UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS - FAFICH
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

EDGAR HENRIQUE DO NASCIMENTO CAMPOS

A LÓGICA DE BROUWER E O PRINCÍPIO *EX FALSO QUODLIBET*

Belo Horizonte
2018

EDGAR HENRIQUE DO NASCIMENTO CAMPOS

A LÓGICA DE BROUWER E O PRINCÍPIO *EX FALSO QUODLIBET*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Linha de Pesquisa: Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Orientador: Prof. Dr. Abílio Azambuja Rodrigues Filho.

Belo Horizonte
2018

100
C198l
2018

Campos, Edgar Henrique do Nascimento
A lógica de Brouwer e o príncipio ex falso quodlibet [manuscrito] / Edgar Henrique do Nascimento Campos. - 2018.
108 f.
Orientador: Abílio Azambuja Rodrigues.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.
Inclui bibliografia

1.Filosofia – Teses. 2. Lógica – Teses.3. Lógica matemática não clássica – Teses. 4.Lógica simbólica e matemática – Teses. I. Rodrigues, Abílio. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A lógica de Brouwer e o princípio ex falso quodlibet

EDGAR HENRIQUE DO NASCIMENTO CAMPOS

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FILOSOFIA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em FILOSOFIA, área de concentração FILOSOFIA, linha de pesquisa Lógica, Ciência, Mente e Linguagem.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2018, pela banca constituída pelos membros:

Prof. Abílio Azambuja Rodrigues Filho - Orientador
UFMG

Prof. André da Silva Porto
UFG

Prof. Antônio Mariano Nogueira Coelho
UFMG

Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2018.

Para minha família,

Euza, Aline e Otávio

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação é o resultado do meu esforço individual, mas eu não teria sido capaz de realizar esse objetivo sem o apoio de diversas pessoas e instituições ao longo de minha formação.

Agradeço, em primeiro lugar, à minha mãe, que trabalhou incansavelmente para me garantir uma boa formação moral e educacional, dando-me todas as condições necessárias para alcançar meus objetivos e à minha companheira Aline, que sempre esteve ao meu lado em cada momento da preparação deste trabalho e suportou os inconvenientes de viver junto à alguém que dedica boa parte do seu tempo aos estudos.

Ao meu orientador Abílio, que tem sido fonte constante de conselhos importantes que me ajudaram a trilhar um caminho de sucesso na UFMG e ao meu grande amigo Martinho, que me apoiou de diversas formas desde quando começamos a cultivar essa amizade no já longínquo ano de 2011.

Agradeço aos diversos professores, colegas e alunos de monitoria que contribuíram para minha formação filosófica ao longo dos meus sete anos de estudos na UFMG, especialmente àquelas pessoas com quem pude manter uma proximidade maior: os professores Antonio Mariano, Newton Bignotto e Miriam Campolina e os queridos colegas Daniel, Rossana, Renato, Arthur e Lorenzzo.

Agradeço também à Fundação Universitária Mendes Pimentel (FUMP), que me forneceu auxílios essenciais ao meu bom rendimento acadêmico desde o meu ingresso na UFMG, especialmente através do trabalho de seus assistentes sociais Helena, Gênesis e Islaine e do psicólogo Maurício, e também ao CNPq pela bolsa que me permitiu dedicar-me mais tranquilamente à pesquisa.

Agradeço, por fim, aos meus familiares residentes em Belo Horizonte, tia Maria Neusa, seu marido Varonil, minha prima Larissa, seu marido Rick e meu primo Lívio, que me

acolheram em minha chegada à cidade e sempre me deram apoio e também aos familiares de minha companheira que também me apoiaram em momentos cruciais de minha carreira acadêmica, especialmente minha querida sogra Sônia que mais não se encontra fisicamente entre nós, mas que ocupa um lugar enorme em nossos corações e pensamentos.

RESUMO

De um ponto de vista tanto histórico quanto filosófico, o desenvolvimento da lógica intuicionista por Arend Heyting é usualmente justificado como a formalização das ideias de L.E.J. Brouwer sobre a natureza da lógica e sua relação com a atividade matemática. Mostraremos, no entanto, que um entendimento mais adequado da concepção de lógica desenvolvida na obra de Brouwer torna problemática a admissão do princípio de inferência conhecido como *ex falso quodlibet* como axioma de um sistema formal que pretende ser a codificação de suas ideias e que as justificativas apresentadas em favor da aceitação desse princípio na lógica intuicionista são insatisfatórias do ponto de vista brouweriano. Assim, a despeito de sua tradicional identificação como o sistema formal mais adequado para representar formalmente a concepção de lógica de Brouwer, sustenta-se que a lógica intuicionista não deveria ser considerada como tal. Por fim, argumenta-se que a lógica minimal, que difere da lógica intuicionista precisamente por não admitir o princípio mencionado acima como axioma, seria um sistema formal mais adequado do que a lógica intuicionista de Heyting para ser tomado como uma imagem formal da concepção de lógica de Brouwer.

Palavras-chave: Filosofia. Lógica. Lógica matemática não clássica. Lógica simbólica e matemática.

ABSTRACT

From both a historical and philosophical point of view, the development of intuitionist logic by Arend Heyting is usually justified as the formalization of L.E.J. Brouwer's ideas on the nature of logic and its relationship with mathematical activity. It is shown, however, that a more adequate understanding of the conception of logic developed in Brouwer's works render the admission of the principle of inference known as *ex falso quodlibet* problematic as axiom of a formal system which purports to be the codification of his ideas and also that the justifications presented in favor of the acceptance of this principle in intuitionist logic are not satisfactory from a brouwerian point of view. Thus, despite its traditional identification as the most adequate formal system to formally represent Brouwer's conception of logic, it is maintained that intuitionist logic should not be considered as such. Finally, it is argued that minimal logic, which differs from intuitionist logic precisely by not admitting the above mentioned principle as axiom, would be a formal system more adequate than Heyting's intuitionist logic to be taken as a formal image of Brouwer's conception of logic.

Keywords: Philosophy. Logic. Non-classical Mathematical Logic. Symbolic Logic and Mathematics.

SUMÁRIO

Introdução

A partir do trabalho de Frege (1879), o estudo da lógica passou a ser intimamente ligado a noção de sistemas formais, que também são chamados às vezes de cálculos lógicos, os quais contêm quatro componentes básicos:

(i) um conjunto de símbolos, por vezes designado simplesmente por alfabeto;

(ii) um conjunto de regras de formação;

(iii) um conjunto de axiomas;

(iv) um conjunto de regras de transformação.

Enquanto o alfabeto e as regras de formação definem uma linguagem formal e as fórmulas bem formadas dessa linguagem, os itens (iii) e (iv) determinam um aparato dedutivo para essa linguagem por meio do qual pode-se manipular os seus símbolos sem qualquer referência a seu significado a fim de demonstrar que determinadas fórmulas são teoremas.

Hunter (1971, p. 10) apresenta uma descrição informal, porém, bastante elucidativa do interesse que sistemas formais despertam naqueles que se dedicam ao estudo da lógica:

> Usualmente o lógico interessa-se por uma linguagem formal porque ela possui fórmulas que podem ser interpretadas como expressando verdades lógicas; e usualmente ele interessa-se por um sistema formal porque seus teoremas podem ser interpretados como expressando verdades lógicas ou porque suas regras de transformação podem ser interpretadas como regras de inferência logicamente válidas.[1]

De uma perspectiva tanto histórica quanto filosófica, o desenvolvimento do sistema formal da lógica intuicionista foi motivado pelas ideias de L.E.J. Brouwer, que defendeu, nas primeiras décadas do século XX, uma concepção construtivista da matemática conhecida como intuicionismo que continha uma crítica veemente ao emprego de inferências

---

1 "Usually the logician is interested in a formal language because it has formulas that can be interpreted as expressing logical truths; and usually he is interested in a formal system because its theorems can be interpreted as expressing logical truths or because its transformation rules can be interpreted as logically valid rules of inference." (Tradução nossa)

lógicas (também chamadas de leis lógicas) na realização de demonstrações matemáticas, especialmente inferências que se baseiam no princípio do terceiro excluído, usualmente considerado uma verdade fundamental da lógica que estabelece que, qualquer que seja a proposição considerada, a própria proposição é verdadeira ou sua negação é verdadeira.

Essa crítica motivou um debate em torno da possibilidade de desenvolver um sistema formal que fosse fiel às ideias de Brouwer, uma "lógica de Brouwer"[2]. Ao final desse debate o sistema formal proposto por Arend Heyting (1930) estabeleceu-se como a formalização padrão da lógica intuicionista, que formalizaria a concepção de lógica de Brouwer ao conter como teoremas somente fórmulas que representariam inferências consideradas logicamente válidas do ponto de vista construtivista sustentado por ele. Essa era a própria pretensão de Heyting (1932, p. 121) que, referindo-se ao seu sistema formal enquanto codificação da lógica intuicionista e recusando a designação de "lógica de Heyting" apresentada por Barzin e Errera (1931), afirmou que "[...] todas as ideias fundamentais desta lógica provêm do Sr. Brouwer."[3]

Em favor dessa interpretação pode-se apresentar os comentários positivos que o próprio Brouwer teceu acerca do trabalho de Heyting[4], entretanto um dos axiomas propostos para a lógica proposicional intuicionista nessa obra, a fórmula

$$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)^{5},$$

que na lógica clássica representa a inferência conhecida como *ex falso quodlibet* (doravante designada pela sigla *EFQ*), segundo a qual a partir de uma contradição (ocorrência simultânea de uma proposição e sua negação) pode-se inferir qualquer outra proposição escolhida

---

2 Cf. VAN STIGT, 1990, p. 288-291 e também HESSELING, 2003, p. 217-299.

3 "[…] toutes les idées fondamentales de cette logique provenant de M. Brouwer." (Tradução nossa)

4 As cartas em que Brouwer comenta o trabalho de Heyting foram reproduzidas em TROELSTRA, 1990, p. 10-11. Alguns intérpretes tomam esses comentários como evidência de que o próprio Brouwer apoiou a lógica intuicionista de Heyting enquanto formalização de suas ideias. Cf. VAN DALEN, 2004B, p. 256; KUIPER, 2004, p. 309-310. Para uma crítica a essa interpretação, ver VAN ATTEN, 2004A, p. 514-515.

5 A fim de simplificar a exposição, apresentaremos fórmulas lógicas sempre com a notação simbólica mais utilizada atualmente, mesmo em citações de obras onde a notação empregada for diferente.

arbitrariamente, não parece estar de acordo com os critérios estabelecidos por Brouwer para se aceitar o emprego de uma inferência lógica como aceitável a partir do seu ponto de vista construtivista, sobretudo porque ele não parece descrever uma operação que os matemáticos realmente empregariam enquanto desenvolvem suas construções mentais.

O presente trabalho pretende mostrar que:

(1) a inclusão do *EFQ* como um dos axiomas da lógica intuicionista não pode ser justificada com base nas ideias de Brouwer e que, consequentemente, a lógica intuicionista formulada por Heyting não representa uma formalização fiel da concepção de lógica de Brouwer;

(2) as ideias de Brouwer seriam, na verdade, melhor representadas por um sistema formal que não contenha o *EFQ* como um de seus axiomas ou teoremas, sendo a lógica minimal proposta por Ingebrigt Johansson (1937), mas que fora antecipada nos seus aspectos essenciais num sistema formal proposto anteriormente por Andrei Kolmogorov (1925), uma alternativa mais adequada para representar a "lógica de Brouwer" uma vez que, como resumiu Quine (1937, p. 47), "este sistema é o que resta do cálculo proposicional de Heyting [...] quando nós retiramos um de seus dois postulados da negação, a saber '$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$'."[6]

O argumento principal dessa dissertação é desenvolvido ao longo de três capítulos. No capítulo I, procuramos identificar e explicitar, no interior da obra de Brouwer, critérios e métodos que possam servir de fundamento para a construção de um sistema formal apto a representar, de forma mais adequada possível, sua concepção de lógica como a ciência que identifica e sistematiza determinados padrões na transcrição linguística das operações mentais realizadas durante a atividade matemática.

No capítulo II, argumentaremos contra a admissão do *EFQ* como axioma ou teorema de um sistema formal que pretenda ser uma formalização da concepção de lógica de

[6] "This system is what remains of Heyting's propositional calculus […] when we drop one of his two postulates of denial, viz. "$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$"." (Tradução nossa)

Brouwer e mostraremos que as justificativas apresentadas em favor da aceitação dessa inferência na lógica intuicionista são insatisfatórias quando avaliadas do ponto de vista brouweriano. Como consequência do exposto acima, argumentaremos contra a identificação da lógica intuicionista, tal como estabelecida por Arend Heyting, como o sistema formal que melhor formaliza a concepção de lógica de Brouwer.

No capítulo III, argumentaremos em favor da lógica minimal estabelecida por Ingebrigt Johansson, mas que fora antecipada em seus pontos fundamentais por Andrei Kolmogorov, como um sistema formal que representa a concepção de lógica de Brouwer de forma mais adequada que a lógica intuicionista.

Nesta dissertação, nos limitaremos a considerar sistemas formais para a lógica proposicional, já que as diferenças formais existentes entre a lógica intuicionista e a lógica clássica bem como as diferenças que sustentamos existir entre a lógica intuicionista e o sistema formal que seria uma representação mais adequada para a concepção de lógica de Brouwer se encontram no nível proposicional, tornando desnecessário estender nossa exposição para incluir considerações sobre os axiomas e regras de inferências de uma lógica de primeira ordem brouweriana, já que a extensão do sistema de lógica proposicional aqui considerado uma representação formal da concepção de lógica de Brouwer para uma linguagem de primeira ordem pode seguir, sem qualquer ressalva, o modo como é feita a extensão da lógica proposicional intuicionista para uma linguagem de primeira ordem.

Capítulo I:

A concepção de lógica de Brouwer

Este capítulo apresenta a concepção de lógica de Brouwer sob dois aspectos: primeiramente, apresentamos sua visão geral sobre a lógica em termos de sua gênese, sua natureza e suas aplicações, que é uma consequência da sua caracterização da relação entre matemática, linguagem e lógica; num segundo momento, apresentamos algumas consequências mais específicas que podem ser extraídas dessa sua visão geral no que diz respeito ao significado dos conectivos lógicos e à invalidade de determinados princípios lógicos considerados válidos pela lógica clássica, notadamente o princípio do terceiro excluído.

1. Matemática, linguagem e lógica

A concepção de lógica de Brouwer, isto é, seu modo de compreender a natureza da lógica, sua gênese e suas aplicações, sempre foi intimamente relacionada às suas visões sobre a matemática e a linguagem. Tal relação pode ser imediatamente percebida logo na primeira referência direta à lógica que encontramos na obra de Brouwer, onde ele, em meio a uma discussão mais ampla sobre a linguagem, reconhece a lógica e a matemática como as duas ciências mais restritas no que concerne à possibilidade de mal-entendidos a respeito de suas noções principais e afirma que "uma distinção nítida entre estas duas [ciências] é dificilmente possível."[7] (BROUWER, 1905, p. 401)

Quando Brouwer voltou a tratar da relação entre matemática e lógica na sua dissertação de doutorado, ele acabou por distingui-las com mais clareza ao defender, por um lado, que a matemática é independente da lógica enquanto, por outro, que a lógica é dependente da matemática. (BROUWER, 1907, p. 72-73)

[7] "(…) a sharp distinction between these two is hardly possible" (Tradução nossa)

Ambas as afirmações são consequências daquilo que Brouwer (1952, p. 140-141), já numa fase mais madura de seu pensamento, chamou de Primeiro Ato do Intuicionismo:

> O PRIMEIRO ATO DO INTUICIONISMO separa completamente a matemática da linguagem matemática, em particular dos fenômenos da linguagem que são descritos pela lógica teorética e reconhece que a matemática intuicionista é uma atividade da mente essencialmente sem linguagem que tem sua origem na percepção de um movimento do tempo, i. e., da divisão de um momento da vida em duas coisas distintas, uma das quais dá caminho para a outra, mas é retida pela memória. Se a doisidade[8] assim nascida é desprovida de toda qualidade, permanece então a forma vazia do substrato comum de todas as doisidades. É este substrato comum, esta forma vazia, que é a intuição básica da matemática.[9]

O Primeiro Ato do Intuicionismo representa, de um ponto de vista histórico, os primeiros trabalhos de Brouwer entre os anos de 1907 e 1908, onde ele começa a desenvolver sua reação contrária à aplicação do método lógico-linguístico nas investigações sobre os fundamentos da matemática, que era um traço comum tanto da corrente logicista então representada, principalmente, por Bertrand Russell, que buscava definir os conceitos fundamentais da matemática em termos dos conceitos da lógica bem como reduzir as verdades da matemática às leis gerais da lógica[10], quanto da corrente liderada por David Hilbert, que começava a esboçar seu projeto de fundamentar a matemática por meio do desenvolvimento de um sistema formal onde lógica e matemática seriam desenvolvidas paralelamente e a prova da consistência desse sistema formal por meios finitários.[11]

---

8 Nas traduções para o inglês das obras de Brouwer, cuja maior parte dos trabalhos foi escrita originalmente em holandês ou alemão, encontramos frequentemente as palavras ‘two-ity’ ou ‘twoness’ referindo-se ao processo pelo qual dois momentos distintos são conectados pela experiência de um antes, que passou, mas ainda é retido pela memória, e um agora, diretamente presente na consciência. Esse processo, para Brouwer, é a base para qualquer pensamento onde duas coisas são pensadas simultaneamente de forma unificada, mas ainda permanecendo separadas. Desta forma, essa é, segundo Brouwer, a base inclusive para o desenvolvimento das próprias noções de sujeito e objeto e, consequentemente, de todo o pensamento humano. Optamos por traduzir esse termo pelo neologismo ‘doisidade’ que, acreditamos, pode causar menos estranheza se comparado à palavra ‘unidade’ de uso corrente em vários âmbitos da vida.

9 “The FIRST ACT OF INTUITIONISM completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.” (Tradução nossa)

10 Cf. RUSSELL (1903) e também WHITEHEAD; RUSSELL (1910).

11 Cf. HILBERT (1904) e também HILBERT (1922) e HILBERT (1923).

De um ponto de vista conceitual, o Primeiro Ato do Intuicionismo comporta as duas teses mais fundamentais de Brouwer sobre a natureza da matemática. A primeira delas sustenta que a matemática é uma atividade de construção mental de objetos, determinação de suas propriedades e das relações que esses objetos apresentam entre si a partir da chamada "intuição fundamental da matemática", que forneceria os elementos básicos e noções fundamentais para o desenvolvimento dessa atividade, bem como colocaria restrições quanto a quais construções podem ser concretizadas pelo sujeito e quais são impossíveis de serem concretizadas. (BROUWER, 1907, p. 52; p. 97)

A intuição fundamental da matemática à qual Brouwer se refere corresponde à intuição pura do tempo, que Kant considerava, juntamente com a intuição pura do espaço, como uma das condições de possibilidade da experiência e do conhecimento.

Com o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, a ideia de uma intuição pura do espaço tornou-se sem sentido já que foram apresentados sistemas que, apesar de possuírem postulados que contradizem os postulados da geometria euclidiana, são igualmente consistentes e, podem, ainda que com algum grau maior ou menor esforço, ser projetados de forma produtiva sobre o mundo da experiência.

No entanto, Brouwer mantém a intuição pura do tempo, entendida como a percepção pura da passagem do tempo na relação antes–agora obtida pela abstração de qualquer elemento empírico dessa percepção, como base fundamental para a matemática, ao justificar o primeiro ato de construção matemática, que consiste na criação simultânea dos números 1 e 2 diretamente a partir da intuição fundamental da matemática e ao fornecer os elementos para a posterior construção da matemática.

Segundo Brouwer (1907, p. 70), "a matemática desenvolve-se a partir da sua intuição básica numa auto-multiplicação guiada por uma escolha inteiramente livre[12]", na qual

[12] "Mathematics develops out of its basic intuition in a self-multiplication guided by an entirely free choice." (Tradução nossa)

o sujeito, livre de qualquer pressão ou restrição exterior, constrói sistemas matemáticos cada vez mais complexos, construindo novas entidades, demonstrando suas propriedades e estabelecendo relações entre elas.

Contrariamente ao que defendiam a maioria de seus contemporâneos sobre a matemática, Brouwer sustentou que a única fundamentação possível para esta área do conhecimento devia ser buscada na própria atividade matemática, isto é, na sua construção tendo por base somente a intuição fundamental da matemática, sem qualquer recurso a algo exterior a ela como, por exemplo, a linguagem (BROUWER, 1907, p. 51-52)

As considerações precedentes sobre a intuição básica da matemática já nos fornecem condições de compreender por que a concepção da matemática desenvolvida por Brouwer é conhecida como intuicionista: o recurso a essa *intuição* é fundamental para a constituição da matemática e a sustentação de sua legitimidade.

A segunda das teses fundamentais de Brouwer sobre a matemática sustenta que toda essa construção da matemática pode ser realizada, em princípio, de forma absolutamente separada de toda e qualquer linguagem. Essa segunda tese inclui um elemento de idealização na filosofia da matemática de Brouwer, que se tornou ainda mais claro com a introdução da noção de matemático ideal, o sujeito criador, que poderia, em princípio, desenvolver a matemática por não estar sujeito a limitações de memória.

Mesmo que contenha elementos de idealização na sua teoria, Brouwer sempre esteve atento ao papel que a matemática desempenha na existência dos seres humanos concretos, que por meio da atividade matemática, aumentam enormemente sua capacidade de intervenção na natureza a fim de alcançar objetivos específicos ao projetar os sistemas matemáticos construídos mentalmente sobre o mundo, o que Brouwer chama de tomar uma visão matemática do mundo, que o torna mais regular e aumenta a precisão de suas previsões, o que é um trunfo importante na luta pela sobrevivência.

Tanto a construção da matemática pura quanto a aplicação de seus resultados ao mundo da experiência poderiam, em princípio, ser realizadas sem qualquer recurso à linguagem, entretanto, isso não seria suficiente para atender as demandas dos seres humanos concretos que, diferentemente de um matemático idealizado, não possuem uma memória ilimitada e infalível.

Os matemáticos de carne e osso, pessoas comuns, não podem confiar plenamente na própria memória para recordar as construções concretizadas na privacidade de suas mentes e também sentem a necessidade de comunicar essas construções a outros seres humanos visando instigá-los a também efetuar tais construções para que eles também possam projetá-las sobre o mundo da experiência e, assim, tornar possível uma colaboração mais adequada para se atingir determinados fins práticos.

Segundo Brouwer (1907, p. 73), "as pessoas tentam por meio de sons e símbolos originar nas outras pessoas cópias das construções mentais e raciocínios que elas mesmas fizeram; pelos mesmos meios elas tentam auxiliar sua própria memória. Desta maneira vem à luz a linguagem matemática."[13]

A linguagem da matemática é, portanto, um fenômeno secundário que surge por conta das limitações e necessidades próprias da existência humana concreta, mas que, em princípio, seria inútil em condições ideais.

Essa linguagem é desenvolvida para exteriorizar as construções matemáticas efetuadas na privacidade da mente que, a principio, eram acessíveis apenas ao próprio sujeito que as realizou e, mesmo assim, com alguns problemas dadas as limitações da nossa faculdade da memória.

Assim, o matemático poderia proferir ou escrever uma frase do português como, por exemplo, 'dois mais três é igual a cinco' ou, utilizando uma notação simbólica, '2+3=5'

[13] "People try by means of sounds and symbols to originate in other people copies of mathematical constructions they have made themselves; by the same means they try to aid their own memory. In this way the mathematical language comes into being." (Tradução nossa)

para referir-se a uma construção mental efetuada por ele e assim poder recordá-la num momento posterior ou sugeri-la a outras pessoas.

Um aspecto fundamental desta concepção da função da linguagem da matemática é que ela não transporta verdade sobre uma realidade exterior ao sujeito, seja esta empírica ou abstrata. A afirmação de uma proposição matemática expressaria simplesmente o fato empírico de que uma construção mental com determinadas características e que conduz a um resultado específico foi efetuada.

Na visão de Brouwer, uma proposição matemática só pode, portanto, ser considerada como verdadeira num sentido secundário e derivado, pois, num sentido estrito e original, "a verdade está somente na realidade, isto é, nas experiências presentes e passadas da consciência."[14] (BROUWER, 1948, p. 1243)

Uma proposição matemática só pode ser afirmada como verdadeira se a construção mental por ela designada foi efetivamente, ou pode ser, em princípio, realizada e experienciada pelo sujeito, isto é, se há uma demonstração de tal proposição ou se já se conhece um método, um algoritmo, que conduzirá à construção.

Assim, não faz sentido falar da verdade ou falsidade de uma proposição matemática independentemente do nosso conhecimento acerca dela, isto é, de sua demonstração e, consequentemente, a noção de verdade tradicionalmente aplicada sobre as proposições da matemática como sendo a expressão de um fato que não depende do sujeito deve ser substituída pela noção de demonstrabilidade, entendida no sentido da realização de uma determinada construção mental pelo sujeito.

Esse ponto mostra claramente uma das principais divergências de Brouwer com o pensamento sustentado pela maioria dos seus contemporâneos, pois para estes era perfeitamente natural entender as proposições matemáticas como sendo necessariamente

[14] "(…) truth is only in reality i.e. in the present and past experiences of consciousness." (Tradução nossa)

verdadeiras ou falsas, independentemente do nosso conhecimento acerca delas, uma posição que contém um manifesto ingrediente realista.

