

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 3499-4866 - Fax: +55 3499-4850



Estimação de Estados com Restrições Intervalares Utilizando Abordagens Estocástica e Zonotópica

Alesi Augusto de Paula

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Prof. Bruno Otávio Soares Teixeira, Dr.
Prof. Guilherme Vianna Raffo, Dr.

Belo Horizonte, Julho de 2018

P324e	<p>Paula, Alesi Augusto de. Estimação de estados com restrições intervalares utilizando abordagens estocástica e zonotópica [manuscrito] / Alesi Augusto de Paula. – 2018. xxxí, 110 f., enc.: il.</p> <p>Orientadores: Bruno Otávio Soares Teixeira, Guilherme Vianna Raffo.</p> <p>Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Bibliografia: f. 107-110.</p> <p>1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Kalman, Filtragem de - Teses. 3. Variáveis aleatórias - Teses. 4. Processo estocástico - Teses. I. Teixeira, Bruno Otávio Soares. II. Raffo, Guilherme Vianna. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621.3(043)</p>
-------	--

Dedicatória

Aos meus pais Ângela e José que sempre estiveram disponíveis para mim, apoiando-me em todas as etapas da vida.

Agradecimentos

Ao meu amado senhor e salvador Jesus Cristo por tudo, pois eu nada teria na vida se ele não me tivesse dado.

A minha querida família pelas orações, paciência, amor e ensino, que me tornaram um homem grato e sábio.

A família do meu amigo Antônio pela força e participação desde a graduação.

Aos meus orientadores, Bruno e Guilherme, pela oportunidade de participar deste trabalho que tanto estimo e pelos preciosos conselhos.

Aos meus professores de pré vestibular Jaques e Alison por entusiasmo, credibilidade e amizade.

Aos meus professores Giovani, Marcelo e Márcio por ensinamentos e conselhos durante a graduação.

Ao Brenner por disponibilidade, discussões e ensinamentos sobre conceitos de conjuntos.

Aos meus amigos do MACSIN e do MACRO por compartilharmos dificuldades e sucessos, que me serviram de alento e estímulo.

Aos meus amigos do CEFET-MG por carinho e consideração.

A todos aqueles que, de alguma forma, têm ajudado a realizar os projetos de Deus para a minha vida.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo suporte financeiro durante o mestrado.

Epígrafe

*“Nem todo o que me diz “Senhor! Senhor!” entrará no reino dos céus, senão o que faz a vontade de Meu Pai que está nos céus.
Muitos me dirão naquele dia: Senhor! Senhor!, não profetizamos em Teu nome, e em Teu nome não lançamos fora demônios, e em Teu nome não fizemos muitos milagres?
Então, Eu lhes direi claramente: Nunca vos conheci. Apartai-vos de mim, praticantes de iniquidades.”*

Mt 7:21-23

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxi
Lista de Símbolos	xxiii
Lista de Acrônimos	xxix
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Justificativa	1
1.2 Formulação do Problema	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Estrutura da Dissertação	5
2 Prolegômenos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Definições Básicas e Notações de uma Variável Aleatória	7
2.2.1 Definições Básicas	8
2.2.2 Descrição de Probabilidade de uma Variável Aleatória	9
2.3 Definições Básicas e Notações de Conjuntos	11

2.3.1	Técnicas de Associação de Conjuntos	11
2.3.2	Definições Básicas sobre Aritmética Intervalar	11
2.3.3	Conceitos Básicos de Elipsoides e Polítopos Convexos	18
2.4	Transformação de Variáveis Aleatórias Gaussianas e Variáveis Zonotópicas	30
2.4.1	Caso Linear	30
2.4.2	Caso Não Linear	31
2.5	Considerações Finais	35
3	Métodos de Estimação de Estados	37
3.1	Introdução	37
3.2	Métodos de Filtragem Estocástica	37
3.2.1	Filtro de Kalman	38
3.2.2	Filtro de Kalman Estendido	40
3.2.3	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	42
3.2.4	Filtro de Kalman com Restrição Intervalar na Transformação <i>Unscented</i>	44
3.2.5	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> com Otimização	48
3.2.6	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> com Truncamento da Função Densidade de Probabilidade	50
3.3	Métodos de Filtragem por Associação de Conjuntos	54
3.3.1	Filtro de Kalman Gaussiano e Zonotópico	54
3.3.2	Filtro Zonotópico	60
3.3.3	Filtro Zonotópico Não Linear com Restrição Intervalar nos Estados	67
3.4	Considerações Finais	70
4	Exemplos Numéricos	73
4.1	Introdução	73
4.2	Sistemas Lineares	73
4.2.1	Sistema com Parâmetro Intervalar	74
4.2.2	Sistema com Ruídos Gaussiano e Zonotópico	79
4.3	Sistemas Não Lineares	82

