e \quad V(X_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\alpha^2}.$$

A função de autocovâriancia pode ser obtida usando os resultados acima. Reescrevendo a equação (3.14) como

$$X_{t+k} = \epsilon_{t+k} + \cdots + \alpha^{k-1}\epsilon_{t+1} + \alpha^k\epsilon_t + \alpha^{k+1}\epsilon_{t-1} + \alpha^{k+2}\epsilon_{t-2} + \cdots \tag{3.15}$$

pode-se verificar que, para qualquer $k = 1,2, \ldots$,

$$cov(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \cdots, \epsilon_{t+k} + \cdots + \alpha^{k-1}\epsilon_{t+1}) = 0$$

Portanto,

$$E(X_t X_{t+k}) = cov(\epsilon_t + \alpha\epsilon_{t-1} + \alpha^2\epsilon_{t-2} + \cdots, \alpha^k\epsilon_t + \alpha^{k+1}\epsilon_{t-1} + \alpha^{k+2}\epsilon_{t-2} + \cdots$$

$$= \alpha^k E(\epsilon_t^2) + \alpha^{k+2}E(\epsilon_{t-1}^2) + \alpha^{k-4}E(\epsilon_{t-2}^2) + \cdots$$

$$= \alpha^k\sigma_\epsilon^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots) = \alpha^k\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\alpha^2} = \alpha^k\sigma_X^2 = \gamma(k).$$

Assim, a função de autocorrelação é $\rho(k) = \alpha^k$ para $k = 0,1,2,\ldots$. Como a média e a variância são constantes e $\gamma(k)$ não depende de t, o processo $AR(1)$ com $|\alpha| < 1$ é estacionário.

Na Figura 3.3, são mostradas graficamente as autocorrelações teóricas de um processo $AR(1)$ até a defasagem $k = 20$ para α igual a $(0,8), (-0,8), (0,2)$ e $(-0,2)$. Note como a função de autocorrelação decai rapidamente para zero quando α = 0,2, e se alterna entre valores positivos e negativos quando $\alpha = -0,8$. Ou seja, sempre há um decaimento exponencial para zero, mas este decaimento depende do sinal e magnitude de α.

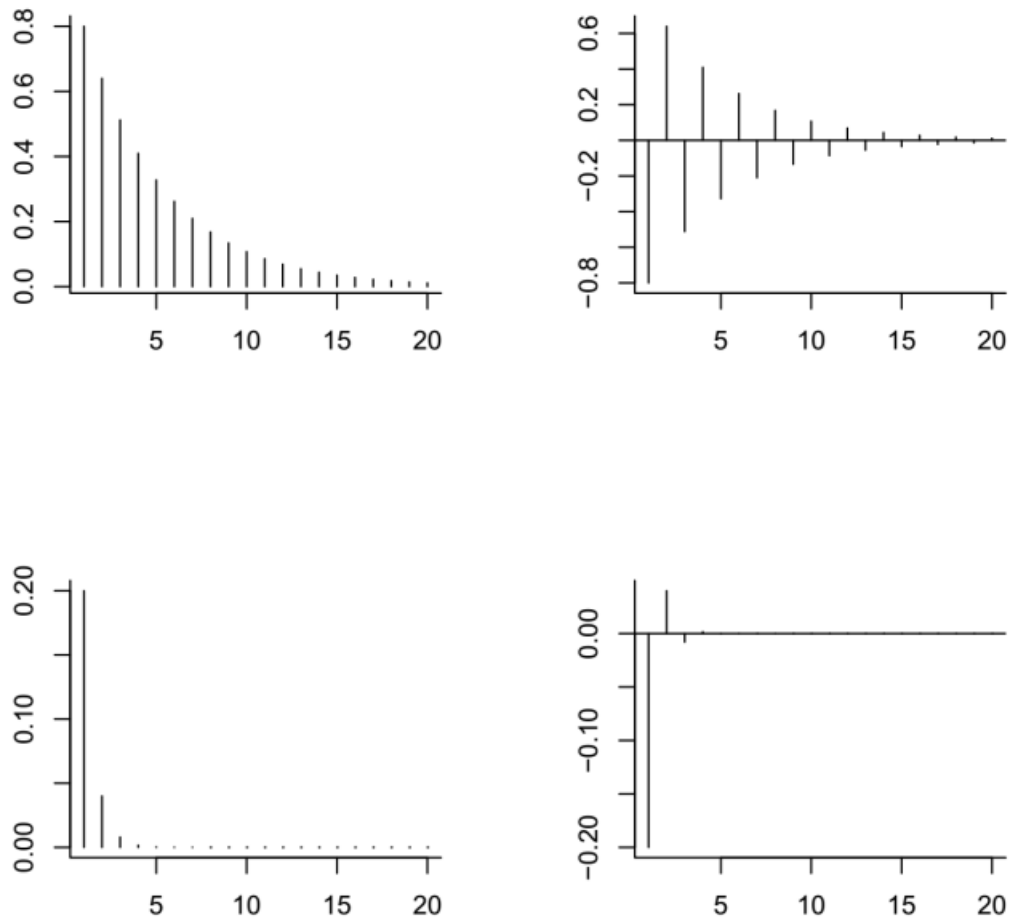


Figura 3.3: As 20 primeiras autocorrelações teóricas de um processo $AR(1)$ com (a) $\alpha = 0,8$, (b) $\alpha = -0,8$, (c) $\alpha = 0,2$ e (d) $\alpha = -0,2$; (Ehlers, 2005).

Generalizando os resultados acima para um processo $AR(p)$ escrevemos novamente X_t como um processo MA infinito com coeficientes $\psi_0, \psi_1, \ldots$, i.e.

$$X_t = \psi_0\epsilon_t + \psi_1\epsilon_{t-1} + \psi_2\epsilon_{t-2} + \cdots = (\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots)\epsilon_t = \psi(B)\epsilon_t. \qquad (3.16)$$

e em analogia com o caso AR(1) segue que o processo será estacionário se $\sum_j \psi_j^2 < \infty$. Usando agora o operador de retardo, a equação (3.12) será

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p\right)X_t = \epsilon_t \quad \text{ou} \quad \phi(B)X_t = \epsilon_t \qquad (3.17)$$

e, portanto, o processo $AR(p)$ pode ser escrito como

$$X_t = \phi(B)^{-1}\epsilon_t = \psi(B)\epsilon_t \qquad (3.18)$$

Assim, os coeficientes ψ_j podem ser obtidos a partir dos coeficientes α_j fazendo-se

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p\right)(\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = 1$$

Desenvolvendo-se esta expressão segue que

$$\psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots - \alpha_1\psi_0 B - \alpha_1\psi_1 B^2 - \alpha_1\psi_2 B^3 - \cdots - \alpha_2\psi_0 B^2 - \alpha_2\psi_1 B^3 - \alpha_2\psi_2 B^4 \ldots$$

$$- \cdots \alpha_p\psi_0 B^p - \alpha_p\psi_1 B^{p+1} - \cdots = 1 + 0B + 0B^2 + \cdots$$

donde obtém-se os coeficientes MA recursivamente como

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = \psi_0\alpha_1$$

$$\psi_2 = \psi_1\alpha_1 + \psi_0\alpha_2$$

$$\psi_3 = \psi_2\alpha_1 + \psi_1\alpha_2 + \psi_0\alpha_3$$

$$\vdots$$

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{i} \psi_{i-j}\alpha_j$$

O efeito de $\epsilon_t$sobre X_{t+k} é dado por $\psi_k, k = 1,2, \ldots$.

Pode-se mostrar que a condição de estacionariedade do processo X_t é que todas as raízes de $\phi(B) = 0$ estejam fora do círculo unitário (Box *et al.*, 2015). Em particular, para $p = 1$ temos que $\phi(B) = 1 - \alpha B = 0$; implica que $B = 1/\alpha$ e a condição de estacionariedade fica $|\alpha| < 1$ conforme já havia sido verificado (Ehlers, 2005).

Para reescrever um processo $AR(p)$ em forma vetorial, define-se $\boldsymbol{Z_t} = \left(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\right)'$ e, portanto,

$$\boldsymbol{Z_t} = \Phi \boldsymbol{Z_{t-1}} + \boldsymbol{u_t} \tag{3.19}$$

sendo a matriz $\boldsymbol{\Phi}$ definida como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{p-1} & \phi_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{u_t} = (\epsilon_t, 0, \ldots, 0)'$

Para obter a função de autocorrelação de um processo $AR(p)$ é algebricamente mais simples assumir, a priori, que o processo é estacionário com $E(X_t) = 0$, $V(X_t) = {\sigma_X}^2$ e $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma(k)$. Neste caso, multiplicando a equação (3.6) por X_{t-k}, i.e

$$X_t X_{t-k} = \alpha_1 X_{t-1} X_{t-k} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} X_{t-k} + \epsilon_t X_{t-k}$$

e tomando o valor esperado, obtemos que

$$E(X_t X_{t-k}) = \gamma(k) = \alpha_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + \cdots + \alpha_p E\left(X_{t-p} X_{t-k}\right)$$

$$= \alpha_1 \gamma(k-1) + \cdots + \alpha_p \gamma(k-p), \;\; k > 0.$$

Dividindo-se ambos os lados pela variância constante ${\sigma_X}^2$ obtem-se que

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \cdots + \alpha_p \rho(k-p), \quad k > 0,$$

chamadas equações de Yule-Walker.

Por exemplo, para um processo $AR(1)$ com coeficientes α segue que $\rho(1) = \alpha$, $\rho(2) = \alpha\rho(1) = \alpha^2, \ldots, \rho(k) = \alpha^k$ como já havia sido verificado. Para um processo $AR(2)$ com coeficientes α_1 e α_2 segue que

$$\rho(1) = \alpha_1 \rho(0) + \alpha_2 \rho(1) \Longrightarrow \; \rho(1) = \alpha_1/(1-\alpha_2)$$

e as outras autocorrelações são obtidas interativamente como

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2), \quad k \geq 2 \tag{3.20}$$

3.6 Modelos Mistos ARMA

Combinando-se modelos AR e MA pode-se obter uma representação adequada com um número menor de parâmetros. Processos autorregressivos de médias móveis ($ARMA$) formam uma classe de modelos muito úteis para descrever dados de séries temporais. O modelo $ARMA(p, q)$ (Ehlers, 2005) é dado por:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \cdots + \alpha_p X_{t-p} + \epsilon_t + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \epsilon_{t-q} \tag{3.21}$$

onde $\{\epsilon_t\}$ é um processo puramente aleatório com média zero e variância ${\sigma_t}^2$. Note que, modelos AR ou MA podem ser obtidos como casos especiais quando $p = 0$ ou $q = 0$. Usando o operador de retardo o modelo pode ser reescrito como

$$\left(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \cdots - \alpha_p B^p\right) X_t = \left(1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \cdots + \beta_q B^q\right) \epsilon_t$$

ou

$$\phi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t \tag{3.22}$$

Os valores de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ que tornam o processo estacionário são tais que as raízes de $\varphi(B) = 0$ estão fora do círculo unitário. Analogamente, os valores de $\beta_1, \ldots, \beta_q$ que tornam o processo inversível são tais que as raízes de $\theta(B) = 0$ estão fora do círculo unitário.

Vale notar que as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial (facp) ficam consideravelmente mais complicadas em processos $ARMA$. De um modo geral, para um processo $ARMA(p, q)$ estacionário a função de autocorrelação tem um decaimento exponencial ou oscilatório após a defasagem q enquanto que a facp tem o mesmo comportamento após a defasagem p (Ljung, 1999a). Em princípio, este resultado pode ser utilizado para auxiliar na determinação da ordem (p, q) do processo, mas na prática pode ser bastante difícil distinguir entre decaimentos exponenciais e oscilatórios através das estimativas destas funções.

Na Tabela 3.1, são mostradas as propriedades teóricas das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para alguns processos estacionários como auxiliar na identificação do modelo.

Tabela 3.1: Propriedades teóricas da fac e facp.

Processo	FAC	FACP
Séries aleatórias	0	0
$AR(1), \alpha > 0$	Decaimento exponencial	$0, k \geq 2$
$AR(1), \alpha < 0$	Decaimento oscilatório	idem
$AR(p)$	Decaimento para zero	$0, k > p$
$MA(1)$	$0, k > 1$	Decaimento oscilatório
$ARMA(p, q)$	Decaimento a partir de q	Decaimento a partir de p

3.6.1 Estimativa da ordem do modelo ARMA

O processo de encontrar a ordem do modelo ARMA (ou AR) de uma série de tempo envolve duas tarefas distintas: primeiro, a estimativa dos parâmetros do modelo $\{\alpha_i\}$ e $\{\beta_i\}$ (3.21); e segundo, a determinação da ordem do modelo q e p.

A estimativa dos parâmetros para modelos ARMA é uma tarefa complexa(Ljung, 1999b). O princípio da estimativa do parâmetro ARMA é a minimização dos erros de predição ou dos resíduos estatísticos. Para um processo ARMA, há uma relação não-linear entre o erro de previsão ϵ e Y_t. Portanto, precisamos de um método numérico para estimar o vetor de coeficiente $T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$. (Ljung, 1999a)

A estimativa da ordem do modelo é o ponto crucial da metodologia de identificação do sistema. A ordem do modelo pode ser determinada, por exemplo, com base no chamado *Critério de Informação Akaike* (AIC) (Bozdogan, 1987). Isto, por sua vez, baseia-se na minimização do erro de predição, que é proporcional à soma dos desvios quadráticos da série temporal original e da previsão. Portanto, a ordem do modelo depende do nível de ruído (aumenta com o aumento do nível de ruído).

O critério de Informação de Akaike (AIC) determina a ordem a partir de informações sobre o comprimento dos dados utilizados, a ordem do modelo e o intervalo de amplitudes de ruído residual. O critério garante que a "função de verossimilhança" (a probabilidade conjunta de todas as medições) é maximizada. Isto é conseguido minimizando o AIC, definido como:

$$AIC = K\ ln\left(\frac{\sigma^2}{C_0}\right) + 2N \tag{3.23}$$

Onde K é o comprimento da série de tempo, σ^2 é o desvio padrão do ruído residual, N é a ordem do modelo AR, e C_o representa a correlação no tempo zero.

Capítulo 4

Análises de Instabilidades em Reatores a Água Fervente

Atualmente, existem cerca de 440 reatores nucleares em funcionamento, dos quais 92 são do tipo água fervente (Boiling Water Reactor – BWR). Vários BWRs sofreram incidentes de instabilidade de potência, os quais são motivo de preocupação para os operadores, agências reguladoras e o público em geral.

O interesse na instabilidade dos reatores nucleares começou a crescer após os incidentes registados pela primeira vez com reatores do tipo BWR. Em 1978, o reator da Finlândia TVO-I de 800 MW, um BWR, sofreu oscilações autossustentadas que conduziram à parada de emergência do reator (Valtonnen, 1990). Um tipo semelhante de oscilações foi observado na Itália, na planta de Caorso (860 MW) em 1984, e foi o primeiro evento que foi amplamente descrito na literatura. No entanto, apenas após o evento de LaSalle no Illinois, em março de 1988 (NRC, 1988), a dinâmica e problemas de estabilidade do BWR atraíram definitivamente a atenção das autoridades e do público em geral. Pouco depois deste evento, em 1990, um workshop internacional sobre a estabilidade de BWRs, realizado em Long Island, EUA, reuniu mais de 100 participantes para compartilhar sua experiência com a modelagem e a análise das dinâmicas e instabilidades dos reatores BWR. Após esse workshop, outros trabalhos foram desenvolvidos para o estudo da instabilidade, por exemplo, o trabalho de (Pereira et al., 1992), que aborda o estudo da estabilidade através da reconstrução dinâmica e o modelo auto regressão, aplicado ao reator da Espanha Cofrentes (992 MW), sendo que os modelos foram usados para determinar os expoentes de Lyapunov. O evento de instabilidade na usina nuclear de Cofrentes ocorreu em 1991, durante problemas no *startup* do reator. No momento do evento, a potência do reator era de 42% com uma vazão mássica de 30,72%.

Em 26 de outubro de 1989, o reator Ringhals-1, também um BWR, sofreu um incidente de instabilidade. O incidente ocorreu durante o *startup* do reator, após a interrupção prevista no verão. Com uma potência de 75% e 3720 kg/s, a potência começou a oscilar num ciclo limite a uma frequência de 0,5 Hz. A amplitude das oscilações de potência atingiu 16%. Após alguns minutos, as oscilações foram amenizadas por meio de intervenção dos operadores. Durante as medições feitas 6 horas antes do incidente, os sinais de monitoração da faixa de potência local registaram-se como defasadas. A maior diferença observada foi de 130 graus de fase entre as duas metades do núcleo. Depois do incidente, várias medidas de estabilidade foram realizadas no reator Ringhals-1. Os dados medidos foram utilizados posteriormente para produzir um benchmark internacional (Hennig, 1996).

A estabilidade de reatores de água fervente tem sido uma questão de interesse desde várias décadas. A possibilidade de uma instabilidade do tipo acoplada neutrônica/termo-hidráulica foi predita por Thie já em 1959. Desde então, numerosos casos de eventos de instabilidade têm sido observados em várias plantas em todo o mundo. À medida que a experiência foi adquirida, vários modos diferentes de oscilações de fluxo neutrônico instáveis tornaram-se conhecidos como global, regional (azimutal) e local ou tipo canal. Em vários casos, ocorreram combinações de

dois modos, tornando difícil a quantificação das oscilações individuais e, em particular, da mais instável, a partir dos dados de medição.

Naturalmente, a existência de instabilidade em BWRs levou a uma extensa pesquisa e desenvolvimento de atividades no campo. O trabalho foi prosseguido ao longo de três caminhos diferentes. O primeiro deles diz respeito aos esforços para compreender as razões para a ocorrência de instabilidade em termos da física do núcleo, identificando a causa-raiz e os acoplamentos e mecanismos entre os vários parâmetros do sistema. Esta abordagem usa vários modelos simplificados (do ponto de vista do sistema), mas sistemas não-lineares são usados como ferramenta para avaliação (Konno, 1999; March-Leuba *et al.,* 1986). A segunda via que se sobrepõe conceitualmente à primeira, diz respeito ao cálculo numérico do parâmetro de estabilidade mais utilizado, a chamada "razão de decaimento" (*Decay Ratio* - DR) descrita, por exemplo, em (Analytis *et al.,* 2001; Hotta and Ninokata, 2002). A DR pode ser calculada com sucesso usando tais cálculos numéricos. Em várias centrais, este cálculo de DR é efetuado rotineiramente antes do *startup* do reator após o reabastecimento, para evitar a possibilidade de instabilidade durante a partida.

A terceira área, e sem dúvida a maior, diz respeito à determinação quantitativa real da razão de decaimento, a partir do ruído no fluxo de nêutrons medido (Hanggi, 2001). Em sua forma mais simples, a DR é definida como a razão entre dois máximos consecutivos (em ordem inversa) da função de autocorrelação do ruído de nêutrons.

Ao longo dos anos de operação dos BWRs, foram sugeridos vários métodos para analisar a estabilidade e determinar a razão de decaimento (Behringer and Hennig, 2002; Ortiz-Villafuerte *et al.,* 2011; Pázsit, 1995; Tsuji *et al.,* 2005). Nesses métodos, se analisa a função de autocorrelação (FAC), utilizando um procedimento de ajuste de curva. Além desses métodos paramétricos tradicionais, novos algoritmos e métodos de estimação não-paramétricos também foram utilizados. Recentemente, o método "Decomposição de Valor Singular", SVD, também tem sido usado para calcular a DR de sinais do reator Ringhals-1 (Tsuji and Shimazu, 2005).

Por outro lado, um BWR se comporta como um sistema não-linear, e é bem conhecido que os expoentes de Lyapunov, também chamados de expoentes característicos, determinam a estabilidade de qualquer tipo de comportamento no estado estacionário, incluindo soluções periódicas (ciclos limite) e caóticas de sistemas não-lineares (Eckmann and Ruelle, 1985; Liu *et al.,* 2005).

Ao longo dos anos, muitos algoritmos foram desenvolvidos para calcular os expoentes de Lyapunov a partir de dados experimentais de séries temporais (Rosenstein *et al.,* 1993; Wolf *et al.,* 1985), e este fato de determinar os expoentes de Lyapunov de um sistema não linear de uma série de tempo é um desafio importante para qualquer análise de comportamento dinâmico.

Todos os expoentes de Lyapunov de pontos de equilíbrio estáveis são números reais e negativos; no entanto, para ciclos de limite estáveis, um expoente de Lyapunov é zero e o restante é real e negativo. A estabilidade de um BWR pode ser avaliada a partir dos expoentes de Lyapunov. Se o maior valor é negativo e próximo de zero, isso significa que estamos perto das condições de ciclo limite.

4.1 Parâmetros e características principais que afetam a estabilidade

Na operação normal de um reator, os valores que medem os comportamentos termo-hidráulicos e neutrônicos não são suficientes para ter uma informação que permita conhecer com exatidão o estado da estabilidade do reator. Em geral, existem três possibilidades para as quais podem alterar-se as margens de estabilidade do BWR (Pereira, 1993):

i) **A instabilidade da planta:** está relacionada com o sistema de controle e a maneira segundo a qual a planta, como um todo, reage às perturbações externas como, por exemplo, a demanda por aumento de potência.

ii) **Instabilidades por reatividade:** os BWRs são sistemas nos quais a reatividade varia através dos coeficientes de reatividade Doppler e da densidade do moderador. Os coeficientes de reatividade são negativos, e, por conseguinte o reator é estável sem a necessidade de um sistema de controle, quando está operando em condições normais. No entanto, se a realimentação de reatividade for suficientemente forte para provocar oscilações de potência quando uma perturbação ocorre, o reator pode se tornar instável. Este tipo de instabilidade pode ocorrer, por exemplo, quando o reator opera em condições de fluxo de refrigerante reduzido, ou em condições de recirculação natural.

iii) **Instabilidade termo-hidráulica no canal:** Este tipo de instabilidade está relacionado com as características do fluxo bifásico no canal aquecido, provocando oscilações na vazão de um grupo particular de canais que, em muitos casos, não são perceptíveis de forma global. Por essa razão, são chamadas instabilidades locais.

Nos reatores nucleares BWR, a água atua ao mesmo tempo como moderador e refrigerante. Durante as condições normais de operação, os coeficientes de reatividade por densidade do moderador e por efeito Doppler são ambos negativos, de forma que o nível de potência se mantém constante sem intervenção do sistema de controle do reator.

No entanto, é sabido que os sistemas com realimentação negativa são susceptíveis de sofrer instabilidades se o ganho da realimentação ou o retardo da fase da oscilação aumenta além do valor crítico (March-Leuba, 1986). Então, o ganho da realimentação depende dos coeficientes de reatividade; no nosso caso, o mais importante é aquele que depende da densidade do moderador.

Em um reator BWR, o efeito de diminuir a densidade do moderador no estado estacionário é o aumento do valor do coeficiente de reatividade por densidade do moderador. Esta condição de funcionamento ocorre em regimes de alta razão potência/vazão, e tem um efeito desestabilizador sobre o reator.

Também as variações na distribuição radial de potência e na distribuição radial do fluxo originam variações na distribuição de vazios ao longo dos diferentes canais que, ao mesmo tempo, originam variações nos coeficientes locais de reatividade por densidade do moderador, então, é um efeito global sobre o coeficiente.

A distribuição axial de potência afeta a estabilidade dos reatores BWR de duas formas:

i) Modificando a distribuição da fração de vazio.
ii) Afetando o processo de realimentação da reatividade.

