Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias

SALA DE AULA INVERTIDA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação e Docência.

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Diogo Alves de Faria Reis

Coorientadora: Dra. Teresinha Fumi Kawasaki

Belo Horizonte

2018

T629s
T

Tobias, Petrina Rúbria Nogueira Avelar, 1973-
Sala de aula invertida na educação matemática : uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade / Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias. - Belo Horizonte, 2018.
168 f., enc, il.

Dissertação - (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientador : Diogo Alves de Faria Reis.
Coorientadora: Teresinha Fumi Kawasaki.
Bibliografia : f. 134-140.
Anexos: f. 141-142.
Apêndices: f. 143-168.

1. Educação -- Teses. 2. Sala de Aula Invertida -- Teses. 3. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 4. Matemática -- Métodos de ensino -- Teses. 5. Tecnologia educacional -- Teses. 6. Inovações educacionais -- Teses. 7. Ensino auxiliado por computador -- Teses. 8. Razão e proporção -- Estudo e ensino -- Teses. 9. Prática de ensino -- Teses. 10. Ambiente de sala de aula -- Teses. 11. Belo Horizonte (MG) -- Educação -- Teses.
I. Título. II. Reis, Diogo Alves de Faria. III. Kawasaki, Teresinha Fumi, 1960-. IV. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 510.07

Catalogação da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sala de Aula Invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9.º ano no ensino de proporcionalidade

PETRINA RUBRIA NOGUEIRA AVELAR TOBIAS

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 23 de fevereiro de 2018, pela banca constituída pelos membros:

Prof(a). Diogo Alves de Faria Reis - Orientador
UFMG

Teles de Kaw

Prof(a). Teresinha Fumi Kawasaki
UFMG

G M Jorge

Prof(a). Gláucia Maria dos Santos Jorge
UFOP

Prof(a). Diva Souza Silva
UFU

Maria Cristina Costa Ferreira

Prof(a). Maria Cristina Costa Ferreira
ICEX/UFMG

Belo Horizonte, 23 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho aos meus filhos
Isabel, Lívia, Miguel e Pedro
e também a Ana Beatriz, Henrique e
Luiz Guilherme.

AGRADECIMENTOS

Minha mãe me ensinou que Deus enxerga a gente como um todo, e não devemos nos ater a um fato isoladamente e tentar compreendê-lo, pois o que acontece hoje está conectado a um plano maior. Nesse sentido, este momento só me leva a agradecer tanto às experiências do percurso que julguei boas quanto àquelas que não compreendi ainda, na certeza de que todas fazem parte de com contexto maior e são para meu aprendizado.

A Deus, agradeço por todas as pessoas e acontecimentos que fizeram parte desse processo.

Antes de tudo começar, três pessoas muitíssimo especiais acreditaram mais em mim do que eu mesma: Cirlene, minha querida "Cici"; Ângela, minha "Anja Jabi", e Simone. A vocês, meus sinceros agradecimentos pelo incentivo e pelo apoio psicológico e emocional. Cici, obrigada pela parceria em ajudar a construir o projeto origem desta pesquisa. Sem vocês não sei se teria ingressado neste mestrado. Obrigada, meninas!

A minha família, aos meus filhos, agradeço pela compreensão, pelos momentos em que eu precisei me dedicar mais aos estudos do que a vocês. À minha mãe – não sei como seria sem sua ajuda, seu cuidado para com os meninos e o apoio incondicional. Ao meu esposo, por me ensinar a ser paciente – não me esquecerei da forma como você me ajudou.

À escola em que esta pesquisa foi realizada, ao apoio da Vanessa, da Jaqueline, da Silvia, a todos os estudantes pesquisados, muito obrigada por tudo.

Aos colegas do mestrado, especialmente a Nilma, por todo carinho e apoio, inclusive no dia do exame de qualificação. Aos colegas da Educação Matemática: Adão, Cláudia, João e Paulo, nossas vidas se cruzaram e fazemos parte da história do outro. A Ana Cristina, "Pat", companheirona, parceira de viagens, de muitos risos e choros, de escritas e leituras. A todos vocês, muito obrigada pela partilha nesses 2 anos de convívio.

A todos os meus professores, inclusive aos do acadêmico, pelas contribuições tanto nas aulas, nos corredores da faculdade, quanto nos seminários: Samira, Jussara, Keli, Teresinha, Manuela, Maria Cristina, Airton, Wagner, Renata, Inês, Luiz Alberto, e também ao Marcelo, "o Queridinho", que mesmo longe nunca deixou de responder a um *e-mail* sequer, sempre disponível, indicando leituras e trocando ideias.

Aos professores que compuseram a banca de qualificação: Diva, Diogo, Gláucia, Maria Cristina, Teresinha e hoje compõem a banca final, agradeço pelas contribuições e também pela disponibilidade em colaborar para um melhor aproveitamento da nossa pesquisa.

Diogo e Teresinha, a vocês o meu agradecimento especial. Conviver com vocês foi uma experiência muito importante em minha vida, repleta de aprendizados. Só tenho a agradecer por todo conhecimento e dedicação partilhados comigo. Nesses dois anos vocês me surpreenderam frequentemente com ensinamentos, diálogos, sugestões, apoio, parceria e também puxões de orelha. Reconheço cada etapa do processo com sua devida importância. Teresinha, você não faz ideia de como a sua manifestação de apoio em relação à escrita daquele artigo, com aquele sorrisão, foi emocionante para mim, não sei como agradecer. Muitíssimo obrigada.

Diogo, meu Capitão, sou sua primeira orientanda e você, apesar de repetidas vezes dizer que ia enfartar comigo e minhas ideias, não enfartou. Graças a Deus! Pronto; agora você está preparado para seguir seu caminho como orientador de mestrandos, sobreviveu a mim! Como eu chorei durante esse mestrado! Foi muito difícil. Quantos textos “malucos” deixados de lado, quantos risos e as gargalhadas via WhatsApp, lembra? Somente nós dois sabemos mensurar, e isso está em nossas almas, em nossos corações. Não vou produzir sintomas, meu querido Capitão, mas já sinto saudade de você. Obrigada por tudo, por todo ensinamento, por toda dedicação. Muitíssimo obrigada por tudo! Que Deus abençoe seu caminho como orientador.

Tocando em frente

Ando devagar
Porque já tive pressa
E levo esse sorriso
Porque já chorei demais

Hoje me sinto mais forte
Mais feliz, quem sabe
Só levo a certeza
De que muito pouco sei
Ou nada sei

É preciso amor
Pra poder pulsar
É preciso paz pra poder sorrir
É preciso a chuva para florir

Cada um de nós compõe a sua história
Cada ser em si
Carrega o dom de ser capaz
E ser feliz (...)

Almir Sater e Renato Teixeira

RESUMO

Esta pesquisa investigou as potencialidades da Sala de Aula Invertida (SAI) nas aulas de proporcionalidade de uma turma de 9º ano em uma escola da rede municipal de Belo Horizonte-MG. Mais especificamente, buscou analisar as percepções dos estudantes em relação à SAI; as possíveis influências da utilização de videoaulas no processo de interação estudante-aula-professor na perspectiva da SAI e também se essa interação traz elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade. A SAI, também conhecida internacionalmente como *flipped learning,* visa mudar alguns paradigmas organizacionais do ensino tradicional. A ideia central é que o educando seja protagonista de seu aprendizado tendo acesso prévio ao conteúdo da aula, seja por vídeos, áudios, textos, geralmente com o recurso midiático envolvendo internet. Na escola, a sua sala de aula se torna um espaço para discussões com o professor e os colegas. Assim, o que tradicionalmente seriam atividades para serem feitas em casa, na SAI serão realizadas com o professor em conjunto com demais estudantes, propiciando-lhes maiores oportunidades de interações, partilhas e, consequentemente, aprendizado. O conteúdo abordado nesta pesquisa foi o de proporcionalidade, com o viés de desenvolvimento do raciocínio proporcional, buscando-se problematizar a utilização da regra de três como estratégia de resolução de problemas de proporcionalidade. É um tema bastante relevante no ensino da Matemática, pois se encontra presente em diversas situações, tanto escolares quanto extraescolares. Como não foi encontrado na internet videoaulas com o enfoque desejado ao ensino de proporcionalidade, a pesquisadora decidiu gravar seu próprio material e disponibilizá-lo. Os referenciais teóricos balizadores desta pesquisa de cunho qualitativo foram encontrados em Bergmann e Sams (2016) e FLN (2014) para trabalhar com a SAI; para o ensino de Matemática, os trabalhos dos pesquisadores do *Rational Number Project* (RNP), Ponte et al. (2010) e Silvestre (2012). As interações propiciadas pelos recursos das tecnologias digitais foram encontradas em Borba e Villarreal (2006), Moran (2015) e Kenski (2016). A partir de uma abordagem qualitativa, foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: registro em áudio e vídeo de observações em sala; diário de campo com registro escrito e questionário escrito e *on-line* para os estudantes. Os resultados apontam que a SAI é uma abordagem pedagógica de ricas oportunidades de interações entre os estudantes, o professor, a família e a escola, as quais podem potencializar o ensino de Matemática. Acerca das implicações pedagógicas, aponta-se para a importância de o professor de Matemática estar ciente de que sua prática docente tem muito a enriquecer quando sua sala de aula é considerada um espaço de investigação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Sala de Aula Invertida. *Flipped classroom. Flipped learning*. Ensino de proporcionalidade. Raciocínio proporcional. Regra de três. Prática docente.

ABSTRACT

This research investigated the potential of the Flipped Classroom (FC) in the classes of proportionality of a 9th grade class in a school of the municipal network of Belo Horizonte-MG. More specifically, it sought to analyze the students' perceptions regarding FC; the possible influences of the use of videotapes in the process of student-class-teacher interaction in the perspective of the FC. Moreover if this interaction brings elements to collaborate with the teaching of proportionality. The FC, also known internationally as flipped learning, aims to change some organizational paradigms of traditional teaching. The main idea is for the learner to be the protagonist of his own learning, having prior access to the content of the lesson, by either videos, audios, texts, usually with the media resource involving the internet. At school, your classroom becomes a space for discussions with the teacher and colleagues. Thus, what would traditionally be activities to be done at home in the FC will be carried out with the teacher in conjunction with other students, giving them greater opportunities for interactions, sharing and, consequently, learning. The content addressed in this research was proportionality, with the bias of the development of proportional reasoning, seeking to problematize the use of the rule of three as a strategy for solving proportionality problems. It is a very relevant topic in the teaching of Mathematics, since it is present in several situations, both school and non-school. As videotapes were not found on the internet with the desired focus on proportionality teaching, the researcher decided to record her own material and make it available on the internet. The theoretical reference frameworks of this qualitative research were found in Bergmann and Sams (2016) and FLN (2014) to work with the FC; for the teaching of Mathematics, the works of Rational Number Project researchers (RNP), Ponte et al. (2010) and Silvestre (2012). The interactions provided by digital technology resources were found in Borba and Villarreal (2006), Moran (2015) and Kenski (2016). From a qualitative approach, the following instruments of data collection were used: recording in audio and video of observations in classroom; field notes with written record, as well as written and online questionnaire for students. The results point out that the FC is a pedagogical approach to rich opportunities for interactions among students, teachers, the family and the school, which can enhance the teaching of Mathematics. Regarding the pedagogical implications, the importance of the Mathematics teacher to be aware that his teaching practice has much to enrich when he considers his classroom a space of investigation.

Keywords: Mathematics Education. Elementary school. Flipped Classroom. Flipped Learning. Proportionality teaching. Proportional reasoning. Rule-of-three. Teaching practice.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
COEP	Comitê de Ética em Pesquisa
EUA	Estados Unidos da América
FaE	Faculdade de Educação
FLN	Flipped Learning Network
FLFG	Flipped Learning Field Guide
ICEx	Instituto de Ciências Exatas
MEC	Ministério da Educação
PBH	Prefeitura de Belo Horizonte
PROMESTRE	Mestrado Profissional Educação e Docência
RELME	Reunião Latino Americana de Educação Matemática
RNP	Racional Number Project
RP	Raciocínio Proporcional
SAI	Sala de aula invertida
STHEM	Science, Technology, Humanities, Engineering and Mathematics
SciELO	Scientific Eletronic Library Online
TDCI	Tecnologias Digitais da Comunicação e Informação
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UMEI	Unidade Municipal de Educação Infantil

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Cronograma das aulas 68

Quadro 2 - Respostas - grandezas que se relacionam 94

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Covariância e Invariância 50

Figura 2 - QR code – livreto 76

Figura 3 - QR code - Videoaula - Introdução a grandezas 88

Figura 4 - QR code – Videoaula - Como as grandezas se relacionam 93

Figura 5 - Kit de cubos 93

Figura 6 - Tabela de Regularidades – Grupo amarelo 98

Figura 7 - Regularidades - Grupo amarelo 99

Figura 8 - Regularidades - Grupo vermelho 99

Figura 9 - QR code- Videoaula - Grandezas Diretamente Proporcionais 101

Figura 10 - Regularidades nos quadrados 102

Figura 11 - Resposta da questão achocolatado 104

Figura 12 - QR code - Videoaula - Grandezas inversamente proporcionais 105

Figura 13 - Resposta G.Y - Grandezas inversas 106

Figura 14- Resposta do grupo G.Y - Relação sem regularidade 107

Figura 15 – Videoaula - Matemática na cozinha 109

Figura 16 - QR code – Videoaula - Regra de três e o raciocínio proporcional 114

Figura 17 - Estudantes assistindo à videoaula Grandezas Diretamente Proporcionais 119

Figura 18 - Meliôdas 120

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Funções crescentes, mas não lineares 46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Preços de estacionamento 119

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO **18**
1.1 Percursos e memórias desta viagem **18**
1.2 O encontro com a pesquisa **24**
1.3 Os objetivos da pesquisa **25**
1.4 Organização da pesquisa **27**
CAPÍTULO II - SALA DE AULA INVERTIDA **29**
2.1 Breve histórico **29**
2.2 Afinal, o que é SAI? **32**
2.3 Afinal, o que é invertido na Sala de aula Invertida? **36**
2.4 A inversão na perspectiva de Bergmann e Sams **37**
2.5 A interação das pessoas com as mídias **40**
CAPÍTULO III - PROPORCIONALIDADE **42**
3.1 Uma reflexão sobre a utilização da regra de três no ensino de proporcionalidade **44**
3.2 O raciocínio proporcional **47**
3.2.1 As estruturas multiplicativas ***48***
3.2.2 Os problemas de proporcionalidade, estratégias de resolução e as dificuldades dos estudantes ***51***
3.2.3 O caminho escolhido para ensinar proporcionalidade ***53***
CAPÍTULO IV - PERCURSOS METODOLÓGICOS **55**
4.1 O cenário **55**
4.2 Os atores **56**
4.3 Como se deu a coleta de dados **56**
4.3.1 Filmando as aulas ***56***
4.3.2 Professora cooperadora ***57***
4.3.3 Diário de campo ***57***
4.3.4 Entrevistando os estudantes ***58***
4.4 A Programação da pesquisa de campo **59**
4.4.1 Como as aulas foram planejadas ***60***
4.4.2 Planejamento das videoaulas ***60***
4.4.2.1 Tomada 1: Planejamento para os estudantes sem internet acessar os vídeos *64*
4.4.2.2 Tomada 2: Preparação para gravar as videoaulas *65*
4.4.2.3 Tomada 3: Elementos de diferenciação entre os vídeos *65*

4.4.2.4 Tomada 4: Da execução/gravação das videoaulas *67*

4.4.3 Planejamento das atividades presenciais* *68

4.4.4 Produção final das videoaulas – Sinopses* *69

4.4.4.1 1º Roteiro – Como assistir a uma videoaula na abordagem da Sala de Aula Invertida? *70*

4.4.4.2 2º Roteiro – Videoaula: O que é Sala de Aula Invertida? *70*

4.4.4.3 3º Roteiro – Videoaula: Introdução a grandezas *70*

4.4.4.4 4º Roteiro – Videoaula: Como as grandezas se relacionam *71*

4.4.4.5 5º Roteiro – Vídeos para contextualização das atividades presenciais *72*

4.4.4.6 6º Roteiro – Videoaula: Grandezas Diretamente Proporcionais *72*

4.4.4.7 7º Roteiro – Videoaula: Grandezas Inversamente Proporcionais *73*

4.4.4.8 8º Roteiro – Videoaula: A regra de três e o raciocínio proporcional *74*

4.4.4.9 9º Roteiro – Matemática na cozinha *74*

4.5 Luz, câmera, ação! 75

4.6 Tomada de análise dos dados 77

CAPÍTULO V - ANÁLISE 79

5.1 Um olhar para a mídia: a utilização de videoaulas nas aulas de matemática 80

5.1.1 O olhar dos estudantes sobre as videoaulas* *80

5.1.2 O olhar da professora sobre as videoaulas* *83

5.2 Olhando para o ensino de proporcionalidade 86

5.2.1 Introdução a grandezas e como elas se relacionam* *87

5.2.2 Reconhecimento das estruturas multiplicativas* *96

5.2.2.1 Fortalecendo os estudos sobre proporcionalidade direta *103*

5.2.3 Tipos de problemas de proporcionalidade* *109

5.2.3.1 Problematizando a utilização da regra de três *111*

5.3 Olhando para a SAI 116

5.3.1 A inversão pode potencializar a interação* *116

5.3.2 A inversão oportuniza ressignificar o erro* *118

5.3.2 A inversão muda a maneira como conversamos com os pais* *122

5.3.3 A inversão valoriza o trabalho docente* *123

5.3.4 A inversão torna a aula mais acessível* *125

5.4 Olhando para as percepções da professora 126

CAPÍTULO VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS 130

REFERÊNCIAS 134

ANEXO A - Decisão do COEP **141**

ANEXO B - Depoimento de uma mãe de aluno **142**

APÊNDICE A - Termo de consentimento livre e esclarecido (pais) **143**

APÊNDICE B - Termo de assentimento livre e esclarecido do menor (estudantes) **146**

APÊNDICE C - Carta de anuência para autorização de pesquisa **149**

APÊNDICE D - Questionário *on-line* **151**

APÊNDICE E - Atividades desenvolvidas em sala de aula **154**

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

"(...) vim parar às coisas da Educação por acaso. Mas, nesse dia, voltei-me para mim, procurei perguntas e respostas, e aprendi a habitar este lugar."
Nóvoa (2014) em Carta a um jovem investigador em Educação

Na Introdução são apresentadas as paisagens, as cenas da viagem percorrida até chegar aqui: o memorial da autora e também as motivações para a realização do presente estudo. São formulados os objetivos e as questões que o norteiam, assim como indicados a sala de aula invertida e o ensino de proporcionalidade focado no desenvolvimento do raciocínio proporcional a serem implementados neste trabalho. Por fim, a organização geral do estudo.

1.1 Percursos e memórias desta viagem

Nasci em Carmo do Cajuru, cidade pequena do interior de Minas Gerais. Meu pai era oficial de justiça e minha mãe fez o magistério. Ela parou de lecionar quando casou, passando a trabalhar nas tarefas de casa. Magistério não era o que meus pais sonhavam para mim, queriam que eu cursasse medicina. Estudei em escolas públicas na minha cidade, até porque lá não existiam escolas privadas. Ao terminar o ensino fundamental, na época chamado de primeiro grau, fui estudar em Divinópolis, cidade vizinha, onde havia a considerada "melhor" escola da região, a *Estadual*. Acredito que esse título de melhor escola se devesse à associação aos seus altíssimos índices de reprovação.

Aos 16 anos de idade mudei para Belo Horizonte e terminei em uma escola privada o então segundo grau, o que hoje denominamos Ensino Médio. Meu pai já era falecido, minha mãe respeitava e apoiava minha opção no vestibular por Ciência da Computação.

O primeiro fracasso dito "escolar" instaurado foi a reprovação naquele vestibular. Pode parecer forte o termo fracasso, mas era o que eu sentia. Fui reprovada no vestibular da UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) no curso de Ciência da Computação em 1992. Ao me informar sobre cursos de Programação de Computadores, resolvi cursar aqueles oferecidos pelo conselho de extensão do Instituto de Ciências Exatas - ICEx da UFMG. Nesses cursos fui monitora. Meus horários de monitoria eram muito requisitados, creio ter sido minha primeira descoberta de "ser professora". Trabalhei em empresas como programadora de computadores, mas sentia falta de gente, ficava muito só; eu e o computador sob a frieza do ar-condicionado.

A sequência dos cursos ofertados pelo ICEx constava do curso de Análise de Sistemas, mas era pré-requisito ter um curso superior. Um dos meus professores orientou-me a fazer o curso de Matemática, pois, segundo ele, eu iria gostar muito e, assim que o concluísse, voltaria para completar o Análise de Sistemas.

Em 1994 entrei no curso de Matemática da UFMG. A cada disciplina concluída aumentava minha certeza de que Matemática era o que eu mais sabia e gostava de fazer, até que veio o estágio supervisionado. Minha experiência não foi agradável: eu muito inexperiente em uma escola grande, repleta de diversos desafios, na qual os estudantes viviam em um mundo de muita desigualdade social. Hoje, consigo enxergá-los como vítimas dessa desigualdade e de suas consequências. Pensei seriamente em desistir de ser professora.

O mundo da criminalidade e da violência era, até então para mim, cenário somente de televisão, e definitivamente eu não estava preparada para enfrentar aquela realidade que encontrara naquela escola. Não conseguia reconhecer a juventude nas suas potencialidades e possibilidades, meus olhares eram somente para seus problemas.

Os desafios da sala de aula são constantes. Lidar com jovens demanda buscar compreendê-los, pois

> [e]nxergar o jovem pela ótica dos problemas é reduzir a complexidade desse momento da vida. É preciso cuidar para não transformar a juventude em idade problemática, confundindo-a com as dificuldades que possam afligi-la. É preciso dizer que muitos dos problemas que consideramos próprios da fase não foram produzidos por jovens. (DAYRELL; CARRANO; MAIA, 2014, p. 107).

O período do estágio volta à tona para introduzir meu texto, pois foi nessa fase que recebi um dos maiores exemplos de “ser professor” que pude vivenciar e que influencia muito na minha prática. Estava prestes a desistir do curso de Matemática. A probabilidade da reprovação naquela disciplina aumentava por não ter conseguido, até aquele momento, concluir o processo de estágio. Ao relatar para a minha professora e para a turma da faculdade como estava meu estágio, chorei compulsivamente, sentia-me fracassada.

Para minha surpresa, a professora da disciplina carinhosamente secou minhas lágrimas, me abraçou e disse que estava “tudo bem”, e numa sequência de aportes teóricos e emocionais ela me mostrou, me ensinou que há tempo para tudo, inclusive, e obviamente, para a maturidade profissional. Naquele momento, eu, como estudante, estava com um turbilhão de sentimentos contraditórios e encontrei nessa professora alguém que me acolheu.

> O respeito à vida, ao outro, às suas possibilidades e limites, aos seus desejos e sonhos, a tudo o que lhe diz respeito, deve ser levado em consideração. Nesta relação há histórias principiando, identidades e subjetividades desabrochando, caminhos sendo escolhidos, horizontes que se abrem ou se fecham, nas vidas infantes e juvenis que se

> inauguram, podendo ser mais ou menos formosas, conforme sejam trabalhadas, lapidadas na relação pedagógica. (TEIXEIRA, 2007, p. 10).

A partir daquele ponto, (re)criamos estratégias para que eu pudesse concluir aquele processo em outra escola, em outro contexto. Reforço essa experiência, pois, a partir dela, (re)penso frequentemente minha prática, como lidar com meus educandos, o processo avaliativo a que os submeto, cada situação, cada indivíduo com suas particularidades, potencialidades e possibilidades. A docência é uma profissão de interações humanas (TARDIF; LESSARD, 2014), e nessas interações os sujeitos vão construindo suas histórias.

Graduei em 1998 e não voltei para a computação. Daí em diante percorri os caminhos da Matemática em escolas públicas e privadas. Em minha prática pedagógica fui aprendendo que a proximidade afetiva professor-estudante é uma das importantes estratégias para conquistar o respeito dos sujeitos. De alguma forma, acredito que a relação estudante-professor no processo ensino-aprendizagem pode ser potencializada pela afetividade.

Teixeira (2007) nos convida a pensar a relação docente/discente no âmbito do cuidado.

> Do cuidado de si e do outro. Do zelo com os processos educativos, com os percursos e dinâmicas da formação humana, com as dinâmicas, conteúdos e formas de construção do conhecimento e inserção na cultura, traçados em que a dimensão política se reitera na docência. (p. 433).

Queria conquistar os estudantes com os recursos que eu e a escola tínhamos para oferecer. Como zelar esse processo educativo? O que eu poderia oferecer que fosse atrativo? Acredito que o educando precisa estar engajado na atividade em sala para que aquilo produza algum significado em sua vida. Como buscar esse engajamento, a participação dele? Encontrei uma certa potencialidade em meus conhecimentos envolvendo tecnologias digitais. Tornei-me “a professora de Matemática” que levava os estudantes para a sala de informática.

Queria conquistar os educandos e de alguma forma possibilitar o contato com as mídias digitais nas aulas de Matemática, descobrir o que trazer para as aulas que potencializasse a aprendizagem.

Naquela mesma época, no ano 2000, lembro-me das dificuldades, com a versão gratuita do CabriGéomètric[1]. Os computadores da escola não possuíam configuração desejada para

[1] **CabriGéomètric** é um software desenvolvido por J. M. Laborde, Franck Bellemain e Y. Baulac, no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble. Permite construir todas as figuras da geometria elementar que podem ser traçadas com a ajuda de uma régua e de um compasso. Uma vez construídas, as figuras podem se movimentar conservando as propriedades que lhes haviam sido atribuídas. Não é um software livre, é fabricado pela Cabrilogic. Fonte: http://www.software.com.br/p/cabri-geometre

trabalhar com esse programa, seu desempenho não era satisfatório, possivelmente devido à capacidade de memória das máquinas. Isso nos desmotivava, tanto a mim quanto aos estudantes, pois a aula não acontecia como o planejado. Eles se dispersavam com imensa facilidade, com razão, e por vezes eu me arrependia de ter ido para a sala de informática. Por outro lado, acreditava no potencial daquela relação: jovem-aula-computador. Por vezes optei trabalhar com o SuperLogo[2], mas fui chamada a atenção pela coordenadora, que insinuou eu estar trocando aula de Matemática por brincadeiras "com tartaruguinha" na sala de informática. "O construcionismo é a principal perspectiva teórica sobre o uso pedagógico do LOGO, enfatizando relações entre linguagem de programação e pensamento matemático." (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p.18).

Essa trajetória nesse cenário foi apresentada porque é necessário pontuar como tem sido difícil lidar com tecnologias digitais durante esses anos. Não são somente barreiras no âmbito técnico, mas por várias vezes, talvez a maior parte delas, as barreiras, as mais altas e difíceis de serem transponíveis são as humanas: pais, coordenação, diretores de escola, que estão imersos de forma quase inflexível, no modelo tradicional de docência.

Um outro momento que marca minha trajetória com a informática foi quando estava preparando uma aula com o auxílio do Geogebra[3] e desejava que, com a utilização da ferramenta seletores e controles deslizantes[4], os estudantes compreendessem o significado dos coeficientes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nessa preparação, descobri que eu mesma não sabia o significado do coeficiente *b* da função do segundo grau. Com algum tempo, pude ver, na tela do computador, como o vértice da parábola deslizava sobre uma outra parábola invertida. Nesse momento, pude construir, visualizar em minha mente aquele significado, graças ao computador, que pode contribuir para a reorganização do pensamento matemático. Aprender Matemática por diversas vezes demanda abstração do estudante, demanda que ele seja capaz de "visualizar" hipóteses, e isso nem sempre é tarefa simples. Aqueles que têm mais desenvoltura, por exemplo, em relação à visão espacial, superam aqueles que não a têm. A experiência com o Geogebra fez-me viajar nas possibilidades das tecnologias digitais trabalhando na reorganização dos pensamentos e, consequentemente, na construção dos

---

[2] Super**Logo** é uma linguagem de programação de computadores voltada para o ambiente educacional. Ela se fundamenta na filosofia construtivista e em pesquisas na área de Inteligência Artificial.

[3] GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica, um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

[4] **Controles deslizantes** são comandos do programa Geogebra em que se pode atribuir valores em um certo intervalo. Por exemplo, pode-se criar um seletor de nome ***a*** variando de -4 até 4, com isso, à medida que se vai "deslizando" o cursor em cima do seletor, o coeficiente ***a*** da função quadrática receberá os valores no intervalo especificado, no caso, de -4 até 4.

conhecimentos de meus estudantes. Nas palavras de Borba e Villarreal (2006, p. 23): "[o] conhecimento é produzido por um coletivo formado de seres-humanos-com-mídia ou seres-humanos-com-tecnologias e não como outras teorias sugerem, por um ser humano sozinho, ou coletivos formados somente por seres humanos".

Quanto mais conhecia o Geogebra, mais acreditava em suas possibilidades de ser utilizado como um excelente recurso pedagógico em minhas aulas. Preparei então uma atividade para estudantes de 8º ano. Uma aula investigativa sobre posição relativa entre circunferências, com o auxílio desse programa. Passados alguns dias, o coordenador chamou a minha atenção, pois um pai veio reclamar junto à direção da escola que era inadmissível o filho, após duas aulas de Matemática no dia, não ter uma linha sequer escrita no caderno.

> O Geogebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 47).

São anos de experiências lecionando Matemática, tentando trazer os recursos digitais para auxiliar as aulas, mesclando sucessos e fracassos, mas sempre seguindo em frente.

No decorrer dos anos de docência, percebi como a forma de me relacionar com os estudantes foi se aprimorando à medida que fui construindo compreensões daqueles jovens.

> A docência se instaura na relação social entre docente e discente. Um não existe sem o outro. Docentes e discentes se constituem, se criam e recriam mutuamente, numa invenção de si que é também uma invenção do outro. Numa criação de si porque há o outro, a partir do outro. O outro, a relação com o outro, é a matéria de que é feita a docência. Da sua existência é a condição. Estamos, pois, nos domínios da alteridade. (TEIXEIRA, 2007 p. 429).

Em 2012, a partir de uma fala comovente de um estudante de 8° ano: *"professora, me ajuda, como eu vou fazer a prova se eu não aprendo essa matéria de forma alguma?"* senti no seu olhar sinceridade, ele gostaria de ser capaz de efetuar aqueles algebrismos – a matéria a que ele se referia era divisão de polinômios. Ele estudava em uma escola privada, cujo ritmo era acelerado demais para ele acompanhar. Encaminhei o assunto para a coordenação, porém disseram que não poderiam fazer nada.

Naquela semana, em 2012, estava acontecendo a Reunião Latino Americana de Educação Matemática – RELME (26), em Belo Horizonte, e tive a feliz oportunidade de partilhar minha angústia com o professor Ubiratam D´Ambrosio, o qual disse que eu estava no caminho certo e, com uma "tapinha nas costas", me incentivou a seguir firme com meus propósitos para ajudar aquele estudante. Naquele momento, eu era a aluna que acabava de receber mais um voto de confiança de um professor, a Educação Matemática. Eu queria muito fazer algo para auxiliar na aprendizagem daquele jovem.

Resolvi gravar uma videoaula para ajudá-lo, em minha casa mesmo, com uma câmera amadora e um simples quadro branco. Assim o fiz da forma mais simples que consegui, com a linguagem mais acessível para quem estava com dificuldade de aprendizado. Criei um canal e disponibilizei o vídeo no *Youtube*[5] – em janeiro de 2018 encontra-se com mais de 221 mil visualizações. Comecei a receber pedidos para produção de videoaulas tanto presenciais quanto virtuais.

Com esse vídeo inicial pude perceber quão tênue é a linha que separa o ensino da aprendizagem. Os educandos nem sempre precisam de sofisticação para aprender, mas sim de concentração, de envolvimento com a aula, de desejo e reconhecimento da importância para aprender no momento deles, na forma deles, e de um professor que os perceba como sujeitos repletos de bagagem sociocultural e cada vez mais imersos no mundo das tecnologias digitais.

Fui convocada, em meados de 2014, para assumir o cargo de professora de Matemática na Prefeitura de Belo Horizonte - PBH. As escolas da PBH são equipadas normalmente com uma sala de informática com acesso à internet. Consequentemente, após alguns critérios, como gratuidade e permissão de números de dispositivos pessoais conectados simultaneamente, conheci o Sistema Socrative[6] e Kahoot[7]. A permissão do uso do celular em minhas aulas gerou certa controvérsia entre professores, colegas de trabalho, até que convidei um dos coordenadores, também professor de Matemática, para assistir a uma aula. Ele gostou e comentou com a diretora. Essa, por sua vez, convidou-me a mostrar, aos demais colegas professores, o meu trabalho, em um horário de formação profissional.

Ministrei uma aula (curso de formação) de duas horas de duração para os colegas com o intermédio do Socrative e do Kahoot, permitindo o uso de seus dispositivos pessoais tipo *smartphones*.

Pela primeira vez estava tendo um respaldo da direção de uma escola em relação ao uso da tecnologia com considerável autonomia.

---

[5] **YouTube** – sítio na internet de hospedagem gratuita de vídeos.

[6] **Socrative** é um Sistema de Resposta Pessoal (PRS) desenvolvido para habilitar o tutor a colocar questões para um grande grupo de estudantes usando seus dispositivos pessoais, com os resultados sendo recolhidos automaticamente e mostrados em tempo real. As questões podem ser abertas ou fechadas.

[7] **Kahoot** é uma plataforma educacional internacionalmente conhecida e utilizada por várias escolas e professores em todo o mundo, que trabalha (na internet) com elaborações de questões, e os estudantes respondem com mídias digitais, inclusive com o celular.

Nesse período, surgiu a inquietude de pesquisar a potencialidade do uso do celular nas aulas de Matemática. Com essa proposta, ingressei no mestrado profissional, PROMESTRE, na linha de Educação Matemática na Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG.

1.2 O encontro com a pesquisa

No decorrer do mestrado, diante de estudos, leituras, aulas, meu projeto foi sendo (re)desenhado e (re)construído. Percebi que eu já acreditava na potencialidade do uso do celular e isso não o tornaria, daquela forma proposta, meu objeto de estudo. Conheci algo diferente de tudo o que havia lido sobre pesquisa no que dissesse respeito ao distanciamento do pesquisador e da pesquisa. Deparei com a Pesquisa-Ensino, uma metodologia de pesquisa totalmente nova para mim, que propõe ao pesquisador, como professor, investigar sua própria prática docente.

Nessa perspectiva, o professor-pesquisador desenvolve um plano de trabalho bem estruturado e elabora uma prática que, preferencialmente, traga novidades para ele, e com suporte dos saberes acadêmicos e aportes teóricos, investigue essa prática. Fiquei interessada, pois queria desenvolver um trabalho envolvendo as tecnologias digitais, uma vez que elas estão presentes em quase todos os espaços, com forte incidência na sala de aula, demandando novas práticas e novos comportamentos educacionais, tanto por parte dos estudantes quanto dos professores.

Diversos assuntos envolvem direta ou indiretamente as tecnologias, tais como redes sociais, videoaulas, letramento e também analfabetismo digital, proibição de celulares na escola, numa época em que o celular talvez seja o pertence pessoal mais significante para o jovem, o qual possui tantas dúvidas, incertezas e incompreensões e demanda atenção da escola. Segundo Fanfani (2000), ele quer que a escola valorize e considere seus interesses, suas expectativas e conhecimentos; que a escola dê lugar ao seu protagonismo e não se restrinja a programas e conteúdos escolares.

Esta pesquisa pretende encontrar meios que facilitem a mediação a que se propõe o professor em sala de aula diante desses jovens, de forma a motivá-los a aprender, a buscar novos rumos, novas conquistas, que eles sejam capazes de construir conhecimentos e experiências significativas na escola.

> É auxiliando o aluno a situar os conhecimentos, objetos culturais e modos de vida em seu contexto social e histórico que o mestre contribui para a formação cultural do aluno e para ajudá-lo a tomar consciência dos pontos de junção e de ruptura que marcam a história humana (MELLOUKI; GAUTHIER, 2003, p. 557).

Sendo assim, pensou-se trabalhar com esses jovens sob uma abordagem baseada em uma metodologia ativa de aprendizado, mais especificamente com a Sala de Aula Invertida, que é, também, uma abordagem pedagógica nova para a pesquisadora. Metodologia Ativa é um método de ensino que se propõe a trazer o estudante para o centro, passando ele a ser o protagonista de seus aprendizados, num ritmo individual, mas em um trabalho coletivo com colegas e professores.

1.3 Os objetivos da pesquisa

Reestruturada a proposta inicial, o objetivo central deste trabalho ficou delimitado e assim definido: **identificar, problematizar e analisar as possibilidades e potencialidades da abordagem pedagógica Sala de Aula Invertida nas aulas de Proporcionalidade em uma turma de estudantes de 9º ano da rede municipal de Belo Horizonte.** Mais especificamente, pretende identificar e analisar as percepções dos estudantes em relação à SAI, bem como as possíveis influências da utilização de videoaulas no processo de interação estudante-aula-professor nessa perspectiva. Também espera analisar se essa interação traz elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade.

Há algumas décadas, renomados autores têm proposto que a academia reconheça o saber do professor da escola básica como um saber científico, importante para a formação de futuros professores. Aqui, será apontado apenas um ponto em que Cochran-Smith e Susan Lytle (1999) definem como concepção de "conhecimento-da-prática" (*knowledege of practice*). As autoras entendem que o professor aprende quando ele considera sua sala de aula com todos os seus atores, professores, educandos, conteúdo, aprendizagem, currículo, tudo isso como um todo; uma totalidade situada, um espaço de investigação.

Nessa concepção, o conhecimento formal (aquele proveniente da academia) e o de ensino (aquele que acontece na sala de aula) não sofrem distinções como outras concepções. Nesse contexto, o conhecimento do professor que tem uma investigação como postura é valorizado como saber científico que pode promover transformações sociais. Aqui a prática pedagógica do professor é práxis.

Necessário se faz o diálogo entre práxis docente, prática pedagógica investigativa, atividades colaborativas e sala de aula como ambiente de investigação. Nessa perspectiva, a "docência investigativa do professor do ensino básico (...) cria uma relação ativa dos sujeitos da educação com o conhecimento elaborado, abrindo caminhos de *re*-elaboração" (PENTEADO e GARRIDO, 2010, p. 80).

Nesse contexto, optou-se pela abordagem pedagógica Sala de aula invertida (SAI), por apresentar uma proposta de oportunizar ao estudante que ele seja o protagonista de seus aprendizados, corroborando com a ideia de que

> [o]s alunos não são meros receptores, mas interagem com o conhecimento a partir de suas experiências de vida (midiáticas, escolares, familiares, etc.); são confrontados com as diferentes interações dos colegas, exercitam a alteridade, mobilizados por problematizações que lhes são postas, desenvolvem, com o professor uma atitude indagativa, reflexiva, a partir da qual referendam ou reelaboram seus conhecimentos iniciais, ao mesmo tempo que os professores vão construindo e reconstruindo processualmente suas identidades profissionais (PENTEADO e GARRIDO, 2010, p. 80).

Pretende-se pesquisar como essas experiências midiáticas, escolares, familiares estão presentes na SAI e também como se pode interligar o ensinar e aprender em meio às tecnologias digitais. Moran (2015) diz como a sala de aula tem assumido a cada dia um papel mais amplo, não são dois mundos: um físico e um virtual, mas um espaço amplo e híbrido, e assim deve ser a escola. "Essa mescla, entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e para trazer o mundo para dentro da escola" (MORAN, 2015, p. 16).

A relevância desta pesquisa também se justifica no âmbito da Educação Matemática, no ensino de Proporcionalidade, que tem sido um tema discutido há anos, no Brasil e no mundo, sobre a importância de se desenvolver o raciocínio proporcional nos educandos.

> "As pesquisas têm consistentemente mostrado que poucos alunos, com habilidades razoáveis, usam o raciocínio proporcional de modo adequado" (POST; BEHR; LESH, 1988, p. 78), ou "finalizam com sucesso atividades que os envolvem" (BEN-CHAIM et al., 2008). "Tal assunto é também um problema para muitos alunos de níveis escolares mais elevados (LAWTON, 1993), e "há evidências de que um amplo segmento de nossa sociedade nunca adquire fluência no pensamento proporcional" (HOFER, 1988, p. 285 apud BEN-CHAIM; KERET; ILANY, 2008, p. 131).

Ao elaborar as aulas, objeto desta pesquisa, foi levada em consideração a forma como, por vezes, é ensinado o conteúdo de proporcionalidade por meio de regras mecânicas, muitas vezes desprovidas de raciocínio proporcional. No âmbito federal, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta preocupação explícita em seu texto para as habilidades dos estudantes desde o sexto ano do ensino fundamental:

> A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três). (BRASIL, 2017, p. 226).
>
> (EF06MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 257).

> (EF07MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (BRASIL, 2017, p. 261).
>
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (BRASIL, 2017, p. 269).

Pode-se perceber que a BNCC apresenta que o ensino de proporcionalidade deve constar de resolução de problemas, mas sem fazer uso da regra de três. Isso realça uma preocupação em incentivar que o professor promova práticas pedagógicas para estimular nos estudantes o desenvolvimento do seu raciocínio proporcional (RP).

No âmbito municipal, também é justificado o conteúdo matemático com as Proposições Curriculares da Prefeitura de Belo Horizonte - PBH, que aborda o conteúdo de Proporcionalidade em todos os blocos, com as instruções de trabalhar, retomar e consolidar o ensino no terceiro ciclo.

> É importante destacar que o conceito de proporcionalidade é necessariamente presente em diversas situações-problema relacionadas aos quatro blocos de conteúdo, em todos os ciclos. As capacidades/habilidades relacionadas a esse conceito devem ser consolidadas, entretanto, no 3º Ciclo, quando os educandos passam a analisar explicitamente as situações-problema nas quais ocorre variação proporcional (direta e inversamente) entre grandezas, estabelecendo estratégias de resolução, entre elas, a regra de três (BELO HORIZONTE, 2010, p. 38).

Assim, as Proposições Curriculares da PBH, apesar de ela reconhecer a relevância do estudo de proporcionalidade, não fazem ressalvas em relação à utilização da regra de três, contudo ressaltam que o estudante do 3º ciclo deve ser capaz de desenvolver estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade.

1.4 Organização da pesquisa

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No primeiro, a professora-pesquisadora apresenta a sua trajetória para ingressar na docência bem como alguns percalços do caminho que, de alguma forma, também serviram de incentivo para nortear a pesquisa. Em seguida, apresentam-se os objetivos do trabalho e sua relevância no cenário da educação matemática, para, então, se organizar a estrutura da pesquisa.

Para embasamento teórico deste trabalho, no capítulo 2 faz-se uma abordagem sobre a metodologia de ensino pesquisada, dentro do contexto de ensino híbrido, que é a Sala de Aula Invertida (SAI).

No capítulo 3 problematiza-se o ensino de Proporcionalidade nas aulas de Matemática, buscando apresentar os estudos dos pesquisadores-professores de Matemática, no Brasil e exterior, em relação ao tema, mais especificamente objetivando o desenvolvimento do raciocínio proporcional (RP) nos estudantes.

No capítulo 4 o cenário de investigação e seus atores serão apresentados nos percursos metodológicos e se explicará como foram os preparativos para entrar em cena. Também será apresentado o produto educacional parte integrante desta dissertação.

O capítulo 5 será dedicado a apresentar e compreender os dados obtidos e então responder aos objetivos desta pesquisa. Finalmente, a conclusão do trabalho.