	xi
4.3.1 Rastreamento de um Veículo Terrestre	83
4.3.2 Sistema de Lorenz	86
4.4 Sistemas Não Lineares com Restrição Intervalar nos Estados	90
4.4.1 Reator em Batelada	90
4.4.2 Reator de Tanque Continuamente Misturado	95
4.5 Conclusões	101
5 Conclusões	103
5.1 Considerações Gerais	103
5.2 Contribuições	104
5.3 Trabalhos Futuros	105
Bibliografia	110

Resumo

Desde 1960, com a proposição do filtro de Kalman (KF), o problema de estimação de estados tem ganhado relevância na literatura. KF e variações do mesmo são soluções bem conhecidas para estimar estados tanto de sistemas lineares quanto não lineares. O cerne do KF é tratar as variáveis do sistema como variáveis aleatórias (VA) com função densidade de probabilidade (PDF) Gaussiana, caracterizando essa metodologia como estocástica. Dado que transformações não lineares não preservam a PDF Gaussiana de VAs, as soluções geradas pelos KFs são aproximadas. Desse modo, variações do KF têm sido propostas para estimar estados satisfazendo restrições, tanto de igualdade quanto de desigualdade, melhorando, assim, as estimativas. Outra forma de estimar estados, que tem ganhado relevância nas últimas décadas, é dada pela abordagem de associação de conjuntos devido a dois fatores: (i) estimar estados de forma garantida e (ii) considerar os ruídos do sistema como desconhecidos, mas limitados. Então, dado que as hipóteses feitas no início do projeto do estimador são satisfeitas, é possível obter estimativas de estados que contêm os estados exatos de um dado sistema independentemente da distribuição estatística dos ruídos. O cerne da abordagem de associação de conjuntos é representar incertezas por meio de conjuntos compactos. Dentre as técnicas de associação de conjuntos, zonotopos têm se destacado pelo compromisso entre precisão e carga computacional. Por um lado, a abordagem estocástica já está consolidada na literatura para os casos lineares e não lineares. Por outro lado, a abordagem de associação de conjuntos não está consolidada para os casos não lineares e os conceitos relacionados ainda não estão claros na literatura. Este trabalho investiga o uso destas abordagens para estimar estados de sistemas dinâmicos lineares e não lineares a tempo discreto. O conteúdo apresentado foi direcionado aos seguintes objetivos: (i) estudar algoritmos com abordagem estocástica e zonotópica, (ii) apresentar os algoritmos de filtro de Kalman e zonotopo com notação unificada e (iii) aplicar estes em estudos de casos, a fim de comparar o desempenho dos algoritmos.

Palavras-chave: Filtro de Kalman; Estimação de estados; Restrições de desigualdade; Associação de conjuntos; Variável aleatória; Variável zonotópica; Filtro zonotópico.