Por exemplo, uma distribuição de potência com seus fatores de picos maiores na zona inferior do núcleo, geram mais vazios. Com o aumento de vazios em todos os níveis axiais, aumenta-se a fração média de vazios no núcleo para uma relação potência-volume dada. Este efeito também aumenta o tempo de permanência das bolhas no núcleo que resulta no aumento do atraso da realimentação por reatividade, a qual, por sua vez, afeta a estabilidade.

As velocidades das bolhas afetam o atraso da fase e a taxa na qual as perturbações na densidade do moderador são eliminadas do núcleo. Por exemplo, aumentar a velocidade das bolhas afeta o atraso de fase, e aumenta a taxa na qual são eliminadas as perturbações na densidade do moderador reduzindo, desta forma, o ganho das realimentações. Portanto, se aumentamos a velocidade das bolhas aumenta-se a estabilidade do reator.

A função de transferência da pressão para o refrigerante na vazão de entrada no núcleo, no loop de recirculação, tem um efeito importante sobre a estabilidade. Em geral, uma diminuição na velocidade da bomba de recirculação aumenta o ganho e a constante de tempo, o que torna reator menos estável.

O sub-resfriamento de entrada, afeta a posição do controle da zona de ebulição, incluindo o tempo efetivo de permanência das bolhas no núcleo. Aumentar o sub-resfriamento da entrada, diminui o tempo de permanência e a fração de vazio, aumentando a estabilidade.

A vazão total através do núcleo, primeiramente, afeta a fração média de vazio e a velocidade das bolhas. Para um mesmo nível de potência, um aumento na vazão diminui a fração de vazio e incrementa a velocidade das bolhas, incrementando os dois efeitos de estabilidade do reator.

Finalmente, um aumento da potência térmica do núcleo a uma vazão constante, aumenta a fração de vazio, que poça desestabilizar o reator. No entanto, se a potência é aumentada, aumentando a velocidade das bombas de recirculação, então a vazão aumenta, e, neste caso, a fração de vazio permanece constante, mas a velocidade das bolhas aumenta e, assim, há um aumento da potência ao longo da linha de controle da vazão estabilizando o reator.

4.2 Efeitos não lineares em reatores nucleares

As equações que modelam o comportamento dinâmico de um reator nuclear são não-lineares. No entanto, qualquer sistema não-linear se comporta de forma linear, se as perturbações em torno do equilíbrio são suficientemente pequenas e o sistema linearizado é estável.

Experimentalmente verificou-se que os reatores nucleares apresentam um comportamento linear durante a operação normal. No entanto, os reatores estão sujeitos a instabilidades. Quando o ponto de equilíbrio torna-se instável, as oscilações podem aumentar o suficiente para que os efeitos não lineares tornem-se mais importantes.

Alguns experimentos onde a potência do reator é aumentada lentamente enquanto a vazão mantém-se constante, têm mostrado que, quando o nível de potência chega a um valor crítico, o reator torna-se instável.

Neste ponto, se o comportamento da potência do reator funciona como um sistema linear, as oscilações devem continuar divergindo exponencialmente. No entanto, se há um ciclo limite que restringe a amplitude de oscilação, o efeito é tipicamente não-linear (Pereira, 1993).

Para analisar os efeitos das não-linearidades na estabilidade e comportamento dinâmico de um BWR, é preciso saber onde atuam os principais processos não-lineares neste tipo de reator.

O primeiro efeito não linear aparece associado com a neutrônica. Numa representação da cinética pontual, o termo de reatividade por densidade neutrônica ($\rho(n)$) é não linear devido à realimentação da reatividade, ρ dependente de n. Fisicamente, isto significa que as perturbações na reatividade aparecem multiplicadas pela densidade de potência. A forma de calcular a realimentação de reatividade introduz outro efeito não linear devido às seções eficazes de choque, e os coeficientes de reatividade associados são funções não lineares complexas da temperatura e da densidade do moderador. Geralmente, a equação de condução de calor do combustível também é não linear já que a condutividade térmica, a densidade e a capacidade térmica do combustível dependem da temperatura. As equações de conservação do momento e energia também são não lineares. Outro efeito não linear importante encontra-se na dinâmica do circuito de recirculação.

Geralmente, estes efeitos não lineares têm pouca influência sobre a estabilidade do reator; em condições normais de funcionamento, no entanto, tornam-se fatores dominantes que regem o comportamento dinâmico do reator quando o limite de estabilidade linear é alcançado.

4.3 Mapa de operação

As condições de operação de um núcleo BWR são geralmente representadas no mapa vazão-potência; esse mapa relaciona o percentual de potência térmica do núcleo com o percentual de vazão de refrigerante no núcleo. A vazão mínima é determinado para as condições de circulação natural e para a velocidade mínima das bombas de recirculação (internos e externos).

Os procedimentos de operação para o controle de potência baseiam-se essencialmente nas variações de vazão por meio da variação da velocidade das bombas, mantendo constante a configuração de barras de controle.

O boletim 88-07 do organismo regulador dos Estados Unidos (NRC) (NRC, 1988) define em um mapa de vazão-potência, três regiões de operação com a finalidade de restringir a operação do reator para que não atinja a zona de maior risco. Para evitar essas zonas, são tomadas ações imediatas conforme o caso. Na Figura 4.1 são apresentadas as regiões onde as ações principais a tomar são: Região C - só é permitida durante o processo de partida do reator. Regiões A e B: requerem ações imediatas para sair destas zonas.

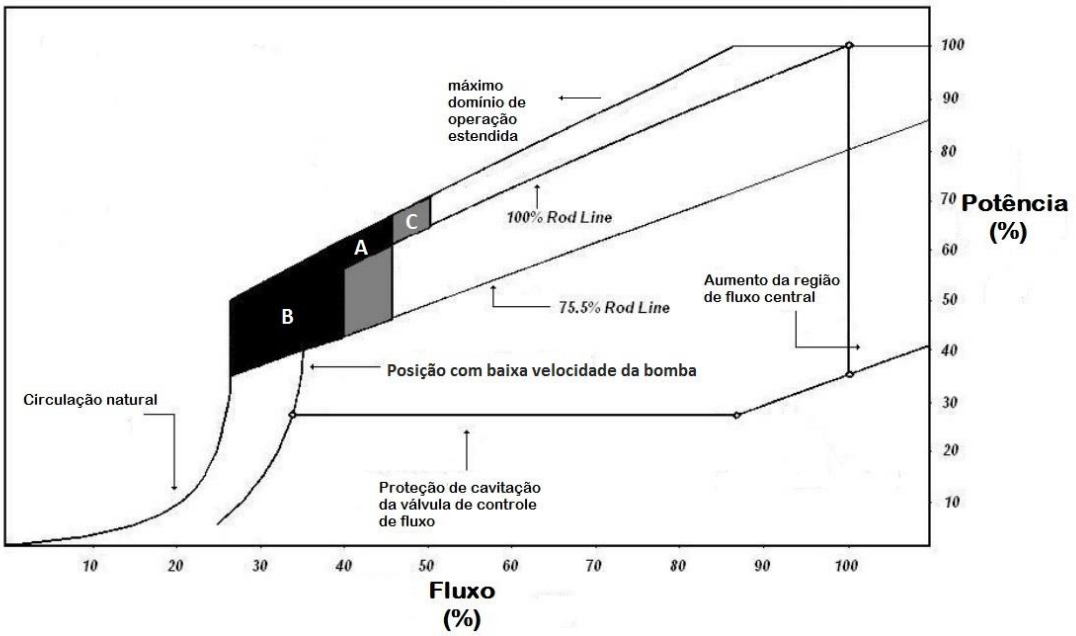


Figura 4.1: Condições de teste de baixo fluxo: três regiões específicas A, B e C (Adaptado de (Costa, 2007)).

4.4 Métodos para determinar a estabilidade dos reatores

4.4.1 Medidas de estabilidade usando técnicas de ruído neutrônico

As flutuações em torno da média dos sinais temporais de um detector em uma usina nuclear contém muita informação sobre a origem e as propriedades de transmissão de certos fenômenos dinâmicos que ocorrem no reator.

O ruído é causado pelas flutuações inerentes nas variáveis do processo num reator tais como a vazão, a pressão, fração de vazio, etc. Estas flutuações afetam a potência através da função de transferência potência-reatividade, e, por conseguinte, o ruído de potência contém informações sobre a dinâmica do reator e, consequentemente, sobre sua estabilidade. No entanto, dado que só é possível medir o ruído de saída e não a função de transferência diretamente, é difícil distinguir entre as oscilações causadas pela função de transferência da potência-reatividade e aqueles causados por flutuações em outras variáveis de processo. Por exemplo, se as condições de funcionamento são tais que a vazão torna-se instável, o ruído de potência mostraria uma oscilação devida a uma instabilidade termo-hidráulica do canal e não a uma instabilidade de reatividade. Portanto, medindo o ruído, podemos medir apenas a estabilidade de saída; se é encontrada uma instabilidade, procede-se a uma análise para determinar e identificar que tipo de instabilidade está ocorrendo.

A possibilidade de utilizar técnicas de ruído neutrônico (correlações e funções de densidade espectral de potência) para determinar a função de transferência de um sistema nuclear foi sugerida pela primeira vez por Moore (1958). Ele mostrou que a expressão teórica da função de densidade espectral de potência e a sua função de auto-correlação correspondente ao ruído do reator estavam relacionados com as características dinâmicas do sistema. Vários estudos têm demonstrado que a densidade espectral de potência do ruído neutrônico em um BWR apresenta

uma ressonância apreciável na faixa de frequências 0,3 a 0,7 Hz, como previsto teoricamente e experimentalmente a partir da função de transferência potência-reatividade. Muitos artigos foram publicados descrevendo métodos para estimar a estabilidade dos reatores, com base em algum tipo de modelo autorregressivo (AR). No entanto, existe alguma ambiguidade na definição da razão de decaimento DR (*decay ratio*) que é o parâmetro mais importante para a análise da estabilidade), geralmente definida como a taxa entre dois picos consecutivos.

A estabilidade de um BWR é avaliada geralmente usando a função de transferência potência-reatividade obtida ou de códigos determinísticos, ou de experimentos determinísticos usando sinais binários pseudo-aleatórios para estimular as perturbações. No entanto, quando tentamos obter a função de transferência a partir de medições de ruído, percebemos que não podemos porque a entrada é desconhecida e estocástica. No entanto, tem sido demonstrado que existe informação da estabilidade no ruído neutrônico.

4.4.2 Razão de decaimento (DR)

O comportamento dinâmico do núcleo de um BWR na região estável, ou seja, quando o comportamento do ciclo limite não pode ser observado, muitas vezes é descrito como um sistema de segunda ordem. Isto significa que as flutuações do $y_{(t)}$ obedecem a uma equação de segundo grau impulsado por uma força aleatória $f_{(t)}$ como:

$$\ddot{y}_{(t)} + 2\sigma\dot{y}_{(t)} + \omega^2 y_{(t)} = f_{(t)} \tag{4.1}$$

A solução homogênea, para um amortecimento pequeno é:

$$y_{(t)} = Ae^{-\sigma t}\sin(\omega t + \phi) \tag{4.2}$$

O parâmetro DR de um sistema oscilatório na sua forma mais simples é definido como a razão entre dois máximos consecutivos do sinal. Para os sistemas de segunda ordem deste parâmetro, DR é constante (Sunde, 2007), e é dado por (ver Figura 4.2):

$$DR = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_4}{A_3} \tag{4.3}$$

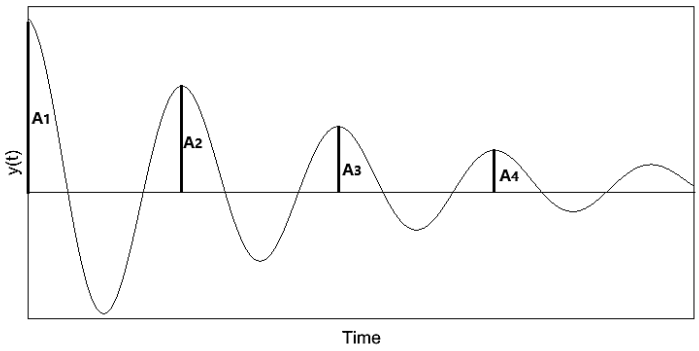


Figura 4.2: Definição do taxa de decaimento DR.

A definição acima, também pode ser escrita como se segue:

$$DR = \frac{y_{(T)}}{y_{(0)}} = \frac{Ae^{-\sigma T}\sin(\omega T + \phi)}{Ae^{-\sigma 0}\sin(\omega 0 + \phi)} = \frac{Ae^{-\sigma T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}T + \phi\right)}{A\sin(\phi)}$$

$$DR = e^{-2\pi\frac{\sigma}{\omega}} \tag{4.4}$$

Para os sistemas de segunda ordem, todas as igualdades da equação (4.3) coincidem, mas para sistemas de ordem superior os polos não coincidem.

A obtenção desse parâmetro auxilia o estudo sobre a estabilidade do sistema com as seguintes características (Sunde, 2007)

1) Se o DR < 1, o sistema é estável assintoticamente (caso da Fig. 2.7).

2) Se o DR = 1, o sistema é criticamente estável.

3) Se o DR > 1, o sistema é instável.

4.4.3 Modelo DR de tempo discreto

A Figura 4.3 mostra a relação entre os polos e o fator de amortecimento no caso de tempo discreto. Os polos de um sistema de segunda ordem da função de transferência são:

$$s = -\sigma + \omega\mathrm{i} \tag{4.5}$$

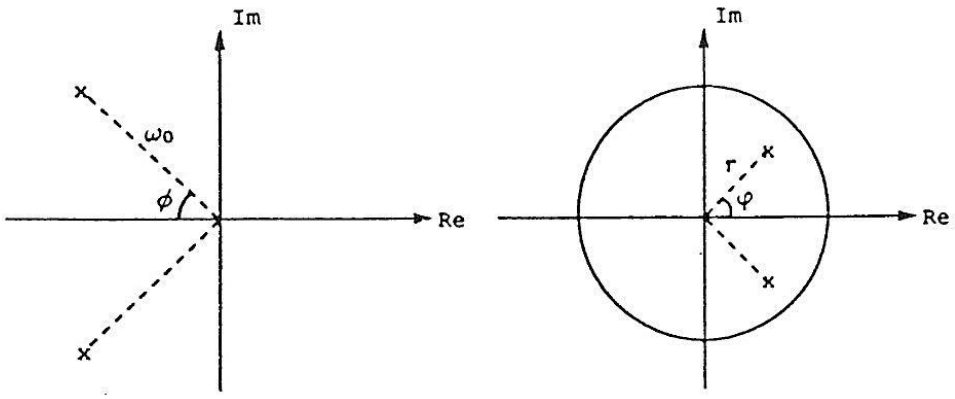


Figura 4.3: Polos contínuos e discretos para sistemas de 2ª ordem (Abrahamsson, 1991).

Temos uma conexão entre os polos contínuos e discretos da seguinte forma (Abrahamsson, 1991)

$$Z_i = e^{s_i \Delta t} \quad i = 1,2,3,4 \ldots\ldots \tag{4.6}$$

Usando a equação (4.5) e substituindo na equação dos polos (4.6)

$$Z = e^{(-\sigma+\omega \mathrm{i})\Delta t} \tag{4.7}$$

são os polos de tempo discretos, que podem ser simplificados como se segue.

$$s = e^{-\sigma\Delta t} e^{\omega \mathrm{i}\Delta t}$$

Onde, (veja a Figura 4.3)

$$\begin{cases} r = e^{-\sigma\Delta t} \\ \varphi = \omega\Delta t \end{cases}$$

Da equação anterior, σ e ω são

$$\begin{cases} \sigma = -\dfrac{\ln r}{\Delta t} \equiv -\mathrm{Re(s)} \\ \omega = \dfrac{\varphi}{\Delta t} \equiv \mathrm{Im(s)} \end{cases} \tag{4.8}$$

Substituindo a equação 2.48 em 4.5

$$s = -\frac{\ln r}{\Delta t} + \frac{\varphi}{\Delta t}\mathrm{i} \tag{4.9}$$

E, finalmente, DR é obtido substituindo a equação (4.9) em (4.4):

$$DR = e^{2\pi \frac{\mathrm{Re}(s)}{\mathrm{Im}(s)}} \tag{4.10}$$

A frequência natural de oscilação, associada à equação (4.1) para o caso discreto, é:

$$\mathrm{NF} = \frac{\mathrm{Im}(s)}{2\pi} \tag{4.11}$$

4.5 Códigos termo-hidráulicos

A avaliação e evolução da segurança das usinas nucleares estão estreitamente relacionadas com a capacidade de determinar as distribuições temporais e espaciais das condições de fluxo termo-hidráulico (TH) juntamente com os efeitos associados de fontes de calor e dissipadores de calor através do sistema de refrigeração do reator.

Os códigos de sistemas TH (por exemplo, RELAP5, ATHLET, CATHARE, ATHLE, TRAC-BF1, COBRA-TF, VIPRE-01) são ferramentas úteis que podem ser aplicadas à análise da segurança da central nuclear e avaliação da resposta dos reatores às perturbações dos processos especificados. As experiências acumuladas de uma quantidade cada vez maior de análise proporcionam uma guia completa para o uso dos códigos. No entanto, ainda existem áreas de aplicativos de códigos que revelam uma experiência limitada, como em transitórios em que os efeitos de propagação de ondas de pressão são importantes e para os quais se produz uma formação extensa de fluxo 3D e recirculação em certas partes de um sistema. Estes tipos de condições de fluxo de refrigerante podem ter uma grande influência no curso dos transitórios, também em relação à resposta de reatividade do núcleo. Portanto, torna-se essencial obter uma simulação precisa da distribuição do campo de fluxo do refrigerante na entrada do núcleo.

4.5.1 Código RELAP5

O desenvolvimento do código da família RELAP, começou há mais de 4 décadas pelo governo dos EUA. No entanto, o código RELAP5 foi inicialmente desenvolvido para suportar a análise de acidentes postulados em centrais nucleares comerciais nos Estados Unidos. As diferentes versões do código têm sido amplamente distribuídas em todo o mundo e agora é usada para uma variedade de fins, tais como a) pesquisa básica em termo-hidráulica de fluxos bifásicos, b) para projetar experimentos de termo-hidráulica em pequena e grande escala para reatores de pesquisa e usinas comerciais, e c) para avaliar a segurança de usinas nucleares.

A versão RELAP5/MOD2 foi uma das mais amplamente utilizadas e ainda é usada para apoiar a regulação das usinas comerciais nos EUA, Europa e Ásia. RELAP/MOD3 (US NRC, 2001), foi lançado no final dos anos 80. O desenvolvimento de SCDAP/RELAP que incorpora o modelo RELAP5, começou a desenvolver-se em 1981 pela Comissão Reguladora Nuclear como resultado do grave acidente em Three Mile Island.

4.5.2 Caraterísticas Gerais

Um sistema de código, como o RELAP5, consiste de:

- Equações de balanço,
- Equações constitutivas,
- Modelos especiais (*Pump, Fuel Gap, etc.*),
- Equações de transferência e condução de calor,
- Neutrônica, normalmente 0-D acoplado às equações de balanço e às equações constitutivas via coeficientes de combustível e de moderador ou via temperatura das estruturas e do fluido, respectivamente,
- Resultados do processo de qualificação.

Os dados de entrada necessários à simulação de um sistema complexo, tal como um sistema termonuclear, podem ser divididos em quatro áreas distintas:

Hidrodinâmica

- Todas as áreas e comprimentos de escoamentos e orientações verticais (inclinação) dos componentes do sistema,
- Rugosidade do material e interfaces fluido/parede,
- Informação suficiente para calcular perdas de carga (geometrias curvas, expansão de área, geometria das válvulas),
- Condições iniciais do reator.
- Estruturas de Calor
- Geometria dos componentes,
- Tipos de materiais e propriedades termofísicas,
- Localização das fontes quentes, distribuições iniciais de temperatura.
- Sistemas de Controle
- Filtros, ganhos, limites de saturação, atrasos, tempos de abertura/fechamento de válvulas,

- Velocidades máxima/mínima das bombas, etc.

Neutrônica

- Reatividade inicial,
- Dados sobre a exposição,
- Dados sobre a fração de nêutrons atrasados, fração dos produtos de fissão, etc.

4.6 Códigos neutrônicos

Para a cinética de nêutrons, os modelos 1D e 3D estão disponíveis. Obviamente, se o interesse é analisar os fenômenos de oscilação regional, um modelo de cinética de nêutrons em 3D é essencial. Normalmente, o cálculo da cinética nêutronica realiza-se num procedimento de dois passos. Na primeira etapa geram-se as seções de choque macroscópicas para os tipos de combustíveis e composições do núcleo numa forma que se pode usar diretamente na segunda etapa. A seção de choque é geralmente obtida resolvendo a equação integral do transporte de nêutrons de Boltzmann para conjuntos de combustível individuais, incluindo as probabilidades dependentes de energia dos nêutrons para as interações destes com vários isótopos (Perelló, 2007).

4.6.1 Código PARCS

PARCS é um código de cálculo do núcleo que resolve problemas de *steady-state* no espaço tridimensional dependente do tempo (1998). PARCS resolve as equações de difusão de multigrupos em geometria cartesiana, cilíndrica ou hexagonal. Existe uma versão diretamente acoplada ao código de cálculo termo-hidráulico TRACE para o cálculo transitório, e pode ser acoplado também ao código RELAP5 através do uso de uma Máquina Paralela Virtual - PVM (*Parallel Virtual Machine*). O modelo GENPMAX é usado para processar as seções de choque geradas pelos códigos e processá-las no formato PMAX utilizado pelo PARCS.

A solução de problemas de cinética espacial deve tratar problemas físicos como o transporte de nêutrons e a geração e decaimento de precursores. Deve-se resolver o problema do reator crítico associado em k e a equação de transporte com dependência temporal.

O primeiro passo para resolver estes problemas, é dicretizar o espaço e, no caso de dependência do tempo, também o tempo. Para discretizar o tempo, PARCS utiliza o método *alfa2* além de uma integração analítica de segunda ordem de precursores. Em caso de prever um comportamento exponencial, aplica-se uma transformação exponencial. A discretização do tempo permite grandes intervalos de tempo, mesmo para transitórios que envolvam inserções reatividade. Para a discretização espacial, o código PARCS utiliza uma nodalização onde se resolve o método CMFD (*Coarse Mesh Finite Diffirence*) e o método de dois nós é resolvido para encontrar o coeficiente de correção para as correntes intermodais (Perelló, 2007).

4.7 Acoplamento de cálculos neutrônico/termo-hidráulico

À medida que evolui a capacidade de processamento computacional, as simulações realizadas se tornam mais complexas, e na atualidade podem ser obtidos resultados detalhados à custa do tempo de cálculo. O acoplamento neutrônico/termo-hidráulico refere-se ao intercâmbio de dados

simultâneo entre um código neutrônico e um termo-hidráulico, mas de acordo com a natureza do problema em estudo, existem diferentes tipos de acoplamento.

O estudo da distribuição espacial da potência no reator é de vital importância e, conhecer a distribuição garante a operação segura do reator, por exemplo, para determinar o ponto mais quente do reator em condições de operação nominal. Para conhecer a distribuição de potência no núcleo, são necessários códigos de simulação confiáveis e validados para o tipo de fenômenos que se pretende modelar. Nessa simulação, os fenômenos físicos que determinam principalmente o estado do reator são de origem neutrônica e termo-hidráulica. Como estes fenômenos não são independentes, mas estão acoplados por realimentação da densidade do refrigerante (ρ_c), das temperaturas do refrigerante (T_c) e do combustível (T_F) e da potência, a simulação deve executar conjuntamente os modelos neutrônicos e termo-hidráulicos trocando dados acoplados para alcançar a convergência. Em um acoplamento neutrônico-termohidráulico, o código neutrônico recebe dados da distribuição de temperaturas do combustível e refrigerante e a distribuição de densidades do refrigerante no núcleo (Figura 4.4). O código neutrônico então usa as seções de choque macroscópicas apropriadas para calcular a distribuição de potência interpolando uma tabela de seções de choque obtidas previamente de um código de célula. A distribuição de potência calculada pelo código neutrônico é usada como dado de entrada para o código termo-hidráulico que calcula uma nova distribuição de temperaturas e densidades. O processo de intercâmbio de dados repete-se até conseguir a convergência.