Por se tratar de uma experiência de pesquisa em sala de aula, a professora-pesquisadora optou por escrever em primeira pessoa do singular quando a voz for sua, e em primeira do plural quando estiver falando como pesquisadora em parceria com seus orientadores ou fizer parte do referencial teórico.

CAPÍTULO II - SALA DE AULA INVERTIDA

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nas pesquisas sobre a Sala de Aula Invertida (SAI), oriundas de artigos científicos disponibilizados na internet e em livros-texto. As pesquisas *on-line* foram feitas em sítios de bibliotecas eletrônicas, como a *Scientific Electronic Library Online* (SciELO-Brasil), nos periódicos da CAPES, no Google acadêmico[8], com o devido cuidado de recorrer à instituição de origem do artigo em questão.

Este capítulo traz um breve histórico da SAI para se compreender um pouco o seu processo de surgimento; em seguida será apresentada a ideia de construção e estruturação da SAI com a explicação sobre os seus 4 pilares F-L-I-P. O único livro encontrado para falar exclusivamente sobre SAI no Brasil foi o de Bergmann e Sams (2016), denominado "Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem". Portanto, com base nesses autores serão tratados os pontos escolhidos para responder à pergunta: "Por que inverter a sala de aula?", e, em seguida, um pouco da interação segundo a concepção "seres-humanos-com-mídias".

2.1 Breve histórico

O relato mais antigo encontrado que trouxe a ideia de inversão foi a abordagem das professoras Barbara Walvoord[9] e Virginia Johnson Anderson[10] em suas aulas das disciplinas de Ciências Humanas. Elas explicaram como se deram essas abordagens no livro *Effective Grading*, datado de 1998. A ideia delas, segundo Brame (2013), era de que os estudantes deveriam ter "a primeira exposição" ao conteúdo com uma preparação e produção de um trabalho de leitura, escrita, problemas, etc., antes da aula. Durante a aula, com as professoras, os estudantes receberiam *feedback* produtivo através das atividades que seriam ali realizadas.

Nos Estados Unidos, na *11th International Conference on College Teaching and Learning (*11ª Conferência Internacional de Ensino e Aprendizagem Universitária) J. Wesley Baker apresentou "*The 'Classroom Flip': Using Web Course Management Tools to Become the Guide by the Side*", que tinha como proposta oferecer mais tempo aos seus estudantes, em sala

---

[8] O Google Acadêmico é um sistema que oferece ferramentas específicas de busca na literatura acadêmica: artigos científicos, dissertações de mestrado, teses de doutorado, livros, resumos, bibliotecas digitais e material produzido por organizações profissionais e acadêmicas. Reúne diversas fontes em um só lugar possibilitando localizar variados temas, desde que eles estejam disponíveis na web (CIRIACO, 2016).

[9] Barbara E. Walvoord é professora emérita na Universidade de Notre Dame.

[10] Virginia Johnson Anderson é professora de Ciências Biológicas na Universidade de Towson, nos Estados Unidos.

de aula, para que eles tivessem mais oportunidades de trocar experiências e conversar com o professor. Para isso Baker disponibilizava suas aulas/explicações *on-line*. Baker denominou seu método de *Classroom Flip*.

Na mesma linha de trabalho, os professores Maureen J. Lage, Glenn J. Platt e Michael Treglia, no artigo *"Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment",* descrevem a implementação da *flipped classroom* como um método de inclusão dos diferentes tipos de pensar e aprender em sala de aula. Eles disponibilizavam as aulas, nesse caso, em vídeos gerados por arquivos de apresentação de slides com narração, ou seja, com imagem e áudio. Em relação a Baker, há relatos de que, nessa data, as aulas disponíveis *on-line* eram somente em áudios. Lage, Platt e Treglia (2000) denominaram esse método de *Inverted Classroom* e definiram que: "[a] abordagem da sala de aula invertida pode ser descrita como eventos que tradicionalmente ocorreram dentro da sala de aula agora ocorrem fora da sala de aula e vice-versa[11]" (p. 32). Ainda no mesmo artigo, os autores ressaltam que "(...) um reordenamento das atividades de ensino e aprendizagem é insuficiente para representar a prática desta abordagem instrucional[12]" (p. 32. Tradução nossa).

O professor de Matemática Jeremy F. Strayer, da Universidade Estadual do Tennesee, pesquisou sobre o desenvolvimento das formas como a inversão da sala de aula poderia ser usada para implementar práticas de ensino de Matemática. Em sua tese de doutorado intitulada "*The effects of the classroom flip on the learning environment: A comparison of learning activity in a traditional classroom and a flip classroom that used an intelligent tutoring system*", datada de 2007, ele relata que, desde 2001, tem estudado sobre as percepções tanto de professores quanto de estudantes em relação à SAI. Em suas conclusões, Strayer (2007) relata que a adoção dessa abordagem deve ser gradual para que os estudantes se sintam mais confortáveis com a nova forma de aprendizagem. Contudo, ele afirma também que esperava melhores resultados em sua pesquisa, que os estudantes observados sob a abordagem da SAI pareciam depender mais do professor para confiarem na veracidade de suas respostas. Segundo ele, pensar na SAI requer maturidade e talvez não seja indicada para cursos que chamou de "introdutórios" (STRAYER, 2007, p. 184).

Eric Mazur, professor de Física, foi quem introduziu o método *Peer Instruction* (PI) na Universidade de Harvard. Segundo Valente (2014):

[11] The flipped classroom approach can be described as "events that have traditionally taken place inside the classroom now take place outside the classroom and vice versa".

[12] (...) a re-ordering of the teaching and learning activities is insufficient to represent the practice of this instructional approach

> [o] PI consiste em prover material de apoio de modo que o aluno possa estudar o conteúdo antes de frequentar a sala de aula. Com base no material estudado, o aluno responde um conjunto de questões, via um *Learning Management System* (LMS). O professor, antes de ministrar a aula, verifica as questões mais problemáticas e que devem ser trabalhadas em sala de aula. Durante a aula, as discussões são intercaladas com *Concept Tests*, destinados a expor as dificuldades que os alunos encontram. Esses testes são respondidos via sistema de resposta interativo, tipo *clicker*, de modo que a classe e o professor possam acompanhar o nível de compreensão sobre os conceitos em discussão (p. 2).

Jonathan Bergmann e Aaron Sams, (BERGMANN; SAMS, 2016) professores de Química nos Estados Unidos, trabalharam numa escola basicamente rural, cujos índices de ausência dos estudantes era muito alto. Tiveram a ideia de gravar videoaulas para aproveitarem melhor o tempo em sala de aula com os estudantes e também para ajudar aqueles ausentes. Utilizaram um programa de computador que convertia *slides* do *Power Point* em vídeo, e esse programa possibilitava também fazer captura de tela e adicionar áudio. Com isso, em 2007, eles começaram a produzir videoaulas. Gravavam as aulas e as disponibilizavam na internet. Utilizavam a sala de aula para discussões e realização de atividades que envolviam o conteúdo apresentado nas videoaulas. Com eles surgiu a expressão *Flipped Classroom.* Em 2011, eles publicaram, nos Estados Unidos, o livro intitulado *Sala de Aula invertida – uma metodologia ativa de aprendizagem.* Tal livro foi traduzido para o Português, em 2016 e publicado no Brasil.

Encontramos na literatura pesquisada algumas denominações para esse tema, tais como: *Flip your class, Inverted Classroom*, *Classroom flip*, *Flipped classroom, blended learning* e *flipped learning*. A diversidade de expressões, designações e definições para se referir à abordagem SAI oportunizou espaço para se refletir sobre o que seria uma sala invertida ou o que seria uma aprendizagem invertida, desde que o foco seja o estudante sua aprendizagem e não somente uma mera inversão de tarefas e espaço físico com auxílio de tecnologias digitais.

Nos Estados Unidos, em 2012, foi criada a *Flipped Learning Network* (FLN), uma comunidade *on-line*, sem fins lucrativos, com mais de 20 mil educadores de todo mundo, interessados em aprender sobre SAI. Nessa comunidade, os membros trocam informações, partilham suas experiências com o objetivo de aprimorar seus trabalhos com a SAI. A FLN (2014) acredita que, provavelmente, vários professores deram para seus estudantes como atividade de "tarefas de casa" a leitura de um conteúdo novo, ou pediram para assistissem a um vídeo para introduzir algum conteúdo, mas isso não necessariamente implica aprendizagem invertida. Dessa forma, como saber se o modo como estamos trabalhando condiz com a abordagem SAI? Com o propósito de evitar mal-entendidos em relação às definições de Sala de aula invertida (*Flipped Classroom*) e Aprendizagem Invertida (*Flipped Learning*), a FLN

(2014) definiu o que denominou 4 pilares da Aprendizagem Invertida: F–L–I–P *Flexible environment* (Ambiente flexível), *Learning culture* (Cultura de aprendizagem), *Intentional content* (Conteúdo intencional), *Professional Educator* (Educador profissional - Facilitador profissional):

> **Ambiente flexível -** O aprendizado flexível permite uma grande variedade de modelos de ensino**.**
> **Cultura do aprendizado** - A educação invertida coloca o aprendiz e o aprendizado como centros da aula.
> **Conteúdo intencional -** Educadores do modelo de educação invertida se preocupam continuamente sobre como eles podem ajudar estudantes a desenvolver o entendimento de conceitos, assim como a sua capacidade de atuar com eles em mente.
> **Educadores profissionais - O papel do professor se torna ainda mais importante nesse modelo.** Durante o tempo da aula, eles continuamente observam seus estudantes, lhes dando feedback relevante e olhando seu trabalho (FLN, 2014. Tradução nossa).

2.2 Afinal, o que é SAI?

É cada vez mais comum encontrarmos pesquisas em várias universidades em que os pesquisadores têm tentado compreender o comportamento dos estudantes diante de metodologias, práticas, abordagens pedagógicas que levem em consideração a apropriação do conteúdo da sala de aula de forma diferente do modelo tradicional. A facilidade de acesso à informação devido às tecnologias digitais tem promovido reflexões a respeito do lugar da sala de aula, do conhecimento, bem como o papel do educando e do professor. Muito tem se trabalhado tentando encontrar meios que coloquem o estudante no centro do processo, sendo responsável por seu conhecimento e mais, sendo responsável pela forma como constrói esse conhecimento. Esse movimento tem aproximado as investigações sobre as metodologias ativas que abre um leque para diversas possibilidades em que o estudante é um ator ativo do processo de ensino e de aprendizagem. Assumimos aqui, nesse contexto, a abordagem pedagógica "Sala de aula invertida" que vai ao encontro dessas premissas.

Moran (2015), ao refletir sobre as mudanças da educação em que o estudante tenha um papel mais ativo e não passivo, e o professor um papel de orientador e não somente de transmissor de conhecimento, afirma que ser necessário "dar menos aulas e colocar o conteúdo fundamental na WEB, elaborar alguns roteiros de aula em que os estudantes leiam antes os materiais básicos e realizem atividades mais ricas em sala de aula com a supervisão dos professores" (p. 19). Segundo o mesmo autor, não se deve ater a modelos ou padrões para ensinar, mas "um dos modelos mais interessantes de ensinar é o de concentrar no ambiente virtual o que é informação básica e deixar para a sala de aula as atividades mais criativas e supervisionadas. É que se chama de aula invertida" (MORAN, 2015, p. 22).

Bergmann, Overmyer e Wilie (2012) explicam que SAI é

> [u]m meio para aumentar a interação e o tempo de contato personalizado entre estudantes e professores; um ambiente onde os alunos assumem a responsabilidade pela sua própria aprendizagem; uma sala de aula onde o professor não é o "sábio no palco", mas o "guia do lado"; uma mistura de instrução direta com aprendizado construtivista; uma sala de aula onde estudantes que estão ausentes (...) não ficam para trás; uma classe onde o conteúdo é arquivado permanentemente para revisão ou remediação; uma aula onde todos os alunos estão envolvidos em sua aprendizagem; um lugar onde todos os alunos podem obter uma educação personalizada (Tradução nossa).

Os autores ressaltam que SAI não significa curso *on-line*, em que professores são substituídos por videoaulas ou ainda que o estudante trabalha isoladamente em sala de aula. A SAI é uma abordagem que potencializa as oportunidades advindas dos processos de interações. Essa ideia corrobora com Behrens (in MORAN; MASSETO; BEHRENS, 2015), quando o professor propõe uma metodologia com os recursos que a tecnologia digital oferece, uma metodologia que a autora chama de inovadora, "a sala de aula passa a ser um *locus* privilegiado como ponto de encontro para acessar o conhecimento, discuti-lo, depurá-lo e transformá-lo". (MORAN; MASSETO; BEHRENS, 2015, p. 81).

Para Valente (2014), "na sala de aula invertida, o aluno estuda antes e a aula se torna um lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas" (p. 158). Estudiosos da abordagem SAI estão referindo-se à SAI como uma proposta dentro das abordagens pedagógicas ativas de aprendizagem cujo objetivo principal é propiciar ao estudante a oportunidade de desenvolver ou aperfeiçoar autonomia para seus estudos.

Segundo conteúdo da FLN (2014),

> [a]prendizagem invertida é entendida como uma abordagem pedagógica na qual a aula expositiva passa da dimensão da aprendizagem grupal para a dimensão da aprendizagem individual, transformando-se o espaço em sala de aula restante em um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, no qual o facilitador guia os estudantes na aplicação dos conceitos.

A sala de aula invertida é também considerada uma das formas de ensino híbrido. De acordo com a definição de Horn e Staker (2014), o modelo híbrido de ensino, em inglês *blended learning* ou ensino misturado, é aquele que possui algumas características de ensino *on-line* e presencial com a mediação de um professor/supervisor de ensino. O ensino híbrido, por diversas vezes, tem sua definição confundida com um ensino em que são utilizados programas de computadores, salas de informática bem equipadas e até mesmo instrução para os estudantes assistirem a videoaulas *on-line*. Ter um momento *on-line* ou uma tarefa em computadores na escola não necessariamente garante estar dentro do modelo híbrido. É comum confundirmos ensino híbrido com ensino *enriquecido por tecnologias*. Segundo Horn e Staker (2014), para ser híbrido, é necessário que o estudante tenha pelo menos um componente da escola física, longe de casa, incorporado ao seu curso, por exemplo, o professor para supervisionar seus estudos; e que o estudante tenha o controle sobre o tempo, o local, o caminho ou o ritmo de sua aprendizagem.

Horn e Staker (2014, p. 37), após uma pesquisa, verificaram que "os cursos mais híbridos se enquadram em algum lugar dentro dos parâmetros amplos de quatro modelos principais: Rotação, Flex, À la Carte e Virtual Enriquecido".

O modelo Flex foi desenvolvido inicialmente com o objetivo de ajudar estudantes em processo de recuperação, com isso adicionou-se o ensino *on-line*. O modelo Flex caracteriza-se essencialmente pelo foco das aulas ser *on-line*. Horn e Staker (2014) denominam as aulas *on-line* de "espinha dorsal da aprendizagem do aluno". Nesse modelo, os estudantes estão em uma escola física, com professores presenciais, mas "movem-se" para o modelo Flex conforme suas necessidades individuais.

O modelo à la carte é muito parecido com o Flex, a diferença é que o professor tutor não é presencial e sim *on-line*. Nesse modelo, o estudante escolhe o curso ou a disciplina, pode ser da grade curricular dele ou não; pode assistir a essas aulas durante o tempo da escola ou após. É híbrido porque os estudantes têm curso presencial e *on-line*, apesar de os cursos *on-line* não terem o componente presencial.

O modelo Virtual Enriquecido é composto por aulas presenciais; o professor inicia a matéria e determina atividades *on-line*. Nesse caso, o educando não necessariamente se encontra com o professor todos os dias da semana. Ele não tem a obrigação de ir à escola todos os dias, desde que faça as atividades propostas *on-line*. Há uma certa autonomia para o estudante: à medida que ele sentir necessidade, deve ter aulas presenciais com mais frequência. O modelo Virtual Enriquecido não pode ser caracterizado como curso *on-line*, pois a parte presencial é obrigatória.

O modelo de Rotação propõe que haja alternância entre as modalidades de aprendizagem, em que pelo menos uma seja *on-line*, e haja outras com a presença do professor. Pode ser em uma sequência determinada ou a critério do próprio professor. No modelo Rotacional espera-se que haja também uma rotação entre os grupos de estudantes; o fundamental, segundo Horn e Staker (2014), é que "o professor, ou o relógio anunciem a hora de trocar, e todos mudem para a sua próxima atividade designada no curso" (p. 38). Esse modelo ainda pode apresentar-se sob as características de Rotação por Estações; Laboratório Rotacional; Sala de Aula Invertida ou Rotação Individual. Neste trabalho, o foco é a Sala de Aula Invertida.

As recomendações básicas para inverter a sala de aula, segundo o relatório *Flipped Classroom Field Guide* - FCFG (2014), são que as atividades em sala de aula devem envolver uma quantidade significativa de questionamentos, resolução de problemas e de outras atividades de aprendizagem ativa. As aulas devem propiciar aos estudantes a conexão com o conteúdo abordado nas videoaulas. Eles também ressaltam a importância de os estudantes receberem um *feedback* imediatamente após a realização das atividades presenciais. O professor que pretende trabalhar dentro dessa abordagem deve também tentar estratégias para fazer os estudantes participarem das atividades *on-line* bem como das presenciais, sendo que todas deverão ser avaliadas. É recomendado que o professor planeje todos os materiais com o máximo de cuidado, e que sejam muito bem estruturados.

Tanto as recomendações do FCFG (2014) quanto as da FLN (2014) ressaltam a importância da presença de um professor capaz de dar *feedback* instantâneo para os estudantes bem como de ter suas "aulas", tanto virtuais quanto presenciais, bem planejadas e estruturadas. Desse modo, observa-se que a SAI é uma proposta para incentivo de discussões em sala de aula, e, para tal, o professor deve contar com o maior tempo possível disponível.

No Brasil, a expressão *Flipped Classroom* (sala de aula invertida) parece ser utilizada como sinônimo de *Flipped Learning* (aprendizagem invertida) e percebe-se uma generalização pela adoção da expressão Sala de aula Invertida ao se referir a ambas. Cabe aqui discutir se as expressões "sala de aula invertida" e "aprendizagem" invertida têm o mesmo significado. Rios (2007) ressalta que, ao se considerar a tradução para o português de aprendizagem invertida, na perspectiva do ensino tradicional,

> essa designação pode gerar um entendimento reducionista e equivocado, "o da inversão da aprendizagem", em que o estudante passaria a ser o detentor do saber, ou não precisaria mais da figura do professor, e esta não é a proposta dessa abordagem pedagógica. (RIOS, 2017, p. 26).

Dessa forma, para evitar equívocos, foi mantida a designação inicial de "sala de aula invertida" apresentada por Bergmann e Sams (2016), mas é importante ressaltar que neste trabalho a abordagem SAI foi trabalhada em conformidade com os quatro pilares F-L-I-P da Aprendizagem Invertida estipulados pela FLN (2014). É importante também que se compreenda a SAI não como um método, uma metodologia, mas sim como uma abordagem pedagógica, um espaço fértil para (re)invenções da forma de ensinar e aprender que oportuniza intervenções e interações em prol ao respeito à diversidade das habilidades dos estudantes.

2.3 Afinal, o que é invertido na Sala de aula Invertida?

A SAI propõe que os estudantes tenham a maior parte dos conteúdos em casa, seja em formato de leitura, de textos ou por videoaulas; já na escola, com o professor e os colegas, as atividades devem seguir, preferencialmente, o modelo tradicional, as chamadas "tarefas/dever de casa".

Na abordagem SAI, a aula acontece em casa, e o "dever de casa" acontece na escola com o professor, para auxiliar os estudantes. Nessa **inversão**, a sala passa a não ser mais de aula, pois essa aconteceu em casa. A sala da escola deve se transformar em uma sala de aprendizagem, de discussões, de trocas de experiências e de trabalho em grupo. Nessa perspectiva,

> [c]abe ao professor orientar o processo, estimular o grupo para participar e apresentar opiniões, criar um clima amigável de envolvimento para que todos possam superar suas inibições de comunicar-se virtualmente com seus colegas. O aluno, em uma abordagem cooperativa de ensino, tem maior autonomia e maior grau de responsabilidade. Tem tarefas a cumprir e se expõe mais facilmente, pois sempre haverá tempo e espaço para a apresentação das suas opiniões. Ainda mais, será solicitado – pelo professor e pelos colegas – a se posicionar, dizer o que pensa, tomar partido. (KENSI, 2008 p.14).

Com os alcances e as facilidades das tecnologias digitais, o espaço-tempo escolar está sendo reestruturado, as paredes das salas de aulas estão sendo "destruídas", e o limite da aprendizagem está a cada dia mais subjetivo, pois está nas mãos dos aprendizes; não é preciso tocar a campainha avisando que a aula terminou, agora a aula acontece fora da escola (em casa, por exemplo), e o jovem tem o tempo que desejar para compreender o conteúdo. Para trabalhar com a SAI, o professor pode criar materiais de sua própria autoria ou utilizar outros que estão disponíveis na internet, o que concede aos participantes, tanto professores como estudantes, oportunidade de lidar com uma diversidade ímpar de informações, que são ricas para discussões em vários âmbitos.

Nesse modelo, o tempo destinado à sala de aula, na escola, é dedicado à discussão e ao debate. É o momento em que as discussões devem propiciar provocações, investigações, devem tentar despertar o interesse dos estudantes e estimulá-los a raciocinar, a encontrar estratégias para solucionar as atividades. Nesse momento, é fundamental o trabalho em grupo, a partilha, a troca de opiniões, as divergências, para que dessa forma seja construído um aprendizado com bases sólidas e consistentes, mas não menos flexível e elaborado.

2.4 A inversão na perspectiva de Bergmann e Sams

Neste trabalho utilizou-se a proposta de inversão apresentada por Bergmann e Sams (2016) devido a dois motivos principais: o primeiro, por serem membros e divulgadores da proposta da comunidade FLN, que é também a deste trabalho; segundo, porque o livro deles traz um diálogo da SAI com professores que lidam com jovens. A abordagem é simples, demasiadamente clara e objetiva para quem vai trabalhar com jovens menores de idade que ainda estão em um processo de construção de suas personalidades, que demandam atenção, orientação e supervisão de seus pais ou responsáveis.

Bergmann e Sams (2016) apresentam vários argumentos para explicar por que o professor deve inverter a sua sala de aula. Alguns servem para dialogar com esta pesquisa:

> 1. a inversão fala a língua dos estudantes de hoje;
> 2. a inversão ajuda estudantes com diferentes habilidades a se superarem;
> 3. a inversão cria condições para que os alunos pausem e rebobinem o professor;
> 4. a inversão intensifica a interação aluno-professor;
> 5. a inversão possibilita que os professores conheçam melhor seus alunos;
> 6. a inversão aumenta a interação aluno-aluno;
> 7. a inversão muda o gerenciamento da sala de aula;
> 8. a inversão muda a maneira como conversamos com os pais;
> 9. a inversão deixa a aula mais transparente. (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 14).

Esses argumentos (e outros) são apresentados pelos autores conforme suas experiências em salas de aulas, com a utilização da SAI. Segundo eles, com a utilização de videoaulas como um recurso para a inversão da aula, o professor está "falando a língua dos alunos", o que está relacionado com o fato de os autores acreditarem na facilidade que os jovens têm de lidar com os recursos digitais, "configurando-se como uma geração que estabelece novas relações com o conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola" (BACICH; TANZI NETO; TREVISANI, 2015, p. 48). Dessa forma, ao assistir a um novo conteúdo escolar, fora da escola, em formato de vídeo (que é a forma que os autores utilizam), o professor está dialogando com os estudantes por intermédio de algo com que eles têm afinidade, que são os recursos da tecnologia digital. O vídeo é linguagem falada, escrita, é visual, musical, e esse conjunto concede uma força à mídia. "O vídeo atinge-nos por todos os sentidos e de todas as maneiras" (MORAN, 2015, p. 55). A apresentação da aula em formato de vídeo colabora com os estudantes que apresentam maior dificuldade para aprender determinado conteúdo, uma vez que podem voltar à videoaula quantas vezes desejarem. “Os alunos podem ‘pausar o professor’, retroceder a aula e se empenharem de fato na apreensão dos conceitos importantes”. (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 20).

A sala de aula, ao representar espaço de discussão, de trocas, em que o professor trabalha com grupos de estudantes e tem mais tempo para conversar com eles, começa a desenvolver, possivelmente, um espaço de interações, tanto entre os próprios estudantes – pois estão sempre a trabalhar com pares, trocando ideias, partilhando dúvidas e conhecimento – quanto entre professor e educando. Os estudantes passam a se ajudar muito mais em vez de dependerem exclusivamente do professor. “É algo mágico de observar. A toda hora nos surpreendemos com o modo como nossos alunos trabalham em equipe e aprendem coletivamente”. (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 23).

A inversão aumenta a interação, pois o professor conhece melhor seus estudantes, pois tem mais tempo disponível para eles. As dúvidas sobre as questões propostas são trabalhadas de perto, cada grupo pode trazer um tipo diferente de abordagem para a mesma questão. A sala de aula é um espaço de ricas discussões trazidas pelos estudantes, e o professor deve estar atento e pronto para propiciar momentos de bons questionamentos, de investigações e construção de conhecimento. “Os professores desempenham papel fundamental na vida dos alunos. São mentores, amigos, vizinhos e especialistas. Manter interações face a face com os professores é experiência inestimável para os estudantes”. (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 21).

Quanto ao gerenciamento da sala de aula, são comuns relatos de professores alegando possuir na sua turma um estudante que sempre gosta de tirar a atenção dos demais, fazendo piadas, colocando-se no centro das atenções, desconcentrando a turma. Bergmann e Sams (2016) afirmam que a SAI muda o gerenciamento da sala de aula, porque o professor está trabalhando com pequenos grupos de estudantes e não mais dando uma aula expositiva. Com isso, aqueles estudantes que geralmente apresentavam fatores de dispersão passam a ser ignorados, e suas encenações não contam mais com plateia. Com o decorrer das aulas, esses estudantes “ou já não tinham público ou não mais se sentiam entediados, dispondo-se a mergulhar na proposta de aprendizagem” (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 25).

Outro argumento apresentado é em relação a como se dá a conversa do professor com os pais dos estudantes quando se inverte a aula. Como os pais têm acesso à aula em casa, eles querem saber se os filhos estão aprendendo, se estão participando dos grupos em sala e o que podem fazer para que seu filho aprenda melhor. Essas preocupações concedem à educação aliados para se promover um estudo de quais fatores podem ser trabalhados com os jovens para que eles se tornem melhores aprendizes.

Quando o professor coloca sua aula na internet e sai do espaço fechado entre quatro paredes, de tijolos, que é a escola, ele está “derrubando” mais uma vez as paredes de sua sala de aula. Ao postar uma aula publicamente, o professor mostra o que quer dizer e está democratizando a educação, mas também se expondo. Ele assume que deixa de ser o detentor do conhecimento e socializa-o. Dessa forma, sua aula, seus atos, seus ensinamentos podem tomar uma dimensão que não se pode mensurar, não há condições de se saber as infinidades de consequências. É comum professores de Matemática ouvirem em reuniões de pais que eles não sabem a matéria para ajudar seu filho a fazer a tarefa de casa. Com a inversão, com a transparência da aula, os pais estão aprendendo junto com seus filhos e colaborando para o processo de aprendizagem tanto do filho quanto do grupo de colegas, uma vez que leva para a escola questionamentos produzidos em casa.

Com a inversão da sala de aula, espera-se que o professor consiga realmente desenvolver uma cultura de aprendizagem, em que os estudantes tenham compromisso com a aprendizagem e não em fazer as atividades propostas pelo professor como obrigação.

> Tentamos deliberadamente transformar nossas salas de aula em lugares onde os alunos se dediquem a atividades que consideram importantes, em vez de apenas se livrarem de obrigações. (...). Nosso objetivo é o de que os alunos aprendam tanto quanto possível e que realmente compreendam o conteúdo de nossas aulas. Quando os alunos percebem que estamos ao seu lado, eles respondem dando o melhor de si. (BERGAMANN; SAMS, 2016, p. 21).

O estudante demanda atenção da escola. Segundo Fanfani (2000), ele quer que a escola valorize e considere seus interesses, suas expectativas e conhecimentos; que a escola dê lugar ao seu protagonismo e não se restrinja a programas e conteúdos escolares.

Os autores também abordam a importância de conscientizar os estudantes de que eles deveriam sair do modo de pensar passivo quando pensam: “você é responsável por me ensinar a ir para o modo ativo: “Eu sou responsável pelo que aprendo e pelo que não aprendo”. (BERGMANN; SAMS, 2016 p. 26).

No Brasil, a SAI tem sido tema de interesse de vários pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. Quando comecei minhas pesquisas*,* em meados de 2016, consegui poucos materiais brasileiros de estudo na área da educação. Em Educação Matemática, menos ainda, pois encontrei com mais facilidade trabalhos voltados para o estudo de línguas estrangeiras e para a área da saúde. Se refinarmos esta pesquisa para a educação básica, os resultados são mais raros ainda, pois nas dissertações encontradas a abordagem direciona-se para cursos superiores.

2.5 A interação das pessoas com as mídias

A SAI possivelmente é um espaço fecundo para aumentar a interação entre as pessoas, mediadas pelas tecnologias digitais. Podemos pensar numa perspectiva em que o conhecimento está em constante elaboração e “re-elaboração”, tendo em vista a demanda de informações ofertadas no mundo conectado pela internet. Todos os dias, em todo o mundo, as pessoas estão reabastecendo o celeiro do mundo virtual, cabe à escola, e especialmente ao professor, selecionar as sementes boas para que a educação possa colher bons frutos desse rizoma de informações.

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015) afirmam que “as tecnologias digitais modificam o ambiente no qual estão inseridas, transformando e criando novas relações entre os envolvidos no processo de aprendizagem” (p. 50). Cabe-nos encontrar indícios de que essas transformações e essas relações trazem contribuições para o processo de aprendizagem e construção de conhecimento. Nos meus 18 anos de magistério pude experienciar momentos únicos em que a “aula na sala de informática” promoveu descobertas que foram, inclusive, surpresas para mim. Pude perceber que, quando o estudante está envolvido no processo, envolvido na aula, a mídia pode ser um veículo de estímulo e de possibilidades para a sua curiosidade. Por outro lado, também trago experiência de que, quando o estudante não quer fazer, não adianta delegar somente às tecnologias melhores condições de aprendizado, porque isso chega a ser utópico. Acredito na relação professor-tecnologia-estudante, em que a tecnologia representa um núcleo repleto de possibilidades, mas que requer ação humana, seja do educando ou, se necessário for, da sua interação com o professor. Para que possa se articular uma construção de conhecimento, a relação tecnologia-estudante pode necessitar da intervenção de um professor mediador do processo de descobertas e engajamento, ainda que isso seja um processo que requeira persistência e constância.

O psicólogo russo Oleg Tikhomirov (1981 apud BORBA, 1999) discute três teorias a respeito da forma como lidam o computador e a cognição humana. A primeira tem a ver com a ideia de que o computador substitui o ser humano; a segunda traz uma ideia de suplementação – o computador como complemento para o ser humano –, baseada na teoria da informação; e a terceira teoria é sobre a reorganização do pensamento. Nessa última, Tikomirov “defende que a informática exerce papel semelhante à linguagem na teoria vigostskiniana”. Ele sustenta que o computador regula a atividade humana. Embasado nas teorias das tecnologias da inteligência e coletivos pensantes de Levy (1993) e do psicólogo russo Oleg Tikhomirov (1981 apud BORBA, 1999) enuncia a metáfora "seres-humanos-com-mídias em que o

> conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por um só indivíduo humano, ou por coletivos compostos apenas por humanos (apud BORBA; VILLARREAL, 2006, p. 23).

Nesse sentido, acrescenta-se que a mídia pode colaborar com a reorganização do pensamento matemático e que as "tecnologias não são neutras ao pensamento, que a produção do conhecimento matemático é condicionada pela mídia utilizada" (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 40). O constructo seres-humanos-com-mídia opera no sentido de que o conhecimento é construído coletivamente e de que os humanos, ao lidarem com a mídia, seja ela escrita, oral ou multimídia, têm seus pensamentos reorganizados. Como são utilizadas videoaulas para trabalhar com a SAI, será empregada a metáfora **seres-humanos-com-vídeos** para compreender como os estudantes relacionam-se com essas mídias e como os vídeos podem ajudá-los a construir seus conhecimentos.

Moran (2015, p. 47) destaca que "a escola ainda não acordou para a importância do incentivo ao vídeo, tanto institucional como didático", e faz um convite à reflexão sobre os perigos do encantamento que as tecnologias digitais podem trazer aos jovens se eles não tiverem uma orientação do professor. Facilmente eles podem utilizar as tecnologias digitais como entretenimento e não como recurso pedagógico: "sem planejamento adequado, as tecnologias dispersam, distraem e podem prejudicar os resultados esperados" (MORAN, 2015, p. 59).

CAPÍTULO III - PROPORCIONALIDADE

Antes de iniciar as considerações acerca das reflexões teórico-práticas sobre o ensino de proporcionalidade, gostaria de retomar a justificativa da escolha deste tema para esta pesquisa e como esse fato acabou direcionando muito este trabalho. Estava dentro de sala de aula de uma turma de 8º ano do ensino fundamental, final do ano letivo, combinando com os estudantes os valores da avaliação e do trabalho de recuperação. Para isso eu utilizava porcentagens ao invés de valores numéricos, mas percebi que eles não estavam compreendendo quais seriam as pontuações das atividades.

Essa situação deixou-me incomodada, e dessa forma o conteúdo *proporcionalidade* passou a ser motivo de preocupação e reflexão em minhas aulas com essa turma, o que me levou a escolher esse tema para trabalhar em minha pesquisa, pois acreditava que estudantes do 8º ano já deveriam ser capazes de compreender o que seria "regra de três" - era assim que eu me referia a esse conteúdo naquela época.

Por mais que estivesse preocupada com o fato de que os estudantes do 8º ano não compreendiam "regra de três", muito provavelmente não ensinaria proporcionalidade de uma forma totalmente desvinculada de regras mecânicas e, possivelmente, o faria sem preocupar-me com o raciocínio proporcional (RP). No mestrado comecei os estudos de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do RP. Uma de minhas professoras percebeu que eu havia me referido ao ensino de proporcionalidade apenas mencionando a expressão "regra de três", e então ela me sugeriu estudar esse conteúdo. Com isso pude perceber que, assim como meus educandos, eu também tinha muito o que aprender sobre o ensino de proporcionalidade.

Com o mestrado, deparei-me com a oportunidade de reelaborar meu trabalho docente em vários aspectos. Em relação ao conteúdo matemático em questão, fui construindo um olhar diferenciado e mais elaborado. Com lentes de Karplus et al. (1983); Lesh, Post e Behr (in HIEBERT; BEHR, 1988), Lamon (in LESTER, Jr., 2007), Costa e Ponte (2008), Ponte et al. (2010), Silvestre (2012), Torre et al. (2013), Miranda (2016) e outros tenho aprendido a olhar para o ensino de proporcionalidade de forma a buscar meios que possibilitem aos educandos o reconhecimento da proporcionalidade nas situações ao invés de somente memorizar regras e procedimentos.

Proporcionalidade é um conteúdo presente em diversas ocasiões práticas da vida e de grande importância para ser trabalhado na escola. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) refere-se ao conteúdo de proporcionalidade como ideia fundamental da Matemática e ressalta:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2016, p. 266).

Na BNCC o conteúdo de Matemática está dividido em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Proporcionalidade é mencionada como habilidade necessária nas unidades Números, Álgebra e Geometria e, tendo em vista que não há como ensinar proporcionalidade sem compreender o que são grandezas, é um conteúdo de muita relevância no ensino de Matemática. É importante ressaltar, contudo, como já mencionado no capítulo anterior, que a BNCC realça, em diferentes pontos, que o ensino de proporcionalidade deve ocorrer "sem utilização da regra de três".

No âmbito municipal, nas Proposições Curriculares da Prefeitura de Belo Horizonte – PBH, os conteúdos de Matemática estão organizados em Blocos de Conteúdos, que é a mesma proposta de organização dos Parâmetros Curriculares Nacionais: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação, sendo que no texto voltado para o 3º ciclo o bloco Números e Operações assume o título de Números, Operações, Álgebra e Funções. De acordo com tais proposições, para contemplar as capacidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, o ensino de Matemática deve adotar quatro tipos de abordagem: *Introduzir*, *Trabalhar, Consolidar e Retomar*:

> **Introduzir** (I) – Tipo de abordagem que leva os educandos a se familiarizarem com conceitos e procedimentos matemáticos escolares, tendo em vista as capacidades que já desenvolveram em seu cotidiano ou na própria escola.
> **Trabalhar** (T) – Tipo de abordagem que explora, de modo sistemático, as diversas situações-problema que promovem o desenvolvimento das capacidades que serão enfocadas pelo professor.
> **Consolidar** (C) – No contínuo processo de aprendizagem dos educandos, é necessário sedimentar os avanços que ocorreram em seus conhecimentos.
> **Retomar** (R) – Ao se introduzir o trabalho pedagógico com uma determinada capacidade, aspectos que se relacionam a outra(s) capacidade(s) já consolidada(s) necessariamente terão de ser retomados, sendo ampliados na medida em que se trabalha sistematicamente com essa nova capacidade a ser desenvolvida. (BELO HORIZONTE, 2012, p. 23).

As Proposições Curriculares da PBH compreendem que "é importante destacar que o conceito de proporcionalidade é necessariamente presente em diversas situações-problema relacionadas aos quatro blocos de conteúdo, em todos os ciclos" (p. 37). Tais proposições curriculares, portanto, ressaltam a importância da sua consolidação:

> [a]s capacidades/habilidades relacionadas a esse conceito devem ser consolidadas, entretanto, no 3º Ciclo, quando os educandos passam a analisar explicitamente as situações-problema nas quais ocorre variação proporcional (direta e inversamente) entre grandezas, estabelecendo estratégias de resolução, entre elas, a regra de três. (BELO HORIZONTE, 2010, p. 37).

Como consolidar algo que, a meu ver, não sinalizava início de construção? Nesse sentido, iniciamos o trabalho com a turma, agora no 9º ano, com o ensino de proporcionalidade, de forma a propiciar o início de uma construção que sabemos ser longa, mas com a certeza de que nosso objetivo era buscar formas de estimular o desenvolvimento do RP dos estudantes.

Este capítulo foi estruturado da seguinte forma: primeiramente será feita uma reflexão sobre o ensino de proporcionalidade com a utilização da regra de três, em seguida um referencial teórico sobre o ensino de proporcionalidade, especificamente em relação ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Para tal se faz necessário compreender alguns pontos relevantes referentes à utilização de estruturas multiplicativas, tipos de problemas de proporcionalidade considerados na literatura, estratégias desenvolvidas e dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao lidar com esse conteúdo.

3.1 Uma reflexão sobre a utilização da regra de três no ensino de proporcionalidade

Ao nos referirmos ao ensino de proporcionalidade de forma sistematizada e mecânica, trazemos um ponto de importante reflexão, que é o ensino da regra pela regra, sem questionamentos, sem análises de situações-problema que estimulem o estudante a pensar, a perceber e analisar o que está sendo proposto e criar estratégias para resolver tais situações.

Em nossas pesquisas, pudemos perceber que há uma tentativa por parte de alguns pesquisadores/professores de abolir, no Brasil, a expressão "regra de três" do ensino de proporcionalidade. O professor Geraldo Ávila, na década de 80, escreveu dois artigos sobre proporcionalidade, um intitulado "Razões, proporções e regra de três" e o outro "Ainda sobre regra de três" para a Revista do Professor de Matemática – (RPM[13]). Nesse último, ele explicita sua sugestão para se abolir no Brasil a expressão "regra de três".

Essa é uma iniciativa importante que faz parte da história da Educação Matemática, apesar de que, conforme as pesquisas de Neto (2014), no Brasil, na década de 60, com o

[13] RPM – Revista do Professor de Matemática é uma iniciativa da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática –, que consiste em uma coletânea de publicações periódicas (geralmente semestral) destinada a professores de Matemática, especialmente dos anos finais do ensino fundamental e médio. Teve seu início na década de 80. A revista publica artigos que sejam acessíveis ao professor de ensino básico e a pessoas que estejam cursando licenciatura em Matemática. No endereço www.rpm.org.br é possível ter acesso a vários exemplares gratuitamente.

"Movimento da Matemática Moderna", houve uma reorganização do ensino de Matemática em que foi elaborada uma proposta que recebeu o nome de "Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática, em 1963 e (...) em nenhum momento aparece a expressão Regra de Três nessa nova proposta ao referir-se ao conteúdo de proporcionalidade" (NETO, 2014, p. 7). Parece, contudo, que não foi adiante, pois atualmente é muito comum encontrarmos a expressão "regra de três" em nossos livros didáticos.

Lima (1986) afirma que o ponto crucial do ensino de proporcionalidade se situa na definição precisa de "grandezas proporcionais". Segundo o autor, "uma vez entendido com bastante clareza este conceito, todos os problemas relativos a regra de três e proporções se resolvem naturalmente, sem haver necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios" (LIMA, 1986, p. 21).

A função de duas variáveis (grandezas) que caracteriza a proporcionalidade direta entre essas variáveis (grandezas) é a função linear. Karplus, Pulos e Stage (1983) defendem a importância de associar proporcionalidade ao estudo da função linear, os estágios do pensamento proporcional, os tipos de comparação e as teorias sobre pensamento proporcional.

Lima et al. (1996, p. 94) demonstram que a chave para determinar, em todas as situações, se uma função é linear ou não é o Teorema Fundamental da proporcionalidade[14]:

> Seja f: R→R uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:
>
> 1. $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in Z$ e todo $x \in R$.
> 2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in R$.
> 3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in R$

Numa busca histórica ao compêndio Aritmética Progressiva de Antônio Trajano, cuja primeira edição data de 1883, segundo Lima et al. (1996), talvez esse seja o texto de mais longa duração no Brasil. Trajano ao se referir ao estudo de proporcionalidade deu a seguinte definição:

> Duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (TRAJANO, 1883 apud LIMA et al., 1996, p. 92).

---

[14] Vale ressaltar que, quando o Teorema Fundamental da proporcionalidade for aplicado às grandezas, cujas medidas são expressas em valores positivos, deve-se utilizar a função f definida de $R_{+}^{*} \rightarrow R_{+}^{*}$ (conjunto dos números reais não negativos).