Abstract

Since 1960, with the proposition of the Kalman filter (KF), the problem of state estimation has owned relevance in the literature. KF and its derivations are well known solutions to estimate states for both linear and nonlinear systems. The essence of the KF is to treat the variables of the system as random variables (VA) with Gaussian probability density function (PDF), characterizing this methodology as stochastic. Given that nonlinear transformations do not preserve the Gaussian PDF of VAs, the solution generated by KFs are approximated. Therefore, variations of the KF have been proposed to estimate states satisfying constraints, both equality and inequality, improving, then, the estimates. Other way to estimate states, which has owned relevance on the last decades, is given by the set membership approach due to two factors: (i) estimating states guaranteed and (ii) considering the system noise terms as unknown, but limited. Thus, given that the assumptions realized in the beginning of the project are satisfied, it is possible to obtain state estimates that contain the exact states of a given system independently the noise statistical distribution. The essence of the set membership approach is to represent states by compact sets. Among set membership approaches, zonotopes have highlighted for the trade-off between accuracy and computational burden. On the one hand, the stochastic approach is already consolidated in the literature for linear and nonlinear cases. On the other hand, the set membership approach is not consolidated for nonlinear cases and the related concepts are not clear in the literature. This work investigates the use of these approaches to estimate states of discrete-time linear and nonlinear dynamic systems. The presented content was directed to the following objectives: (i) to study algorithms with stochastic and zonotopic approaches, (ii) to present algorithms with unified notation and (iii) to apply these in case studies, to compare the performance of algorithms.

Keywords: Kalman filter; State estimation; Inequality constraints; Set membership; Stochastic variable; Zonotopic variable; Zonotopic filter.

Lista de Figuras

2.1	Representação em \mathbb{R}^2 de alguns conjuntos comuns: (a) elipsoide, (b) caixa, (c) politopo convexo (regular e irregular) e (d) zonotopo (conjuntos_gerais @).	11
2.2	Representação em \mathbb{R}^2 do mesmo politopo convexo por H^{rep} , V^{rep} e G^{rep} (plot_politopo_convexo @).	21
2.3	Representação em \mathbb{R}^2 da soma de duas caixas (plot_soma_duas_caixas @).	22
2.4	Representação em \mathbb{R}^3 de (a) uma caixa, (b) um paralelotopo e (c) um zonotopo (plot_intervalo_paralelotopo_zonotopo @).	23
2.5	Representação em \mathbb{R}^2 de um elipsoide (gerando_elipsoide @).	25
2.6	Exemplo de um zonotopo antes e após sua redução (reducao_zonotopo @).	29
2.7	Exemplo da transformação afim $y = Ax + b$, representada por linha tracejada, de: (a) uma VAG X e (b) uma VZ \mathcal{X} , representadas por linha contínua (transformacao_linear @).	31
2.8	Exemplo da transformação não linear $y = [x_1 \cos(x_2) \quad x_1 \sin(x_2)]^T$, representada por linha tracejada, de: (a) VAGs X_1 e X_2 , e (b) VZs \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , representadas por linha contínua e pelas variáveis aumentadas \tilde{X} e \tilde{X} , respectivamente (transformacao_nao_linear @).	35
3.1	Ilustração dos passos de predição, durante o qual propagam-se as VAs X_{k-1} e $X_{k k-1}$, produzindo $X_{k k-1}$ e $Y_{k k-1}$ respectivamente, e assimilação de dados, no qual a VA X_k é estimada, do UKF.	43
3.2	Exemplo da geração de pontos sigma pela ICUT, em que as estimativas iniciais de média $\hat{x} = [0,25 \quad 1]^T$, representada por (\circ), e covariância $P^{\text{xx}} = I_{2 \times 2}$, representada por ($-$), de $x \in \mathbb{R}^2$ são apresentadas com a média representada por (\diamond), a covariância representada por ($- \cdot -$) e os pesos (x) dos pontos sigma após aplicar os sub-passos 1 a 8 com $\kappa = 0$ (aplicacao_da_abordagem_ICUT @).	48