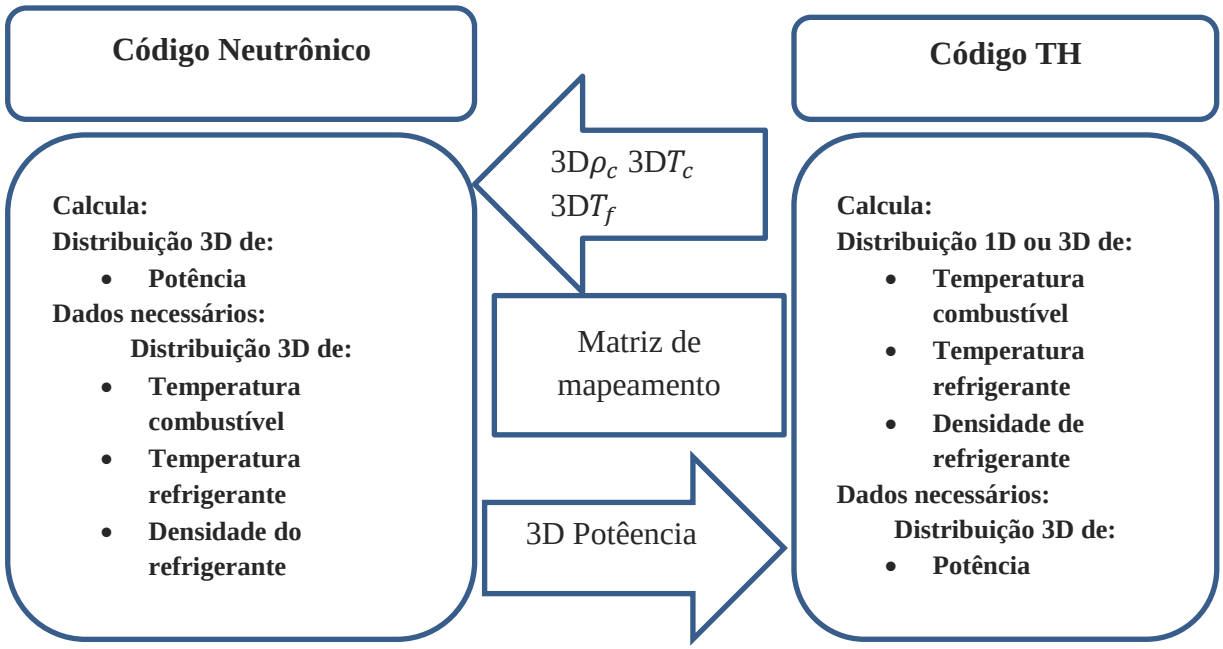


Figura 4.4: Diagrama de dados trocados em um acoplamento típico (adaptado de (Basualdo Perelló, 2010)).

4.7.1 Acoplamento RELAP5/PARCS

A escolha de uma técnica de acoplamento pode afetar a estabilidade numérica do sistema de códigos integrados.

Os códigos acoplados RELAP5/PARCS são usados neste trabalho para prever instabilidade no reator BWR. Os modelos são descritos com detalhes no Capítulo 3.

4.8 Reator Forsmark

Forsmark 1 (F1) e Forsmark 2 (F2) são BWRs iguais construídos pela ABB-Atom. F1 está em operação desde 1980 e F2 desde 1981. Ambos os reatores têm sido operados com potência de 2928 MW_{th} e vazão máxima de 10400 kg/s. O núcleo contém 676 conjuntos de combustíveis (Oguma, 1996).

Uma característica única de F1 e F2 é que eles estão equipados com bombas de recirculação interna e instrumentação no núcleo para medir o fluxo de refrigerante local. O fluxo de refrigerante do núcleo é medido através de instrumentação que monitora o fluxo de entrada para oito canais de refrigerante no núcleo individuais. A Figura 4.5 mostra a seção transversal do núcleo em conjunto com a localização da instrumentação no mesmo, isto é, monitores do tipo lprm (*Local Power Range Monitor*), lprm 1-36, e canais de refrigerante monitorizados por fluxo (CF 01-04, CF 11-14). Cada seqüência de sensores de fluxo nêutrons no núcleo tem quatro detectores lprm dispostos ao longo da direção axial numerada de 1 a 4 de cima para baixo.

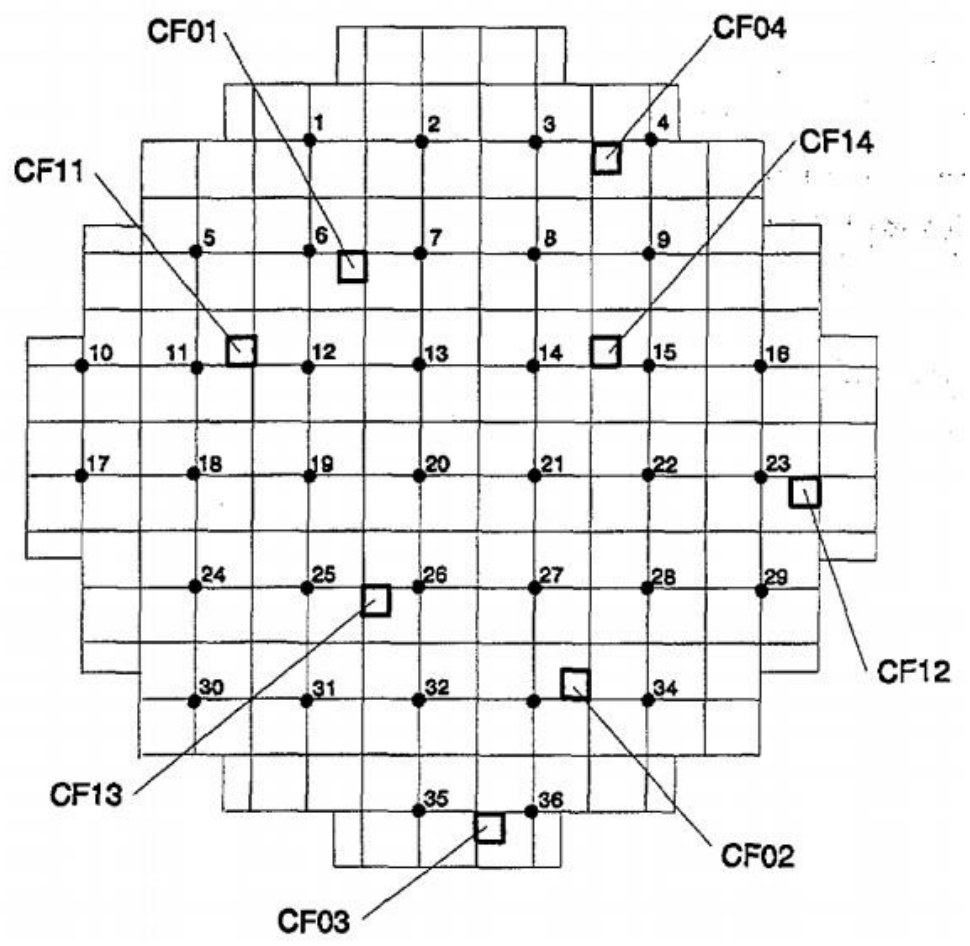


Figura 4.5: Seção transversal do núcleo dos reatores Forsmark 1 e 2 mostrando a instrumentação no núcleo com lprm 1-36 e os sensores de fluxo de refrigerante local CF1-4 e CF11-14, respectivamente (Oguma, 1996).

De acordo com (Oguma, 1996) no período de 1989 a 1996, foram realizados muitos testes de estabilidade nos reatores Forsmark 1 e 2. Os dados obtidos são divididos em seis casos, e a taxa de amostragem de todas as séries temporais é de 25 Hz, decimadas em 12,5 Hz. Estes seis casos

foram amplamente estudados, e para cada um deles foram obtidos os valores de DR e NF. O Benchmark publicado em 2001 (Verdú *et al.*, 2001) apresenta os valores de DR e NF de 7 métodos para os seis casos. Os métodos utilizados para obter os resultados fornecidos dos diferentes participantes do Benchmark, são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Métodos utilizados nas soluções fornecidas.

	Método	**Organização**	**País**
M1	Métodos auto-regressivos AR	UPV	Espanha
M2	Métodos auto-regressivos SVD	UPV	Espanha
M3	Métodos auto-regressivos SVD truncado	UPV	Espanha
M4	Reconstrução dinâmica	UPV	Espanha
M5	Métodos auto-regressivos AR	PSU	EUA
M6	LAPUR (domínio de frequência)	PSU	EUA
M7	Métodos auto-regressivos AR	Tsukuba	Japão
M8	Modelo ARMA	PSI	Suiza
M9	Modelo ARMA-AIC	PSI	Suiza
M10	Métodos auto-regressivos, resposta ao impulso	JAERI	Japão
M11	Autocorrelação recursiva	SIEMENS	Alemanha
M12	Métodos auto-regressivos AR	SIEMENS	EUA
M13	Métodos auto-regressivos, resposta ao impulso	TOSHIBA	Japão
M14	Métodos auto-regressivos, resposta ao impulso	TU-DELFT	Holanda
M15	Estimativa do espectro de potência	CSNNS	México

Para avaliar os resultados dos métodos desenvolvidos neste trabalho (DRARMA), consideraremos os casos 1, 4 e 5, devido ao grande número de sinais, os quais são descritos a seguir.

- **Caso 1**

Este caso contém os sinais de fluxo de nêutrons medidos durante vários testes. O objetivo do caso é estudar vários sinais que vão de condições estáveis a quase-instáveis. Os sinais são medições padrão sem distorções. Os dados contêm os sinais medidos pelo aprm a partir de testes de estabilidade.

Os resultados para este caso são os valores de DR e NF associados aos sinais aprm capturados durante 14 testes diferentes. Nas Tabelas 4.2 e 4.3 são apresentados os valores de DR e NF, respectivamente, obtidos pelas diferentes organizações (ver Tabela 4.1).

Tabela 4.2: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 1 (Verdú *et al.*, 2001).

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15	Mean	SD
aprm.1	0,46	0,423	0,576	0,64	0,42	0,58	0,33	0,5	0,42	0,422	0,46	0,42	0,512	0,57	0,566	0,487	0,09
aprm.2	0,656	0,654	0,702	0,824	0,52	0,5	0,42	0,51	0,51	0,523	0,613	0,65	0,577	0,46	0,454	0,572	0,11
aprm.3	0,576	0,582	0,558	0,735	0,3	0,25	0,3	0,5	0,63	0,511	0,537	0,52	0,499	0,6	0,516	0,508	0,13
aprm.4	0,515	0,514	0,525	0,634	0,39	0,26	0,23	0,53	0,42	0,549	0,528	0,51	0,558	0,78	0,516	0,497	0,14
aprm.5	0,581	0,573	0,523	0,702	0,49	0,7	0,2	0,51	0,51	0,534	0,517	0,47	0,532	0,36	0,523	0,515	0,12
aprm.6	0,54	0,549	0,521	0,659	0,44	0,1	0,42	0,55	0,51	0,559	0,526	0,55	0,587	0,53	0,764	0,52	0,14
aprm.7	0,695	0,7	0,694	0,624	0,51	0,37	0,15	0,59	0,68	0,657	0,669	0,66	0,63	0,66	0,572	0,591	0,15
aprm.8	0,533	0,542	0,503	0,577	0,27	0,22	0,37	0,45	0,46	0,495	0,483	0,44	0,445	0,57	0,519	0,458	0,1
aprm.9	0,573	0,547	0,458	0,503	0,55	0,34	0,43	0,5	0,53	0,487	0,53	0,47	0,561	0,5	0,642	0,508	0,07
aprm.10	0,611	0,635	0,631	0,545	0,45	0,52	0,3	0,45	0,49	0,482	0,585	0,47	0,537	0,32	0,764	0,519	0,12
aprm.11	0,599	0,601	0,598	0,644	0,36	0,23	0,18	0,5	0,56	0,44	0,551	0,39	0,469	0,29	0,772	0,479	0,17
aprm.12	0,812	0,809	0,828	0,751	0,68	0,43	0,56	0,78	0,78	0,757	0,792	0,78	0,74	0,66	0,559	0,715	0,12
aprm.13	0,535	0,562	0,556	0,777	0,43	0,26	0,37	0,45	0,46	0,383	0,532	0,59	0,61	0,51	0,445	0,498	0,12
aprm.14	0,722	0,715	0,704	0,782	0,56	0,27	0,38	0,65	0,71	0,658	0,698	0,66	0,662	0,71	0,13	0,6	0,19

Tabela 4.3: Resultados de NF (em Hz) obtidos por diferentes métodos para o caso 1 (Verdú *et al.*, 2001).

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15	Mean	SD
aprm.1	0,483	0,452	0,487	0,467	0,45	0,35	0,45	0,46	0,46	0,464	0,459	0,459	0,448	0,47	0,458	0,455	0,03
aprm.2	0,473	0,476	0,47	0,464	0,45	0,33	0,45	0,46	0,46	0,458	0,47	0,47	0,456	0,48	0,459	0,455	0,04
aprm.3	0,483	0,482	0,481	0,48	0,46	0,27	0,45	0,48	0,49	0,497	0,483	0,483	0,482	0,51	0,476	0,467	0,06
aprm.4	0,489	0,49	0,487	0,481	0,48	0,28	0,47	0,49	0,46	0,48	0,49	0,49	0,518	0,51	0,49	0,474	0,06
aprm.5	0,509	0,509	0,507	0,492	0,47	0,37	0,48	0,49	0,49	0,479	0,501	0,501	0,496	0,51	0,494	0,487	0,03
aprm.6	0,484	0,483	0,471	0,487	0,51	0,32	0,47	0,49	0,49	0,477	0,477	0,477	0,477	0,48	0,486	0,472	0,04
aprm.7	0,535	0,535	0,535	0,51	0,5	0,29	0,51	0,52	0,53	0,524	0,53	0,53	0,517	0,55	0,521	0,509	0,06
aprm.8	0,525	0,527	0,531	0,506	0,4	0,27	0,5	0,52	0,53	0,537	0,526	0,526	0,518	0,53	0,479	0,495	0,07
aprm.9	0,43	0,429	0,385	0,409	0,43	0,29	0,49	0,4	0,4	0,403	0,422	0,422	0,401	0,41	0,402	0,408	0,04
aprm.10	0,46	0,46	0,462	0,424	0,43	0,33	0,44	0,44	0,44	0,455	0,454	0,454	0,433	0,45	0,424	0,437	0,03
aprm.11	0,473	0,472	0,476	0,454	0,43	0,27	0,47	0,46	0,46	0,484	0,472	0,472	0,443	0,47	0,424	0,449	0,05
aprm.12	0,466	0,466	0,467	0,4	0,45	0,3	0,45	0,46	0,46	0,467	0,465	0,465	0,459	0,47	0,452	0,446	0,04
aprm.13	0,405	0,405	0,404	0,478	0,4	0,27	0,4	0,4	0,4	0,416	0,403	0,403	0,401	0,42	0,408	0,401	0,04
aprm.14	0,489	0,49	0,487	0,489	0,48	0,28	0,48	0,48	0,49	0,492	0,493	0,493	0,496	0,49	0,469	0,473	0,05

O Caso 1 corresponde a uma configuração estável do reator. Os resultados para a frequência são bastante uniformes, e há alguma dispersão para os valores de DR. Estes valores variam entre 0,4-0,8.

- **Caso 4**

Este caso contém uma mistura entre um modo de oscilação global e uma oscilação regional (meio núcleo). O caso consiste em sinais de *Average Power Range Monitor* (aprm) e *Local Power Range Monitor* (lprm) provenientes de um teste de estabilidade.

Nas Tabelas 4.4 e 4.5 são apresentados os valores de DR e NF, respectivamente, obtidos pelas diferentes organizações (Verdú *et al.*, 2001)

Tabela 4.4: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 4.

	M1	**M2**	**M3**	**M4**	**M5**	**M6**	**M7**	**M8**	**M9**	**M10**	**M11**	**M12**	**M13**	**M14**	**M15**
aprm	0,797	0,788	0,699	0,806	0,813	0,900	0,850	0,850	0,850	0,768	0,763	0,710	0,450	0,78	0,459
lprm.1	0,877	0,877	0,874	0,889	0,906	0,900	0,890	0,900	0,900	0,834	0,876	0,830	0,918	0,527	-
lprm.2	0,899	0,901	0,901	0,918	0,907	0,900	0,900	0,900	0,900	0,829	0,898	0,860	0,919	0,567	-
lprm.3	0,910	0,910	0,910	0,914	0,916	0,910	0,900	0,900	0,950	0,845	0,901	0,880	0,917	0,514	-
lprm.4	0,901	0,901	0,898	0,854	0,868	0,910	0,850	0,880	0,880	0,859	0,894	0,900	0,903	0,502	-
lprm.5	0,814	0,818	0,814	0,830	0,852	0,910	0,820	0,860	0,850	0,774	0,811	0,750	0,860	0,546	-
lprm.6	0,808	0,800	0,803	0,869	0,852	0,890	0,810	0,850	0,850	0,768	0,803	0,750	0,846	0,464	-
lprm.7	0,782	0,786	0,786	0,826	0,782	0,860	0,770	0,800	0,760	0,765	0,787	0,740	0,805	0,518	-
lprm.8	0,703	0,705	0,694	0,733	0,688	0,740	0,620	0,760	0,710	0,729	0,760	0,700	0,733	0,403	-
lprm.9	0,744	0,749	0,761	0,848	0,808	0,850	0,780	0,800	0,810	0,703	0,758	0,690	0,792	0,465	-
lprm.10	0,703	0,707	0,711	0,757	0,712	0,500	0,670	0,750	0,730	0,749	0,751	0,710	0,756	0,565	-
lprm.11	0,634	0,635	0,650	0,749	0,767	0,880	0,710	0,770	0,760	0,714	0,678	0,670	0,788	0,486	-
lprm.12	0,709	0,709	0,733	0,787	0,517	0,270	0,450	0,580	0,560	0,677	0,677	0,710	0,654	0,530	-
lprm.13	0,767	0,771	0,771	0,835	0,821	0,870	0,770	0,810	0,830	0,737	0,787	0,700	0,833	0,422	-
lprm.14	0,739	0,742	0,740	0,817	0,813	0,880	0,750	0,810	0,800	0,728	0,767	0,700	0,823	0,517	-
lprm.15	0,646	0,657	0,657	0,691	0,788	0,870	0,760	0,800	0,800	0,790	0,740	0,690	0,783	0,552	-
lprm.16	0,675	0,668	0,670	0,699	0,801	0,880	0,800	0,800	0,810	0,796	0,690	0,680	0,771	0,547	-
lprm.17	0,833	0,834	0,836	0,838	0,861	0,900	0,830	0,850	0,860	0,854	0,838	0,810	0,862	0,478	-
lprm.18	0,819	0,817	0,821	0,877	0,843	0,880	0,820	0,850	0,850	0,845	0,829	0,810	0,857	0,489	-
lprm.19	0,813	0,814	0,813	0,886	0,628	0,850	0,450	0,800	0,790	0,785	0,812	0,800	0,787	0,495	-
lprm.20	0,721	0,720	0,701	0,757	0,695	0,840	0,670	0,750	0,740	0,756	0,767	0,700	0,769	0,500	-
lprm.21	0,666	0,672	0,661	0,771	0,766	0,880	0,670	0,770	0,760	0,770	0,738	0,670	0,791	0,496	-
lprm.22	0,583	0,569	0,569	0,702	0,360	0,860	0,380	0,390	0,360	0,422	0,517	0,490	0,447	0,582	-

Tabela 4.5: Resultados de NF (em Hz) obtidos por diferentes métodos para o caso 4.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
aprm	0,486	0,485	0,492	0,490	0,508	0,480	0,495	0,510	0,480	0,508	0,491	0,491	0,522	0,51	0,512
lprm.1	0,482	0,482	0,481	0,495	0,492	0,480	0,495	0,490	0,490	0,494	0,486	0,486	0,493	0,503	-
lprm.2	0,482	0,482	0,481	0,491	0,492	0,480	0,495	0,490	0,490	0,495	0,486	0,486	0,491	0,497	-
lprm.3	0,482	0,481	0,482	0,488	0,489	0,490	0,495	0,490	0,480	0,494	0,485	0,485	0,489	0,494	-
lprm.4	0,485	0,485	0,485	0,485	0,492	0,490	0,495	0,490	0,490	0,489	0,488	0,488	0,490	0,493	-
lprm.5	0,486	0,486	0,485	0,515	0,500	0,490	0,495	0,500	0,500	0,498	0,493	0,493	0,500	0,512	-
lprm.6	0,488	0,491	0,488	0,510	0,500	0,470	0,495	0,500	0,500	0,498	0,495	0,495	0,500	0,512	-
lprm.7	0,492	0,489	0,492	0,494	0,500	0,450	0,495	0,500	0,500	0,502	0,499	0,499	0,500	0,512	-
lprm.8	0,509	0,510	0,507	0,478	0,508	0,400	0,495	0,500	0,510	0,504	0,507	0,507	0,507	0,514	-
lprm.9	0,492	0,492	0,490	0,491	0,508	0,450	0,495	0,510	0,500	0,504	0,499	0,499	0,506	0,520	-
lprm.10	0,527	0,526	0,520	0,522	0,530	0,360	0,495	0,530	0,530	0,527	0,526	0,526	0,529	0,530	-
lprm.11	0,524	0,523	0,523	0,518	0,521	0,470	0,520	0,520	0,520	0,522	0,514	0,514	0,519	0,532	-
lprm.12	0,541	0,540	0,540	0,542	0,534	0,290	0,495	0,530	0,530	0,531	0,536	0,536	0,497	0,542	-
lprm.13	0,491	0,490	0,490	0,505	0,508	0,460	0,520	0,510	0,510	0,504	0,498	0,498	0,506	0,518	-
lprm.14	0,492	0,493	0,493	0,506	0,508	0,470	0,495	0,510	0,510	0,505	0,501	0,501	0,508	0,520	-
lprm.15	0,503	0,502	0,502	0,497	0,513	0,460	0,495	0,510	0,510	0,513	0,506	0,506	0,507	0,518	-
lprm.16	0,496	0,496	0,501	0,522	0,517	0,470	0,495	0,520	0,520	0,520	0,504	0,504	0,516	0,520	-
lprm.17	0,485	0,485	0,485	0,500	0,496	0,480	0,495	0,490	0,490	0,494	0,490	0,490	0,494	0,506	-
lprm.18	0,486	0,486	0,486	0,487	0,492	0,460	0,495	0,490	0,490	0,495	0,490	0,490	0,494	0,505	-
lprm.19	0,492	0,492	0,492	0,499	0,496	0,450	0,495	0,500	0,500	0,497	0,495	0,495	0,497	0,507	-
lprm.20	0,497	0,497	0,495	0,478	0,508	0,440	0,495	0,500	0,500	0,500	0,502	0,502	0,516	0,512	-
lprm.21	0,502	0,501	0,500	0,518	0,513	0,470	0,495	0,510	0,510	0,511	0,507	0,507	0,510	0,533	-
lprm.22	0,530	0,531	0,530	0,557	0,540	0,450	0,495	0,530	0,550	0,512	0,526	0,526	0,523	0,548	-

Não há uma grande dispersão para os valores do DR neste caso porque a configuração do reator é mais instável, isto é, o DR é alto ($\cong 0{,}8$).