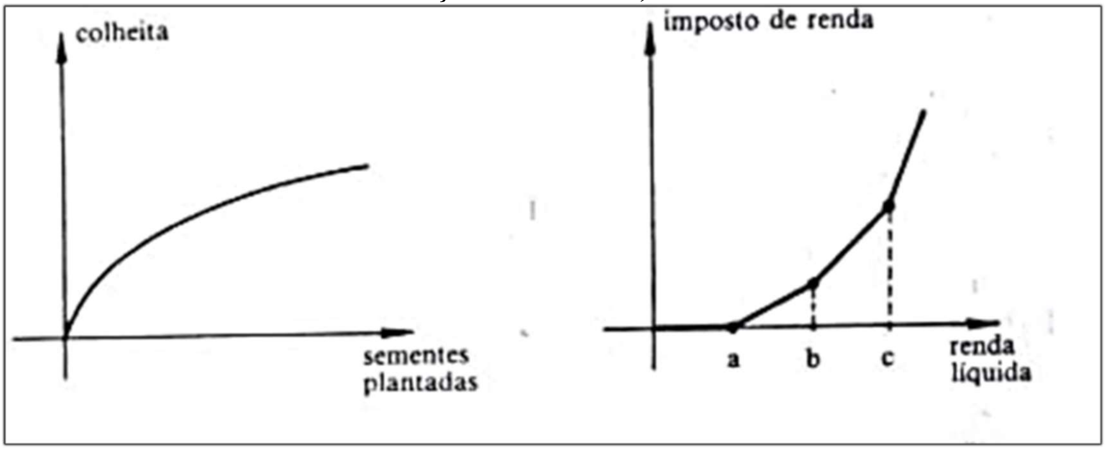
Traduzindo as grandezas propostas por Trajano por números reais, Lima et al. (1996, p.92) enunciam:

> Uma proporcionalidade é uma função $f: R \to R$ tal que para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c \,.\, f(x)$ (proporcionalidade direta) ou
> $f(cx) = \frac{f(x)}{c} \quad se\ c \neq 0$ (Proporcionalidade inversa)

Nas duas definições propostas por Trajano, tanto a de proporcionalidade direta quanto inversa, são apresentadas a importância do reconhecimento da constante de proporcionalidade bem como o raciocínio proporcional explicitado com as estruturas multiplicativas ao referir-se à multiplicação e à divisão.

A apropriação errônea de tais definições pode levar o professor de Matemática a equivocar-se ao afirmar que duas grandezas x e y são diretamente proporcionais: se x aumenta e y também aumenta (ou se x diminui e y também diminui), o que não é verdade. Pode haver situações em que as duas grandezas aumentam simultaneamente, conforme Gráfico 1. Contudo, não são características de proporcionalidade.

Gráfico 1 - Funções crescentes, mas não lineares



Fonte: RPM 09, 1986, p. 29.

Em 1883, quando Trajano define que duas grandezas são proporcionais enunciando que: "(...) multiplicando-se uma quantidade de uma delas **por um número**, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número" (TRAJANO, 1883 apud LIMA et al., 1996, p. 92), ele está enfatizando exatamente o que Ponte et al. (2010) chamam de **regularidade**, que é o reconhecimento da constante de proporcionalidade.

O ensino de proporcionalidade, portanto, que não levar em conta a definição exata de proporcionalidade, ou seja, que não trabalhar com a constante de proporcionalidade, com o teorema fundamental da proporcionalidade, estará sujeito possivelmente a lidar com os erros conceituais.

O ensino desse conteúdo sem estímulo ao raciocínio dos estudantes pode fazer com que os jovens tenham uma visão reducionista de problemas de proporcionalidade ao utilizarem, por exemplo, a regra de três em qualquer situação. Lima (1986) diz que o professor deve alertar seus estudantes a utilizar modelos preestabelecidos, como a regra de três. Com um exemplo clássico de utilização da regra de três, aquele referente ao número de operários construindo uma casa, o autor diz que

> em geral, supõe-se que o tempo necessário para isso é inversamente proporcional ao número de operários. Se tal fosse verdadeiro sem restrições então, empregando-se um número suficientemente grande de operários, poder-se-ia construir uma casa num tempo arbitrariamente pequeno: um segundo, por exemplo. Mas não é bem assim. (LIMA et al., 1986, p. 28).

O ensino de proporcionalidade deve promover no estudante a capacidade de tecer uma análise crítica das situações-problemas pelo professor apresentadas e não somente ensinar ao jovem uma regra mecânica como se fosse possível ser utilizada em qualquer situação indistintamente.

3.2 O raciocínio proporcional

Silvestre e Ponte (2008) acreditam que o raciocínio proporcional tem se tornado alvo de intensos estudos depois de ter sido teorizado pelos psicólogos Inhelder[15] e Piaget (1958); Tourniaire; Pulos (1985 apud SILVESTRE; PONTE, 2008), como ponto formal de estágio de desenvolvimento da inteligência humana. Nesse sentido, reforça-se a importância de não se ensinar proporcionalidade na escola, baseando-se apenas em memorizações e sistematizações de regras mecânicas, por exemplo, com a “regra de três”, sem dar o devido enfoque ao desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes.

Estudos sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional têm sido abordados por diversos pesquisadores no Brasil e no mundo, como consta em Viana e Miranda (2016), Maranhão e Machado (2011), Behr et al. (1992), Costa e Ponte (2008), Lamon (1993, 2005,

---

[15]Barbel Inhelder, psicóloga e pedagoga suíça, nascida em 1913 e falecida em 1997, foi aluna do psicólogo Jean Piaget, sendo depois sua colaboradora em diversos trabalhos acadêmicos.

2007), Lesh et al. (1988), Ponte e Marques (2011), Silvestre (2009, 2012), Spinillo (1992, 1993, 2002), Torre et al, (2013), e outros.

De acordo com Lamon (2005), o raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade. Segundo a autora, é a condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações com base na proporcionalidade.

O *Rational Number Project* - RNP[16] é um projeto formado por pesquisadores que têm buscado elementos para compreender como se dá o processo de aprendizagem dos números racionais em crianças e adolescentes. Os principais pesquisadores desse projeto são Merlyn J. Behr, Kathleen Cramer, Guershon Harel, Richard Lesh, Thomas Post, os quais têm tecido importantes contribuições em parceria com pesquisadores de todo o mundo, para o ensino de números racionais inclusive proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Outro pesquisador que tem importante nome nesse estudo é Gèrard Vergnaud, discípulo de Piaget. Seus estudos têm focalizado na aprendizagem e no ensino da Matemática, particularmente nos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas (MOREIRA, 2002), as quais serão apresentadas na sequência.

3.2.1 As estruturas multiplicativas

As estruturas multiplicativas compreendem as estratégias de resolução dos problemas de proporcionalidade baseadas em operações de multiplicação ou divisão. Lamon (2005 apud COSTA; PONTE, 2008) afirma que compreender as estruturas multiplicativas nos problemas de proporcionalidade consiste em uma das tarefas mais difíceis para as crianças. As crianças operam mais espontaneamente com as estruturas aditivas que as multiplicativas.

Baxter e Junker (2001) defendem a importância de se ensinar proporcionalidade com ênfase no raciocínio proporcional fazendo uma associação com a dificuldade dos estudantes em perceber o princípio multiplicativo ao invés do aditivo.

Contudo, em diversos estudos (BEHR et al., 1992; KARPLUS et al., 1983; LESH et al., 1988; PULOS et al., 1981; COSTA; PONTE, 2008) há o reconhecimento de que a estrutura multiplicativa é um marco essencial para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

As estruturas multiplicativas consideradas como marco para o desenvolvimento do RP estão situadas nas teorias dos campos conceituais de Vergnaud:

---

[16] Maiores informações sobre o RNP disponível em: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject.

> [a] teoria dos campos conceituais propõe que o desenvolvimento do conhecimento se dê a partir do sujeito em ação, com o conceito inter-relacionado com diversos conceitos, formando uma rede. Desta forma, de acordo com Vergnaud (1990), campo conceitual é um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão (MIRANDA, 2016, p. 38).

Segundo Costa e Ponte (2008), "Vergnaud (1988) e Singer, Kohn e Resnick (1997) consideram que as estratégias dominantes baseiam-se em raciocínios escalares porque muitos problemas de razão e proporção podem ser resolvidos por adições sucessivas" (p. 67).

Costa e Ponte (2008), Silvestre e Ponte (2009), Miranda e Viana (2016), entre outros, consideram que as estruturas multiplicativas mais utilizadas pelos estudantes nas resoluções de atividades são as de operador escalar e funcional.

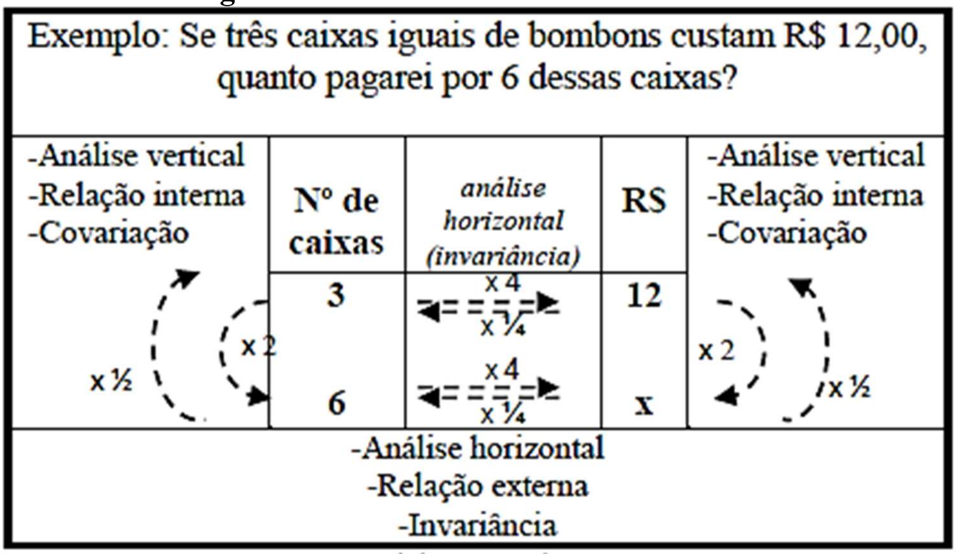
Lamon (1994) classifica as estratégias multiplicativas como "dentro" (escalar) e "entre" (funcional) variáveis, e é nessa perspectiva da autora que são abordadas as relações entre as grandezas e trabalhada a noção de covariação de grandezas e invariância entre grandezas. Segundo a interpretação de Ponte et al. (2010), "o raciocínio escalar ocorre quando se realizam transformações 'dentro' da mesma variável e o raciocínio funcional ocorre quando se estabelecem relações 'entre' duas variáveis diferentes". Há autores que se apoiam na relação de covariação para sustentar o raciocínio proporcional. Lesh et al. (1988) defendem que o raciocínio proporcional

> está ligado com inferência e com predição – envolvendo o pensamento qualitativo e quantitativo – e implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (a invariância) e na noção de que estas grandezas variam em conjunto (a covariância) (apud VIANA; MIRANDA, 2016, p. 2).

Para explicar covariância e invariância, Miranda e Viana (2016) elaboraram a Figura 1 como referência do seguinte problema: se três caixas iguais de bombons custam R$ 12,00, quanto pagarei por 6 dessas caixas?

Na Figura 1 é apresentada a estratégia de pensamento do estudante: se o número de caixas dobrou, então o preço dobrará. O pensamento envolve análise vertical, ele faz comparação entre as grandezas e apropria-se do escalar 2.

Figura 1 - Covariância e Invariância



Fonte: Viana e Miranda (2016, p.196).

Essa relação é denominada por Silvestre e Ponte (2009) e outros pesquisadores de covariação de grandezas (refere-se às relações multiplicativas dentro das variáveis). Vergnaud (2009) denomina análise vertical e está relacionada com as estratégias de isomorfismos, sobre as quais se falará ainda neste capítulo. Essa estratégia, a de raciocínio escalar, dizemos ser de relação interna (*within relation*) "quando existe uma relação inteira entre os elementos da mesma grandeza tende a haver a aplicação de uma estratégia relacionando esses dados – relação interna (*within relation*) – recorrendo ao raciocínio escalar" (COSTA; PONTE, 2008, p. 67).

Por outro lado, ainda nessa mesma questão, o estudante pode associar o número de caixas com o preço, pensando que 3, para dar 12, basta multiplicar por 4. Nesse raciocínio, se multiplicar 6 por 4, encontrará o valor procurado, que é 24, ou seja, uma comparação entre as grandezas que são proporcionais. Vergnaud (2009 apud VIANA; MIRANDA, 2016) esclarece que se trata da chamada análise horizontal ou funcional – centrada na ideia de um operador-função, isto é, uma relação invariável (preço por quantidade de caixas de bombons), que permite passar de uma grandeza a outra. Assim dizemos que, nesse caso, a relação é externa ou uma análise horizontal, invariância.

Na segunda situação, quando a relação inteira é entre elementos de grandezas diferentes, "tende a haver outro tipo de estratégia – relação externa (*between relation*) – recorrendo ao raciocínio funcional" (COSTA; PONTE, 2008, p. 67).

3.2.2 Os problemas de proporcionalidade, estratégias de resolução e as dificuldades dos estudantes

Lamom (1997) assim como Silvestre (2012) afirmam que apenas os procedimentos de natureza multiplicativa (nos campos conceituais de Vergnaud) são indicadores de raciocínio proporcional.

De acordo com Vergnaud (1983), existem três classes de estruturas multiplicativas: (i) isomorfismo de medidas; (ii) produto de medidas; e (iii) proporção múltipla. A classe que se refere à proporção direta é o isomorfismo de medidas, e por isso serão tratados somente problemas nesse contexto. Os problemas que Vergnaud (1983) apresenta como isomorfismo de medidas, segundo Silvestre (2012), são resolvidos utilizando-se as estratégias de fator escalar (covariância), fator funcional (invariância), valor unitário e também a regra de três (produto cruzado). Segundo a autora,

> Vergnaud (1983) indica que deve ser tomado em consideração que a complexidade de um problema varia bastante quanto às mudanças numéricas (números grandes, razões escalares pequenas e grandes, coeficientes constantes pequenos ou grandes, decimais, frações próprias) e às mudanças de domínio (preços, produção, consumo, velocidade, geometria, densidade). (SILVESTRE, 2012, p. 24).

Lesh, Post e Behr (1988) categorizaram os problemas de proporcionalidade em 7 tipos:

1) **Problemas de valor omisso**: A / B = C / D, onde três valores são fornecidos e o objetivo é encontrar a parte faltante do segundo par.

2) **Problemas de comparação**: A / B <=? => C / D onde todos os quatro valores são dados, e o objetivo é julgar o que é verdadeiro:
A / B < C / D ou A / B = C / D ou A / B> C / D

3) **Problemas de transformação**:
(a) julgamentos de direção de mudança:
Uma equivalência é dada da forma A / B = C / D.
Então, um ou dois dos quatro valores A, B, C ou D são aumentados ou diminuídos em uma certa quantidade, e o objetivo é avaliar qual relação (<,>, ou =) é verdadeira para os valores transformados.
(b) transformações para produzir igualdade:
É dada uma desigualdade da forma A / B <C / D.
Então, para um dos quatro valores A, B, C ou D, um valor para x deve ser encontrado de modo que, por exemplo, (A + x) / B = C / D.

4) **Problemas de valor médio:** dois valores são dados, e o objetivo é encontrar o terceiro.
(a) médias geométricas: A / x = x / B
(b) médias harmônicas: A / B = (A-x) / (x-B)

5) **Proporções que envolvem conversões de índices, taxas e frações**: a proporção de meninos para meninas em uma classe foi de 15 a 12. Que fração da classe eram meninos?

> 6) **Proporções envolvendo rótulos de unidades, bem como números**: (3 pés) / (2 segundos) = x milhas por hora ou 5 pés / segundo = x milhas / hora
>
> 7) **Problemas de representação**: uma relação (ou fração ou taxa ou quociente) é dada em um sistema de representação e o objetivo é retratar a mesma relação usando outro sistema de representação (Tradução nossa).

Segundo Ponte et al. (2010), os problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta podem ser agrupados do seguinte modo:

> **Problemas de valor omisso**, em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto,
> **Problemas de comparação**, em que são dadas duas razões e pede-se para indicar qual é maior, menor ou se são iguais,
> **Problemas de conversão entre representações**, nos quais, a partir dos dados representados num determinado sistema, se pede a sua representação (PONTE et al., 2010, p. 4).

Encontram-se na literatura pesquisada (LESH et al.,1988; CRAMER et al. 1993; LAMON, 1993; PONTE et al., 2010) diferentes categorizações para os tipos de problemas que envolvem proporcionalidade direta. Entretanto, entende-se que todos concordam com a importância de reconhecer as estruturas multiplicativas nessas atividades. A opção para este trabalho foi adotar a categorização de Ponte et al. (2010), e então serem abordados os problemas de valor omisso, os de comparação e aqueles que envolvem interpretação gráfica.

Os problemas de valor omisso são aqueles em que são dadas três informações e é pedida uma quarta. Na proporção A:B = C: D, um dos termos é faltante, e uma das estratégias para a resolução desse tipo de atividade é buscar a relação reconhecida entre as grandezas e que tipo de regularidade os estudantes conseguiriam reconhecer: covariância ou invariância.

Os problemas de comparação são aqueles em que geralmente se trabalha comparação entre razões e proporções, O educando deve ser capaz de estabelecer a relação entre os dados A, B, C e D, distinguir as duas grandezas envolvidas, estipular as relações A:B e C:D e compará-las, analisar se há situação de equivalência ou se uma é maior que outra.

Nas atividades que envolvem conversão entre representações e análise gráfica, espera-se que o estudante seja capaz de reconhecer se o gráfico representa ou não uma situação com regularidade que envolva proporcionalidade ou não, e, caso exista, o valor da constante de proporcionalidade. De acordo com Post, Behr e Lesh (1988), a estratégia da *interpretação gráfica*, em que se usam gráficos para identificar razões equivalentes ou para identificar um valor desconhecido, pode ser considerado um problema de valor omisso.

As estratégias para resolver os problemas de proporcionalidade, segundo Ponte et al. (2010), consistem em: i) razão unitária, no Brasil conhecida como redução à unidade; ii) fator escalar (covariância); iii) comparação das razões e iv) algoritmo do produto cruzado ou regra de três.

Para além do tipo de problema de proporcionalidade, há elementos que devem ser considerados, pois representam fatores que influenciam diretamente na performance dos estudantes. Tourniaire e Pulos (1985) alegam que as grandezas, as relações entre elas, ou seja, o contexto das variáveis (grandezas); as estruturas dos problemas bem como os valores numéricos envolvidos na atividade são elementos que podem dar uma maior ou menor complexidade ao problema. Esses mesmos autores afirmam que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é algo lento e complexo e acrescentam: “os educadores devem lembrar que o raciocínio proporcional não é adquirido de uma só vez” (TOURNIAIRE; PULOS, 1985, p. 188. Tradução nossa). Essa referência é construída em um contexto em que os autores referem-se à transição em que o educando ainda se apropria, por vezes, do princípio aditivo, mas já sinaliza utilizar o princípio multiplicativo e se depara com aqueles elementos que podem influenciar a sua performance.

3.2.3 O caminho escolhido para ensinar proporcionalidade

Pesquisas como as de Lamon (2007), Cramer e Post (1993), Lesh, Post e Behr (1988), Karplus et al. (1983) e várias outras têm abordado os principais aspectos para o estudo do desenvolvimento do raciocínio proporcional, Silvestre (2012, p. 281) em sua tese de doutorado sistematizou esses estudos e defendeu que o raciocínio proporcional envolve três aspectos:

> (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenômeno descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e representações (texto, gráficos, tabelas, razões).

Este trabalho focará essas três condições para propor atividades que possam contribuir para o desenvolvimento do raciocínio proporcional pela exploração de regularidades, como propõem Ponte et al. (2010), pois é uma das formas pela qual os autores optam por trabalhar o princípio multiplicativo.

Silvestre e Ponte (2009) afirmam que o termo “proporcionalidade” é usado de forma ambígua para designar proporções, razões, proporcionalidade direta e raciocínio proporcional, e uma das propostas dos autores é utilizar a palavra **regularidade** para realçar uma característica da proporcionalidade. Ressalta-se que essa opção requer cuidado ao mostrar ao educando que tipo de regularidade está em questão, uma vez que podem existir outras formas de regularidades que não sejam necessariamente de proporcionalidade.

CAPÍTULO IV - PERCURSOS METODOLÓGICOS

"A inserção das TDCI no ensino provoca mudanças importantes na docência, trazendo novos desafios e possibilidades, transformando as escolas em espaços dinâmicos de aprendizagem, tornando os estudantes mais motivados a aprender e a pesquisar." (MORAN, 2013)

Neste capítulo, será apresentado o percurso de construção da pesquisa bem como o processo de coleta de dados, seu cenário, seus atores, as tomadas e os roteiros de cada cena e também o aporte seguido para a escolha das categorias e com isso as análises dos dados. Esta pesquisa é de cunho qualitativo e busca compreender os acontecimentos oriundos da prática da Sala de Aula Invertida em minhas aulas. Segundo Garnica (2004), uma pesquisa qualitativa em Educação Matemática deve ter as seguintes características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados;
> (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar;
> (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar;
> (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e
> (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

4.1 O cenário

A pesquisa foi realizada na Escola Municipal Minervina Augusta, situada no bairro Campo Alegre, em Belo Horizonte, Minas Gerais, inaugurada em 1971. Funciona nos três turnos: manhã, tarde e noite. A escola recebe estudantes do Ensino Fundamental I e II até o 9º ano e Educação de Jovens e Adultos Múltiplas Idades. Há um total de 514 estudantes e 35 professores. Possui uma Unidade Municipal de Educação Infantil – UMEI com 240 estudantes e 43 professores.

A escola encontra-se na regional norte de Belo Horizonte, a qual se subdivide em territórios N1, N2, N3 e N4. O bairro Campo Alegre está localizado no território N3, assim como os bairros Vila Clóris, Jardim Guanabara, Planalto, Floramar, Heliópolis, São Bernardo, São Tomaz e Vila Aeroporto.

A Escola Municipal Minervina Augusta possui hoje duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental. É o primeiro ano em que a escola conta com o quadro completo de turmas do terceiro ciclo, que, na Prefeitura de Belo Horizonte, compreende 7º, 8º e 9º anos.

4.2 Os atores

O trabalho foi desenvolvido em uma turma de 22 (vinte e dois) estudantes de 9º ano, sendo 11 meninas e 11 meninos, cuja faixa etária está entre 14 e 15 anos de idade.

No ano de 2017, lecionei Matemática para as duas turmas de 9º da escola. Devido ao volume de material possivelmente gerado na pesquisa e ao curto período de tempo para analisá-lo, decidimos que participaria desta pesquisa somente uma turma. Como não havia nenhum critério de escolha predeterminado no planejamento da pesquisa, resolvi entregar os termos exigidos pelo Comitê de Ética na Pesquisa (COEP) para as duas turmas (Anexo A). Entreguei os Termos de Consentimento (Apêndice A) para todos os pais e os Termos de Assentimento (Apêndice B) para todos os estudantes das duas turmas. Para ser o mais imparcial possível nessa escolha, a opção foi pela turma em que todos os estudantes e seus responsáveis concordaram com a pesquisa e entregaram os termos assinados.

A abordagem Sala de Aula Invertida foi utilizada nas duas turmas, mas, pelas razões citadas, resolvemos optar por pesquisar somente em uma.

4.3 Como se deu a coleta de dados

4.3.1 Filmando as aulas

Todas as aulas foram gravadas com duas câmeras filmadoras, de propriedade da pesquisadora, posicionadas em locais diferentes na sala de aula e um gravador de áudio. A sala de aula possui uma espécie de bancada em todo o seu comprimento, na qual colocamos as câmeras, uma na frente da sala filmando de frente para o fundo e a outra nos fundos, pegando o ângulo do fundo da sala para a frente, de tal forma que o campo visual formado abrangia toda a turma. O gravador de áudio ficou com a pesquisadora, com o objetivo de captar melhor as conversas nos atendimentos direcionados aos grupos de estudantes.

O vídeo é um importante recurso mediador do processo de registro dos fatos, pois é um ponto crucial na análise de interação do ambiente, tanto entre estudantes-estudantes quanto entre professora-estudantes. Espera-se que esses registros digitais, tanto em vídeo quanto em áudio, possam colaborar para a análise dos dados. Dessa forma, temos condições de revisitar as cenas em tempos e espaços distintos, que nos fornecerão, possivelmente, diversificados elementos à medida que nos colocarmos com olhares diferenciados a cada vez que as filmagens forem assistidas.

Pensando na possibilidade de constrangimento dos estudantes, ou qualquer outro sentimento que porventura pudesse contribuir para que eles não se sentissem à vontade diante das filmagens, optei por levar as câmeras filmadoras para a sala de aula várias vezes antes do início efetivo da pesquisa. Dizia que precisava fazer testes para evitar problemas durante as gravações. Expliquei que, se por acaso alguém não se sentisse à vontade, poderia me dizer que eu o retiraria do ângulo de gravação, sem problema algum. Para minha surpresa, o que eu percebi foi que eles não estavam nem um pouco preocupados com as gravações, como se nada de mais estivesse acontecendo.

4.3.2 Professora cooperadora

As aulas referentes ao campo desta pesquisa foram assistidas por uma professora, mestre em Educação Matemática pela UFMG, onde também se graduou em Licenciatura Matemática, que aqui chamaremos de Lorena. Ela tem 35 anos de idade, há 12 anos está no magistério, trabalhando com Ensino Fundamental e Médio. Seu olhar sobre os fatos acontecidos nas aulas pode contribuir para a construção de análises mais estruturadas. Com o auxílio das observações, ponderações, discussões e reflexões conjuntas[17] com Lorena, esperamos minimizar as subjetividades que as análises dos resultados desse trabalho possam nos trazer. Lorena se posicionava no fundo da sala, próxima a uma das câmeras. Em determinadas ocasiões ela tomou posse da câmera como forma de assegurar captura das imagens das cenas que julgou importantes para a pesquisa.

4.3.3 Diário de campo

Fiz anotações em um caderno, durante todas as aulas pesquisadas, do que eu julgava poder ser útil e relevante para a pesquisa. As anotações registram nosso olhar e reflexão no momento. É importante termos diferentes formas de coleta de dados para conseguirmos elementos que triangulem informações e nos auxiliem a encontrar as categorias de análises. O diário de campo

> é um documento que apresenta tanto um "caráter descritivo-analítico", como também um caráter "investigativo e de sínteses cada vez mais provisórias e reflexivas", ou seja, consiste em "uma fonte inesgotável de construção, desconstrução e reconstrução do conhecimento profissional e do agir através de registros quantitativos e qualitativos (LIMA; MIOTO; DAL PRA, 2007 p. 96).

[17] Infelizmente essas discussões e reflexões não aconteceram diante de posteriores incompatibilidades de horários.

A cada término de aula, eu costumava parar e refletir sobre o acontecido e então realizava os devidos registros dia a dia em meu diário de campo.

4.3.4 Entrevistando os estudantes

O processo de escuta, como nos ensina o professor Paulo Freire, é muito importante no processo de aprendizagem e ensino. Ouvir o que os estudantes têm a dizer sobre todo o processo, muito provavelmente, nos proporciona condições de aprender.

Na condição de aprendizes, fizemos um questionário com questões fechadas e abertas, para ouvir dos estudantes do que gostaram, do que não gostaram, em que podemos melhorar, em que precisamos investir, e ouvir deles também o que aprenderam, assim como sugestões para podermos aperfeiçoar esse trabalho de ensino sobre Proporcionalidade nessa abordagem de utilização de videoaulas com a Sala de Aula Invertida (Apêndice D).

Ao final dos trabalhos de pesquisa, foi aplicado um questionário com doze (12) questões fechadas e duas (2) abertas, cujo objetivo foi receber um *feedback*:

1) da prática da Sala de Aula Invertida;
2) da utilização do espaço escolar para assistir aos vídeos;
3) da opinião dos pais quanto à Sala de Aula Invertida;
4) da aprendizagem de Matemática;
5) dos níveis de interação estudante-estudante nos trabalhos em grupo;
6) dos vídeos para instruir o estudante a assistir a um conteúdo novo;
7) e até mesmo deixarem um conselho para futuros professores que desejarem utilizar a Sala de Aula Invertida.

Optamos por ouvir a opinião, os comentários e as sugestões dos estudantes em todos os tópicos mencionados, pois acreditamos que o pesquisador deva valorizar:

> a voz do estudante de forma especial, trazendo-a para a pesquisa, tentando construir modelos que validem a Matemática do estudante (em contraposição a testes ou mesmos análises qualitativas que enfocam o erro). Neste sentido, é inegável que o experimento de ensino expressa de forma eloquente ao menos um dos princípios da pesquisa qualitativa: fazer com que o humano apareça e não se esconda atrás de estatísticas. Dessa forma, apesar da complexidade deste tipo de pesquisa, é necessário ver que ela, da mesma forma que a pesquisa quantitativa, também não é neutra (BORBA, 2004, p. 10).

O questionário foi desenvolvido dentro da plataforma *on-line* Google Forms[18], sendo que o arquivo (questionário) ficou disponível durante 5 dias para os estudantes responderem – sem obrigatoriedade – quando quisessem. Apesar de o questionário conter, em sua maioria, questões objetivas, optei por conceder um prazo razoavelmente grande, porque havia questões que dependiam de os jovens conversarem com seus pais ou responsáveis. O questionário aplicado encontra-se no Apêndice A.

4.4 A Programação da pesquisa de campo

A programação inicial foi de a pesquisa começar a ser realizada a partir de meados do mês de março e de que a exposição das videoaulas se estendesse até o final do mês de abril, mas não foi assim que aconteceu.

O cenário político brasileiro, especialmente no ano de 2017, encontrava-se bastante vulnerável e fragilizado diante de tamanhas turbulências no Governo Federal. Reformas trabalhistas e previdenciárias foram propostas de forma a causar variadas divergências de opiniões entre o governo e a classe trabalhadora. Diante desse cenário, os professores da Rede Municipal de Ensino e de outras classes trabalhadoras decidiram por um período de greve, o que acabou atrasando a programação e adiando o início da pesquisa de campo. Apesar de considerar legítima e importante essa manifestação dos professores, da qual também fiz parte, precisamos ajustar o cronograma proposto para a pesquisa. A pesquisa de campo somente teve início no dia 26 de abril e encerrou-se no dia 30 de maio de 2017.

---

[18] *Google Forms* é uma ferramenta de trabalho de opinião, da empresa Google, em que nos é permitida a elaboração de questionários com respostas objetivas (fechadas) ou abertas. Essa ferramenta é disponibilizada de forma gratuita e *on-line*. Ao término da elaboração do questionário, o autor tem a opção de enviá-lo por *e-mail* para as pessoas a serem entrevistadas ou deixar o *link* (endereço eletrônico de acesso) disponível para quem desejar acessá-lo. Efetivada a coleta dos dados, o autor recebe automaticamente a resposta de cada entrevistado e, ao final, a ferramenta *Google Forms* gera gráficos estatísticos de análise das opiniões coletadas bem como apresenta todas as respostas das questões abertas.

4.4.1 Como as aulas foram planejadas

Após estudos sobre Sala de Aula Invertida, percebemos como essa etapa demandava grande empenho, pois precisávamos estar de acordo com os quatro pilares F-L-I-P da Sala de Aula Invertida. Vale relembrar os pilares:

> ***Ambiente flexível*** **-** O aprendizado flexível permite uma grande variedade de modelos de ensino**.** Educadores que aderem ao modelo podem rearranjar os espaços para acomodar melhor a sua classe, e ser mais adequado para grupos de estudo ou leituras individuais.
> ***Cultura do aprendizado*** - A educação invertida coloca o aprendiz e o aprendizado como centros da aula.
> ***Conteúdo intencional*** **-** Educadores do modelo de educação invertida se preocupam continuamente sobre como eles podem ajudar estudantes a desenvolver o entendimento de conceitos, assim como a sua capacidade de atuar com eles em mente.
> ***Educadores profissionais*** **-** O papel do professor se torna ainda mais importante nesse modelo**.** Durante o tempo da aula, eles continuamente observam seus estudantes, lhes dando feedback relevante e olhando seu trabalho. Educadores profissionais devem ser capazes de obter mais conhecimento a partir dos seus colegas, refletir sobre as suas técnicas e aceitar críticas construtivas. (FLN, 2014. Tradução nossa)

Ficou decidido trabalharmos com videoaulas, com isso, deveríamos planejar tanto a videoaula quanto as atividades presenciais subsequentes a ela.

4.4.2 Planejamento das videoaulas

Esse planejamento foi subdividido também em etapas para melhor organização dos trabalhos. Dessa forma, foi necessário o seguinte planejamento:

- preparação da pesquisadora para gravar suas videoaulas;
- preparação dos estudantes para se embrenharem no contexto Sala de Aula Invertida;
- explicação aos pais ou responsáveis pelos estudantes sobre Sala de Aula Invertida;
- preparação das videoaulas de Matemática sobre o conteúdo escolhido.

Decidimos que as videoaulas, preferencialmente, não contivessem minha imagem como professora. Diante dessa decisão, percebi a urgência de aprender a lidar com imagens, já que precisava me preparar para produzir meus vídeos, algo totalmente novo para mim. Já tinha produzido algumas videoaulas e as disponibilizado na internet, mas grande parte delas era proveniente de pedidos de estudantes, de resolução de atividades específicas de suas solicitações. Com uma câmera amadora, eu me posicionava em frente a um quadro branco, em minha própria casa, e começava a explicar a atividade pedida. Até então as minhas videoaulas não requeriam de mim praticamente nenhum conhecimento sobre produção de vídeos.

Agora, se eu quisesse gravar minhas próprias aulas, em um modelo diferente, ou seja, sem eu me posicionar como professora ou “provedora de informações”, havia a necessidade de aprender um pouco sobre editoração de vídeo e imagens.

Para tanto, fiz um curso de cinco aulas particulares para lidar com imagens e mais cinco para editoração de vídeos. Aprendi também por meio de tutoriais em videoaulas disponíveis na internet. Minha preocupação, além do conteúdo matemático em questão estar de acordo com minha proposta, era o cuidado com direitos autorais de imagens, áudios e vídeos.

Os programas de computadores objeto desses cursos foram o *Adobe Illustrator*[19] e o *Adobe Premiere*[20]. Eles trabalham com vetores ou as chamadas imagens vetoriais[21]. Uma imagem vetorial pode ser trabalhada fazendo-se alterações em cores, formatos e dimensões, o que nos concede a apropriação de sua autoria. Existem na internet bancos gratuitos de imagens vetoriais facilmente encontrados em sites de busca, como o Google. Basta digitar “banco de vetores gratuitos” que o site retorna várias opções. Nesses bancos busquei os elementos para a confecção de meus vídeos. Escolhia o que estava disponível gratuitamente e também tinha cuidado para serem livres de direitos autorais. Mesmo assim eu efetuava pequenas alterações em cada vetor.

No que diz respeito a videoaulas dentro da abordagem Sala de Aula Invertida, resolvemos que inicialmente atenderíamos às sugestões de Bergmann e Sams (2016), que eles dizem sobre a importância de explicar aos estudantes como se comportar para assistirem a videoaulas dentro desta proposta. Pensamos na importância de conscientizar os estudantes de que assistir a uma videoaula dentro da abordagem Sala Aula Invertida implicaria ter atenção aos conteúdos apresentados, pois eles seriam abordados de alguma forma na sala de aula presencial e, por isso, demandaria mais atenção, comprometimento, registro da matéria, registro de dúvidas e questionamentos.

É imprescindível que os estudantes sejam conscientizados de que assistir a um vídeo nesse contexto não tem as mesmas características de assistir a um vídeo de entretenimento, pois deveriam levar para a escola, na aula seguinte, o relatório da videoaula assistida.

[19] **Adobe Illustrator** é um editor de imagens vetoriais desenvolvido e comercializado pela Adobe Systems.

[20] **Adobe Premiere** é um programa de computador que faz edição de vídeos. É da Adobe Systems e trabalha na interface do Illustrator.

[21] **Imagem vetorial** é uma imagem desenvolvida a partir de uma combinação matemática de vetores. As imagens vetoriais são amplamente utilizadas quando se deseja uma qualidade de resolução independentemente do tamanho da reprodução. Em outras palavras, uma imagem que é construída por vetores não perde definição.

Independentemente de no vídeo ser solicitada ou não alguma atividade ao estudante, esse deveria apresentar o relatório à professora. No início da pesquisa foi elaborado um modelo de relatório para que eles tivessem uma noção do que era esperado registrar, o que não significava que não pudessem registrar outros aspectos não abordados no modelo. Foram entregues aos estudantes alguns exemplares com esse modelo, mas, no decorrer da pesquisa, fui dando autonomia para esses registros a fim de perceber como seria o *feedback* deles.

Cada estudante teve autonomia para escolher um nome fictício para ser utilizado nessa pesquisa. Nos relatórios, foi permitido que utilizassem os nomes reais ou fictícios escolhidos. No relatório-modelo constavam os seguintes itens: idade; título do vídeo; horário em que assistiu ao vídeo; onde assistiu (em casa, na escola, na casa do colega, etc.); como assistiu (se foi pelo celular ou pelo computador); se alguém assistiu ao vídeo com eles, em caso afirmativo, quem. Foi pedido que fizessem o registro da matéria no relatório e que respondessem às questões propostas no vídeo, caso houvesse. Havia também espaço para sugestões e observações. No decorrer do processo pedi que mudassem o termo "observações" para "anotações", se houvesse, dos pontos que mais gostaram e dos pontos que não gostaram no vídeo.

Outro aspecto que levamos em consideração foi o de garantir que, de nossa parte, os pais seriam informados sobre a metodologia que estávamos propondo. Vale ressaltar que foi marcada, no início do mês de março do ano de 2017, uma reunião com todos os pais dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Aproveitei a oportunidade e pedi à coordenação pedagógica da escola um espaço para que eu pudesse explicar sobre a Sala de Aula Invertida. De um total de aproximadamente 55 (cinquenta e cinco) pais que foram convidados, somente 10 (dez) compareceram à escola.

Diante desse cenário, julguei interessante a possibilidade de gravar um vídeo destinado aos responsáveis e solicitei aos estudantes que pedissem a eles para assistir. Esse procedimento foi feito também mediante comunicado formal, escrito, aos responsáveis no qual foi pedida a assinatura deles. A videoaula destinada aos pais ou responsáveis recebeu o título de "O que é Sala de Aula Invertida"[22].

Bergmann e Sams (2016) dizem que a Sala de Aula Invertida tem potencialidade de educar, inclusive, os pais ou responsáveis, e também de modificar a relação pais-escola, uma vez que eles, se quiserem, podem assistir às aulas às quais seus filhos estão assistindo e, com

[22] Todas as videoaulas citadas estão no Youtube no canal Petrina Avelar e também descritas nesse capitulo com seus respectivos QR code para acessá-las.

isso, promover debates, problematizar as videoaulas e incentivar o jovem a registrar e levar os pontos abordados em casa para a sala de aula.

Sobre o conteúdo de Matemática escolhido, comecei a ler artigos, livros e dissertações sobre o ensino de Proporcionalidade. Esse conteúdo é considerado um tema tão importante para os professores e pesquisadores matemáticos que sempre há sobre o que refletir, ponderar, o que propor e, consequentemente, escrever para divulgar as ideias. Existem muitos trabalhos sobre Proporcionalidade todos os anos, em diversas universidades, em todo o mundo. Identifiquei-me com os materiais publicados dos professores João Pedro da Ponte e Ana Isabel Silvestre, que apresentam esse conteúdo com enfoque no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Muito se tem discutido no meio acadêmico sobre a importância de o professor valorizar o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Com o intuito de selecionar material midiático que atendesse a essa proposta e ter noção da produção sobre o tema, foi feita uma pesquisa na internet. Queríamos mídias que dialogassem com a faixa etária referente ao Ensino Fundamental e que incentivassem o desenvolvimento do raciocínio proporcional. A busca se deu nos sites *Google*, *Youtube*[23], *YoutubeEdu*[24] e *Vimeo*[25] com os termos: regra de três; proporcionalidade; razão e proporção; ensino de proporcionalidade.

Tendo em vista que as videoaulas brasileiras encontradas não traziam a abordagem para o ensino de proporcionalidade com a conotação desejada, decidimos gravar as nossas próprias videoaulas.

Assim, ficou determinada nossa proposta de produção de videoaulas:

- Videoaula 1: Como assistir a uma videoaula no contexto Sala de Aula Invertida
- Videoaula 2: O que é Sala de Aula Invertida?
- Videoaula 3: Introdução a grandezas
- Videoaula 4: Como as grandezas se relacionam
- Videoaula 5: Grandezas Diretamente Proporcionais
- Videoaula 6: Grandezas Inversamente Proporcionais

---

[23] **Youtube** é um site na internet, repositório de vídeos. É um site de compartilhamento de vídeos enviados por usuários por meio da internet. No YouTube, os vídeos estão disponíveis para qualquer pessoa que queira assistir. Também é possível adicionar comentários sobre o vídeo. Foi fundado em 2005 e em 2006 foi comprado pela empresa Google.

[24] **YoutubeEdu** é a parte do Youtube voltada para vídeos educacionais.

[25] **Vimeo** é um site na internet de compartilhamento de vídeos enviados por usuários conectados a internet. Foi fundado por Zach Klein e Jakob Lodwick em 2004.

- Videoaula 7: Um vídeo que problematizasse a "regra de três" e falasse um pouco sobre a mecanicidade de regras desassociadas de raciocínio proporcional
- Videoaula 8: Um vídeo que falasse sobre atividades que envolvessem mais de duas grandezas (tipo regra de três composta)

4.4.2.1 Tomada 1: Planejamento para os estudantes sem internet acessar os vídeos

Pensando na possibilidade de haver estudantes que não tivessem acesso à internet para assistir aos vídeos e/ou material didático disponibilizado pela professora, asseguramos que a escola colocasse à disposição deles a sala de informática com internet, no contraturno. Ainda assim, pensamos que pudesse haver algum caso em que os pais ou responsáveis não teriam condições de deixar o filho voltar à escola após o horário regular. Nossas opções foram as seguintes:

1) Criamos um grupo de comunicação no *WhatsApp*[26] de forma que os *links* dos vídeos fossem lá divulgados. Dessa maneira, o estudante teria a possibilidade de fazer o *download* do vídeo em algum lugar em que conseguisse acesso à internet.
2) Caso não houvesse a condição do uso de celular para acesso à primeira opção descrita, disponibilizamos a opção de envio do *link* do vídeo por *e-mail* do estudante, para ser acessado onde melhor lhe conviesse.
3) Os arquivos das videoaulas foram entregues à funcionária da sala de informática para quem desejasse copiá-los na mídia de sua preferência: o próprio telefone, *pen drive*, CD ou DVD.
4) Foram sugeridos aplicativos que fazem o *download* dos vídeos, para que, assim, os colegas compartilhassem entre si os arquivos através, por exemplo, de *bluetooth*[27].
5) Em último caso, o estudante, mediante solicitação à professora de Matemática, poderia agendar um horário na sala de informática em seu horário regular de estudo para assistir às videoaulas.

[26] **WhatsApp** – é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para smartphones. Além de mensagens de texto, os usuários podem enviar imagens, vídeos e documentos em PDF, além de fazer ligações grátis por meio de uma conexão com a internet.

[27] **Bluetooth** é um dispositivo que funciona sem a necessidade de internet e nem de cabeamento. É um tipo de tecnologia que transfere dados digitais de um dispositivo para outro.

Todas essas opções foram construídas em comum acordo com a equipe de coordenação pedagógica da escola. Confeccionamos um termo de autorização para o estudante com o intuito de melhor organizarmos a agenda da sala de informática. A partir da solicitação dirigida a mim, em primeiro lugar, eu entregava esse termo de autorização ao estudante que, por sua vez, o encaminhava à coordenação, que agendava o horário para o estudante assistir ao(s) vídeo(s).

4.4.2.2 Tomada 2: Preparação para gravar as videoaulas

Para elaborar as videoaulas, precisei estudar sobre editoração de vídeos no contexto da abordagem pedagógica proposta e do conteúdo a ser abordado. Sobre a elaboração de vídeos, decidimos que eles não deveriam ser extensos, teriam, no máximo, 10 minutos de duração, e que deveriam ser gravados por mim mesma.

Eu não sabia ao certo como seriam essas videoaulas, sequer o que eu conseguiria editar diante de minha inexperiência em editoração de vídeos. Assim, eu verificaria os resultados analisando os aspectos positivos e negativos desse processo.