Já numa fase mais madura de seu trabalho, Brouwer (1955, p. 114) explicou com maiores detalhes os estados em que uma proposição matemática pode se encontrar quanto a sua capacidade de expressar uma verdade ou não.

> Na matemática nenhuma verdade poderia ser reconhecida que não tivesse sido experienciada e que para uma asserção matemática α os dois casos anteriormente admitidos de forma exclusiva[15] foram substituídos pelos quatro seguintes: 1. α foi *provada como sendo verdadeira*; 2. α foi *provada como sendo falsa, i. e. absurda*; 3. α não foi provada como sendo verdadeira nem como sendo absurda, mas um algoritmo é conhecido e leva a uma decisão de que α é verdadeira ou que α é absurda; 4. α não foi provada como sendo verdadeira nem como sendo absurda, nem conhecemos um algoritmo que leva à afirmação de que α é verdadeira ou que α é absurda.[16]

Dada essa caracterização da matemática como uma construção mental independente da linguagem fornecida por Brouwer, torna-se possível compreender mais claramente o significado de suas afirmações que sustentam a matemática como sendo independente da lógica enquanto, pelo contrário, a lógica é dependente da matemática uma vez que os objetos de estudo da lógica constituem, na sua visão, fenômenos essencialmente linguísticos, como será melhor explicado mais adiante.

Como o próprio Brouwer (1907, p. 72) reconhece, sua tese de que a matemática é independente da lógica, quando a última é entendida no sentido tradicional como contendo as leis do pensamento, "parece paradoxal, pois usualmente a matemática é expressa, oralmente ou na escrita, na forma de argumentação, dedução de propriedades por meio de uma cadeia de silogismos."[17]

---

[15] Os dois casos consistem em tomar as proposições como verdadeiras ou falsas.

[16] "(…) in mathematics no truths could be recognized which had not been experienced, and that for a mathematical assertion α the two cases formerly exclusively admitted were replaced by the following four: 1. α has been *proved to be true*; 2. α has been *proved to be false*, *i.e. absurd*; 3. α has neither been proved to be true nor to be absurd, but an algorithm is known leading to a decision either that α is true or that α is absurd; 4. α has neither been proved to be true nor to be absurd, nor do we know an algorithm leading to the statement either that α is true or that α is absurd." (Tradução nossa)

[17] "(…) seems paradoxical, for usually mathematics is expressed, orally or in writing, in the form of argumentation, deduction of properties, by means of a chain of syllogisms." (Tradução nossa)

Brouwer esforça-se então para explicar que a atividade matemática, que como vimos, é originalmente puramente mental, não envolve, de fato, qualquer elemento que pudesse ser chamado de lógico. Na dissertação, a explicação de Brouwer para este problema não parece ser suficientemente clara, pois ele afirma que:

> Onde os objetos matemáticos são dados por suas relações com as partes básicas ou complexas de uma estrutura matemática, nós transformamos estas relações dadas por uma sequência de tautologias e então gradualmente procedemos para as relações do objeto com outros componentes da estrutura.[18] (BROUWER, 1907, p. 72)

O emprego da palavra 'tautologia' pode causar confusão em um leitor contemporâneo já que, em cursos introdutórios à lógica, essa palavra é comumente associada às fórmulas válidas da lógica proposicional, que são verdadeiras em todas as valorações, no entanto, como Brouwer esclarece em uma nota de rodapé, essas transformações de relações dadas por meio de tautologias consistem em atos através dos quais o matemático fixa sua atenção e observa diferentes sub-estruturas do sistema matemático considerado. (BROUWER, 1907, p. 72, n. 2)

Em carta enviada ao seu orientador poucas semanas antes da defesa de sua dissertação[19] com a esperança de convencê-lo a assumir uma posição mais favorável às suas ideias sobre a relação entre matemática e lógica, Brouwer apresentou um exemplo bastante esclarecedor de sua posição ao considerar o seguinte teorema da geometria:

se um triângulo é isósceles, então esse triângulo é agudo.[20]

---

[18] "Where mathematical objects are given by their relations to the basic or complex parts of a mathematical structure, we transform these given relations by a sequence of tautologies and thus gradually proceed to the relations of the object to other components of the structure." (Tradução nossa)

[19] Cf. carta de Brouwer para D. J. Korteweg, datada de 23 de janeiro de 1907, traduzida para o inglês em VAN DALEN (ed.), 2011, p. 37-40.

[20] Um triângulo é dito isósceles se, e somente se, apresenta dois lados congruentes, isto é, dois lados com o mesmo comprimento enquanto um triângulo é dito agudo se, e somente se, todos os seus três ângulos são agudos, isto é, menores que 90º. Conforme observou D. van Dalen, 2000, nota 7, Brouwer cometeu um erro ao enunciar o teorema, pois podem ser construídos triângulos isósceles que apresentam algum ângulo reto (90º) ou obtuso (maior que 90º). Esse erro, no entanto, não interfere no argumento que se segue, tanto que Korteweg parece ter compreendido o ponto de Brouwer. Para que o teorema fosse enunciado corretamente, D. van Dalen sugere reescrevê-lo da seguinte forma "se um triângulo é isósceles, seus ângulos opostos aos lados congruentes são agudos" ou então substituir 'isósceles' por 'equilátero' no enunciado original da carta de Brouwer.

Esse teorema costumava ser expresso em linguagem lógica, onde se afirma que o predicado “... é isósceles” implica o predicado “... é agudo” e sua demonstração, de acordo com a lógica tradicional, consiste em mostrar que a classe dos triângulos isósceles está contida na classe dos triângulos que possuem ângulos agudos.

Brouwer insiste, no entanto, que enquanto realiza mentalmente a demonstração desse teorema, o matemático não raciocina de forma lógica, pois, na verdade:

> Ele imagina que ele começa a construir um triângulo isósceles e então que depois da construção os ângulos revelar-se-ão serem agudos ou a construção não é bem sucedida se um ângulo reto ou obtuso é postulado. Em outras palavras, ele dá ao teorema em sua mente uma interpretação matemática, não lógica.[21] (BROUWER apud VAN DALEN (ed.), 2011, p. 38)

O resultado alcançado com a construção desse teorema se dá por uma inspeção direta que o sujeito realiza sobre o sistema matemático que ele está construindo, no caso, o triângulo isósceles, onde ele após observar a congruência de dois lados do triângulo volta sua atenção para a medida dos ângulos internos do triângulo e observa que eles seriam menores que 90º, bem como que postular qualquer medida igual ou maior que 90º tornaria a construção impossível.

O que Brouwer quer enfatizar, portanto, é que a construção da matemática não necessita apoiar-se sobre as regras da lógica, que determinam quais asserções podem ser derivadas de um conjunto de premissas e quais não podem ser derivadas, para alcançar novos resultados. Esse é justamente o conteúdo principal de sua crítica às tentativas de Russell e Hilbert de fundar a matemática por meio do método lógico-linguístico.

Além disso, a recusa de que a lógica tem qualquer papel essencial no desenvolvimento da matemática teria também uma consequência positiva quanto à solução dos paradoxos que vinham atormentando os matemáticos no inicio do século XX. Na visão de Brouwer, nenhum desses paradoxos era propriamente matemático, isto é, um problema cuja

---

[21] “He imagines that he starts to construct an isosceles triangle, and then that after the construction either the angles will turn out to be acute, or the construction doesn’t succeed if a right or obtuse angle is postulated. In other words, he gives the theorem in his mind a mathematical, not a logical interpretation.” (Tradução nossa)

origem estaria no coração da intuição fundamental da matemática, mas confusões originadas pelo uso da linguagem lógica na atividade matemática.

Na dissertação, logo após considerar a independência da matemática em relação à lógica, Brouwer (1907, p. 73) volta sua atenção à tese de que a lógica depende da matemática e explica que "raciocínio lógico intuitivo é aquele tipo especial de raciocínio matemático que permanece se, considerando estruturas matemáticas, o sujeito restringe-se a relações de todo e parte."[22]

Ele sustenta que as leis lógicas que dependem da matemática, uma vez que estas seriam simplesmente determinadas regularidades encontradas na linguagem da matemática que é usada para representar a atividade mental de construção matemática. (BROUWER, 1907, p. 73)

Essa interpretação de Brouwer está intimamente ligada a noção tradicional de lógica iniciada por Aristóteles e que recebeu um tratamento mais formal através da álgebra da lógica.

Assim, ao mostrar que a matemática é independente da lógica, Brouwer mostra que a lógica não é necessária para o adequado desenvolvimento da matemática enquanto que, ao mostrar que a lógica depende da matemática, ele mostra que a lógica jamais seria suficiente para garantir um adequado desenvolvimento da matemática, pois, devido ao seu caráter linguístico intrínseco derivado da linguagem da matemática, as leis lógicas não podem ser usadas para descobrir novas verdades matemáticas, posto que essas são necessariamente o resultado de construções mentais desenvolvidas em total independência da linguagem (BROUWER, 1948, p. 1243).

Um ano após defender sua dissertação, no entanto, Brouwer (1908, p. 109) parece considerar com mais atenção e vislumbra uma possibilidade de uso para as leis lógicas em que

---

[22] "(…) intuitive logical reasoning is that special kind of mathematical reasoning which remains if, considering mathematical structures, one restricts oneself to relations of whole and part" (Tradução nossa)

elas podem ajudar o matemático a prever quais resultados ele pode alcançar caso continue a desenvolver suas construções mentais:

> ‘É permitido, em construções e transformações puramente matemáticas, negligenciar por algum tempo a ideia do sistema matemático em construção e operar na estrutura linguística correspondente, seguindo os princípios do silogismo, da contradição e do terceiro excluído, e podemos então ter confiança de que cada parte do argumento pode ser justificada ao se trazer de volta à mente a construção matemática correspondente?’[23]

Embora restrinja sua atenção às leis da lógica clássica, cuja expressão formal é dada através da álgebra da lógica, podemos facilmente estender esse tratamento à lógica simbólica em geral, na época chamada por Brouwer de logística, que diferentemente da lógica clássica, representa uma expressão formal da linguagem matemática em geral.

Nessa passagem, além de justificar algum papel, mesmo que secundário e precário, para os princípios lógicos na investigação matemática, Brouwer apresenta o seu critério para a admissão da aplicação de uma lei lógica por um matemático como confiável ou, no mínimo como não-problemática: ela deve ser justificada pela construção matemática mental correspondente, isto é, sua aplicação numa estrutura linguística que reproduza uma determinada construção matemática mental deveria exprimir uma transformação na estrutura matemática correspondente que está sendo construída mentalmente.

Num certo sentido, o que o critério formulado exige nada mais é do que fazer aquilo que Brouwer já havia feito na dissertação e na correspondência enviada ao seu orientador, onde ele mostrou que por trás de uma aparente aplicação de princípios, o que ocorre realmente é um tipo de raciocínio puramente matemático.

A questão colocada por Brouwer nesse momento, no entanto, claramente tem um aspecto importante ao mostrar a possibilidade de que os princípios lógicos sejam a expressão linguística de métodos gerais de construção, caso toda e qualquer possível aplicação dos

[23] ‘“Is it allowed, in purely mathematical constructions and transformations, to neglect for some time the idea of the mathematical system under construction and to operate in the corresponding linguistic structure, following the principles of syllogism, of contradiction and of *tertium exclusum*, and can we then have confidence that each part of the argument can be justified by recalling to the mind the corresponding mathematical construction?’” (Tradução nossa)

mesmos sobre estruturas linguísticas que representem uma construção matemática mental possa ser justificada pela efetiva realização do raciocínio matemático correspondente ao princípio lógico.

Dessa forma, uma vez que se verificasse a confiabilidade de determinadas leis lógicas, estas poderiam ser aplicadas sobre as fórmulas da linguagem da matemática para, num certo sentido, antecipar os resultados das construções mentais que poderão ser concretizadas pelo sujeito quando este se propor a realizar a construção mental do resultado alcançado. A estrutura linguística assim obtida também poderia ser utilizada para sugerir a outros seres humanos a construção desse resultado.

Entretanto, apenas realizando essas construções e, assim, experienciando-as na consciência é que as verdades matemáticas serão realmente estabelecidas. Enquanto esta investigação mental não for concluída pelo próprio sujeito que desenvolveu a estrutura linguística ou por aqueles que tiveram acesso a essa estrutura linguística, o resultado alcançado ali não pode ser considerado uma verdade matemática em sentido estrito, mas tão somente uma hipótese. (BROUWER, 1948, p. 1243)

As considerações apresentadas justificam e tornam necessários dois desenvolvimentos subsequentes: primeiramente, os conectivos lógicos, utilizados para expressar proposições matemáticas complexas em estruturas linguísticas que pretendam representar os sistemas matemáticos construídos mentalmente precisam adquirir um novo significado, compatível com as exigências do intuicionismo, onde eles corresponderiam a operações simples de construção mental de sistemas mais complexos a partir dos elementos já adquiridos por construções mentais anteriormente realizado, sendo que essas operações deveriam, em princípio, ser efetivamente executáveis sobre os sistemas matemáticos.

A seguir, a validade dos princípios lógicos precisa ser avaliada a partir do critério estabelecido por Brouwer, onde eles, consequentemente, deveriam corresponder a métodos gerais de construção matemática de determinadas relações presentes em um sistema matemático outras relações que sejam, em princípio, efetivamente executáveis sobre os sistemas matemáticos considerados.

2. O significado dos conectivos lógicos sentenciais

A lógica clássica explica o significado dos conectivos sentenciais em termos de funções de verdade, isto é, funções que recebem os valores de verdade dos argumentos (as proposições conectadas pelo conectivo) e retornam como valor o valor de verdade da fórmula molecular composta pelos argumentos mediante a introdução do conectivo.

A negação é um conectivo unário, pois toma como argumento o valor de verdade de apenas uma proposição, e representa a função que inverte o valor de verdade da proposição tomada como argumento. Essa caracterização da negação é resumida pela tabela de verdade seguinte:

A	$\neg$A
V	F
F	V

Já a conjunção é um conectivo binário, pois toma como argumento o valor de verdade de duas proposições, e representa a função que retorna o valor de verdade verdadeiro somente quando ambas as proposições ligadas pelo conectivo também receberam o valor de verdade verdadeiro, o que pode ser resumido pela seguinte tabela:

A	B	A $\wedge$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A disjunção, também um conectivo binário, é uma função que retorna o valor de verdade verdadeiro quando pelo menos uma das duas proposições que são tomadas como seus argumentos também recebe o valor de verdade verdadeiro, o que pode ser visto na tabela de verdade abaixo:

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Já a implicação material é entendida como uma função de verdade que retorna o valor de verdade verdadeiro quando a proposição que ocupa a posição primeiro argumento, chamado de antecedente, recebe o valor de verdade falso ou quando a proposição que ocupa a posição de segundo argumento, chamado de consequente, recebe o valor de verdade verdadeiro. Esse entendimento da implicação se torna mais claro por meio da tabela de verdade a seguir:

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Com base nessas tabelas básicas para cada conectivo sentencial, podemos verificar se uma inferência pela qual derivamos uma conclusão a partir de um conjunto de premissas é válida ou não, isto é, se sempre que atribuímos o valor de verdade verdadeiro para cada uma das premissas envolvidas na inferência, somos forçados a também atribuir o valor de verdade verdadeiro à conclusão ou se existe algum caso em que as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa, bem como podemos também verificar se uma determinada proposição complexa é válida ou não, ou seja, se ela recebe o valor de verdade verdadeiro sejam quais forem os valores de verdade atribuídos às proposições que são suas sub-fórmulas.

Brouwer nunca se preocupou em fazer um estudo mais detalhado dos conectivos sentenciais da lógica, pois ele somente procurou avaliar diretamente a validade de inferências e proposições consideradas logicamente válidas na lógica clássica. No entanto, a exigência de que as inferências e proposições logicamente válidas sejam interpretadas em termos das suas construções mentais correspondentes torna necessário também interpretar os conectivos sentenciais nesses termos uma vez que é por meio deles que tais inferências e proposições são enunciadas formalmente e sua validade, do ponto de vista clássico, é estabelecida.

No que se segue, apresentaremos as considerações sobre o significado de cada um dos conectivos sentenciais que encontramos explícita ou implicitamente na obra de Brouwer, o que abrirá caminho para a discussão sobre a validade das inferências lógicas a partir da perspectiva intuicionista.

2.1 A implicação

Como mostramos, uma das consequências do Primeiro Ato do Intuicionismo é a independência da matemática em relação à linguagem e, consequentemente, também em relação à lógica. Para justificar essa conclusão, Brouwer se preocupou em mostrar que aparentes aplicações de leis e regras de inferência da lógica não eram essenciais em provas matemáticas e que elas eram, na realidade, meras representações linguísticas (imperfeitas) de construções matemáticas mentais originalmente efetuadas sem o recurso a qualquer forma de linguagem e que essas provas, portanto, não demonstravam verdades matemáticas derivadas com o auxílio da lógica, mas, simplesmente verdades obtidas por meios construtivos puramente matemáticos.

No entanto, o próprio Brouwer (1907, p. 72) reconheceu um caso particular que, à primeira vista, parecia contradizer sua tese de que a matemática é independente da lógica:

> Em um caso particular a cadeia de silogismos é de um tipo diferente, que parece se aproximar mais das figuras lógicas usuais e que efetivamente parece pressupor o juízo hipotético da lógica. Isso ocorre quando uma estrutura é definida por alguma relação em outra estrutura enquanto não é imediatamente claro como efetuar sua construção. Aqui parece que se supõe que a construção foi efetuada e que partindo desta hipótese uma cadeia de juízos hipotéticos é deduzida.[24]

---

[24] "In one particular case the chain of syllogisms is of a somewhat different kind, which seems to come nearer to the usual logical figures and which actually seems to presuppose the hypothetical judgment from logic. This

Provas com essa estrutura são comumente chamadas de provas condicionais e estabelecem resultados com a forma "se A, então B", simbolicamente representados com o conectivo sentencial → em fórmulas com a forma lógica

$$A \rightarrow B.$$

A situação apresentada por Brouwer realmente parece ameaçar sua concepção de matemática, pois seria um exemplo de um tipo de construção matemática onde raciocinar sob a hipótese de que uma construção foi efetuada é imprescindível, porém construções hipotéticas não seriam construções matemáticas em sentido estrito.

Em resposta ao problema que ele mesmo levantou, Brouwer (1907, p. 72) sustenta que casos envolvendo uma aparente aplicação desse tipo de inferência nas provas matemáticas são, na realidade, operações matemáticas que de modo algum envolvem a suposição de que a construção do antecedente foi efetuada:

> Mas isso não é mais do que aparente; o que efetivamente ocorre é o seguinte: inicia-se estabelecendo uma estrutura que satisfaz parte das relações exigidas, e então tenta-se deduzir destas relações, por meio de tautologias, outras relações, de tal modo que estas novas relações, combinadas com aquelas que ainda não foram usadas, produzem um sistema de condições, apropriado como um ponto de partida para a construção da estrutura requerida. Somente por esta construção será provado que as condições originais podem ser satisfeitas.[25]

Essa passagem começou a receber a devida atenção somente no início dos anos 2000, quando encontramos na literatura duas interpretações que pretendem elucidar a posição desenvolvida por Brouwer nessa passagem: a interpretação α, desenvolvida por D. van Dalen

occurs when a structure is defined by some relation in another structure, while it is not immediately clear how to effect its construction. Here it seems that the construction is supposed to be effected, and that starting from this hypothesis a chain of hypothetical judgments is deduced." (Tradução nossa)

[25] "But this is no more than apparent; what actually happens is the following: one starts by setting up a structure which fulfills part of the required relations, thereupon one tries to deduce from these relations, by means of tautologies, other relations, in such a way that these new relations, combined with those that have not yet been used, yield a system of conditions, suitable as a starting-point for the construction of the required structure. Only by this construction will it be proved that the original conditions can be fulfilled." (Tradução nossa)

(2004) e J. Kuiper (2004), e a interpretação β, desenvolvida por M. van Atten (2004B; 2009) como alternativa à interpretação anterior que, segundo ele, não é correta[26]:

M. van Atten (2009, p. 126) resume a posição de seus adversários da seguinte forma: "(α) A fim de estabelecer A → B, deve-se realizar duas tarefas, a saber, (i) encontrar uma construção para (a estrutura especificada por) A, (ii) encontrar uma construção para (a estrutura especificada por) B que parte da primeira construção."

Ele apresenta diversos argumentos contra essa interpretação, sendo o principal deles a demonstração de que os procedimentos propostos pela interpretação α para se estabelecer um resultado com a forma A → B tornariam as próprias provas condicionais impossíveis[27] (VAN ATTEN, 2009, p. 127) e sugere, na sequência, a seguinte interpretação: "(β) A fim de estabelecer A → B, deve-se conceber A e B como condições de construções e mostrar que das condições especificadas por A obtém-se as condições especificadas por B, de acordo com transformações cuja composição preserva a construtibilidade matemática." (VAN ATTEN, 2009, p. 128)

A interpretação (β) fornece uma visão mais coerente do entendimento que Brouwer teria quanto ao significado da implicação com o seu trabalho posteriormente onde ele apresentou provas que claramente contêm um certo elemento hipotético, como a sua prova do *bar theorem* ou mesmo a seguinte passagem, que se encontra em um dos seus últimos trabalhos publicados, onde vemos sua posição quanto a sistemas matemáticos hipotéticos ser diretamente ligada a noção de condições de construção:

> A expressão escrita de um teorema matemático não tem sentido a menos que ela indique a construção de uma entidade matemática real ou de uma incompatibilidade (por exemplo, a identidade da doisidade vazia com uma unidade vazia) a partir de

[26] Nesse ponto, seguimos VAN ATTEN, 2009, p. 126-128 ao atribuir as designações α e β para as duas interpretações mencionadas.

[27] Cf. VAN DALEN, 2008, p. 20, onde ele reconhece a inadequação da sua interpretação α em razão das dificuldades insuperáveis apontadas pelos argumentos de VAN ATTEN, 2004B, que foram reapresentados em VAN ATTEN, 2009.

> alguma condição construcional imposta sobre um sistema matemático hipotético.[28] (BROUWER, 1954, p. 3)

2.2 Contradição e negação

A concepção de matemática como uma construção mental desenvolvida por Brouwer torna necessário entender a asserção uma proposição matemática *p* como a expressão de que existe a construção mental corretamente descrita por *p*.

A ideia básica por trás da utilização da negação em seu sentido clássico é que, ao adicionarmos esse conectivo a uma proposição *p*, estamos dizendo que a situação descrita por *p* não ocorre.

Quando consideramos a noção de negação no interior da concepção de matemática de Brouwer, torna-se necessário distinguir dois casos distintos onde pode se dizer que a situação descrita por uma proposição matemática *p* não ocorre, ou seja, dois casos distintos onde se poderia dizer que a construção referida por *p* não existe:

1. A proposição *p* ainda não foi provada, por isso a realidade matemática que ela expressa ainda não existe, mas não está excluída a possibilidade de que tal realidade venha a se concretizar num momento posterior.
2. Existe uma prova de que a proposição *p* não pode de modo algum ser verdadeira, em qualquer momento do tempo, pois expressa uma situação que pode ser diretamente percebida como algo absurdo e impossível ou pode ser percebida como tal de forma indireta, quando sua construção exigiria que outras construções também impossíveis fossem concretizadas.

Os dois casos representam, respectivamente, uma noção mais fraca e uma noção mais forte de negação, sendo, que para, Brouwer, apenas a segunda noção tem lugar na sua

---

[28] "(…) the wording of a mathematical theorem has no sense unless it indicates the construction either of an actual mathematical entity or of an incompatibility (e.g., the identity of the empty two-ity with an empty unity) out of some constructional condition imposed on a hypothetical mathematical system." (Tradução nossa)

concepção da matemática como uma atividade onde deve reinar a exatidão, já que o primeiro caso deixa em aberto uma possibilidade de que a realidade matemática se altere.

Brouwer entende a negação a partir das noções de contradição e incompatibilidade. Na dissertação, ao considerar uma possível critica de um suposto oponente segundo a qual no meio dos raciocínios onde aparentemente se desenvolvem juízos hipotéticos poderia ocorrer uma contradição e que esta seria percebida com o auxílio do princípio da não-contradição (frequentemente chamado simplesmente de princípio da contradição ou referido por alguma expressão latina correspondente), Brouwer (1975 [1907], p. 72-73) apresenta a seguinte resposta:

> ‘As palavras da tua demonstração matemática meramente acompanham uma construção matemática que é efetuada sem palavras. No ponto onde você enuncia a contradição, eu simplesmente percebo que a construção não mais vai adiante, que a estrutura exigida não pode ser encaixada na estrutura básica dada. E quando eu faço essa observação, eu não penso num *principium contradictionis*.’[29]

Vemos, portanto, que uma contradição que se apresenta linguisticamente pela derivação de dois enunciados onde um deles é a negação do outro, o que pode ser representada simbolicamente pela ocorrência no registro linguístico da atividade matemática de fórmulas com a forma

$$A \text{ e } \neg A$$

corresponderia, no âmbito da vida mental do sujeito que se dedica a construção da matemática, à percepção direta do sujeito de que uma construção que ele vinha desenvolvendo não pode ser concluída com sucesso.