- **Caso 5**

Este caso é focado na análise de dois sinais aprm obtidos durante um pequeno transiente da planta que resultou em um mau comportamento dos sinais. Se Observou que este é um caso não-estacionário e os métodos auto-regressivos têm uma validade limitada.

Os resultados de DR e NF são apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.7, respectivamente (Verdu *et al.*, 2001).

Tabela 4.6: Resultados de DR obtidos por diferentes métodos para o caso 5.

	M1	M2	M3	M4	M5	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
aprm.1	0,951	0,949	0,948	0,98	0,98	0,98	-	-	1,020	-	-	0,918 0,955 0,961	0,85	0,143
	1	1	1	-	-	-	1	-	-	0,998	0,99	-	-	-
	0,679	0,811	0,818	-	-	-	0,94	-	-	0,699	0,69	-	-	-
aprm.2	0,650	0,647	0,671	0,717	0,59	0,47		-	0,823	-	-	0,589 0,881 0,933	0,80	0,748
	0,688	0,692	0,764	-	-	-	0,67	-	-	0,620	0,66	-	-	-
	0,574	0,580	0,536	-	-	-	0,47	-	-	0,659	0,67	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,515	0,55	-	-	-

Tabela 4.7: Resultados de NF obtidos por diferentes métodos para o caso 5.

	M1	M2	M3	M4	M5	M7	M8	M10	M11	M12	M13	M14	M15
aprm.1	0,534	0,534	0,534	0,530	0,53	0,52	-	0,526	0,524	0,524	0,529 0,525 0,527	0,53	0,535
	0,569	0,426	0,441	-	-	-	0,53	-	0,556	0,556	-	-	-
	0,536	0,553	0,552	-	-	-	0,54	-	-	-	-	-	-
aprm.2	0,514	0,514	0,510	0,494	0,54	0,50	-	0,520	0,500	0,500	0,516 0,513 0,509	0,52	0,505
	0,514	0,514	0,514	-	-	-	0,49	-	0,516	0,516	-	-	-
	0,513	0,513	0,509	-	-	-	0,5	-	0,504	0,504	-	-	-

CAPÍTULO 5

Metodologia

Neste trabalho, foram calculados os parâmetros de estabilidade de DR e NF. Também foram reconstruídos os atratores e calculados os maiores expoentes de Lyapunov. A metodologia para encontrar todos estes parâmetros é constituída pelos seguintes métodos:

i. O método de auto-regressão ARMA (p, q) foi usado para calcular DR e NF. Este método foi aplicado para criar um código o qual foi nomeado como DRARMA.
ii. Para reconstruir os atratores de séries temporais, foi utilizado o método de *time delay* (tempo de atraso).
iii. Para calcular o maior expoente de Lyapunov foi usado o algoritmo de Wolf.

Estes métodos foram aplicados para diferentes sinais de potência. O primeiro grupo de sinais são provenientes de testes de estabilidade dos reatores Fosmark 1 e 2. Estes sinais foram escolhidos porque existe um documento *benchmark* (Verdú *et al.,* 2001) com os valores de DR e NF, calculados com diferentes métodos por diversas instituições de pesquisa para comparar os resultados. Portanto, foi possível testar a capacidade do código desenvolvido DRARMA; também foram reconstruídos os atratores e calculados os maiores expoentes do Lyaounov para alguns destes sinais das séries de potência.

O segundo grupo de sinais foram obtidos da simulação do reator BWR Peach Bottom. O código de cálculo termo-hidráulico RELAP5-MOD3.3 e o código análise neutrônica 3D PARCS-2.4 foram acoplados para simular transitórios em um BWR. A modelagem do reator Peach Bottom, bem como a metodologia de acoplamento estão descritas em (Costa, 2007). Dessa forma, procurou-se primeiramente reproduzir os cálculos acoplados em estado estacionário para o reator BWR Peach Bottom e, a partir disso, foram simulados também alguns transitórios com forte realimentação de reatividade para conseguir os sinais de oscilação de potência. A partir de tais dados, foram obtidos os parâmetros de estabilidade DR e NF com o código DRARMA, assim como também foram reconstruídos os atratores e calculados os maiores expoentes de Lyapunov.

Portanto, neste capítulo, primeiro será descrita os métodos usados para obter DR, NF, reconstrução dos atratores e os maiores expoentes de Lyapunov. Posteriormente, apresentam-se a nodalização e a configuração neutrônica do reator a fim de simular os eventos de instabilidade do reator Peach Bottom.

5.1 Determinação da razão de decaimento (DR)

Em geral, os métodos estatísticos utilizados na análise das séries temporais, são bem conhecidos e a principal tarefa consiste em identificar a incerteza das características de estabilidade estimadas. Estes foram os objetivos do *benchmark* da NEA "Métodos de análise de séries temporais para oscilações durante a operação de BWR" (Verdú *et al.,* 2001). Como resultado das conclusões desta referência, um novo código foi desenvolvido na PSI, que inclui sete metodologias diferentes para a estimativa DR (Askari B., 2001). Desta forma, podemos calcular a DR com base em metodologias diferentes e independentes. Os métodos estatísticos foram

divididos em métodos paramétricos e não paramétricos. Os métodos não paramétricos, em princípio, baseiam-se na técnica da função de autocorrelação "clássica" e na análise espectral dos sinais de tempo estocásticos. O DR será determinado com base na função de autocorrelação e no espectro de potência dos sinais de tempo. Estes métodos foram desenvolvidos na PSI e utilizados com sucesso no campo de análise de ruído (Behringer and Hennig, 2002). Os métodos paramétricos baseiam-se na conhecida técnica de identificação do sistema. A saída do nosso sistema é, por exemplo, uma série de tempo de potência medida e queremos reconstruir o comportamento do sistema linear assumindo que o sistema dinâmico pode ser descrito por uma equação de diferença linear de uma ordem desconhecida, essa equação é basicamente o modelo ARMA, então a tarefa de este método é determinar a ordem do modelo ARMA.

Neste trabalho usamos o método paramétrico. Este método parte do sinal neutrônico da série temporal $x(n)$, e assume que pode ser modelado usando um processo AR com ordem p:

$$x_{(n)} + \sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) = b_0 \varepsilon(n) \tag{5.1}$$

Onde $\varepsilon(n)$ é um processo de ruído branco normalizado.

O problema é reduzido a encontrar a ordem do modelo, isto significa encontrar o valor de p e os coeficientes a_k .

5.1.1 Determinação dos coeficientes AR

A função de autocorrelação do processo (5.1) é:

$$r_x(m) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x(k-m)x(k)^* \tag{5.2}$$

em problemas de interesse prático apenas um número finito de pontos para o sinal está disponível. Portanto, a sequência de autocorrelação deve ser estimada com dados finitos. Assumindo N mostras de dados, uma estimativa de autocorrelação do sinal $x(n)$ de tempo discreto tem a seguinte forma:

$$r_x(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=-1}^{N-m} x(k-m)x(k)^* \qquad 0 \le m \le N-1$$

onde $r_x(-m) = r_x(m)$.

É fácil conseguir a seguinte relação entre o elemento de autocorrelação AR (p):

$$r_x(n) + \sum_{k=1}^{p} a_x r_x(n-k) = \begin{cases} |b_0|^2 & , n = 0 \\ 0 & , n \ge 1 \end{cases}$$

usando a notação de matriz:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) \\ r_x(1) \\ . \\ r_x(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & . & r_x(1-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & . & r_x(2-p) \\ . & . & . & . \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & . & r_x(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ . \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} |b_0|^2 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

E eliminando a primeira linha deste sistema, encontramos que:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & . & r_x(1-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & . & r_x(2-p) \\ . & . & . & . \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & . & r_x(0) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ . \\ r_x(p) \end{bmatrix}$$

Ou mais compacta

$$R \cdot a = -r$$

A solução é:

$$a = -(R^{-1})r$$

Uma vez obtido o modelo $AR(p)$ associado com o sinal, a função de transferência do AR, pode ser definida como:

$$H(z) = \frac{1}{z^{-p}\left(a_p + a_{p-1}z + \cdots z^p\right)}$$

O seguinte passo consiste em calcular as raízes da equação:

$$z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots a_p = 0 \tag{5.3}$$

Escolhendo o polo dominante, β, e transformando no plano s com as seguintes expressões:

$$\lambda = \frac{1}{T}\ln(\beta), \quad \lambda^* = \frac{1}{T}\ln(\beta^*) \tag{5.4}$$

onde β^* é o polo conjugado e T é o tempo de amostragem do sinal.

Com esses dois polos, o DR e a frequência natural (NF) são obtidos usando a equação (4.10). Para finalizar a obtenção de DR e NF, é necessário determinar a ordem do modelo, ou seja, os valores de p; neste trabalho, usamos o critério *Akaike* (AIC) que já foi desenvolvido na seção 3.6.1.

A partir deste, um programa foi desenvolvido com o software Matlab para calcular DR e NF. Matlab foi utilizado por possuir muitas ferramentas que ajudam na obtenção de algumas variáveis desejadas. A metodologia usada foi a seguinte:

I. Um código foi desenvolvido para ler os dados e fazer gráficos dos correlogramas para estimar a ordem do modelo ARMA.
II. Em muitos casos, os correlogramas não são muito claros para estimar a ordem do modelo e, por essa razão, foi desenvolvido um código (bestarma.m) que calcula a melhor

estimativa da ordem de ARMA. Este código é construído de acordo com o método AIC que foi visto na seção 3.6.1

III. Uma vez obtida a ordem de ARMA, os coeficientes α_p e β_q (ver eq. 3.21) são calculados; para isso, a ferramenta conhecida como ARMAX foi usada (Mathwork, n.d.) esta ferramenta utiliza os dados de entrada e ordem do modelo ARMA para gerar a função de transferência do sinal.

IV. Depois de obter a função de transferência, os polos "s" da função são calculados e finalmente são substituídos na Eq. 4.10.

Todos estes passos foram incluídos em um só script (DRARMA.m), que calcula os parâmetros DR e NF (ver Anexo A.1).

5.2 Construção dos atratores a partir de séries temporais

A detecção antecipada do aparecimento da instabilidade através de um sistema de monitorização é um meio prático de aumentar a segurança do sistema. A análise do ruído do reator tem desempenhado um papel importante para este propósito. Por exemplo, a razão de decaimento (DR) é um parâmetro de monitoramento comum que pode ser avaliado a partir de um modelo paramétrico linear para um estado de equilíbrio como um modelo autorregressivo (Sunde, 2007). Quando o estado de equilíbrio de um sistema dinâmico não linear é estável, a dinâmica em torno do equilíbrio pode ser representada por uma equação de evolução linear aproximada localmente com fonte de ruído estocástico (Sunde, 2007). No entanto, quando o estado de equilíbrio se torna instável, o comportamento não-linear, tal como o ciclo limite, ocorre na dinâmica e a equação de evolução linear não é mais válida. Por esta razão, as aplicações da teoria da dinâmica não-linear, como a teoria do caos, deverão desempenhar um papel importante nesses casos.

Para sistemas dinâmicos não lineares, como é nosso caso, uma feramente muito importante nas análises de sistemas dinâmicos são os espaços de fase, que foi descrita no capitulo 2. Em vários sistemas experimentais, é impossível registrar todo o conjunto de variáveis independentes simultaneamente, a fim de se construir o atrator. Porém, de acordo com o teorema de Takens (Rand and Young, 2006), a trajetória completa de um sistema em um espaço de fases pode ser reconstruída a partir da medida de uma única variável independente. Ou seja, é possível definir um espaço de fase de baixa dimensão que capture a dinâmica em uma estrutura geométrica imersa nesse espaço. O conjunto geométrico imerso é chamado de atrator reconstruído e ele é topologicamente equivalente ao atrator que seria produzido pela solução numérica do sistema dinâmico de equações, caso elas fossem conhecidas. Em particular, a dimensão e os expoentes de Lyapunov são aproximadamente os mesmos tanto para o atrator original como para o atrator reconstruído.

Os dados que analisamos são séries temporais, e existem muitos métodos para reconstruir o espaço de fase; um dos métodos mais freqüentemente usados de reconstrução é o método de tempo de atraso (*time delay*). A tarefa principal ao usar este método é determinar valores de tempo τ e a dimensão de imersão m.

5.2.1 Método de *time delay*

O método mais freqüentemente utilizado de reconstrução do espaço de fase (EF) é o método de tempo de atraso, que é usado neste trabalho (ver Anexo A.2). Se existe uma série temporal de uma variável escalar, construímos um vetor

$$\boldsymbol{x}(t_i), \qquad i = 1, \dots \dots, N.$$

No espaço de fase no tempo t_i é da seguinte forma:

$$X(t_i) = [x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau] \tag{5.5}$$

Onde i vai de 1 a $N - (m - 1)\,\tau$, τ é tempo de atraso, m é a dimensão de imersão. De acordo com o teorema de imersão de Takens (Rand and Young, 2006) quando isso é feito de maneira adequada, a dinâmica reconstruída usando esta fórmula é equivalente à dinâmica em um atrator no espaço de fase de origem no sentido de que os invariantes característicos do sistema são conservados. O método de *time delay* e os aspectos relacionados são descritos em (Liebert and Schuster, 1989).

O tempo τ é tipicamente algum múltiplo do espaçamento Δ entre os pontos da série temporal. Os atratores obtidos desta maneira são chamados atratores reconstruídos. A qualidade do atrator reconstruído é bastante sensível ao valor escolhido para o *time delay* (S L O Campanharo et al., 2012). Por qualidade do atrator, entende-se quão bem definidas são as trajetórias que constituem a dinâmica do atrator. Na prática, atratores gerados com τ pequeno são fechados e mal definidos, valores elevados de τ geram atratores dispersos, ao passo que valores adequados de τ geram atratores abertos e com dinâmica bem definida. Estimamos os dois parâmetros, *time delay* (τ) e dimensão de imersão *(m)* com os algoritmos descritos na próxima seção.

5.2.1.1 Escolha do time delay

Para determinar um retardo de tempo adequado, utilizamos informações mútuas médias, uma certa generalização da função de autocorrelação. A informação mútua média (IMM) entre conjuntos de medições A e B é definida (Fraser and Swinney, 1986):

$$I_{AB} = \sum_{a_i b_j} P_{AB}(a_i, b_j) \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_i)}{P_A(a_i) P_B(b_j)} \right] \tag{5.6}$$

Onde $P_A(a_i)$ é a probabilidade de ocorrência de a_i no conjunto $A, P_B(b_i)$ é a probabilidade de ocorrência de b_i no conjunto B e $P_{AB}\ (a_i, b_j)$ é a probabilidade associada de co-ocorrência. Se $P\ (x(t))$ e $P\ (x(t + \tau\ ))$ são distribuições probabilísticas disjuntas de pontos vizinhos e se $P\ (x(t), x(t\ +\ \tau\ ))$ são distribuições probabilísticas conjuntas então a informação mútua pode ser definida como

$$I(\mathcal{T}) = \sum_{a_i b_j} P\big(x(t_i), x(t_i + \tau)\big) \log_2 \left[\frac{P\big(x(t_i), x(t_i + \tau)\big)}{P\big(x(t_i)\big), P(x(t_i + \tau))\big)} \right] \tag{5.7}$$

A informação mútua indica em que grau parte da série temporal $x(t)$ contém informação, ou relembra, outras partes da mesma série temporal. Ela mede a dependência geral de duas variáveis, e fornece uma estimativa melhor para a escolha do tempo de atraso que o primeiro zero da função de autocorrelação, onde é considerada apenas a dependência linear.

Devido à ausência de uma lei simples para a escolha do τ em situações práticas, o parâmetro τ pode ser regulado até que os resultados se tornem satisfatórios. Este procedimento pode introduzir erros, mas as quantidades invariantes calculadas do atrator reconstruído não são frequentemente muito sensíveis a τ (dentro de um domínio sensato) se o número de graus de liberdade é pequeno.

5.2.1.2 Escolhendo uma dimensão do espaço de fase

O teorema de Takens (Rand and Young, 2006) garante que a dinâmica reconstruída, se devidamente embutida, é equivalente à dinâmica do verdadeiro sistema subjacente no sentido de que os invariantes dinâmicos, como as dimensões generalizadas e o espectro de Lyapunov, são idênticos.

Houve diferentes métodos propostos para determinar a dimensão mínima de incorporação, mas o mais comumente utilizado é a abordagem geométrica, falsos vizinhos mais próximos (FVP). A ideia deste método é bastante intuitiva. Suponha que a dimensão de incorporação mínima para uma dada série temporal $\{x_i\}$ seja m_0. Suponha que uma incorpora a série temporal em um espaço m-dimensional com $m < m_0$. Devido a essa projeção, a estrutura topológica não é mais preservada. Os pontos são projetados em bairros de outros pontos aos quais eles não pertenceriam em dimensões mais altas. Esses pontos são chamados de falsos vizinhos (Kennel *et al.*, 1992). Se agora a dinâmica é aplicada, esses falsos vizinhos não são tipicamente mapeados para a imagem da vizinhança, de modo que o "diâmetro" médio se torne bastante grande.

Este método de falsos vizinhos é baseado na ideia de que quando a trajetória é projetada para o espaço de dimensões muito pequenas, a trajetória se cruza e os chamados estados falsos vizinhos ocorrem. Quando a dimensão da reconstrução do espaço de fase aumenta, o número de auto-cruzamentos de trajetória e vizinhos falsos diminui. Quando a dimensão é grande o suficiente, ambos devem desaparecer completamente. Para determinar se os vizinhos são falsos ou não, dois critérios, mencionados em (Kennel *et al.*, 1992), foram utilizados. Calculamos uma fração $R(t_i)$, definida como:

$$R(t_i) = \frac{|x(t_i + m\tau) - x^{VP}(t_i + m\tau)|}{\left||X_m(t_i) - X_m^{VP}(t_i)|\right|} \tag{5.8}$$

Foram utilizados valores de $RT = 10\ e\ 15$, recomendados na literatura (Kennel *et al.*, 1992),. Se $R\ (t_i) \geq RT$, os estados são considerados falsos vizinhos. Como segundo critério de falsidade dos vizinhos, utilizamos a fração:

$$\frac{|x(t_i + m\tau) - x^{VP}(t_i + m\tau)|}{R_A} \geq A_T \tag{5.9}$$

Onde R_A é o raio do atrator.

5.3 Método de obtenção dos expoentes de Lyapunov

Todos os expoentes de Lyapunov, a partir de pontos de equilíbrio estáveis, são números reais e negativos; entretanto, para ciclos de limite estáveis, um expoente de Lyapunov é zero e o restante são números reais e negativos. Portanto, a estabilidade BWR pode ser obtida a partir dos expoentes de Lyapunov (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016).

Esta seção descreve a metodologia que foi utilizada para obter os expoentes Lyapunov para séries temporais. O método descrito é baseado no algoritmo desenvolvido por Wolf (Wolf *et al.*, 1985)

5.3.1 Algoritmo de Wolf

De acordo com Wolf (Wolf *et al.*, 1985) dada uma série temporal $x(t)$, um espaço de estados $m-$dimensional é reconstruído com coordenadas de atraso (conforme descrito anteriormente); um ponto sobre o atrator é dado por $\{x(t), x(t+\tau), \ldots, x(t+(m-1)\tau)\}$. Um vizinho próximo é localizado no ponto inicial $\{x(t_0), \ldots, x(t_0+(m-1)\tau)\}$ e denotada a distância entre esses dois pontos $L(t_0)$.

Em outras palavras, considerando uma trajetória de referência (*fiducial*) $x(t_0), x(t_1), \ldots$ e $z_0(t_0)$ como o vizinho mais próximo no atrator reconstruído de $x(t_0)$, $L(t_0)$ é definido como $L(t_0) = |x(t_0) - z_0(t_0)| < \epsilon$. Portanto, $z_0(t_0)$ está dentro da hiperesfera de raio ϵ centrada em $x(t_0)$.

Em um instante de tempo t_1, a distância entre os dois pontos excede ϵ, (L_0'); logo, substitui-se z_0 por outro vizinho próximo a $x(t_1)$ de tal forma que satisfaça dois critérios: sua distância $L(t_1)$ do ponto fiducial evoluído seja pequena (respeitando ϵ) e a separação angular entre os pontos evoluída e reposta também seja pequena (ver Figura 5.1).

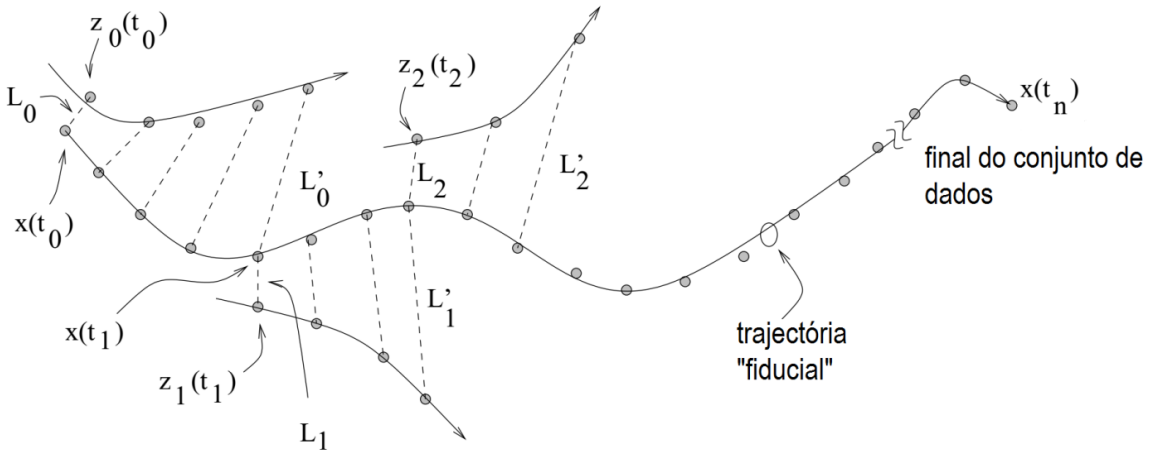


Figura 5.1: Representação do método de Wolf. O maior exponente de Lyapunov é calculado a partir do crescimento dos elementos L_i. Quando a distância dos vetores entre os dois pontos excede ϵ, um novo ponto é escolhido próximo à trajetória de referência, minimizando a distância L (Wolf *et al.*, 1985).

Acompanha-se então a evolução temporal de z_0 e y_0 até que num instante t_1 a distância entre esses pontos, L'_0, exceda ϵ. Nesse momento substitui-se z_0 por um novo vizinho, mais próximo de $x(t_1)$, que esteja na direção do segmento L'_0 e tal que $L_1 = |x(t_1) - z_1(t_1)| < \epsilon$. O processo prossegue até que todos os pontos $x(t_i)$ tenham sido percorridos. O maior expoente de Lyapunov positivo é obtido como a média de $\ln(L'_i/L_i)$, ao longo da trajetória fiducial, isto é,

$$\lambda_1 = \frac{1}{N(t_n - t_0)} \sum_{i=0}^{M-1} \log_2 \frac{L'_i}{L_i} \tag{5.10}$$

Onde M é o número de vezes que passou pelo *loop* acima, e N é o número de passos de tempo na trajetória fiduciária.

Através do método descrito acima é possível obter uma aproximação numérica para o maior expoente de Lyapunov associado a uma série temporal. A sequência de passos do algoritmo é:

1. Incorporar o conjunto de dados.

2. Escolher um ponto $x(t_0)$ em algum lugar no meio da trajetória.

3. Encontrar o vizinho mais próximo desse ponto. Chamado ponto $z_0(t_0)$.

4. Computar $||z_0(t_0) - x(t_0)|| = L_0$.

5. Seguir a "trajetória da diferença" - a linha de pontos - avançar no tempo, computando $||z_0(t_i) - x\,(t_i)|| = L_0(i)$ e incrementando i, até $L_0\,(i) > \epsilon$. Chamamos esse valor L'_0 e o tempo t_1.