Fiz com que cada vídeo trouxesse elementos diferentes da videoaula anterior, para analisar os pontos de preferência dos estudantes e, obviamente, ter a cada videoaula algo para chamar a atenção deles. Não sabia ao certo que elementos seriam esses, pois, afinal de contas, eu somente saberia o que conseguiria produzir depois do vídeo finalizado.

Outra decisão tomada foi que eu só apareceria fisicamente no vídeo destinado aos pais ou responsáveis pelos meus estudantes. Utilizei o *lightboard*, que é uma técnica utilizada por Jon Bergmann na produção de seus vídeos. Consiste em um quadro de vidro, bem iluminado, preferencialmente com o fundo preto, em que se escreve com uma caneta luminosa. O programa de editoração do vídeo faz a “inversão” da imagem escrita no quadro para que quem assiste a ele tenha a parte escrita vista de frente. Assim sendo, o professor não fica de costas ao escrever no quadro, como é feito tradicionalmente. São metáforas que escolhi para introduzir a sequência de videoaulas: a da inversão e a de não dar as costas nem para os responsáveis nem para os estudantes ou qualquer um que assista ao vídeo.

4.4.2.3 Tomada 3: Elementos de diferenciação entre os vídeos

A videoaula para os responsáveis dos estudantes foi gravada no *Lightboard,* como planejado.

Em outro vídeo, no meio da aula, peço que ele seja pausado, e que os estudantes resolvam uma atividade/questão antes de prosseguir. O objetivo é fazer o estudante interagir com a mídia veículo da aula. Em seguida, volto com a explicação da questão. Esse procedimento pode propiciar maiores oportunidades de aprendizado aos estudantes que têm mais dificuldade para acompanhar o raciocínio, uma vez que eles têm a opção de voltar à explicação e também analisar como resolveram a atividade proposta. Com esse processo de comparação da forma como o estudante e o professor resolveram a atividade proposta, esperamos que esse tipo de interação seja um elemento importante nessa relação de ensino-aprendizagem.

Noutro vídeo apresentamos uma forma diferente para abordar o conteúdo. Há vídeos que trazem revisão da aula anterior.

Em algumas videoaulas introduzimos personagens que eram representação de estudantes e de suas falas. Na maioria das videoaulas foram propostas atividades para os estudantes levarem para a sala de aula, como uma forma de enfatizar que estão num processo de aula conectado com a escola física, que é um método de aprendizagem *on-line* que está dialogando com o método presencial. Também havia videoaula em que não era solicitada nenhuma tarefa, mas depois, em sala de aula, era discutido o conteúdo do vídeo.

Utilizei material disponível na internet como ilustração e contextualização das atividades tanto das videoaulas como das atividades realizadas em sala de aula. Um exemplo dessa situação foram dois vídeos selecionados do canal do repositório de vídeos, o *Youtube*, canal denominado *Manual do Mundo*. Os vídeos abordaram temas relacionados com reciclagem de latinhas de alumínio e sobre como funciona um foguete. A escolha do foguete foi para falar de lixo espacial. A direção da escola onde a pesquisa foi realizada apresentou em 2017, no primeiro dia letivo, um projeto para que todos os professores, em suas disciplinas, trabalhassem a questão da sustentabilidade, reciclagem e produção de lixo.

Outros vídeos disponíveis *on-line* que utilizamos foram: *Frações e números decimais*, do portal Telecurso, e outro do professor Bigode, do projeto *Matemática em Toda Parte*, denominado *Matemática na cozinha*. Este último foi utilizado para ensino de proporcionalidade, e não apenas como contextualização, como exposto.

Todos os vídeos utilizados na pesquisa, sejam de minha produção ou não, encontram-se detalhados no capítulo de construção do Produto Educacional. Aqui será apresentada apenas uma sinopse de cada um.

4.4.2.4 Tomada 4: Da execução/gravação das videoaulas

Para a produção dos roteiros das duas primeiras videoaulas, eu e meus orientadores trocamos ideias, ouvimos sugestões e recebemos contribuições, mas, com o decorrer do mês, isso não foi mais viável, porque eu estava com muitas tarefas: escrever roteiro, gravar, postar na internet, elaborar as aulas presenciais. Sendo assim, o tempo não foi suficiente para o encontro quinzenal com os professores orientadores. Resolvi confiar em minha percepção, minha experiência de 18 anos como professora e agora, como pesquisadora, atenta ao máximo aos detalhes da minha sala de aula – meu espaço de investigação.

Nesse período, a dinâmica de produção dos vídeos sofreu uma grande mudança, porque o procedimento era alterado conforme a demanda em sala de aula. Percebia que as videoaulas deveriam atender às demandas dos estudantes. Sentia falta do encontro de orientação, mas naquele momento decidi que deveria escutar os estudantes. Optei por eles e pelo processo de aprendizagem deles. Paulo Freire nos ensina muito sobre a importância de escutar no processo de ensino-aprendizagem. Era a minha pesquisa que estava em andamento, e então resolvi trazer as falas dos estudantes para os vídeos. Como foi isso? Cada fato, discussão, ou fala diferenciada que acontecia em sala de aula eu acrescentava, de alguma forma, no vídeo seguinte. Com o decorrer das aulas, fui me apropriando de acontecimentos que julguei importantes para o trabalho. Comecei a gravar vídeos com personagens representando os estudantes e suas respectivas falas, aquelas acontecidas em sala de aula. Eu e os estudantes escrevemos o roteiro, reproduzindo o que havia acontecido em sala: fomos para o estacionamento da escola, dentro do meu carro e gravamos o áudio em nossos aparelhos celulares.

Da mesma forma que estava atenta aos acontecimentos em minha sala de aula, pude perceber que a minha mudança de postura, em relação à produção da videoaula, pode ter influenciado a mudança de postura dos estudantes, tanto em relação ao fato de assistir às videoaulas quanto à participação nas tarefas em grupo, dentro de sala de aula.

Outra característica de nossas videoaulas produzidas foi a inserção de uma estratégia para vincular o conteúdo abordado com o trabalho, *a posteriori*, em sala de aula. Para isso, inserimos algumas atividades ao final da videoaula.

4.4.3 Planejamento das atividades presenciais

Os estudantes não tinham o hábito de fazer as tarefas de casa, logo eu precisava contar com estratégias pedagógicas para lidar com a possibilidade de os estudantes levarem, ou não, o que havia sido solicitado na videoaula assistida.

Esse planejamento é muito importante, pois a grande marca da Sala de Aula Invertida é a abordagem que a sala de aula ganha. A sala de aula é mais dinâmica, há discussões, grupos de estudantes conversando, trocando ideias, resolvendo exercícios, mas, para isso acontecer, o professor precisa se preparar e planejar bem sua aula. Nesse sentido, o professor deve estar sempre preparado para ter ou não contribuições, ponderações, questionamentos apresentados pelos estudantes, aqueles por exemplo solicitados em nossas videoaulas.

As atividades planejadas apresentaram duas características marcantes: a primeira de retomar o que foi apresentado na videoaula, e a segunda, a de investigar o conhecimento dos estudantes sobre o assunto a ser trabalhado na videoaula seguinte. Essa investigação concedia-me elementos para construir questionamentos mais estruturados para os estudantes, pois estariam embasados em suas demandas percebidas por mim; por outro lado, eu estava em condições de dar aos estudantes o *feedback* instantâneo para as nossas discussões, e esses são elementos de que me apropriei para estar em conformidade com os pilares da Sala de Aula Invertida.

Algumas atividades planejadas para a sala de aula foram de minha autoria e outras foram adaptadas da literatura nacional e internacional, que aborda proporcionalidade com ênfase no raciocínio proporcional (QUADRO 1).

Quadro 1 - Cronograma das aulas

Data 2017	Videoaula	Aula em sala / objetivos
26/04 – Quarta-feira	**Telecurso – fracções e números decimais**	Um vídeo (meu ou não) para servir de exemplo de como registrar uma aula (conteúdo que estiverem estudando).
27/04 – Quinta-feira	**Como assistir à videoaula para o projeto Sala de Aula Invertida**	Leitura do roteiro do vídeo explicativo dando sugestões de como se deve assistir a uma aula no contexto do projeto Sala de Aula invertida.
28/04	Greve geral	
02 a 04/05 – Terça, Quarta e Quinta-feira	**Discussão sobre a videoaula**	Assistir a um vídeo com os estudantes, pedir relatório da videoaula, dedicar tempo para que os estudantes possam se apropriar dos detalhes que a abordagem Sala de Aula Invertida espera deles.

<table>
<tr><td>08/05 – Segunda-feira</td><td>Introdução a noções de grandezas</td><td colspan="2">Atividade com os grupos separados.
Eles escreverão em papel kraft o que são grandezas, instrumentos e unidades de medida, um grupo valida a resposta do outro.</td></tr>
<tr><td>09/05 – Terça-feira</td><td>Como as grandezas se relacionam</td><td colspan="2">Eles trarão lista de grandezas, instrumentos, unidade, que será pedida na videoaula.
Jogando cubos, os estudantes deverão dizer quais grandezas se relacionam ou não. Um grupo valida as respostas do outro.</td></tr>
<tr><td>10/05 – Quarta-feira</td><td colspan="3">Exercícios para reconhecer onde há regularidade ou não.</td></tr>
<tr><td>Data 2017</td><td>Videoaula</td><td colspan="2">Aula em sala / objetivos</td></tr>
<tr><td>11/05 – Quinta-feira</td><td>Exercícios da tabela mágica</td><td colspan="2">Um tipo de “jogo de memória” – imagem, grandeza e unidade de medida para fazer os pares de “imagem com grandeza ou não”, “imagem com unidade de medida ou não”, “grandeza com unidade de medida”.
Fichas distribuídas / sorteadas para os pares verificarem se as grandezas se relacionam ou não.</td></tr>
<tr><td>15/05- Segunda-feira</td><td>Grandezas diretamente proporcionais</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>16/05 – Terça-feira</td><td>Manual do Mundo – Fomos à NASA para saber como funciona o foguete.</td><td>Atividades com tabelas</td><td>Investigar se os estudantes se apropriam do método de redução à unidade. Perceber como eles resolvem as atividades propostas.</td></tr>
<tr><td>17/05 – Quarta-feira</td><td>Manual do Mundo – Como funciona a reciclagem de latinhas de alumínio.</td><td>Atividades de fixação</td><td>Investigar se os estudantes se apropriam do método de redução à unidade. Perceber como eles resolvem as atividades propostas.</td></tr>
<tr><td>18/05 – Quinta-feira</td><td>Grandezas diretamente proporcionais</td><td colspan="2">Discutir o vídeo em sala, explicar o que for preciso e fazer atividades.</td></tr>
<tr><td>22/05 – Segunda-feira</td><td></td><td colspan="2">Atividades com tabelas.</td></tr>
<tr><td>23/05 – Terça-feira</td><td></td><td colspan="2">Atividades de fixação.</td></tr>
<tr><td>24/05 – Quarta-feira</td><td>Grandezas inversamente proporcionais</td><td colspan="2">Discutir o vídeo em sala, explicar o que for preciso e fazer atividades.</td></tr>
<tr><td>25/05 – Quinta-feira</td><td></td><td colspan="2">Atividades em sala.</td></tr>
<tr><td>29/05 – Segunda-feira</td><td>A expressão: regra de três</td><td colspan="2">Discutir o vídeo em sala, explicar o que for preciso e fazer atividades.</td></tr>
<tr><td>30/05 – Terça-feira</td><td>“Regra de três composta” - desmembrando as grandezas</td><td colspan="2">Discutir o vídeo em sala, explicar o que for preciso e fazer atividades.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Atividade em sala.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Atividades em sala.</td></tr>
<tr><td></td><td>Avaliação/ Questionário</td><td colspan="2">Aplicar questionário para ter o feedback dos estudantes.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora.

4.4.4 Produção final das videoaulas – Sinopses

4.4.4.1 1º Roteiro – Como assistir a uma videoaula na abordagem da Sala de Aula Invertida?

Esse roteiro foi produzido escolhendo como ponto de partida uma videoaula disponível na internet do programa Telecurso intitulada *Frações e números decimais*. O vídeo ressalta a importância de se escrever em forma fracionária, por exemplo, diante de situações em que, na forma decimal, o resultado seria uma dízima.

É um vídeo de 15:29 minutos de duração.

São apresentadas duas sócias de uma confecção de roupas. Uma delas inicia o diálogo lendo um contrato que reza que elas devem entregar 2/5 (dois quintos) da produção combinada 20 (vinte) dias após a assinatura do documento. Cidinha, uma das sócias, alega não entender de contratos muito menos saber quanto vale 2/5 (dois quintos) da produção.

O vídeo explica como se faz para determinar 2/5; oferece algumas sugestões e também chega a apresentar a forma decimal. Todo o restante do vídeo trata de ensinar a personagem Cidinha a lidar com frações, números decimais, inclusive dizimas periódicas.

4.4.4.2 2º Roteiro – Videoaula: O que é Sala de Aula Invertida?

Essa videoaula foi elaborada em comum acordo com a coordenação e direção da escola para ajudar a minimizar quaisquer possíveis desencontros de comunicação entre os estudantes e seus responsáveis no que dissesse respeito às aulas de Matemática a serem assistidas em casa.

No vídeo expusemos a proposta metodológica da inversão, em que os estudantes assistirão a videoaulas em casa e farão atividades na escola. Incentivamos os pais (ou responsáveis) a, na medida do possível, assistirem aos vídeos com seus filhos e encorajá-los a levar discussões para a sala de aula.

Deixamos também claro que a escola disponibilizara computadores com acesso à internet para os estudantes que, por algum motivo, não tivessem condições de assistir aos vídeos em casa, para que o fizessem na escola mediante agendamento prévio na sala de informática.

O desenho dessa videoaula foi no contexto do *lightboard* (quadro de luz). A proposta é de a Sala de Aula Invertida ser vista de frente, clara como um *lightboard*, e por isso um vídeo destinado à explicação aos interessados sobre o assunto e que procurassem a escola em caso de dúvidas e ou sugestões.

4.4.4.3 3º Roteiro – Videoaula: Introdução a grandezas

O objetivo desse primeiro vídeo do conteúdo proporcionalidade foi explicar a definição de grandeza, bem como mostrar a importância de se utilizar corretamente as suas respectivas unidades de medida.

Por vezes, nós, professores de Matemática, explicamos relações diretas e inversas entre grandezas, mas nossos estudantes apresentam dificuldades em compreender o que significa dizer que algo é uma grandeza. No vídeo, para explicar grandezas e sua unidade de medida, sugere-se que estejamos atentos ao responder sobre **o que** estamos medindo e **como** estamos fazendo isso.

Foi solicitado aos estudantes que levassem para a discussão em sala:

1. Lista de grandezas
2. Como fazer as medidas dessas grandezas (instrumentos de medida)
3. Unidades de medidas dessas grandezas

4.4.4.4 4º Roteiro – Videoaula: Como as grandezas se relacionam

O objetivo dessa videoaula foi mostrar que há grandezas que se relacionam e outras que não se relacionam, e mais, podemos ter grandezas que se relacionam de forma especial, com regularidade. Escrevemos o roteiro pensando na importância de ressaltar o que significa média de uma grandeza, é uma forma de dizer que a Matemática lida com estimativas. Por isso a opção foi por falar sobre velocidade média.

Dentro do contexto velocidade, mostramos que velocidade se relaciona com distância e com o tempo, mas de forma diferente. Em seguida, falamos sobre como a pressão se relaciona com força e área e depois sobre grandezas que não se relacionam, dando o exemplo de idade e altura.

Ao final, tentamos mostrar como o preço de mercadoria pode ser relacionado ou não com o produto a ser comprado, mais especificamente, dizemos que preço é uma grandeza que se relaciona com a quantidade de um determinado produto, mas não tem regra específica.

A ênfase foi em explicar a importância de se perceber que “regularidade” pode ser observada quando comparamos duas grandezas.

O vídeo pede como tarefa que levem para a sala de aula exemplos de:

- grandezas que se relacionam com regularidade;
- grandezas que se relacionam sem regularidade;

- grandezas que não se relacionam.

4.4.4.5 5º Roteiro – *Vídeos para contextualização das atividades presenciais*

Durante a semana solicitei aos estudantes que assistissem a dois vídeos do Canal Manual do Mundo, do repositório *Youtube*: “Como funciona a reciclagem de latinhas de alumínio”[28] e “Fomos à NASA para mostrar como funciona um foguete”[29].

A ideia de pedir para assistirem a esses vídeos foi somente ilustrativa, para contextualizar as atividades que foram dadas em sala de aula, antes da explicação de qualquer método de resolução de exercícios de proporcionalidade. Esse foi um dos momentos em que eu estava investigando a forma como os estudantes lidavam com as situações-problema apresentadas.

4.4.4.6 6º Roteiro – Videoaula: Grandezas Diretamente Proporcionais

Para falar sobre proporção direta, foram trabalhadas as ideias de constante de proporcionalidade, um pouco de álgebra e o gráfico de função linear, sendo que os estudantes não haviam estudado função ainda.

Esse vídeo inicia com dois jovens estudantes conversando. André pergunta para a Andreia se ela já havia assistido à videoaula de Matemática. Como a resposta foi negativa, ele a convida para assistir ao vídeo.

A aula começa com um questionamento sobre os preços de uma tabela de estacionamento de carros, que não apresenta regularidade.

Nessa videoaula é pedido aos estudantes que pausem o vídeo e resolvam as atividades. Há uma interação do estudante com o vídeo. Na sequência, lhes é apresentada outra tabela de preço, com regularidade, então é explicado que, quando grandezas se relacionam daquela forma, elas são consideradas diretamente proporcionais.

Também fica definido que, se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, então existe uma constante K tal que y/x = k.

---

[28] *Link* do vídeo “Como funciona a reciclagem de latinhas de alumínio”. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wgPn3kZZtIY

[29] *Link* do vídeo “Fomos à NASA para mostrar como funciona um foguete”. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=mhgtGOcsUqM&t=43s R

Outra atividade é proposta, agora para introduzir o método de redução à unidade, que é demonstrado na sequência. Em seguida, são mostrados os dados de uma tabela em um gráfico e explica-se como é um gráfico formado quando duas grandezas são diretamente proporcionais.

Esse vídeo deixa as seguintes tarefas:

1. Quando podemos afirmar que duas grandezas são diretamente proporcionais?
2. O que é constante de proporcionalidade? Exemplifique.
3. Em que consiste o método de resolução de atividades pela redução à unidade?
4. Como é o gráfico de duas grandezas diretamente proporcionais?

4.4.4.7 7º Roteiro – Videoaula: Grandezas Inversamente Proporcionais

Esse vídeo começa apresentando uma revisão da videoaula sobre grandezas diretamente proporcionais. São retomados os apontamentos sobre regularidade, constante de proporcionalidade e gráfico. Nessa videoaula trabalhou-se o conceito de grandezas inversamente proporcionais partindo da análise de dados dispostos em tabela. Faz-se a seguinte comparação: quando uma grandeza é multiplicada por um fator, a outra é dividida por aquele mesmo fator. Foi dada também a definição algébrica: se são dadas duas grandezas x e y tais que $x.y = k$, então elas são inversamente proporcionais.

Os estudantes não têm conhecimento de função, mas têm acesso à interpretação de gráficos em todo 3º ciclo. Como eu havia proposto apresentar o gráfico para as grandezas diretamente proporcionais, analogamente o fiz para grandezas inversamente proporcionais, sem entrar em detalhes, apenas interpretando no gráfico, os dados da tabela e dizendo o nome da curva gerada, no caso uma parte de uma hipérbole.

Nesse vídeo foram deixadas as tarefas:

1. O que são grandezas inversamente proporcionais? Exemplifique.
2. Como determinamos a constante de proporcionalidade?
3. Como é o gráfico formado quando duas grandezas são inversamente proporcionais?

4.4.4.8 8º Roteiro – Videoaula: A regra de três e o raciocínio proporcional

Esse vídeo começa com estudantes conversando sobre atividades de Matemática. Uma aluna, a Suga, diz conhecer um método que serve para resolver todos os exercícios de Matemática: regra de três, e, segundo ela: "Regra de três é vida!".

Na sequência, a professora propõe dois exercícios para a garota Suga mostrar como ela os resolve: um envolvendo grandezas inversamente proporcionais e o outro envolvendo grandezas que não se relacionam com regularidade.

Os colegas Spinardi e Jimin perguntam se não daria para resolver de outra forma, então Suga pede à professora uma explicação.

A professora mostra como é importante os estudantes desenvolverem o raciocínio proporcional. Ressalta que a regra de três é válida para grandezas que se relacionam com regularidade e que o "multiplicar cruzado" vem de uma propriedade das proporções e é uma regra mecânica.

Nesse vídeo não foi proposta nenhuma tarefa, a não ser a de apresentar o relatório, como foi pedido para todos os outros vídeos.

4.4.4.9 9º Roteiro – Matemática na cozinha

Essa videoaula pertence ao projeto denominado Matemática em toda parte. É apresentada pelo professor de Matemática Antônio José Lopes Bigode. O nome do vídeo é "Matemática na cozinha"[30], cuja duração é de 24:46 minutos. Foi sugerido que os estudantes assistissem pelo menos a um trecho de 4 minutos, que eu delimitei. Selecionei o trecho em que o professor Bigode está em uma cozinha conversando com a professora Cássia, fazendo uma comparação entre duas receitas de limonada. Cada professor propõe fazer uma limonada estipulando diferentes quantidade de limões e de copos de água. Eles criam situações para mostrar como se sabe qual limonada estará mais carregada com o sabor do limão, ou seja, mais azeda. Nesse exemplo é trabalhada a ideia de proporção com frações com denominadores iguais.

Em seguida, em outro exemplo, eles discutem sobre um molho de tomate elaborado com duas receitas diferentes, levando em consideração as quantidades de tomates e de cebolas

---

[30] *Link* da videoaula: Matemática em toda parte - Matemática na cozinha. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gbb1hS4rQLE.

utilizadas para o preparo dos molhos. Nesse contexto, as receitas dos molhos são associadas a frações com denominadores diferentes.

4.5 Luz, câmera, ação!

Em 16 de dezembro de 1998, a o presidente da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES; pela Portaria nº 80, reconhece os mestrados profissionais no Brasil e dentre as disposições da lei, faz-se obrigatória a apresentação de um trabalho final de caráter diferenciado do da dissertação, aqui denominamos Produto Educacional. Nos dizeres legais lemos:

> (...) trabalho final que demonstre domínio do objeto de estudo, (sob a forma de dissertação, projeto, análise de casos, performance, produção artística, desenvolvimento de instrumentos, equipamentos, protótipos, entre outras, de acordo com a natureza área e os fins do curso) e capacidade de expressar-se lucidamente sobre ele.

De acordo com Moreira (2004, p. 134), a pesquisa no mestrado profissional em ensino deve ter as seguintes características:

> (...) aplicada, descrevendo o desenvolvimento de processos ou produtos de natureza educacional, visando à melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo, este trabalho se constitua em material que possa ser utilizado por outros profissionais.

Temos clareza da importância da confecção, elaboração e produção dessas produções para serem utilizadas por outros profissionais. Com isso tentaremos elencar os itens que possam gerar dúvidas, ambiguidades e imobilidade diante do material. Acreditamos que é de suma importância termos uma produção em que o professor seja incentivado a implementá-la da forma que melhor lhe convier; por outro lado, o material deverá ter uma autonomia para ser utilizado da forma que for apresentado, sem alterações. Portanto, o produto deve ser um material que consiga dialogar com a situação.

Em nossa pesquisa propomos a utilização da abordagem da Sala de Aula Invertida (SAI), que é uma proposta de transformar a sala de aula e os papéis de seus atores. Professores e estudantes transformam a sala que, no modelo tradicional, era sala de aula em sala de aprendizagem. Com a abordagem pedagógica da SAI, respeitando os 4 pilares definidos pela FLN (2014), foi trabalhado o conteúdo de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional balizado nos estudos de Silvestre (2012).

Como produto educacional desta pesquisa, após a experiência realizada, bem como a coleta, análise e discussão dos dados obtidos, produzimos um material: uma sequência de videoaulas e atividades desenvolvidas em sala de aula destinadas ao ensino de proporcionalidade para o Ensino Fundamental. Dessa forma, pensamos que nosso produto poderia ser categorizado como um **Kit educacional midiático para o ensino de proporcionalidade** direcionado para o Ensino Fundamental com intervenção da Sala de Aula Invertida.

Os vídeos citados nesta pesquisa estão hospedados no Youtube: www.youtube.com. Deve-se digitar preferencialmente o nome do canal, seguido do nome do vídeo. Se for vídeo da produção da pesquisadora, estará no canal Petrina Avelar. Basta digitar a palavra "proporcionalidade", que aparecerá na tela. Para acessar todas as videoaulas citadas nesta pesquisa, também disponibilizaremos o *link*, que é o endereço eletrônico, e um QR code[31]. Para ter acesso ao QR code, deve-se ter um aplicativo instalado no smartphone[32], seja com o sistema operacional Android, Windows ou Apple. Para isso, tem de entrar na loja (Play Store[33], Microsoft ou Apple Store) do celular e instalar qualquer aplicativo que faça leitura desse tipo de código; geralmente os nomes estão em inglês: QR code Reader (leitor do código QR).

Para facilitar o acesso a todo material, confeccionamos um livreto denominado: "**Possibilidades para o ensino de proporcionalidade**: uma abordagem midiática para propiciar o desenvolvimento do raciocínio proporcional". Para acessá-lo, basta ler o QR code-livreto (Figura 2).

Figura 2 - QR code – livreto

Fonte: Avelar (2018).

[31] **QR code** – QR é a sigla de *Quick Response* ou seja, resposta rápida. É um código que armazena informações de vários tipos de arquivos; no caso, poderá conter o *link* do vídeo em questão. Ao ler o código, o dispositivo, geralmente um celular conectado na internet, abrirá automaticamente o arquivo.

[32] **Smartphone** é um tipo de aparelho de telefonia celular chamado celular inteligente. Nesses aparelhos é possível instalar vários programas, o que chamamos de aplicativos. Existem aparelhos de empresas diferentes cujos sistemas operacionais também são diferentes. Exemplos mais comuns são os Androids, que utilizam a plataforma Google, os Windows Phone, que utilizam o sistema operacional da Microsoft, e os Iphones que utilizam o sistema IOS da Apple.

[33] **Play Store** é a loja virtual da Google que contém os aplicativos disponíveis para essa plataforma. É utilizada nos aparelhos celulares tipo smartphones com o sistema operacional Android. Análogo à Play Store temos a Microsoft Store para os smartphones do sistema Windows e a Apple Store para os sistemas IOS da Apple.

Geramos uma ***playlist*** com as videoaulas produzidas pela pesquisadora. Essa *playlist*[34] denomina-se "Ensino de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional" e encontra-se disponível no Youtube no canal Petrina Avelar.

4.6 Tomada de análise dos dados

Após o trabalho de campo iniciou-se o processo de análise dos resultados da pesquisa, revisando as filmagens e suas transcrições, revisitando e relendo o diário de bordo, os relatórios das videoaulas dos estudantes, as atividades realizadas em sala de aula bem como o questionário aplicado (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Um processo de reviver cada cena, de (re)conhecer os atores, escutar novamente suas falas e tentar perceber seus sentidos e seus significados.

Segundo Powell et al. (2004), é importante compreender que as filmagens, por si sós, não garantem a qualidade da coleta de dados e da respectiva análise, e, para aperfeiçoar a análise, o pesquisador deve juntar material dos estudantes escritos, entrevistas. Fizemos as transcrições de todas as cenas, todas as aulas, pois acreditamos que, quando escrevemos o que foi dito, possivelmente teremos melhores condições para analisar e perceber o sentido e o significado do ocorrido, dessa forma, minimizando as perdas de fatos importantes à pesquisa.

Ao recorrermos às análises dos vídeos, nos referenciamos ao modelo analítico proposto por Powell et al. (2004, p. 118), que consiste em sete fases interativas e não lineares que podem render *insights*. São elas:

> 1. Observar atentamente os dados do vídeo: o que consiste em assistir aos vídeos várias vezes para que se tenha uma visão geral do assunto, ou seja, se familiarizar com os vídeos.
> 2. Descrever os dados do vídeo: essa etapa visa descrever os dados fidedignamente, sem interpretá-los.
> 3. Identificar eventos críticos: identificar os eventos (momentos) que o pesquisador considerar relevantes para as discussões com relação à pergunta de pesquisa.
> 4. Transcrever: nesse momento são transcritos (registrado) não só as falas, mas também os gestos e cenários, de modo que se possa visualizar a cena sem assistir ao vídeo.
> 5. Codificar: nessa etapa são criadas notações para se favorecer a escrita. Notações com relação aos participantes da pesquisa, pensamentos do pesquisador, entre outros elementos.
> 6. Construir o enredo: "Nessa fase analítica, a interpretação dos dados e as inferências assumem papéis importantes".

[34] Endereço da playlist no Youtube:
https://www.youtube.com/watch?v=fUZ4EV8JtQY&list=PLqoyFMOkhBbaCdeAH5d7sZLLhDPcIwQ0l.

7. Compor a narrativa: nota-se aqui que os autores usam ideias da triangulação de dados, em que realizam um texto entrelaçando os dados provenientes de diferentes fontes.

Os aportes para a análise e discussão dos resultados desta pesquisa estão em Bergmann e Sams (2016), Borba e Villarreal (2006), Moran (2015), Kensi (2008, 2016), Ponte et al. (2010), Silvestre (2009, 2012, 2013). Dessa forma voltaremos nossos olhares revisitando as cenas para rever a mídia, a SAI, o ensino de proporcionalidade com a conotação proposta e também para perceber os sentidos da professora-pesquisadora diante da experiência de pesquisar sua sala de aula.

CAPÍTULO V - ANÁLISE

No capítulo anterior foram apresentados os percursos metodológicos desta pesquisa. Neste momento, tentaremos compreender os dados obtidos, a fim de analisar as potencialidades da SAI nas aulas de proporcionalidade: sejam por meio das gravações das aulas, do diário de campo, do questionário respondido pelos jovens sejam também por todas as atividades de Matemática que foram desenvolvidas e registradas em sala de aula. Fiorentini e Lorenzanto (2012) recomendam que o pesquisador, ao analisar os dados, tenha bastante cuidado e critérios para revisar os registros, pois é o momento de tentar encontrar os pontos que serão importantes para responder à questão objeto da sua pesquisa. Para que uma análise seja bem-sucedida, os autores sugerem que o pesquisador visite e revisite os dados coletados quantas vezes forem necessárias, obtendo-se, assim, mais elementos para também dialogar com o referencial teórico escolhido.

Os estudos efetuados no referencial teórico sobre SAI bem como a utilização de vídeos e o ensino de proporcionalidade foram decisivos para a escolha da forma de analisar os dados obtidos na pesquisa. Nesse processo de análise busca-se dados para tentar responder à problematização objeto desta pesquisa, que é de identificar e analisar as possibilidades e potencialidades da utilização da abordagem da Sala de Aula Invertida (SAI) no ensino de proporcionalidade em uma escola pública municipal de Belo Horizonte. Mais especificamente, esta pesquisa pretende identificar as percepções dos estudantes em relação à SAI bem como as possíveis influências da utilização de videoaulas no processo de interação estudante-aula-professor nessa perspectiva, e se essa interação traz elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade.

Após várias releituras dos dados desta pesquisa, serão analisados e discutidos os resultados obtidos. A etapa foi dividida em quatro partes: a referente à utilização do vídeo enquanto mídia que interage com o ser humano; nosso olhar para a abordagem SAI, seus pilares, as interações que ocorreram bem como as dificuldades encontradas no caminho; nosso olhar para o ensino de proporcionalidade, mais especificamente para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e, finalmente, os sentidos da professora como pesquisadora.

5.1 Um olhar para a mídia: a utilização de videoaulas nas aulas de matemática

Nesta seção busca-se compreender as potencialidades da videoaula como uma mídia que interage com o educando e faz parte do processo de construção do seu conhecimento, independentemente do conteúdo que veicula e da metodologia em que está inserida.

O vídeo pode ser analisado de formas diferentes, mas neste trabalho escolheu-se olhar para o vídeo com as lentes de Tikomirov citado por Borba e Villarreal (2006) para compreender como a mídia pode ser um componente para a construção e reorganização dos pensamentos dos alunos e com as de Moran (2015), buscando compreender as potencialidades da aprendizagem em um espaço multimodal[35].

Nesta pesquisa, o vídeo esteve presente em duas situações distintas: a primeira, quando os estudantes recebiam orientação para assistir à videoaula, como tarefa a ser realizada em casa, e a segunda, quando o vídeo foi assistido na escola devido a algum fator não planejado.

Na primeira situação podem-se analisar as percepções dos estudantes em relação ao vídeo por meio das respostas obtidas em um questionário e falas (gravadas) durante as aulas, entretanto, na segunda situação, apesar de não planejada, a pesquisadora pôde presenciar como os estudantes assistem às videoaulas e, então, relatar suas percepções nas observações feitas por eles e também compará-las às respostas deles ao questionário aplicado.

5.1.1 O olhar dos estudantes sobre as videoaulas

Durante a atividade na escola, após a videoaula: "Fomos à NASA para ver como funciona o foguete", um caso chamou a atenção. A aluna – que aqui se denomina Eve –, em seu grupo de colegas, manifestou sua insatisfação com a metodologia referente à utilização de videoaulas para serem assistidas em casa. Nenhum estudante havia feito nenhuma reclamação antes, muito pelo contrário, todos demonstravam-se satisfeitos com a forma como estávamos trabalhando.

Eve estava no seu grupo de discussão e, enquanto era distribuído o material impresso para início das atividades, ela disse que não estava gostando de assistir às videoaulas em casa, e o diálogo transcorreu assim:

---

[35] Ambientes de aprendizagem multimodal: consistem em ambientes de sala de aula, onde professores e alunos estão usando e interagindo com diferentes tipos de textos e tarefas, através de uma gama de áreas curriculares. (WALSH, 2011). Segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis, 2014, o uso de vídeos é um dos aspectos que caracterizam a multimodalidade em sala de aula.

> ***Eve**: você fica com muita dúvida ainda e não tem a quem perguntar...*
> ***Manu:** Ela falou na primeira aula: se tiver dúvidas anote num papelzinho no relatório e traga que eu (a professora) vou explicar!*
> ***Spinardi:** O projeto é esse, você assiste ao vídeo em casa e traz as dúvidas para a sala.*
> ***Professora:** Quero saber o seguinte: em relação ao dever de casa.... Eve, quando você faz exercícios em casa, você nunca tem dúvidas?*
> ***Eve**: Tenho, mas você explica na sala, professora!*
> ***Manu:** Então! Ela explica! Se você tiver dúvidas no vídeo, ela explica. Você vem cá e pergunta!*
> ***Spinardi**: Oh, Eve, quando você tem dúvidas no dever de casa, você não pergunta a Petrina?*
> ***Eve:** Não (risos!) Porque, primeiramente, nem para casa eu faço...*
> ***Professora:** Eve, você não faz para casa, mas está assistindo aos vídeos?*
> ***Eve:** Estou, mas é vídeo!*

No trecho, observa-se que a aluna Eve não reconhece o vídeo como uma tarefa para casa, ela está assistindo a eles porque gosta de assistir a vídeos. Segundo Moran (2015, p. 53), “o vídeo, na cabeça dos estudantes, significa descanso e não ‘aula’, o que modifica a postura, as expectativas em relação ao seu uso.”. Esse pensamento fica explícito na fala de Eve.

Por outro lado, quando Eve diz: “*você fica com muita dúvida ainda e não tem a quem perguntar...”* ela está dizendo também de uma insatisfação. Acredito que, quando a estudante assiste ao vídeo, ela está aprendendo algo, mas também penso que o processo de aprendizagem é permeado por uma estabilidade ainda que temporária, seguida de dúvidas que fazem parte do processo, mas que também podem gerar uma instabilidade que por vezes incomoda. As buscas, as novas oportunidades, o “voltar o vídeo” podem ser meios para permitir que algo novo seja construído e consolidado, estabilizando o aprendizado novamente. Assim é o aprender: sempre há algo novo a ser (re)construído.

Até onde se pode mensurar a insatisfação da aluna Eve diante de seu movimento de assistir às videoaulas? Possivelmente seria um processo de resistência com o novo, com a ruptura com o seu “não fazer”, que, naquele momento, estava reorganizando seus pensamentos, mas também, trazendo à tona as consequências do seu “não fazer”.

Na interação da mídia com os seres humanos, tem-se o construto que propicia a reorganização do pensamento (matemático). Nesse sentido, a metáfora seres-humanos-com-mídia de (BORBA; VILLARREAL, 2006) pode ser aqui lida como **seres-humanos-com-vídeos**. Pode-se comparar o vídeo com um torno de oleiro, o artefato que está “nas mãos” do estudante (ou do oleiro) e que numa cadência particular vai construindo o seu conhecimento, o seu vaso de barro, ao seu modo, ao seu tempo e estilo.

Behrens (2015, p.110) acredita que “as atividades que contemplam as tecnologias da informação permitem ao aluno ir além da tarefa proposta, em seu ritmo próprio e estilo de aprendizagem”, o que corrobora com as metodologias ativas de aprendizagem que defendem que o estudante deve ser protagonista de seus aprendizados.

Nessa direção, Bergmann e Sams (2016) enfatizam a importância de o estudante ter o “controle remoto” em suas mãos para pausar e retroceder o “professor” quantas vezes forem necessárias.

Esses autores trabalham na linha de raciocínio de que a mídia (no nosso caso, o vídeo) oportuniza rever a aula para que o processo de aprendizagem aconteça no ritmo individual de cada estudante. Assim, retoma-se a comparação da construção de conhecimento com o barro num torno de cerâmica em funcionamento que, nas mãos do oleiro, vai se reorganizando. À medida que o torno vai girando, o oleiro vai (re)construindo seu vaso novo, de novo. Cada um possui um tempo próprio, um ritmo peculiar para construção da sua peça de cerâmica. Uns mais rápidos outros nem tanto, mas a mídia/o torno estão prontos para recomeçar quantas vezes forem necessárias para que o conhecimento seja (re)construído e reorganizado.

Para que se possa acompanhar o processo de audiência das videoaulas, foi solicitado aos estudantes que, a cada videoaula assistida fora da escola, o estudante entregasse ao professor um relatório do vídeo. Nesse relatório o estudante deveria apresentar anotações que julgasse relevantes para seu processo de aprendizagem do conteúdo abordado no vídeo, dizer os pontos que mais gostou, os que menos gostou, justificar e então responder os tópicos apresentados ao final de cada videoaula.

Eve, apesar de não ter sido uma aluna com hábitos de efetuar tarefas de casa, apresentou quase todos os relatórios no período das “aulas invertidas”, demonstrando assim uma reorganização em sua atividade como aluna. Em relação aos demais educandos, 83,3% responderam ao questionário alegando ter gostado da matéria apresentada em forma de videoaulas.

Alguns meses após o término das atividades de campo, ao ouvir as explicações da professora em uma aula expositiva, Eve pergunta:

> *Professora, você não vai mais gravar videoaulas não? Você podia gravar dessa matéria também!*

Após essa fala de Eve, vários estudantes manifestaram concordância com a garota e solicitaram videoaulas. Portanto, isso conduz à conclusão de que, nessa turma pesquisada, o uso pedagógico de videoaulas, nas aulas de Matemática, foi muito bem aceito pela maioria dos estudantes.

5.1.2 O olhar da professora sobre as videoaulas

A proposta deste trabalho é de que os estudantes assistam às videoaulas em casa, entretanto, houve um momento em que alguns disseram que não conseguiram assistir ao vídeo pela internet. Eles fotografaram a tela do computador (para provar o fato) em que a aparência era de uma tela preta como se o vídeo estivesse fora do ar.

Esse fato leva a acreditar no anseio desses estudantes em serem reconhecidos como sujeitos confiáveis e responsáveis, cientes de sua obrigação como estudantes e também compromissados com esta pesquisa. Com isso foi concedida uma exceção, e os estudantes assistiram ao vídeo "Grandezas Diretamente Proporcionais"[36] dentro de sala de aula.

Essa videoaula contém trechos de intervenções do narrador e de personagens. Em uma situação, o narrador pede que seja dada uma pausa para que o estudante resolva a atividade. Em outra situação, surgem personagens relembrando os estudantes sobre a importância de voltar o vídeo e assistir a ele novamente se houver dúvidas. É o que Bergmann e Sams (2016) chamam de ter o controle remoto nas mãos e poder retroceder o professor.

Os estudantes interagiram com o vídeo, fizeram as pausas solicitadas pela narradora, resolveram as atividades, continuaram a assistir ao vídeo, conferiram as resoluções dos problemas e houve quem solicitasse voltar o vídeo no momento em que o personagem diz: "*se tiver dúvida, volte o vídeo e assista a ele novamente*".

Powell et al. (2004) dizem que a gravação das atividades dos estudantes em forma de vídeo não deve ser o único meio de coleta de dados, e mesmo a aula gravada apresenta viés do olhar do pesquisador e da tecnologia utilizada para a gravação. O fato de poder observar os estudantes assistindo à videoaula, ainda que saindo do planejado, foi uma grande oportunidade para a professora-pesquisadora. Teve o cuidado de ser o mais imparcial possível, no entanto pôde vivenciar e perceber a interação dos estudantes com o vídeo, e na interação deles com a mídia, o envolvimento e a concentração deles, a possibilidade de seus conhecimentos estarem sendo construídos segundo o constructo seres-humanos-com-vídeo (BORBA; VILLARREAL, 2006).

---

[36] Videoaula "Grandezas Diretamente Proporcionais". Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Qo8TsMdS868&index=3&list=PLqoyFMOkhBbaCdeAH5d7sZLLhDPcIwQ0l.

Diante dessa interação, foi elaborada uma questão sobre a opinião dos jovens em relação às videoaulas. Algumas respostas dos estudantes ao questionário[37] aplicado:

> **E1:** *Eu gosto dessas atividades porque dá para olhar se eu errei, aonde eu errei e como eu errei.*
> **E2:** *É mais fácil de entender onde errei, assim você compreende melhor a matéria proposta.*
> **E3:** *Acho interessante, pois o vídeo nos dá a opção de participarmos e interagirmos com o problema proposto incentivando os alunos a raciocinarem e resolver o exercício.*
> **E4:** *Eu gosto, pois, vejo a explicação várias vezes e faço a atividade sozinha, depois da pausa eu corrijo, vejo o que acertei ou errei.*

Percebe-se nos depoimentos de E1, E2 e E4 que o vídeo pode proporcionar ao estudante não somente a resposta certa ou errada para o que ele fez, mas vai além, pois nas respostas fica claro que a ele interessa olhar se errou, onde errou e como. Isso perpassa por uma reflexão sobre a forma como ele se propõe a resolver a atividade.

Pode-se observar que, quando E3 diz "*o vídeo nos dá a opção ...",* vê-se que o estudante claramente delega à mídia a posição de sujeito que oportuniza participação, interação, incentivo, raciocínio para resolução de problema. Nesse contexto, reafirma-se a participação da mídia como "sujeito" que faz parte de um conjunto com outro "sujeito", o aprendiz, que está reorganizando seu pensamento (BORBA; VILLARREAL, 2006). Seria esse um episódio talvez em que se pode dizer que o conhecimento está sendo construído por seres-humanos-com-mídia, como afirmam Borba e Villarreal (2006)?

Percebe-se ainda que E4 gosta da utilização das ferramentas da videoaula pela oportunidade de ser protagonista de seu aprendizado, em que ela pode ver a explicação "*várias vezes*" e, após ter aprendido a matéria, ser capaz de realizar a atividade sozinha.