3.3	Exemplo da abordagem de truncamento em que as estimativas de média $\hat{x}_k = [0,25 \ 1]^T$, representada por (o), e covariância $P_k^{xx} = I_{2 \times 2}$, representada por (—), de $x_k \in \mathbb{R}^2$ são usadas no passo de truncamento para obter a média $\hat{x}_k^t = [0,5430 \ 1,1452]^T$, representada por (◇), e covariância $P_k^{xxt} = \text{diag}([0,4003 \ 0,4157]^T)$, representada por (— · —) (aplicacao_da_abordagem_de_truncamento @).	54
3.4	Ilustração dos passos do ZGKF, em que X_{k-1}^h é a variável híbrida inicial composta por parcelas Gaussianas P_{k-1}^{gg} , centro \hat{x}_{k-1}^h e zonotópica G_{k-1}^x . A partir desta variável, um ganho K_{k-1} é calculado e, por meio de observações até o instante $k - 1$, a variável híbrida atual X_k^h é estimada.	59
3.5	Ilustração dos passos de predição, $\mathcal{X}_{k k-1}$, medição, $\mathcal{Y}_{k k-1}$, interseção, \mathcal{X}_k , e redução de zonotopo, $\bar{\mathcal{X}}_k$, do ZF.	65
3.6	Ilustração dos passos de predição, $\mathcal{X}_{k k-1}$, medição, $\mathcal{Y}_{k k-1}$, interseção-I, \mathcal{X}_k^I , interseção-II, \mathcal{X}_k^{II} , e redução de zonotopo, $\bar{\mathcal{X}}_k$, do IZF. Neste caso, a interseção-II é aplicada a cada iteração.	69
3.7	Exemplo de aplicação do quarto passo do Algoritmo 3.3.4 para realizar a interseção entre a caixa de restrição intervalar \mathcal{R} , representada por (— · —), e o zonotopo \mathcal{X} , representado por (—), gerando outros zonotosos pelas minimizações de segmentos ($\mathcal{X}_{\min.\text{seg}}$), representado por (:), e volume ($\mathcal{X}_{\min.\text{vol}}$), representado por (— · —), (intersecao_entre_caixa_e_zonotopo @).	70
4.1	Conjuntos iniciais de estados para os algoritmos KF (elipsoide), ZGKF e ZF (zonotosos).	75
4.2	Estimação de estados do sistema linear com parâmetro intervalar para o cenário (i). (a)-(b) correspondem aos estados estimados, (c) é a norma de Frobenius de zonotosos para uma realização Monte Carlo; e (d) é o RMSE de centros e médias estimados após 100 realizações Monte Carlo.	76
4.3	Estimação de estados do sistema linear com parâmetro intervalar para os cenários (iii)-(vi). (a)-(c) correspondem ao cenário (iii), $100\sigma_w$, (d)-(f) ao cenário (iv), $100\sigma_v$, (g)-(i) ao cenário (v), $0,01\sigma_w$, e (j)-(l) ao cenário (vi), $0,01\sigma_v$. A primeira coluna de figuras, formada por (a), (d), (g) e (j), é a estimação do estado x_2 ; a segunda coluna, formada por (b), (e), (h) e (k), corresponde à norma de Frobenius; e a terceira coluna, formada por (c), (f), (i) e (l), é o índice RMSE.	78
4.4	Zonotopo inicial dos filtros zonotópicos.	80
4.5	Estimação de estados do sistema linear com ruído Gaussiano e zonotópico para os cenários (i), (iii)-(vi). (a)-(b) correspondem ao cenário (i), referência, (c) ao cenário (iii), $100\sigma_w$, (d) ao cenário (iv), $100\sigma_v$, (e) ao cenário (v), $0,01\sigma_w$, e (f) ao cenário (vi), $0,01\sigma_v$	81