Em geral, Brouwer explica essa impossibilidade de concluir com sucesso certas construções por meio da existência de alguma incompatibilidade, que inviabiliza a execução do encaixe que completaria a construção visada.

[29] “‘The words of your mathematical demonstration merely accompany a mathematical *construction* that is effected without words. At the point where you enounce the contradiction, I simply perceive that the construction no longer *goes*, that the required structure cannot be imbedded in the given basic structure. And when I make this observation, I do not think of a *principium contradictionis*.’”(Tradução nossa)

Um exemplo bem claro disso ocorre quando, diretamente a partir da intuição fundamental da matemática e da construção original dos números 1 e 2 percebemos imediatamente a impossibilidade de tomar esses dois objetos como iguais e assim vemos que uma proposição como ‘1=2’ representa algo totalmente absurdo.

Perceber que uma construção visada é impossível é o que justifica afirmar que a proposição que expressa a suposta construção é absurda e considerá-la, consequentemente, como falsa.

Outra forma de se chegar à percepção clara de que uma proposição é falsa e que, portanto, sua negação é verdadeira, é demonstrar que a suposta verdade dessa proposição exigiria que uma proposição já reconhecida anteriormente como absurda também fosse verdadeira.

A negação adquire para Brouwer, portanto, em ambos os casos a condição de um procedimento construtivo por meio do qual um fato matemático é estabelecido, mas em sentido negativo, na forma daquilo que sabe ser impossível construir.

2.3 Conjunção e disjunção

Podemos ter uma pequena ideia do significado que Brouwer dá para a conjunção ao observarmos a sua interpretação do princípio da não-contradição, que usualmente é expresso formalmente pela fórmula

$$\neg(A \wedge \neg A).$$

Levando-se em conta a interpretação que Brouwer fornece para a negação, ele entende que esse princípio expressa a impossibilidade de serem alcançadas simultaneamente os seguintes resultados: a construção correspondente à proposição A e a observação de que essa mesma construção é impossível.

Deixando de lado, por enquanto, a avaliação da validade desse princípio, o que será feito na próxima seção, podemos considerar que o símbolo $\wedge$representaria, na concepção de Brouwer, justamente uma operação que junta duas construções anteriormente realizadas e as transforma em uma nova construção. Claramente esta operação somente será bem-sucedida quando aplicada a proposições A e B se ambas as construções designadas por A e B realmente forem conhecidas, ou seja, se elas de fato já foram concretizadas.

Similarmente, podemos compreender o significado que Brouwer atribuiria à disjunção a partir da interpretação construtiva apresentada para o princípio do terceiro excluído, que usualmente é expresso pela fórmula

$$A \vee \neg A.$$

Brouwer entende que esse princípio sustenta que para cada suposta construção matemática representada pela proposição A, nós possuímos um método pelo qual podemos concretizar tal construção ou então reconhecer a impossibilidade de concretizar essa construção. Também deixando de lado, por ora, a questão da validade do princípio do terceiro excluído, podemos considerar que o símbolo $\vee$representaria, na concepção de Brouwer, justamente uma operação que somente será bem-sucedida quando aplicada a proposições A e B se pelo menos uma das construções designadas por A e B realmente forem conhecidas, ou seja, se elas de fato já foram concretizadas.

Como bem explicou M. van Atten (2009, p. 124), na prática, essa operação não cria uma nova construção a partir das construções concretizadas anteriormente como no caso da conjunção, mas apenas nos fornece uma nova descrição, menos informativa, para a construção de A ou de B que se conhecia anteriormente.

3. Princípios confiáveis e os contraexemplos fracos

Respondendo à pergunta colocada por ele anteriormente quanto a confiabilidade dos princípios do silogismo, da não-contradição e do terceiro excluído, Brouwer (1908,

p. 109) sustenta que "esta confiança é bem fundada para os dois princípios, mas não para o terceiro[30]" e prossegue examinando cada um dos três princípios citados.

Quanto ao primeiro desses princípios, Brouwer (1908, p. 109) afirma:

> Primeiro, então, o silogismo. Ele conclui a partir do encaixe de um sistema *b* em um sistema *c* combinado com o encaixe de um sistema *a* em um sistema *b*em para um encaixe direto do sistema *a* em um sistema *c*. Isso não é nada mais do que uma tautologia.[31]

Esse princípio poderia ser expresso, em linguagem formal, por meio da fórmula

$$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

Aqui Brouwer retoma sua argumentação da dissertação ao considerar o princípio confiável a partir do fato de ele representar uma tautologia matemática, isto é, uma transformação matemática cuja legitimidade pode ser verificada pelo sujeito ao fixar sua atenção nas sub-estruturas do sistema que ele está construindo.

Quanto ao princípio da não-contradição, expresso pela

$$\neg(A \wedge \neg A),$$

Brouwer (1908, p. 109) afirma que sua confiabilidade "é indisputável: Os resultados que nós realizamos o encaixe de um sistema *a* em um sistema *b* numa maneira prescrita e que nós somos interrompidos pela impossibilidade de um tal encaixe excluem-se mutuamente.[32]"

A posição de Brouwer quanto ao princípio do terceiro excluído merece ser tratada com maior atenção, já que é um dos pontos de maior destaque da sua concepção de lógica e possui consequências fundamentais para a "lógica de Brouwer".

Na dissertação, Brouwer (1907, p. 75) criticou esse princípio afirmando que, embora correto, ele seria trivial e não-informativo, pois:

---

[30] "(…) this confidence is well-founded for the first two principles, but not for the third." (Tradução nossa)

[31] "First, then, the syllogism. It concludes from the imbedding of a system *b* into a system *c*, joined to the imbedding of a system *a* into the system *b*, to a direct imbedding of the system *a* into the system *c*. This is nothing more than a tautology." (Tradução nossa)

[32] "(…) is indisputable: The results that we perform the imbedding of a system *a* into a system *b* in a prescribed manner, and that we are arrested by the impossibility of such an imbedding, exclude each other." (Tradução nossa)

> Enquanto no silogismo um elemento matemático poderia ser discernido, a proposição: uma função é diferenciável ou não diferenciável nada diz; ela expressa o mesmo que a seguinte: se uma função não é diferenciável, então ela não é diferenciável. Mas o lógico, observando as palavras da primeira sentença e descobrindo uma regularidade na combinação das palavras nesta e em sentenças similares, também aqui projeta um sistema matemático e ele chama tal sentença uma aplicação do *tertium non datur*[33].

Para entender o argumento de Brouwer nessa passagem, é conveniente associá-lo ao silogismo disjuntivo. Nessa forma de argumento, a partir de premissas com as formas $A \vee B$ e $\neg A$ pode-se concluir B. Se substituímos B por $\neg A$ obtemos uma forma de argumento onde as premissas são $A \vee \neg A$ e $\neg A$ e a conclusão é também $\neg A$, do que se segue $\neg A \rightarrow \neg A$[34]. Percebe-se que embora Brouwer ainda não tivesse razões claras para rejeitar o PEM, já havia um certo incômodo com esse princípio.

Quando avaliado pelo critério de confiabilidade proposto um ano depois, o princípio do terceiro excluído adquire um significado nada trivial:

> Agora considere o *principium tertii exclusi*: ele afirma que toda suposição é verdadeira ou falsa[35]; na matemática isso significa que para todo suposto encaixe de um sistema em outro, satisfazendo certas condições dadas, nós podemos realizar tal encaixe por uma construção ou podemos chegar por uma construção à interrupção do processo que levaria ao encaixe. Segue-se que a questão da validade do *principium tertii exclusi* é equivalente à questão se problemas matemáticos insolúveis podem existir.[36] (BROUWER, 1908, p. 109)

---

[33] Em suas obras, Brouwer utiliza diferentes expressões para se referir ao princípio do terceiro excluído tais como *tertium non datur*, *tertium exclusum* e *principium tertii exclusi*.

[34] Para compreender as circunstâncias históricas que influenciaram Brouwer a interpretar o princípio do terceiro excluído nesses termos cf. Van Dalen, 2013, p. 102-104.

[35] É importante ressaltar que essa formulação corresponde não exatamente ao princípio do terceiro excluído, mas ao chamado princípio da bivalência, um princípio metalógico aceito pela lógica clássica segundo o qual há apenas dois valores de verdade – o verdadeiro e o falso – e que a toda sentença declarativa deve necessariamente ser associado um destes dois valores de verdade. Isso, no entanto, não atrapalha o argumento de Brouwer, pois os dois princípios podem ser considerados equivalentes se levamos em conta a definição usual do valor semântico de uma sentença negada: Uma sentença negada é verdadeira se, e somente se, a sentença afirmativa correspondente é falsa, ou seja, $\neg A$ é verdadeira sse A é falsa. Assim, afirmar que uma dada sentença é verdadeira ou sua negação o é se equivale a afirmar que uma sentença é verdadeira ou falsa. Cabe ressaltar ainda que essa distinção entre PEM e princípio da bivalência foi proposta, pela primeira vez, por Lukasiewicz cerca de vinte após a publicação de Brouwer. Cf. Raatikainen, 2004, p. 131, n. 1); Kneale; Kneale, 1962, p. 47; Lukasiewicz, 1957, p.82 e também Lukasiewicz, 1970, p. 176-178.

[36] “Now consider the *principium tertii exclusi*: It claims that every supposition is either true or false; in mathematics this means that for every supposed imbedding of a system into another, satisfying certain given conditions, we can either accomplish such an imbedding by a construction, or we can arrive by a construction at the arrestment of the process which would lead to the imbedding. It follows that the question of the validity of the *principium tertii exclusi* is equivalent to the question whether unsolvable mathematical problems can exist. There is not a shred of a proof for the conviction, which has sometimes been put forward that there exist no unsolvable mathematical problems.” (Tradução nossa)

Brouwer (1908, p. 109) inicialmente argumenta que não há evidência de que sempre seja possível efetuar a construção que estabeleça uma determinada proposição matemática *p* qualquer ou constatar de forma definitiva que tal construção é impossível, o que na linguagem da matemática apresentar-se-ia como uma demonstração de que *p* implica uma contradição e que, consequentemente, $\neg p$ é o caso.

Heyting (1931, p. 59) resumiu muito bem esse argumento de Brouwer quando, referindo-se à lei do terceiro excluído, afirmou:

> Pode-se asserir esta lei para uma proposição *p* particular somente se *p* foi provada ou reduzida a uma contradição. Assim, uma prova de que a lei do terceiro excluído é uma lei geral deve consistir em fornecer um método pelo qual, quando dada uma proposição arbitrária, poder-se-ia sempre provar a própria proposição ou sua negação.[37]

Como não foi apresentado tal método, que na visão de Brouwer(1908, p. 109) equivaleria a uma prova de que todos os problemas da matemática são solúveis, não se pode admitir o princípio do terceiro excluído como um teorema da "lógica de Brouwer".

A avaliação de Brouwer quanto ao princípio é que ele é confiável quando aplicado a conjuntos finitos ou mesmo conjuntos infinitos obtidos construtivamente, pois em princípio é possível checar cada um dos elementos destes conjuntos e verificar se eles possuem ou não a propriedade em questão. Porém, ele não é confiável quando aplicado a conjuntos infinitos de entidades matemáticas obtidos não por um processo construtivo, mas diretamente a partir da intuição básica da matemática como é o caso do contínuo, isto é, do conjunto dos números reais. Nestes casos, não é possível realizar tal verificação e, assim, a inferência de que cada elemento do conjunto apresenta ou não uma dada propriedade não é totalmente segura.

No entanto, o próprio Brouwer (1908, p. 109) reconheceu que o princípio do terceiro excluído, embora não seja confiável porque mediante sua aplicação poderiam ser

---

[37] "One can assert this law for a particular proposition *p* only if *p* either has been proved or reduced to a contradiction. Thus, a proof that the law of excluded middle is a general law must consist in giving a method by which, when given an arbitrary proposition, one could always prove either the proposition itself or its negation." (Tradução nossa)

produzidas estruturas linguísticas que podem nunca corresponder a uma construção matemática mental, pelo menos, na sua forma simples, não produz resultados contraditórios.

Se esse princípio levasse a resultados contraditórios, isso significaria que ele próprio seria contraditório, no entanto, Brouwer mostrou que para isso ocorrer, ou seja, para que a sua negação, que poderia ser representada pela fórmula

$$\neg(A \vee \neg A)$$

fosse verdadeira, tanto $\neg A$ quanto $\neg\neg A$ teriam que ser simultaneamente verdadeiras, o que contrariaria o princípio da não-contradição, mostrando, portanto, que a proposição

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

seria confiável e, portanto, poderia ser considerada válido do ponto de vista intuicionista.

Além dessas considerações mais gerais ligadas à sua concepção da matemática como uma construção mental, Brouwer (1908, p. 110) apresenta alguns exemplos de proposições para as quais ainda não tinham sido apresentadas quaisquer provas de sua verdade ou de sua falsidade e que, portanto, seriam problemas em aberto da matemática:

> Um exemplo instrutivo é fornecido pela seguinte proposição não-demonstrada que, com base no princípio do terceiro excluído, é geralmente tomada como confiável e aplicada na teoria dos números transfinitos, a saber, que todo número é finito ou infinito. Isso significa que para qualquer número γ nós podemos construir:
> um mapping de γ para a sequência dos números naturais de tal maneira que algum número α desta sequência é o último (enquanto os números $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, ... permanecem livres)
> ou um mapping de γ ou de uma de uma suas partes sobre a sequência completa dos números naturais.
> Enquanto esta proposição não for provada, deve-se considerar como incerto se problemas como os seguintes são solúveis:
> Existe na expansão decimal de π um digito que ocorre com maior frequência que qualquer outro?
> Ocorrem na expansão decimal de π infinitos pares de dígitos iguais consecutivos?
> E de forma similar permanece incerto se o problema matemático mais geral:
> O princípio do terceiro excluído vale na matemática sem exceção? é solúvel.[38]

---

[38] "An instructive example is provided by the following unproved proposition which, on the basis of the *principium tertii exclusi*, is generally trusted and applied in the theory of transfinite numbers, namely that every number is either finite or infinite. This means that for any number γ we can construct:
either a mapping of γ into the sequence of the natural numbers in such a way that some number α from this sequence is the last one (while the numbers α + I , $\alpha + 2$, $\alpha + 3$, . . . remain free),
or a mapping of γ or of one of its parts onto the full sequence of the natural numbers.
So long as this proposition is unproved, it must be considered as uncertain whether problems like the following are solvable:

Cada problema em aberto como esses apresentados pode ser considerado um contraexemplo ao princípio do terceiro excluído, não no sentido forte de mostrar que o princípio é absurdo por implicar contradições, mas num sentido mais fraco, onde ele é considerado uma proposição ainda não demonstrada e que, por isso, mesmo não deve ser tomada como fundamento para demonstrações matemáticas formais, já que essas poderiam não corresponder a qualquer construção mental que será efetivamente realizada pelo sujeito criador em algum momento do tempo. Por essa razão tornou-se corrente o uso da expressão "contraexemplos fracos" para designar esse tipo de argumento contra a validade do princípio do terceiro excluído na lógica de Brouwer.

Outra inferência que não é confiável é aquilo que Brouwer chamou de *principio da reciprocidade da complementaridade*, que corresponde ao princípio da dupla negação na lógica clássica, expresso formalmente pela fórmula

$$\neg\neg A \rightarrow A.$$

Do ponto vista conceitual sustentado por Brouwer, aceitar que da impossibilidade da impossibilidade de um fato matemático, isto é, que uma contradição pode ser derivada a partir da suposição da negação, situação representada pela fórmula $\neg\neg A$, segue-se aquele fato matemático A depende de uma concepção realista da matemática baseada no princípio do terceiro excluído segundo a qual os objetos da matemática existem independentemente de qualquer operação mental do sujeito.

Para essa inferência, Brouwer (1923, p. 286), apresentou o seguinte contraexemplo fraco, que também se aplica ao princípio do terceiro excluído:

Is there in the decimal expansion of π a digit which occurs more often than any other one?
Do there occur in the decimal expansion of π infinitely many pairs of consecutive equal digits?
And it likewise remains uncertain whether the more general mathematical problem:
Does the *principium tertii exclusi* hold in mathematics without exception? is solvable." (Tradução nossa)

> Seja d_v a v-ésima figura após o ponto decimal na expansão de π e seja $m = k_1$ se na expansão continuada de π em d_m ocorre pela primeira vez que a seção d_m, d_{m+1}, …, d_{m+9} forma a sequência 0123456789. Além disso, seja $c_v = (-½)^{k1}$ se $v > k_1$ e $c_v = (-½)^v$ caso contrário. Então a sequência c_1, c_2, c_3,... converge para um número real r.
> Se nós definimos um número real g como sendo racional se é possível calcular-se dois números inteiros racionais p e q cujo quociente é igual a g, então r não é racional. Por outro lado, a racionalidade de r não pode possivelmente ser absurda, pois neste k_1 caso não poderia possivelmente existir, o que implicaria que $r = 0$ e, portanto, seria racional.[39]

Esse exemplo apresenta um número real r para o qual há evidência de que sua irracionalidade é impossível, o que pode ser expresso formalmente pela fórmula

$$\neg\neg p,$$

onde p representa a proposição 'r é racional', mas para o qual ainda não foi desenvolvida uma prova construtiva de sua racionalidade, que consistiria em apresentar os números inteiros racionais *p e q* tais que $r = p/q$.

Brouwer também apresentou contraexemplos fracos também para aquilo que ele chamou de *princípio da testabilidade*, que pode ser expresso formalmente por meio da fórmula

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

sendo o principal deles, mais uma vez, a questão sobrea possibilidade da ocorrência da sequência 0123456789 na expansão decimal de π, o que representaria uma propriedade do número π que deveria ser estabelecido por meio da construção desse número, mas até então, não se conhecia qualquer método para se provar que tal ocorrência seria impossível, ou que tal impossibilidade seria, por sua vez, impossível.

---

[39] "Let d_v be the *vth* figure after the decimal point in the expansion of $\pi$and let $m = k_1$ if in the continued expansion of πat d_m it happens for the first time that the section d_m, d_{m+1}, …, d_{m+9} forms the sequence 0123456789. Further let $c_v = (-½)^{k1}$ if $v > k_1$ and $c_v = (-½)^v$ otherwise. Then the sequence c_1,c_2, c_3,... converges to a real number r.
If we define a real number g to be rational if one can calculate two whole rational numbers p and q whose quotient equals g, then r is not rational. On the other hand the rationality of r cannot possibly be absurd, for in that case k_1 could not possibly exist, which would imply that $r = 0$ and therefore would be rational." (Tradução nossa)

Um fato interessante sobre esses contraexemplos envolvendo a ocorrência da sequência 0123456789 na expansão decimal de π é que, de uma perspectiva contemporânea, eles ajudam a entender a concepção de matemática de Brouwer como uma construção em andamento, pois a sequência mencionada foi de fato encontrada[40], o que não invalida a crítica de Brouwer, já que sempre temos outros problemas matemáticos em aberto que fornecem razões para não se confiar nos princípios criticados por Brouwer.

4. Sistematizando e formalizando a "lógica de Brouwer"

Dada a caracterização inicial da gênese da lógica apresentada por Brouwer, a formalização da "lógica de Brouwer" exigiria um longo processo que deveria passar pela reconstrução mental da matemática de acordo com os princípios do intuicionismo, a representação das construções mentais realizadas através da linguagem da matemática, aplicação de uma visão matemática sobre essa linguagem em busca de determinados padrões e, por fim, a descrição em linguagem formal dos padrões encontrados de forma sistematizada.

Seguindo-se à risca essa concepção, seria, na realidade, impossível estabelecer um sistema formal que represente integralmente a concepção de lógica de Brouwer, pois sendo a lógica uma estrutura linguística derivada da atividade matemática mental e sendo esta última uma atividade que pode ser indefinidamente estendida pelo sujeito criador, não é possível efetivamente examinar o registro linguístico acabado da matemática para dele extrair os padrões linguísticos que caracterizariam as inferências e fórmulas válidas do ponto de vista intuicionista.

No entanto, podemos estabelecer sistemas formais para expressar fragmentos da concepção de lógica de Brouwer, pois um determinado sistema formal poderia representar o conjunto de inferências e fórmulas reconhecidas como válidas até o momento, em

[40] Cf. BORWEIN, 1998.

conformidade com o estágio atual da matemática desenvolvida pelo sujeito criador e da sua descrição linguística por meio da linguagem da matemática.

Ainda assim, estabelecer um sistema formal nessas condições provavelmente exigiria um grande esforço e esbarraria em grandes dificuldades, entretanto, existe um fragmento particularmente relevante da lógica de Brouwer que pode ser delimitado de forma mais precisa e, assim, pode ser investigado de forma mais efetiva, que seria o conjunto de inferências e proposições logicamente válidas na lógica clássica de acordo com suas noções de verdade e preservação de verdade tradicionais e que permanecem válidos quando avaliados sob a perspectiva de preservação da construtibilidade exigida por Brouwer.

Pode-se dizer que com suas considerações acerca do critério de confiabilidade para inferências lógicas (preservação de construtibilidade), do significado dos conectivos lógicos e dos contraexemplos fracos, Brouwer nos forneceu as condições para compormos uma espécie de catálogo onde poderiam ser listados, por um lado, as inferências e proposições válidas do ponto de vista intuicionista (ou, segundo a sua terminologia, considerados confiáveis) e, por outro, as inferências e proposições inválidas desse ponto de vista (consideradas não confiáveis).

Essa lista de inferências e proposições válidas do ponto de vista intuicionista poderia ser expressa por meio de uma linguagem formal. Nessa linguagem podemos simplesmente utilizar os símbolos lógicos já empregados pelos lógicos clássicos, pois, apesar de termos uma interpretação distinta para as ideias de implicação, conjunção, disjunção e negação, ainda estamos trabalhando com essas noções e podemos nos aproveitar da familiaridade que muitos já possuem com os símbolos $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, embora com relação a este último conectivo, defini-lo em termos dos símbolos para a implicação e absurdo $\perp$ expressaria de forma mais clara o entendimento de Brouwer.

Num certo sentido, essa concepção da lógica como um catálogo dos princípios lógicos válidos esteve presente na maior parte da história da lógica, pois foi somente com o desenvolvimento da álgebra da lógica por G. Boole e de um sistema formal para a lógica proposicional por G. Frege em 1879 que a lógica proposicional passou a efetivamente ser encarada como uma espécie de cálculo, onde possuímos uma espécie de algoritmo que permite determinar de forma mecânica e efetiva se uma determinada fórmula ou uma determinada inferência é válida.

No entanto, mostraremos a seguir que Brouwer também nos fornece indicações sobre como seria possível sistematizar a sua concepção de lógica.

Brouwer (1923) apresenta uma prova para o seguinte teorema, de caráter claramente lógico devido a sua extrema generalidade:

"Teorema. [A atribuição de uma propriedade a um objeto] implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo é equivalente a [a atribuição de uma propriedade a um objeto] implica o absurdo."[41]

Esta demonstração, com sua abordagem semi-formal, é certamente a passagem da obra de Brouwer que mais se aproxima de qualquer desenvolvimento de um sistema formal para a lógica de Brouwer e, assim, nos fornece alguns elementos importantes para avaliar as propostas de formalização para a sua concepção de lógica.

Ao observarmos a estrutura geral da prova, percebemos claramente que para estabelecer um teorema com a forma de uma equivalência, isto é, uma bi-implicação $A \leftrightarrow B$, precisamos provar cada uma das implicações $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$.

A parte (*a*) da prova apresentada por Brouwer (1923) estabelece o resultado com a forma lógica

$$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$$

[41] "**Theorem.** *Absurdity-of-absurdity-of-absurdity is equivalent with absurdity*." (Tradução nossa)

nos seguintes termos:

> *a*. Se a propriedade *y* segue-se da propriedade *x*, então [do fato] que *y* implica o absurdo segue-se que *x* implica o absurdo. Portanto, já que [uma proposição] implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo segue-se da correção [dessa proposição], [uma proposição] implica o absurdo deve se seguir de [essa proposição] implica o absurdo, implica o absurdo, implica o absurdo.[42]

Essa prova poderia ser representada formalmente da seguinte maneira:

1. $A \rightarrow \neg\neg A$ (fórmula tacitamente aceita por Brouwer)
2. $(A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A)$ (Resultado da aplicação da transposição sobre 1)
3. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ (Resultado da aplicação da transposição sobre 2)

Nessa prova, temos na linha 1 uma premissa, na linha 2 temos uma outra premissa formada pela substituição de B por $\neg\neg A$ na fórmula $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg B \rightarrow \neg A)$ e na linha 3 temos a conclusão obtida pela regra de inferência *modus ponens*.