5. Encontrar $z_1(t_1)$, o "vizinho mais próximo" de $x(t_1)$ e passar para o passo 4. Repitir o procedimento até o final da trajetória fiduciária ($t = t_n$), mantendo um registro do L_i e L'.

Usa-se a fórmula (5.10) para calcular λ_1 o maior (positivo) expoente de Lyapunov. O algoritmo apresentado foi escrito em Matlab, isto devido às ferramentas com que conta Matlab e facilidade de programação. O código escrito é mostrado no Anexo A.3.

5.4 Peach Bottom-2 Testes de Estabilidade de Baixa Vazão

Em 1977, foram realizadas quatro séries de testes de estabilidade de baixa vazão (PT1, PT2, PT3 e PT4) e três testes de trip de turbina (TT1, TT2 e TT3), no reator BWR Peach Bottom-2, conforme identificados na Figura 5.2.

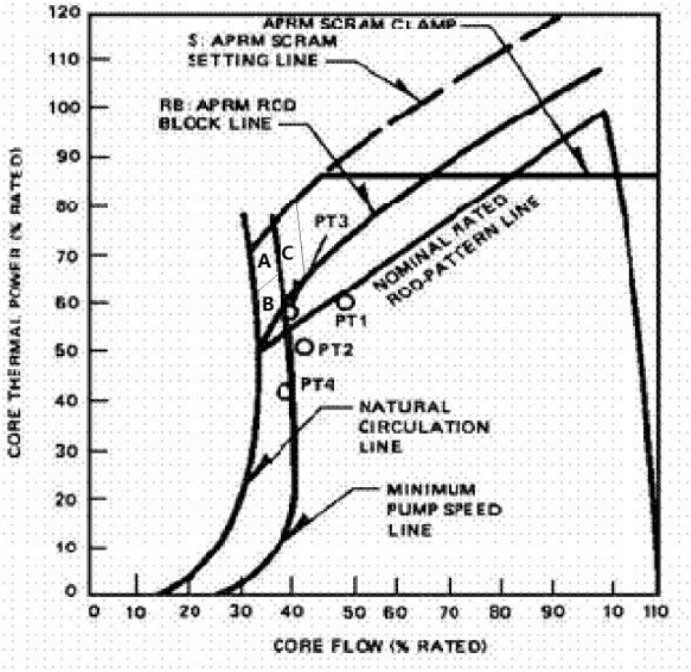


Figura 5.2: Peach Bottom-2 - testes reais de estabilidade de baixa vazão (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).

O teste chamado de LFST (*Low Flow Stability Test*) foi projetado para medir as margens de estabilidade do núcleo do reator nas condições de limitação usadas nas análises de projeto e segurança. As condições de teste reais são mostradas na Figura 5.2 (potência e vazão percentuais) e a linha de tempo planejada para os testes é mostrada na Figura 5.3. Nessa figura, são mostrados também os pontos de testes de *trip* da turbina (TT) realizados na mesma época no reator Peach Bottom-2.

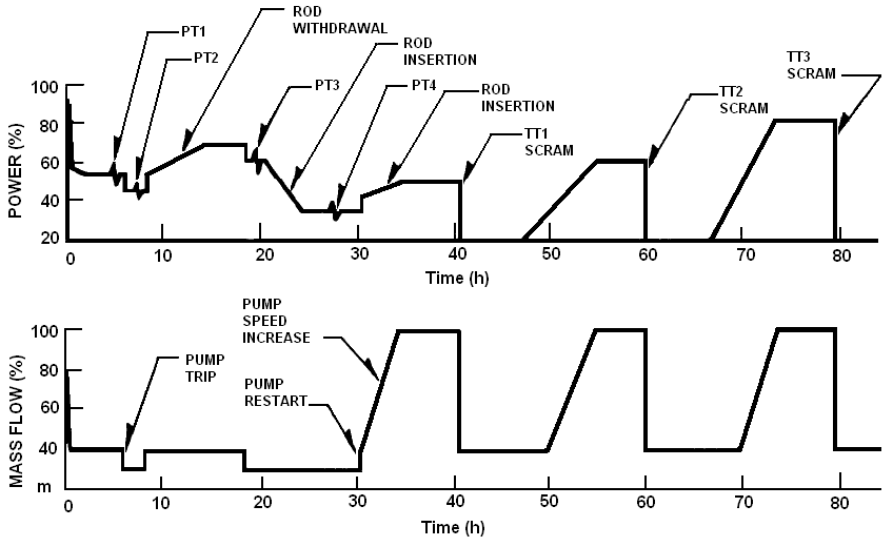


Figura 5.3: Peach Bottom-2 - linha de tempo operacional planejada dos testes LFST e TT (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).

Na Tabela 5.1 é apresentada a condição de teste para os quatro pontos de estabilidade. Nesse trabalho, somente o ponto 3 (PT3) de teste será considerado para as análises de DR e NF, para comparar com os dados disponíveis no documento de referência (Costa, 2007). Em todos os testes, as oscilações de potência são causadas por uma perturbação de pressão (*Pressure Perturbation – PP*) a partir da turbina do reator.

As condições de operação de teste estão na região do mapa de fluxo de energia onde as oscilações têm uma probabilidade mais alta. A operação nessa área é evitada por meio de condições de controle e *trip* adequadamente definidas.

Tabela 5.1. Condições dos testes LFST no reator Peach Bottom (Costa, 2007).

Testes	Potência		Vazão (Entrada do núcleo)		Entalpia (Entrada do núcleo)	Pressão (Entrada do núcleo)
	%	MW	kg/s	(%)	(kJ/kg)	(MPa)
PT1	60,6	1995	6753,6	52,3	1184,6	7,06
PT2	51,7	1702	5657,4	43,8	1187,8	7,01
PT3	59,2	1948	5216,4	40,4	1184,6	7,10
PT4	43,5	1434	5203,8	40,3	1183,8	7,06

A razão de decaimento (DR) e a frequência natural (NF) calculada a partir dos dados das oscilações de potência estão disponíveis em um documento de referência (Tabela 5.2); e o valor de DR para o ponto 3 será comparado neste trabalho, com o dado calculado a partir das simulações.

Tabela 5.2: Razão de decaimento e frequência natural para os eventos de perturbação de pressão (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978).

Dados de resultados experimentais		
	DR	NF (Hz)
PT1	0,121	0,441
PT2	0,121	0,471
PT3	0,344	0,437
PT4	0,296	0,402

5.4.1 Modelo Neutrônico e Termo-Hidráulico

A nodalização do reator Peach Bottom para RELAP5 foi baseada no documento de especificação de referência para o teste de *trip* da turbina (TT) e nos dados do relatório de testes relacionados (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978). O núcleo do Peach Bottom foi dividido em 33 regiões aquecidas representando os 764 elementos combustíveis do núcleo real, modelados de acordo com os requisitos de código RELAP5; canais com características comuns foram agrupados. Em particular, cada canal agrupa certo número de elementos de combustível; as regiões foram escolhidas de acordo com suas propriedades termo-hidráulicas e cinéticas, levando em consideração a potência relativa, a área de fluxo de entrada e a posição relativa dentro do núcleo.

A Figura 5.4 representa parte da nodalização correspondente ao núcleo do reator; na figura, o número de identificação está relacionado com a componente do canal na nodalização RELAP5. A zona ativa do núcleo foi axialmente subdividida em 24 volumes. Um estudo (Ambrosini and Ferreri, 2006) investigou limites de estabilidade obtidos de um modelo RELAP5 para um canal de ebulição de 3,6 m com 48 e 24 volumes. Os resultados mostraram que os limites de estabilidade previstos com 48 e 24 nós são muito semelhantes. Portanto, o uso de 24 malhas limita a complexidade do modelo reduzindo o tempo de cálculo e conservando a precisão dos resultados.

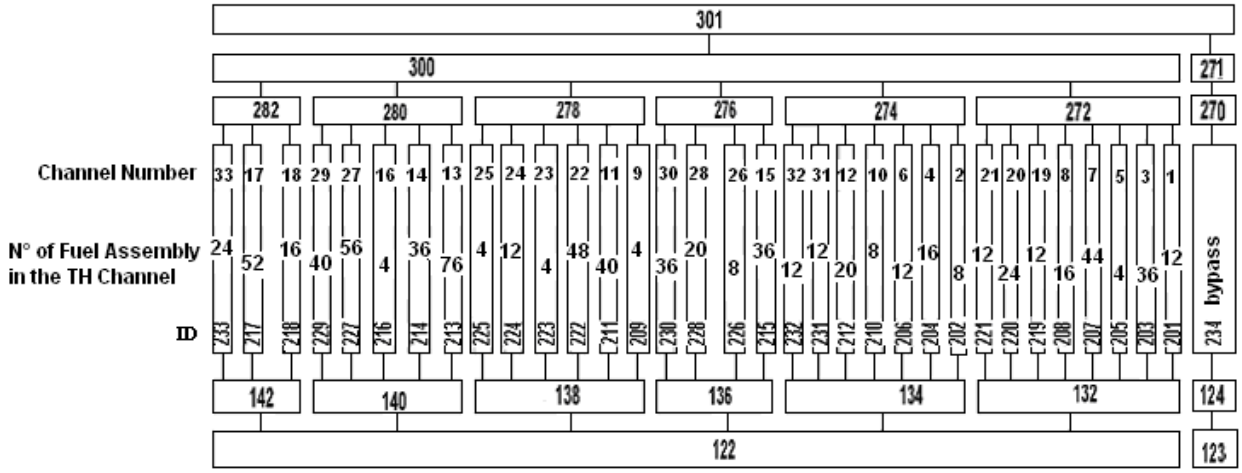


Figura 5.4 Parte da nodalização da planta, com os 33 canais TH no núcleo do reator Peach Bottom (Costa, 2007).

Para representar o comportamento neutrônico do núcleo do reator pelo código PARCS, o núcleo foi discretizado em nós paralelepipédicos. Radialmente, foram definidos 18 tipos de combustíveis e 1 nó refletor, enquanto axialmente o núcleo foi subdividido em 26 nós; o primeiro e o último nó representam as zonas refletoras. No total, 435 composições foram consideradas no modelo (Costa *et al.*, 2008).

5.4.2 Eventos de instabilidade

A fim de obter sinais de oscilação de potência para analisar os parâmetros DR e expoentes de Lyapunov para os eventos transitórios, dois tipos de eventos foram considerados, sendo um deles a perturbação de pressão a partir da turbina e o outro relativo a drásticos movimentos das barras de controle do núcleo. Ambos são descritos a seguir.

5.4.2.1 Evento de perturbação de pressão

Para analisar um primeiro evento de instabilidade, neste trabalho, foi gerado um pulso de pressão na turbina do reator; a amplitude deste impulso de pressão é de 0,22 MPa ocorrendo num intervalo de tempo muito curto. Na Figura 5.5 é mostrado o pico de pressão aplicado à turbina no ponto de operação PT3.

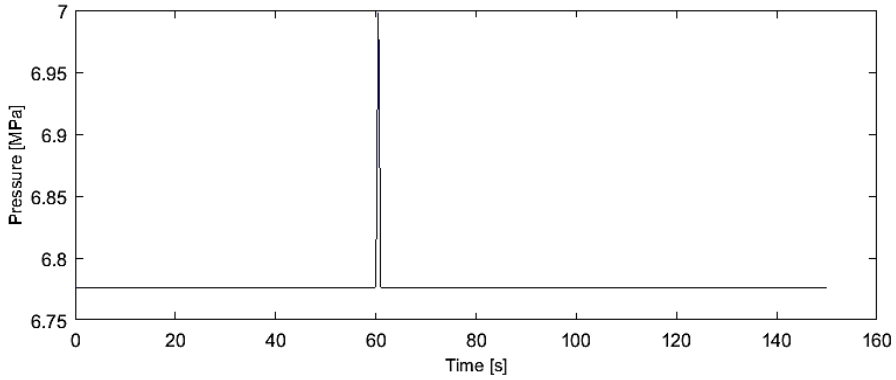


Figura 5.5: Pico de pressão de 0,22 MPa aplicado na turbina para simular o evento de perturbação de pressão.

Durante a perturbação de pressão (PP), é criada uma pequena onda de pressão que se propaga ao longo da linha de vapor atingindo a zona do núcleo através de dois caminhos diferentes: o separador de vapor cheio de água e vapor, e o *plenum* inferior cheio de água. Quando a onda atinge o vaso, experimenta várias reflexões com limites sólidos e fluidos (Costa *et al.*, 2008b).

5.4.2.2 Movimento das barras de controle

Na simulação deste transitório, foram considerados dois casos: em primeiro lugar, foi simulada a retirada gradual das barras de controle (Caso 1). Esta simulação resultou em um aumento muito grande na potência quando as barras de controle pararam de mover.

Num segundo caso, as barras de controle são removidas da mesma forma que o caso 1, mas o banco 2 não é movido.

Na Figura 5.6 está ilustrada a posição radial dos bancos de barras de controle no núcleo para a condição de teste PT3.

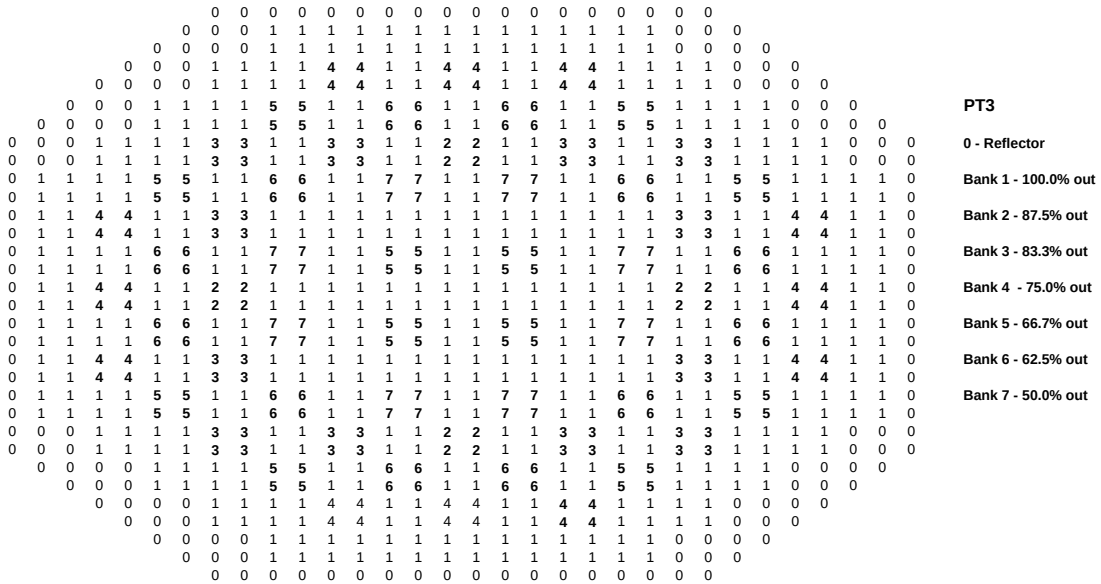


Figura 5.6: Posição radial dos bancos de barras de controle no núcleo para a condição de teste PT3.

Caso 1

Os bancos de barras de controle são removidos do núcleo em passos. A sequência de remoção é apresentada Tabela 5.3. A posição representada por "48" significa a barra totalmente retirada.

Tabela 5.3: Sequência de remoção dos bancos de barras de controle para o caso 1

	Posição dos bancos de barras de controle no tempo						
	t = 0 s	t = 25 s	t = 50 s	t = 75 s	t = 100 s	t =125 s	t = 150 s
Banco 1	48	48	48	48	48	48	48
Banco 2	42	42	44	45	46	47	48
Banco 3	40	40	42,63	43,97	45,3	46,633	48
Banco 4	36	36	40	42	44	46	48
Banco 5	32	32	35	38	41	44	48
Banco 6	30	30	34	38	42	46	48
Banco 7	24	24	29	34	39	44	46

As barras de controle foram retiradas por etapas, de acordo com a Tabela 5.3, até 150 s. Apenas o banco 7 permaneceu 12,5% inserido no núcleo.

Caso 2

Neste caso, os bancos de controle foram removidos a partir de 30s até 105 s, tal como é apresentado na Tabela 5.4. A posição representada por "48" representa a banca de barras controle totalmente retirada.

Tabela 5.4: Movimento dos bancos de barras de controle.

	Posição dos bancos de barras de controle no tempo							
	t = 0 s	t = 15 s	t = 30 s	t = 45 s	t = 60 s	t =75 s	t = 90 s	t=105 s
Banco 1	48	48	48	48	48	48	48	48
Banco 2	42	42	42	42	42	42	42	42
Banco 3	40	40	41	42	43	44	45	48
Banco 4	36	36	36	36	36	42	48	48
Banco 5	32	32	32	32	40	48	48	48
Banco 6	30	30	30	30	48	48	48	48
Banco 7	24	24	36	48	48	48	48	48

Capítulo 6

Resultados

6.1 Resultados obtidos para o reator Forsmark

Nesta secção apresentam-se os valores da razão de decaimento e a frequência natural obtidos com o código desenvolvido "DRARMA.m", para os sinais de instabilidade do reator Forsmark. Por outro lado, é reconstruído o atrator dos sinais de maior interesse e também são calculados os valores dos expoentes Lyapunov utilizando os algoritmos descritos no Capítulo 5.

Como foi mencionado na seção 4.8, neste trabalho, apenas os casos 1, 4 e 5 foram escolhidos.

- **Caso 1**

Para este caso, temos 14 sinais de tipo aprm, onde para cada um deles são calculados os valores de DR e NF; estes valores são apresentados na Tabela 6.1. Vale ressaltar que a ordem do modelo arma foi 30, sendo que este valor foi escolhido porque os valores de DR e NF são muito próximos daqueles apresentados em (Verdú *et al.,* 2001). Por outro lado, o modelo AR (30) é sugerido em (A. Petruzzi and Xu Y, 2004).

Tabela 6.1: Resultados de DR e NF obtidos com DRARMA para o caso 1.

Sinal	DR	NF
aprm.1	0,4604	0,4636
aprm.2	0,5579	0,4696
aprm.3	0,5944	0,4942
aprm.4	0,5668	0,4933
aprm.5	0,5761	0,5142
aprm.6	0,4771	0,5617
aprm.7	0,8634	0,5537
aprm.8	0,5823	0,5380
aprm.9	0,5135	0,4241
aprm.10	0,5028	0,4567
aprm.11	0,4857	0,4900
aprm.12	0,7566	0,4693
aprm.13	0,6692	0,3988
aprm.14	0,7015	0,4918

Se compararmos os valores obtidos com os valores apresentados em (Verdú *et al.,* 2001), podemos ver que os valores são próximos, porque o valor máximo do desvio padrão é 0,1783 no caso de DR, e 0,0672 no caso de NF. Para obter uma melhor imagem do desvio dos valores relativos à média obtida em (Verdú *et al.,* 2001), foram calculados os desvios, que são apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Desvios percentuais dos valores de DR e NF calculados neste trabalho em relação ao valores de referência de (Verdú *et al.*, 2001).

Sinal	**Desvio Padrão DR**	**Desvio Padrão NF**
aprm.1	0,0800	0,0291
aprm.2	0,1030	0,0336
aprm.3	0,1247	0,0530
aprm.4	0,1671	0,0520
aprm.5	0,1138	0,0328
aprm.6	0,1329	0,0458
aprm.7	0,1549	0,0590
aprm.8	0,1006	0,0672
aprm.9	0,0652	0,0383
aprm.10	0,1123	0,0306
aprm.11	0,1540	0,0499
aprm.12	0,1086	0,0415
aprm.13	0,1209	0,0385
aprm.14	0,1783	0,0506

Os valores dos desvios são aceitáveis, pois os valores de DR e NF são muito sensíveis em relação ao método usado; como pode-se observar na Tabela 4.2.

No caso destes sinais, foram calculados os expoentes de Lyapunov e reconstruídos os atratores, mas apenas foram escolhidos os sinais com maior dispersão no valor de DR; se observarmos a Tabela 6.2, os valores de DR com maior desvio padrão, são ampr14 e ampr4; dessa forma esses sinais foram escolhidos.

Nas Figuras 6.1 e 6.2, é possível observar a topologia dos atratores para ampr4 e ampr14, respectivamente, onde as trajetórias aparentemente são erráticase parecem se sobrepor mostrando flutuações na trajetória que caracterizam a complexidade e dificuldade de se obter um padrão para previsão do fenômeno. Porém, na Figura 6.1 é mostrado que o atrator apresenta características de instabilidade porque a trajetória não converge.

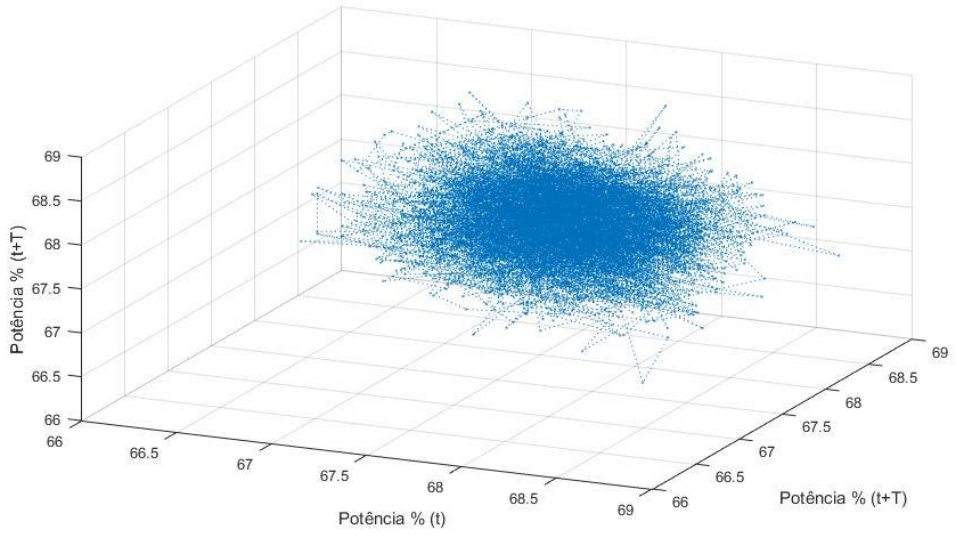


Figura 6.1: Atrator reconstruído para a série temporal da potência aprm4.

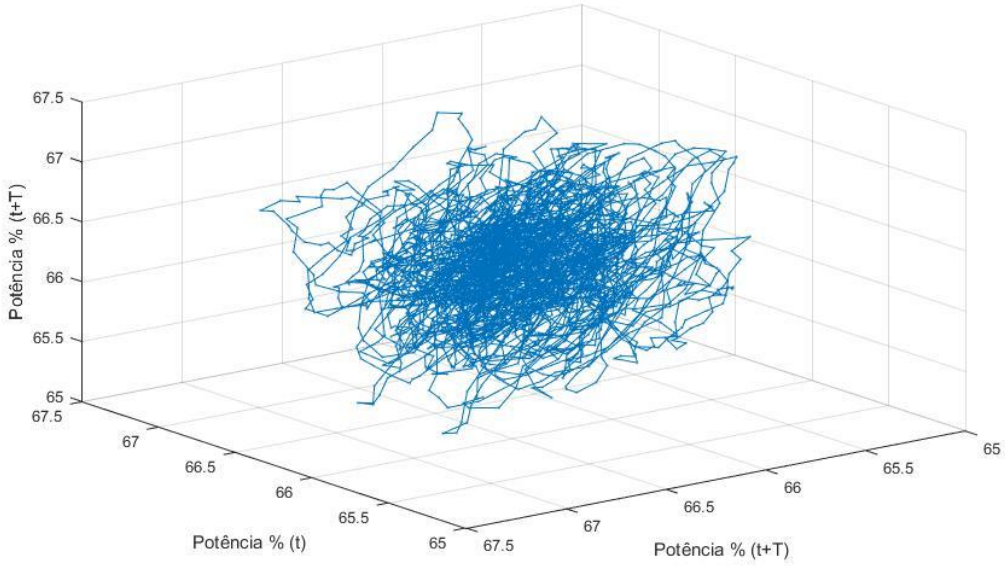


Figura 6.2: Atrator reconstruído para a série temporal da potência aprm14.