4.6	Estimação de estados do sistema de rastreamento de um veículo. (a) e (b) correspondem, respectivamente, ao erro dos estados x_1 e x_4 estimados por EKF, UKF e ZF, após linearizar o modelo, para uma realização Monte Carlo; e (c) é o RMSE de centro e média estimados após 100 realizações Monte Carlo.	85
4.7	Conjuntos iniciais dos algoritmos UKF (elipsoide) e ZF (zonotopo). . . .	87
4.8	Estimação de estados do sistema de Lorenz utilizando UKF e ZF para uma realização Monte Carlo. (a), (c) e (e) correspondem ao ZF com o modelo não linear, enquanto as figuras restantes dizem respeito ao ZF com o modelo linearizado.	88
4.9	(a) e (b) correspondem à evolução do volume de cada zonotopo do ZF antes e depois da linearização do modelo, respectivamente, para uma realização Monte Carlo; e (c) é o RMSE dos estados estimados pelo UKF e pelo ZF, com o modelo linearizado.	89
4.10	Representação dos conjuntos zonotópico e elipsoidal iniciais para os cenários (i) e (ii) do reator em batelada.	92
4.11	Estimação de estados do reator em batelada para uma realização Monte Carlo. As Figuras (a), (c) e (e) dizem respeito ao cenário (i), enquanto as figuras restantes ao cenário (ii). Os estados estimados são apresentados em (a)-(d); (e)-(f) correspondem ao desvio padrão $\sigma_{x_{2,k}}$	93
4.12	(a)-(d) dizem respeito a critérios de tamanho de zonotopo do IZF para uma realização Monte Carlo; (e) corresponde ao RMSE dos estados estimados após 100 realizações Monte Carlo. (a), (c) e (e) estão relacionadas ao cenário (i), e as restantes ao cenário (ii).	94
4.13	Representação gráfica dos conjuntos zonotópico e elipsoidal iniciais para os cenários (i) e (ii) do CSTR.	97
4.14	Estimação de estados do CSTR para uma realização Monte Carlo. (a), (c) e (e) dizem respeito aos estados estimados para o cenário (i), e as figuras restantes ao cenário (ii).	98
4.15	(a), (c) e (e) estão relacionadas ao cenário (i), e as restantes ao cenário (ii) para uma realização Monte Carlo. Em (a) e (b) é apresentado o desvio padrão $\sigma_{x_{3,k}}$, (c)-(f) são critérios de tamanho de zonotopo do IZF.	99
4.16	Índice RMSE dos estados estimados após 100 realizações Monte Carlo para o cenário (i).	100

Lista de Tabelas

4.1	Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema linear com parâmetro intervalar para o cenário (i).	77
4.2	Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema linear com ruído Gaussiano e zonotópico para o cenário (i).	80
4.3	Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema de rastreamento de um veículo.	85
4.4	Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema de Lorenz.	90
4.5	Tabela referente aos índices MT e T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do reator em batelada para o cenário (i).	95
4.6	Tabela referente aos índices MT e T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do CSTR para o cenário (i).	101

Lista de Símbolos

Os superescritos qualificam nomes de variáveis, enquanto os subscritos índices das mesmas. Além disso, o símbolo “@” que aparece ao longo das exemplificações no trabalho remete ao *script* usado para gerar a figura correspondente.

Capítulo 1

\mathbb{R}^n	$\mathbb{R}^{n \times 1}$ (Espaço Euclidiano de dimensão n);
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais;
n	Dimensão do espaço Euclidiano;
x	Vetor de estados;
u	Vetor de entrada;
w	Ruído de processo;
y	Vetor de saída do modelo de medição;
v	Ruído de medição;
k	Instante de tempo;
p	Dimensão do vetor de entrada;
q	Dimensão do vetor de ruído de processo;
r	Dimensão do vetor de ruído de medição;
\hat{x}	Valor esperado ou centro da variável X ;
P^{xx}	Matriz de covariância da variável aleatória X ;
$(\bullet)^T$	Transposição de vetor ou matriz;
\rightarrow	Implica em;
Q	Matriz de covariância do ruído de processo;
R	Matriz de covariância do ruído de medição;
X	Variável aleatória;
\mathcal{X}	Variável que satisfaz algum conjunto;
$E[\bullet]$	Esperança matemática;
\in	Pertence a;
f	Mapeamento do modelo de proceso;
h	Mapeamento do modelo de medição.