Já a parte (*b*) da prova apresentada por Brouwer (1923) estabelece o resultado com a forma lógica

$$\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$$

nos seguintes termos:

> *b*. Já que da correção [da atribuição] de uma propriedade segue-se que [atribuir] aquela propriedade implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo, então como um caso especial da correção [da atribuição de uma propriedade] implicar o absurdo, isto é, de [uma atribuição de propriedade] implicar o absurdo, deve se seguir que [uma atribuição de propriedade] implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo, [e isso] implica o absurdo.[43]

Mais importante do que o resultado provado por Brouwer é o método empregado e, portanto, tacitamente aprovado por ele para tratar da validade de determinados princípios lógicos, pois se até então era exigida uma verificação individual direta de cada princípio quanto a ser a expressão linguística de um método geral de construção matemática para se admiti-lo como confiável, agora podemos considerar um princípio lógico como confiável e,

---

[42] "a. If the property *y* follows from the property *x*, then from the absurdity of *y* follows the absurdity of *x*. Therefore, since absurdity-of-absurdity follows from correctness, *absurdity must follow from absurdity-of-absurdity-of-absurdity*." (Tradução nossa)

[43] "b. Since from the correctness of a property follows the absurdity-of-absurdity of that property, then as a special case from correctness of absurdity, that is, from absurdity, must follow absurdity-of-absurdity-of-absurdity." (Tradução nossa)

portanto, válido sempre que pudermos derivá-lo de princípios já estabelecidos por meio de operações de manipulação dos símbolos envolvidos de forma puramente mecânica.

Essa manipulação puramente mecânica das expressões da linguagem, agora aceita por Brouwer, torna a ideia de um sistema formal para a "lógica de Brouwer" ainda mais concreta, pois o que tais sistemas fazem é precisamente apresentar um tratamento da noção de consequência lógica no qual estabelecemos determinadas fórmulas e inferências como logicamente válidas recorrendo tão somente a manipulação mecânica das expressões levando em conta apenas sua forma e não o significado atribuídos a elas.

Podemos então pensar o seguinte: determinados sistemas formais para a lógica clássica são corretos, no sentido demonstrar como teoremas apenas fórmulas válidas, e completos, no sentido de demonstrar como teoremas todas as fórmulas consideradas válidas.

Um sistema formal para a lógica clássica já representa por si só uma aproximação do nosso objetivo de determinar o conjunto de inferências e proposições lógicas válidas do ponto de vista intuicionista, pois não encontramos na obra de Brouwer qualquer menção de que alguma fórmula ou inferência considerada inválida pela lógica clássica possa ser confiável do seu ponto de vista construtivista, o que é bastante natural dado que a noção de preservação de construtibilidade é mais forte do que a noção de preservação de verdade clássica, isto é, apresenta um padrão de validade mais rigoroso da perspectiva epistêmica.

No entanto, tais sistemas clássicos compreendem, a princípio, teoremas que representam proposições ou inferências lógicas que não preservam a construtibilidade matemática, sendo por isso mesmo consideradas como não confiáveis.

Podemos então pensar o seguinte: se extrairmos de um sistema formal com tais características um novo sistema formal em que fossem demonstradas como teoremas somente fórmulas consideradas válidas do ponto de vista de Brouwer, estaríamos então mais próximos de desenvolver um sistema formal para a "lógica de Brouwer" no sentido mais delimitado que nos referimos acima e que, embora jamais pudesse ser considerado definitivo, seria certamente o mais rigoroso possível no que concerne as inferências e proposições anteriormente reconhecidas como logicamente válidas, mas que agora são entendidas com o sentido dado por Brouwer.

Assim, uma maneira perfeitamente razoável de elaborar uma formalização parcial relevante da lógica de Brouwer seria tomar um sistema formal clássico como ponto de partida, excluir quaisquer axiomas que não estejam de acordo com a concepção de lógica de Brouwer e, além disso, verificar entre os teoremas cuja prova dependia, no sistema clássico, de algum dos axiomas rejeitados, se algum deles poderia ser correto de acordo com a concepção de Brouwer. Em caso afirmativo, apresentar a demonstração desses teoremas a partir dos outros axiomas já aceitos ou, se isso não for possível, tomar alguns desses teoremas como novos axiomas para o sistema formal, desde que tal inclusão não torne possível demonstrar resultados indesejáveis, isto é, fórmulas que não passam pelo crivo do critério de confiabilidade elaborado por Brouwer.

O que foi exposto acima deve ser entendido como um conjunto de diretrizes para o desenvolvimento de uma lógica proposicional brouweriana e será tomado como referência para avaliarmos, nos capítulos seguintes, o desenvolvimento dos sistemas formais de lógica intuicionista e de lógica minimal enquanto tentativa de formalização parcial da concepção de lógica de Brouwer.

Capítulo II:

A lógica intuicionista e o

problema do *ex falso quodlibet*

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da lógica intuicionista. Primeiramente mostra-se como o sistema formal apresentado por Heyting consolidou-se como a formalização padrão da lógica intuicionista e Na sequência, mostra-se o desenvolvimento da interpretação BHK, que estabelece o significado dos conectivos lógicos na lógica intuicionista e, assim, fornece um padrão mais rigoroso para se determinar a validade ou invalidade dos princípios lógicos da perspectiva intuicionista. Essas considerações sobre a formalização e o significado da lógica intuicionista, passaremos à demonstração do ponto central de nosso trabalho, no qual argumentamos que a concepção de lógica de Brouwer fornece elementos para se rejeitar a validade do *EFQ*, de forma similar ao que ocorre com o princípio do terceiro excluído, e também para se rejeitar os argumentos que foram apresentados em favor da aceitação desse princípio.

1. O debate em torno da "lógica de Brouwer" e a formalização da lógica intuicionista

Apesar de já ter desenvolvido uma concepção de lógica robusta através do Primeiro Ato do Intuicionismo, foi somente com o Segundo Ato do Intuicionismo, pelo qual Brouwer introduz as noções de sequências de escolha e *species*, o correlato construtivo para a noção de conjunto desenvolvida por Georg Cantor, que as ideias de Brouwer sobre a lógica se tornaram mais conhecidas pela comunidade acadêmica além das fronteiras dos Países Baixos. As publicações de Brouwer a partir de 1918 chamaram a atenção da comunidade internacional de matemáticos para os contraexemplos ao princípio do terceiro excluído, especialmente porque com a introdução das sequências de escolhas, entidades que podem se desenvolver indefinidamente por conta de escolhas do sujeito que as cria, sem estar sujeitas a qualquer lei de geração que pudesse ser compreendida como algo exterior e preexistente ao sujeito que as concebe.

Naturalmente, as primeiras reações à concepção de lógica de Brouwer colocaram o princípio do terceiro excluído no centro do debate[44], discutindo o significado e a pertinência da crítica de Brouwer bem como as implicações da rejeição desse princípio para a matemática.

Gradualmente, no entanto, a discussão foi se voltando para o que ficou conhecido como a "lógica de Brouwer" ou "lógica brouweriana", isto é, a um tratamento sistemático não somente dos princípios lógicos rejeitados por Brouwer, mas também dos princípios lógicos que seriam admitidos por ele como corretos, que se deu inicialmente através de propostas de formalização para essa nova lógica.

Curiosamente, um dos primeiros a pensar de forma mais sistemática sobre o sistema formal que representaria a "lógica de Brouwer" foi Paul Bernays, um dos membros do círculo de David Hilbert.

Em uma carta enviada a Heyting em 1930, ele relata os seguintes fatos ocorridos cinco antes:

> As palestras que o Prof. Brouwer apresentou naquela época em Göttingen (pela primeira vez), levaram-me à questão de como uma lógica proposicional brouweriana poderia ser separada e eu cheguei ao resultado que isso pode ser feito ao retirar-se a fórmula
> $\neg\neg a \rightarrow a$ (no seu simbolismo).
> Eu também escrevi naquela ocasião ao Prof. Brouwer, como comentário à sua palestra, uma nota escrita, na qual eu apontei –em relação à suposição naquela época expressada por ele deque o princípio da dupla negação era mais fraco que o princípio do terceiro excluído –que no contexto dedutivo ele agora tende a ser chamado de "princípio do absurdo do absurdo do princípio do terceiro excluído".[45]

---

[44] Para uma exposição detalhada dessas reações, cf. HESSELING, 2003, cap. 4.

[45] Carta reproduzida em TROELSTRA, 1990, p. 8-9. "Die Vorträge, die Prof. Brouwer seinerzeit (erstmalig) in Göttingen hielt, regten mich zu der Fragean, wie sich am einfachsten eine Brouwerschen Aussagenlogik aussondern lasse, und ich kam zu dem Ergebnis, dass sich dieses durch weglassen der einen Formel $\neg\neg a \rightarrow a$ (in Ihrer Symbolik) bewirken lasse.
Ich schrieb auch damals an Prof. Brouwer, als Bemerkung zu seinen Vortrag, eine briefliche Notiz, worin ich - gegenüber der von ihm damals geäusserten Vermutung, dass der Satz von der doppelten Verneinung schwächer sei als der Satz vom ausgeschlossenen Dritten - auf den deduktiven Zusammenhang hinwies, der

De fato, Brouwer (1925, p. 252, nota 4) destacou a observação feita por Bernays, que o fez reconhecer o princípio da dupla negação, por ele chamado de princípio da reciprocidade da *species* complementar, não somente como um corolário do princípio do terceiro excluído, mas também que o próprio princípio do terceiro pode ser derivado tomando-se o princípio da reciprocidade da *species* complementar como ponto de partida.

Entretanto, não encontramos qualquer indício de que Bernays tenha elaborado um trabalho mais detalhado sobre essa ideia, nem que ele a tenha compartilhado com outras pessoas que tentaram levar essa ideia adiante. Assim, apesar de o fato de Bernays ter pensado numa forma de delimitar um sistema formal que expressasse a concepção de lógica de Brouwer já em 1925 ser interessante, sua ideia, na prática, não teve qualquer influência sobre o debate público em torno da lógica de Brouwer.

No mesmo ano em que ocorreram os fatos relatados por Paul Bernays, Andrei Kolmogorov publicou um artigo em que apresentou um sistema formal que pretendia representar os princípios lógicos admitidos por Brouwer. Essa formalização, no entanto, não foi desenvolvida como um fim em si mesmo, mas como um meio que tornaria possível elucidar alguns pontos problemáticos originados pela crítica de Brouwer à matemática tradicional.

No início de seu artigo, Kolmogorov parece aderir ao ponto de vista defendido por Brouwer que, segundo ele, teria revelado a falta de legitimidade do uso do princípio do terceiro excluído na matemática. Assim, ele tomou para si a tarefa de "explicar porque este uso ilegítimo ainda não levou a contradições e também porque a própria ilegitimidade passou frequentemente despercebida."[46] (KOLMOGOROV, 1925, p. 416)

---

jetzt als "Satz von der Absurdität der Absurdität des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten" benannt zu worden pflegt." (Tradução nossa)

[46] "(…) to explain why this illegitimate use has not yet led to contradictions and also why the very illegitimacy has often gone unnoticed." (Tradução nossa)

Após algumas considerações gerais sobre os pontos de vista formalista, sustentado por Hilbert, e o ponto de vista intuicionista, defendido por Brouwer, Kolmogorov (1925, p. 418) passa a considerar diretamente o que ele chama de lógica geral dos juízos, que ele entende como “a ciência que investiga as propriedades de juízos arbitrários independentemente do seu conteúdo, na medida em que estão envolvidos sua verdade, sua falsidade e os modos nos quais eles são derivados.”[47]

Kolmogorov iniciou seu estudo da lógica geral dos juízos, que atualmente entendemos como a lógica proposicional, apresentando o sistema formal apresentado por Hilbert (1923) que, além das regras de substituição e *modus ponens*, continha os seguintes quatro axiomas envolvendo apenas o símbolo de implicação e axiomas envolvendo também o símbolo de negação:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
5. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
6. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B)$

Kolmogorov então afirma que a consistência desse sistema pode ser provada seguindo o método apresentado por Ackermann (1924) e que essa característica é suficiente, do ponto de vista formalista, para aceitar o sistema como uma base para a lógica geral dos juízos. A isso ele ainda acrescenta, sem apresentar uma prova desse fato, que o sistema de Hilbert é completo no sentido de que nenhum novo axioma independente pode ser acrescentado ao sistema sem produzir uma contradição, isto é, o suposto novo axioma pode ser demonstrado a partir dos seis axiomas já admitidos ou então torna-se possível derivar um

[47] “the science that investigates the properties of arbitrary judgments independently of their content, so far as their truth, their falsity, and the ways in which they are derived are concerned.” (Tradução nossa)

juízo arbitrário *A* qualquer, o que significa que o sistema se torna trivial. (KOLMOGOROV, 1925, p. 418-419)

No entanto, como explica Kolmogorov, do ponto de vista intuicionista, a mera consistência do sistema formal não justifica sua aceitação, pois faz-se necessária uma análise mais profunda sobre o significado dos axiomas para se verificar se eles possuem ou não algum fundamento intuitivo. Assim, para se chegar à formulação do sistema formal que seria representativo das ideias intuicionistas, Kolmogorov primeiramente avaliou a correção dos quatro axiomas envolvendo apenas a implicação a partir do entendimento do significado atribuído a esse símbolo, que segundo ele consiste no seguinte:

"O significado do símbolo $A \rightarrow B$ é exaurido pelo fato que, uma vez convencidos da verdade de *A*, nós temos que aceitar a verdade de *B* também."[48] (KOLMOGOROV, 1925, p. 420)

Ele então explica que se o juízo *B* é verdadeiro de forma independente, então após termos aceitado A, temos também que aceitar B, o que justifica o primeiro axioma da implicação. Quanto aos outros três axiomas, ele sugere que a verdade deles também pode ser facilmente verificada a partir da interpretação oferecida para a implicação. (KOLMOGOROV, 1925, p. 420)

Quanto ao significado da negação, Kolmogorov discute duas possibilidades: pela primeira, a negação consiste numa interdição da possibilidade de se considerar um juízo como verdadeiro, levando-se em conta o juízo como uma unidade completa e não-analisável; pela segunda, que considera o juízo como uma afirmação que atribui um predicado a um sujeito, a negação seria a asserção de que existe uma incompatibilidade entre o sujeito e o predicado.

Ele então sustenta que "o símbolo $\neg A$ da lógica de juízos, é claro, expressa a primeira interpretação da negação, isto é, a interdição da consideração do juízo *A* como

---

[48] "The meaning of the symbol $A \rightarrow B$ is exhausted by the fact that, once convinced of the truth of *A*, we have to accept the truth of *B* too." (Tradução nossa)

verdadeiro,”[49] (KOLMOGOROV, 1925, p. 420), pois, apesar de a segunda interpretação ser mais representativa da ideia de negação quando examinamos diretamente o valor de verdade de um juízo tomado isoladamente, quando estamos lidando com a derivação de uma proposição envolvendo negação, a primeira interpretação é preferível, sobretudo porque, em relação a juízos matemáticos, é comum encontrarmos casos em que um juízo envolvendo negação é provado ao se mostrar que ele implica uma contradição, não sendo possível reduzir a primeira interpretação à segunda. Ele então acrescenta que Brouwer tinha em mente precisamente a primeira interpretação ao definir a negação por meio da noção de absurdo. (KOLMOGOROV, 1925, p. 420-421)

Tendo por base, então, essa interpretação da negação, Kolmogorov avaliou a validade dos axiomas do sistema de Hilbert que envolviam esse conectivo e rejeitou ambos os axiomas para a negação. No entanto, embora reconheça que o axioma 5 não tenha sido alvo de críticas por parte de Brouwer, ele também o rejeita.

> O primeiro axioma da negação de Hilbert, “Qualquer coisa se segue do falso”, fez sua aparição somente com o surgimento da lógica simbólica, como o fez também, incidentalmente, o primeiro axioma da implicação. Mas, enquanto o primeiro axioma da implicação se segue com obviedade intuitiva de uma correta interpretação da ideia de implicação lógica, o axioma agora considerado não tem e não pode ter qualquer fundamento intuitivo já que ele assere algo sobre as consequências de algo impossível: nós temos que aceitar *B* se o juízo verdadeiro *A* é considerado como falso.
> Assim, o primeiro axioma da negação de Hilbert não pode ser um axioma da lógica intuicionista dos juízos, não importando qual interpretação da negação nós tomemos como um ponto de partida. Isso, é claro, não exclui a possibilidade de que o axioma de que o axioma possa ser uma fórmula provada com base nos outros axiomas.[50] (KOLMOGOROV, 1925, p. 421)

---

[49] “The symbol $\neg A$ of the logic of judgments, of course, expresses the first interpretation of negation, that is, the interdiction from considering the judgment *A* true.” (Tradução nossa)

[50] “Hilbert's first axiom of negation, "Anything follows from the false", made its appearance only with the rise of symbolic logic, as did also, incidentally, the first axiom of implication. But, while the first axiom of implication follows with intuitive obviousness from a correct interpretation of the idea of logical implication, the axiom now considered does not have and cannot have any intuitive foundation since it asserts something about the consequences of something impossible: we have to accept *B* if the true judgment *A* is regarded as false.
Thus, Hilbert's first axiom of negation cannot be an axiom of the intuitionistic logic of judgments, no matter which interpretation of negation we take as a point of departure. This, of course, does not exclude the possibility that the axiom can be a formula proved on the basis of other axioms.” (Tradução nossa)

A rejeição do axioma 5, que expressa formalmente uma propriedade da implicação no seu sentido clássico – qualquer coisa se segue de uma proposição falsa – mostra que o significado atribuído à implicação por Kolmogorov é de fato distinto do significado dado classicamente pela equivalência entre $\neg A \vee B$ e $A \rightarrow B$.

O axioma 6 foi naturalmente rejeitado por consistir numa expressão formal do princípio do terceiro excluído na forma em que ele é utilizado em derivações.

Num segundo momento, Kolmogorov introduz um novo axioma para a negação, que ele chama de princípio da contradição e tem a seguinte forma:

5. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A)$

A inclusão desse axioma é relevante, pois mostra que o método de Kolmogorov não consistiu em apenas verificar a validade dos axiomas propostos por Hilbert, mas também de seus teoremas. De fato, no sistema de Hilbert, o axioma 5 introduzido por Kolmogorov pode ser derivado do axioma 6 que representa o princípio do terceiro excluído, porém ao rejeitá-lo não seria mais possível derivá-lo como um teorema da lógica de Brouwer, daí a necessidade de tomá-lo como axioma já que esta fórmula tem um fundamento intuitivo.

Assim, podemos concluir que o sistema formal para a lógica de Brouwer proposicional, chamado por Kolmogorov de B, conteria os axiomas

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
5. $((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B)) \rightarrow \neg A)$

e as regras de substituição e *modus ponens.*

Podemos concluir, portanto, que em sua investigação sobre a lógica de Brouwer, Kolmogorov efetivamente seguiu o método descrito por nós como uma das diretrizes para se desenvolver o sistema formal da lógica de Brouwer.

Já que o nosso objetivo nesse trabalho é avaliar as propostas de formalização para a lógica de Brouwer, não nos estenderemos sobre os demais tópicos tratados por Kolmogorov em seu artigo, no entanto, vale mencionar que a estratégia adotada por ele para se solucionar o problema apresentado no início foi apresentar uma tradução *das fórmulas do sistema H, obtido pela inclusão do axioma

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

ao sistema B e que é equivalente ao sistema de Hilbert, para o sistema B que funciona da seguinte forma:

$$A^* = \neg\neg A, \text{ para formulas A atômicas}$$

$$F(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_k) = \neg\neg F(\phi_{*1},\phi_{*2},\ldots,\phi_{*k}) \text{ para formulas compostas.}$$

Aplicando essa tradução, Kolmogorov então prova o seguinte resultado:

$$\text{Se } U \vdash_H \phi, \text{ então } U^* \vdash_B \phi^*,$$

onde U é um conjunto de axiomas do sistema H e U* é o conjunto de suas traduções (que Kolmogorov mostra ser derivável em B), o que mostra que todos os resultados alcançados pela utilização do sistema H podem ser representados no sistema B e assim nenhuma contradição poderia surgir, mesmo nas demonstrações que fizeram uso de inferências rejeitadas por Brouwer, representadas no sistema H, pelo axioma 6 e suas consequências.

No entanto, assim como as ideias de Bernays permaneceram ocultas, o artigo de Kolmogorov também permaneceu amplamente desconhecido entre aqueles que se interessavam pelo desenvolvimento da lógica de Brouwer entre meados da década de 1920 e os anos 1930 devido às circunstâncias de sua publicação, que se deu em língua russa num periódico da então União das Repúblicas Socialistas Soviéticas, o que tornou difícil o acesso ao seu conteúdo. Uma notável, e possivelmente única, exceção a esse desconhecimento do artigo de Kolmogorov é Valerii Glivenko, cuja contribuição para o desenvolvimento da lógica intuicionista será apresentada adiante, que menciona esse trabalho em uma das cartas que enviou a Heyting.[51] Este último, por outro lado, não nos fornece indicações de que tenha tido contato direto com o conteúdo do artigo, mesmo tendo trocado correspondências com Kolmogorov a respeito de seu trabalho posterior publicado em 1932, como se pode constatar ao verificarmos a bibliografia de Heyting (1934).

Considerando que o artigo de Kolmogorov não teve maiores efeitos de forma imediata, pode-se dizer que, do ponto de vista histórico, até o final de 1925 não havia nenhum sistema formal reconhecido publicamente como, pelo menos, uma tentativa de formalização da concepção de lógica de Brouwer entre aqueles que se interessavam pelo tema.

No ano seguinte, começaram a ser dados os primeiros passos em direção a uma investigação mais detalhada da “lógica de Brouwer” nos países da Europa ocidental. O principal responsável por isso foi Rolin Wavre, que, ainda em 1924, já chamara a atenção da comunidade acadêmica francófona para o debate sobre os fundamentos da matemática iniciado pelas críticas de Brouwer sobre a noção de existência e a aplicação do terceiro excluído sobre domínios infinitos.[52]

Em resposta às reações geradas pelo seu trabalho anterior, Wavre (1926) tratou com maior atenção o problema da lógica de Brouwer, por meio de uma comparação da lógica formal, designação que ele emprega para se referir à concepção de lógica onde se impõe uma alternativa entre o verdadeiro e o falso e que seria a posição assumida pelos adversários de Brouwer, com a lógica empirista, designação que ele emprega para se referir à posição assumida por Brouwer onde a alternativa entre o verdadeiro e o falso não se impõe, sendo necessária uma verificação empírica dos casos em que uma proposição é verdadeira e aqueles em que uma proposição é absurda (WAVRE, 1926, p. 69), da qual resulta uma lista de proposições logicamente válidas do ponto de vista clássica que seriam admitidos numa lógica empírica.

---

[51] Essa carta foi reproduzida em TROELSTRA, 1990, p. 12.
[52] Cf. WAVRE, 1924.

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
2. $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
3. $\neg(A \wedge \neg A)$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
5. $A \rightarrow \neg\neg A$
6. $\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$

Além disso, ele identifica corretamente as principais proposições que eram usualmente consideradas logicamente válidas, mas que são rejeitadas por Brouwer:

α. $A \vee \neg A$

β. $\neg\neg A \rightarrow A$

γ. $\neg A \vee \neg\neg A$

O trabalho de Wavre apresenta, portanto, uma espécie de catálogo dos princípios rejeitados por Brouwer bem como um catálogo ampliado de princípios que seriam admitidos por ele, no entanto, ainda não podemos dizer que temos um sistema formal para a lógica de Brouwer, pois esses princípios não são apresentados de forma sistemática como um cálculo lógico, particularmente porque não há qualquer indicação de quais seriam as regras de transformação que poderiam ser aplicadas sobre os princípios já admitidos para se derivar teoremas a partir deles.

Assim, pode-se concluir que a comunidade acadêmica terminou o ano de 1926 ainda sem um sistema formal, em sentido estrito, que pudesse ser reconhecido publicamente como uma tentativa de formalização da concepção de lógica de Brouwer.

O trabalho de Wavre, no entanto, parece ter produzido consequências importantes ao trazer a ideia de um sistema formal para a lógica de Brouwer para o centro das discussões. Um exemplo disso foi o trabalho de Alfred Barzin e Marcel Errera (1927), que colocaram em dúvida a consistência da concepção de lógica de Brouwer, alegando que esta levaria inevitavelmente a contradições ao tornar necessária a introdução da noção de proposições "tierces", que seriam proposições que não são verdadeiras nem falsas, representadas formalmente por meio do símbolo ′ em fórmulas com a forma

$$p'.$$

Barzin e Errera (1927, p. 4) entendem que a crítica de Brouwer contra a aplicação do princípio do terceiro excluído na matemática só teria sentido "se ela afirma que, diante do progresso de nosso saber, restará um resíduo irredutível de proposições que jamais serão verdadeiras e jamais serão falsas. É somente nesse caso que o princípio do terceiro excluído é realmente rejeitado."[53]

Mas isso demonstra uma incompreensão do pensamento de Brouwer por parte de ambos, pois Brouwer nunca afirmou a existência de proposições para quais é definitivamente impossível apresentar uma prova da própria proposição ou de sua negação. O que ele sustenta, de fato, é simplesmente que não temos garantia de que em algum momento posterior do tempo uma dessas duas provas será apresentada e, por isso, não podemos afirmar com convicção, no presente, que um desses casos vai ocorrer.