Através do método de Wolf, é possível obter uma aproximação numérica para o maior expoente de Lyapunov associado às series temporais. Pode-se observar que a aproximação numérica obtida é satisfatória (ver Figuras 6.3 e 6.4), já que os valores obtidos convergem para um valor constante o qual corresponde ao maior expoente de Lyapunov.

Os expoentes de Lyapunov foram calculados com m=4, que é a máxima dimensão de imersão encontrada para as séries. Os valores de λ para a sinal aprm.4 e ampr.14 estão na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Maior Expoente de Lyapunov para ampr4 e ampr14.

Sinal	Maior expoente de Lyapunov
aprm.4	0,96
aprm.14	1,09

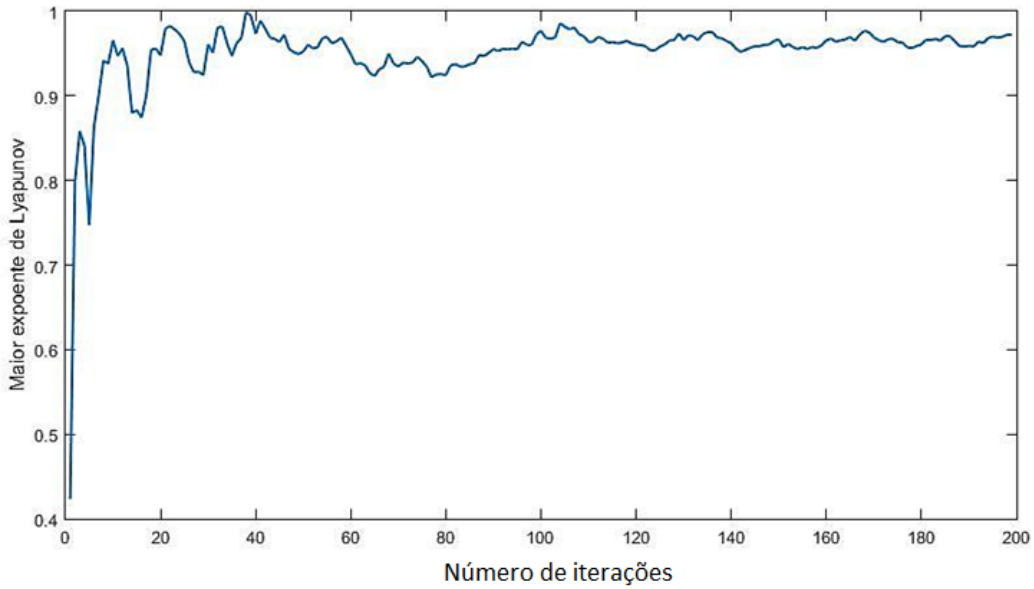


Figura 6.3: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=0,96 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.4.

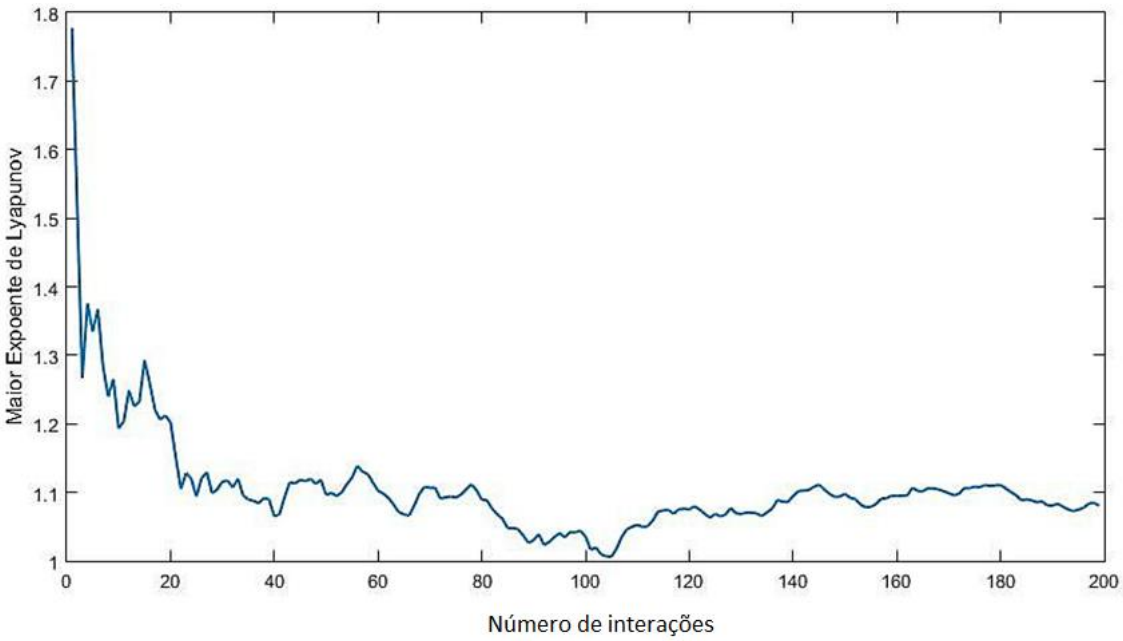


Figura 6.4: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=1.09 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.14.

Os expoentes de Lyapunov positivos encontrados indicam a presença do comportamento caótico da série. Pode-se ver, também, que para a série aprm.14, o expoente fica próximo de zero. Isto pode ser um indicativo de um comportamento quase periódico.

- **Caso 4**

Neste caso, somente foram calculados os valores de DR e NF para validar o código DRARMA.m.

Os valores DR e NF são apresentados na Tabela 6.4. Comparando os valores, os mesmos são próximos em relação aos valores da Tabela 4.3. Para obter estes resultados, a ordem utilizada do modelo arma foi de 30.

Tabela 6.4: Resultados de DR e NF obtidos com drarma para o caso 4.

Sinai	**DR**	**NF**	**Exponentes maiores de Lyapunov**
lprm.1	0,8396	0,5360	1,3367
lprm.2	0,8855	0,5350	1,2019
lprm.3	0,8736	0,5349	1,2637
lprm.4	0,5668	0,4933	1,2075
lprm.5	0,5992	0,5142	1,3208
lprm.6	0,8634	0,5537	1,3584
lprm.7	0,7854	0,5339	1,3284
lprm.8	0,8549	0,5387	1,4038
lprm.9	0,8000	0,5403	1,3559
lprm.10	0,8432	0,5404	1,3877
lprm.11	0,7665	0,5374	1,3428
lprm.12	0,7031	0,5435	1,4374
lprm.13	0,8230	0,5383	1,3669
lprm.14	0,8224	0,5383	1,3818
lprm.15	0,8311	0,5391	1,3536
lprm.16	0,8220	0,5426	1,0139
lprm.17	0,7566	0,5328	1,3968
lprm.18	0,7844	0,5396	1,273
lprm.19	0,7712	0,5339	$\cong 0$
lprm.20	0,8599	0,5419	14.216
lprm.21	0,7828	0,5377	12.808
lprm.22	0,5174	0,5006	1,4216

Se compararmos os valores obtidos neste trabalho com os valores apresentados em (Verdú *et al.,* 2001), podemos ver que os valores não diferem muito. Para obter uma melhor imagem do desvio dos valores relativos à média obtida em (Verdú *et al.,* 2001), foram calculados os desvios, que são apresentados na Tabela 6.5.

Tabela 6.5. Desvio padrão dos valores de DR e NF comprados com (Verdú *et al.*, 2001).

Sinal	Desvio Padrão DR	Desvio Padrão NF
lprm.1	0,0915	0,0132
lprm.2	0,0844	0,0127
lprm.3	0,0995	0,0127
lprm.4	0,1210	0,0032
lprm.5	0,0945	0,0095
lprm.6	0,0977	0,0173
lprm.7	0,0727	0,0163
lprm.8	0,0933	0,0292
lprm.9	0,0897	0,0184
lprm.10	0,0791	0,0423
lprm.11	0,0883	0,0142
lprm.12	0,1302	0,0619
lprm.13	0,1020	0,0169
lprm.14	0,0805	0,0145
lprm.15	0,0825	0,0158
lprm.16	0,0840	0,0164
lprm.17	0,0951	0,0122
lprm.18	0,0900	0,0155
lprm.19	0,1221	0,0158
lprm.20	0,0789	0,0206
lprm.21	0,0855	0,0151
lprm.22	0,1328	0,0255

- **Caso 5**

Este caso foi obtido durante um pequeno transiente da planta que resultou em um comportamento instável dos sinais. Este é o caso mais estudado na literatura, porque o sinal de oscilação apresenta mudanças drásticas na amplitude, como é mostrado na Figura 6.5. Portanto, vamos comparar os resultados aqui obtidos com vários outros resultados da literatura.

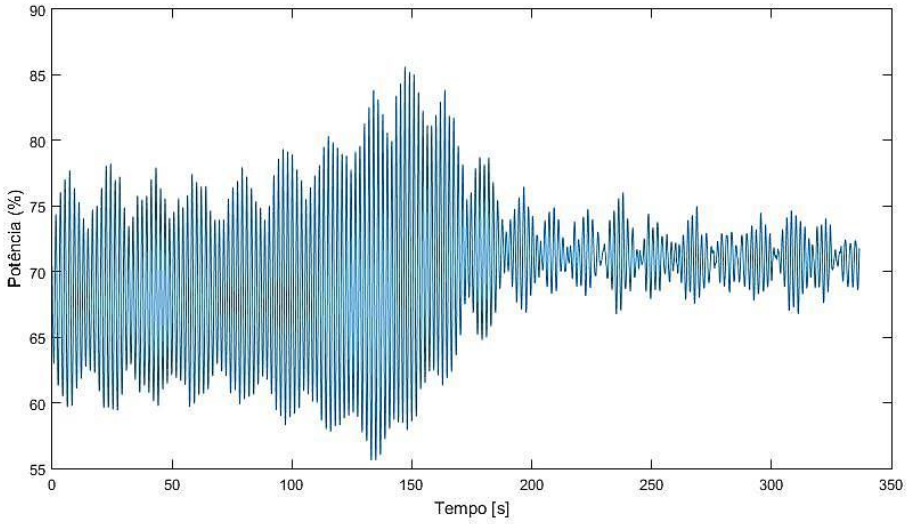


Figura 6.5. Oscilação de potência do evento de instabilidade Forsmark – caso 5

Na Tabela 6.6 são mostrados os valores de DR e NF obtidos em (Verdu *et al.*, 2001) e os valores obtidos por DRARMA.

Tabela 6.6 Valores de DR e NF para o caso 5.

Caso 5	**DR**	**NF**
M1	0,951	0,534
M2	0,949	0,534
M3	0,948	0,534
M4	0,98	0,53
M5	-	0,53
M6	0,98	-
M7	0,98	0,52
M8	-	-
M9	-	-
M10	1,02	0,526
M11	-	0,524
M12	-	0,524
M13	0,918 0,955 0,961	0,529 0,525 0,527
M14	0,85	0,53
M15	0,143	0,535
DRARMA	0,9714	0,5335

O valor obtido pelo código DRARMA é muito próximo comparado com os valores obtidos por os métodos descritos em (Verdú *et al.*, 2001), com valor máximo do desvio padrão, são 0,2198

para DR e 0,004Hz para NF. Para o sinal do caso 5, considerado como um todo, os resultados são bastante uniformes; o valor de DR está próximo de 1 e os resultados para a frequência estão perto de 0,5 Hz. O valor de DR próximo a um indica que a estabilidade do reator está próxima a uma estabilidade crítica.

O trabalho (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016) apresenta as análises do mesmo caso sob o ponto de vista dos sistemas dinâmicos com a reconstrução do atrator; também foram calculados os maiores expoente de Lyapunov ao longo do tempo. Na Figura 6.6 é possível verificar a reconstrução do atrator obtido neste trabalho e, na Figura 6.7, a reconstrução obtida no trabalho de (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016).

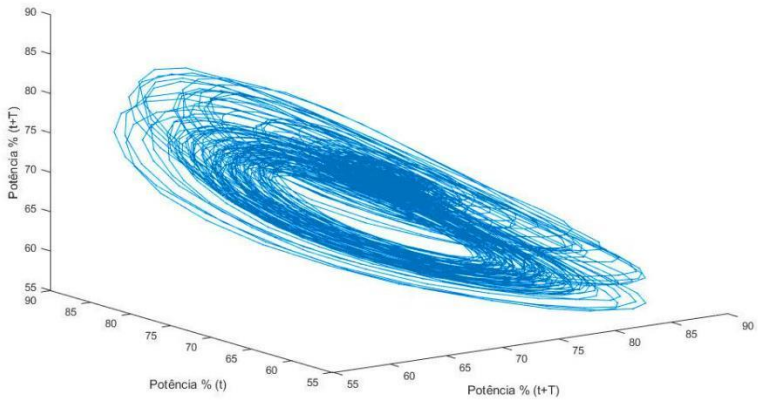


Figura 6.6: Atrator do sinal apmr.1 para o caso 5.

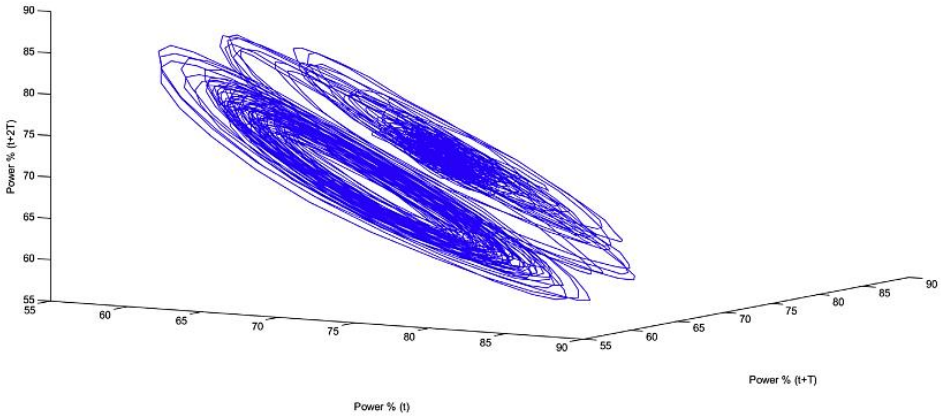


Figura 6.7: Atrator do sinal apmr.1 para o caso 5, apresentado por (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016).

Comparando as Figuras 6.6 e 6.7, vemos que os atratores reconstruídos são iguais, sendo que em ambos os casos o valor de m é 4; portanto, é possível concluir que o método usado neste trabalho é uma boa aproximação considerando a comparação com o trabalho de (Gavilán-Moreno and Espinosa-Paredes, 2016).

A análise dos atratores da série estabelece que a série é totalmente instável com dois níveis de oscilação, fazendo com que o sinal de fluxo de nêutrons seja dividido em dois sub-sinais.

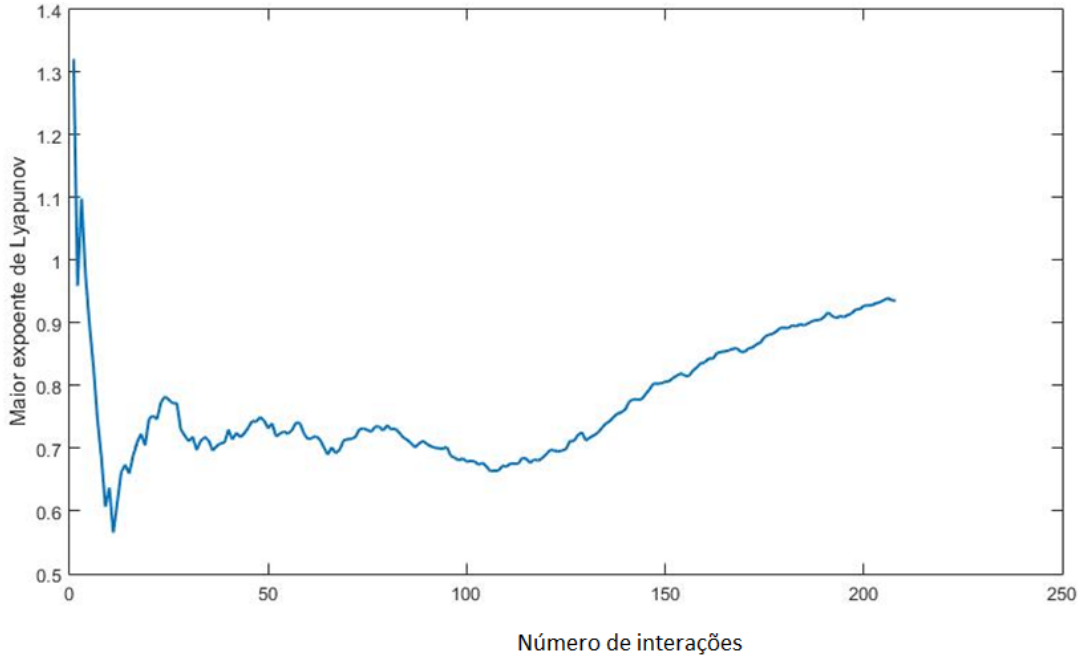


Figura 6.8: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=0,93 com base no algoritmo de Wolf, para apmr.1.

A Figura 6.8 mostra que não é possível calcular o maior exponente de Lyapunov para este caso, porque o os dados não convergem para um valor constante.

Pode-se deduzir que o maior expoente de Lyapunov é um indicador de comportamento e resposta do sistema, válido para monitorar as forças que tendem à desestabilização do sistema (estabilização). Em contraste, um valor de λ mínimo mostrado durante uma divergência faz com que o sistema reaja e tente atingir um ponto de equilíbrio.

6.2 Resultados obtidos para o reator Peach Bottom 2

6.2.1 Resultados em estado estacionário

Em primeiro lugar, é realizada uma análise de estado estacionário para estimar os parâmetros iniciais da parte termo-hidráulica quando o reator está funcionando antes das perturbações. Para esta finalidade, o código RELAP5 foi utilizado de forma independente, nesta primeira estimativa, considerando-se que a distribuição de potência axial é uniforme e fixa. Essas condições iniciais são então usadas para executar os cálculos acoplados.

Em muitos casos, o parâmetro de maior interesse a ser observado, em um cálculo de estado estacionário acoplado, é a distribuição espacial 3D de potência do núcleo. No entanto, os dados medidos no documento de referência (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978) apresentam apenas os perfis de potência média axial. Portanto, os perfis de potência média axial experimental são aqui comparados com o cálculo acoplado RELAP5/PARCS.

A distribuição de potência axial média no estado estacionário obtido é mostrada na Figura 6.9, para o ponto de operação PT3, considerando o cálculo acoplado RELAP5/PARCS. Como pode ser visto, as curvas das potências calculada e experimental têm comportamentos próximos uma da outra.

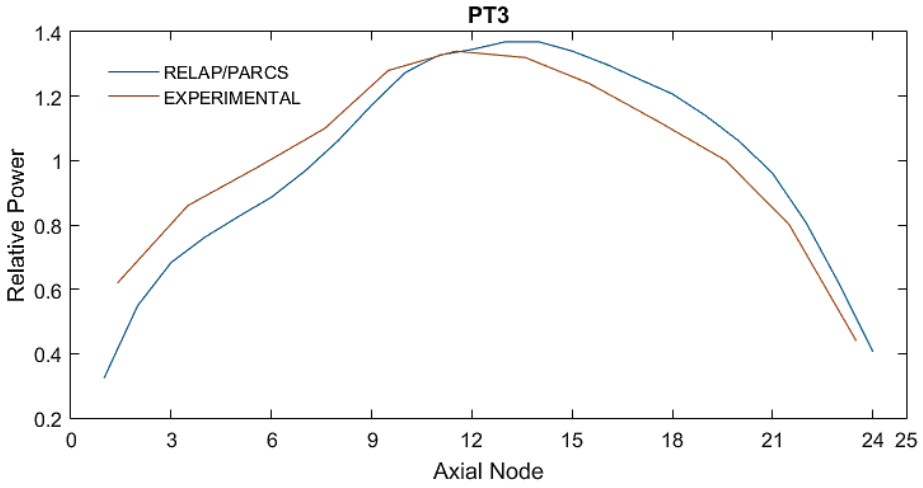


Figura 6.9: PT3 perfil de potência axial médio experimental e calculado.

Na Figura 6.10 é mostrada a distribuição da potência média radial no nível axial 12, à meia altura do núcleo. Esta distribuição é considerada fixa para esta primeira análise do estado estacionário. O código PARCS estimou a distribuição para diferentes níveis axiais do núcleo. Como o documento de referência (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978) não mostra a distribuição radial experimental da potência, não foi feita uma comparação. A Figura 6.10 permitirá observar como mudou a distribuição de potência após os eventos transitórios .

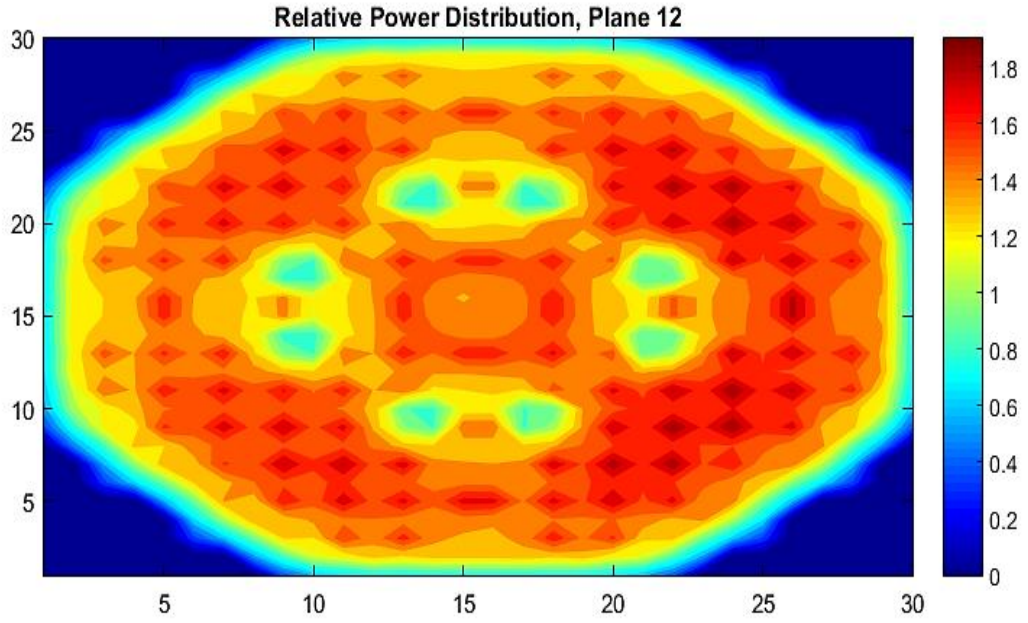


Figura 6.10: Distribuição de potência radial relativa do núcleo no estado estacionário (nível axial 12) PT3.