No relatório da videoaula "Matemática na cozinha", foi pedida a opinião dos educandos a respeito desse vídeo. Essa mídia tem uma duração de mais de 24 minutos e é apresentada por dois professores de Matemática: o professor Bigode e a professora Cátia. O vídeo se passa em uma cozinha, e os professores contracenam e conversam sobre situações-problema que vão sendo contextualizadas com objetos de uma cozinha. A resposta de uma estudante chamou a atenção, pois ela assistiu a todo o vídeo, sendo que havia sido solicitado somente um trecho 4 minutos. Ela não gostou do vídeo não somente pelo tempo de duração, mas por julgar a resolução da atividade proposta como desonesta e algo mais. Eis a sua resposta:

---

[37] O questionário aplicado aos estudantes foi anônimo, logo, as respostas obtidas deles virão com a seguinte nomenclatura: letra "**E**" seguida de um número para identificar o estudante. Ex: Estudante 1 - **E1**; Estudante 2 - **E2**, e assim sucessivamente.

> ***Hyuna:*** *Não gostei. O primeiro desafio de cortar o bolo em 8 partes iguais com 3 cortes foi desonesto, pois o esperado por muitas pessoas é o corte do bolo em fatias de cima, como o usual e o corte do bolo pela "metade" somente é usado para fazer bolos recheados. O desafio dois nos faz sentirmos burros por não ter adivinhado uma resposta tão óbvia e ridícula, mas na atividade apenas pensamos do jeito que estamos "acostumados" a fazer o que é usual e também de certa forma intuitivo. A explicação sobre o sódio nos biscoitos não ficou muito boa então tive que voltar para entender melhor. Eu assisti ao vídeo inteiro e revi a parte destacada (6:30 a 10:40).*

A garota se manifestou indignada com a forma como o professor de Matemática conduziu as situações: primeiro, as denomina "desafios" como se ninguém fosse capaz de resolvê-las; depois, no caso do vídeo, concede tempo a um outro professor para resolver o desafio, como se somente professores pudessem ser capazes de resolvê-los, e para completar vem com desonestidade dizendo que as partes do bolo são iguais. Não são, as de cima têm cobertura de chocolate. Percebe-se uma insatisfação, no relato dela com a forma como a mídia apresenta a Matemática, como algo que intimida. Pode-se ver que esse relato diz como a garota interage com o que a mídia está expondo. A menina tentou pensar em uma forma de partir o bolo em 8 pedaços iguais com apenas três cortes; noutro momento ela diz se sentir "burra", e também diz que em outra situação ela volta o vídeo para entender a explicação. Possivelmente professores de Matemática, ao assistirem ao mesmo vídeo, não teriam consciência da dimensão da interação emocional que as falas e cenas da videoaula proporcionaram a essa garota.

As mídias das tecnologias digitais são naturalizadas na geração de nossos estudantes. É portanto uma geração midiática que se interessa por vídeos, músicas, fotos, redes sociais e se diverte quando o pano de fundo é a internet e suas possibilidades. Eles estão imersos num mar de tecnologias digitais, são os nascidos na era digital, e "a grande característica comum entre esses jovens está na necessidade de independência e autonomia em relação ao conhecimento que lhes interessa" (KENSI, 2016, p. 50).

Portanto, foi pensando na potencialidade do vídeo e na necessidade de um veículo para o conteúdo matemático que se optou pela videoaula para ser, possivelmente, uma mídia que colaborasse com a autonomia dos educandos em relação ao seu conhecimento para a realização da SAI.

Se somos professores e desejamos atingir nossos estudantes, com sua diversidade, com seus ritmos particulares, com nossas impotências como profissionais, a linguagem audiovisual, num espaço multimodal, é um elemento riquíssimo que pode minimizar as diferenças que não se conseguiria sem o vídeo (MORAN, 2015).

Aliado a essa mesma linha de raciocínio, que valoriza o poder da mídia, fecha-se esse tópico com Borba e Villarreal (2006), que também apresentam a importância das tecnologias na produção de conhecimento do ser humano: “A própria ideia de considerar o ser humano como o único que produz conhecimento pode subestimar a importância das tecnologias na produção de conhecimento” (p. 12. Tradução nossa).

Com os aportes supracitados e com o retorno que o campo apresentou, segundo os relatos dos educandos, pode-se observar que o vídeo, como tecnologia digital, com seus mecanismos de pausar, retroceder, com suas imagens e áudios, parece ser de grande valia na produção de seus conhecimentos.

Minha experiência anterior à pesquisa com a produção aleatória de vídeos me mostrava que os estudantes, de forma geral, são bem receptivos a assistir às videoaulas, contudo, a oportunidade de observá-los fez com que eu percebesse que eles interagem muito mais com a mídia do que eu imaginava.

5.2 Olhando para o ensino de proporcionalidade

Nesta seção nosso olhar se volta para o ensino de proporcionalidade, para a forma como foi estruturado e trabalhado. Buscou-se perceber se o trabalho realizado converge para uma ação pedagógica voltada para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos estudantes e também para uma postura questionadora de procedimentos mecânicos referentes ao ensino de proporcionalidade.

Diante dessa proposta de ensinar proporcionalidade, necessário se fez tecer uma reflexão sobre a utilização de regras e procedimentos mecânicos desprovidos de raciocínio, mais especificamente sobre a regra de três. Nesta seção será apresentado também como a regra de três apareceu em sala de aula e analisados os subsequentes fatos decorridos dessa situação.

Um dos objetivos específicos da pesquisa é analisar se a SAI potencializa o ensino de Matemática, neste caso, o ensino de proporcionalidade. Algumas cenas da sala de aula serão revisitadas sob as lentes de Silvestre (2012), buscando elementos para responder a nossa questão em relação ao ensino, trabalhando com o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

O trabalho de Silvestre (2012) foi escolhido para ser o balizador dessa análise, por ser uma sistematização de importantes trabalhos acadêmicos sobre o ensino de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional (CRAMER et al., 1993; BEHR; HAREL; POST; LESH, 1988,1992; VERGNAUD, 1983; CARPENTER et al., 1999; KARPLUS et al., 1983; LAMON, 1993, 1995, 2005, 2007, e outros). Silvestre (2012) sistematizou esses estudos e defendeu que o raciocínio proporcional envolve três aspectos:

> (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenômeno descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e representações (texto, gráficos, tabelas, razões). (p. 281).

Serão revistadas situações ocorridas em sala de aula, por meio das gravações em áudio e vídeo, do diário de campo, das atividades dos estudantes bem como dos questionários por eles respondidos. Assim, buscou-se compreender e analisar como os estudantes responderam quanto à capacidade para reconhecer como as grandezas se relacionam; reconhecer as estruturas multiplicativas, resolver vários tipos de problemas sobre proporcionalidade e também como se deu a problematização sobre a utilização da regra de três.

5.2.1 Introdução a grandezas e como elas se relacionam

A compreensão sobre a relação entre as grandezas é provavelmente um dos principais pontos para o estudante alavancar o desenvolvimento de seu raciocínio proporcional, segundo Miranda (2016, p. 17) "o raciocínio proporcional implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas, ou seja, a invariância; e na noção de que estas grandezas variam em conjunto, ou seja, covariância".

Diversos pesquisadores como Viana e Miranda (2016), Maranhão e Machado (2011), Behr et al. (1992), Costa e Ponte (2008), Lamon (1993, 2005, 2007), Lesh et al. (1988), Ponte e Marques (2011), Silvestre (2009, 2012), Spinillo (1992, 1993, 2002), Torre et al. (2013) e outros têm trabalhado sobre o ensino de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Um ponto comum entre as opiniões desses autores é a importância do estudante compreender como as grandezas se relacionam.

Tourniaire e Pulos (1985) afirmam que a compreensão sobre as grandezas e o contexto das atividades pode dar complexidade aos problemas de proporcionalidade. O entendimento sobre a natureza das grandezas e como elas se relacionam é um passo importante para o desenvolvimento do RP do estudante, pois constitui a base da compreensão dos problemas de proporcionalidade.

Pensando na necessidade de o estudante entender claramente como duas grandezas relacionam-se, foram elaborados duas videoaulas: a primeira denominada **“Introdução a grandezas”** (Figura 3) e a segunda **“Como as grandezas se relacionam”.**

Figura 3 - QR code - Videoaula - Introdução a grandezas

Fonte: Avelar (2018).

A atividade a ser desenvolvida em sala foi assim estruturada: os estudantes foram separados em grupos nomeados por cores por eles escolhidas: verde, vermelho, azul e amarelo. Foi colocado um papel tipo kraft na parede dividido em três colunas.

Grandeza	Instrumento de medida	Unidade de medida

A dinâmica era que os grupos trabalhassem dois a dois, um validando a resposta do outro. Por exemplo, o grupo vermelho com o azul e o amarelo com o verde. Um integrante do grupo vermelho deveria escrever no papel kraft um trio de respostas: uma grandeza, um instrumento para medir aquela grandeza e uma unidade de medida. Como poucos estudantes levaram material para discussão, foi permitido que eles escrevessem uma grandeza ou instrumento de medida ou unidade, como preferissem.

> ***Professora:*** *Nós vamos trabalhar, grupo vermelho com o grupo amarelo e o verde com o azul. Nós vamos fazer o seguinte: o grupo vermelho vem aqui na frente e escreve a grandeza ou instrumento ou unidade de medida, o grupo parceiro vai falar se está certo ou se está errado. Vamos começar. Diga-me uma grandeza:*
> ***Aninha:*** *Régua.*
> ***Professora:*** *Grupo amarelo, régua é uma grandeza? Diga uma grandeza que dá pra medir com régua.*
> ***Spinardi:*** *Metro.*
> ***Professora:*** *Metro é grandeza?*
> ***Gêmines:*** *Centímetros.*
> ***Professora:*** *Grupo vermelho, metro é grandeza?*
> ***Yoda, Gêmines e outros estudantes:*** *É sim.*
> ***Yoda****: Metro não é grandeza não, metro é unidade de medida.*
> ***Hyuna:*** *Isso! Metro é unidade de medida.*
> ***Professora:*** *Grupo verde, o que a gente pode medir com metro? O que vocês acham*

que pode medir com metro?
Spinardi e Joker: *A massa.*
Bolty: *Dá para medir terreno com metro, ah, não, isso é metro cúbico.*

Os estudantes demonstram dificuldade em distinguir grandeza de unidade de medida. Isso fica evidenciado quando dizem que régua, metro, centímetro e massa são grandezas. Essa dificuldade é realçada também quando Bolty diz que um terreno pode ser medido em metros cúbicos. Essas respostas mostram que estão os estudantes estão em um processo de aprendizagem em que grandezas e unidades de medida nos parece estar em uma fase introdutória.

No decorrer da aula, eles trouxeram para a discussão o que haviam aprendido na aula de Ciências e sugeriram que uma banheira era um instrumento de medida. Assim se deu a conversa:

Professora: *Quando eu falo assim, volume é grandeza, por que que volume é grandeza?*
Suga: *Volume é toda extensão.*
Hyuna: *Volume é toda extensão de um objeto, ou seja, ah...sei lá.*
Professora: *É o espaço que ele ocupa, então vamos pensar o seguinte, a Hyuna está falando que volume é grandeza, todo mundo concorda com isso?*
Maioria dos estudantes: *Sim.*
Professora: *Se é grandeza, como que eu posso medir essa grandeza?*
Spinardi: *O volume é...Um nome lá que eu esqueci.*
Hyuna: *Proveta.*
Spinardi: *Isso aí, proveta.*
Hyuna: *Ou então uma banheira cheia de água.*
Professora: *O que que eu vou falar...Um recipiente né?! Um balde...*
Spinardi: *Nada a ver, você vai enfiar seu corpo dentro de um balde? Você vai medir o volume da sua mão?*
Gêmines: *A banheira! A banheira, foi o professor de Ciências que disse.*
Professora: *Então como que a banheira mede? Me explica, eu coloco banheira aqui sem problema.*
Yoda: *Água.*
Gêmines: *Você enche ela de água, e a água que cair lá é a sua massa.*
Yoda: *É.*
Yoda: *Não é massa não, é o volume.*
Gêmines: *Ah, é o volume!*
Professora: *Isso se chama princípio de Arquimedes. Ok, então vamos colocar banheira aqui, mas por que eu vou explicar pra vocês, combinado?!*
Professora: *Unidade de volume? Como eu meço volume?*
Spinardi: *Ah... Sei lá.*
Professora: *Metro cúbico? O que você falou da banheira lá? O que saiu?*
Hyuna: *Litros.*
Spinardi: *Litros.*
Mylena: *Um litro de leite.*
Professora: *Então volume, nesse caso, é grandeza, litros é unidade de medida. Mais uma Grandeza...*
Aninha: *Temperatura.*
Suga: *Newtons.*

Nesse trecho Hyuna demonstra compreender que volume é uma grandeza e também explica como uma banheira cheia de água pode ser utilizada como instrumento de medida. Quando Gêmenis diz que foi o professor de ciências que explicou realça a importância do professor explorar com os estudantes a diversidade de possibilidades para explicar esse conteúdo. Todas as vezes em que se pedia um exemplo de grandezas, algum estudante falava uma unidade de medida, como nesse exemplo da Suga dizendo erroneamente que Newtons é exemplo de grandeza. Analogamente acontece em relação a instrumento de medida. Assim os estudantes se expressaram:

> ***Professora:*** *Temperatura. Com o que eu posso medir temperatura?*
> ***Gêmines:*** *Graus.*
> ***Professora:*** *Unidade de medida para temperatura?*
> ***Spinardi:*** *Termômetro.*
> ***Hyuna:*** *Kelvin.*
> ***Suga:*** *Fahrenheit.*
> ***Professora:*** *Está faltando uma coisinha antes da palavra: Graus.*
> ***Professora:*** *...mais uma grandeza...*
> ***Hyuna:*** *Velocidade.*
> ***Professora:*** *Unidade de medida de velocidade?*
> ***Gêmines:*** *É... Quilômetro.*
> ***Professora:*** *Instrumento de medida de velocidade?*
> ***Hyuna:*** *Cronômetro.*

Os jovens não demonstram convicção em suas respostas. Pode-se perceber que eles conseguem associar as palavras graus, temperatura, termômetro, Kelvin e Fahrenheit como peças de um quebra-cabeça, ainda em construção. Não foi percebido se os estudantes conseguem seguramente distinguir a grandeza temperatura do instrumento de medida e sequer das unidades de medida.

Analogamente, ao se fazer referência à unidade de medida de velocidade, obteve-se "quilômetro" como resposta e cronômetro como instrumento de medida (de velocidade). Eles não sabem que cronômetro mede tempo ou que quilômetro é medida de comprimento? Diante dessas respostas, vê-se a importância de o professor explorar a videoaula "Introdução a grandezas" e trabalhar com os jovens grandezas e medidas para que possam iniciar os estudos de proporcionalidade com mais confiança e compreensão de conceitos primordiais para o estudo.

Outras duas respostas também foram surpreendentes. Na primeira, os jovens exemplificaram a grandeza força corretamente. Disseram que pode ser medida com um dinamômetro, e a unidade de medida pode ser Newtons, exemplificando, mais uma vez, as aulas de Ciências. A segunda situação foi quando um estudante exemplificou grandeza dizendo:

> ***Yoda:*** *Mac.*
> ***Professora:*** *Mac? Como escreve isso? O que é isso?*
> ***Yoda:*** *Ah não, deixa, deixa.*

Aquele era o momento para mostrar que estavam em um ambiente de aprendizagem e que também a professora tinha algo a aprender com os estudantes:

> ***Professora:*** *Eu não sei, me ensina!*
> ***Professora****: Qual a relação desse termo com a velocidade? Por exemplo, aqui eu quero dizer o seguinte: quilômetro por hora, em uma hora eu ando um quilômetro. Se for metros por segundo, em um segundo eu ando um metro. O que que é Mec(Mc)?*
> ***Yoda:*** *Mec. É mais que mil quilômetros mais ou menos...É um negócio de Ciências lá.*
> ***Bolty:*** *Ah tô ligado o que que é mec, mec, é tipo um negócio rápido, tá ligado?!*
> ***Yoda:*** *São mais de mil quilômetros, passa de mil quilômetros.*
> ***Professora:*** *Mas é o quê? Por hora? Por minuto? Por segundo? Como é que é?*
> ***Joker:*** *Por hora.*
> ***Professora:*** *Ah, pois eu quero que vocês me expliquem o que é isso. Onde tem isso aqui, Yoda?*
> ***Yoda:*** *No filme "The Flash", mas eu vi isso em outro lugar, eu vi em um programa lá...Não me lembro, acho que foi no meu computador.*

Após pesquisar o assunto, na aula seguinte, a professora trouxe a discussão novamente para a sala explicando que aquilo a que o Yoda se referia se chama Mach.

> ***Professora:*** *Ah eu vi o que que é MACH.... é uma relação da velocidade do som, quantas vezes um dispositivo ultrapassa a velocidade do som, então quando você fala que é MACH dois; significa que ele é... A velocidade do som vale 340 metros por segundo, aí o MACH é uma razão entre duas velocidades. Aí quando o Yoda fala que ele ultrapassa cinco mil quilômetros por hora fala que ele está no MACH cinco.*
> ***Yoda:*** *É MACH três.*
> ***Professora:*** *Não... dá mais. 340 metros por segundo x 3,6 dá... 1224 km/hora então 5000 km/h dá 4...*

Alguns membros dos grupos, todas as vezes que se manifestavam, falavam corretamente sobre velocidade, tempo, força e sobre suas unidades de medidas. Esses estudantes têm o hábito de jogar *on-line* entre si jogos de computador de aviões-caça, e esses aviões ultrapassam a velocidade do som. Eles também relataram que a referência sobre a razão *Mach* foi relacionada a um seriado de TV: *The Flash*. Na série, o super-herói, bem como o vilão *Zoom*, desenvolvem altas velocidades. Acredito que possivelmente as experiências desses jovens tenham sido diferenciais para desempenharem a tarefa. É importante que o professor permita e incentive os estudantes a levarem para a sala de aula exemplos diferentes e enfatize com os jovens que existem muitas grandezas, unidades de medidas, instrumentos, e isso faz com o que o estudante perceba melhor o mundo a sua volta. Ele deve mostrar a importância de trazer esses conhecimentos para a escola. Segundo Silvestre (2012), as grandezas representam um dos fatores que podem impactar a complexidade dos problemas “sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema” (SILVESTRE, 2012, p. 34). Segundo a mesma autora, em uma pesquisa realizada por Bock e Verschaffel (apud SILVESTRE, 2010), “a natureza das grandezas (discretas e contínuas) não tem influência no desempenho dos alunos” e que a idade dos estudantes bem como a experiência escolar são os fatores relevantes ao desempenho dos estudantes.

Pode-se perceber, portanto, que os estudantes reconhecerem o que são grandezas não foi algo trivial, inclusive para conceito possivelmente presente no seu dia a dia, como foi o metro. Os estudantes demonstraram dificuldades para chegar ao consenso de que metro é uma unidade de medida e não uma grandeza. Vê-se a importância de se trabalhar com os jovens as noções de grandezas antes de se introduzir a parte que se refere à relação entre elas. Vece, Curi e Santos (2017) fizeram uma análise em 22 documentos em municípios e estados brasileiros e constataram que somente em 10 deles existe uma sugestão para se trabalhar grandezas e medidas. As autoras dizem que a pesquisa “evidenciou a presença de lacunas concernentes a: articulação das grandezas e medidas com outras áreas de conhecimento; definição de conceitos; subsídios sobre o processo cognitivo”. (VECE; CURI; SANTOS, 2017, p. 324).

A segunda videoaula: “Como as grandezas se relacionam” (Figura 4) foi destinada a mostrar para o estudante que há grandezas que não se relacionam, outras que se relacionam, mas em especial há aquelas que se relacionam de forma regular. Essa videoaula abrangeu diferentes contextos para explicar cada situação de comparação de grandezas.

Em sala de aula, começou-se a conversar sobre como as atividades seriam conduzidas. Diante da pergunta, dois grupos distintos, o verde (G.G) e o vermelho (G.V), começaram a discutir:

> ***Professora:*** *Por que vocês acham que altura e idade não se relacionam?*
> ***G.G:*** *Porque eu tenho 14 anos e tenho 1,50m de altura, e a Suga também tem 14 anos e tem 1,75m de altura.*
> ***Professora:*** *Vocês acham que podemos relacionar a altura com que outra grandeza?*
> ***G.V****: Massa. Você cresce e fica mais pesado.*
> ***Professora:*** *Sempre que a gente cresce a gente fica mais “pesado”?*
> ***G.G.*** *Não, eu era gordo, cresci e emagreci.*
> ***G.G****. Tem gente alto e magro e tem gente pequeno e gordo, não tem nada a ver.*
> ***G.V****. Mas se alguém cresce tem que aumentar a massa sim.*
> ***G.G.*** *Então você está dizendo que ninguém pode emagrecer?*

Figura 4 - QR code – Videoaula - Como as grandezas se relacionam

Fonte: Avelar (2018).

Observa-se na discussão entre os grupos que analisar como as grandezas se relacionam não é algo simples para os estudantes. Eles demonstraram dificuldade em analisar a relação entre altura e idade, e quando foi pedido um exemplo de outra grandeza que pudesse se relacionar com altura, os estudantes do grupo vermelho responderam: “massa”, e mesmo após a resposta do grupo verde “tem gente alto e magro e tem gente pequeno e gordo, não tem nada a ver”, o grupo vermelho convictamente alegou que “se alguém cresce tem que aumentar a massa sim”. Nesse momento, foi perguntado ao grupo vermelho se eles pensaram somente na estrutura óssea ou no corpo humano como um todo. O professor deve se ater a esses detalhes e fazer as devidas intervenções, fazendo questionamentos conduzindo a construção do conceito, fazendo argumentações e contra-argumentações com os jovens, e não somente determinar o que seja certo ou errado.

A atividade proposta para os estudantes foi que eles deveriam fazer lançamentos dos (dados) cubos (Figura 5), formar e registrar frases com duas categorias de grandezas: com grandezas que não se relacionavam e com grandezas que se relacionavam. Deveriam especificar como era isso, por exemplo, “quanto mais quilos de carne eu compro, mais eu vou pagar”. Os estudantes estavam organizados em grupos, e cada grupo entregou as respostas dessa atividade em uma folha de papel (não foi entrega individual).

Figura 5 - Kit de cubos

Fonte: Foto da autora.

Os estudantes responderam que as grandezas a seguir, duas a duas, não se relacionam:

> ***G.A:*** *tempo e largura; tempo e massa*
> ***G.Y****: pressão e consumo; área e perímetro; velocidade e volume*
> ***G.G:*** *massa e largura; área e tempo*
> ***G.V:*** *velocidade e densidade; distância e altura; largura e pressão*

Antes de o grupo vermelho concluir que distância e altura não se relacionavam, um estudante (E) disse:

> ***E:*** *Claro que distância e altura se relacionam. Imagina um prédio em construção: quanto maior a distância dele em relação ao chão, maior vai ficando sua altura.*

Não foi feita nenhuma intervenção, porque foi interessante a forma como estavam desenvolvendo o conceito de altura e distância. Eles entregaram o relatório alegando que altura e distância não se relacionavam.

Observa-se que há uma dificuldade grande dos estudantes ao tentar relacionar duas grandezas, possivelmente para eles foi mais simples dizer que elas não se relacionavam por não conseguirem uma situação que pudesse expressar alguma relação entre elas. Alguns jovens observados em nossa pesquisa apresentaram dificuldades em estabelecer conexões entre as grandezas. Esse fato foi observado diante da insegurança dos alunos em responder como as grandezas se relacionavam nessa atividade que denominamos Atividade dos cubos (Apêndice E).

Consideramos que essa atividade foi complexa em função da aleatoriedade que os lançamentos dos dados (cubos) proporcionavam, a qual contribuiu para a diversificação das situações a serem construídas e interpretadas.

Os objetivos dessa atividade foram perceber como os estudantes se expressariam diante da apresentação de grandezas, duas a duas, que tipo de associação eles seriam capazes de fazer e de que forma o fariam e analisar a capacidade deles de reconhecer como as grandezas se relacionavam.

As respostas diante dos lançamentos dos cubos, em que os estudantes alegaram que as grandezas se relacionam (QUADRO 2), foram as seguintes:

Quadro 2 - Respostas - grandezas que se relacionam

Grandeza 1	Grandeza 2	Frase formada
área	Tamanho de ...	Quanto maior a área do terreno, maior o tamanho.
volume	preço	Quanto maior o volume, maior o preço.
velocidade	tempo	Quanto maior a velocidade, menor o tempo.

distância	tempo	Quanto maior a distância, maior o tempo para chegar.
Quantidade de...	pressão	Quanto maior a quantidade de ar, maior a pressão.
tempo	consumo	Quanto maior o tempo com a torneira aberta, maior o consumo de água.
peso	força	Quanto maior o peso, maior a força.
Quantidade de...	tempo	Quanto maior a quantidade de caixas, maior o tempo para finalizar o serviço.
força	pressão	Quanto mais força, mais pressão.
força	altura	Quanto maior a altura, maior a força para aguentar a carregar.
largura	Quantidade de...	Quanto maior a quantidade de centímetros, maior a largura.

Fonte: Elaborado pela autora.

Silvestre (2013) também afirma que os fatores que dão complexidade aos problemas que "envolvem proporcionalidade direta mais frequentes na literatura são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações" (p. 33).

As situações em que os grupos relatam haver relação entre as grandezas fazem sentido, mas as frases utilizadas para representar tal relação são apresentadas de forma superficial. Quando o estudante diz: "*Quanto maior o volume, maior o preço*" não faz sentido necessariamente, a menos que ele esteja pensando em uma situação específica de volumes (unidades) de uma mesma mercadoria.

Ao participar da conversa com o grupo que respondeu: "*Quanto maior o volume, maior o preço*", foi pedido que imaginassem uma bicicleta dentro de uma caixa e, em seguida, um diamante dentro de uma caixinha. Nessa discussão, os estudantes justificaram-se alegando que "*não conseguiam pensar como a professora*". Então foi-lhes perguntado no que pensaram quando criaram a frase. Eles estavam se referindo ao volume como quantidade de uma mesma mercadoria.

Essa fala do estudante corrobora com a ideia que inicialmente foi construída como justificativa para elaborar a primeira videoaula denominada "Introdução a grandezas". Os debates entre os estudantes e o professor de Matemática sobre como eles entendem e compreendem as grandezas, suas unidades de medidas e suas formas de relação são proveitosos e devem ser incentivados. São momentos de partilha de experiências e podem ser veículos de compreensão diante do olhar do outro para uma situação apresentada. Nesses debates o professor pode perceber como o jovem compreende as grandezas, e esse qual é a visão do professor diante da mesma situação.

A maioria das respostas dos estudantes são coerentes, mas também vale pontuar que várias delas foram apresentadas nos vídeos, o que pode ter sido um suporte para eles ao apresentarem os contextos em que podem ser inseridas.

Outra resposta observada é a última da lista, que associa as grandezas: quantidade (de) e largura. O grupo de estudantes reconhece que *"quanto maior a quantidade de centímetros, maior a largura",* o que mostra mais uma vez que o contexto que os estudantes conseguiram encontrar foi somente o de associar largura com centímetros, o que corrobora com Tourniaire e Pulos (1985) de que o desempenho dos estudantes pode ser afetado, inclusive, pelo contexto envolvido nas atividades. Em contrapartida, quando eles dizem que as grandezas não se relacionavam, possivelmente não conseguiram pensar em um contexto em que seria plausível encontrar alguma forma de relação, ou seja, a de construir um contexto (para explicitar que há relação entre as grandezas).

Portanto, em relação ao retorno dos estudantes, ressalta-se a dificuldade que eles apresentam quando o assunto é compreender a relação entre as grandezas. Sendo assim, cabe ao professor explorar diferentes situações em diversificados contextos para promover o desenvolvimento da capacidade dos alunos de reconhecimento do comportamento de grandezas, duas a duas.

Talvez seja pertinente que os professores tomem cuidado para não quererem apenas enculturar os alunos nos conceitos e contextos "matemáticos" já utilizados e desprezar a bagagem que eles trazem. Nesse momento, abre-se um importante espaço para discussão e reflexão sobre a relação entre as grandezas, mas também em como os estudantes e professores pensam e refletem sobre uma ideia. Acredita-se que possivelmente os estudantes que conseguirem se apropriar melhor dos conceitos de grandezas, unidades de medidas bem como das relações entre as grandezas podem apresentar um melhor desempenho no estudo sobre proporcionalidade, principalmente

A seguir serão apresentadas as videoaulas bem como as atividades desenvolvidas em sala que abordaram a base do desenvolvimento do raciocínio proporcional, que são as estruturas que envolvem a multiplicação e divisão, chamadas estruturas multiplicativas no campo conceitual de Vergnaud.

5.2.2 Reconhecimento das estruturas multiplicativas

A apropriação das estruturas multiplicativas para resolução de problemas de proporcionalidade compreende uma parte muito significativa do processo de desenvolvimento do raciocínio proporcional. Diversos autores, como Costa e Ponte (2008), Miranda (2016), Silvestre (2012) afirmam que o raciocínio proporcional está relacionado com o entendimento da relação de covariância e invariância das grandezas. A compreensão dessa constante perpassa pelo educando raciocinar com base nas estruturas multiplicativas, operando com multiplicações e divisões (VERGNAUD, 1990 apud Miranda, 2016). Segundo as pesquisas de Moreira (2002) sobre os campos conceituais de Vergnaud, o campo conceitual das estruturas multiplicativas "consiste de todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporções simples e múltiplas para os quais geralmente é necessária uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações" (MOREIRA, 2002, p. 12). Ainda em Moreira (2002), pode-se perceber que a utilização do princípio aditivo se mostra recorrente como a primeira opção dos estudantes, de forma geral, para a resolução de atividades.

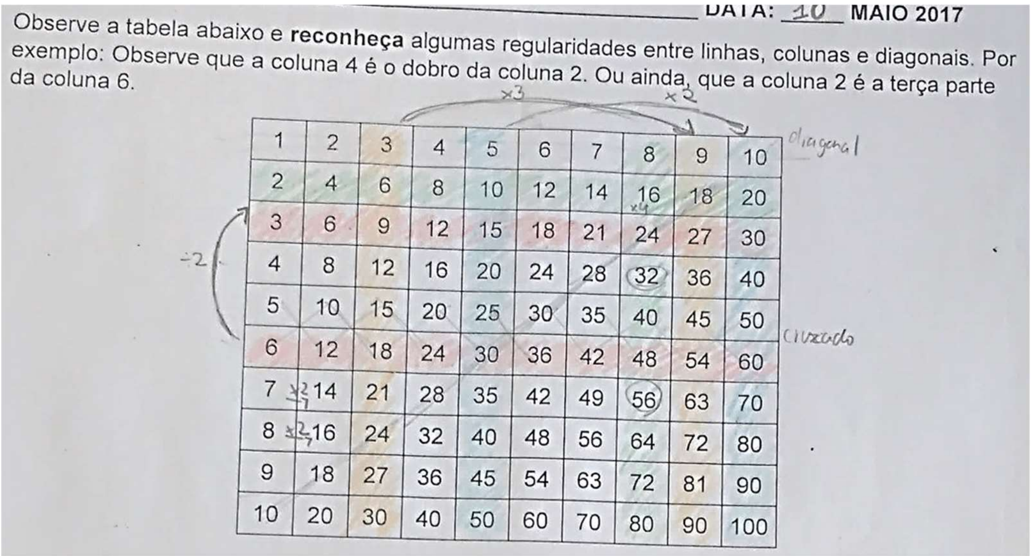
Quando o estudante começa a reconhecer covariância e invariância, ele demonstra indícios de compreensão das relações entre as grandezas e está se apropriando das estruturas multiplicativas, o que leva a acreditar que ele encontra-se em processo de desenvolvimento de seu raciocínio proporcional.

Após a realização do trabalho preliminar de compreensão sobre definição e reconhecimento de relações entre grandezas em sala de aula, iniciou-se uma etapa cujo objetivo era mostrar o que são regularidades e como podemos percebê-las. Ponte et al. (2010) apresentam uma abordagem para ajudar o estudante a reconhecer a constante entre as grandezas que se relacionam por meio de exploração de **regularidades**. Segundo os autores: "o professor deve seleccionar tarefas que permitam aos alunos analisar, através da exploração de regularidades numéricas, situações que envolvem proporcionalidade directa e outras situações em que tal relação não existe" (p. 7).

Nesse contexto foi desenvolvida a atividade para a sala de aula denominada "Como as grandezas se relacionam" (Apêndice E), que é composta basicamente de uma tabela numérica 10x10. Essa atividade foi adaptada de um trabalho de Ponte et al (2010) em que os autores sugerem que o professor possa fazer pequenas intervenções para estimular o reconhecimento de regularidades. Vale ressaltar que todas as atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas em grupos de estudantes que conversavam entre si e decidiam a melhor resposta para entregar à professora para representar o grupo. Com isso, as referências às respostas dos exercícios são do grupo ou dos estudantes.

A atividade consistiu em solicitar aos estudantes que reconhecessem regularidades entre linhas e entre colunas, diagonais e que colorissem as regularidades encontradas. Essa atividade também tem como objetivo despertar nos educandos a percepção para o significado que se desejava construir para o termo regularidade. Resposta (Figura 6):

Figura 6 - Tabela de Regularidades – Grupo amarelo


DATA: 10 MAIO 2017

Observe a tabela abaixo e **reconheça** algumas regularidades entre linhas, colunas e diagonais. Por exemplo: Observe que a coluna 4 é o dobro da coluna 2. Ou ainda, que a coluna 2 é a terça parte da coluna 6.

x3 x2

diagonal

÷2

cruzado

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Elaborado pela autora.

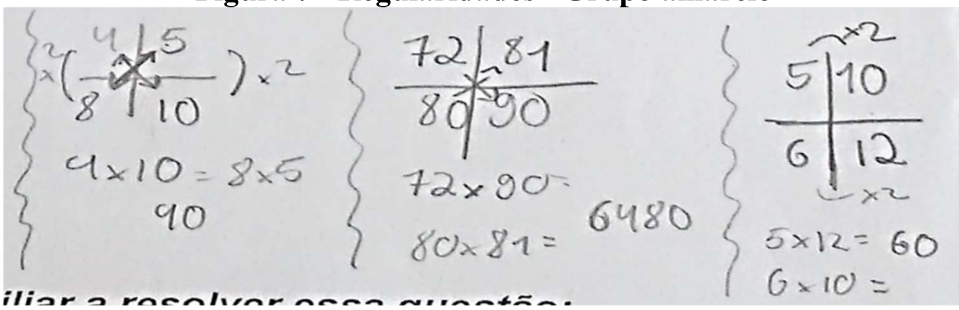
Pode-se perceber que o estudante representa com setas algumas relações que consegue estabelecer entre as colunas bem como com as linhas. Realça, na vertical, a coluna 3 com a coluna 9 escrevendo x3 (multiplicado por 3); na horizontal, realça as colunas 3 e 6 escrevendo 2 (dividindo por 2), fazendo associação colorindo as respectivas linhas e colunas.

Segundo Ponte et al. (2010)

> O trabalho com foco na investigação e exploração de relações multiplicativas é fundamental para que o aluno compreenda as relações proporcionais, desenvolva flexibilidade na utilização dos seus conhecimentos (tabuada, múltiplos, divisores, razão unitária), estabeleça conexões entre esses conhecimentos e os utilize na resolução de situações problemáticas (p. 45).

A figura 7 mostra o registro dos estudantes que reconheceram a relação escalar (covariância) fazendo 4 x 2 = 8 e 5 x 2 = 10 e também a relação funcional (invariância) fazendo 5 x 2 = 10 e 6 x 2 = 12. Também encontraram regularidade utilizando o produto cruzado (produto dos meios é igual ao produto dos extremos) fazendo 72 x 90 = 80 x 81 = 6480.

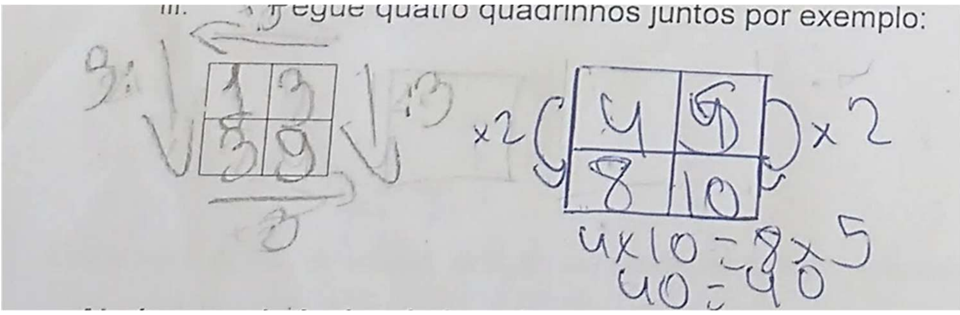
Figura 7 - Regularidades - Grupo amarelo



Fonte: Elaborado pela autora.

O grupo vermelho (Figura 8) exemplifica covariância da mesma maneira que o grupo amarelo e sinaliza indicio de reconhecimento de invariância fazendo 3 x 3 = 9. Diz-se indícios, pois não há como saber o que pensaram em relação aos números 1 e 3, uma vez que colocaram uma seta no sentido oposto.

Figura 8 - Regularidades - Grupo vermelho



Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com os registros dos estudantes, eles mostraram reconhecer com certa facilidade: covariância, invariância e o produto dos meios e dos extremos da proporção apresentando diversas possibilidades na tabela. Observou-se que a dificuldade maior foi sanada quando foi permitido o uso da calculadora para efetuarem os cálculos.

O fato de a tabela conter vários números (não todos) variando de 1 a 100 trouxe para os estudantes diferentes níveis de dificuldade para cálculos numéricos. Como dito anteriormente, Tourniaire e Pulos (1985), Silvestre (2013) e outros pesquisadores afirmam que um dos pontos a ser considerado que dá complexidade aos problemas de Matemática é de natureza numérica. Nessa atividade, permitiu-se o uso da calculadora quando eles desejaram validar produto dos meios e dos extremos com os números maiores, pois estava sendo um motivo de desânimo ter que operar com esses valores.

Um exemplo do que foi falado ocorreu quando foram pedidos aos estudantes exemplos de regularidades que eles haviam encontrado na tabela.

> ***Meliôdas:*** *Professora, vou tentar uma.*
> ***Professora****: Onde está (referindo-se à tabela fornecida)?*
> ***Meliôdas:*** *Estou inventando uma tabela para dar essas coisas de regularidades Coloca aí: no primeiro quadrado é o 1, depois o 5, 5 e 10.*
>
> | | |
> |---|---|
> | *1* | *5* |
> | *5* | *10* |
>
> *Então 1 vez 10 dá 10 e 5 + 5 também dá 10.*
> ***Manu:*** *Não é isso não, professora, 5 + 5 = 10 não serve, tem que ser 5 x 5, que também não dá 10.*

Enquanto se tentou explicar por que a situação proposta não se encaixava, a estudante interveio novamente:

> ***Manu:*** *Professora, e se a gente fizer: 10: 2 dá 5 e do outro lado 5:5 dá 1? Aí pode?*

‘

: 5

1	*5*
5	*10*

: 2

Ela mesma concluiu:

> ***Manu:*** *Ah, não é regularidade, para ser tem que ser igual dos dois lados, né?*

Inicialmente, a primeira impressão foi de que a atividade estava simples para os estudantes, pois não apareceu em nenhum grupo sugestão de trabalhar com adições até porque no enunciado houve uma instrução para utilização de princípio multiplicativo.

Quando o estudante Meliôdas resolveu criar sua própria tabela, percebeu-se que, mesmo com valores numéricos fáceis de serem operados, o estudante trazia consigo rapidamente elementos do princípio aditivo. Rapidamente porque ele estava fazendo os “testes” com calculadora. Ou seja, se o estudante estava de posse de uma calculadora e mesmo assim ele sugere os números: 1, 5, 5 e 10 e ainda pensa em 5 + 5 para dar 10, é porque ele não pensou em 1+ 10 e sim em 1 x 10. Se tivesse pensado totalmente em adição, o resultado buscado seria 1+ 10 = 11.

1	5
5	10

Pode-se notar que o princípio multiplicativo surge quando o estudante faz “1 x 10”, contudo, não estava totalmente desvinculado do princípio aditivo. Percebe-se que o estudante possivelmente pode estar em um processo de desenvolvimento do seu raciocínio proporcional, porém requer maior familiaridade com as atividades. O que isso leva a pensar/analisar para a sala de aula para futuras aulas de proporcionalidade?

O tema regularidade foi introduzido na aula “Como as grandezas se relacionam” (Figura 9), mas na terceira videoaula denominada “Grandezas diretamente proporcionais” que o assunto foi enfatizado.

Figura 9 - QR code- Videoaula - Grandezas Diretamente Proporcionais

Fonte: Avelar (2018).

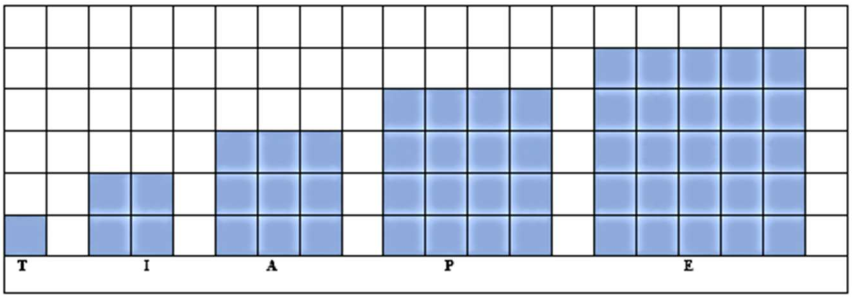
Apresentou-se a constante de proporcionalidade, e na aula compararam-se os preços de tabelas de estacionamento. Na explicação, utilizando-se a tabela de preços que apresenta regularidade, foi introduzido o conceito de constante de proporcionalidade e então definiram-se grandezas diretamente proporcionais.

A atividade analisada na sequência foi a denominada “Observando regularidades nos quadrados[38]”. Foram apresentadas as representações de quadrados com o objetivo de analisar como os estudantes percebem as relações entre comprimento de lado, perímetro e área desses quadrados (Figura 10).

[38] Após ter realizado essa atividade com os estudantes, encontrei outras semelhantes em outros trabalhos acadêmicos, inclusive em Ponte et al (2010). Acredito que o fato de ser uma atividade simples de ser elaborada associada ao potencial que pode apresentar pode ter sido pensada por vários professores de Matemática.

Figura 10 - Regularidades nos quadrados

Observe os quadrados T, I, A, P, E e responda as questões que seguem:



Considere que cada quadradinho da malha quadriculada seja de 1 cm.

Preencha a tabela com o que lhe é pedido.

Quadrado	Comprimento do lado	Perímetro	Área
T			
I			
A			
P			
E			

Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira questão proposta aos estudantes foi perguntar-lhes se as grandezas comprimento do lado e perímetro eram proporcionais.

> ***G.Y***: *Sim, pois, para completar a coluna perímetro, precisamos apenas multiplicar a coluna comprimento do lado por 4. Exemplos:*
> *1 cm . 4 = 4 cm*
> *2 cm . 4 = 8 cm*
> *3 cm. 4 = 12 cm*

A segunda questão foi perguntar se o comprimento do lado do quadrado e sua respectiva área são proporcionais.