O sistema formal que eles entendem representar a concepção de lógica de Brouwer conteria os seguintes axiomas, aqui traduzidos para uma linguagem formal nos casos em que sua exposição se deu em linguagem corrente:

1. $p \to \neg\neg p$
2. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
3. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

4.11 $(p \wedge q) \to p$ e $(p \wedge q) \to q$

4.12 $p \to (p \vee q)$ e $q \to (p \vee q)$

4.21 $((p \to q) \wedge (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \wedge r))$

4.22 $((p \to q) \vee (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \vee r))$

[53] "si elle affirme que, devant les progrès de notre savoir, il restera un résidu irréductible de propositions qui jamais ne seront vraies et jamais ne seront fausses. C'est seulement dans ce cas que le principe du tiers exclu est réellement rejeté. " (Tradução nossa)

4.23 $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

5. $p \vee \neg p \vee p'$

6. $\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg(\neg p \wedge p') \wedge \neg(p \wedge p')$

A partir desses axiomas, eles demonstram o seguinte teorema:

A noção de estado terceiro (p') de uma proposição p implica contradição.

Esse sistema formal inconsistente de modo algum representa a concepção de lógica de Brouwer, pois a noção de proposição *tierce* ali introduzida claramente não tem lugar no interior dessa concepção. Isso ficou mais claro através de alguns trabalhos que procuraram mostrar que o argumento desenvolvido por Barzin e Errera como crítica da concepção de lógica de Brouwer é falacioso, como, por exemplo, o trabalho de Glivenko apresentado mais adiante.

Também em 1927, a Associação Matemática Holandesa apresentou a seguinte questão, formulada por G. Mannoury, como um desafio aos matemáticos do país, cuja solução mais bem avaliada receberia um prêmio:

> Por sua própria natureza, a teoria de conjuntos de Brouwer não pode ser identificada com as conclusões deriváveis formalmente num certo sistema pasigráfico. Não obstante, certas regularidades podem ser observadas na linguagem que Brouwer utiliza para dar expressão à sua intuição matemática; estas regularidades podem ser codificadas em um sistema matemático formal. Pede-se para
> 1) construir tal sistema e indicar seus desvios em relação às teorias de Brouwer;
> 2) investigar se a partir do sistema a ser construído, um sistema dual pode ser obtido ao se intercambiar (formalmente) o princípio do terceiro excluído e o princípio da contradição.[54]

Os trabalhos submetidos como resposta a essa questão deveriam ser identificados por algum mote, que posteriormente seria utilizado para identificar o autor do trabalho vencedor. Somente um trabalho foi submetido como proposta de solução ao problema, que foi

---

[54] Citado e traduzido para o inglês em TROELSTRA, 1990, p. 4. "By its very nature, Brouwer's set theory cannot be identified with the conclusions formally derivable in a certain pasigraphic system. Nevertheless certain regularities may be observed in the language which Brouwer uses to give expression to his mathematical intuition; these regularities may be codified in a formal mathematical system. It is asked to
1) construct such a system and to indicate its deviations from Brouwer's theories;
2) to investigate whether from the system to be constructed a dual system may be obtained by (formally) interchanging the *principium tertii exclusi* and the *principium contradictionis*." (Tradução nossa)

identificado pelo mote "Pedras ao invés de pão", uma referência à uma passagem bíblica encontrada em Mateus, capítulo 7, versículo 9, que sugere a tentativa de tornar algo, em princípio, inútil (a formalização) em algo útil.

Em carta enviada a Heyting, Brouwer faz uma avaliação bastante favorável do seu trabalho:

> Teu manuscrito interessou-me muito e eu lamento que você tenha que me apressar a devolvê-lo. No futuro, eu apreciaria se, você fizesse uma cópia dos teus manuscritos antes de enviá-los a mim, pelo menos se você aprecia uma leitura mais do que superficial de minha parte. Enquanto isso, eu formei uma opinião tão elevada de teu trabalho que eu te peço que o escreva em alemão para o Mathematische Annalen (de algum modo mais estendido, ao invés de abreviado).[55]

Mesmo sendo premiado em Amsterdam, recebendo elogios por parte de Brouwer e já começando a atrair a atenção da comunidade matemática, o trabalho de Heyting, cujo manuscrito não foi preservado, teve de esperar dois anos, por conta dos conflitos entre Brouwer e Hilbert no conselho editorial do periódico *Mathematische Annalen*, até ser finalmente publicado em 1930 em outro periódico e, por isso, nossa análise terá de basear-se na sua versão publicada.

Nesse intervalo, o debate sobre a "lógica de Brouwer" iniciado por R. Wavre e ampliado pelo trabalho de Barzin e Errera continuou se desenrolando, sobretudo por conta das diversas reações geradas por este último trabalho.

A reação mais significativa certamente foi aquela apresentada por V. Glivenko, que apresentou uma formalização parcial para a "lógica de Brouwer" como um meio para se refutar a crítica de Barzin e Errera na qual sustentavam que a lógica de Brouwer seria uma lógica trivalente ao admitir a existência de proposições "*tierces*", isto é, proposições que não são verdadeiras nem falsas e, que por essa razão a lógica de Brouwer seria inconsistente.

---

[55] Trecho de carta de Brouwer para Heyting, datada de 17 de julho de 1928, traduzida para o inglês em VAN DALEN (ed.), 2011, p. 333-334. "Your manuscript has interested me very much, and I am sorry that you have to rush me to send it back. In the future I would appreciate it, if you made a copy of your manuscripts before you send them to me, at least if you appreciate a more than superficial reading by me. Meanwhile I have already now formed such a high opinion of your work, that I ask you to write it in German for the Mathematische Annalen (and rather somewhat more extensive rather than abbreviated)." (Tradução nossa)

Glivenko (1928, p. 225) se propunha a mostrar que o ponto de partida dessa crítica não era legítimo ao “mostrar que na lógica brouweriana a introdução das proposições *tierces* é tão ilegítima quanto na lógica clássica de modo que a lógica brouweriana não é de modo algum uma lógica tripartite.”[56]

A refutação pretendida consiste na prova do seguinte teorema:

na lógica brouweriana, a proposição “p é uma proposição *tierce*” é falsa,

que é simbolicamente representado pela fórmula

$$\neg p'$$

Onde p seria uma proposição arbitrária, o que demonstraria a inexistência, na lógica de Brouwer, de qualquer proposição *tierce* no sentido dado por Barzin e Errera a essa noção.

A demonstração deste teorema se daria a partir de um conjunto de fórmulas cuja validade seria admitida do ponto de vista de Brouwer. Tal conjunto de fórmulas seria composto por

I. $p \to p$
II. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
III. $(p \land q) \to p$
IV. $(p \land q) \to q$
V. $(r \to p) \to ((r \to q) \to (r \to (p \land q)))$
VI. $p \to (p \lor q)$
VII. $q \to (p \lor q)$
VIII. $(p \to r) \to((q \to r) \to((p \lor q) \to r)$
IX. $((p \to q) \to ((p \to \neg q)) \to \neg p)$

Essas nove fórmulas foram extraídas de uma lista de princípios conhecidos da lógica que incluía, inicialmente, uma décima fórmula, a saber,

X. $\neg p \lor p$,

[56] “(…) montrer que dans la logique brouwerienne, l’introduction des propositions tierces est autant illégitime que dans la logique classique, de sorte que la logique brouwerienne n’est nullement une logique tripartite.” (Tradução nossa)

que, no entanto, é excluída porque representa justamente o princípio do terceiro excluído, que fora diretamente atacado por Brouwer.

Quanto aos nove princípios ainda considerados válidos bem como aos princípios

XI. $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

XII. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,

que são apresentados como deriváveis a partir dos princípios I – IX, mas cujas provas não são apresentadas, Glivenko (1928, p. 226) se limita a afirmar que eles não sofrem a critica brouweriana.

Vemos, portanto, que Glivenko parece seguir a metodologia de verificação individual de cada fórmula considerada e divide as proposições usualmente consideradas logicamente válidas entre aquelas rejeitadas pela concepção de Brouwer e aquelas que não sofreram críticas semelhantes, entretanto, não é fornecida qualquer indicação mais precisa sobre os critérios para se fazer tal distinção, que parece ser feita intuitivamente.

Vale ressaltar ainda que tal distinção de modo algum parece estar relacionada ao significado dos conectivos sentenciais, pois em momento algum é apresentada uma interpretação para os conectivos lógicos que possa explicar porque os axiomas I – IX são aceitos na lógica de Brouwer enquanto fórmulas como X são rejeitadas.

O argumento de Glivenko contra a existência de proposições *tierces* na lógica de Brouwer pode ser reconstruído da seguinte maneira:

A partir dos nove axiomas aceitos sem demonstração, ele demonstra sucessivamente os seguintes teoremas:

1. $\neg\neg(\neg p \vee p)$
2. $\neg\neg\neg q \rightarrow \neg q$
3. $((\neg p \vee p) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q$

A seguir, ele introduz duas condições que deveriam reger a introdução da noção de proposição *tierce* no sistema.

4. $\neg p \to \neg p'$

5.$p \to \neg p'$

A primeira condição expressa simplesmente que se uma proposição é falsa, então ela não é *tierce* enquanto a segunda condição expressa que se uma proposição é verdadeira, ela não é *tierce*.

Tomando o axioma VIII e efetuando a substituição das ocorrências da proposição r por ocorrências da proposição $\neg p'$, ele obtém a fórmula

6. $(\neg p \to \neg p') \to ((p \to \neg p') \to ((\neg p \vee p) \to \neg p'))$.

Por meio de aplicações sucessivas de *modus ponens* (aceita tacitamente) sobre, primeiramente, as fórmulas 4 e 6 e, depois, sobre as fórmulas 5 e 6, ele deriva a fórmula

7. $((\neg p \vee p) \to \neg p')$

Ao substituir, na fórmula3, as ocorrências da proposição q por ocorrências da proposição p', obtém-se a fórmula

8. $((\neg p \vee p)\to \neg p') \to \neg p'$

Com uma última aplicação de *modus ponens* sobre as fórmulas7 e 8, obtém-se o teorema desejado:

9. $\neg p'$

Mesmo com o argumento de Glivenko, Barzin e Errera não se convenceram da inadequação da sua crítica à lógica de Brouwer e o debate se estendeu durante mais alguns anos, o que, no entanto, não tem maior relevância para as questões tratadas nessa dissertação.

O trabalho de Glivenko, enquanto formalização da lógica de Brouwer, não parece ter adquirido um status mais importante, provavelmente por ser um trabalho muito curto, onde o foco não foi propriamente o desenvolvimento de um sistema formal para a lógica de Brouwer, mas a refutação da crítica de Barzin e Errera à concepção de lógica de Brouwer.

Além disso, por volta desse período, o trabalho de Heyting, mesmo ainda não tendo sido publicado, já era mencionado em conversações como a formalização da lógica de Brouwer.

Após a publicação desse seu primeiro trabalho, Glivenko estabeleceu um diálogo com Heyting, que é documentado por uma série de cartas onde eles discutiram diferentes tópicos relacionados à lógica de Brouwer.[57]

Como resultado desse diálogo com Heyting, Glivenko (1929) julgou necessário, a fim de se estabelecer os fundamentos completos de um cálculo lógico, acrescentar mais alguns axiomas ao conjunto apresentado por ele anteriormente, a saber:

A. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
B. $(p \to (p \to r)) \to (p \to r)$
C. $p \to (q \to p)$
D. $\neg q \to (q \to p)$

Tomando esse sistema formal estendido como ponto de partida, Glivenko (1929) procedeu à demonstração dos dois seguintes metateoremas sobre a lógica intuicionista, que ele considera representativa do pensamento de Brouwer:

1. Se uma certa expressão na lógica de proposições é demonstrável na lógica clássica, é a falsidade da falsidade desta expressão que é demonstrável na lógica Brouweriana.
2. Se a falsidade de uma certa expressão na lógica de proposições é demonstrável na lógica clássica, essa mesma falsidade é demonstrável na lógica Brouweriana.

Esses metateoremas apresentam uma interessante relação entre a lógica clássica e a lógica intuicionista e representam um resultado próximo daquele estabelecido por Kolmogorov quatro anos antes.

---

[57] Cf. TROELSTRA, 1990, p. 11-14.

Vale destacar que nesse sistema formal estendido apresentado por Glivenko, verificamos pela primeira vez, entre os trabalhos publicados, a inclusão do *EFQ* (axioma D) como um axioma de um sistema formal que, a princípio, admitiria como axiomas ou teoremas somente fórmulas aceitáveis do ponto de vista intuicionista defendido por Brouwer. O trabalho de Glivenko, portanto, apresenta uma considerável diferença em relação aos trabalhos anteriores, sobretudo o trabalho de Kolmogorov.

Heyting (1930, p. 311) inicia o artigo em que foi finalmente publicada a sua formalização da lógica intuicionista, que seria uma espécie de prolegômenos à formalização da matemática a ser apresentada logo na sequência, com algumas considerações sobre a relação entre matemática e linguagem claramente alinhadas com a visão sustentada por Brouwer, contudo, embora concorde que a linguagem possui apenas um papel secundário em relação a atividade matemática mental, ele reconhece na linguagem formal da lógica duas características positivas: concisão e precisão:

> Uma linguagem que refletisse passo a passo o funcionamento da matemática intuicionista desviaria tanto em todas as suas partes da forma usual que ela perderia inteiramente as propriedades favoráveis mencionadas acima. Estas considerações me levaram a começar a formalização da matemática intuicionista novamente com um cálculo proposicional.[58]

Heyting apresentou um sistema formal que continha duas regras de operação:

Se A e B são fórmulas corretas, então $A \wedge B$ é uma fórmula correta.

Se A e $A \rightarrow B$ são fórmulas corretas, então B é uma fórmula correta.

E os seguintes axiomas, numerados de acordo com a divisão das seções do artigo:

2.1. $a \rightarrow (a \wedge a)$

2.11. $(a \wedge b) \rightarrow (b \wedge a)$

2.12. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$

2.13. $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

2.14. $b \rightarrow (a \rightarrow b)$

[58] "A language that were to reflect step by step the workings of intuitionistic mathematics would in all its parts deviate so much from the usual form that it would lose entirely the favorable properties mentioned above. These considerations have led me to begin the formalization of intuitionistic mathematics again with a propositional calculus." (Tradução nossa)

2.15. $(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$

3.1. $a \rightarrow (a \vee b)$

3.11. $(a \vee b) \rightarrow (b \vee a)$

3.12. $((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)$

4.1. $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$

4.11. $((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b)) \rightarrow \neg a$

O método utilizado por Heyting a fim de chegar à formulação final de seu sistema formal para a lógica proposicional intuicionista foi, conforme ele relata em carta a Oskar Becker, tomar o sistema formal para a lógica proposicional clássica proposto por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica* (1910) e então isolar um determinado conjunto de leis primitivas independentes entre si que seriam válidas do ponto de vista intuicionista, excluindo aquelas fórmulas que não se adequavam à visão sustentada por Brouwer.[59]

Essa passagem pode ser tomada como evidência de que o procedimento de Heyting ao estabelecer o sistema formal para lógica intuicionista está de acordo com o modo como Brouwer abordou a questão da validade dos princípios lógicos, que consistia em tomar inferências e proposições consideradas válidas do ponto de vista clássico individualmente e analisar sua validade do ponto de vista intuicionista.

No entanto, qual o critério utilizado para definir quais axiomas ou teoremas clássicos deveriam ser preservados na lógica intuicionista? Heyting em momento algum especificou com clareza qual foi exatamente o seu critério para decidir quais fórmulas são válidas do ponto de vista intuicionista e quais não são.

Uma resposta mais precisa a essa questão poderia ser dada por meio de uma formulação clara do significado dos conectivos sentenciais, no entanto, nesse trabalho, Heyting (1930, p. 313) se limitou a fazer as seguintes considerações sobre a implicação:

> A formula $a \rightarrow b$ geralmente significa: “Se a é correto, então b também é correto.” Esta proposição é significativa se a e b são proposições constantes sobre cuja correção nada necessita ser conhecido; se a e b também contém variáveis, então ela

[59] Um rascunho dessa carta foi reproduzido, na sua integralidade, em VAN ATTEN, 2005, p. 128-130.

> afirma algo do tipo: "Se *a* é correta numa certa substituição das variáveis, então *b* também é correta nesta substituição."[60]

Percebe-se, portanto, que assim como Glivenko, Heyting distinguiu os princípios lógicos intuicionisticamente válidos de uma forma intuitiva, sem recorrer a qualquer explicação mais robusta do significado dos conectivos sentenciais.

O trabalho de Heyting logo se tornou a principal referência no que concerne a formalização da lógica intuicionista, especialmente do seu fragmento proposicional, onde se observam as principais diferenças do sistema formal intuicionista em relação ao sistema formal da lógica clássica.

Um exemplo desse reconhecimento é o trabalho de Gentzen (1934) que introduziu dois novos tipos de sistemas lógicos formais - dedução natural e cálculo de sequentes – onde o trabalho de Heyting foi tomado como ponto de partida para a formalização dos sistemas de dedução natural e cálculo de sequentes para a lógica intuicionista.

Restringimos, nesse trabalho, por questões meramente pragmáticas, a considerar apenas o sistema de dedução natural para a lógica intuicionista desenvolvido por Gentzen, que contém as seguintes regras:

$$\mathrm{I}\wedge \quad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

$$\mathrm{E}\wedge \quad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$$\mathrm{I}\vee \quad \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

$$\mathrm{E}\vee \quad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

60 "The formula $a \rightarrow b$ generally means: "If *a* is correct, then *b* is correct too." This proposition is meaningful if *a* and *b* are constant propositions about whose correctness nothing need be known; if *a* and *b* also contain variables, then it states something of the sort: "If for a certain substitution of the variables *a* is correct, then *b* is also correct for this substitution."" (Tradução nossa)

I→ $$\frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$$

E→ $$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

I¬ $$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \perp\end{matrix}}{\neg A}$$

E¬ $$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \qquad \frac{\perp}{A}$$

As regras à esquerda, chamadas de regras de introdução, determinam como é possível derivar fórmulas que contenham o símbolo introduzido como conectivo principal enquanto as regras à direita, chamadas de regras de eliminação, determinam como é possível derivar novas fórmulas a partir de fórmulas que contenham o símbolo que está sendo "eliminado" como conectivo principal.

Uma das vantagens desse tipo de sistema formal é que ao trabalhar apenas com regras de inferência ao invés de axiomas, ele apresenta-se como mais próximo do modo como as pessoas raciocinariam naturalmente. Como a lógica, segundo a concepção de Brouwer, tem um caráter notadamente descritivo, o sistema de dedução natural parece ser mais adequado enquanto imagem formal da lógica de Brouwer, no entanto, isso é mais uma impressão subjetiva do que um fato objetivo, pois, do ponto de vista lógico, os sistemas axiomático e dedução natural para a lógica intuicionista são equivalentes.

Foram apresentadas, posteriormente, diferentes formulações para a lógica intuicionista onde esta é apresentada com axiomas diferentes ou então em uma linguagem contendo ⊥ como símbolo primitivo, mas todos esses trabalhos podem ser considerados meras reformulações estilísticas do trabalho de Heyting uma vez que esses sistemas formais são equivalentes à formulação original de Heyting.

2. Explicando o sistema formal: a interpretação BHK

Nos trabalhos onde foram apresentadas as propostas de formalização para a "lógica de Brouwer" que resultaram no estabelecimento da lógica intuicionista de Heyting como sistema que melhor cumpriria essa função, não encontramos uma análise mais detalhada do significado dos símbolos presentes no sistema formal (as letras proposicionais e os conectivos sentenciais) que pudesse sustentar de forma mais precisa a distinção entre quais fórmulas e inferências são válidas do ponto de vista intuicionista e quais não são.[61]

Essa análise começou a ser realizada pelo próprio Heyting ainda em 1930, mas cabe destacar que já em 1927, portanto, antes do estabelecimento de uma formalização padrão da lógica intuicionista, encontramos um prelúdio a uma interpretação fenomenológica de determinados elementos da lógica intuicionista.

Num dos apêndices de seu livro dedicado a tratar da questão da existência na matemática, Oskar Becker (1927, p. 775-776) desenvolveu uma interpretação para os casos possíveis em que uma proposição matemática pode se encontrar de acordo com a concepção de Brouwer.

Uma proposição é verdadeira, ou seja, realmente demonstrável de forma construtiva, caso tenha ocorrido uma síntese de preenchimento da intenção expressa pela proposição.

Uma proposição é absurda quando ocorreu a síntese de frustração da intenção expressa pela proposição.

Além desses dois casos, existe o caso onde, pelo menos até então, não ocorreu nem o preenchimento da intenção nem a sua frustração, o que mostraria a invalidade do princípio do terceiro excluído como uma lei geral.

[61] Como mostrado anteriormente, o trabalho de Kolmogorov em 1925 apresenta uma análise um pouco mais detalhada do significado dos conectivos que representam a implicação e a negação como forma de justificar a validade intuitiva dos axiomas do sistema B, entretanto, como destacado, esse trabalho permaneceu quase totalmente desconhecido pelos demais envolvidos nas discussões sobre a lógica de Brouwer e o significado que os conectivos devem apresentar nesse sistema.

Com base nesse tipo de considerações fenomenológicas, Becker discutiu a validade de determinados inferências lógicas que tinham sido destacados por Wavre (1926) como válidas do ponto de vista de Brouwer.[62]

A interpretação apresentada por Becker, como mostraremos a seguir, influenciou as explicações de Heyting para as noções de proposição, asserção de uma proposição e asserção da negação de uma proposição.

Como resposta às críticas de Barzin e Errera contra a consistência da concepção de lógica de Brouwer, Heyting escreveu um artigo onde começou a explicar qual seria a interpretação brouweriana das noções que aparecem nos sistema formais de lógica, o que ajudou a esclarecer o significado do sistema formal que ele havia estabelecido para a lógica intuicionista, que pretendia ser representativo da visão de Brouwer sobre a lógica.

Heyting (1930A, p. 307) faz a seguinte elucidação sobre o significado das proposições e das asserções dentro da perspectiva intuicionista:

> Uma proposição *p* como, por exemplo, "a constante de Euler é racional," expressa um problema, ou melhor ainda, uma certa expectativa (aquela de encontrar dois inteiros *a* e *b* tal que C = *a/b*), que pode ser realizada ou desapontada. […] Para satisfazer as demandas intuicionistas, a asserção deve ser a observação de um fato empírico, isto é, da realização da expectativa expressa pela proposição *p*. Aqui, então, está a *asserção Brouweriana* de *p*: *sabe-se como provar p*. Nós denotaremos isto por $\vdash p$. As palavras "provar" devem ser tomadas no sentido de "provar por construção."[63]

Logo depois, Heyting (1930A, p. 307) também trata da negação:

> Seja uma proposição *p* dada; a negação clássica "*p* é falsa" não pode ser usada na lógica intuicionista, pelas mesmas razões que a asserção clássica; ela deve ser substituída por "*p* implica uma contradição." Vamos denotar esta "negação Brouweriana" de *p* por $\neg p$; então $\neg p$ é uma nova proposição expressando a expectativa de ser capaz de reduzir *p* a uma contradição; a negação é uma função lógica. $\vdash\neg p$ significará: "sabe-se como reduzir *p* a uma contradição."[64]

---

[62] Cf. BECKER, 1927, p. 780.

[63] "A proposition *p* like, for example, "Euler's constant is rational," expresses a problem, or better yet, a certain expectation (that of finding two integers *a* and *b* such that *C= a/b)*, which can be fulfilled or disappointed.[…] To satisfy the intuitionistic demands, the assertion must be the observation of an empirical fact, that is, of the realization of the expectation expressed by the proposition *p*. Here, then, is the *Brouwerian assertion* of *p: It is known how to prove p.* We will denote this by $\vdash p$. The words "to prove" must be taken in the sense of "to prove by construction."" (Tradução nossa)

[64] "Let a proposition *p* be given; the classical negation "p is false" cannot be of use in intuitionistic logic, for the same reasons as for the classical assertion; it must be replaced by "*p* implies a contradiction." Let us

Heyting (1931, p. 58) avança na análise oferecida anteriormente ao aproximá-la da noção fenomenológica de intenção como pode ser visto na reelaboração do exemplo envolvendo a constante de Euler:

> Uma proposição matemática expressa uma certa expectativa. Por exemplo, "a constante de Euler é racional," expressa a expectativa de que poderíamos encontrar dois inteiros *a* e *b* tal que C = *a/b*. Talvez a palavra 'intenção', cunhada pelos fenomenólogos, expressa até melhor o que se quer dizer aqui.[65]

Mantendo a distinção entre proposição e asserção considerada na obra anterior, ele explica que "a afirmação de uma proposição significa a realização de uma intuição."[66] (HEYTING, 1931, p. 59)

A negação também recebe uma interpretação fenomenológica, baseada no trabalho de Becker (1927):

> Becker, seguindo Husserl, descreveu seu significado muito claramente. Para ele, a negação é algo propriamente positivo, a saber, a intenção de uma contradição contida na intenção original. A proposição 'C não é racional', portanto, significa a expectativa que se pode derivar uma contradição a partir da suposição que C é racional. É importante notar que a negação de uma proposição sempre se refere a um procedimento de prova que leva a contradição, mesmo que a proposição original não mencione qualquer procedimento de prova.[67]

Tendo em vista a expressão formal do princípio do terceiro excluído e a discussão da sua validade, Heyting (1931, p. 59) também fornece uma explicação do significado para a disjunção, onde uma proposição com a forma "'$p \vee q$' significa que a intenção que é realizada se, e somente se, pelo menos uma das intenções *p* e *q* é realizada."[68]

---

denote this "Brouwerian negation" of *p* by *~p;* then *~p* is a new proposition expressing the expectation of being able to reduce *p* to a contradiction; the negation is a logical function. $\vdash\sim p$ will mean: "it is known how to reduce *p* to a contradiction."" (Tradução nossa)

65 "A mathematical proposition expresses a certain expectation. For example, the proposition, 'Euler's constant C is rational', expresses the expectation that we could find two integers *a* and *b* such that C=*a*/*b*. Perhaps the word 'intention', coined by the phenomenologists, expresses even better what is meant here." (Tradução nossa)

66 "The affirmation of a proposition means the fulfillment of an intention." (Tradução nossa)

67 "Becker, following Husserl, has described its meaning very clearly. For him negation is something thoroughly positive, viz., the intention of a contradiction contained in the original intention. The proposition 'C is not rational', therefore, signifies the expectation that one can derive a contradiction from the assumption that C is rational. It is important to note that the negation of a proposition always refers to a proof procedure which leads to the contradiction, even if the original proposition mentions no proof procedure." (Tradução nossa)

68 "'$p \vee q$' signifies that intention which is fulfilled if and only if at least one of the intentions *p* and *q* is fulfilled." (Tradução nossa)

Nesse trabalho, Heyting não apresenta explicações similares para a conjunção e a implicação, no entanto, já em 1930, Heyting parecia ter em mente uma interpretação mais detalhada para a implicação, pois, em carta dirigida a Freudenthal, ele afirma que "também $a \rightarrow b$, como a negação, deveria se referir a um procedimento de prova: 'Eu possuo uma construção que deriva de toda prova de *a* uma prova de *b*.'"[69] (HEYTING apud TROELSTRA, 1983, 207)

Essa explicação somente seria publicada em 1934, como será mostrado abaixo, porém, antes disso, em 1932, Kolmogorov apresentou uma interpretação completamente nova para o sistema formal apresentado por Heyting, segundo a qual este deveria ser interpretado como um cálculo de problemas.