6.2.2 Resultados em estado transitório

6.2.2.1 Perturbação de pressão (PP)

Os resultados transitórios de PP para o ponto PT3 são apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12. As figuras mostram, respectivamente, as evoluções de potência e fração de vazio (canal 1). A perturbação, que consiste em enviar um pico de pressão de 0,22 MPa a partir da turbina do reator, começa no momento 60,5 s. O processo apresenta uma diminuição rápida da oscilação da amplitude de potência e, após cerca de 43,0 segundos, as oscilações terminam. O sistema apresenta boa estabilidade ao transitório. Após a perturbação, a potência e os demais parâmetros retornam aos valores de estado estacionário.

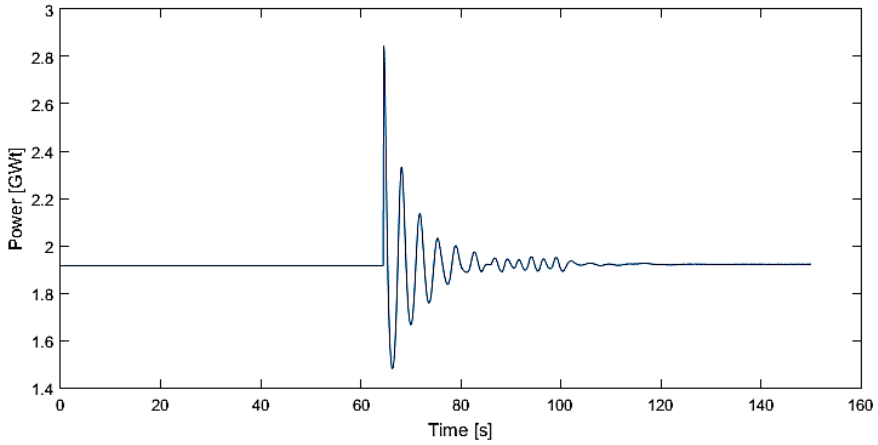


Figura 6.11. Evolução temporal de potência.

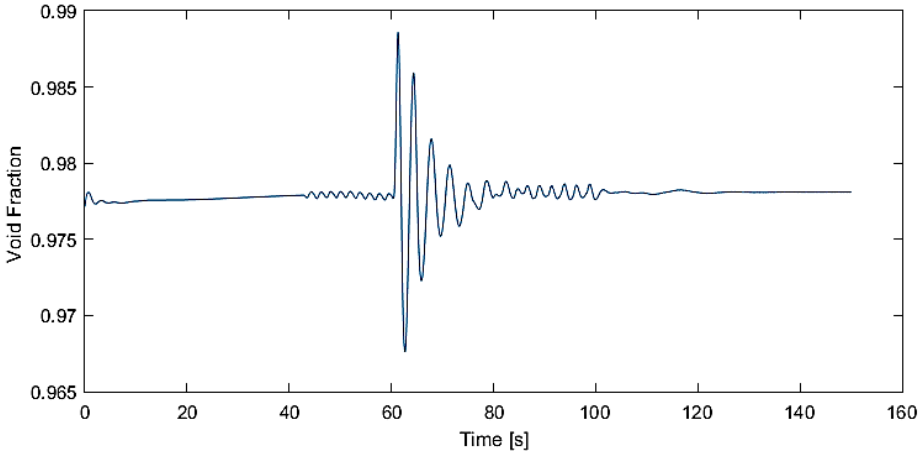


Figura 6.12. Evolução temporal da fração de vazio no nível axial 12 no canal 1.

O programa desenvolvido DRARMA.m foi utilizado para calcular DR e NF do evento transitório PP. Os resultados são mostrados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7: Resultados obtidos para DR e NF utilizando o programa DRARMA.m

Polo dominante	Decay Ratio	Frequência natural
0,9416 + 0,1685i	0,3261	0,285 Hz

Comparando os resultados obtidos com os resultados encontrados em (L. A. Carmichael, O. Niemi, 1978) a partir dos dados experimentais e com os dados obtidos pelos programas ADRI e DRAT (Costa, 2007), na Tabela 6.8, verificamos que todos os valores de DR calculados concordam com os dados experimentais. Os valores calculados de NF, embora estejam em bom acordo entre eles, são subestimados em relação ao dado experimental.

Tabela 6.8: DR e NF obtidos com 3 programas em comparação com dados experimentais para PT3.

Dados do experimento			**ADRI**		**DRAT**		**DRARMA**	
	DR	NF [Hz]	DR	NF [Hz]	DR	NF [Hz]	DR	NF [Hz]
PT3	0,344	0,437	0,454	0,289	0,467	0,275	0,326	0,285

Com o algoritmo descrito no Capítulo 3, reconstruímos o atrator da série temporal de potência gerada pelo RELAP5 . Na Figura 6.13 é apresentado o atrator correspondente ao evento PP.

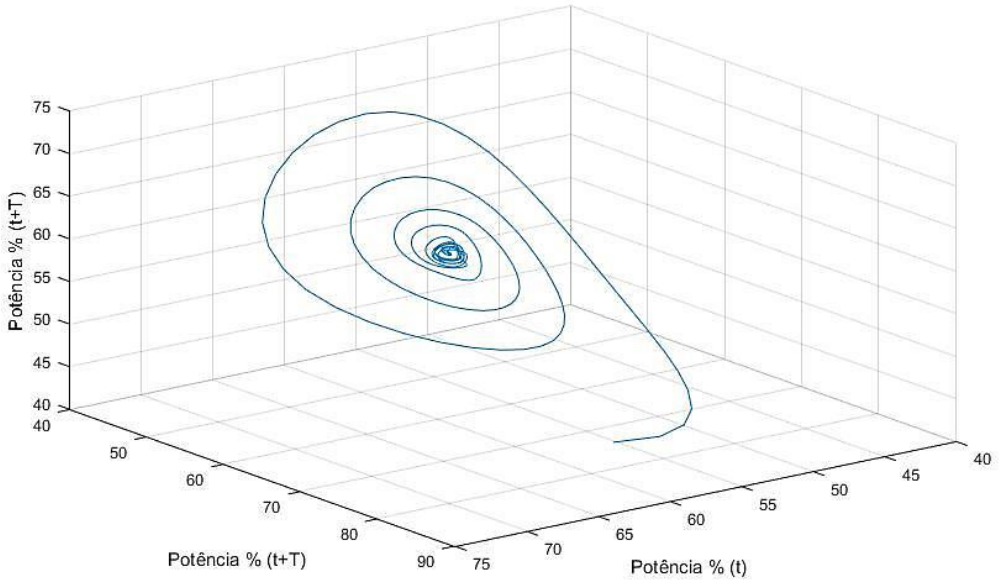


Figura 6.13: Atrator do transitório de perturbação de pressão.

Para reconstruir o atrator do evento de PP, foram considerados os dados apenas a partir do primeiro pico de oscilação (ver a Figura 6.11), porque o sinal antes deste pico é completamente estável.

A Figura 6.13 mostra o comportamento das condições do atrator estável. Observa-se que uma concentração estável é formada, pois a trajetória do sistema converge para esse ponto.

6.2.2.2 Movimento das barras de controle

Os resultados de estado estacionário são os mesmos obtidos na Seção 6.2.1 , portanto, esta seção apresentará somente os resultados em estado transitório.

- **Caso 1**

As barras de controle foram retiradas por etapas, de acordo com a Tabela 5.3, até 150 s. Apenas o banco de barras 7 permaneceu 4.2 % inserido no núcleo. As oscilações observadas na potência devido ao movimento das barras de controle são mostradas na Figura 6.14.

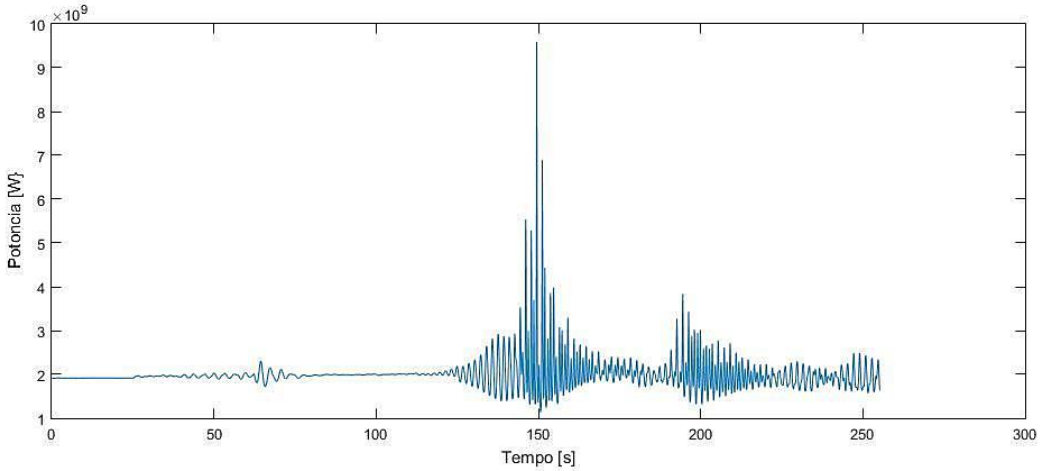


Figura 6.14: Evolução do tempo de potência.

A oscilação mostra que o pico máximo foi atingido no tempo 150 s, que é o tempo em que as barras param de se mover; depois, as oscilações continuam, mas com menor amplitude, porque os bancos das barras de controle ficam estáticos para 250 s; para ter uma melhor imagem da distribuição de potência do núcleo no tempo 150 s, é apresentada a Figura 6.15 que mostra a distribuição radial relativa de potência do nível axial 12 no tempo 150s.

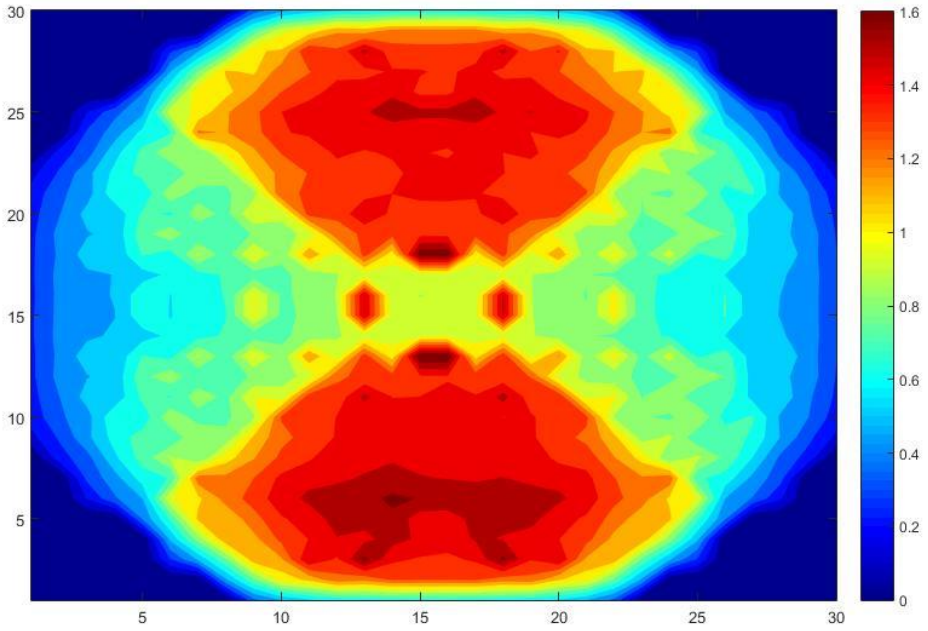


Figura 6.15: Distribuição de potência radial do núcleo no estado transitório (nível axial 12, t=150 s) PT3, caso 1.

Comparando a distribuição axial radial de potência da Figura 6.10 com a Figura 6.15, podemos ver que a distribuição de potência tende a ser mais simétrica no caso estacionário, e, no caso do evento transitório, tem-se que a concentração da potência está regionalmente deslocada, tal como mostra a Figura 6.14. Apesar da extrema mudança da potência no tempo 150 s, a amplitude das oscilações diminui, o que indica, possivelmente a presença de estabilidade; então, para conhecer o comportamento da oscilação, os valor de DR foram calculados pelo código DRARMA.m; os valores obtidos são mostrados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9. Valores de DR e NF para o movimento das barras de controle (caso 1)

Intervalo de tempo [s]	**DR**	**NF [Hz]**
120-150	1,1287	0,5837
150-180	0,0506	0,3788
180-210	0,5671	0,7971
210-255	0,9545	0,5508

O valor de DR no intervalo final de tempo é muito próximo de 1, este valor indica que a oscilação está perto da estabilidade crítica. O valor global do DR é 0,8713, isto indica que a oscilação é estável assintoticamente.

Na Figura 6.16 é apresentado o atrator reconstruído no espaço de fase pelo método descrito na seção 5.2. Essa figura é a projeção R^3 do atrator. No recorte aqui construído para o atrator associado à série temporal de potência, é possível observar uma densidade maior de estados ocupando certo volume do espaço de fase, contendo órbitas com certa homogeneidade. Devido ao grande número de dados usados para reconstruir o atrator, as órbitas parecem estar sobrepostas umas as outras. O atrator apresenta características de estruturas dissipativas, o que indica que o sistema tende a uma região de estabilidade.

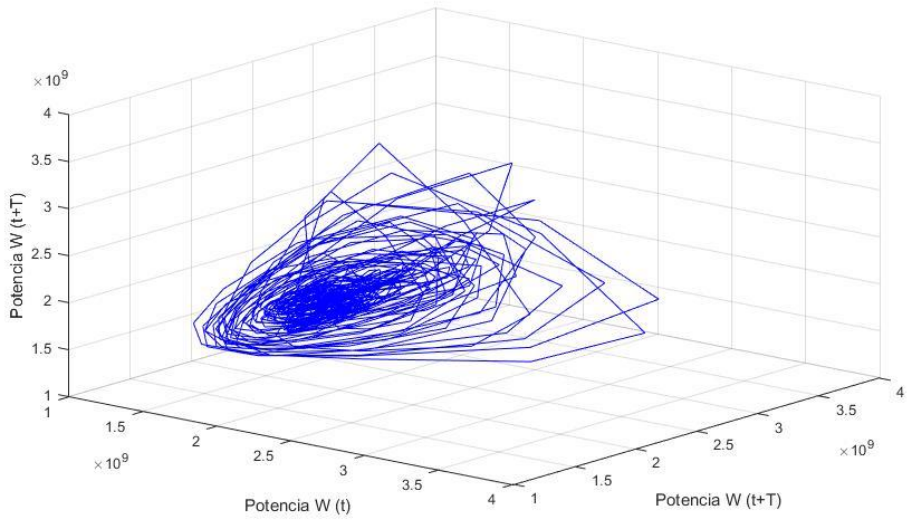


Figura 6.16: Atrator reconstruído para a série temporal da potência, caso 1.

Não foi possível calcular os expoentes de Lyapunov para este caso, porque a série tende a convergir para um valor singular, o que faz com que o cálculo numérico apresente incertezas.

- **Caso 2**

Neste caso, as varetas de controle foram removidas por etapas do núcleo a partir de 30 s até 105 s. Apenas o banco de barras de controle 2 permaneceu 12,5% inserida no núcleo. As oscilações observadas na potência devido ao movimento das barras de controle são mostradas na Figura 6.17.

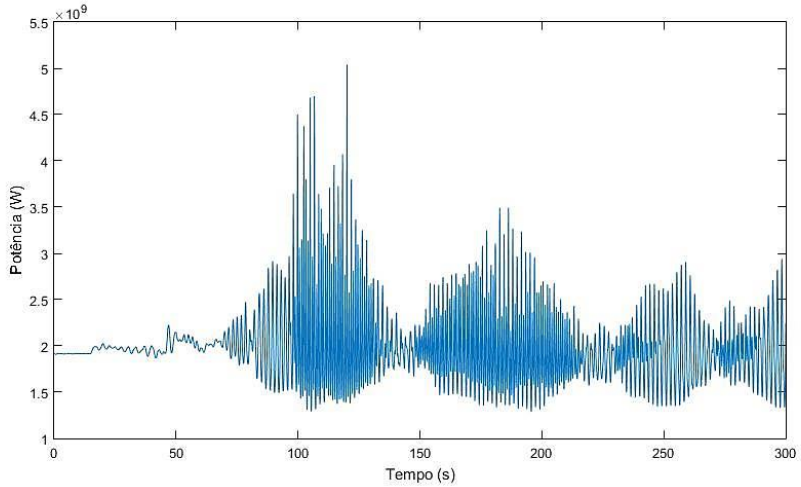


Figura 6.17: Evolução temporal da potência para o caso 2.

A oscilação mostra que o pico máximo foi atingido no tempo 125 s; nesse tempo somente o banco de barras número 2 está inserido; depois as oscilações continuam, mas com menor amplitude. Na Figura 6.18 é mostrada a distribuição radial de potência do nível axial 12 no tempo 125 s.

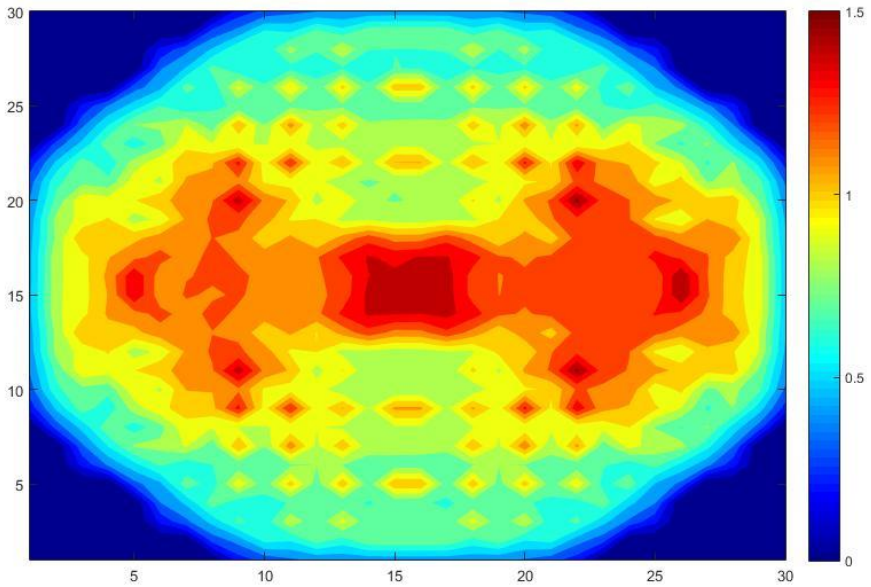


Figura 6.18: Distribuição de potência radial do núcleo no estado transitório (nível axial 12, t=125 s) PT3, caso 2.

Comparando a distribuição axial radial de potência da Figura 6.10 com a Figura 6.18, podemos ver que a distribuição de potência é simétrica no caso estacionário, e, no caso do evento transitório, vemos que a concentração da potência está na região central e lateral do núcleo, tal como mostra a Figura 6.18. Apesar da extrema mudança da potência no tempo 125 s, a amplitude das oscilações diminui, mas no intervalo final de tempo continua de forma assintoticamente positiva, que indica, possivelmente a presença de instabilidade. Portanto, para conhecer o comportamento da oscilação, os valor de DR foram calculados pelo código DRARMA.m; os valores obtidos são mostrados na Tabela 6.10.

Tabela 6.10: Valores de DR e NF para o movimento das barras de controle (caso 2)

Intervalo de tempo (s)	**DR**	**NF (Hz)**
1 - 70	0,6774	0,6884
70-200	0,7249	0,7100
20-220	1,1576	0,6845

O valor de DR no último intervalo de tempo é maior que um, indicando a presença de instabilidade. O motivo deste valor é porque a simulação não alcançou o ciclo limite, mas o valor global do DR é 0,8245, então o sinal é considerado como um todo como assintoticamente estável.

Por outro lado, a Figura 6.19 mostra o valor a que converge o maior exponente de Lyapunov, que é λ = 3,19; isto indica a presença de caos no sinal, e o sistema apresenta instabilidades, o que foi confirmado pelos valores de DR.

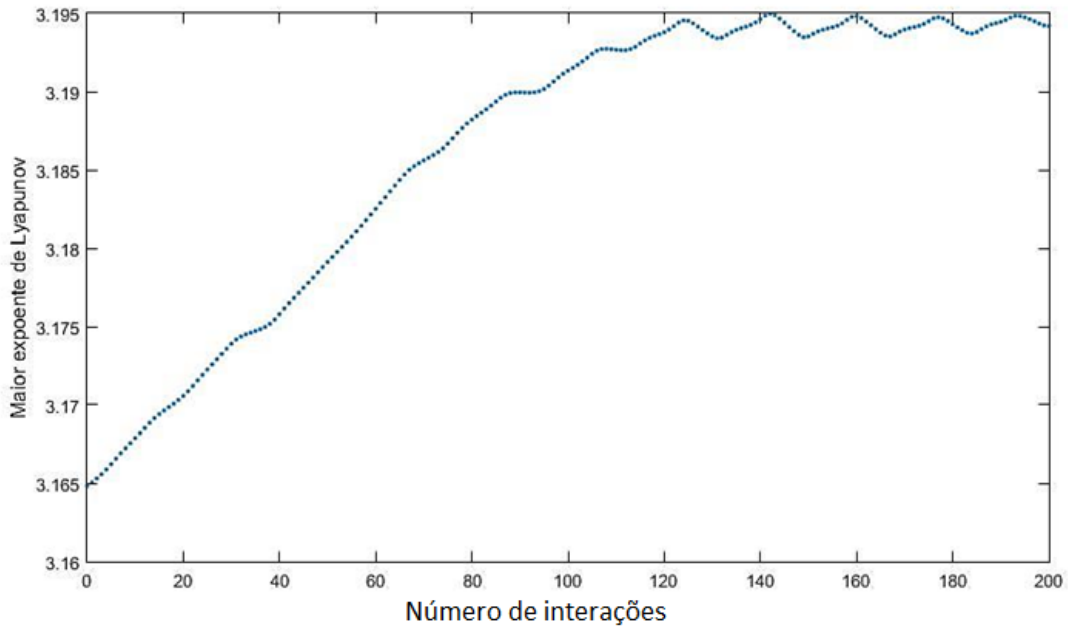


Figura 6.19: Convergência do maior expoente de Lyapunov, λ=3,19 com base no algoritmo de Wolf, para o caso 2.

.

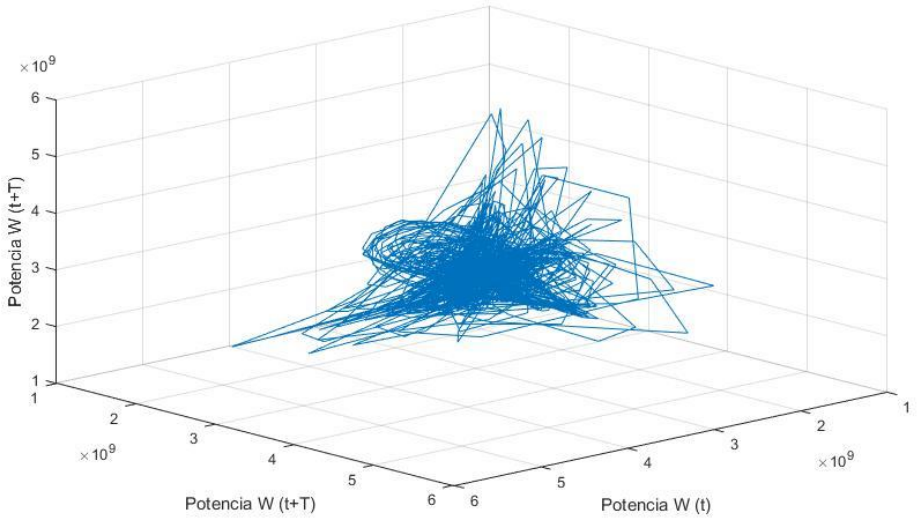


Figura 6.20 Atrator reconstruído para a série temporal da potência, caso 2.