Capítulo 2

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais;
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos;
\mathbb{R}_*	Conjunto dos números reais não nulos;
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R}^{n \times 1}$ (Espaço Euclidiano de dimensão n);
n	Dimensão do espaço Euclidiano;
n_g	Número de geradores de um zonotopo;
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais;
\mathcal{S}	Espaço amostral;
X	Variável aleatória;

$p(x)$	Função densidade de probabilidade;
$[x]$	Vetor intervalar;
\underline{x}	Limite inferior do intervalo $[x]$;
\bar{x}	Limite superior do intervalo $[x]$;
A	Matriz elementar;
$[A]$	Matriz intervalar;
\hat{x}	Valor esperado ou centro da variável X ;
P^{xx}	Matriz de covariância da variável aleatória X ;
$\text{cov}(X_1, X_2)$	Matriz de covariância entre as variáveis aleatórias X_1 e X_2 ;
$\mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$	Distribuição Gaussiana com média \hat{x} e covariância P^{xx} ;
$\mathcal{U}(a, b)$	Distribuição uniforme com limites inferior e superior a e b , respectivamente;
$\chi_n^2(n, 2n)$	Distribuição chi quadrado com n graus de liberdade, média n e covariância $2n$;
\in	Pertence a;
\triangleq	Iguais por definição;
\leq	Menor ou igual a;
\subset	Está contido em;
\subseteq	Está contido em ou é igual a;
\cap	Interseção;
\emptyset	Conjunto vazio;
\forall	Para todo;
\exists	Existe;
$E[\bullet]$	Esperança matemática;
\Rightarrow	Não implica em;
\oplus	Soma de Minkowski;
$\prod_{i=1}^n A_i$	Produtório ou multiplicação entre variáveis A_i , para $i = 1, 2, \dots, n$;
$\min(x)$	Menor valor de x ;
$\max(x)$	Maior valor de x ;
$(\bullet)^T$	Transposição de vetor ou matriz;
\square	Término de definições, observações, exemplos, fatos, teoremas e algoritmos;
$\Delta\{f\}$	Extensão intervalar natural de f ;
$\ \bullet\ _r$	Norma- r de um vetor ou matriz;
\mathcal{X}	Zonotopo;
X^{sp}	Matriz de pontos sigma;
γ	Vetor de pesos dos pontos sigma;
$\text{col}_q(A)$	q -ésima coluna da matriz A ;
\tilde{x}	Vetor aumentado \tilde{x} ;
$P^{\tilde{x}\tilde{x}}$	Matriz de covariância do vetor aumentado \tilde{x} ;
$\diamond\{X\}$	Inclusão de zonotopo;
$\Delta\{X\}$	Envoltório intervalar do zonotopo X ;
$\nabla_x f(x_a)$	Gradiente ou Jacobiana de $f(x)$ em relação a x avaliada em x_a ;
$\text{rs}(G^x)$	Matriz diagonal definida como $\text{rs}(G^x)_{i,i} \triangleq \sum_{j=1}^{n_g} g_{i,j}^x $;
h	Mapeamento não linear;
$ x $	Valor absoluto de x ;
$\text{mid}(\bullet)$	Ponto médio de vetor ou matriz intervalar;
$\text{diam}(\bullet)$	Diâmetro de vetor ou matriz intervalar;
$\text{lin}_i(H)$	i -ésima linha da matriz H ;
$\text{conv}(\mathcal{V})$	Envoltório convexo do conjunto \mathcal{V} ;
\downarrow_φ	Operador redução de ordem φ ;
\mathcal{S}	Faixa;
\mathcal{P}	Politopo convexo;
$[\Phi]^n$	Caixa unitária de ordem n ;
φ	Ordem de redução de zonotopo;
$\mathcal{X}^{\mathcal{E}}$	Elipsoide;
$\mathcal{E}(\hat{x}, P^{xx})$	Elipsoide de centro \hat{x} e matriz simétrica P^{xx} .