Como Kolmogorov explica no início do artigo, sua interpretação pode ser encarada de duas formas: por alguém que não concorda com o ponto de vista intuicionista defendido por Brouwer, ela é apenas uma tentativa de justificar um cálculo que lida não com a preservação da verdade, mas com a solução de problemas; por alguém que concorda com o ponto de vista de Brouwer, ela é uma explicação mais adequada da concepção de matemática de Brouwer.

Kolmogorov (1932, p. 329) não define com precisão o que é um problema, mas acredita ser suficiente explicar o sentido desta noção por meio dos seguintes exemplos:

> 1. Encontrar quatro números inteiros x, y, z, n para os quais as relações
> $$x^n + y^n = z^n,\ n > 2$$
> valem.
> 2. Provar a falsidade do teorema de Fermat.
> 3. Desenhar um círculo passando através de três pontos dados (x, y, z).
> 4. Contanto que uma raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$ seja dada, encontrar a outra.
> 5. Contanto que o número π seja expresso racionalmente, por exemplo, $\pi = m/n$, encontrar uma expressão análoga para o número e.[70]

---

[69] "auch $a \rightarrow b$, wie die Negation, auf ein Beweisverfahren Bezug nehmen muss: "ich besitze eine Konstruktion, welche aus jedem Beweis für *a* einen Beweis für *b* ableitet"." (Tradução nossa)

[70] "1. To find four whole numbers x, y, z, n for which the relations
$$x^n + y^n = z^n,\ n > 2$$
hold.
2. To prove the falsity of Fermat's theorem.
3. To draw a circle passing through three given points (x, y, z).

Kolmogorov (1932, p.329) ainda acrescenta uma observação importante quanto ao último problema: "A suposição no quinto problema é impossível e, consequentemente, o próprio problema é *desprovido de conteúdo*. No que se segue, a prova de que um problema é desprovido de conteúdo será sempre considerada como sua solução."[71]

Kolmogorov (1932, p. 329) então apresenta sua interpretação dos conectivos sentenciais em termos de operações aplicáveis sobre problemas mais simples para se produzir problemas mais complexos:

> Se a e b são dois problemas, então $a \wedge b$ designa o problema "resolver ambos os problemas a e b," enquanto $a \vee b$ designa o problema "resolver pelo menos um dos problemas a e b." Além disso, $a \rightarrow b$ é o problema "resolver b contanto que a solução para a é dada" ou, de forma equivalente, "reduzir a solução de b à solução de a."[72]

Além dessa interpretação para os conectivos binários, ele apresenta também uma interpretação para a negação que se aproxima bastante do entendimento de Brouwer, pois "$\neg a$ designa o problema 'obter uma contradição contanto que a solução de a seja dada'."[73] (KOLMOGOROV, 1932, p. 329)

Como mencionado acima, em 1934, Heyting publicou a sua ideia de que a implicação deve envolver um procedimento de prova e, assim, finalmente parece ter chegado a uma formulação mais satisfatória da explicação do significado da implicação, ao estabelecer que "$a \rightarrow b$ significa a intenção de uma construção, que a partir de cada prova para a conduz a uma prova de b."[74] (HEYTING, 1934, p. 14)

---

4. Provided that one root of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ is given, to find the other one.
5. Provided that the number π is expressed rationally, say, $\pi = m/n$, to find an analogous expression for the number e." (Tradução nossa)

[71] "(...) the assumption in the fifth problem is impossible, and consequently the problem itself is *without content*. In what follows, the proof that a problem is without content will always be considered as its solution." (Tradução nossa)

[72] "If a and b are two problems, then $a \wedge b$ designates the problem "to solve both problems a and b," while $a \vee b$ designates the problem "to solve at least one of the problems a and b." Furthermore, $a \rightarrow b$ is the problem "to solve b provided that the solution for a is given" or, equivalently, "to reduce the solution of b to the solution of a." (Tradução nossa)

[73] "$\neg a$ designates the problem "to obtain a contradiction provided that the solution of a is given."" (Tradução nossa)

[74] "$a \rightarrow b$ bedeutet dann die Intention auf eine Konstruktion, die aus jedem Beweis für a zu einem Beweis für b führt." (Tradução nossa)

Quanto aos demais conectivos sentenciais, Heyting optou por adotar o tratamento em termos de operações sobre problemas dado por Kolmogorov.

Em 1936, após uma discussão com Freudenthal sobre o significado da implicação na lógica intuicionista, Heyting (1936, p. 117) apresentou o seguinte argumento:

> Que o problema $a \rightarrow b$, em determinadas circunstâncias, pode ser resolvido sem que a solução de a seja conhecida, mostra o seguinte exemplo simples. Sob a eu compreendo o problema: "Encontrar no desenvolvimento decimal de π uma sequência de numerais 0123456789", sob b o problema: "Encontrar no desenvolvimento decimal de π uma sequência de numerais 012345678". Evidentemente b pode ser reduzido a *a através de uma construção muito simples.*[75]

Na época em que apresentou esse exemplo, os problemas a e b não tinham sido resolvidos, mesmo assim, percebemos claramente que a construção mencionada por Heyting precisaria somente excluir o último dígito da sequência 0123456789 para assim transformá-la numa sequência 012345678. Esse método simples, de fato, permitiria transformar qualquer prova de a em uma prova de b e, assim sabemos, mesmo sem termos qualquer conhecimento sobre como efetuarmos a construção de a ou b por si mesma, que existe uma conexão de implicação entre essas duas proposições.

Heyting (1971, p. 102-103) voltou a tratar do significado dos conectivos lógicos, porém agora com uma ligeira diferença em relação a suas exposições anteriores, pois ele os define em termos de condições de assertibilidade, isto é, estabelecendo as condições necessárias e suficientes sob as quais uma expressão complexa formada com o auxílio dos conectivos pode ser asserida:

> $p \wedge q$ pode ser asserida se, e somente se, tanto p quanto q podem ser asseridas.
> (...)
> $p \vee q$ pode ser asserida se, e somente se, pelo menos uma das proposições p e q pode ser asserida.
> (...)
> $\neg p$ pode ser asserida se, e somente se, nós efetuamos uma construção que da suposição de que uma construção p foi realizada, conduz a uma contradição.
> (...)

---

[75] "Daß die Aufgabe $a \rightarrow b$ u.U. gelöst werden kann, ohne daß die Lösung von a bekannt ist, zeigt folgendes einfache Beispiel. Unter a verstehe ich die Aufgabe: „In der dezimalen Entwicklung von π eine Ziffernfolge 0123456789 zu finden", unter b die Aufgabe: „In der dezimalen Entwicklung von π eine Ziffernfolge 012345678 zu finden". Offenbar kann b durch eine sehr einfache Konstruktion auf a zurückgeführt werden." (Tradução nossa)

> A implicação $p \rightarrow q$ pode ser asserida se, e somente se, nós possuímos uma construção r que, unida a qualquer construção provando p (supondo que a última foi efetuada), efetuaria automaticamente uma construção provando q. Em outras palavras, uma prova de p, junto com r, formaria uma prova de q.[76]

Quanto à contradição mencionada na definição da negação, Heyting (1971, p. 102) explica que ela deve ser tomada como uma noção primitiva, pois parece muito difícil reduzi-la a noções mais simples e é sempre fácil reconhecer uma contradição como tal, pois ela pode, em geral, ser expressa por proposições claramente absurdas como, por exemplo, $0 = 1$.

Os trabalhos de Heyting e Kolmogorov tinham a intenção de elucidar as ideias de Brouwer sobre a lógica. Apesar de inicialmente pensarem suas interpretações como distintas, tanto Heyting como Kolmogorov foram gradualmente se convencendo de que existia uma relação de equivalência entre as duas interpretações que não se resumia ao fato de ambas validarem igualmente todos os teoremas do cálculo apresentado por Heyting, mas que as próprias noções de problemas, intenções e construções expressavam as mesmas ideias.

Esse ponto recebeu um tratamento mais rigoroso por meio do trabalho de Sundholm (1983), onde ele procurou mostrar que a ideia de Heyting de que proposições representam intenções que visam construções e a ideia de Kolmogorov de que elas colocam problemas que são solucionados por uma construção realmente são equivalentes.[77]

As ideias apresentadas acima formam a base filosófica da chamada interpretação BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) contemporânea[78], também conhecida como interpretação da prova, que estabelece o significado intuicionista dos operadores lógicos em

---

[76] "$p \wedge q$ can be asserted if and only if both p and q can be asserted. (…) $p \vee q$ can be asserted if and only if at least one of the propositions p and q can be asserted. (…) $\neg p$ can be asserted if and only if we possess a construction which from the supposition that a construction p were carried out, leads to a contradiction. (…) The implication $p \rightarrow q$ can be asserted, if and only if we possess a construction r, which, joined to any construction proving p (supposing that the latter be effected), would automatically effect a construction proving q. In other words, a proof of p, together with r, would form a proof of q." (Tradução nossa)

[77] Cf. SUNDHOLM, 1983, p. 158-159.

[78] Cf. TROELSTRA; VAN DALEN, 1988, p. 9-10.

termos das condições necessárias e suficientes para se obter uma prova de uma expressão complexa formada com a inclusão desses operadores através das seguintes cláusulas:

(H1) Uma prova de $A \wedge B$ é dada apresentando-se uma prova de A e uma prova de B.

(H2) Uma prova de $A \vee B$ é dada apresentando-se uma prova de A ou uma prova de B (mais a estipulação de que queremos considerar a prova apresentada como evidência para $A \vee B$).

(H3) Uma prova de $A \rightarrow B$ é uma construção que nos permite transformar qualquer prova de A em uma prova de B.

(H4) O absurdo $\perp$ (contradição) não tem prova; uma prova de $\neg A$ é uma construção que transforma qualquer prova hipotética de A em uma prova de uma contradição.

Apesar de representarem uma explicação um tanto informal e conterem termos que exigiriam uma definição mais precisa, tais como prova e construção, as cláusulas da interpretação BHK "são suficientes para mostrar que certos princípios lógicos deveriam ser geralmente aceitáveis de um ponto de vista construtivo, enquanto alguns outros princípios da lógica clássica não são aceitáveis."[79] (TROELSTRA; VAN DALEN, 1988, p. 10)

3. O problema do *ex falso quodlibet*

Após considerarmos o desenvolvimento histórico tanto da formalização da lógica intuicionista quanto da explicação intuicionista do significado dos conectivos sentenciais, podemos tratar com maior atenção do *EFQ*, admitido como o axioma 4.1 do sistema formal de Heyting, que pretendia formalizar a concepção de lógica de Brouwer.

[79] "suffice to show that certain logical principles should be generally acceptable from a constructive point of view, while some other principles from classical logic are not acceptable." (Tradução nossa)

A admissão desse princípio como axioma da lógica intuicionista indicaria, a princípio, que ele seria considerado válido no interior da concepção de lógica de Brouwer, entretanto, como mostraremos a seguir, partindo de indicações fornecidas pelo próprio Brouwer em suas obras, podemos desenvolver argumentos em favor da rejeição da validade do *EFQ* na lógica de Brouwer bem como podemos mostrar que os argumentos oferecidos em favor da validade desse princípio na lógica intuicionista não seriam corretos quando avaliados pela perspectiva de Brouwer.

Antes de passarmos diretamente à discussão da validade do *EFQ* no interior da concepção de lógica de Brouwer, comecemos, porém, apresentando um pouco da história desse princípio e da sua justificação na lógica clássica.

Esse princípio é, segundo Lukasiewicz (1957, p. 80), conhecido desde o período medieval:

> O terceiro axioma, em palavras 'se *p*, então se não-*p*, então *q*', ocorre pela primeira vez, até onde eu sei, num comentário atribuído a Duns Scotus; eu o chamo de lei de Duns Scotus. Esta lei contém o veneno usualmente imputado à contradição: se duas sentenças contraditórias, como *a* e não-*a*, fossem verdadeiras juntas, nós poderíamos derivar a partir delas por meio dessa lei a proposição arbitrária *q*, i.e. qualquer proposição que seja.[80]

Num trabalho anterior especificamente dedicado à história do desenvolvimento da lógica proposicional, Lukasiewicz (1957, p. 80) mostra em maiores detalhes o argumento de Duns Scotus em favor do *EFQ*:

> E finalmente ele prova que, de uma proposição que contém uma contradição formal, qualquer proposição que seja pode ser obtida numa consequência formal. A prova é dada por meio de um exemplo e funciona do modo a seguir. A consequência "Sócrates corre e Sócrates não corre, portanto, você está em Roma" é formalmente correta. A partir da conjunção "Sócrates corre e Sócrates não corre" a proposição "Sócrates corre" bem como a proposição "Sócrates não corre" se seguem em consequência formal. A partir da proposição "Sócrates corre" se segue ainda, em consequência formal, a disjunção "Sócrates corre ou você está em Roma".

[80] "The third axiom, in words 'If *p*, then if not-*p*, then *q*', occurs for the first time, as far as I know, in a commentary on Aristotle ascribed to Duns Scotus; I call it the law of Duns Scotus. This law contains the venom usually imputed to contradiction: if two contradictory sentences, like *a* and N*a*, were true together, we could derive from them by means of this law the arbitrary proposition q, i.e. any proposition whatever." (Tradução nossa)

> Finalmente, a partir desta disjunção e da negação do seu primeiro membro nós obtemos, em consequência formal, a proposição “você está em Roma”.[81]

Apesar de este argumento ser insuficiente como uma prova do *EFQ* já que apresenta uma instância desse princípio e não tem, portanto, o caráter absolutamente geral exigido de uma prova, ele é bastante interessante porque procede de uma maneira mais próxima àquilo que hoje chamamos de teoria da prova.

Como Tennant (1987, p. 665) sugere, o *EFQ* aparece em sistemas formais para lógica clássica em duas formas distintas: em forma implicacional quando fórmulas como

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B),$$
$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B),$$
$$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$$

são aceitas como axiomas ou demonstradas como teoremas ou, então, em forma dedutiva, quando a partir de premissas

$$A \text{ e } \neg A$$

é correto inferir uma proposição B arbitrária.

A forma dedutiva é mais representativa da situação que encontramos em sistemas formais de dedução natural, pois, em sistemas formais de tipo axiomático como aqueles aqui considerados, o teorema da dedução, válido nesses sistemas, torna as duas formas essencialmente equivalentes

Na sua *Conceitografia*, Frege (2012 [1879], p. 116) demonstra dois teoremas que, apesar de uma ligeira diferença formal, correspondem ao *EFQ*, a saber, as proposições

$$36.\ A \rightarrow (\neg A \rightarrow B) \text{ e } 38.\ \neg A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

---

[81] And finally he proves that, from a proposition which contains a formal contradiction, any proposition at all can be obtained in a formal consequence. The proof is given by means of an example and goes as follows. The consequence "Socrates runs and Socrates does not run, therefore you are in Rome" is formally correct. From the conjunction "Socrates runs and Socrates does not run" the proposition "Socrates runs", as well as the proposition "Socrates does not run", follows in formal consequence. From the proposition "Socrates runs" there follows further, in formal consequence, the disjunction "Socrates runs or you are in Rome". Finally, from this disjunction and the negation of its first member we obtain, in formal consequence, the proposition "you are in Rome". (Tradução nossa)

O *EFQ* aparece nos *Principía Mathematica* (1910), de B. Russell e A. N. Whitehead, como a proposição 2.21

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q),$$

que é provada a partir da proposição 2.2

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

mediante a aplicação da regra de substituição para substituir ambas as ocorrências de p em 2.2 por ocorrências de $\neg p$, o que resulta na fórmula

$$\neg p \rightarrow (\neg p \vee q)$$

eo recurso à definição 1.01 pela qual o símbolo da implicação é definido em termos dos símbolos de disjunção e negação, considerados primitivos no sistema, da seguinte forma:

$p \rightarrow q$ é definido como $\neg p \vee q$.

A demonstração do *EFQ* no sistema desenvolvido por Russell e Whitehead é relevante, pois, conforme vimos, Heyting tomou esse sistema formal como ponto de partida para o desenvolvimento da lógica intuicionista.

Como podemos perceber, o *EFQ* aparece nesses trabalhos como uma consequência, entre outras, das definições e axiomas dos sistemas formais, mas nenhuma importância maior é atribuída a ele.

Foi com a crítica de C. I. Lewis, da qual resultou o seu cálculo da implicação estrita, que esse princípio de inferência passou a ser discutido com maior atenção a partir de 1910.

Lewis não nega a validade do princípio no interior dos sistemas formais e da concepção de lógica representada por eles, mas sim a sua validade intuitiva, isto é, ele questiona sua capacidade de representar uma inferência considerada como intuitivamente válida.

A fórmula

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$$

afirma que sempre que estamos numa situação em que lidamos com duas proposições contraditórias entre si (A e $\neg$A) e consideramos as mesmas, de forma hipotética, como simultaneamente corretas podemos inferir uma proposição B arbitrária qualquer.

Pelo critério estabelecido por Brouwer, tal inferência só seria justificada se a construção mental correspondente puder ser efetivamente realizada. Assim uma prova de que essa fórmula é, de fato, uma lei geral consistiria em fornecer um método pelo qual, quando dadas duas proposições arbitrárias contraditórias entre si, poder-se-ia sempre provar uma proposição qualquer.

Entretanto, não é claro por que o sujeito, ao desenvolver construções matemáticas na sua mente, poderia concretizar qualquer construção, inclusive aquelas impossíveis como, por exemplo, a construção correspondente à proposição 2+2 = 5, ao perceber que a construção que vinha desenvolvendo não pode ser concretizada, que é o fato mental correspondente à estrutura linguística da contradição (BROUWER, 1907, p. 73).

Este argumento questiona, de forma análoga ao argumento apresentado contra o princípio do terceiro excluído, se existe esse método que permitiria ao sujeito concluir uma proposição qualquer escolhida arbitrariamente ao se deparar com uma contradição.

Uma forma mais precisa para se apresentar esse ponto pode ser dada por meio da consideração do argumento usualmente utilizado para amparar a validade do *EFQ*, que consiste, de forma similar ao que foi feito por Duns Scotus na Idade Média, em apelar para o modo de inferência conhecido como silogismo disjuntivo por meio da seguinte derivação:

1. A
2. A $\vee$ B
3. $\neg$A
4. B

Aqueles que, por qualquer motivação, rejeitam a validade do *EFQ* são frequentemente desafiados a apontar onde existe algum erro nesse argumento, pois tanto a transição de 1 para 2 quanto a transição de 2 e 3 para 4 por meio do silogismo disjuntivo parecem ter uma boa fundamentação intuitiva.

Embora com uma apresentação formal ligeiramente diferente da nossa, M. van Atten (2009, p. 124) mostra que, do ponto de vista de Brouwer, ambas as transformações, consideradas isoladamente, seriam confiáveis.

A transição de A para A ou B é confiável porque representa a operação mental de deixar inalterada uma construção obtida anteriormente. A transição linguística oferece apenas uma nova descrição linguística, menos informativa, para a construção representada por A.

Igualmente, se consideramos diretamente uma proposição com a forma A ou B, ela indica que pelo menos uma das duas construções indicadas pelas proposições A e B deve ter sido concluída, embora não saibamos determinar qual das duas.

Se juntarmos a essa informação a proposição não A, que indica a impossibilidade da conclusão da construção referida por A, isso nos indica que a construção indicada pela proposição era desde o início a construção que agora podemos descrever de forma mais precisa por meio da proposição B. Assim, aqui também temos uma transição linguística que representa uma operação mental que deixa inalterada uma construção já obtida.

M. van Atten (2009, p.124) sugere, então, que o problema no argumento a favor do *EFQ* surge quando fazemos a composição das duas transformações linguísticas numa única estrutura linguística já que a primeira inferência estaria tratando da construção representada por A enquanto a segunda estaria tratando da construção representada B, mas não podemos ter qualquer garantia de que A e B são descrições distintas de uma mesma construção já que nem mesmo consideramos as duas descrições equivalentes do ponto de vista linguístico, já que A e B podem assumir diferentes significados, isto é, serem substituídas por diferentes proposições. Portanto, é altamente duvidoso, para dizer o mínimo, que essa transformação linguística representada pelo *EFQ* tenha lugar na concepção de lógica de Brouwer.

Baseando-se também na sua interpretação (β) das observações de Brouwer sobre o juízo hipotético, M. van Atten sustentou que o *EFQ*, enquanto uma lei geral, não é justificado do ponto de vista brouweriano, embora existam casos particulares onde ele seja correto, como no seguinte exemplo (adaptado de M. VAN ATTEN, 2004, p. 31):

Seja p a proposição 'Os 10 primeiros decimais de π são 0' e q a proposição 'Os 9 primeiros decimais de π são 0'. Por um lado, pode-se concluir $\neg p$, já que a construção descrita por p é impossível, por outro, pode-se apresentar uma construção que transformaria as condições de uma construção de p nas condições de uma construção de q e concluir que $p \rightarrow q$, que consistiria num procedimento que simplesmente ignoraria a décima ocorrência de 0 caso a sequência original fosse encontrada. Assim, segue-se que $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ é correta para essas instâncias particulares de p e q.

Porém, mesmo que se apresente casos particulares corretos, o questionamento levantamento anteriormente quanto a validade universal do *EFQ* permanece um desafio difícil de ser superado, pois não há qualquer evidência de que haveria algum procedimento que transformaria as condições de construção dadas por proposição A sabidamente falsa nas condições de construção dadas por uma proposição B qualquer, cujas condições de construção, que representam seu conteúdo intencional, podem não ter a mínima relação com as condições de construção da proposição A.

Feitas estas críticas diretas à validade universal do *EFQ* a partir do ponto de vista de Brouwer, passemos agora a uma avaliação dos argumentos que foram apresentados ao longo do tempo em favor da aceitação do *EFQ* na lógica intuicionista.

Como mostrado acima, Glivenko (1928, p. 226) inicialmente não incluiu o *EFQ* na sua lista de fórmulas intuitivamente corretas do ponto de vista intuicionista, porém, no ano seguinte, motivado por suas discussões com Heyting, ele admitiu a validade desse princípio, o que ele justificou como uma decisão necessária para tornar um cálculo lógico fecundo e também para tornar preciso o significado formal da implicação lógica. Além disso, ele também se apoiou no fato de que o *EFQ* se segue da fórmula

$$(p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p),$$

cuja admissibilidade ele considerava evidente (GLIVENKO, 1929, p. 302).

De fato, ao assumir essa fórmula como premissa, poder-se-ia demonstrar o *EFQ* da seguinte forma:

1. $\neg q \rightarrow (p \vee \neg q)$ (Ax. VII, via substituição de q por $\neg q$)
2. $(p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ (Premissa de Glivenko)
3. $(\neg q \rightarrow (p \vee \neg q)) \rightarrow (((p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)))$ (Ax. II, via substituição de p por $\neg q$, de q por $(p \vee \neg q)$ e de r *por* $(q \rightarrow p)$)
4. $(((p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)))$ (modus ponens 1 e 3)
5. $\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$ (modus ponens 2 e 4)

Essa última consideração, segundo a qual o *EFQ* deve ser admitido por seguir-se logicamente da fórmula

$$(p \vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p),$$

entretanto, não ajuda a sustentar a validade do *EFQ* em questão, especialmente porque a fórmula admitida por ele como evidente, pode ter sua validade igualmente questionada, como foi feito pelo próprio Lewis, entre outros, ao longo do século XX.