> ***G.V:*** *Não, pois, quando o lado do quadrado dobrar, a sua área não irá dobrar, mas sim quadruplicar.*

Em seguida foi apresentado o seguinte questionamento: se aumentarmos o comprimento do lado, a área aumenta?

> ***G.A***: *Sim, quanto maior o lado, maior a área.*

Isso garante que essas grandezas sejam diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

> ***G.Y:*** *Não, porque o comprimento do lado pode dobrar, porém a área não irá necessariamente dobrar, fazendo com que essas grandezas não sejam proporcionais.*

Nessa atividade foi enfatizado o trabalho de um dos erros conceituais no ensino de proporcionalidade, que é o de dizer que: "dadas duas grandezas x e y se x aumenta e y também aumenta, isso significa que são proporcionais", pois foi algo que os integrantes do grupo discutiram. Um estudante explicando ao outro:

> ***Yoda:*** *Para ser proporcional tem que dar o mesmo número dos dois lados, se dobra o lado tem que dobrar a área, mas não dobra olha, deu 16 e não 8, então não é.*

Essa fala aconteceu quando o aluno Yoda referia-se ao quadrado de lado 2 unidades de comprimento.

Nessa atividade, o professor deve mostrar aos jovens que não bastam duas grandezas aumentarem ou diminuírem simultaneamente para garantir a proporcionalidade. Ele deve dar o foco na estrutura multiplicada, na regularidade, na linearidade, pedir-lhes para observarem o que ocorre com a quantidade de quadrados pequenos que compõem a área do quadrado quando há a medida do comprimento do lado dobrada, por exemplo. A malha quadriculada pode ser um facilitador para os estudantes que não conseguem imaginar a situação proposta.

5.2.2.1 Fortalecendo os estudos sobre proporcionalidade direta

Para que o estudante aproprie-se da noção de proporcionalidade direta, é importante que ele reconheça situações em que não há proporcionalidade bem como aquelas que são inversamente[39] proporcionais, assim ele construirá confiança e poderá consolidar o seu aprendizado. Antes da videoaula sobre grandezas inversamente proporcionais, em sala de aula foi dada uma atividade com o seguinte enunciado:

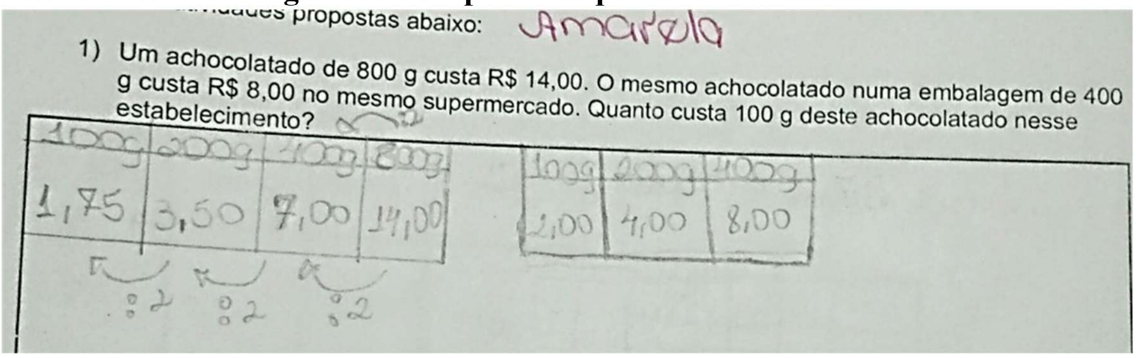
> Um achocolatado de 800g custa R$ 14,00. O mesmo achocolatado numa embalagem de 400g custa R$ 8,00 no mesmo supermercado. Quanto custa 100g desse achocolatado nesse estabelecimento?
> ***Professora****: Pessoal, resolvam esse exercício (...)*
> ***Spinardi:*** *400g, R$ 8,00?*
> ***Professora****: Eu quero saber quanto que custa 100g.*
> ***Suga****: Nem tem regularidade.*
> ***Spinardi****: Espera aí, tem sim.*

[39] Há pesquisas como as de Modestou e Gagatsis, (2006 e 2007); Modestou, Gagatsis e Pitta-Pantazi, (2004), que consideram que grandezas inversamente proporcionais sejam grandezas pseudoproporcionais. Neste trabalho optou-se por grandezas inversas ou inversamente proporcionais.

A garota Suga havia aprendido regra de três em outra escola e recorrentemente fazia intervenções na aula para que a atividade fosse resolvida por regra de três. Foi a primeira vez que se conseguiu perceber que ela havia reconhecido a importância de uma situação apresentar regularidade para ser considerada problemas de proporcionalidade, o que foi surpreendente. A conversa continuou, e os outros estudantes demonstraram compreensão das estruturas multiplicativas. Em suas falas, sinalizavam algum desenvolvimento de seu raciocínio proporcional:

> ***Suga**: Nem tem regularidade.*
> ***Spinardi**: Espera aí, tem sim.*
> ***Manu**: Em relação a gramas, tem, mas do valor não tem não... porque se no valor tivesse regularidade no 400 gramas seriam 7 reais.*
> ***Professora:** Todo mundo entendeu o que a Manu falou?*
> ***Manu:** É que se fosse regularidade, no 800g ali tá certo, na metade 800g, 400g, agora se fosse na regularidade do dinheiro tinha que ser $7 reais no 400g e não, então não tem regularidade no preço, mas no grama.*
> ***Professora**: O que vocês acham do que a Manu falou?*
> ***Spinardi:** É que quando se tem relação direta, são proporcionais.*
> ***Manu:** É igual ao que você explicou na videoaula, se um multiplica por 4, o outro também tem que multiplicar por 4.*
> ***Spinardi:** Ou seja, não são diretamente proporcionais.*
> ***Professora:** Se aqui dividi por 2, aqui também deveria ser divisível por 2 para ter o quê?*
> ***Alguns estudantes:** Regularidade.*
> ***Professora**: Se tiver regularidade, a gente pode afirmar que essas grandezas são diretamente proporcionais. Uma das coisas que ajuda muito é construir uma tabela com os valores: então se coloca aqui 800g, 400g, 200g, 100g, por exemplo, nesse caso aqui custam 14 reais, daqui pra cá o que aconteceu? Dividido por 2, então daqui pra cá (...)*
> ***Yoda:** Dá R$ 1,75.*

Figura 11 - Resposta da questão achocolatado



Fonte: Elaborado pela autora.

Vale ressaltar que a estudante Manu recorre aos ensinamentos da videoaula como argumento, respondendo: "*É igual ao que você explicou na videoaula, se um multiplica por 4,* *o outro também tem que multiplicar por 4".* Estaria Manu em um processo de construção de raciocínio proporcional reconhecendo as estruturas multiplicativas como exposto na videoaula?

Atividades envolvendo grandezas que não têm proporcionalidade direta devem ser inseridas em aulas de grandezas diretamente proporcionais, fazendo com que o estudante se conscientize da importância de se reconhecer a regularidade (proporcionalidade) em cada situação. A utilização de estruturas em formato de tabelas pode ser um artifício para ajudar o estudante a visualizar as estruturas multiplicativas (covariância ou invariância) como estratégia de resolução para o exercício. (Figura 11)

Com o intuito de fornecer mais elementos para o ensino de proporcionalidade, foi gravada a videoaula 4 denominada "Grandezas inversamente proporcionais" (Figura 12). Compreende-se que trabalhar com grandezas inversamente proporcionais é uma das formas de diversificar as experiências dos estudantes, a fim de que eles possam distinguir as situações-exemplo de proporcionalidade direta.

Figura 12 - QR code - Videoaula - Grandezas inversamente proporcionais

Fonte: Avelar (2018).

Nessa videoaula é explicada a condição para que duas grandezas sejam inversamente proporcionais, e em um dos exemplos a narradora compara velocidade da internet com tempo para uma pessoa efetuar o *download* de um arquivo utilizando essa internet. Com o auxílio de uma tabela, a narradora vai explicando que, à medida que a velocidade aumenta, o tempo para o *download* diminui, mas, para que essas grandezas possam ser consideradas inversamente proporcionais, os dados precisam dizer que, se uma grandeza aumenta, a outra tem que diminuir na mesma proporção. O vídeo enfatiza as palavras: se uma grandeza dobra, a outra fica dividida por 2, ou se triplica a outra fica reduzida à terça parte, e assim por diante. O objetivo é mostrar que as estruturas a serem trabalhadas também devem ser multiplicativas, no caso com o fator de multiplicação e o mesmo fator para a divisão.

Assim como o vídeo de grandezas diretamente proporcionais, esse recorre à explicação da constante de proporcionalidade da forma algébrica e gráfica.

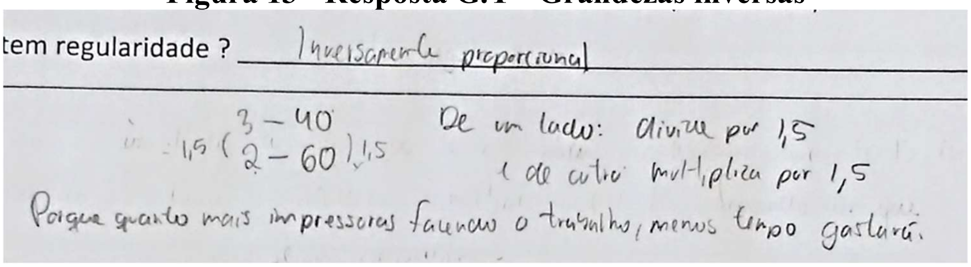
Em sala foram realizadas algumas atividades (Apêndice E) para reconhecer se as situações apresentadas representavam proporção direta ou inversa. Em um primeiro momento foram feitas análises iniciais com discussões em grupos de situações para introduzir os conceitos. Em um segundo momento, partiu-se para compreender como observar essas diferenças graficamente.

Na atividade seguinte, os estudantes deveriam dizer que os problemas eram representações de situações de relacionamento entre as grandezas de forma diretamente proporcional (D.P) ou inversamente proporcional (I.P) e justificar sua resposta.

a) 3 impressoras imprimem os boletins dos estudantes em 40 minutos. Se tivermos menos uma impressora, ou seja, 2 impressoras, conseguirão imprimir esses boletins em 1 hora (60 minutos).

Resposta: *De um lado divide-se por 1,5 e de outro multiplica-se por 1,5. Porque quanto mais impressoras fizerem o trabalho, menos tempo se gastará (Figura 13).*

Figura 13 - Resposta G.Y - Grandezas inversas


tem regularidade ? Inversamente proporcional

3 – 40
1,5 (2 – 60) 1,5

De um lado: divide por 1,5
e de outro multiplica por 1,5

Porque quanto mais impressoras fizerem o trabalho, menos tempo gastará.

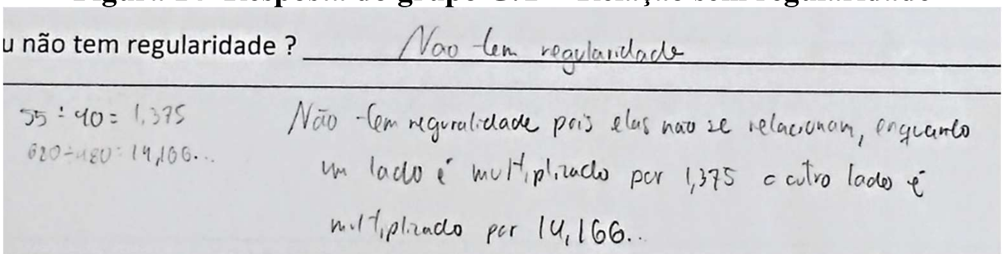
Fonte: Elaborado pela autora.

Na resposta, o estudante do grupo amarelo mostra reconhecer como as estruturas multiplicativas podem ser utilizadas como estratégia de resolução de problemas de proporcionalidade inversa. Se uma grandeza é multiplicada por um fator, a outra grandeza deve ser dividida por esse fator.

b) 40 pessoas consomem 480 salgados em uma festa, 55 pessoas irão consumir 680 salgados nessa festa.

Resposta: *Não há regularidade, pois elas não se relacionam; enquanto um lado é multiplicado por 1,375, o outro lado é multiplicado por 14,166 (Figura 14).*

Figura 14- Resposta do grupo G.Y - Relação sem regularidade


u não tem regularidade ? Não tem regularidade

55 : 40 = 1,375
680÷480 = 14,166...

Não tem regularidade pois elas não se relacionam, enquanto um lado é multiplicado por 1,375 e outro lado é multiplicado por 14,166..

Fonte: Elaborado pela autora.

O estudante faz 55: 40 = 1,375 e 680: 480 = 14,166, possivelmente tentando reconhecer alguma regularidade. Com as operações de divisão e multiplicação, pode-se pensar que o estudante começa a apropriar-se das estruturas multiplicativas, inclusive quando o problema envolve grandezas que não se relacionam com regularidade. O estudante se apropria de estruturas multiplicativas como estratégia de resolução e também busca compreender a proporcionalidade dizendo que não há regularidade.

Nas videoaulas “Grandezas Diretamente Proporcionais” e “Grandezas Inversamente Proporcionais” foram apresentados os gráficos formados quando os valores das grandezas são apresentados em uma tabela e convertidos em gráficos. Com o objetivo de explorar essa outra forma de apresentação dos dados das grandezas, elaborou-se uma atividade para ser desenvolvida na sala de informática da escola. A atividade proposta consistia em pedir aos estudantes que construíssem gráficos com o objetivo de que eles pudessem perceber relação entre grandezas inversas, diretas e, inclusive, aquelas que não se relacionam com regularidade multiplicativa. Foi-lhes explicado que as informações contidas em uma tabela podem ter uma representação diferente, eles podem transformar as informações provenientes da tabela em informações gráficas.

Apesar de esses jovens não terem estudado função ainda, as proposições curriculares da PBH apresentam desde o 5º ano atividades frequentes no Bloco de Tratamento da Informação, com isso os estudantes têm experiência em lidar com tabelas e gráficos. Nesse sentido, retomando a atividade, foi-lhes explicado que a tabela construída seria formada por valores de duas grandezas, assim como os gráficos que eles estavam estudando nas aulas de Ciências, que envolviam, por exemplo, distância e tempo ou velocidade e tempo e outros.

A parte de construção da tabela e do gráfico foi realizada sem aparente dificuldade. O gráfico foi gerado no software *Libre Office Calc*, que é o software disponível na escola.

Para responder à questão se eles reconheciam, ao observar o gráfico, se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais, dois estudantes sentiram necessidade de recorrer às explicações da videoaula "Grandezas Inversamente Proporcionais" novamente, o que foi permitido, uma vez que estavam no laboratório de computadores com acesso à internet.

Foi pedido que construíssem na planilha eletrônica *Calc* o seguinte: *a)* $y = 2x$ *b)* $x.y = 100$ *c)* $y = \frac{x}{5}$ e $d)\ y = x^2$. Em seguida, deveriam responder se a partir do gráfico eles poderiam afirmar que os dados da tabela estavam relacionados com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais e justificar sua resposta. Eles também deveriam dizer, caso houvesse, o valor da constante de proporcionalidade. Foram estas as percepções dos estudantes em relação ao gráfico y = 2x:

> ***G.V:*** *Diretamente proporcional porque fica x 2 dos 2 lados da tabela. Tem constante e é 2.*
> ***G.G:*** *D.P porque o gráfico é reto.*
> ***G.Y:*** *Diretamente proporcionais, pois o gráfico se inicia na origem dos eixos cartesianos e começa a subir de acordo com as grandezas (que aumentam na mesma proporção) formando uma reta. Constante é 2.*
> *20: 10 = 2*
> *40: 20 = 2*
> *60 : 30 = 2*
> *80 : 40 = 2*

O grupo azul conseguiu construir os gráficos pelo computador, mas não registrou nenhuma resposta para ser entregue. Observou-se que eles tiveram dificuldade para interpretar os gráficos. A resposta do grupo verde (G.G) mostra que os estudantes conseguem associar proporcionalidade a uma reta, mas ainda necessitam aprimorar os conceitos. As respostas dos grupos amarelo (G.Y) e vermelho (G.V) já apresentam uma maior elaboração. Nessa aula, alguns estudantes solicitaram e obtiveram permissão para assistirem novamente à videoaula, na própria sala de informática.

Trabalhar com interpretação gráfica foi uma escolha até certo ponto inovadora, quando se pensa que os estudantes não estudaram função ainda. Por outro lado, não se julgava ser tão difícil para eles diante de suas experiências em trabalhar com gráficos desde o 5º ano. O professor deve explorar ao máximo que puder essa parte de interpretação gráfica, pois assim estará diversificando as possibilidades de compreensão do conteúdo. O estudante que consegue ler e interpretar os gráficos possivelmente terá um embasamento matemático que lhe dará um suporte a compreender, por exemplo, os gráficos da Física e Química, que começaram a ser trabalhados no Ensino Médio com maior frequência.

5.2.3 Tipos de problemas de proporcionalidade

Nas estratégias dos estudantes de resolução de problemas de proporcionalidade, é observado como eles se apropriam das estruturas multiplicativas. Segundo Vergnaud (1983), existem três classes de estruturas multiplicativas: (i) isomorfismo de medidas; (ii) produto de medidas; e (iii) proporção múltipla. A classe que se refere a proporção direta é o isomorfismo de medidas, e por isso concentrou-se somente em problemas nesse contexto. Neste trabalho observou-se o isomorfismo nas situações que os alunos identificam covariância de grandezas e invariância entre grandezas. Segundo Ponte et al. (2010), os problemas que envolvem relações de proporcionalidade direta podem ser agrupados do seguinte modo:

> *Problemas de valor omisso*, em que são dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto.
> *Problemas de comparação*, em que são dadas duas razões e pede-se para indicar qual é maior, menor ou se são iguais.
> Problemas de *conversão entre representações*, nos quais, a partir dos dados representados num determinado sistema, se pede a sua representação (PONTE et al., 2010, p. 4).

Serão mostradas algumas atividades realizadas na escola, começando com um exemplo de problemas de comparação seguido por estudo gráfico. Depois serão tratados problemas de valor omisso, mais especificamente com um caso que foi o fator motivador para se gravar a quinta videoaula.

A atividade aborda um problema de comparação e foi realizada subsequentemente à videoaula “Matemática na cozinha” (Figura 15). Como dito anteriormente, esse vídeo faz parte de um projeto denominado “Matemática em toda parte”, e essa videoaula é desenvolvida pelo professor Antônio José Lopes Bigode. É um vídeo com duração de mais de 24 minutos e contextualizado com situações e objetos presentes na cozinha e em nossa alimentação. Na videoaula, o professor ensina como resolver problemas de comparação.

Figura 15 – Videoaula - Matemática na cozinha

Fonte: Avelar (2018).

Em sala de aula, a atividade proposta aos estudantes foi a seguinte:

São dadas duas situações para se fazer uma limonada: na primeira, a limonada é feita com 5 limões e 8 copos de água; na segunda, a limonada é feita igualmente com 7 limões e 10 copos de água. Os estudantes deveriam comparar as duas limonadas e dizer qual das duas seria a mais "azeda", ou seja, que apresentasse uma proporção maior de limões.

Não se percebeu nenhuma estratégia de resolução diferente da ensinada na videoaula, que é de reduzir as frações a denominadores iguais para que assim seja mais simples fazer a comparação. Entretanto, o grupo amarelo (G.Y) respondeu:

> *GY: Ambas limonadas têm a mesma quantidade de azedo, pois sobra de espaço apenas 3 unidades a menos.*

Quando o grupo responde que as limonadas apresentarão *"a mesma quantidade de azedo"* referindo-se a "3 unidades a menos", pode-se perceber que os estudantes lidaram com os números sem pensar nas grandezas.

+3 (?) $\frac{5}{8}\ (<, = ou > ?)\ \frac{7}{10}$ +3 (?)

5 limões + 3(?) = 8 copos de água assim como 7 limões + 3(?) = 10 copos de água.

A estratégia de resolução do grupo G.Y não demonstra reconhecimento das estruturas multiplicativas. Esse grupo, nessa atividade, estava constituído por 4 integrantes, e todos apresentaram a mesma resposta, não quiseram ou não conseguiram construir uma explicação de como pensaram. Foi retomada com eles a comparação das razões e proporções das limonadas e perguntado se haviam assistido à videoaula. Eles disseram que não, simplesmente alegando que o vídeo era cansativo e grande, não demonstraram interesse em observar detalhes do vídeo, como linguagem ou qualquer outra forma de contextualização. A videoaula foi explicada para os estudantes, pela professora e pedido que fizessem as mesmas atividades, cada integrante do grupo em seu caderno.

Problemas de comparação requerem que o estudante desenvolva uma forma para compreender a proporcionalidade comparando razões apresentadas no problema. Possivelmente o maior dificultador seja a interpretação do problema para conseguir determinar as razões e então compará-las. Quando o estudante propõe 5 + 3 = 8, ele está dizendo que 5 limões + 3(alguma coisa) são iguais a 8 copos de água, o que não representa uma compreensão do problema. Sugere-se que esse tipo de raciocínio seja mostrado ao estudante. Deve-se mostrar-lhes que o objetivo, ao propor problemas de comparação ou qualquer outro problema matemático, não é somente encontrar resultados numéricos para tentar responder a uma questão desvinculada de raciocínio.

Outros problemas de proporcionalidade foram desenvolvidos em sala de aula, sempre mostrando aos estudantes como trabalhar com base em estruturas multiplicativas, covariância e invariância, mas, ao deparar com os problemas de valor omisso, descobriu-se que uma estudante havia aprendido regra de três em outra escola, como já foi dito. Portanto, na próxima seção apresenta-se um dos problemas de valor omisso trabalhado trazendo uma das cenas em que surge a expressão: “regra de três” entre os estudantes e como foi realizada a sua problematização.

5.2.3.1 Problematizando a utilização da regra de três

De acordo com Silvestre (2012), em Portugal e em outros países, o ensino da proporcionalidade direta privilegia o procedimento da regra de três e a representação da equação $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ (a incógnita x pode ocupar qualquer uma das quatro posições na equação). Assim como ocorre no Brasil, a regra de três permeia os livros didáticos e as aulas de Matemática.

Entre as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade identificadas pelo *Rational Number Project* (RNP) está a “regra de três”, considerada uma estratégia de natureza multiplicativa. O RNP enuncia essa estratégia da seguinte forma: “estratégia do algoritmo do produto cruzado, também conhecida como ‘regra de três simples’, que embora eficiente é um processo mecânico desprovido de significado no contexto de um problema” (SILVESTRE, 2012, p. 29). Vergnaud (1983) também categorizou os problemas de regra de três como isomorfismo de medidas (apud SILVESTRE, 2012, p. 23).

A problematização da utilização da regra de três como estratégia para resolução de problemas de proporcionalidade perpassa pelo fato de que nem sempre os estudantes compreendem os conceitos básicos de proporcionalidade; não compreendem como as grandezas se relacionam, se o fazem com regularidade ou não e se deparam com o procedimento, que, apesar de ser multiplicativo, é mecânico. Segundo Lamon (1999), o produto cruzado não prioriza o RP e há estratégias mais sofisticadas para resolução de problemas de proporcionalidade.

O planejamento das aulas desta pesquisa consistia em que, ao final dos trabalhos, fosse produzida uma videoaula para problematizar a utilização da regra de três como estratégia para resolução de problemas de proporcionalidade direta. Não se sabia que entre os estudantes haveria uma menina, Suga, vinda de outra escola, que havia aprendido a regra de três.

Nesta seção será apresentada a condução da problematização da regra de três durante as intervenções da menina Suga às aulas e como essa intervenção conduziu a modificações no planejamento da videoaula e na discussão do conteúdo em sala de aula.

Durante as atividades em sala de aula, Suga insistia em que havia uma forma melhor para ensinar a matéria do que a forma como as aulas estavam sendo conduzidas, dando muita ênfase ao reconhecimento de regularidades para garantir proporcionalidade e então utilizar as estratégias escalar ou funcional.

> ***Suga:*** *Professora, faz logo por regra de três, não precisa de regularidades não!*

Todo o trabalho em sala de aula estava sendo realizado com os estudantes dispostos em grupos. Suga começou a resolver os exercícios e tentou ensinar aos colegas a técnica do produto cruzado (regra de três).

As primeiras intervenções feitas foram no sentido de conversar com Suga e pedir que tentasse reconhecer as regularidades, ou não, nas atividades propostas, mas ela não ouvia e com um sorriso dizia: “regra de três é vida, professora!”. Foi-lhe pedido que parasse por um tempo de resolver daquela maneira, pois haveria uma videoaula, e que ao final do mês então ela entenderia o porquê de se estar estudando proporcionalidade daquela forma. Não adiantou.

A estudante é muito participativa, persistente, e a impressão que deu foi de que seria necessário se pensar em alguma estratégia para mostrar a ela e a seus colegas – que naquele momento acharam a sugestão de Suga uma excelente alternativa –, que regra de três não resolve todas as situações como ela pensava. Com isso suspenderam-se para a aula seguinte as atividades de problemas de valor omisso e foram trabalhadas atividades que englobassem conceito de proporcionalidade direta, relação entre as grandezas com ou sem regularidades. Os estudantes deveriam estar mais seguros em relação às estruturas multiplicativas antes de alguém vir mencionar regra de três com eles, tanto na escola como fora dela, em casa, por exemplo.

A seguir será dado um exemplo de intervenção da menina Suga que diante do enunciado do problema rapidamente sugeria a estratégia do produto cruzado, sem que se percebesse qualquer análise que perpassasse por uma linha de raciocínio proporcional.

Tal problema era referente a uma empresa de asfaltamento de estrada em dois trechos: um de 20 km e outro de 34 km:

> ***Professora:*** *Então nós temos,20 mais 34 Km pra asfaltar no Piauí, aí vamos à primeira questão: uma empresa de engenharia que ganhou a licitação dessa obra disse que é capaz de asfaltar 42 Km em 14 dias, quantos dias essa empresa vai gastar pra asfaltar os trechos citados?*
> ***Suga:*** *Qual é a pergunta?*
> ***Spinardi****: Eu não entendi a pergunta direito não.*
> ***Professora****: Essa empresa asfalta 42 Km em 14 dias.*
> ***Suga:*** *Quantos Km ela vai asfaltar? Regra de três! Spinardi faz aí o 34 vezes 14.*
> ***Spinardi****: Espera!*
> ***Professora:*** *Suga, descobre a regularidade, faça, por exemplo, pela redução à unidade.*
> ***Suga:*** *Não, regularidade é chato!*
> ***Jimin****: Dá para dividir o 42 e o 14 por 7; em dois dias asfaltam 6 km. Agora não é só multiplicar por 9 dos dois lados? 6 x 9 dá 54 então vai ser 18 dias. O que você pensou, Suga?*
> ***Suga****: Regra de três.*
> ***Jimin:*** *Professora, o jeito da Suga é mais prático.*

No trecho transcrito pode-se observar que o estudante Jimin apresenta uma estratégia de resolução por covariância, contudo ele demonstra interesse em saber como foi resolvida a questão por Suga, que tentava convencer insistentemente os colegas de que seu método era mais simples e infalível. Naquele instante, não havia mais dúvidas de que seria necessária uma intervenção no processo e foi pedido à estudante que explicasse a "regra de três". Ela explicou que em todos os problemas irão aparecer 3 números, então se coloca um ao lado do outro, dois a dois. O terceiro número é escrito embaixo do primeiro, contudo faltará um, que será o "x". Feito isso, é só multiplicar cruzado que dá certo e se descobre valor do x. Ela ainda acrescentou: se não der certo o x de um lado, troca-se com o outro número (o terceiro) que sempre dará certo. A impressão que a garota passou ao se referir a "dar certo" estava associado ao valor do x a números naturais. Ela resolveu o exemplo supracitado já "trocando" o x de lugar e chegou ao mesmo resultado apresentado por Jimim, que demonstrou usar o raciocínio proporcional. Foi então pedido a Suga que resolvesse dois problemas, algo rápido e simples, no momento, para ver se ela sinalizava reconhecer múltiplos ou algo parecido.

> ***Professora:*** *Um carro percorre um trajeto com velocidade média de 70 km/h em 35 minutos. Quanto tempo gastará pra percorrer esse mesmo trajeto se estiver com uma velocidade de 80 km/h ?*
> ***Suga:*** *Coloca o 70 e 35 e depois o 80 e o x e multiplica cruzado. 70 está para 35 assim como 80 está para x. x= 40. Viu, deu certo!*
> ***Spinardi:*** *Professora, se a velocidade foi maior, ele não teria que gastar menos tempo para percorrer esse trajeto?*

Todos concordaram. Como foi combinado que a estudante resolveria dois exercícios, foi proposto mais um problema para Suga resolver com a sua regra.

> ***Professora:*** *Uma pessoa comprou 9 m^2 para reformar o seu quarto que é em forma de um quadrado que tem 3 metros de comprimento de lado. Quantos metros de cerâmica serão necessários para reformar uma sala em formato quadrado cujo comprimento do lado é de 6 metros?*
> ***Suga:*** *Mesma coisa professora: coloca o 9 e o 3 em cima e depois o x e o 6 embaixo. Assim: 9 está para x assim como 3 está para 6 e multiplica cruzado. Da 18 m^2; viu deu certo. Regra de três é vida, professora!*
> ***Jimin:*** *Professora, se a sala é quadrada, não teria que calcular lado x lado? 6m x 6 m da 36 m^2. Quem está certo?*

Isso tudo foi feito para que Suga e seus colegas pudessem ter a oportunidade de construir (ou não) suas "novas" convicções. Tanto o Jimim quanto o Spinardi demonstravam possibilidades de desenvolvimento de outras estratégias, contudo eles estavam muito interessados no método da colega.

Todos concordaram com a explicação do Jimin e então foi explicado a ela que regra de três não resolve todos os problemas. Esse episódio real foi gravado e reproduzido em vídeo, chamado "A regra de três e o raciocínio proporcional" (Figura 16). Os áudios gravados para o vídeo são dos próprios estudantes.

Figura 16 - QR code – Videoaula - Regra de três e o raciocínio proporcional

Fonte: Avelar (2018).

Após a exibição da videoaula, realizou-se uma roda de conversa e na sequência foi solicitado a eles que escrevessem o que aprenderam com a videoaula:

> ***Resposta 1:*** *Entendi que nem sempre a gente tem que usar a regra de três e que nem sempre vai funcionar, por isso a gente tem que pensar.*
> ***Resposta 2****: Aprendi que a regra de três só funciona se as grandezas forem proporcionais. Se não houver regularidade, não há proporcionalidade.*
> ***Resposta 3****: Aprendi com o vídeo algo que não sabia e não estava acostumada a fazer: eu não observava em quais situações podemos usar a regra de três. Quando aprendi, o professor apenas aplicava a regra sem fazer nenhuma objeção, passando exercícios que apenas se encaixam nesse método. Para utilizar a regra de três, precisamos observar se as grandezas que estão sendo trabalhadas são proporcionais, se elas relacionam-se com regularidade. Caso contrário, a regra não poderá ser aplicada. Além disso, consegui entender de onde vem a regra de três, seus fundamentos e sua*

> *origem. E que também muitos professores acabam ensinando de forma "errada" como esse método deve ser usado.*

Pode-se perceber nas três respostas que os estudantes compreenderam que existe a regra de três, mas que, para ser utilizada corretamente, é necessário que as grandezas envolvidas sejam proporcionais. Essa conscientização por parte dos estudantes sobre o uso correto se fez imprescindível, uma vez que eles terão vários outros professores que utilizarão a regra de três e não se sabe de que forma a proporcionalidade será abordada.

Acredita-se ser muito importante que os estudantes tenham essa consciência de que é necessário "pensar" (resposta 1) e que "sem regularidade não há proporcionalidade" (resposta 2).

Eles sinalizam também ser capazes de reconhecer e compreender como as grandezas se relacionam para garantir proporcionalidade.

As estratégias de resolução dos problemas mais utilizadas foram método de redução à unidade e as estratégias de fatores escalar e funcional, sendo que nessa última houve menor apropriação. Foram trabalhados, além dos problemas de valor omisso, os problemas de comparação e análise gráfica com representações em tabelas. Esses aspectos permearam todo o processo ensino de proporcionalidade voltado para o desenvolvimento do RP e compõem o que Silvestre (2012) categorizou como etapas de desenvolvimento do RP.

De acordo com Silvestre (2012), o raciocínio proporcional é caracterizado por um lento processo de desenvolvimento que está sujeito tanto aos fatores de complexidade como também a fatores associados à vivência do estudante dentro e fora da escola.

O período destinado à pesquisa não foi suficiente para consolidar o ensino de proporcionalidade com a conotação desejada, mas se compreende que é um conteúdo que pode e deve ser retomado em diversas situações escolares. Os dados revelam quão importante e também em construção é o entendimento claro dos estudantes sobre grandezas, medidas e relação entre grandezas. Entende-se que o professor não deve menosprezar esses conteúdos no ensino de proporcionalidade, pois são fundamentais para a compreensão das relações estabelecidas ou não entre as grandezas. Os dados apontam como o princípio aditivo é presente nas estratégias de resolução, porém também sinaliza importantes progressos dos estudantes em relação ao processo de desenvolvimento do seu raciocínio proporcional. Percebe-se que a estrutura como foi construída a sequência de videoaulas pode ser um material de referência para professores que desejam trabalhar proporcionalidade com enfoque ao desenvolvimento do RP dos estudantes. Portanto, pode-se dizer que essas videoaulas potencializam o ensino de proporcionalidade, inclusive porque há bons indícios de que, além de a maioria dos estudantes ter compreendido a proposta e a importância de trabalhar com as estruturas multiplicativas, constatou-se que eles são capazes de argumentar sobre a utilização da regra de três. Contudo, diante da sua recorrente utilização no cenário da educação brasileira, julga-se necessário que o professor tenha um diálogo com os estudantes para explicar seus fundamentos, suas origens e as problematizações advindas de sua utilização irrestrita.

Na próxima seção será direcionado um olhar para as potencialidades da sala de aula invertida nas aulas de proporcionalidade.

5.3 Olhando para a SAI

Nesta seção busca-se compreender as percepções dos sujeitos envolvidos no processo de pesquisa da abordagem sala de aula invertida, as interações que surgiram bem como as dificuldades encontradas no percurso.

5.3.1 A inversão pode potencializar a interação

Durante a pesquisa, todas as atividades em sala de aula foram desenvolvidas com os estudantes dispostos em grupos, com os estudantes trocando ideias entre si para a resolução dos problemas propostos enquanto a professora andava entre eles auxiliando-os e ao mesmo tempo observando o que acontecia. Essa abordagem pedagógica alterou por completo a organização habitual, que era de disposição das carteiras em filas e o professor falando à frente.

Dessa forma a sala de aula passou a apresentar mudanças tanto em relação à organização física quanto à organização pedagógica. Todos saíram de seus lugares habituais, todos mudaram de lugar! O professor saiu da exposição, os estudantes saíram das filas, a aula saiu da escola, e o dever de casa também saiu de casa. A ansiedade dos estudantes em relação ao erro nas atividades de Matemática também foi ressignificada. A inversão indubitavelmente aumentou a interação entre as pessoas na sala de aula.

A dinâmica que ocorre dentro da abordagem SAI, ou seja, o tempo integral de uma aula e o tempo de discussão trouxe um elemento imprescindível na docência, que é a interação humana: seja entre os estudantes, entre a professora e eles ou ainda com um olhar individual para a relação de cada estudante e a professora.

Bergmann e Sams (2016) acreditam "com convicção que a inversão da sala de aula promove a fusão ideal da instrução *on-line* e da instrução presencial, que está ficando conhecida como sala de aula ‘híbrida’” (p. 19). Os autores ressaltam que a inversão possibilita que o professor explore os recursos das tecnologias digitais e interaja com os estudantes. Eles afirmam que “[o]s professores desempenham papel fundamental na vida dos alunos. São mentores, amigos, vizinhos e especialistas. Manter interações face a face com os professores é experiência inestimável para os estudantes (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 19).

A SAI propicia estar face a face com os estudantes, porque o professor sai da exposição para ficar disponível o tempo da aula para discussões com os educandos sem ter que dedicar tempo à aula expositiva. Esse tempo, por assim dizer intenso de convívio em sala de aula, permite que se conheça mais uns aos outros. Dedica-se mais tempo a estar com os jovens, observando suas interações, auxiliando em suas dúvidas, promovendo discussões entre os colegas para alcançarem (ou não) um consenso para uma questão apresentada. Essa interação trouxe consigo um engajamento visível dos estudantes, possivelmente o que a FLN (2014) definiu como ambiente de aprendizagem. “Como o papel do professor mudou de expositor de conteúdo para orientador da aprendizagem, passamos grande parte do tempo conversando com os alunos” (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 21).

Essa oportunidade de dedicar um tempo maior para diálogos faz compreender melhor o outro, e o “x” da Matemática não é somente determinado como algo exatamente correto ou errado, ele passa a ser construído em comum acordo. Com uma interação melhor entre as pessoas, percebe-se que o erro foi ressignificado diante das cooperações dos estudantes expressando seus conhecimentos e suas opiniões, e mais, pode-se perceber o jovem construindo seu conhecimento a cada dia mais independente, com novos desafios a serem enfrentados.

Bergmann e Sams (2016) dizem que, quando se inverte a sala de aula “descobrimos algo surpreendente” (p. 22). Essa fala trouxe provocações, pois “*eu pensava: com quase 20 anos de docência, com experiência diversificada em escolas públicas e privadas, tantas vivências maravilhosas e outras desagradáveis o que eu poderia encontrar em uma sala de aula que pudesse ser considerado “surpreendente*”?

Segundo os autores citados: “como não mais nos limitávamos a nos expor diante de uma turma e discursar para os estudantes, muitos dos problemas de gerenciamento da sala de aula desapareceram. Os alunos que precisavam de público para as suas encenações já não contavam com a plateia” (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 22).

Isso aconteceu também comigo e posso afirmar que foi surpreendente como não houve nenhum problema de disciplina, muito pelo contrário, houve situação em que estudantes que sempre estavam diante de desavenças participaram efetivamente das atividades em grupo.

Bergmann e Sams (2016) referem-se aos grupos de estudantes enquanto o professor perambula pela sala – há algo de mágico a se observar: “eles passam a se ajudar, em vez de dependerem exclusivamente do professor como único disseminador do conhecimento. A toda hora nos surpreendemos com o modo como nossos alunos trabalham em equipe e aprendem coletivamente” (p. 21).

Com isso aproprio-me desse sentimento dos autores: “de magia” para expressar minhas percepções sobre a SAI. Os estudantes mais tímidos passaram a expressar-se primeiramente no grupo a que pertenceram e posteriormente diante dos demais. Uma estudante, muito tímida, que aqui denomina-se Bela, procurou-me e disse:

> ***Bela:*** *Professora, na sua aula eu não tenho medo de falar coisa errada porque ninguém vai rir de mim.*

O depoimento dessa garota encheu-me de satisfação, pois eu havia percebido que ela estava diferente depois que começamos a trabalhar com a SAI. Teixeira (2007) diz que “o outro, a relação com o outro, é a matéria de que é feita a docência” (p. 429). E se o outro e a relação com ele é nossa matéria, urge ser a melhor possível, e a SAI traz consigo elementos riquíssimos aqui elencados para que se possa construir, com respeito ao outro, essa profissão de interações humanas.

5.3.2 A inversão oportuniza ressignificar o erro

A maioria das atividades desenvolvidas em sala de aula possuíram um caráter de investigação e todos os alunos estavam cientes[40] disso, pois se conversou a respeito da importância de saber o que estavam pensando. Nas atividades, o combinado era de que todos deveriam dizer exatamente o que pensavam sem medo de errar e, para conceder aos estudantes maior confiança, foi dito que as atividades entregues resolvidas ganhariam todos os “pontos”. Ninguém “perderia ponto” por resposta errada, pois todos estamos para aprender uns com os outros. A condição para “ganhar os pontos” era fazer a atividade e bem feita, com dedicação. Possivelmente, porém, são as interações entre os sujeitos na sala de aula, a confiança e a parceria que nascem dessas interações que dão oportunidade para que as atividades sejam mais produtivas.

---

[40] Na transcrição da aula “Eve não está gostando – 16 de maio”, há um trecho em que a professora explica sobre investigação aos jovens.

Na aula do dia 17 de maio, três estudantes disseram que não haviam assistido ao vídeo por problemas técnicos e pediram oportunidade para assistir ao vídeo. Para não "atrasar" o planejamento, decidiu-se permitir aos jovens que assistissem ao vídeo ali na sala de aula. A câmera que gravava a aula estava posicionada ao lado do computador que exibia a videoaula. Aqueles estudantes que já haviam assistido poderiam esperar os colegas assistindo ou não ao vídeo exibido em sala: "Grandezas Diretamente Proporcionais" (Figura 17).

Figura 17 - Estudantes assistindo à videoaula Grandezas Diretamente Proporcionais

Fonte: Foto tirada pela autora do trecho da gravação.

No vídeo, a narradora apresenta uma tabela de preços de estacionamento (Tabela 1) e pede aos estudantes para pausarem o vídeo e preenchê-la.

Tabela 1 - Preços de estacionamento

Até 30 min	R$ 10,00
Até 1 hora	R$ 14,00
Até 1h 30 min	R$ 18,00
Até 2 horas	R$ 22,00
Até 3 horas	
Até 4 horas	
½ hora adicional	R$ 4,00

Fonte: Elaborada pela autora.

Spinard começa a controlar o vídeo e dá uma pausa.

> ***Spinard:*** *Vai dar 26 + 4 = 32*
> ***Mago:*** *26 + 4 da 30 e não 32*
> ***Spinard****: Pode continuar o vídeo?*
> ***Eve:*** *espera que eu quero copiar a tabela inteira senão não vou assistir mais.*
> ***Spinard:*** *Eve, a atividade é completar a tabela e não copiar ela toda.*

Meliôdas sai do seu grupo, dirige-se ao computador e diz:

Meliôdas: Professora, isso está muito fácil! (Figura 18)

Figura 18 - Meliôdas

Fonte: Foto tirada pela autora do trecho da gravação.

Spinard: *Então fala como vai ficar.*
Meliôdas: *O valor de três horas... você vai somar o de 2 horas mais o de 1 hora. O valor de 4 horas você vai somar o de 2 horas com o de 2 horas de novo.*
Spinard: *Então faz a conta aí pra ver quanto que dá.*
Meliôdas: *22 + 22 vai dar 44.*
Bolty: *Está errado!*
Mago: *Está errado porque a cada hora adiciona 4 reais.*

Apontando para a tabela na tela do computador, Bolty acrescenta:

Bolty: *Meliôdas, olha isso ali: hora adicional R$ 4,00.*

Enfaticamente, Mago chama a atenção que o adicional é referente a meia hora e não a uma.