A Figura 6.20 apresenta o atrator reconstruído no espaço de fase pelo método descrito na seção 5.2. Essa figura é a projeção R^3. Devido ao grande número de dados usados para reconstruir o atrator, as órbitas parecem estar sobrepostas umas às outras. Neste caso, pelas características erráticas do atrator, não é possível ver uma dinâmica associada aos dados.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho o problema de instabilidade de reatores nucleares foi abordado a partir de dois pontos de vista. O primeiro e mais comumente utilizado é o modelo paramétrico, que é baseado em modelos autorregressivos. Foi desenvolvido um programa (DRARMA) de análise de ruído de séries temporais autorregressivas para determinar o grau de estabilidade de um reator do tipo BWR, o seja, determinar os valores de DR e NF. O método foi testado com dados de plantas reais, Forsmark 1 e 2, tendo sido devidamente validado. O modelo foi também aplicado para análise de dados gerados a partir de simulações de transitórios no reator Peach Bottom, cujos dados de oscilação de potência foram obtidos com simulações com os códigos acoplados PARCS/RELAP. Em todos os casos, a validade da modelagem AR foi verificada a partir da análise dos espectros de potência.

Para os sinais provenientes do reator Forsmark 1 e 2, foram calculados DR e NF. Os valores do desvio padrão, em comparação aos apresentados no benchmark (Verdu *et al.*, 2001) são próximos. É possível concluir que este desvio indica uma boa estimativa do código DRARMA. Os valores de DR e NF apresentados no Benchmark, variam muito, sendo que somente alguns desses valores mantêm o segundo decimal constate; os valores encontrados com DRARMA coincidam com esse decimal. Dessa forma, também é possível concluir que a análise de estabilidade de modelos autorregressivos, contida neste trabalho, fornece uma boa medida da margem de estabilidade de um BWR.

No caso do reator Peach Bottom, os eventos transitórios obtidos da simulação do reator permitiram analisar os parâmetros da estabilidade de DR e NF. Os transitórios do reator Peach Bottom consistiram de uma perturbação abrupta de pressão na turbina do reator e na movimentação das barras de controle. Ambas as perturbações geram uma variação do comportamento das variáveis do reator, como a potência, temperatura, fração e vazio e vazão. Para os sinais obtidos dos eventos transitórios, foram calculados os parâmetros de estabilidade DR e NF com o código DRARMA, sendo que estes valores indicam claramente a presença de instabilidade no reator; para o caso do evento PP, os resultados para DR foram bastante próximos em comparação com os valores obtidos experimentalmente. O erro obtido com o código drarma é de 5,2% com relação ao experimental, ficando mais próximo do valor experimental do que os cálculos obtidos com os programas ADRI e DRAT (Costa, 2007).

Por outro lado, a segunda forma e a menos frequente da análise de instabilidade dos reatores BWRs, é usando os conceitos clássicos de sistemas dinâmicos não lineares; neste trabalho, foram calculados os maiores expoentes de Lyapunov (MEL) com o algoritmo de Wolf e reconstruídos os atratores para alguns dos sinais utilizados neste trabalho.

O valor do maior exponente de Lyapunov em uma série de tempo é um indicador de instabilidade do sistema. Os expoentes de Lyapunov quantificam a divergência exponencial das trajetórias inicialmente próximas do espaço de fases e estimam a quantidade de caos em um sistema. Este método foi aplicado a um conjunto de sinais obtidas da simulação do reator Peach

Bottom e de experimentos no reator Forsmark em condições operacionais que experimentaram eventos de instabilidade, aparentemente cada um de natureza diferente. Para ambos os reatores, todos os exponentes de Lyapunov são positivos, indicando a presença de caos nos sinais e evidentemente instabilidades, mas o valor do maior exponente de Lyapunov do sinal lmpr.19 do caso 4, é aproximadamente zero, e isto indica que o sinal é conservativo, ou seja, a amplitude da oscilação é aproximadamente igual ao longo do tempo.

Os atratores reconstruídos a partir dos sinais de potência são basicamente os mesmos, porque respondem ao mesmo processo neutrônico, termohidráulico, transferência de calor e fluxo bifásico. Podemos concluir que os atratores são independentes do tipo ou modo de instabilidade (em fase e fora de fase) e o atrator permanece semelhante. Podemos ver também que o sistema é recuperável, pois a eliminação de condições causadoras de instabilidade resulta no retorno do sistema à sua situação inicial como é caso do evento de perturbação de pressão.

Referências Bibliográficas

A. Petruzzi, Yunlin Xu, 2004. Decay Ratio Programs: Validation, Verification and Documentation (techreport No. 103). The Pennsylvania State University.

Abrahamsson, P., P...Hallgren, 1991. Rekursiv identifiering av dynamiska egenskaper hos kokarvattenreaktor foer stabilitetsmonitering (phdthesis). Institutionen for Reglerteknik, Lunds Tekniska Hogskola, Lund, Suecia.

Ambrosini, W., Ferreri, J.C., 2006. Analysis of basic phenomena in boiling channel instabilities with different flow models and numerical schemes, in: 14th International Conference on Nuclear Engineering. American Society of Mechanical Engineers, pp. 889–900.

Analytis, G.T., Hennig, D., Karlsson, J.K.-H., 2001. The physical mechanism of core-wide and local instabilities at the Forsmark-1 BWR. Nucl. Eng. Des. 205, 91–105. doi:10.1016/S0029-5493(00)00371-X

Askari B., D.H., Behringer K., 2001. Some Remarks to Time Series Analysis for BWR Stability Analysis. International Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications, Salt Lake City.

Basualdo Perelló, J.R., 2010. Acoples de códigos neutrónicos con códigos termohidráulicos y estudio de transitorios de cinética puntual vs, cinética espacial (mathesis). Istituto de Bariloche, San Carlos de Bariloche, Argentina.

Behringer, K., Hennig, D., 2002. A novel auto-correlation function method for the determination of the decay ratio in BWR stability analysis. Ann. Nucl. Energy 29, 1483–1504. doi:10.1016/S0306-4549(01)00122-0

Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., Ljung, G.M., 2015. Time Series Analysis: Forecasting and Control, Fifth. ed. John Wiley & Sons.

Bozdogan, H., 1987. Model selection and Akaike's Information Criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. Psychometrika 52, 345–370. doi:10.1007/BF02294361

Casimiro, M.P.G., 2009. Análisis de series temporales: Modelos ARIMA. Departamento de Economía Aplicada III, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales Universidad del País Vasco (UPV-EHU).

Costa, A.L., 2007. BWR Instability Analysis by Coupled 3D Neutron-Kinetic and Thermal-Hydraulic Codes (phdthesis). Università di Pisa, Pisa PI, Italia.

Costa, A.L., Ambrosini, W., Petruzzi, A., D'Auria, F., Pereira, C., 2008a. Analyses of pressure perturbation events in boiling water reactor. Ann. Nucl. Energy 35, 1199–1215.

Costa, A.L., Ambrosini, W., Petruzzi, A., D'Auria, F., Pereira, C., 2008b. Analyses of pressure perturbation events in boiling water reactor. Ann. Nucl. Energy 35, 1199–1215.

Eckmann, J.-P., Ruelle, D., 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys. 57, 617–656. doi:10.1103/RevModPhys.57.617

Ehlers, R.S., 2005. Análise de Séries Temporais. Departamento de Estatística, UFPR.

Fraser, A.M., Swinney, H.L., 1986. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. Phys. Rev. A 33, 1134–1140. doi:10.1103/PhysRevA.33.1134

Gavilán-Moreno, C.J., Espinosa-Paredes, G., 2016. Using Largest Lyapunov Exponent to Confirm the Intrinsic Stability of Boiling Water Reactors. Nucl. Eng. Technol. 48, 434–447. doi:10.1016/j.net.2016.01.002

H. G. Joo et al, 1998. PARCS: a Multi-Dimensional Two-Group Reactor Kinetics Code Based on the Non-linear Analytic Nodal Method, PU/NE-98-26. Purdue University.

Hanggi, P., 2001. Investigating BWR Stability with a New Linear Frequency-Domain Method and Detailed 3D Neutronics. SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH.

Hennig, D., 1996. Boiling Water Reactor Stability Analysis-A Challenge for the Study of Complex Nonlinear Dynamical Systems. PSI Annu. Rep. 1996.

Hotta, A., Ninokata, H., 2002. Numerical Study on Observed Decay Ratio of Coupled Neutronic-Thermal Hydraulic Instability in Ringhals Unit 1 under Random Noise Excitation. Nucl. Sci. Technol. 39, 138–149.

Kennel, M.B., Brown, R., Abarbanel, H.D.I., 1992. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. Phys. Rev. A 45, 3403–3411. doi:10.1103/PhysRevA.45.3403

Konno, Y., H...Kanemoto, S...Takeuchi, 1999. Parametric stochastic stability and decay ratio for a stochastic nonlinear BWR model below the Hopf bifurcation. Ann. Nucl. Energy 26, 1456.

L. A. Carmichael, O. Niemi, G.E.C., L.A., 1978. Transient and stability tests at Peach Bottom Atomic Power Station Unit 2 at end of cycle. Electric Power Research Institute, Palo Alto, Calif: Electric Power Research Institute.

Liebert, W., Schuster, H.G., 1989. Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series. Phys. Lett. A 142, 107–111.

Liu, H.-F., Dai, Z.-H., Li, W.-F., Gong, X., Yu, Z.-H., 2005. Noise robust estimates of the largest Lyapunov exponent. Phys. Lett. A 341, 119–127. doi:10.1016/j.physleta.2005.04.048

Ljung, L., 1999a. System identification: theory for the user. PTR Prentice Hall, Upper Saddle River.

Ljung, L., 1999b. System identification - Theory for the User. Prentice-Hall.

Lorenz, E.N., 1965. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. Tellus 17, 321–333. doi:10.1111/j.2153-3490.1965.tb01424.x

March-Leuba, J., 1986. A reduced-order model of boiling water reactor linear dynamics. Nucl. Technol. 75, 15–22.

March-Leuba, J., Cacuci, D.G., Perez, R.B., 1986. Nonlinear dynamics and stability of boiling water reactors: Part 1-Qualitative analysis. Nucl. Sci. Eng. 93, 111–123.

Mathworks, n.d. ARMAX.

Moore, M.N., 1958. The Determination of Reactor Transfer Functions from Measurements at Steady Operation. Nucl. Sci. Eng. 3, 387–394.

NRC (Ed.), 1988. Power Oscillations in Boiling Water Reactors (BWRs). OFFICE OF NUCLEAR REACTOR REGULATION, WASHINGTON, D.C., USA.

Oguma, R., 1996. Investigation of power oscillation mechanisms based on noise analysis at Forsmark-1 BWR. Ann. Nucl. Energy 23, 469–485. doi:10.1016/0306-4549(95)00027-5

Ortiz-Villafuerte, J., Castillo-Durán, R., Palacios-Hernández, J.C., 2011. Assessment of the Prony's method for BWR stability analysis. Nucl. Eng. Des., ICONE-17: Heavy Liquid Metal Technologies and Material Challenges for Gen IV Fast Reactors 241, 1469–1477. doi:10.1016/j.nucengdes.2011.02.018

Oseledets, V.I., 1968. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Mosc. Math. Soc. 19, 197–231.

Pázsit, I., 1995. Determination of reactor stability in case of dual oscillations. Ann. Nucl. Energy 22, 377–387. doi:10.1016/0306-4549(94)00082-P

Pereira, C., 1993. Aportaciones al estudio de inestabilidad en reactores de agua en ebullición. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.

Pereira, C., Verdu, G., Muñoz-Cobo, J.L., Sanchis, R., 1992. B. W. R. Stability from dynamic reconstruction and autoregressive model analysis: Application to Cofrentes Nuclear Power Plant. Prog. Nucl. Energy 27, 51–68. doi:10.1016/0149-1970(92)90017-W

Perelló, J.R.B., 2007. Modelado del núcleo de la Central Nuclear Atucha 2 con el código neutronico de cinética 3S PARC: casos estacionario y transiente. Istituto Balseiro, San Carlos de Bariloche, Argentina.

Rand, D.A., Young, L.-S., 2006. Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980: Proceedings of a Symposium Held at the University of Warwick 1979/80. Springer.

Rosenstein, M.T., Collins, J.J., De Luca, C.J., 1993. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. Phys. Nonlinear Phenom. 65, 117–134.

S L O Campanharo, A., E N Macau, E., M Ramos, F., 2012. Detectando a presença de caos em uma série temporal. Laboratório Assoc. Computação E Matemática Aplicada, LAC, INPE.

Sunde, C., 2007. Noise Diagnostics of Stationary and Non-Stationary Reactor Processes (phdthesis). Nuclear Engineering Department of Applied Physics Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden.

Theler, G., 2008. Análisis no lineal de inestabilidades en el problema acoplado termohidráulico-neutrónico (mathesis). Universidad Nacional de Cuyo, San Carlos de Bariloche, Argentina.

Thie, J. A., 1959. Dynamic behaviour of boiling reactors. Argonne Natl. Lab., ANL-5849.

Tsuji, M., Michishita, H., Shimazu, Y., 2005. Stability Monitoring for BWR based on Singular Value Decomposition Method using Artificial Neural Network. Nucl. Sci. Technol. 42, 1054–1066. doi:10.1080/18811248.2005.9711058

Tsuji, M., Shimazu, Y., 2005. Evaluation of decay ratio of BWRs using singular value decomposition method. Nucl. Sci. Technol. 42, 169–182.

US NRC, 2001. RELAP5/MOD3.3 Code Manuals, NUREG/CR-5535. Idaho National Engineering Laboratory.

Valtonnen, K., 1990. RAMONA-3B and TRAB assessment using oscillation data from TVO-I, in: Proceedings of the International Workshop on BWR Stability, OECD-NEA. CSNI Report. pp. 205–231.

Verdu, G., Ginestar, D., Munoz-Cobo, J.L., Navarro, J., Iqmn, G.V. (upv/dpto, Iqmn, D.G. (upv/dpto, Iqmn, J.N. (upv/dpto, (vattenfall-ab, P.L., Conde, J.M., (csn, M.R., (oecd/nea, E.S., 2001. Forsmark 1 & 2 Boiling Water Reactor Stability Benchmark - Time Series Analysis Methods for Oscillation during BWR Operation.

Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A., 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series. Phys. Nonlinear Phenom. 16, 285–317.

Anexo A

Todos os códigos aqui apresentados foram feitos em Matlab R2015a

A.1 Código para calcular Decay Ratio e Frequência Natural (DRARMA).

```
%Output: Decay Ratio e Frequência Natural.
%Input: Y= sinal de potência, dt= intervalo de tempo entre os dados.
function DR=drarma(Y,dt)
%Z=(Y-mean(Y))/std(Y);
pv=0:30;
qv=0:30;
np=length(pv);
nq=length(qv);
aicg=-99*ones(np,nq);
fpeg=-99*ones(np,nq);
maic=1e+6;
for pp=1:np
    p=pv(pp);
    for qq=1:nq
        q=qv(qq);
        if p+q~=0
            ordn=[p q];
             m=armax(Y,ordn);
             aicg(pp,qq)=aic(m);
             fpeg(pp,qq)=fpe(m);
            if aicg(pp,qq)<maic
               maic=aicg(pp,qq);
               pb=p;
               qb=q;
               mb=m;
            end
        end
    end
end
poli=mb.a;
cer=mb.c;
beta=roots(poli)
fts = tf(cer,poli);
rlocus(fts);
logz=log(abs(beta))+(angle(beta))*i;
lamb=(1/(dt))*(logz);
NF=abs(imag(lamb))./(2*pi)
DR=exp(2*pi*(real(lamb))./(abs(imag(lamb))))
end
```

A.2 Código para reconstruir o atrator.

```
function [Y,X]=recatrac(y,dim,tau)
% Output:
% Y é a matriz de trajetória no espaço de fase reconstruído.
% T É o comprimento do espaço de fase.
%Input:
% x é sinal de potência
% dim é dimensão de imersão
% tau é time delay.
if nargin<1 | isempty(y)==1
else
   if min(size(y))>1
   end
   y=y(:);
   N=length(y);
end

if nargin<2 | isempty(dim)==1
    dim=2;
else
        if sum(size(dim))>2
    end
    if dim-round(dim)~=0
    end
    if dim<=0
    end
end
if nargin<3 | isempty(tau)==1
    tau=1;
else
    if sum(size(tau))>2
    end
    if tau-round(tau)~=0
    end
    if tau<=0
    end
end
X=N-(dim-1)*tau;
Y=zeros(T,dim);
for i=1:T
   Y(i,:)=y(i+(0:dim-1)*tau)';
end
```

A.3 Código para calcular os exponentes de Lyapunov.

Usamos os códigos desenvolvidos por Wolf; estes códigos são "basgen.m" e "fet.m"

https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/48084-lyapunov-exponent-estimation-from-a-time-series-documentation-added

Os dos códigos foram unidos num só script para calcular os exponentes de lyapunov para as series de potência.

```
function mLy=mlyap(fname)
% Phase space reconstruction with MOD
[archivo,ruta]=uigetfile('c1_aprm.1.txt','fname');
if archivo==0
    return;
else
fid =fopen([ruta archivo],'r');
A=textscan(fid,'%f','headerlines',1);
A=cell2mat(A);
fclose(fid);
datcnt=length(A);
end
tau = 10;
ndim = 4;
ires = 10;
maxbox = 6000;
db = basgen(fname, tau, ndim, ires, datcnt, maxbox);
dt = .08;
evolve = 20;
dismin = 0.001;
dismax = 0.3;
thmax = 30;
[out, SUM] = fet(db, dt, evolve, dismin, dismax, thmax);
sol=out;
expol=sol(1:end,4);
valores=expol(150:199);
MLy=median(valores);
end
```

Código "basgen.m"

```
function db = basgen(fname, tau, ndim, ires, datcnt, maxbox)
% Gerador de banco de dados para a função fet.m
x = fileread(fname);
data = zeros(1,datcnt);
trck = 1;
start = 1;
fin = 0;

for ii = 1:length(x)
    if strcmp(x(ii), char(32)) || strcmp(x(ii), char(13)) || strcmp(x(ii),
char(10)) || strcmp(x(ii), char(26))
        if fin >= start
            data(trck) = str2num(x(start:fin));
            trck = trck + 1;
            if trck > 8*floor(datcnt/8)
                break
            end
```

```
        end
        start = ii + 1;
    else
        fin = ii;
    end
end

delay = 0:tau:(ndim-1)*tau;

nxtbox = zeros(maxbox, ndim);
where = zeros(maxbox, ndim);
datptr = zeros(1,maxbox);
nxtdat = zeros(1,datcnt);

datmin = min(data);
datmax = max(data);

datmin = datmin - 0.01*(datmax - datmin);
datmax = datmax + 0.01*(datmax - datmin);
boxlen = (datmax - datmin)/ires;

boxcnt = 1;

for ii = 1:(datcnt-(ndim-1)*tau)
    target = floor((data(ii+delay)-datmin)/boxlen);
    runner = 1;
    chaser = 0;

    jj = 1;
    while jj <= ndim
        tmp = where(runner,jj)-target(jj);
        if tmp < 0
            chaser = runner;
            runner = nxtbox(runner,jj);
            if runner ~= 0
                continue
            end
        end
        if tmp ~= 0
           boxcnt = boxcnt + 1;

           if boxcnt == maxbox
               error('Grid overflow, increase number of box count')
           end

           for kk = 1:ndim
               where(boxcnt,kk) = where(chaser,kk);
           end
           where(boxcnt,jj) = target(jj);
           nxtbox(chaser,jj) = boxcnt;
           nxtbox(boxcnt,jj) = runner;
           runner = boxcnt;
        end
        jj = jj + 1;
    end
    nxtdat(ii) = datptr(runner);
    datptr(runner) = ii;
end
```

```
used = 0;
for ii = 1:boxcnt
    if datptr(ii) ~= 0;
        used = used + 1;
    end
end
display(['Created: ', num2str(boxcnt)]);
display(['Used: ', num2str(used)]);

db.ndim = ndim;
db.ires = ires;
db.tau = tau;
db.datcnt = datcnt;
db.boxcnt = boxcnt;
db.datmax = datmax;
db.datmin = datmin;
db.boxlen = boxlen;

db.datptr = datptr(1:boxcnt);
db.nxtbox = nxtbox(1:boxcnt, 1:ndim);
db.where = where(1:boxcnt, 1:ndim);
db.nxtdat = nxtdat(1:datcnt);
db.data = data;
```

Código "fet.m"

```
function [out, SUM] = fet(db, dt, evolve, dismin, dismax, thmax)
% Calcula o expoente de Lyapunov de dado dados e parâmetros, gera saída
% Textfile, réplica exata do Fortran 77 versão do fet
out = [];

ndim = db.ndim;
ires = db.ires;
tau = db.tau;
datcnt = db.datcnt;
datmin = db.datmin;
boxlen = db.boxlen;

datptr = db.datptr;
nxtbox = db.nxtbox;
where = db.where;
nxtdat = db.nxtdat;
data = db.data;

delay = 0:tau:(ndim-1)*tau;
datuse = datcnt-(ndim-1)*tau-evolve;

its = 0;
SUM = 0;
savmax = dismax;

oldpnt = 1;
newpnt = 1;

fileID = fopen('fetout.txt', 'w');

goto50 = 1;
while goto50 == 1;
```

```
    goto50 = 0;
    [bstpnt, bstdis, thbest] = search(0, ndim, ires, datmin, boxlen, nxtbox,
where, ...
        datptr, nxtdat, data, delay, oldpnt, newpnt, datuse, dismin,
dismax,...
        thmax, evolve);

    while bstpnt == 0
        dismax = dismax * 2;
        [bstpnt, bstdis, thbest] = search(0, ndim, ires, datmin, boxlen,
nxtbox, where, ...
            datptr, nxtdat, data, delay, oldpnt, newpnt, datuse, dismin,
dismax,...
            thmax, evolve);
    end

    dismax = savmax;
    newpnt = bstpnt;
    disold = bstdis;
    iang = -1;

    goto60 = 1;
    while goto60 == 1;
        goto60 = 0;

        oldpnt = oldpnt + evolve;
        newpnt = newpnt + evolve;

        if oldpnt >= datuse
            return
        end

        if newpnt >= datuse
            oldpnt = oldpnt - evolve;
            goto50 = 1;
            break
        end

        p1 = data(oldpnt + delay);
        p2 = data(newpnt + delay);
        disnew = sqrt(sum((p2 - p1).^2));

        its = its + 1;

        SUM = SUM + log(disnew/disold);
        zlyap = SUM/(its*evolve*dt*log(2));
        out = [out; its*evolve, disold, disnew, zlyap, (oldpnt-evolve),
(newpnt-evolve)];

        if iang == -1
            fprintf(fileID, '%-d\t\t\t%-8.4f\t\t%-8.4f\t\t%-8.4f\n',
out(end,1:4)');
        else
            fprintf(fileID, '%-d\t\t\t%-8.4f\t\t%-8.4f\t\t%-8.4f\t\t%-d\n',
[out(end,1:4), iang]');
        end

        if disnew <= dismax
            disold = disnew;
```

```
            iang = -1;
            goto60 = 1;
            continue
        end

        [bstpnt, bstdis, thbest] = search(1, ndim, ires, datmin, boxlen,
nxtbox, where, ...
            datptr, nxtdat, data, delay, oldpnt, newpnt, datuse, dismin,
dismax,...
            thmax, evolve);

        if bstpnt ~= 0
            newpnt = bstpnt;
            disold = bstdis;
            iang = floor(thbest);
            goto60 = 1;
            continue
        else
            goto50 = 1;
            break;
        end
    end
end
fclose(fileID);
```