Além dessas considerações, Glivenko sugere a leitura do artigo onde Heyting apresenta sua proposta de formalização para a lógica intuicionista para se compreender melhor a aceitação das fórmulas

C. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

D. $\neg q \rightarrow (q \rightarrow p)$

na lógica de Brouwer.

Nesse artigo, Heyting (1998 [1930], p. 313) justificou a presença dos axiomas C e D (onde D representa o *EFQ*) entre os axiomas da lógica intuicionista proposicional afirmando que:

> O caso é concebível que após o enunciado $a \rightarrow b$ ter sido demonstrado no sentido especificado, revela-se que b é sempre correto. Uma vez aceito, a fórmula $a \rightarrow b$ então tem que permanecer correta; isto é, nós devemos atribuir um significado para o sinal $\rightarrow$ tal que $a \rightarrow b$ ainda vale. O mesmo pode ser destacado no caso onde se revela posteriormente que a é sempre falsa.[82]

Porém como bem observou Johansson em carta enviada a Heyting cinco anos depois, existe um problema nessa linha de argumentação:

> Você diz que quando $a \rightarrow b$ foi provado e posteriormente $\neg a$ é provado, então $a \rightarrow b$ deveria permanecer correta. De fato; mas $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ significa que quando $\neg a$ foi provado, b imediatamente *se torna* derivável a partir de a, mesmo quando isso não tivesse sido provado antes.[83]

A inclusão do *EFQ* como axioma cobre mais casos do que apenas aquele mencionado por Heyting. O caso apresentado por Johansson, onde não temos evidência anterior de que $a \rightarrow b$ nos remete à mesma dificuldade sobre a possibilidade de converter a ocorrência de uma contradição no registro linguístico de uma determinada construção matemática mental em uma prova de uma proposição arbitrária.

Ao apresentar uma interpretação para a lógica intuicionista em termos de um cálculo de problemas, Kolmogorov reviu sua posição anterior e concluiu que o *EFQ* deveria, afinal, ser admitido na lógica intuicionista. Seu argumento consiste numa análise do significado da fórmula à luz de sua interpretação: "Com relação ao problema 4.1 em

---

[82] "The case is conceivable that after the statement $a \rightarrow b$ has been proved in the sense specified, it turns out that b is always correct. Once accepted, the formula $a \rightarrow b$ then has to remain correct; that is, we must attribute a meaning to the sign $\rightarrow$ such that $a \rightarrow b$ still holds. The same can be remarked in the case where it later turns out that a is always false." (Tradução nossa, com modificações)

[83] Trecho de carta enviada por Johansson a Heyting datada de 23 de setembro de 1935 traduzido para o inglês em VAN ATTEN, 2017. "You say that when $a \rightarrow b$ has been proved, and later $\neg a$ is proved, then $a \rightarrow b$ should remain correct. Indeed; but $\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ means that when $\neg a$ has been proved, b at once becomes derivable from a, even when this had not been proved before." (Tradução nossa)

particular: Tão logo $\neg a$ é solucionado, então a solução de a é impossível e o problema $a \rightarrow b$ é sem conteúdo."[84] (KOLMOGOROV, 1932, p. 331).

A essa interpretação, acrescenta-se a sua estipulação anterior de que "[...] a prova de que um problema é sem conteúdo será sempre considerada como sua solução."[85](KOLMOGOROV, 1932, p. 329). Assim, Kolmogorov admite o *EFQ* por considerá-lo um problema sem conteúdo para o qual, provavelmente, não haveria uma construção matemática correspondente. O problema é que essa justificativa sustenta-se em uma convenção (VAN DALEN, 2004, p. 254) para a qual não é oferecido nenhum argumento substancial, sendo, portanto, insatisfatória do ponto de vista brouweriano já que contraria o critério estabelecido por Brouwer para se reconhecer uma inferência como válida, que seria a existência, ao menos em princípio, da construção mental correspondente à transformação linguística representada pela inferência. Além disso, vale ressaltar também que uma convenção, por mais razoável que seja, dificilmente se encaixaria na concepção descritiva da lógica apresentada por Brouwer.

Provavelmente motivado pelos questionamentos de Johansson, Heyting (1971, p. 106) tentou defender o *EFQ*, que na sua exposição é designado como o axioma X, apresentando justamente uma espécie de construção que o validaria:

> O axioma X pode não parecer intuitivamente claro. Na realidade, ele contribui para a precisão da definição da implicação. Você se lembra que $p \rightarrow q$ pode ser asserido se, e somente se, nós possuímos uma construção que, conectada à construção p, provaria q. Agora suponha que $\neg p$, isto é, que nós deduzimos uma contradição da suposição que p foi realizada. Então, num certo sentido, esta pode ser considerada uma construção, que, conectada a uma prova de p (que não pode existir) leva a uma prova de q. Eu interpretarei a implicação neste sentido mais amplo.[86]

---

[84] "Regarding Problem 4.1 in particular: As soon as $\neg a$ is solved, then the solution of a is impossible and the problem $a \rightarrow b$ is without content." (Tradução nossa)

[85] "[…] the proof that a problem is without content will always be considered as its solution." (Tradução nossa)

[86] "Axiom X may not seem intuitively clear. As a matter of fact, it adds to the precision of the definition of implication. You remember that $p \rightarrow q$ can be asserted if and only if we possess a construction which, joined to the construction p, would prove q. Now suppose that $\vdash \neg p$, that is, we have deduced a contradiction from the supposition that p were carried out. Then, in a sense, this can be considered as a construction, which, joined to a proof of p (which cannot exist) leads to a proof of q. I shall interpret the implication in this wider sense." (Tradução nossa)

Aqui temos um claro esforço de justificar o *EFQ* por meio de uma construção, o que estaria mais diretamente em acordo com a concepção de lógica de Brouwer, porém, pode-se perceber uma certa dificuldade nesse argumento, pois a construção que transformaria qualquer prova de p em uma prova de q seria, em certo sentido, a construção $\neg p$ que, como explica Heyting, significa que a suposição de p leva a uma contradição. Mas então, como uma construção que juntamente com uma hipotética construção de p levaria originalmente a uma contradição, levaria na verdade à construção de um q qualquer? Heyting não parece ter uma resposta mais adequada para essa pergunta.

Uma nova tentativa de justificar a validade do *EFQ* do ponto de vista intuicionista foi realizada tomando por base a chamada interpretação BHK em sua formulação final. Como mostram Troelstra e D. van Dalen (1988, p. 10), para se validar o *EFQ*, basta existir uma construção que transforma qualquer prova de uma contradição $\perp$, numa prova de uma proposição B qualquer. Como é impossível provar uma contradição, a validade do *EFQ* é estabelecida por vacuidade.

Assim, de acordo com a interpretação BHK contemporânea, o *EFQ* é justificado porque estabelece uma promessa de construção que se mantém válida por não precisar ser cumprida já que não é possível provar uma contradição e, assim, satisfazer a condição colocada pelo *EFQ* (VAN DALEN, 2004, p. 254-255). Entretanto, uma promessa que se sustenta justamente por não precisar ser cumprida, não é propriamente um método de construção que o sujeito empregaria em suas construções mentais como Brouwer exigia.

Um outro ponto apontado em direta conexão com a interpretação BHK é que assumir o *EFQ* como axioma seria uma forma de mostrar a consistência do sistema e da matemática erigida sobre ele. A ideia de que a função desse princípio num sistema formal de lógica intuicionista é tornar clara a importância de se evitar as contradições na matemática não me parece estar de acordo com o que Brouwer escreveu a respeito.

Eram os formalistas que atribuíam importância fundamental a necessidade de se evitar as contradições e não Brouwer, que confiava na própria ideia da matemática como uma construção mental a partir da intuição básica do tempo como aquilo que bloquearia o aparecimento de contradições.

Assim pode-se concluir que, além de argumentos propriamente brouwerianos contra a confiabilidade do *EFQ* e, consequentemente, contra a sua validade como um dos teoremas da lógica de Brouwer, todas as tentativas de justificar o referido princípio na lógica intuicionista são insuficientes e incorretas de acordo com a concepção de lógica de Brouwer.

Consequentemente, somos levados a concluir que, a despeito do amplo reconhecimento da lógica intuicionista desenvolvida por Heyting como uma formalização adequada das ideias de Brouwer sobre quais princípios lógicos são confiáveis do seu ponto de vista construtivista sobre a matemática, esse sistema formal não pode ser considerado adequado como formalização fiel da concepção de lógica de Brouwer.

Capítulo III:

Um sistema formal mais adequado para a "lógica de Brouwer"

Tendo em vista as dificuldades mostradas quanto à identificação da lógica intuicionista como uma formalização parcial adequada da lógica proposicional de Brouwer devido ao problema representado pela inclusão do *EFQ* como axioma desse sistema, qual sistema formal poderia ser, então, uma formalização parcial mais adequada da concepção de lógica de Brouwer? A possibilidade inicialmente mais plausível parece ser a lógica minimal, que foi proposta por Johansson (1937) precisamente com o objetivo de desenvolver um sistema formal intuicionista no qual o *EFQ* não é admitido como axioma nem pode ser demonstrado como teorema.

1. A lógica minimal com símbolo de negação primitivo

As investigações que levaram I. Johansson a elaborar a lógica minimal foram inicialmente motivadas por seus questionamentos quanto à validade do *EFQ*, que foram expressos pela primeira vez em cartas que ele enviou a Heyting entre agosto de 1935 e janeiro de 1936.[87]

A motivação inicial de Johansson para desenvolver a lógica minimal não parece ter qualquer relação direta com as ideias de Brouwer, que ele só teria sido capaz de entender minimamente após a o surgimento do sistema formal de Heyting.

Como ele mesmo indica em carta dirigida a Heyting, sua dificuldade em aceitar o *EFQ* como válido está mais diretamente relacionada com a necessidade que ele sentia de se trabalhar com uma interpretação mais estrita para a implicação:

[87] Essas cartas, infelizmente, ainda não foram publicadas em sua integralidade. Em nosso estudo do desenvolvimento da lógica minimal recorremos à tradução de dois pequenos trechos apresentada em VAN ATTEN, 2017 (documento eletrônico) e no estudo de VAN DER MOLEN, 2016, que apresenta resumos do conteúdo dessas cartas.

> O fato de eu não estar disposto a aceitar [o axioma] 4.1, no fim das contas, está simplesmente baseada na circunstância de que eu prefiro trabalhar com uma implicação mais estrita. Minha lógica minimal mostra, contudo, que uma implicação mais estrita realmente é possível.[88] (JOHANSSON apud VAN ATTEN, 2017)

Essa motivação inicial também pode ser percebida na introdução do artigo, onde vemos que Johansson tinha ressalvas quanto à aceitação da fórmula $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$ como axioma de um sistema formal como a lógica intuicionista, pois ela está fortemente ligada ao modo como a implicação é interpretada na lógica clássica, na qual uma fórmula $A \rightarrow B$ recebe o valor de verdade verdadeiro quando, entre outros casos, o antecedente A recebe o valor de verdade falso, o que, segundo ele, representa "uma extensão não muito clara do conceito de consequência" (JOHANSSON, 1937, p. 119)

Considerar uma implicação como verdadeira quando seu antecedente é verdadeiro foi algo que Heyting preservou na sua lógica intuicionista.

Sua rejeição do *EFQ* não se limitaria, portanto, apenas ao âmbito da lógica intuicionista, mas a qualquer lógica que valide esse princípio seja assumindo-o como axioma, como ocorre na lógica intuicionista, ou seja por ter axiomas e regras de inferência que permitam a sua demonstração como teorema, como ocorre na lógica clássica. Ambas as situações mostrariam que existe nessas lógicas uma certa inadequação no entendimento das noções de implicação e consequência lógica nesses sistemas, que, por conta do teorema da dedução, tornam-se bastante próximas.

Quanto a delimitação do sistema formal, Johansson (1937, p. 120) explica que seu cálculo minimal difere da lógica intuicionista de Heyting, no que concerne aos axiomas aceitos no sistema, apenas pela ausência do axioma 4.1, a fórmula

$$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b),$$

que representa precisamente o *EFQ*.

[88] "My being unwilling to accept 4.1 is in the end simply based on the circumstance that I prefer to work with a more strict implication. My Minimal Logic shows, however, that a more strict implication really is possible." (Tradução nossa)

Sendo assim, o sistema formal de lógica minimal contém os seguintes axiomas:

2.1. $a \rightarrow (a \wedge a)$

2.11. $(a \wedge b) \rightarrow (b \wedge a)$

2.12. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow (b \wedge c))$

2.13. $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

2.14. $b \rightarrow (a \rightarrow b)$

2.15. $(a \wedge (a \rightarrow b)) \rightarrow b$

3.1. $a \rightarrow (a \vee b)$

3.11. $(a \vee b) \rightarrow (b \vee a)$

3.12. $((a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)$

4.11. $((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b)) \rightarrow \neg a$

E, além dos axiomas, as mesmas regras de operação do sistema de Heyting:

Se A e B são fórmulas corretas, então $A \wedge B$ é uma fórmula correta.

Se A e $A \rightarrow B$ são fórmulas corretas, então B é uma fórmula correta.

Após apresentar seu sistema, Johansson faz uma comparação detalhada com o sistema de Heyting e observa que todos os teoremas positivos da lógica intuicionista, isto é, aqueles teoremas que não contêm o símbolo de negação em sua formulação, são preservados na lógica minimal e que só encontramos diferenças entre os sistemas no que diz respeito às formulas que envolvam a negação, pois agora temos apenas um axioma envolvendo esse conectivo e não é mais possível derivar como teoremas quaisquer fórmulas que se seguiam do axioma 4.1.

Partindo do axioma 4.11 como único axioma da negação e dos demais axiomas apresentados originalmente por Heyting, Johansson apresenta os teoremas que podem ser derivados em seu cálculo minimal, indicando de forma resumida os principais passos de suas provas caso esses axiomas não tenham uma prova similar àquela que possuem no sistema intuicionista.

Alguns desses teoremas são destacados por meio da inclusão de um ou dois símbolos * após o seu número indicador porque constituem versões enfraquecidas de teoremas que eram demonstráveis, no sistema de Heyting, a partir do axioma 4.1 e que não podem ser demonstrados na lógica minimal:

4.4 * $(a \wedge \neg a) \rightarrow \neg b$

4.41* $((a \wedge \neg a) \vee b) \rightarrow \neg\neg b$

4.42 * $((a \vee b) \wedge \neg a) \rightarrow \neg\neg b$

4.42 ** $((a \vee \neg b) \wedge \neg a) \rightarrow \neg b$

4.46* $(\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow \neg\neg b)$

4.46 ** $(\neg a \vee \neg b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b)$

4.47* $(a \vee b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg\neg b)$

4.47** $(a \vee \neg b) \rightarrow (\neg a \rightarrow \neg b)$

Após essa reconstrução da seção sobre a negação, Johansson conclui que dos teoremas do sistema de Heyting, são indemonstráveis em seu cálculo as seguintes fórmulas:

4.1 $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$

4.4 $(a \wedge \neg a) \rightarrow b$

4.41 $((a \wedge \neg a) \vee b) \rightarrow b$

4.42 $((a \vee b) \wedge \neg a) \rightarrow b$

4.45 $(b \vee \neg b) \rightarrow (\neg\neg b \rightarrow b)$

4.46 $(\neg a \vee b) \rightarrow (a \rightarrow b)$

4.47 $(a \vee b) \rightarrow (\neg a \rightarrow b)$

4.71 $(a \rightarrow (b \vee \neg c)) \rightarrow ((a \wedge c) \rightarrow b)$

4.81 $\neg\neg(\neg\neg a \rightarrow a)$

A impossibilidade de demonstrar as fórmulas 4.1 e 4.4 representa o cumprimento do objetivo que se tinha em vista ao estabelecer esse sistema: não aceitar o *EFQ* como válido seja como axioma, seja como teorema derivado a partir de outros axiomas e teoremas.

No entanto, a indemonstrabilidade da fórmula 4.41 do sistema de Heyting representa um resultado insatisfatório, pois está em desacordo com a propriedade da disjunção, uma propriedade metateórica do sistema de lógica intuicionista de Heyting que Gödel (1932, p. 66) enuncia sem apresentar uma prova que, por sua vez, foi apresentada alguns anos depois por Gentzen (1935, p. 106) a partir de seu trabalho com os sistemas de dedução natural e cálculo de sequentes e que, de fato, parece representar um ponto relevante da concepção intuicionista da disjunção.

Essa propriedade estabelece que sempre que temos um teorema com a forma A ∨ B também A ou B deve ser um teorema.

Johansson observa que a possibilidade mais imediatamente concebível para solucionar esse problema, que consistiria em aceitar a fórmula 4.41 como axioma, não deveria ser aplicada porque isso tornaria possível demonstrar as fórmulas 4.1 e 4.4 que se queria rejeitar.

Assim, a saída encontrada por Johansson foi propor o seguinte esquema de inferência como admissível na lógica minimal:

$$\frac{\text{Se } \vdash b \lor (a \land \neg a)}{\text{então } \vdash b}$$

Johansson observa que esse esquema não é parte do sistema, mas sim que ele expressa uma propriedade do sistema para a qual ele, inclusive, posteriormente, apresenta uma prova a partir de considerações sobre o sistema.

A partir desse esquema de inferência, ele deriva outros esquemas de inferência similares para fórmulas que, apesar de também indemonstráveis na lógica minimal, seriam corretas do ponto de vista intuicionista:

$$\frac{\text{Se } \vdash (a \lor b) \land \neg a}{\text{então } \vdash b}$$

$$\frac{\text{Se } \vdash (b \lor \neg b) \land \neg\neg b}{\text{então } \vdash b}$$

$$\frac{\text{Se } \vdash (\neg a \lor b) \land a}{\text{então } \vdash b}$$

$$\frac{\text{Se } \vdash (a \to (b \lor \neg c) \land (a \land c)}{\text{então } \vdash b}$$

Pode-se concluir, portanto, que mesmo que as motivações originais de Johansson não tenham sido essencialmente ligadas à concepção de lógica de Brouwer, o sistema formal da lógica minimal cumpre o papel de fornecer uma formalização parcial mais adequada para a lógica proposicional de Brouwer do que o sistema de lógica intuicionista de Heyting ao remover deste um axioma que não tem justificação do ponto de vista sustentado por Brouwer.

Vale ressaltar também que Johansson empregou o método sugerido por nós para se chegar à formalização do fragmento da lógica proposicional de Brouwer que representa as inferências intuicionisticamente válidas, pois ele, num primeiro momento, tomou um sistema formal já desenvolvido anteriormente, o sistema de Heyting, herdando imediatamente desse sistema todos os seus avanços no que diz respeito a exclusão de proposições e inferências inválidas do ponto de vista de Brouwer, especialmente aquelas para as quais foram apresentados contraexemplos fracos, e então rejeitou um de seus axiomas, que não se encaixava na concepção de lógica.

A seguir, ele avaliou as consequências da rejeição do axioma 4.1, isto é, quais fórmulas continuavam sendo teoremas por suas provas não dependerem essencialmente desse axioma e quais se tornaram indemonstráveis. Ao observar que entre as fórmulas indemonstráveis havia algumas que seriam legitimas quando avaliadas sob a perspectiva intuicionista, mas que não poderiam ser aceitas como axiomas pela possibilidade de tornarem demonstráveis certas fórmulas reconhecidas como indesejáveis, ele aplicou sua proposta de apresentar esquemas de inferência correspondentes num certo sentido correspondentes às fórmulas mencionadas acima.

Visto da perspectiva contemporânea, Johansson introduziu na sua lógica minimal, de forma até então inovadora, a ideia de regras admissíveis, que faria sua entrada de forma definitiva nas investigações sobre a lógica somente com o trabalho de Lorenzen (1955).

Como podemos avaliar os esquemas de inferência apresentados por Johansson a partir de uma perspectiva brouweriana? Mesmo que elas não sejam parte do sistema formal de lógica minimal, ao serem a expressão de propriedades demonstráveis desse sistema formal, esses esquemas de inferência sugerem que este cumpre, ainda que de maneira indireta, a exigência original de Brouwer de descrever determinadas regularidades encontradas numa linguagem que poderia ser empregada para se registrar as atividades mentais do sujeito criador e, assim, podem se encaixar na concepção de lógica de Brouwer.

Dessa maneira, Johansson conseguiu propor um sistema formal, constituído por um conjunto de axiomas independentes que seriam considerados válidos de acordo com o critério de preservação de construtibilidade apresentado por Brouwer e determinadas regras de operação, por meio do qual, seria possível representar, de forma direta ou indireta, todos os teoremas também válidos de acordo com esse critério.

2. A lógica de Kolmogorov como parte da lógica minimal

Como foi mostrado anteriormente, um dos primeiros trabalhos onde se apresentou uma proposta de formalização para a lógica de Brouwer foi realizado por Kolmogorov, onde ele explicitamente rejeitou o *EFQ* como axioma do sistema.

Embora possa ser visto como uma formalização incompleta da lógica intuicionista, uma abordagem mais adequada é, como demonstra Plisko (1988, p. 104-105), considerar o sistema formal apresentado por Kolmogorov em 1925 como a “parte implicativa-negativa do cálculo minimal”, isto é, como um sistema que produz exatamente os mesmos resultados que a lógica minimal de Johansson no que diz respeito a fórmulas que envolvam somente os conectivos $\rightarrow$ e $\neg$.

Esse fato justifica o reconhecimento da lógica proposicional de Kolmogorov como uma antecipação da lógica proposicional minimal que, por sua vez, pode ser entendida como uma simples extensão do sistema de Kolmogorov mediante a inclusão de axiomas para os símbolos $\wedge$ e $\vee$.

Num certo sentido, essa extensão já fora prevista pelo próprio Kolmogorov (1925, p. 421, nota 10) que, ao discutir como seria a expressão formal do princípio do terceiro excluído por meio de um conectivo que representasse a ideia de disjunção, indica que isso ocorreria por meio da fórmula

$$A \vee \neg A,$$

cuja equivalência em relação ao axioma 6 do sistema de Hilbert (1923), representado pela fórmula

$$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B),$$

poderia ser demonstrada a partir dos axiomas para a implicação e dos seguintes axiomas para a disjunção, extraídos da obra de Ackermann (1924):

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B) \to C))$

Mesmo que Kolmogorov não tenha tratado de como estender seu sistema formal mediante a inclusão de axiomas para o símbolo $\wedge$ da conjunção, podemos tomar os próprios axiomas do sistema de Johansson como uma realização adequada de tal extensão.

3. A lógica minimal com símbolo do absurdo primitivo

Johansson dedica uma seção do seu artigo ao estudo de como o símbolo$\perp$, que representaria formalmente a noção informal de contradição, poderia ser introduzido no desenvolvimento da lógica minimal.

Inicialmente analisa como se definiria o símbolo $\perp$ a partir dos símbolos $\wedge$ e$\neg$, através da definição

$$\perp =_{\text{def}} \neg a \wedge \neg\neg a$$

Mais relevante, no entanto, é a possibilidade de admitir ⊥ como símbolo primitivo e definir a negação nos seguintes termos:

$$\neg a =_{\text{def}} a \rightarrow \perp$$

Ao introduzir essa definição, a lógica minimal poderia ser desenvolvida sem assumir o axioma 4.11, que seria demonstrável a partir dos demais axiomas, o que explica a designação "lógica intuicionista positiva" de uso corrente nos últimos anos.

4. Sistema de dedução natural para a lógica minimal

Além de indicar detalhadamente como seria possível obter um sistema axiomático para a lógica minimal proposicional através da rejeição do axioma 4.1 do sistema de Heyting, a fórmula

$$\neg a \rightarrow (a \rightarrow b),$$

Johansson também indicou como seria desenvolver um sistema de dedução natural para a lógica minimal a partir do trabalho de Gentzen (1935). De forma bastante similar ao que foi feito no sistema de tipo axiomático, basta rejeitar uma das duas versões apresentadas para a regra de inferência de eliminação da negação:

$$\frac{\perp}{A}$$

Essa regra de inferência representa de uma maneira ainda mais evidente o *EFQ*, pois aqui temos a clara indicação de que na presença de uma contradição, pode-se derivar qualquer proposição, algo que, como mostramos anteriormente, não parece corresponder a qualquer método geral legítimo de construção matemática.

O sistema de dedução natural resultante após essa alteração, chamado por Johansson (1937, p. 133) de NM (iniciais de natural minimal), conteria as seguintes regras de inferência:

$$\mathrm{I}\wedge \quad \frac{A \qquad B}{A \wedge B}$$

$$\text{E}\land \quad \frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B}$$

$$\text{I}\lor \quad \frac{A}{A \lor B} \qquad \frac{B}{A \lor B}$$

$$\text{E}\lor \quad \frac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A] \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ C\end{matrix}}{C}$$

$$\text{I}\to \quad \frac{\begin{matrix}[A] \\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

$$\text{E}\to \quad \frac{A \to B \qquad A}{B}$$

$$\text{I}\neg \quad \frac{\begin{matrix}[A] \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}$$

$$\text{E}\neg \quad \frac{A \quad \neg A}{\bot}$$

Esse sistema, além da vantagem de fornecer uma expressão formal mais próxima do modo como deduções são efetuadas intuitivamente, também é vantajoso por apresentar um tratamento da noção de negação bem próxima àquele desenvolvido por Brouwer.