Mago: *Não é isso não. A cada meia hora, não é uma não.*
Bolty: *Se é a cada meia hora, então vai ser...*
Yoda: *8 reais*
Spinard: *Podemos continuar?*
Bolty: *Não! tá errado, tá errado, tá errado... espera.*
Mago: *Por quê?*
Bolty: *Se é a cada meia hora, então ali será 8... e ali tem 3h então vai ser mais 8 vai dar...*
Yoda: *30. Vai ser 30 e depois 38.*
Gêmines: *Por quâ?*
Yoda: *Porque o adicional por hora é 8.*
Suga: *Se meia hora equivale a 4 reais, então o adicional por hora será de 8 reais.*
Júnior: *Também fiz errado, me empresta a borracha?*
Gêmines: *56 + 4 ?*
Spinard: *Não Gêmines, a cada meia hora adiciona 4 reais, aqui foram 2 meia hora ou seja oito reais.*
Gêmines: *Ah! Agora sim entendi.*
Bolty: *Tá vendo só, se não fosse eu, todo mundo estaria fazendo errado.*
Spinard: *Podemos prosseguir? Pode Gêmines? Pode Mylena? Júnior?*

Com o decorrer do tempo, o ambiente em sala de aula foi-se transformando. Os jovens foram percebendo que, em nossas discussões, as diferentes respostas não possuíam a dimensão do erro, mas sim a de construção de um conhecimento, com a cooperação dos conhecimentos de cada colega do grupo. Os estudantes mais acanhados começaram a manifestar opiniões, apresentando-se mais seguros, e como se a sala de aula, os colegas e a professora não constituíssem um ambiente hostil a uma resposta "errada". Essa segurança pode ter sido potencializada inicialmente pelo acesso prévio à aula como se pode observar na fala do estudante:

> **E2**: *Eu gostei muito dessa experiência, embora eu não tenha feito todos os relatórios, eu achei bastante eficiente, pois eu tenho muita dificuldade em matemática e sou muito tímida para pedir a professora para repetir; com o vídeo eu volto várias vezes até entender.*

A relação estudante-professora estava ganhando confiança a cada dia. O fato de os estudantes poderem assistir às videoaulas em casa pode ser um fator que acaba lhes concedendo oportunidade de aprendizagem no seu próprio ritmo. Possivelmente, como foi relatado, o estudante que é mais tímido viu a oportunidade, com a SAI, de assistir às videoaulas quantas vezes quisesse, e isso parece ter lhe concedido maior confiança para se expor em sala de aula diante dos colegas e da professora. A inversão ajuda os estudantes que apresentam mais dificuldade, nas palavras de Bergmann e Sams (2016): "passamos agora quase toda a aula caminhando pela sala e atendendo os estudantes com mais dificuldade. Achamos que essa é a principal razão de os alunos progredirem mais no modelo invertido" (p. 18). Mais uma vez a SAI vem enfatizar a importância, para os estudantes, de ter um professor disponível e interagindo mais com eles.

Essa interação colaborou para diminuir consideravelmente a ansiedade ante a Matemática nas aulas. Mendes e Carmo (2014) explicam que ansiedade ante a Matemática é definida como sendo "o conjunto de reações emocionais negativas que certos alunos apresentam durante a aprendizagem da Matemática" (p. 1369). *Em toda minha experiência de magistério não me recordo de ter tanta discussão pedagógica saudável em sala de aula entre os grupos de estudantes em um ambiente em que não teve espaço para a ansiedade ante a Matemática.*

Sabe-se que na SAI os estudantes têm acesso ao conteúdo em casa por meio de videoaulas, podendo assistir a elas quantas vezes desejar, e na escola realizam as atividades em grupo coletivamente com auxílio do professor. Essa dinâmica pode ter provido consideráveis mudanças para os estudantes a ponto de não ter espaço para desconfortos de ansiedade ante a Matemática.

> Estudos que implementaram mudanças no ambiente de estudo e nas estratégias de ensino indicam um ganho na aprendizagem e na redução de estresse em estudantes da escola elementar (...) (IOSSI, 2007; PERRY, 2004; ROSSNAN, 2006; TOUMASIS, 2004; WEI, 2010 apud CARMO; SIMIONATO 2012, p. 321).

Percebi minha sala de aula mais aberta e flexível às opiniões, um aluno ajudando o outro e eu fazendo o "meio de campo", passando a bola para que eles fizessem o gol e se sentissem autores da vitória - que é deles. As aulas objetos desta pesquisa foram gravadas com duas câmeras e um gravador portátil que eu carregava comigo. Ao revisitar as cenas assistindo aos vídeos gravados na escola, para buscar mais falas dos jovens para compor os dados desta seção, deparei-me com todos os alunos discutindo em seus grupos a ponto de eu não conseguir acompanhar falas de ninguém isoladamente. Os áudios que consigo com precisão são aqueles capturados pelo gravador que estava em minhas mãos.

Esse é um dado relevante, pois a sala de aula não era composta de alunos quietos e passivos e como eu estava passando entre os grupos sei que a discussão era sobre matemática. Portanto, percebi que os estudantes se apoderaram da aula, eles estavam descontraídos e não menos concentrados. Eles não apresentavam receio de se expressar diante dos problemas matemáticos não somente após assistir às videoaulas, mas também diante dos colegas.

5.3.2 A inversão muda a maneira como conversamos com os pais

A SAI é uma abordagem pedagógica nova para a comunidade escolar na qual esta pesquisa foi inserida, portanto, convocou-se uma reunião para os responsáveis pelos estudantes para explicar como seria realizada a pesquisa sobre SAI.

Menos de 5% dos responsáveis compareceram a essa reunião, então foi gravada uma videoaula denominada "O que é Sala de Aula Invertida?" destinada a todos os responsáveis. O objetivo foi explicar o que é SAI, dizer-lhes como podem ajudar seus filhos a estudar e, também, colocar-se à disposição para quaisquer esclarecimentos que pudessem surgir.

Quando os pais foram questionados, por meio do questionário aplicado aos alunos, sobre as videoaulas, mais de 77% responderam que ter videoaulas pode ajudar os responsáveis a orientar os filhos em casa sobre o conteúdo da escola. Segundo os alunos, a maioria dos responsáveis não assistiu às videoaulas de Matemática com eles, alegando que não avisaram aos responsáveis que estavam assistindo aula em casa.

Apesar de a maioria dos responsáveis não ter participado efetivamente do projeto, foram recebidos alguns depoimentos (Anexo B). A seguir aqui um fragmento que ilustra como a SAI pode ser um elemento importante, tanto para ajudar os pais com o conteúdo abordado quanto para o ensino de Matemática de forma geral.

> Ao anotar os questionamentos para discutirem em sala de aula, buscando sanar as dúvidas, para juntos resolverem, poderá trazer ao aluno maior confiança, porque ele saberá que as dúvidas que tiver em casa serão resolvidas na escola. Falo isso porque por várias vezes não tive condições de ajudar meu filho nos deveres de casa, pois já não me lembro mais e acabo que fico frustrada por não poder ajudá-lo e percebo que ele fica se sentindo impotente. (Mãe de aluno)

Nesta pesquisa não se obteve, como já dito, um retorno quantitativo de responsáveis engajados no projeto, mas assim como toda mudança requer planejamento, por vezes resistência, às vezes somente um tempo para a adaptação, o período desta pesquisa não foi suficiente até mesmo para os pais adquirirem o hábito de perguntar ao filho se havia ou não videoaula para a semana.

Apesar de o retorno em quantidade não ter sido grande, foi excelente o obtido, primeiramente por ser espontâneo e segundo por elencar vários elementos importantes para o processo de ensino aprendizagem de Matemática e que pesquisadores têm discutido na academia. Em seu depoimento essa mesma mãe acrescenta:

> Espero que essa nova didática, com maior interação e participação do aluno possa fazer com que eles gostem da disciplina e tenham menor resistência, pois sabemos que o modelo tradicional de ensino da matemática sempre só nos fez afastarmos dela e criou uma sensação de impotência com a mesma. (Mãe de aluno)

No depoimento, a mãe parece fazer uma associação de Matemática a medo, frustração, impotência e, ao mesmo tempo, percebe-se que a mãe tem expectativas de que a SAI possa ser um meio para propiciar a transposição da barreira do medo diante da Matemática. Sem sombras de dúvidas, é um depoimento muito forte e nós, professores de Matemática, entendemos que essa fala ainda é, infelizmente, recorrente na história do ensino de Matemática.

Esse e outros relatos fazem acreditar que a SAI traz elementos que podem potencializar o ensino de Matemática e melhorar a interação entre alunos-pais-professores.

5.3.3 A inversão valoriza o trabalho docente

Esse cenário permite perceber os quatro pilares da SAI (FLN, 2014): ambiente flexível com uma cultura de aprendizagem, com o conteúdo intencional e com uma professora consciente e atenta a sua sala de aula. Essa dinâmica de organização da SAI pôde ser claramente identificada neste trabalho, em que o aluno assistiu à videoaula onde desejou, na escola esteve trabalhando em grupo (conversando ora entre eles, ora um com a professora, ora a professora com o grupo) e com o *feedback* instantâneo da professora. Nesse cenário, o professor deve ser um profissional que promova na sala de aula um ambiente em que "o aluno assuma um papel de aprendiz ativo e participante (não mais passivo e repetidor) de sujeito de ações que o levem a aprender e a mudar seu comportamento. Essas ações, ele as realiza sozinho, com o professor e com os seus colegas (MASSETO, 2015, p. 150).

Para que o aluno consiga assumir esse protagonismo, com menos obstáculos, o professor deve assumir um papel, segundo Masseto (2015), de mediador pedagógico, pois faz parte da mediação pedagógica confiar no aluno, acreditar que ele é capaz de assumir a responsabilidade do seu processo de aprendizagem.

Um professor mediador pedagógico é aquele que incentiva seus alunos a questionarem, promove dúvidas e reflexões, ajuda os alunos a relacionar o conteúdo abordado com novos conceitos. O mediador pedagógico consegue dar movimento ao processo de aprendizagem. Assim a definição de Masseto (2015) para mediador pedagógico converge para a definição que a FLN (2014) deu para o quarto pilar da SAI, que é o Educador profissional, pois ambos ressaltam a importância do professor em sala de aula como aquele profissional que saiu do centro, saiu do lugar de detentor do saber para um lugar de promotor de oportunidades.

Entretanto, essa autonomia dos alunos pode intimidar, por exemplo, um professor inexperiente, ou, às vezes, inseguro por alguma razão, podendo, inclusive, perder a autoridade da sua sala de aula, pois quando os alunos despertam para a conquista do protagonismo de sua aprendizagem não somente falam, eles perguntam, argumentam e contra-argumentam. Tardif e Lessard (2014) remetem à docência como uma profissão de interações humanas e acrescentam que a "autoridade reside no respeito que o professor é capaz de impor sem coerção aos alunos" (p. 266) e ainda ressaltam que a "personalidade do professor se torna, ela mesma, tecnologia do trabalho, ou seja, um meio em vista dos fins visados" (p. 268). Sendo assim, o professor que deseja trabalhar efetivamente com a SAI deve ser capaz de ter consciência das potencialidades, mas também das dificuldades que podem surgir no processo. Ele deve ter sua "personalidade" a favor da real aprendizagem de seus alunos.

Nesse aspecto, acredito que a SAI pode ser uma abordagem que tem a potencialidade, além de propiciar maiores condições de aprendizagem para os alunos, também de valorizar o trabalho do professor, porque ele, na SAI, pode ser o diferencial do aprendizado, fazendo da sala de "aula" uma sala de "aprendizagem", uma sala de discussões importantíssimas para alicerçar o conhecimento dos alunos. O professor mediador deve ser bem qualificado e, para tal, a SAI pode ser uma abordagem que valorize também a profissão docente.

5.3.4 A inversão torna a aula mais acessível

Bergmann e Sams (2016) alegam que a inversão permite a diferenciação ao lidar com a diversidade dos estudantes e suas habilidades.

> Temos todos os tipos de alunos, contemplando desde os que superam as expectativas, passando pelos que se situam na média e os que nem sempre compreendem o conteúdo, até chegar aos que mal conseguem ler. A inversão da sala de aula nos mostrou como muitos de nossos alunos são carentes e o quão poderoso é o novo método para atender às necessidades de cada estudante, em meio a toda diversidade (BERGMANN; SAMS, 2016, p. 21).

Os autores também afirmam que a inversão torna a aula mais transparente, porque os pais têm como saber como são as aulas de seus filhos. Percebe-se com esta pesquisa que a inversão é uma abordagem que propicia aos professores conhecerem melhor as particularidades de seus estudantes, possibilitando, portanto, um atendimento quase que individualizado. A inversão faz mais que deixar a aula transparente, a inversão torna a aula mais acessível.

É possível perceber que a inversão deixa a aula mais acessível a todos, inclusive aos pais, coordenadores escolares e alunos, pois todos podem assistir às videoaulas, que estão disponíveis, gratuitamente, tempo integral na internet.

Nos relatos dos alunos E1 e E3 e também no relato da mãe, observa-se que a SAI propicia a todos a oportunidade de saber como é a aula:

> **E1:** *Eu gostei, porque dava para tirar várias dúvidas quando eu quisesse, e também não tinha alunos "enchendo o saco" quando a professora estivesse explicando. E dava pra entender tudo, se eu não entendesse, na sala de aula eu tirava a dúvida com a professora.*
> **E3**: *Muito útil e eficaz, ajuda bastante e não vejo pontos negativos, e se por acaso você não entender na primeira vez, pode voltar quantas vezes quiser.*
> ***Mãe:*** *A sala de aula invertida poderá ser um meio de aproximação do pai com o filho para acompanhar as suas atividades e o andamento do aprendizado.*

Assim sendo, a inversão concede uma dimensão mais democrática para a sala de aula, a partir do momento em que o professor abre sua sala de aula em uma rede conectada à internet, ele está oportunizando uma democratização do ensino, a aula passa a ser para todos sem distinção e de forma que não podemos mensurar.

A SAI faz um movimento de abertura da sala de aula à comunidade escolar, direção, coordenação da escola, colegas de trabalho, além dos alunos, e isso também pode trazer consequências (boas ou não) para todos os sujeitos envolvidos no processo. É uma ação que dá margens a sugestões e críticas, mas, para além disso, exibe fora da sala o que está prestes a acontecer dentro dela.

Existe um outro fator, talvez o mais relevante no processo de escolarização dos jovens, que é o de abrir a sala de aula aos pais, oportunizando um espaço de discussão e troca de experiências em casa que pode ser levado, e seria muito bem-vindo, à escola.

A inversão, portanto, além de tornar a aula mais transparente, estará criando espaços de multiplicação de saberes, de qualidade, gratuitos, oportunizando acessos ilimitados a todos os lugares indistintamente, dando aos pais possibilidades de atuarem efetivamente na aula de Matemática com opiniões, dúvidas, críticas e colaborações.

5.4 Olhando para as percepções da professora

Quando comecei a estudar, já no mestrado, era comum ouvir que, quanto mais o pesquisador consegue se afastar do objeto pesquisado, possivelmente, mais fiel serão os dados e resultados da pesquisa. No decorrer do processo, fui deparando com várias teorias, metodologias até que fui apresentada à pesquisa-ensino, que se tratava de uma metodologia de pesquisa em que o professor pode ser pesquisador de uma prática dele mesmo. Não era exatamente meus planos pesquisar uma prática minha, afinal de contas, eu acreditava (e ainda acredito) que apontar para os problemas, as falhas e as imperfeições do outro é com certeza mais fácil que apontar para as nossas. No entanto, os ventos que sopraram não pareciam muito a meu favor, pois o que eu queria pesquisar, a Sala de Aula Invertida com o ensino diferenciado para a proporcionalidade, com um olhar para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, não estava disponível em nenhum canal de repositório de vídeos, pelo menos eu não encontrei nenhum. Comecei a buscar videoaulas no contexto que eu queria, com o cuidado para a expressão regularidade, com o cuidado em não falar regra de três, com um toque de ousadia para falar de funções para alunos que não haviam estudado esse conteúdo.

Para fazer isso da forma que eu queria, precisei sair da zona de conforto. Senti medo, deu frio na barriga, afinal de contas, eu estaria me expondo para todos os meus professores e os professores de Matemática do mundo, pois queria utilizar videoaulas *on-line*. Embrenhei na pesquisa com muito medo, contudo com muito desejo de fazer valer o que a pesquisa-ensino havia me ensinado.

A pesquisa-ensino é uma modalidade da pesquisa-ação também considerada um "processo comunicacional docente, inquiridor e problematizador da docência e do processo de ensino-aprendizagem" (PENTEADO e GARRIDO, 2010, p. 48). É um importante elemento para a formação de professores, pois visa fazer a ponte entre o saber docente – experimentado na escola –, com o saber acadêmico. Essa metodologia, segundo Penteado e Garrido (2010), pode promover oportunidades para os professores expandirem seu leque de conhecimento e intervenção em contextos sociais inseridos nas escolas, promovendo transformações de práticas sociais indesejáveis; pode propiciar "compreensão e o uso de conhecimentos teórico-científicos já produzidos como instrumentos intelectuais e comunicacionais do trabalho docente" (p. 48). Numa ação investigativa da docência proposta, o professor-pesquisador cria uma relação ativa dos sujeitos com o conhecimento. Nessa relação:

> (...) os alunos não são meros receptores, mas interagem com o conhecimento a partir de suas experiências de vida (midiáticas, escolares, familiares, etc.); são confrontados com as diferentes interações dos colegas (...) desenvolve com o professor uma atitude indagativa, reflexiva, através do qual referendam ou reelaboram seus conhecimentos iniciais, ao mesmo tempo em que os professores vão construindo e reconstruindo processualmente suas identidades profissionais (PENTEADO e GARRIDO, 2010, p. 80).

Como o conhecimento da escola básica pode ser levado para a academia para contribuir na formação de futuros professores? Como a pesquisa acadêmica pode colaborar com o professor da escola básica para a melhoria de suas práticas? Acredita-se na parceria da experiência docente do professor com a teoria do pesquisador, em que uma não supera a outra, mas se completam mutuamente. Pesquisa-ensino é a forma de pesquisar, em que a sala de aula ganha também uma dimensão de espaço da pesquisa, do olhar para aprendizagem do aluno, mas também, para a prática docente. Espera-se que este trabalho consiga os alcances da pesquisa-ensino:

> 1) qualificar a prática docente em processo de formação contínua;
> 2) qualificar a prática de pesquisa em processo de formação contínua;
> 3) transformar o professor;
> 4) transformar o pesquisador;
> 5) contribuir com a construção de teoria da docência com sólida fundamentação e referendada na ação. (PENTEADO e GARRIDO, 2010, p. 40).

Nesse contexto, desejei que minha sala de aula fosse um espaço de investigação e que a teoria e a prática estivessem unidas, complementando-se, partilhando conhecimentos, aprendendo uma com a outra sem se debater. Cochran-Smith e Lythe (1999), no artigo Relações entre conhecimento e prática: aprendizado de professores em comunidade, ressaltam a importância da ação do professor não somente como reflexão de sua prática, mas de uma investigação como postura do docente. Elas iniciam o texto apresentando três concepções de aprendizados de professores: concepções de “conhecimento-para-a-prática” (knowledege for practice), “conhecimento-em-prática” (*knowledege in practice*) e “conhecimento-da-prática” (*knowledege of practice*). Esse último entende que o professor aprende quando ele considera sua sala de aula com todos seus atores, professores, alunos, conteúdo, aprendizagem, currículo, tudo isso como um todo; uma totalidade situada, um espaço de investigação. Nessa concepção, conhecimento formal (aquele proveniente da academia) e o de ensino (aquele que acontece na sala de aula) não sofrem distinções como nas concepções anteriores. Nesse contexto, o conhecimento do professor que tem uma investigação como postura é valorizado como saber científico que pode promover transformações sociais. Aqui a prática pedagógica do professor é práxis. Caldeira e Zaidan (2013) ressaltam que:

> (...) para analisar a ação docente é necessário considerá-la como *práxis*, uma vez que supõe uma *intencionalidade* por parte do professor. E é também importante considerar que essa intencionalidade é percebida pelo professor de maneira contraditória, alicerçada numa experiência docente de caráter pragmático, com objetivos imediatos. A relação teoria e prática, portanto, é um elemento fundamental na determinação do nível da práxis do professor. (p. 28).

Com toda essa teoria em mente, eu estava decidida que em minha aula, em minha prática, estaríamos abertos à pesquisa. No início a insegurança foi imensa, tive receio das câmeras, do gravador, pensava em cada palavra que eu pudesse dizer que posteriormente fosse me levar a alguma forma de confronto, como se a academia fosse algo que existisse para prejudicar alguém pesquisado.

Lembro-me que, em uma aula, fiquei em dúvida se poderia responder ao aluno utilizando o quadro, pois minha abordagem era SAI, em que as aulas deveriam acontecer em casa. Parei e disse a mim mesma que, antes de ser pesquisadora, era a professora de Matemática daqueles alunos que estavam com dúvidas. Com quase 15 dias de pesquisa percebi que as videoaulas seriam dinâmicas, seriam exatamente o retrato da minha sala de aula, somente assim teríamos a real parceria teoria e prática, escola básica e universidade, professora e pesquisadora.

Levar a apresentação de fatos reais, acontecidos em sala de aula, para os vídeos foi dar oxigênio ao fogo, foi a melhor atitude que eu poderia ter tomado. Mostrei aos alunos o quanto as vozes deles são importantes para o ensino, o quanto o questionamento deles é relevante para o aprendizado. “Para que haja interações recorrentes, as interações têm que ocorrer em um domínio de ações que constitua o outro como um legítimo outro na convivência” (MATURANA, 1993, p. 33). Pudemos ver quão importante é perceber o aluno, e, sobretudo, o quanto o que ele tem a dizer tem valor para o professor. Segundo Tardif e Lessard (2014), as tramas coletivas em uma sala de aula entre professores e alunos não são simples, pois envolvem diversos aspectos interativos, e com isso os autores definem o trabalho docente como “uma atividade heterogênea composta na qual se encontram ações relacionadas a objetivos reais (...), ações relacionadas a normas (...) ações tradicionais (...) e ações afetivas (motivação, reação emocional da professora, inúmeros laços afetivos com os alunos, etc.) (p. 248).

Quais os sentidos da professora? Aqueles de uma convicção de que a SAI tem grandes possibilidades de potencializar as interações na sala de aula e que a docência é como Tardif e Lessard (2014) afirmam: uma profissão de interações, e, mais que isso, nas interações professores alunos há conexões fortes com o ensino e a aprendizagem. Interações positivas podem potencializar o aprendizado, no nosso caso, de proporcionalidade. Que outros sentidos trago? Felicidade, realização, sensação de missão cumprida, que fiz o que poderia ser feito, da melhor forma que consegui realizar. Não significa que é o melhor, mas foi o meu melhor. Essa oportunidade de conhecimento foi conquistada na academia e é inegável a importância dessa parceria para o crescimento profissional do professor. Eu provavelmente estaria ensinando regra de três com setinhas para cima e para baixo se não estivesse estudando neste mestrado.

Portanto, quero acrescentar que meu desejo é que os professores da escola básica superem os obstáculos que muitos têm ao referir-se a estudar, que compreendam que nossos conhecimentos e nossas experiências como professores (da escola básica) são imprescindíveis para a academia formar novos professores de Matemática, e mais, que compreendam que teoria e prática pode e deve ser uma parceria amigável e cúmplice uma da outra.

CAPÍTULO VI - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa dissertação é fruto de um trabalho de pesquisa que buscou investigar as possibilidades da Sala de Aula Invertida nas aulas de Matemática para uma turma de 9º ano durante o ensino de proporcionalidade.

Utilizar as possibilidades que as tecnologias digitais oferecem na educação é algo estimulante para um professor de Matemática. Os alunos demonstram gostar mais da aula quando ela acontece com auxílio dos recursos digitais, especialmente do computador, o que foi um dos principais motivadores para a busca de um recurso novo. Os professores trabalham para os estudantes, no sentido de que a docência existe para incentivá-los, para colaborar com o aprendizado deles, para serem parceiros na construção de seus conhecimentos, mostrando-lhes o caminho para serem protagonistas de seus aprendizados. Além das tecnologias digitais propiciarem um ambiente agradável para a aula de Matemática, os softwares matemáticos compõem com o estudante um par pedagógico, uma vez que ajuda o estudante a compreender o que nem sempre com palavras, quadro e giz o professor consegue "dizer". Nessa perspectiva, na Sala de Aula Invertida encontrou-se "o novo" com as tecnologias digitais.

Com isso, foram investigadas as percepções dos estudantes diante da SAI e como seria a influência das mídias, no caso videoaulas, no processo de interação estudante-aula-professor, e mais, se essa interação fornece elementos para potencializar o ensino de proporcionalidade.

A pesquisa aconteceu em uma escola pública da zona norte da cidade de Belo Horizonte – MG. Diante do não conhecimento a respeito da condição socioeconômica dos estudantes, havia o risco de eles não terrem acesso à internet em casa, e a proposta da SAI era de videoaulas *on-line*. Diante disso, foi providenciado um horário para atendimento aos estudantes na sala de informática da escola em horário contraturno de aula para garantir que todos tivessem acesso às videoaulas. Porém, todos acessaram as videoaulas fora da escola.

Trabalhar SAI com videoaulas foi uma opção, porém não foi encontrado na internet material para o ensino de proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Em vista disso, a professora-pesquisadora aprendeu o básico de editoração de vídeos e gravou as aulas para ensinar proporcionalidade com ênfase no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A proposta é de que o ensino de proporcionalidade seja desvinculado da regra de três. Essa é uma regra mecânica que priva o estudante de desenvolver seu raciocínio proporcional. Silvestre (2012) acredita que vários pesquisadores têm demonstrado interesse no estudo do raciocínio proporcional após Inhelder e Piaget terem teorizado que o raciocínio proporcional é o marco distintivo do estádio formal de desenvolvimento da inteligência humana. Pesquisadores do *Rational Number Project*, Ponte et al. (2010) e outros têm fornecido importantes contribuições para o ensino de proporcionalidade. Silvestre (2012) sistematizou as teorias desses principais pesquisadores e considera que as etapas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional são:

> (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; e (iii) capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenômeno descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (SILVESTRE, 2012, p. 281).

O planejamento das videoaulas bem como a estruturação das atividades em sala de aula dialogavam com a proposta de Silvestre (2012). As videoaulas problematizaram situações em que as grandezas são proporcionais ou não; procurou-se ensinar ao estudante o método de redução à unidade, covariância e invariâncias, que são estruturas multiplicativas. A exploração de regularidade proposta por Ponte et al. *(*2010) serviu para explicar sobre a constante de proporcionalidade, sendo abordada tanto algébrica quanto graficamente. Foram trabalhados problemas de valor omisso, de comparação e gráficos.

Durante as atividades de problemas de valor omisso, descobriu-se que uma aluna havia aprendido a utilizar regra de três em outra escola, e garota insistia em explicar aos colegas que a forma proposta de ensinar proporcionalidade por meio de exploração de regularidades era desnecessária. Foi necessário mostrar a ela que tal método requeria compreensão cuidadosa, assim o ocorrido foi partilhado por meio de um vídeo, que seria a videoaula número 5 denominada “Regra de três e o raciocínio proporcional”.

Um dos objetivos da pesquisa perpassou por analisar as influências das videoaulas na interação que ocorre em sala de aula e se essa interação traz elementos para colaborar com o ensino de proporcionalidade. Na análise dos dados da pesquisa buscou-se perceber as etapas do desenvolvimento do RP categorizadas por Silvestre (2012) bem como as influências das videoaulas nas aulas de proporcionalidade até ser tecida uma problematização sobre o ensino de proporcionalidade com a utilização da regra de três.

Os dados mostram que os estudantes começaram a reconhecer as estruturas multiplicativas, utilizaram redução à unidade e covariância (estratégia escalar), alguns conseguiram reconhecer a invariância (estratégia funcional), porém o princípio aditivo surgiu permeando algumas estratégias de resolução de atividades. O desenvolvimento do RP não é algo instantâneo, é demorado e precisa ser mais trabalhado com esses jovens.

Diante de tantos aparatos digitais permeando o dia a dia por toda parte, e também diante da afinidade que os jovens demonstram ter em relação às tecnologias digitais, acreditou-se que possivelmente eles gostariam das videoaulas e iriam interagir com elas. Evidenciou-se o interesse dos jovens. Durante o tempo de exibição, ficaram concentrados e envolvidos com o conteúdo apresentado. No vídeo era pedido que dessem uma pausa e resolvessem a atividade. Eles trabalhavam em grupo, discutindo a atividade, concordando e discordando um do outro e chegando a um denominador comum, para depois comparar suas respostas com a apresentada na videoaula. Foi prazeroso vivenciar esse momento de interação dos estudantes com a mídia, pois isso sinaliza que esse é um caminho propicio a ajudá-los com seus aprendizados. Por outro lado, os dados também mostraram que o professor que desejar elaborar sua aula deve estar bem atento aos pontos que podem tornar uma videoaula desagradável, por exemplo: forma de abordagem do conteúdo, tempo de duração, editoração e recursos de áudio e imagem.

Por último, em relação ao objetivo que busca analisar as interações entre as pessoas na SAI, foi uma experiência ímpar. Os estudantes compartilharam vídeos com seus colegas de sala pelas redes sociais, aqueles mais tímidos começaram a se expressar em sala de aula: *"Professora, agora não tenho medo de falar na aula de Matemática"*. Desavenças sérias entre os estudantes, herdadas de anos anteriores e recorrentes, não fizeram parte das aulas, inclusive trabalharam no mesmo grupo na "Atividade dos cubos" sem nenhum problema. Uma estudante hiperativa sentou-se ao lado de outra e explicou construção de gráficos na sala da informática. O jovem que não conseguia ficar sem seus jogos no celular durante as aulas passou a participar do grupo, propôs tabela de regularidades e ainda saiu "do fundo da sala" para aprender com a aluna que conhecia a regra de três (que ela dizia ser vida). A estudante com alto índice de ausência, com a SAI passou a não faltar nos dias de aula de Matemática, alegando que: *"com a aula desse jeito não dá vontade de faltar"*. Os depoimentos de algumas mães por escrito evidenciaram a potencialidade que a SAI tem em relação às interações com os responsáveis pelos estudantes.

Os educandos dessa turma demonstraram mais confiança em si, passaram a se expressar mais, e com isso geraram discussões em sala de aula, fazendo a verdadeira construção da aprendizagem: participativa, argumentativa e mais, com pouca ansiedade ante a Matemática. Nesse sentido, o ambiente de aprendizagem é um dos pilares da SAI, assim como é importante o *feedback* instantâneo do professor para o estudante. Para tal, é imprescindível que o outro pilar esteja firme: o educador profissional, o professor preparado como mediador pedagógico para os estudantes.

A produção de videoaulas é algo que demanda dedicação e talvez seja um ponto desestimulador para o professor que deseja abordar um determinado conteúdo e não encontra recurso midiático com a conotação desejada. Se a cada ano mais professores resolverem desenvolver suas aulas, possivelmente em um futuro próximo haverá muito material disponível. Há um grande potencial nos mestrados profissionais como veiculadores de estímulo à produção de materiais didáticos diferenciados por novos professores, possivelmente as videoaulas estão inseridas nesses materiais.

Esta pesquisa poderia ganhar novos dados e importantes contribuições para a literatura que aborda a SAI se puder ser incrementada com novos vídeos, por exemplo, problemas de proporcionalidade com mais de duas variáveis em uma análise para o que Bergmann e Sams (2016) denominaram aprendizagem para o domínio. Nesse contexto, o professor, ao propor a SAI, deixará disponíveis videoaulas cujos conteúdos estejam sempre algumas aulas à frente. Dessa forma, o estudante que desejar avançar sozinho terá material disponível para auxiliá-lo, e obviamente o professor deverá estar preparado em sala para atendê-lo.

Esta pesquisa traz elementos que evidenciam a importância do diálogo entre teoria e prática do professor. Quando Moreira e David (2005, p. 42) perguntam: "será que a prática ensina tudo?". Sem sombras de dúvidas, não, pois tudo é muito! Nada nem ninguém é capaz de ensinar tudo, nem a prática nem teoria. Segundo Nóvoa, 2012, "os professores devem combater a dispersão e valorizar o seu próprio conhecimento profissional docente, construído a partir de uma reflexão sobre a prática e de uma teorização da experiência" (p. 16). O professor deve compreender sua prática docente como práxis, como ação-reflexão-ação num movimento constante de (re)pensar o como ensinar, o que, para que, de que forma, com que propósito, sempre em prol de uma docência respeitosa do lugar do outro.

O mestrado profissional, possivelmente, é um dos recursos, nos dias atuais, mais compromissados com a prática docente em igualdade com a academia. Prática e academia devem se completar mutuamente, um não faz sentido sem o outro.

REFERÊNCIAS

AVELAR, Petrina Rúbria Nogueira. **Produto Educacional.** Livreto parte da dissertação Sala de Aula Invertida na Educação Matemática: uma experiência com estudantes do 9º ano no ensino de proporcionalidade. UFMG, 2018.

BACICH, Lilian.; TANZI NETO, Adolfo.; TREVISANI, Fernando de Mello. (Org.). **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BAXTER, Gail, P.; JUNKER, Brian. **Designing Cognitive-Developmental Assessments**: A Case Study in Proportional Reasoning. National Council for Measurement in Education, Seattle, Washington, 2001

BEHR, Merlyn J.; HAREL, Guershon.; POST, Thomas.; LESH, Richard. Rational number, ratio and proportion. In GROUWS, D. A. (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** (pp. 296–333). New York: MacMillan, 1992.

BEHRENS, Marilda Aparecida. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente, In MORAN, José Manuel; MASSETO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica.** Campinas: Papirus, 2015.

BELO HORIZONTE. **Proposições curriculares ensino fundamental matemática.** Rede Municipal de Educação de Belo Horizonte, 2010.

BEN-CHAIM, David; ILANY, Bat-Sheva; KERET, Yaffa. Atividades investigativas autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. **Boletim de Educação Matemática-Bolema**, v. 21, n. 31, p. 125-159, 2008.

BERGMANN, Jonathan (Jon).; OVERMYER, Jerry.; WILIE, Brett. **The Flipped Class:** What It Is and What It Is Not. 2012. Disponível em: hhttp://www.thedailyriff.com/articles/the-flipped-class-conversation-689.php Acesso em: 10 ago. 2017.

BERGMANN, Jonathan (Jon); SAMS, Aaron. **A sala de aula invertida**: uma metodologia ativa da aprendizagem. Tradução Afonso Celso da Cunha Serra. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo Editora UNESP, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mônica E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. V. 39, New York: Springer, 2006.

BORBA, Marcelo de Carvalho.; SCUCUGLIA, Ricardo da Silva.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2014.

BRAME, C. **Flipping the classroom.** Vanderbilt University Center of Teaching. 2013. Disponível em: https://cft.vanderbilt.edu/guides-sub-pages/flipping-the-classroom/ Acesso em: jun. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: dez. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília; MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf

CALDEIRA, Anna Maria Salgueiro; ZAIDAN. Samira. Práxis pedagógica: um desafio cotidiano. **Paideia Revista do curso de pedagogia.** Universidade FUMEC. Belo Horizonte, Ano 10 n. 14 p. 15-32 jan./jun. 2013.

CARMO, João dos Santos; SIMIONATO, Aline Morales. **Reversão de ansiedade à matemática**: alguns dados da literatura. Psicologia em Estudo, Maringá, v. 17, n. 2, p. 317-327, abr./jun., 2012.

CIRIACO, Douglas. **O que é e como usar o google acadêmico**. Canaltech, São Bernardo do Campo, set. 2016. Disponível em: https://canaltech.com.br/mercado/o-que-e-e-como-usar-o-google-academico/. Acesso em: 05 jun. 2017.

COCHRAN-SMITH; LYTLE, Susan**.** Relationships of Knowledge and Practice: Teacher Learning in Communities. **Review of Research in Education.** Vol. 24, 1999.

COSTA, Sara; PONTE, João Pedro da. O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**, Vol. XVI, nº 2, 2008 | 65-100.

CRAMER, Kathleen.; POST, Thomas. Making connections: A Case for Proportionality**. Arithmetic Teacher**, 60(6), 342-346, 1993. Disponível em: <http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_3.html > Acesso em: 20 maio 2017.

DAYRELL, Juarez; CARRANO, Paulo; MAIA, Carla Linhares. **Juventude e Ensino Médio**. Editora UFMG, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/43255 acesso em ago 2017.

FANFANI, Emilio Tenti. **Culturas jovens e cultura escolar.** Documento apresentado no seminário "Escola jovem: um novo olhar sobre o ensino médio". Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Coordenação Geral de Ensino Médio. Brasília, 2000.

FCFG - Flipped Classroom Field Guide, 2014. Disponível em http://www.e-learn.nl/2013/06/11/flipped-classroom-field-guide Acesso em set 2016.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLN - Flipped Learning Network. **Definition of flipped learning**. 12 mar. 2014, United States of America. Disponivel em: https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/ Acesso em: set. 2016.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara Loiola. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In POST, Thomas **Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods.** Boston: Allyn - Bacon, 1988. p. 285-313.

HORN, Michael B; STAKER, Heather. **Blended**. Usando a Inovação Disruptiva para Aprimorar a Educação. Editora Penso, 2014.

INHELDER, B., PIAGET, J. **The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence**. New York: Basic Books, 1958.

KARPLUS, Robert.; STEVEN, Pulos.; STAGE, Elizabeth K. Proportional reasoning of early adolescents. In LESH, R.; LANDAU M. (Eds.). **Acquisition of mathematical concepts and processes.** Orlando; Academic Press.1983.

KENSI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias:** o novo ritmo da informação. 6. ed. Papirus, 2016.

KENSI, Vani Moreira. **Novos processos de interação e comunicação no ensino mediado pelas tecnologias**. Faculdade de Educação de São Paulo-FEUSP, 2008.

LAGE, Maureen J; PLATT, Gleen .J.; TREGLIA, Michael. **Inverting the classroom:** a gateway to creating an inclusive learning environment. 2000.

LAMON, Susan J. Rational numbers and proportional reasoning. F. K. In LESTER Jr. (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and** learning (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age. 2007.

LAMON, Susan J. Rational numbers and proportional reasoning. In LESTER, Jr. F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age. 2007.

LAMON, Susan J. Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In HAREL, G.; CONFREY J. (Eds.) **The development of multiplicative reasoning.** (pp. 89-120). New York: Suny Press. 1994.

LAMON, Susan J. Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, 24 (1), 41–61. 1993.

LAMON, Susan J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Lawrence Erlbaum, 2005.

LAMON, Susan J. **Teaching Fractions and Ratios for understanding.** New York. Routledge, 2012.

LAWTON, Carol. **Contextual factors affecting errors in proportional reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, 24, 1993. p.460–466.

LESH, Richard.; POST, Thomas.; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. In HIEBERT, J.; BEHR, M. (Orgs.) **Number concepts and operations in the middle grades** (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988.

LEVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**. O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro. Editora 34, 1993.

LIMA, Elon Lages. O que são grandezas proporcionais? **Revista do Professor de Matemática**, vol. 9, 1986. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/9/4.htm Acesso em: mar. 2017.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Volume 1. **Coleção do professor de matemática. SBM**, 1996.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamaso.; DAL PRA, Keli Regina. A documentação no cotidiano da intervenção dos assistentes sociais: algumas considerações acerca do diário de campo. **Revista Textos & Contextos**. Porto Alegre v. 6 n. 1 p. 93-104. jan./jun. 2007 Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/fass/article/viewFile/1048/3234 Acesso em: ago 2017.

MARANHÃO, Cristina; MACHADO, Silvia. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, nº. Especial 1, p. 141-156, UFPR. Curitiba, 2011.

MASSETO, Marcos T. Mediação pedagógica e tecnologias de informação e comunicação. In MORAN, José Manuel; MASSETO, Marcos T.; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica.** Campinas: Papirus, 2015.

MELLOUKI, M´Hammed; GAUTHIER, Clermont. O professor e seu mandato de mediador, herdeiro, intérprete e crítico. **Educ. Soc**. Campinas, vol. 25, n. 87, p. 537-571, maio/ago. 2004.

MENDES, Alessandra Campanini; CARMO, João dos Santos. Atribuições Dadas à Matemática e Ansiedade ante a Matemática: o relato de alguns estudantes do ensino fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1368-1385, dez. 2014

MIRANDA, Juliene Azevedo. **Desenvolvimento do raciocínio proporcional**: uma sequência didática para o sexto ano do ensino. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2016.

MORAN, José Manuel. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção Mídias Contemporâneas**. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens, v. 2, 2015. Disponível em: http://rh.unis.edu.br/wp-content/uploads/sites/67/2016/06/Mudando-a-Educacao-com-Metodologias-Ativas.pdf.

MORAN, José Manuel.; MASETTO, Marcos; BEHRENS, Marilda Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 21. ed. Campinas, SP: Papirus, 2015.

MOREIRA, Marco Antônio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências** – V7(1), pp. 7-29, 2002.

MOREIRA, Marco Antônio. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, Brasília,v.1,n.1,p.131-142, jul. 2004.

NÓVOA, Antônio. Devolver a formação de professores aos professores. Caderno de pesquisa em Educação – PPGE/UFES. Vitória, ES.a 9,v. 18, n. 35, p. 11-22, jan / jun. 2012

NETO, Oscar Silva. A Regra de Três nos currículos ao longo da história. I Simpósio de educação Matemática em Debate. **SIMPEMAD**. Joinville, 2014.

PENTEADO Heloisa Dupas; GARRIDO Elsa. **Pesquisa-ensino.** A comunicação escolar na formação do professor. São Paulo: Paulinas, 2010.

PONTE, João Pedro; SILVESTRE, Ana Isabel; GARCIA, Cristina; COSTA, Sara. O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades. **Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra**. 2010. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__%28IMLNA%29_4cfc0dcb29b46.pdf. Acesso em: 13 set. 2016.

PONTE, João Pedro da; MARQUES, Sandra. Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study1. RIPEM – **International Journal for Research in Mathematics Education**, 1, 2011.

POST, Thomas; BEHR, Merlyn, LESH, Richard. Proportionality and the development of prealgebra understandings. In **Algebraic concepts in the curriculum K-12** (1988 Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

POWELL, Arthur B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma abordagem à Análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema** nº21, Ano 17, p. 81-140, UNESP, Rio Claro, 2004.

PULOS, Steven.; KARPLUS, Robert.; STAGE, Elizabeth K. Generality of Proportional Reasoning in Early Adolescence: Content Effects and Individual Differences. **Journal of Early Adolescence**,1(3), 257–264,1981.

RIOS, Mara Dutra Ramos. **Sala de aula invertida**: uma abordagem pedagógica no ensino superior no Brasil. 2017. 169 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologias, Comunicação e Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

SILVESTRE, Ana Isabel. **Desenvolver o raciocínio proporcional –** Contributo de uma abordagem de ensino exploratória. XXIV SIEM, 2013.

SILVESTRE, Ana Isabel. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional**: Trajetórias de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade. Tese de Doutorado, Universidade de Lisboa, 2012.

SILVESTRE, Ana Isabel.; PONTE, João Pedro. Resolução de Problemas de Valor Omisso: Análise das Estratégias dos Alunos. Encontro de Investigação em Educação Matemática, 19, Vila Real, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. **Anais**..., Vila Real, POR, 2009.

SILVESTRE, Ana Isabel.; PONTE, João Pedro. Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino de proporcionalidade. **Educação e Cultura Contemporânea**, 5(10), 61-89. 2008.

SPINILLO, Alina Galvão. A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. **Psicologia:** Reflexão e Crítica, Vol. 8, N° 3, p.305-331, 1992.

SPINILLO, Alina Galvão. As relações de primeira-ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. **Psicologia:** Reflexão e Crítica, Vol. 9, N° 2, p. 349-364, 1993.

SPINILLO, Alina Galvão. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. **Psicologia:** Reflexão e Crítica, Vol. 15, Nº 3, p. 475-487, 2002.

STRAYER, Jeremy F. **The effects of the classroom flip on the learning environment**: a comparison of learning activity in a traditional classroom and a flip classroom that used an intelligent tutoring system. Tese (Doutorado) Universidade de Ohio. Ohio, 2007, Disponível em: http://faculty.washington.edu/rvanderp/DLData/FlippingClassDis.pdf . Acesso em: 02 ago 2017.

TARDIF, Maurice.; LESSARD, Claude.**O trabalho docente:** elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

TEIXEIRA, Inês. **Da condição docente**: primeiras aproximações teóricas. Educ. Soc., Campinas, vol. 28, n. 99, p. 426-443, maio/ago. 2007.

TORRE, Jimmy de La.; TJOE, Hartono.; RHOADS, Kathryn.; LAM, Duncan. Conceptual and Theoretical Issues in Proportional Resoning. **International Journal for Studies in Mathematics Education**. V.6 (1), p. 21-38, 2013.

VALENTE, José Armando. **Aprendizagem Ativa no Ensino Superior**: a proposta da sala de aula invertida. Depto. de Multimeios, Nied e GGTE-Unicamp & Ced–PucSP. São Paulo. 2014. Disponível em: < http://www. pucsp. br/sites/default/files/img/aci/27-8_agurdar_proec_textopara280814. pdf>. Acesso em: fev. 2017.

VECE, Janaina Pinheiro; CURI, Edda; SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos. **Currículos de Matemática:** análise das orientações didáticas sobre as grandezas e medidas no Ciclo de Alfabetização. Educ. Matemática Pesquisa, São Paulo, v.19, n.3, pp.302-327, 2017.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative structures. In LESH, R.; LANDAU, M. (Org.), **Acquisition of mathematics concepts and processes** (pp. 127-174). New York, NY: Academic Press, 1983.

VIANA, Odaleia Aparecida; MIRANDA, Juliene Azevedo. Raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação**. REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 1, p. 194-213, 2016.

WALSH, Maureen. *Multimodal Literacy: Researching classroom practice.* Australia: Primary English Teaching Association (e:lit), 2011.

ANEXO A - Decisão do COEP

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA - COEP

Projeto: CAAE – 62487916.8.0000.5149

Interessado(a): Profa. Teresinha Fumi Kawasaki
Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino
Faculdade de Educação-UFMG

DECISÃO

O Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG – COEP aprovou, no dia 07 de dezembro de 2016, o projeto de pesquisa intitulado **"Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano, sob a perspectiva da pesquisa-ensino"**, bem como:

- Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.
- Termo de Assentimento Livre e Esclarecido.

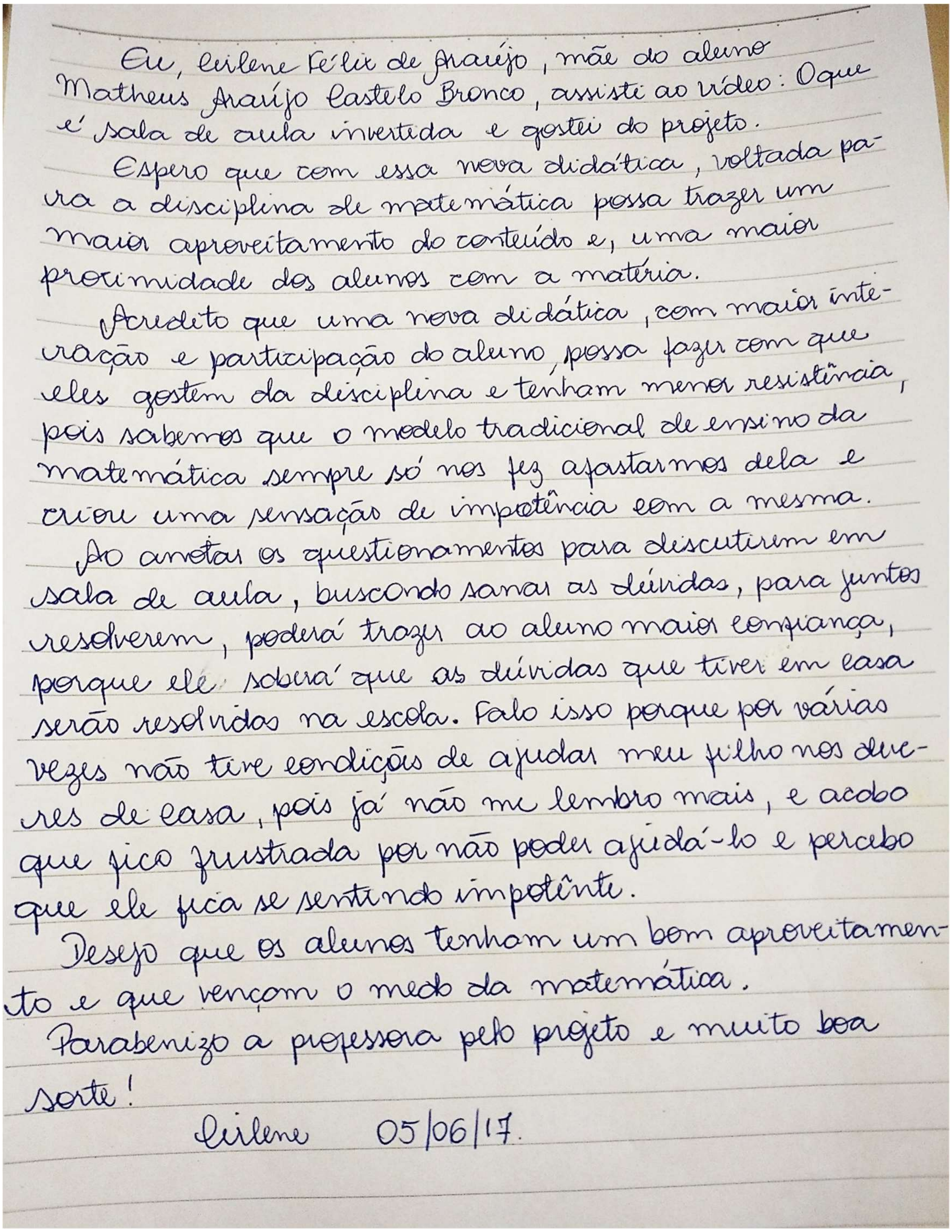
O relatório final ou parcial deverá ser encaminhado ao COEP um ano após o início do projeto através da Plataforma Brasil.

Vivian Resende

Profa. Dra. Vivian Resende
Coordenadora do COEP-UFMG

Av. Pres. Antonio Carlos, 6627 – Unidade Administrativa II - 2º andar – Sala 2005 – Cep 31270-901 – BH-MG
Telefax: (031) 3409-4592 - e-mail: coep@prpq.ufmg.br

ANEXO B - Depoimento de uma mãe de aluno



Eu, Leilene Félix de Araújo, mãe do aluno Matheus Araújo Castelo Branco, assisti ao vídeo: Oque é sala de aula invertida e gostei do projeto.

Espero que com essa nova didática, voltada para a disciplina de matemática possa trazer um maior aproveitamento do conteúdo e, uma maior proximidade dos alunos com a matéria.

Acredito que uma nova didática, com maior interação e participação do aluno, possa fazer com que eles gostem da disciplina e tenham menor resistência, pois sabemos que o modelo tradicional de ensino da matemática sempre só nos fez afastarmos dela e criou uma sensação de impotência com a mesma.

Ao anotar os questionamentos para discutirem em sala de aula, buscando sanar as dúvidas, para juntos resolverem, poderá trazer ao aluno maior confiança, porque ele saberá que as dúvidas que tiver em casa serão resolvidas na escola. Falo isso porque por várias vezes não tive condições de ajudar meu filho nos deveres de casa, pois já não me lembro mais, e acabo que fico frustrada por não poder ajudá-lo e percebo que ele fica se sentindo impotente.

Desejo que os alunos tenham um bom aproveitamento e que vençam o medo da matemática.

Parabenizo a professora pelo projeto e muito boa sorte!

Leilene 05/06/17.

APÊNDICE A - Termo de consentimento livre e esclarecido (pais)

A professora Dra.Teresinha Fumi Kawasaki, o professor Dr. Diogo Alves de Faria Reis e a mestranda Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias, da Faculdade de Educação da UFMG, vêm solicitar sua autorização para participação voluntária de seu(sua) filho(a) na pesquisa denominada: "Sala de aula invertida na Educação Matemática: uma experiência com alunos do 9º ano, sob a perspectiva da Pesquisa-ensino".

O objetivo principal dessa pesquisa é analisar a prática da professora Petrina, que estará aplicando uma forma (metodologia) não habitual de ensinar Matemática para seu (sua) filho(a). Esse método de ensino propõe que o estudante seja capaz de desenvolver habilidades de autonomia para estudar. Desejamos que os estudantes sejam protagonistas de seus aprendizados e que o professor não ministre apenas aulas expositivas em sala e sim que colabore com o esclarecimento de dúvidas para o aluno dentro de sala de aula. Esse método chama-se sala de aula invertida, porque o estudante irá estudar o conteúdo novo em casa e fazer atividades, participar de discussões, debates e tirar dúvidas com o professor em sala.

Para isso a professora está fazendo uma revisão bibliográfica, analisando trabalhos teóricos já existentes. Ela está buscando entender o papel das tecnologias no ensino, especialmente o uso do vídeo e da internet e com isso pesquisando nas teorias existentes apoio para justificar e ampliar a ação prática resultante.

Pretendemos ainda elaborar as aulas e desenvolvê-las em comum acordo com os estudantes, na Escola (nome da escola), de Belo Horizonte, MG. Estimamos que sejam necessários dois meses de aula. Vamos respeitar o ritmo dos alunos para dar como finalizado o conteúdo trabalhado.

Para o desenvolvimento do projeto, as aulas serão assistidas por outra professora de Matemática, Erica de Aguiar Queiroz, e gravadas pela pesquisadora.

Este estudo não terá nenhum custo para o educando. Explicaremos aos estudantes do que se trata a pesquisa e pediremos a todos que assinem, por livre e espontânea vontade, o Termo de Consentimento. Àqueles que tiverem idade inferior a 18 anos, entregaremos também o Termo de Assentimento (o jovem poderá ou não concordar com a pesquisa).

Para a garantia das normas do Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins dessa pesquisa, podendo ser divulgadas em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e na dissertação de Mestrado de Petrina.

A identidade dos participantes ficará preservada por meio do uso de nomes fictícios. O material coletado será arquivado sob a guarda da pesquisadora por um tempo de até 05 (cinco) anos e posteriormente será destruído.

Esclarecemos que a pesquisa oferece o risco de constrangimento dos estudantes com a gravação em áudio das aulas, mas agiremos para que a aula se desenvolva naturalmente. A escola estará assegurando a todos os alunos a oportunidade de utilizar a sala de informática para aqueles não tiverem possibilidade de assistirem aos vídeos, objetos dessa pesquisa, em casa.

Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento os participantes poderão pedir esclarecimentos e até mesmo se recusar a continuar participando da pesquisa.

Desde já, agradecemos a sua colaboração e nos colocamos à disposição para quaisquer outros esclarecimentos. Caso você concorde com a participação de seu(sua) filho(a) na pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine este documento que se encontra em duas vias, uma para a pesquisadora e uma para o responsável pelo estudante.

___________________________________	___________________________________
Teresinha Fumi Kawasaki	Diogo Alves de Faria Reis
Pesquisadora orientadora responsável	Pesquisador coorientador responsável

____

Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias

Pesquisadora corresponsável

Eu,____, RG__________________, declaro que fui consultado(a) pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, Professores Teresinha Fumi Kawasaki, telefone (31) 99614-6455, endereço eletrônico Kawasakit@gmail.com, Diogo Alves de Faria Reis (31) 99205-3500 endereço eletrônico diogofaria@ufmg.br e Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias, telefone, (31) 99552-0479 endereço eletrônico matematicanota10@gmail.com e respondo positivamente à sua demanda de realizar a coleta de dados, conforme explicado. Terei liberdade para desistir do projeto a qualquer momento, sem qualquer prejuízo para mim ou meu(minha) filho(a). Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras, sinto-me esclarecido(a) para participar da pesquisa e registro meu consentimento livre e esclarecido.

Belo Horizonte, _________/________/_______

____

Assinatura do(a) pai(mãe) ou outro responsável

Em caso de dúvidas quanto aos seus direitos na pesquisa, entre em contato com:
COEP - Comitê de Ética em Pesquisa – Universidade Federal de Minas Gerais - Av. Antônio Carlos, 6627 - Unidade Administrativa II - 2º andar, sala 2005 - Campus Pampulha - Belo Horizonte, MG – telefax: (031) 3409-4592, e-mail: <coep@prpq.ufmg.br>.

APÊNDICE B - Termo de assentimento livre e esclarecido do menor (estudantes)

A professora Teresinha Fumi Kawasaki, o professor Dr. Diogo Alves de Faria Reis e a mestranda Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias, da Faculdade de Educação da UFMG, convidam e propõem sua participação na pesquisa intitulada: "Sala de aula invertida na Educação Matemática: uma experiência com alunos do 9º ano, sob a perspectiva da Pesquisa-ensino".

O objetivo principal dessa pesquisa é analisar a prática da professora Petrina, que estará aplicando uma forma (metodologia) não habitual de ensinar Matemática. Esse método de ensino propõe que o estudante seja capaz de desenvolver habilidades de autonomia para estudar. Desejamos que os estudantes sejam protagonistas de seus aprendizados e que o professor não ministre apenas aulas expositivas em sala e sim que colabore com o esclarecimento de dúvidas para o educando dentro de sala de aula. Essa abordagem pedagógica se chama Sala de Aula Invertida, porque o estudante irá estudar o conteúdo novo em casa e fazer atividades, discussões, debates e tirar dúvidas com o professor em sala.

Para isso, a professora Petrina está fazendo uma revisão bibliográfica, analisando trabalhos teóricos já existentes. Ela está buscando entender o papel das tecnologias no ensino, especialmente o uso do vídeo e da internet. Também está estudando sobre métodos para melhoria de aprendizagem dos alunos, e com isso pesquisando nas teorias existentes apoio para justificar o método utilizado.

Para o desenvolvimento do projeto, vamos contar com a colaboração da professora de Matemática Erica de Aguiar Queiroz. Ela assistirá a algumas de nossas aulas, durante o período de dois meses. As aulas pesquisadas serão gravadas. Este estudo não terá nenhum custo para vocês, estudantes.

Explicamos que se trata de uma pesquisa e pedimos a todos que assinem, por livre e espontânea vontade, o Termo de Assentimento.

Àqueles que tiverem idade inferior a 18 anos entregaremos também o Termo para seus pais lerem e assinarem, caso concordem com a sua participação na pesquisa.

Para a garantia das normas do Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins dessa pesquisa, podendo ser divulgadas em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e na dissertação de Mestrado da professora Petrina.

A identidade dos participantes ficará preservada por meio do uso de nomes fictícios. O material coletado será arquivado sob a guarda da pesquisadora por um tempo de até 05 (cinco) anos, e posteriormente será destruído.

Esclarecemos que a pesquisa oferece um pequeno risco de constrangimento a vocês, estudantes, com a gravação das aulas, mas agiremos para que a aula se desenvolva naturalmente. A escola estará assegurando a todos os alunos a oportunidade de utilizar a sala de informática, especialmente para aqueles que não tiverem possibilidade de assistirem aos vídeos, objetos dessa pesquisa, em casa.

Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento os estudantes poderão pedir esclarecimentos e até mesmo se recusarem a continuar participando da pesquisa. Desde já, agradecemos a sua colaboração e nos colocamos à disposição para quaisquer outros esclarecimentos.

Caso você concorde em participar da pesquisa, pedimos que preencha o termo abaixo e assine este documento, que segue em duas vias, uma para a pesquisadora e outra para o estudante.

______________________________	______________________________
Teresinha Fumi Kawasaki	Diogo Alves de Faria Reis
Pesquisadora orientadora responsável	Pesquisador coorientador responsável

____

Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias

Pesquisadora corresponsável

Eu,____, RG_________________, declaro que fui consultado(a) pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, Professoras Teresinha Fumi Kawasaki, telefone (31) 99614-6455, e-mail Kawasakit@gmail.com, Diogo Alves de Faria Reis (31) 99205-3500 e-mail diogofaria@ufmg.br e Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias, telefone, (31) 99552-0479 email matematicanota10@gmail.com e respondo positivamente à sua demanda de realizar a coleta de dados, conforme explicado. Terei liberdade para desistir do projeto a qualquer momento, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras, sinto-me esclarecido(a) para participar da pesquisa e registro meu consentimento livre e esclarecido.

Belo Horizonte, ______/________/_______

____

Assinatura do(a) estudante

Em caso de dúvidas quanto aos seus direitos na pesquisa, entre em contato com:
COEP - Comitê de Ética em Pesquisa – Universidade Federal de Minas Gerais - Av. Antônio Carlos, 6627 - Unidade Administrativa II - 2º andar, sala 2005 - Campus Pampulha - Belo Horizonte, MG – telefax: (031) 3409-4592, e-mail: <coep@prpq.ufmg.br>.

APÊNDICE C - Carta de anuência para autorização de pesquisa

Prezada diretora,

Vanessa Moreira

Escola Municipal Minervina Augusta

Belo Horizonte-MG

Prezado(a) senhor(a),

Solicitamos autorização institucional para realização da pesquisa intitulada "Sala de aula invertida na Educação Matemática: uma experiência com alunos do 9º ano, sob a perspectiva da Pesquisa-ensino", a ser realizada na Escola Municipal Minervina Augusta, pela pesquisadora Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias, com a colaboração da professora Érica Aguiar Queiroz como observadora das aulas pesquisadas.

Essa pesquisa é parte do projeto de mestrado, o PROMESTRE-Mestrado Profissional em Educação e Docência da Faculdade de Educação da UFMG, sob orientação da Professora Dra. Teresinha Fumi Kawasaki e do coorientador professor Dr. Diogo Alves de Faria Reis.

O objetivo principal dessa pesquisa é analisar a prática docente da professora-pesquisadora Petrina sob a metodologia da pesquisa-ensino, que visa a uma investigação para o aprimoramento profissional do professor bem como as possibilidades de melhoria do processo de aprendizagem dos seus estudantes com uma abordagem pedagógica de ensino denominada Sala de Aula Invertida. Essa é uma abordagem ativa de ensino que propõe que o estudante seja capaz de desenvolver habilidades de autonomia para estudar. Desejamos que os jovens sejam protagonistas de seus aprendizados.

Os resultados dessa investigação têm também o objetivo de contribuir com embasamentos teóricos, para a academia, sobre a prática docente, que são de suma importância para a formação de professores. As aulas pesquisadas serão assistidas pela professora de matemática Erica de Aguiar Queiroz que posteriormente contribuirá com a análise dos resultados. Para o desenvolvimento da pesquisa, necessito, portanto, do acompanhamento da professora Érica.

Ao mesmo tempo, informamos que, nos trabalhos científicos que serão realizados a partir dessa pesquisa, o nome da Escola não será citado, apenas suas principais características (como público, nível de ensino, entre outras).

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde (CNS/MS) 466/12 que trata da Pesquisa envolvendo Seres Humanos. Salientamos ainda que tais dados serão utilizados tão somente para realização deste estudo.

Acreditamos que a experiência será de proveito para os estudantes e as professoras, na medida em que se objetiva uma maior aprendizagem do conteúdo que nela está envolvido e aprimoramento profissional docente.

Na certeza de contarmos com a colaboração e empenho desta Diretoria, agradecemos antecipadamente a atenção, ficando à disposição para quaisquer esclarecimentos que se fizerem necessários.

Belo Horizonte, _______ de __________________ de 2017.

________________________________	________________________________
Teresinha Fumi Kawasaki	Diogo Alves de Faria Reis
kawasakit@gmail.com	diogofaria@ufmg.br
Pesquisadora orientadora responsável	Pesquisador coorientador responsável

____

Petrina Rúbria Nogueira Avelar Tobias

matematicanota10@gmail.com

Pesquisadora corresponsável

____

De acordo Vanessa Moreira - Diretora

APÊNDICE D - Questionário *on-line*

Este questionário foi aplicado por meio da plataforma *on-line Google Forms* e as respostas dos estudantes foram facultativas.

Sala de Aula Invertida no ensino de proporcionalidade para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental - 2017 – Professora Petrina Avelar

O que é sala de aula invertida?

1) **Sobre o vídeo: "O que é Sala de Aula Invertida?" Seus pais (ou um deles) ou responsável assistiram ao vídeo?**
   a) Sim, assistiram.
   b) Não assistiram.

2) **Se a reposta foi: "SIM, eles assistiram", escreva algum comentário do qual você se lembra que fizeram sobre o vídeo.**

3) **Se a reposta foi: "NÃO, eles não assistiram". Por que não assistiram ao vídeo?**
   a) Não assistiram porque eu não mostrei o vídeo a eles.
   b) Não assistiram porque não temos internet em casa, no celular ou em outro dispositivo.
   c) Não assistiram porque não conseguiram organizar um tempo para assistir.
   d) Não assistiram porque não quiseram.

4) **Em relação ao acesso à internet para assistir às videoaulas:**
   a) Tenho internet em casa, na maioria das vezes assisti pelo computador.
   b) Tenho internet em casa, na maioria das vezes assisti pelo celular conectado ao wifi.
   c) Não tenho internet em casa, na maioria das vezes utilizei pacote de dados do celular.
   d) Não tenho internet em casa, utilizei os computadores da escola.
   e) Não tenho internet em casa, assisti em outro lugar (casa de vizinho, parentes, amigos).

5) Foram disponibilizados na escola horários para você assistir aos vídeos fora do seu horário de aula. Você utilizou esse espaço? Por quê?

a) Não, porque tenho internet em casa (ou em outro local de acesso).
b) Não, até precisei, mas eu esqueci que poderia ir à escola.
c) Não usei porque eu não quis voltar à escola somente para assistir a vídeos de Matemática.
d) Sim, utilizei e foi útil.

6) Foram disponibilizados na escola, com a monitora da sala de informática, arquivos das videoaulas para ela copiar para você em um pen drive, celular ou DVD. Bastava deixar a mídia com ela durante o horário de aula e pegar após alguns minutos. Dessa forma você poderia assistir aos vídeos em casa mesmo sem ter internet. Em relação a essa opção:

a) Não utilizei essa opção de acesso aos vídeos, porque eu esqueci de levar mídia.
b) Não utilizei essa opção porque não precisei dela.
c) Utilizei essa opção e foi muito útil porque não precisava ter internet para assistir aos vídeos.

7) Pais ou responsáveis assistiram às videoaulas com você?

a) Sim, assistiram somente 1 vídeo.
b) Sim, assistiram 2 ou 3 videoaulas.
c) Sim, assistiram 4 ou 5 videoaulas.
d) Não assistiram nenhuma videoaula.

8) Converse com seus pais e pergunte qual a opinião deles sobre as videoaulas, referindo-se às aulas propriamente ditas de Matemática.

a) Ter videoaulas pode ajudar os pais a orientar os filhos em casa sobre o conteúdo da escola.
b) Não faz diferença ter videoaula, porque eles não têm tempo para auxiliar os filhos em tarefas escolares.
c) Não gostaram da ideia de ter videoaulas.

9) Vocês trabalharam em sala de aula em grupos para responder às discussões propostas pela professora. Em relação a trabalhar em grupo:

a) Eu gosto porque trocamos opiniões e isso nos ajuda a aprender melhor.
b) Eu não gosto porque sempre há conversa demais.
c) Eu não gosto de trabalhar em grupo porque os colegas me atrapalham.
d) Eu não ligo, tanto faz fazer as atividades em grupo ou sozinho.

10) Qual a sua opinião sobre ter a matéria apresentada em forma de videoaulas?

a) Não gosto porque não há como conversar e tirar dúvidas com a professora.
b) Não gosto porque não gosto de videoaulas.
c) Gostei porque posso assistir à aula várias vezes e, se eu tiver dúvidas, posso voltar o vídeo quantas vezes eu quiser. Também posso assistir à aula na hora em que eu quiser.

11) Com que frequência você julga ser interessante o professor utilizar a Sala de Aula Invertida?

a) Uma vez por semana.
b) Uma vez a cada 15 dias.
c) Uma vez por mês.

d) Não gostei da Sala de Aula Invertida; não gostei de trocar o dever de casa por assistir à videoaula. Acho que não deveria haver esse tipo de atividade na escola.

12) Em relação aos vídeos que tiveram participação dos alunos:

a) Não gostei porque acho que não tinha nada a ver colocar fala de colegas.
b) Não gostei porque desconcentra a gente ao assistir aos vídeos.
c) Gostei porque o vídeo se parece mais com nossa realidade.
d) Não sei dar opinião.

13) Deixe seu comentário sobre a experiência que você teve com essa pesquisa: o que achou, pontos negativos e positivos (se tiver), sugestões etc.

14) Que conselho você daria para os professores que desejarem utilizar essa abordagem pedagógica da Sala de Aula Invertida?

APÊNDICE E - Atividades desenvolvidas em sala de aula

ATIVIDADE 1 - Dinâmica com grupos sobre grandezas, instrumentos e unidades de medidas

Objetivo**:** Promover uma dinâmica para percepção e troca de saberes e experiências em relação ao tema grandezas e unidades de medidas. A sala de aprendizagem de Matemática proposta aqui deve ser um ambiente em que os estudantes expressem seus pensamentos, troquem ideias, revisem seus pontos de vista e construam suas conclusões com (ou sem) a mediação do professor. A proposta é que a sala seja um ambiente de aprendizagem. Segundo Torres (2014), "pois se reconhece nessas metodologias o potencial de promover uma aprendizagem mais ativa por meio do estímulo: ao pensamento crítico; ao desenvolvimento de capacidades de interação, negociação de informações e resolução de problemas (...)".

Dinâmica:

1. Dividir a turma em 4 grupos.
2. Cada grupo deverá escrever em um único registro, em folha à parte, as grandezas, os instrumentos e as unidades de medida que os integrantes trouxeram como exemplo. Essa folha conterá os registros de todos os integrantes do grupo e deverá ser entregue ao professor antes de a dinâmica começar.
3. Enquanto os grupos completam a tabela, o professor coloca no quadro uma folha de papel craft com o mesmo esboço da tabela dada a eles, com as colunas: grandeza, instrumento de medida e unidade de medida.
4. Faz-se o sorteio de número dos grupos. Os grupos 1 e 2 serão adversários, e os grupos 3 e 4 validarão as respostas dos 1 e 2, respectivamente.
5. Um componente do grupo 1 vai ao quadro e transcreve para o quadro as respostas do seu grupo.
6. O grupo 3 valida a resposta do grupo 1.
7. Em seguida, o grupo 2 vai ao quadro e repete o procedimento. O grupo 4 valida as respostas do grupo 2.
8. Repete-se o mesmo procedimento invertendo-se os papéis, desta vez o grupo 3 vai ao quadro e suas respostas são validadas pelo grupo 1.
9. Em seguida o grupo 4 vai ao quadro e suas respostas serão validadas pelo grupo 2.

Marca mais pontos o grupo que tiver o maior número de repostas corretas.

O professor pode utilizar a forma que melhor lhe convier para separar as repostas dos alunos para a contagem. Pode ser uma tabela separada para cada grupo ou simplesmente uma cor diferente estipulada por grupo.

Cada grupo deverá escrever apenas uma tripla (grandeza – instrumento-unidade) por vez. Assim, minimizamos a possibilidade de o primeiro grupo escrever as triplas mais cotidianas e os demais grupos ficarem prejudicados. O professor deverá utilizar a criatividade para minimizar as injustiças no jogo.

Cada grupo deverá entregar para ao professor uma folha, como o quadro seguinte, com a resposta dos integrantes antes de o jogo começar.

Grandezas	Instrumentos de medida	Unidades de medida
1. 2. 3.	1. 2. 3.	1. 2. 3.

Ao final, o professor devolverá aos grupos suas folhas-repostas para que eles as confiram e corrijam, caso seja necessário.

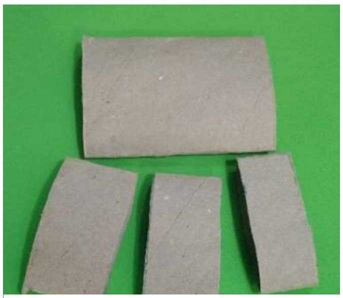
Os registros dos grupos devem ser recolhidos.

Como atividade curinga, caso os grupos não levem as listas, o professor deve entregar para cada grupo a seguinte relação, e eles farão a mesma atividade.

Metros quadrados	Energia	Força	Trabalho
cronômetro	hectares	densímetro	condensação
multímetro	hodômetro	termômetro	evaporação
solidificação	densidade	população	km/h
fusão	aceleração	miligramas	dosagem de remédio
mililitros	quilogramas	metros cúbicos	decímetros cúbicos
trena	litros	balança	megabytes
capacidade de armazenamento de dados	memória de computador	pendrive	watts
conta de água	lâmpadas	gigabytes	cartão de memória
pressão	consumo de água	corrente elétrica	potência
segundos	minutos	quantidade de vento	quantidade de caixas de achocolatado
consumo de energia elétrica	felicidade	altura	idade
água	tristeza	amizade	miligramas
massa	tempo	graus	litros
perímetro	toneladas	calorias	área

ATIVIDADE 2 - Grandezas nas faces dos dados

Construa cubos utilizando a parte interna do rolo de papel higiênico, dividindo-a na metade da medida da largura do rolo.



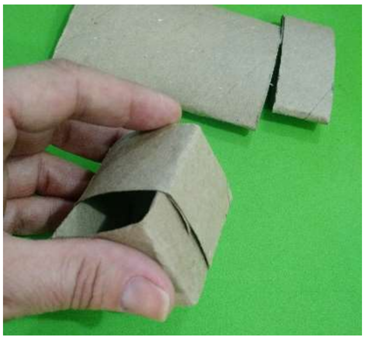
Construindo cubo - parte 1

Há diferença entre fábricas de papel, e com isso nem todo rolo dá para ser dividido igualmente em 3 pares, como o do exemplo. Para construir um cubo, você vai precisar de duas partes iguais que sejam do mesmo tamanho da metade da largura do rolo.

Em seguida, frise as partes que darão forma ao cubo.

Construindo cubo - parte 2

Encaixe uma parte na outra, formando então o cubo.



Construindo cubo - parte 3

Construindo cubo - parte 4

Em seguida, cole as grandezas nas faces desse cubo.

Uma sugestão é trabalhar com as grandezas seguintes:

Grandezas para as faces dos dados

Velocidade	Distância	Tempo	Perímetro	Consumo	Custo
pessoas trabalhando	tempo para finalizar o serviço	pressão	área	força	densidade
massa	volume	temperatura	quantidade de caixas	preço	tempo
distância	velocidade	peso	consumo de água	preço	idade
altura	largura	tempo	custo	massa	velocidade
quantidade de tinta	tamanho da parede	número de trabalhadores	tempo para finalizar o serviço	densidade	volume de ...
massa	volume	custo	tempo	tamanho	quantidade de...
peso	quantidade de...	tempo para	tempo para	valor	área de ...

ATIVIDADE 3 – Tabela investigando regularidades

Observe a tabela abaixo e **reconheça** algumas regularidades entre linhas, colunas e diagonais. Por exemplo: observe que a coluna 4 é o dobro da coluna 2. Ou, ainda, que a coluna 2 é a terça parte da coluna 6.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Observe os valores de linhas, colunas, diagonais, compare-os, perceba as regularidades e cite-as. Aqui estão três sugestões. Use sua percepção e cite outras mais:

i. Comparando colunas duas a duas.

ii. Comparando linhas e colunas.

iii. Pegue quatro quadrinhos juntos, por exemplo:

Ainda com ajuda da tabela, veja se ela pode auxiliá-lo a resolver esta questão:

Dois amigos, Lúcio e Rômulo, gostam muito de jogar *on-line*. Eles estão fazendo economia para comprar um jogo. Cada um tem um cofre. Toda semana Lúcio coloca 4 reais em um cofre e Rômulo coloca 7 reais. Quando Lúcio tiver 32 reais, quantos reais Rômulo terá?

ATIVIDADE 4 – Percebendo a redução à unidade: reciclagem de latinhas de alumínio

Conforme informação do vídeo “Como funciona a reciclagem de latinhas de alumínio”, a cada 2 horas são produzidos 7 mil quilos de alumínio provenientes da reciclagem de latas de alumínio. Nessa situação, há uma relação entre as grandezas tempo e massa.

Com base nessas informações, complete esta tabela:

Tempo	30 min	60 min	90 min	120 min	3 horas	4 horas
Quantidade (massa) de alumínio em kg				7000		

Escreva como foi o seu raciocínio para chegar a esses resultados.

O alumínio líquido é transformado em placas. Complete esta tabela tendo o peso (massa) e a quantidade das placas de alumínio.

Quantidade de placas de alumínio	1	2	3	4	6	9
Massa em kg				3000 kg		

Escreva como foi o seu raciocínio para chegar a esses resultados.

ATIVIDADE 5 – Percebendo a redução à unidade: "Como funciona um foguete"

(Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=mhgtGOcsUqM)

Você tem ideia de quantos quilogramas de lixo são deixados no espaço quando é lançado um foguete como o modelo Saturno V? Talvez seja uma pergunta de difícil resposta, mas, levando em consideração que a parte que volta à Terra é muito pequena, vamos tentar imaginar quanto é a massa de um foguete?

O vídeo do Manual do Mundo comparou o peso (massa) do foguete com o peso (massa) do elefante.

Pensando bem, achei isso complicado, pois pode haver elefante grande, pequeno, gordo e magro, então resolvi modificar um pouco essa comparação.

Busquei informação na internet sobre o peso do meu carro, mas só encontrei no site de carretas cegonhas, dessas que transportam carros. Estava escrito que 11 carros iguais ao meu pesam juntos 11.825 kg.

Vamos preencher as lacunas desta tabela para ter uma ideia de que quantos carros seriam necessários para se aproximar do peso do foguete modelo Saturno V?

Quantidade de carros	01	02	05	10	11	20	30	40	
Peso (massa)					11.825 kg				

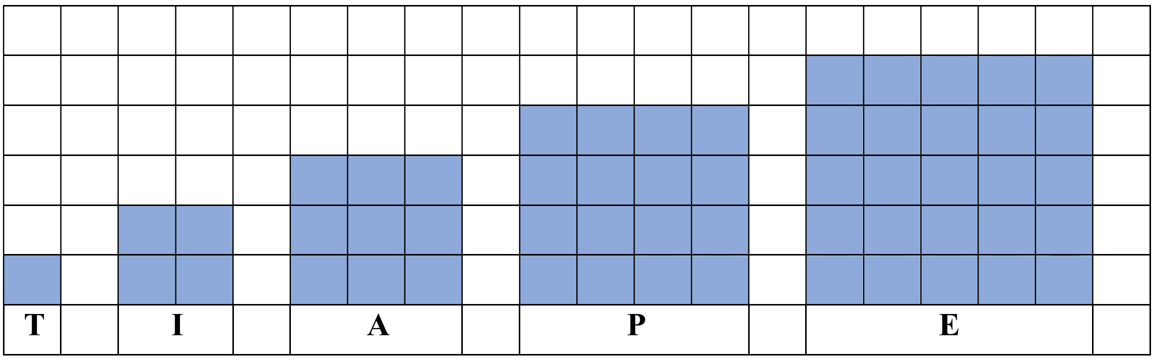
Escreva como foi o seu raciocínio para chegar aos resultados.

No vídeo também foi dito que, no primeiro estágio, o foguete alcança 68 km de altura em apenas 2 minutos.

Com base nessa informação, podemos afirmar que em 1 minuto o foguete estava a 34 km de altura ou que, no dobro desse tempo, ou seja, em 4 minutos, o foguete estará no dobro da altura também? Ou ainda: se triplicarmos o tempo, o foguete alcançará o triplo dessa altura? Você acha que podemos afirmar que existe regularidade nesse exemplo? Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 6 – Observando regularidades nos quadrados

Observe os quadrados T, I, A, P, E e responda às questões que seguem.



Em relação aos quadrados acima, considere que a unidade de cada quadradinho da malha quadriculada seja de 1 cm. Preencha a tabela abaixo com o que lhe é pedido.

Quadrado	**Comprimento do lado**	**Perímetro**	**Área**
T			
I			
A			
P			
E			

Responda às questões:

1. Quais são as grandezas envolvidas nessa questão?
2. As grandezas comprimento do lado e perímetro são proporcionais? Justifique sua resposta.
3. As grandezas comprimento do lado do quadrado e sua respectiva área são proporcionais? Justifique sua resposta.
4. Se aumentarmos o comprimento do lado, a área aumenta?

   4.1 Isso garante que essas grandezas sejam diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.
5. Um carro percorre 360 km com 30 litros de combustível. Sabendo-se que a capacidade do tanque de combustível desse carro é de 54 litros, quantos km o carro vai andar quando estiver com o tanque completo?
6. O maratonista do nosso 1º vídeo completou a volta na orla da Lagoa da Pampulha em uma hora (60 minutos). Partindo do pressuposto de que ele mantenha esse ritmo, quanto tempo ele gastará para completar a prova da corrida da São Silvestre que consta de um trajeto de 15 km?

ATIVIDADE 7 – Analisar se as grandezas são diretamente proporcionais (D.P).

As situações abaixo representam situações de relacionamento entre grandezas de forma diretamente proporcional (D.P)? Justifique sua resposta.

a) 100 pessoas fazem um serviço em 20 dias;
   200 pessoas fazem esse mesmo serviço em 10 dias.
   São D.P? ____

Justificativa:

b) 800 gramas de um achocolatado custam R$ 12,00;
   400 gramas desse achocolatado custam R$ 8,00.
   São D.P? ____

Justificativa:

c) 20 pessoas consomem 200 salgados em uma festa;
   60 pessoas irão consumir 600 salgados em uma festa.
   São D.P? ____

Justificativa:

d) Uma impressora imprime 500 folhas em 10 minutos, em uma hora imprime 5000 folhas.
   São D.P? ____

Justificativa:

e) Um carro percorre 350 km em 3 horas e meia. Em duas horas vai percorrer 200 km.
   São DP? ____

ATIVIDADE 8 - Regularidade é chato?

Resolva as atividades propostas:

1) Um achocolatado de 800g custa R$ 14,00. O mesmo achocolatado numa embalagem de 400g custa R$ 8,00 no mesmo supermercado. Quanto custa 100g desse achocolatado nesse estabelecimento?

Leia as reportagens seguintes e responda ao que se pede:

Vídeo mostra estrada sendo construída em dois dias na Austrália

No Brasil construir novas estradas e rodovias pode levar meses, ou até mesmo anos. Em outros países, como a Austrália, a história é outra: um vídeo gravado na pequena cidade de Shire Of Moora mostra uma estrada de 4,9 km sendo pavimentada em apenas dois dias. A filmagem foi feita por um drone e mostra a agilidade e organização dos operários envolvidos na obra.
Fonte: Disponível em:
www.jconline.ne10.uol.com.br/canal/veiculos/noticia/2017/01/17/video-mostra-estrada-sendo-construida-em-dois-dias-na-australia-267173.php> Publicado em 17/01/2017.

Está em trâmite no governo do Piauí as obras de asfaltamento, como o da rodovia PI 260, no trecho que liga as cidades de São Gonçalo do Gurguéia a Barreiras do Piauí, e da rodovia PI 456, que liga os municípios Simões e Padre Marcos. "A estrada que liga os municípios de Simões e Padre Marcos está com projeto pronto e apto para licitar os 20 quilômetros da PI 260 e os 34 km da PI 456.
Disponível em: http://cidadeverde.com/luiscorreia/83039/estado-vai-asfaltar-estrada-de-acesso-a-praia-do-arrombado> (Texto adaptado)

i) Uma empresa de engenharia que ganhou a licitação dessa obra disse que é capaz de asfaltar 42 km em 14 dias. Quantos dias essa empresa gastará para asfaltar os trechos citados?

ii) E se fosse a empresa de engenharia da Austrália, quanto tempo levaria?

ATIVIDADE 9 - Diretamente proporcional (D.P.) ou inversamente proporcional (I.P.)?

As situações abaixo representam relacionamento entre grandezas de forma diretamente proporcional (D.P) OU inversamente proporcional (I.P)? Justifique sua resposta.

a) 10 pessoas fazem um serviço em 32 dias;
40 pessoas farão esse mesmo serviço em 8 dias.
São D.P ou I.P ou não há regularidade? ___________________________________

Justificativa:

b) 3 impressoras imprimem os boletins dos alunos em 40 minutos;
2 impressoras imprimem esses boletins em uma hora (60 minutos).
São D.P ou I.P ou não há regularidade? ___________________________________

Justificativa:

c) 40 pessoas consomem 480 salgados em uma festa;
55 pessoas irão consumir 680 salgados nessa festa.
São D.P ou I.P ou não há regularidade? _______________________________

Justificativa:

d) Uma impressora imprime 500 folhas em 10 minutos; em uma hora imprime 3000 folhas.
São D.P ou I.P ou não há regularidade? _____________________________________

Justificativa:

e) Um carro com velocidade constante de 100 km/h gasta 2 horas para chegar ao seu destino. Se essa velocidade fosse de 80 km/h, ele gastaria duas horas e meia para chegar.
São D.P ou I.P ou não há regularidade? __________________________________

ATIVIDADE 10 – Construindo gráficos na planilha Libreoffice Cal

1. Abra a guia Escritório – LibreOffice Cal e comece um arquivo novo.
2. Digite as tabelas abaixo.
3. Construa o gráfico – na guia Inserir – Gráfico – XY dispersão – pontos e linhas.

a) $y = 2x$

x	y = 2x
0	
10	
20	
30	
40	

Faça o esboço do gráfico aqui.

A partir do gráfico, você pode afirmar que os dados da tabela estão relacionados com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

Se as grandezas forem proporcionais, quanto vale a constante de proporcionalidade? Deixe seus cálculos.

b) $x.y = 100$

x	y
10	
20	
30	
40	
50	

Faça o esboço do gráfico aqui.

A partir do gráfico, você pode afirmar que os dados da tabela estão relacionados com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

Se as grandezas forem proporcionais, quanto vale a constante de proporcionalidade? Deixe seus cálculos.

c) $y = \frac{x}{5}$

x	y = 1/5 x
0	
10	
20	
30	
40	

Faça o esboço do gráfico aqui.

A partir do gráfico, você pode afirmar que os dados da tabela estão relacionados com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

Se as grandezas forem proporcionais, quanto vale a constante de proporcionalidade? Deixe seus cálculos.

d) $y = x^2$

x	$y = x^2$
0	
2	
4	
6	
7	

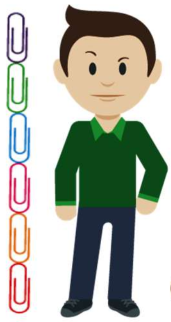
Faça o esboço do gráfico aqui.

A partir do gráfico, você pode afirmar que os dados da tabela estão relacionados com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais? Justifique sua resposta.

Se as grandezas forem proporcionais, quanto vale a constante de proporcionalidade? Deixe seus cálculos.

ATIVIDADE 11 – Zé Pequeno e mapa da bauxita

Leia a atividade e resolva o que se pede.



Esta é a foto do Zé Pequeno. Quando medimos a altura dele em clipe, ele mede 6 clipes. Quando a gente mede a altura dele em apontador, ele mede 4 apontadores.

Ele tem um amigo que se chama Zé Grandão. Quando medimos a altura do Zé Grandão em apontador, ele mede 6 apontadores. Qual será a medida da altura do Zé Grandão em clipes?

Fonte: LAMON, 2012. Atividade adaptada.

Esta imagem é parte de uma área de uma mineradora de bauxita, a segunda maior do mundo, localizada no Pará.

A bauxita é um bem mineral do qual se produz o alumínio.

Observe que essa mineradora está localizada na Floresta Amazônica.

Este traço acima da imagem está em escala real de mapa. Ele corresponde a 500 metros.

Faça uma aproximação da área dessa mineradora pela imagem conforme a escala dada.

Sugestão: divida a imagem em quadrados ou retângulos, quantos você quiser, e determine a área aproximada.