As regras de introdução e eliminação da negação (I¬ e E¬), ao se tornarem, respectivamente, casos especiais das regras de introdução e eliminação da implicação (I→ e E→), aproximam-se bastante das interpretações construtivas da negação e do princípio da não-contradição apresentadas por Brouwer, pois a derivação de uma ocorrência desse símbolo a partir de uma proposição A que representaria uma construção pretendida expressa justamente a impossibilidade de prosseguir com a construção pretendida e o reconhecimento dessa impossibilidade constitui uma prova da proposição ¬A, que afirma justamente a impossibilidade de concluir a construção referida por A enquanto a ocorrência simultânea de proposições contraditórias é vista como algo impossível, formalmente expresso pela derivação do símbolo $\perp$, que indicaria a necessidade de interrupção do processo construtivo que vinha sendo desenvolvido até aquele momento.

5. A interpretação pretendida

Assim como foi feito para a lógica intuicionista por meio da interpretação BHK, seria interessante fornecer uma explicação similar do significado apresentado pelos símbolos presentes no sistema formal de lógica minimal.

Pelas observações feitas por Johansson, especialmente sua constatação de que os teoremas da lógica intuicionista que não contenham o símbolo de negação em sua formulação são igualmente demonstráveis na lógica minimal e sua tentativa de preservar a propriedade da disjunção para esse sistema, é bastante plausível considerar que as cláusulas relativas aos conectivos $\wedge$ e $\vee$ não precisariam ser alteradas.

(H1) Uma prova de $A \wedge B$ é dada apresentando-se uma prova de A e uma prova de B.

(H2) Uma prova de $A \vee B$ é dada apresentando-se uma prova de A ou uma prova de B (mais a estipulação de que queremos considerar a prova apresentada como evidência para $A \vee B$).

O mesmo não se aplica à implicação, já que, como mostrado acima, nas cartas enviadas a Heyting, Johansson enfatiza que sua interpretação da implicação é mais estrita que aquela empregada por seu interlocutor. No entanto, como poderíamos expressar esse sentido mais estrito de implicação em termos brouwerianos?

Johansson (1937, p. 131) discute brevemente como o seu uso do símbolo do absurdo se assemelha à interpretação do sistema formal de lógica intuicionista estabelecido por Heyting em termos de um cálculo de problemas sugerida por Kolmogorov (1932).

Ele propõe que uma interpretação similar em termos de uma teoria de problemas para a lógica minimal poderia ser obtida mediante duas modificações na interpretação original de Kolmogorov.

A primeira consiste em justamente não mais reconhecer o problema "contanto que o problema ⊥ seja solucionado, obter a solução de um problema *b* qualquer", que Kolmogorov toma como solucionado a partir da estipulação de que tal problema é sem conteúdo e a segunda é apresentar um significado mais estrito para a implicação.

Dadas as considerações de Johansson sobre a implicação, acreditamos que uma possibilidade para a definição do significado da implicação numa fórmula A → B seria impor uma restrição à cláusula da implicação ao exigir a existência de uma construção que efetivamente transformaria qualquer prova de A em uma prova de B, algo que não ocorre com o *EFQ*, que apenas promete fazer tal transformação quando o antecedente fosse ⊥, mas que nunca efetivamente seria colocado em prática.

Assim a cláusula poderia ser reescrita da seguinte forma:

> (H3) Uma prova de A → B é uma construção que nos permite *efetivamente* transformar qualquer prova de A em uma prova de B.

Outra possibilidade que vislumbramos seria impor uma restrição à cláusula da implicação ao estabelecer, seguindo a interpretação (β) de M. van Atten (2009) para o tratamento da implicação fornecido por Brouwer (1907), que a transformação de qualquer prova de A em uma prova de B deve tornar possível obter as condições de construção de B a partir das condições de construção de A, algo que não parece ocorrer durante uma suposta aplicação do *EFQ* e, assim, a cláusula para a implicação poderia ser rescrita da seguinte forma:

> (H3) Uma prova de A → B é uma construção que nos permite transformar qualquer prova de A em uma prova de B, *contanto que nesse processo as*

condições de construção de B possam ser obtidas a partir das condições de construção de A.

Não nos encontramos em posição de sustentar que alguma dessas duas definições cumpre de formar totalmente adequada a função de estabelecer um significado mais estrito para a implicação do ponto de vista construtivo de Brouwer e, assim, deixaremos a interpretação pretendida para a implicação na lógica minimal como um problema em aberto, a ser investigado mais detidamente em outra oportunidade.

Quanto ao significado da negação, considerando que ela seja tratada como um símbolo definido a partir dos símbolos primitivos $\rightarrow$ e $\perp$, as mesmas restrições aplicadas à cláusula para a implicação deveriam ser aplicadas à sua respectiva cláusula, que poderia então ser reescrita, seguindo a primeira possibilidade apresentada por nós, como:

> (H4) O absurdo $\perp$ (contradição) não tem prova; uma prova de $\neg$A é uma construção que transforma efetivamente qualquer prova hipotética de A em uma prova de uma contradição.

Ou então, seguindo a segunda possibilidade apresentada por nós, a cláusula poderia ser reescrita da seguinte maneira:

> (H4) O absurdo $\perp$ (contradição) não tem prova; uma prova de $\neg$A é uma construção que transforma efetivamente qualquer prova hipotética de A em uma prova de uma contradição, *contanto que nesse processo as condições de construção para uma suposta prova de $\perp$ possam ser obtidas a partir das condições de construção de A.*

Nesse último caso, as condições para a suposta construção de $\perp$, que obviamente não pode existir de fato, seriam as condições para a execução de algum encaixe impossível, ou seja, condições inconsistentes.

Considerações finais

No capítulo I, procuramos identificar e explicitar no interior das obras de Brouwer, determinadas diretrizes para o desenvolvimento de um sistema formal que correspondesse da melhor forma possível à concepção de lógica de Brouwer, embora reconhecendo a impossibilidade de uma identificação perfeita entre suas ideias e qualquer proposta de formalização.

No capítulo II, após considerarmos o desenvolvimento histórico da lógica intuicionista, revelamos que a pretensão de tomar esse sistema formal como uma descrição formal adequada da concepção de lógica de Brouwer é infundada por conta da admissão do *EFQ* como um dos axiomas do sistema, que não se encaixa na concepção construtivista e descritivista da lógica apresentada por Brouwer.

Essas considerações forneceram razões para, no capítulo III, voltarmos nossa atenção para a lógica minimal uma vez que este sistema formal foi desenvolvido por Ingebrigt Johansson justamente com o objetivo principal de excluir o *EFQ* da lógica intuicionista.

Após considerarmos com atenção determinados aspectos da lógica minimal, fomos levados à conclusão de que ela é, em comparação com a lógica intuicionista desenvolvida por Arend Heyting, uma descrição mais fiel e, portanto, mais adequada da concepção de lógica de Brouwer no âmbito da lógica proposicional.

Acreditamos, contudo, que nosso trabalho apresenta razões suficientes para se reconsiderar a história estabelecida no que diz respeito a qual sistema formal representa uma imagem formal mais adequada da concepção de lógica sustentada por Brouwer.

Não pretendemos, no entanto, desvalorizar quaisquer outros méritos que a lógica intuicionista tenha apresentado desde o seu surgimento, sobretudo porque reconhecemos a sua importância para o desenvolvimento de uma enorme gama de teorias matemáticas geralmente descritas como construtivistas ao longo do século XX e para investigações que ainda estão em curso.[89]

Antes de encerrarmos, julgamos que seria interessante considerar mais atentamente o significado da nossa crítica à lógica intuicionista, que tem um significado ligeiramente distinto da crítica apresentada por Brouwer contra a lógica clássica.

A crítica de Brouwer consiste, num primeiro momento, em apontar que determinadas inferências e fórmulas consideradas válidas no interior da lógica clássica, não permanecem válidas quando as interpretamos de acordo com o critério de preservação de construtibilidade exigido por Brouwer que surgiu como uma forma mais precisa para se entender a natureza descritiva da lógica e seu papel meramente auxiliar no desenvolvimento da matemática. Tendo em vista esse critério, argumenta-se que a lógica clássica descreve incorretamente o conjunto de inferências e fórmulas válidas do ponto de vista intuicionista na medida em que ela aceita como válidas, em sua teoria, inferências e fórmulas que não são intuicionisticamente confiáveis.

Partindo dessa crítica de natureza descritiva, Brouwer iniciou uma crítica que tinha uma natureza propriamente normativa, pois ele passou a sustentar a necessidade de revisar os procedimentos adotados pelos matemáticos em suas demonstrações uma vez que eles não deveriam fazer uso irrestrito de determinadas inferências, especialmente aquelas que se baseiam no princípio do terceiro excluído, que não pudessem ser justificadas do ponto de vista intuicionista e que poderiam conduzir a resultados que possivelmente não corresponderiam a qualquer demonstração no sentido mais rigoroso exigido pelo intuicionismo: uma construção mental a partir da intuição fundamental da matemática.

Podemos reconhecer que a lógica intuicionista cumpriu satisfatoriamente o papel de apresentar em linguagem formal e de forma sistematizada o conjunto de inferências e

---

89 Cf. TROELSTRA; VAN DALEN, 1988, para uma apresentação de diferentes correntes construtivas em matemática.

fórmulas que não foram submetidos diretamente a essa crítica normativa de Brouwer, onde ele enfatizava a necessidade de não se empregar irrestritamente determinadas formas de inferência que eram muito comumente utilizados nos trabalhos matemáticos com total confiança de que por meio delas seria possível descobrir novas verdades matemáticas, pois poderia haver um hiato entre aquilo que é supostamente demonstrado formalmente por meio dessas inferências e aquilo que pode ser efetivamente construído a partir das noções fundamentais fornecidas pela intuição fundamental da matemática, o que explicaria sua rápida aceitação como representação formal da concepção de lógica de Brouwer.

Contrariamente ao que fez com relação ao princípio do terceiro excluído e outros princípios lógicos, Brouwer nunca apresentou um argumento direto contra a confiabilidade do *EFQ*, possivelmente porque este não é efetivamente utilizado pelos matemáticos como modo de inferência que conduz a novas verdades matemáticas.[90]

Um argumento com a forma lógica do *EFQ*, apesar de válido, do ponto de vista clássico, jamais seria correto no sentido de conter premissas simultaneamente verdadeiras e assim qualquer conclusão alcançada por meio dele poderia ser colocada sob suspeita, já que não poderíamos justificá-la como consequência necessária de proposições que reconhecemos como verdadeiras, que é justamente o cerne da ideia de justificar um resultado por meio de sua dedução a partir de verdades anteriormente aceitas ou estabelecidas por demonstração.

Nossa crítica da lógica intuicionista por endossar o *EFQ* como válido ao admiti-lo como axioma do seu sistema formal não possui esse aspecto normativo tão marcante como na crítica de Brouwer à lógica clássica, pois não estamos tentando convencer um matemático intuicionista a parar de utilizar um modo de inferência que ele usava constantemente em suas investigações matemáticas já que, na prática, esse modo de inferência raramente (ou mesmo nunca) é de fato utilizado por eles.

---

90 Essa constatação é apresentada por VAN ATTEN, 2004, p. 25 e TENNANT, 1994, p. 127.

Tendo por base a concepção brouweriana de que a lógica é meramente uma descrição sistemática de determinados padrões de inferências encontrados na linguagem que acompanha a matemática construída mentalmente e a consequente invalidade do *EFQ* dentro dessa concepção, M. van Atten (2009, p. 123) propõe que se pode concluir que a "lógica de Brouwer" seria, portanto, uma lógica da relevância, já que as inferências e fórmulas têm sua validade avaliada por referência a um critério exterior à sua simples forma lógica.

Sua conclusão nos parece pertinente, especialmente porque, de fato, as críticas que alguns dos defensores dessa abordagem dirigem contra a lógica clássica geralmente apontam que esta estaria tomando por válidas determinadas inferências e fórmulas que não seriam consideradas como tal intuitivamente devido à sua utilização da implicação material com sua interpretação vero-funcional, que não correspondente ao significado intuitivo que atribuímos à noção de implicação.

A crítica feita por determinados lógicos da relevância à lógica clássica é, tal como a nossa crítica à lógica intuicionista, primariamente motivada por um entendimento, compartilhado por Brouwer, de que os sistemas formais deveriam descrever corretamente o modo como as pessoas realizam seus raciocínios.[91]

Nossa investigação de qual sistema formal representa de forma mais adequada a concepção de lógica de Brouwer encontra-se, portanto, em consonância com outros importantes desenvolvimentos no ramo das lógicas não-clássicas, o que sugere a existência de um campo de investigação a ser melhor explorado: a interseção entre a concepção de lógica de Brouwer e a abordagem relevantista na lógica.

---

[91] Cf., por exemplo, ANDERSON; BELNAP, 1975, considerada a principal obra em defesa de uma abordagem relevantista para a lógica e também BURGESS, 2005 e TENNANT, 2005, para um contraste de posições opostas quanto a pertinência das críticas de lógicos da relevância ao emprego de determinadas inferências consideradas problemáticas na matemática.

Bibliografia

ACKERMANN, W. Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. *Mathematische Annalen*, v. 93, 1924. p. 1-36.

ANDERSON, A.R.; BELNAP, N.D. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. I. Princeton: Princeton University Press, 1975.

BARZIN, M.; ERRERA, A. Sur la logique de M. Brouwer. *Academie Royale de Belgique, Bulletins de la Classe des Science*, v. 13, n.1, 1927. p. 56-71.

BARZIN, M.; ERRERA, A. Sur la logique de M. Heyting. *L'Enseignement Mathématique*, v. 30, 1931. p. 248–250.

BARZIN, M.; ERRERA, A. Sur le principe du tiers exclu. *Archives de la Societé Belge de Philosophie*, v. 1, 1929. p. 3-26.

BECKER, O. Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene.*Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, v. 8,1927. p. 439–809.

BERNAYS, P. Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der 'Principia Mathematica'. *Mathematische Zeitschrift*, v. 25, 1926. p. 305–320.

BORWEIN, J. M. Brouwer-Heyting sequences converge. *Mathematical Intelligencer*, v. 20, 1998. p. 14-15.

BROUWER, L.E.J. Consciousness, Philosophy, and Mathematics. *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam 1948*, v. 3, p. 1235-1249.Reimpressoem: BROUWER, L.E.J. *Collected Works. Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975. p. 480-494.

BROUWER, L.E.J. Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism. *South African Journal of Science*, v. 49, p. 139-146,1952.Reimpressoem: BROUWER, L.E.J. *Collected Works. Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975. p.

BROUWER, L.E.J. On the Foundations of Mathematics (1907). In:_________. *Collected Works. Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 13-101. Original holandês.

BROUWER, L.E.J. Points and Spaces. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 6, 1954. p. 1–17.

BROUWER, L.E.J. The Unreliability of the Logical Principles (1908). In:_________. *Collected Works. Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975, p. 107-111. Original holandês.

BROUWER, L.E.J. *Collected Works. Vol. I: Philosophy and Foundations of Mathematics*. Edited by A. Heyting. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1975.

BROUWER, L.E.J. *Life, Art, and Mysticism* (1905). Translation by W. P. van Stigt. In: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 37, n. 3, 1996. p. 389-429. Original holandês.

BURGESS, J. P. No requirement of relevance. In: SHAPIRO, S. (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2005. Cap. 24, p. 727-750.

FRANCHELLA, M. Brouwer and Griss on Intuitionistic Negation. *Modern Logic*, v. 4, n. 3, Jul. 1994. p. 256-265.

FRANCHELLA, M. Heyting's Contribution to the Change in Research into the Foundations of Mathematics. *History and Philosophy of Logic*, v. 15, n. 2, 1994. p. 149-172.

FRANCHELLA, M. L. E. J. Brouwer: Toward Intuitionistic Logic. *Historia Mathematica*, v. 22, 1995. p. 304–322.

FREGE, G. *Conceitografia*: Uma linguagem formular do pensamento puro decalcada sobre a aritmética (1879). In: ALCOFORADO, P.; DUARTE, A.; WYLLIE,G. (eds.) *Os Primeiros Escritos Lógicos de Gottlob Frege*. Niterói: Instituto Raimundo Lúlio, 2012. p. 45-174. Original alemão.

FREUDENTHAL, H. Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln. *Compositio Mathematica*, v. 4, 1937. p. 112–116.

GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Edited by M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

GLIVENKO, V. On Some Points of the Logic of Mr. Brouwer (1929). In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. Cap. 22, p. 301-305. Original francês.

GLIVENKO, V. Sur la logique de M. Brouwer. *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, v. 14, p. 225–228.

GÖDEL, K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, v. 69, 1932. p. 65–66.

HAACK, S. *Filosofia das Lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

HESSELING, D. *Gnomes in the fog*: *The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920's*.Basel: Birkhäuser, 2003.

HEYTING, A. A propos d'un article de MM. Barzin et Errera. *L'Enseignement Mathématique*, v. 31, p. 121–122,1932.

HEYTING, A. *Intuitionism. An Introduction*. 3. ed. rev. Amsterdam: North-Holland, 1971.

HEYTING, A. On Intuitionistic Logic (1930A). In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. cap. 23, p. 306-310. Original francês.

HEYTING, A. The Formal Rules of Intuitionistic Logic (1930B). In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. cap. 24, p. 311-327. Original alemão.

HEYTING, A. The intuitionist foundations of mathematics (1931). In: BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. (eds.) *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 52-61. Original alemão.

HILBERT, D. On the foundations of logic and arithmetic (1904). In: VAN HEIJENOORT, J. (ed.) *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967. p. 129-138. Original alemão.

HILBERT, D. The New Grounding of Mathematics. First Report. (1922) In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. cap. 12, p. 198-214. Original alemão.

HILBERT, D. The Logical Foundations of Mathematics (1923). In: EWALD, W. B. (ed.) *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Vol. II. Oxford: Oxford University Press, 1996. p. 1134-1148. Original alemão.

HUNTER, G. *Metalogic*. Berkeley; Los Angeles: University of California Press, 1971.

KNEALE, W; KNEALE, M. *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1962.

KOLMOGOROV, A. On the Interpretation of Intuitionistic Logic (1932). In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. cap. 25, p. 328-334. Original alemão.

KOLMOGOROV, A. On the principle of excluded middle (1925). In: VAN HEIJENOORT, J. (ed.) *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic*, *1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967. p. 416-437. Original russo.

KUIPER, J. *Ideas and Explorations. Brouwer's Road to Intuitionism*. Tese (doutorado), Utrecht University. Quaestiones Infinitae vol. XLVI, 2004.

JOHANSSON, I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. *Compositio Mathematica*, v. 4, n. 1, p. 119-136, 1937.

LORENZEN, P. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer, 1955.

LUKASIEWICZ, J. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Second edition enlarged. Oxford: Clarendon Press, 1957.

LUKASIEWICZ, J. *Selected Works*. Edited by L. Borkowski. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970.

MANCOSU, P.;VAN STIGT, W. P. Intuitionistic Logic. In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998.

MANCOSU, P.;VAN STIGT, W. P. Intuitionistic Logic. In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. p. 275-285.

MARTIN-LÖF, P. Truth of a proposition, evidence of a judgment, validity of a proof. *Synthese*, v. 73, 1987.p. 407-420.

MARTIN-LÖF, P.A path from logic to metaphysics. *Atti del Congresso Nuovi Problemi della Logica e della Filosojia della Scienza*, Viareggio 8-13 gennaio 1990, vol. II,CLUEB, Bologna, 1991. p. 141-149.

NEGRI, S.; PLATO, J. V. *Structural Proof Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

PLACEK, T. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity. A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*. Kluwer: Dordrecht, 1999.

PLACEK, T. On Brouwer's Criticism of Classical Logic and Mathematics. *Logic and Logical Philosophy*, v. 5, 1997.p. 19–33.

PLISKO, V. E. The Kolmogorov calculus as a part of minimal calculus. *Russian Math. Surveys*, v. 43, n. 6, 1988. p. 95-110.

PLISKO, V. E. A correction: Russian Math. Surveys 43:6 (1988), 95-110. *Russian Math. Surveys*, v. 44, 1989.p. 232.

PRAWITZ, D. *Natural deduction*: A proof-theoretical study. Acta Universitatis Stockholmiensis, Stockholm studies in philosophy 3. Stockholm, Göteborg, Uppsala: Almqvist & Wicksell, 1965.

QUINE, W. V. O. Review: Ingebrigt Johansson. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. *Compositio Mathematica*, v. 4, n. 1, p. 119-136, 1937. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2, n. 01, 1937.

RAATIKAINEN, P. Conceptions of truth in intuitionism. *History and Philosophy of Logic*, v. 25, 2004.p. 131-145.

RUSSELL, B. *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

TENNANT, N. Natural Deduction and Sequent Calculus for Intuitionistic Relevant Logic. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 52, n. 3, Set. 1987.

TENNANT, N. Intuitionistic Mathematics Does Not Need *Ex Falso Quodlibet*. *Topoi*, v. 13, p. 127-133, 1994.

TENNANT, N. Relevance in reasoning. In: SHAPIRO, S. (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2005. Chapter 23, p. 696-726.

TROELSTRA, A. S. Logic in the writings of Brouwer and Heyting.In: ABRUSCI, V.; CASARI, E.; MUGNAI, M.(eds.) *Atti del Convegne Internazionale di Storia della Logica. San Gimignano, 4–8 dicembre 1982*. Bologna: CLUEB, 1983. p. 193-210.

TROELSTRA, A. S. On the Early History of Intuitionistic Logic. In: PETKOV, P. (ed.) *Mathematical Logic*. New York: Plenum Press, 1990. p. 3-17.

TROELSTRA, A. S.; SCHWICHTENBERG, H. *Basic Proof Theory*. 2. Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

TROELSTRA, A. S.; VAN DALEN, D. *Constructivism in Mathematics*. Vol. I. Amsterdam: North-Holland, 1988.

VAN ATTEN, M. Brouwer and the Hypothetical Judgement. Second Thoughts on John Kuiper's Ideas and Explorations. Brouwer's Road to Intuitionism. *Revue Internationale de Philosophie*, v. 58, n. 4, p. 501-516, 2004B.

VAN ATTEN, M. *On Brouwer*. Belmont: Wadsworth/Thomson Learning, 2004A.

VAN ATTEN, M. et al. (eds.) *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference*. Basel: Birkhäuser, 2008.

VAN ATTEN, M. On the hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic. In: GLYMOUR, C.; WANG, W.; WESTERSTAHL, D. (eds.) *Logic, Methodology, and Philosophy of Science: Proceedings of the Thirteenth International Congress*. London: King's College Publications, 2009. p. 122-136.

VAN ATTEN, M. The correspondence between Oskar Becker and Arend Heyting. In: PECKHAUS, V. (ed.) *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*. München: Wilhelm Fink, 2005.p. 119–142.

VAN ATTEN, M. The Development of Intuitionistic Logic. In: ZALTA,E. N. (ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition). Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/intuitionistic-logic-development/>. Acesso em 10 jan. 2018.

VAN DALEN, D. Another look at Brouwer's dissertation. In: VAN ATTEN et al. (ed.) *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007). The Cerisy Conference*. Basel: Birkhäuser, 2008, p. 3–20.

VAN DALEN, D. Brouwer: The Genesis of His Intuitionism. *Dialectica*, v. 32, 1978. p. 291-303.

VAN DALEN, D. Kolmogorov and Brouwer on constructive implication and the Ex Falso rule. *Russian Math. Surveys*, v. 59, n. 2, p. 247-257, 2004.

VAN DALEN, D. *L.E.J. Brouwer – Topologist, Intuitionist, Philosopher*: How Mathematics Is Rooted in Life. London: Springer-Verlag, 2013.

VAN DALEN, D. *Logic and Structure*. 4. ed. Berlin: Springer, 2004.

VAN DALEN, D. The Development of Brouwer's Intuitionism. In: HENDRICKS, V. F. et al. (eds.).*Proof Theory*. Amsterdam: Kluwer, 2000. p. 117-152

VAN DALEN, D. (ed.) *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*. London: Springer, 2011.

VAN DER MOLEN, Tim. The Johansson/Heyting letters and the birth of minimal logic. *ILLC Publications, Technical Notes* (X)*Series*,2016.

VAN STIGT, W. P. The Rejected Parts of Brouwer's Dissertation On the Foundations of Mathematics. *Historia Mathematica*, v. 6, 1979. p. 385-404.

VAN STIGT, W. P. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland, 1990.

VAN STIGT, W. P. Brouwer's Intuitionist Programme. In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. p. 1-22.

VAN STIGT, W. P. Introduction to *Life, Art, and Mysticism*. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. v. 37, n. 3, 1996. p. 381-388.

WAVRE, R. Y a-t-il une crise des mathématiques? A propos de la notion d'existence et d'une application suspecte du principe du tiers exclu. *Revue de Métaphysique et de Morale*, v. 31, n. 3, 1924. p. 435–470.

WAVRE, R. Logique formelle et logique empirique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, v. 33, n. 1, 1926. p. 65–75.

WEINSTEIN, S. The Intended Interpretation of Intuitionistic Logic. *Journal of Philosophical Logic*, v. 12, 1983.p. 261-270.

WEYL, H. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift*, v. 10, n. 1–2, 1921. p. 39–79.

WEYL, H. On the New Foundational Crisis of Mathematics. In: MANCOSU, P. (ed.) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press, 1998. Cap. 7, p. 86–118.

WHITEHEAD, A.; RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.