Capítulo 3

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R}^{n \times 1}$ (Espaço Euclidiano de dimensão n);
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais;
$0_{a \times b}$	Matriz com a linhas e b colunas, cujos elementos são nulos;
$1_{a \times b}$	Matriz com a linhas e b colunas, cujos elementos são unitários;
$I_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem n ;
x	Vetor de estados;
u	Vetor de entrada;
w	Ruído de processo;
y	Vetor de saída;
v	Ruído de medição;
k	Instante de tempo;
κ	Parâmetro que determina o espalhamento dos pontos sigma;
K	Ganho de Kalman;
n	Dimensão do vetor de estados (espaço Euclidiano);
\tilde{n}	Dimensão do vetor de estados aumentado;
m	Dimensão do vetor de saída do modelo de medição;
n_g	Número de geradores de um dado conjunto;
p	Dimensão do vetor de entrada;
q	Dimensão do vetor de ruído de processo;
r	Dimensão do vetor de ruído de medição;
Q	Matriz de covariância do ruído de processo;
R	Matriz de covariância do ruído de medição;
$p(x)$	Função densidade de probabilidade;
\hat{x}	Valor esperado ou centro da variável X ;
x^h	Vetor híbrido;
x^{eq}	Ponto de equilíbrio da variável x ;
P^{xx}	Matriz de covariância da variável aleatória X ;
z^t	Variável aleatória transformada pelo truncamento;
P^{zzt}	Matriz de covariância da variável transformada pelo truncamento Z^t ;
x^t	Variável aleatória truncada;
P^{xxt}	Matriz de covariância da variável aleatória truncada X^t ;
P^{xy}	Matriz de covariância entre as variáveis aleatórias X e Y ;
P^{yy}	Matriz de covariância da variável aleatória de saída Y ;
z	Variável zonotópica;
g	Variável Gaussiana;
σ	Variância;
α	Erro do tipo I ou nível de significância;
X^{sp}	Matriz de pontos sigma;
X^{spx}	Matriz de pontos sigma da variável aleatória X ;
Y^{sp}	Matriz de pontos sigma transformados;
γ	Vetor de pesos dos pontos sigma;
f	Mapeamento do modelo de processo;
h	Mapeamento do modelo de medição;
S	Matriz ortogonal ou matriz de autovetores proveniente da decomposição de Schur;
Θ	Matriz ortogonal proveniente da ortogonalização de Gram-Schmidt;
W	Forma canônica de Jordan;
$\text{lin}_l(\Theta)$	l -ésima linha da matriz Θ ;
$\text{col}_q(\Theta)$	q -ésima coluna da matriz Θ ;
$\text{erf}(\bullet)$	Função de erro;

$\mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$	Distribuição Gaussiana com média \hat{x} e covariância P^{xx} ;
$\chi_n^2(1 - \alpha)$	Valores tomados abaixo da distribuição chi quadrado com n graus de liberdade e probabilidade $(1 - \alpha)$;
$\mathcal{E}(\hat{x}, P^{xx})_\alpha$	Elipsoide de confiança formado por $X \sim \mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$ e probabilidade $(1 - \alpha)$;
$N(a, b)$	Combinação matemática dada por $N(a, b) = \frac{a!}{b!(a - b)!}$;
\mathcal{X}	Zonotopo;
$\diamond\{X\}$	Inclusão de zonotopo;
w^g	Ruído Gaussiano de processo;
w^z	Ruído zonotópico de processo;
v^g	Ruído Gaussiano de medição;
v^z	Ruído zonotópico de medição;
G^x	Matriz geradora do zonotopo \mathcal{X} ;
J^{MV}	Função de custo correspondente à mínima variância;
J^{MP}	Função de custo correspondente ao máximo <i>a posteriori</i> ;
J^{ZG}	Crítério de minimização do filtro de Kalman Gaussiano e zonotópico;
$\text{tr}(G)$	Traço da matriz G ;
$\ G\ _F$	Norma de Frobenius da matriz G ;
η	Parâmetro de influência do filtro de Kalman Gaussiano e zonotópico;
\cap	Interseção;
\supseteq	Contém ou é igual a;
\in	Pertence a;
\triangleq	Iguais por definição;
\leq	Menor ou igual a;
$>$	Maior do que;
$<$	Menor do que;
\forall	Para todo;
\geq	Maior ou igual a;
\approx	Aproximadamente igual a;
\oplus	Soma de Minkowski;
$\min(x)$	Menor valor de x ;
$E[\bullet]$	Esperança matemática;
$(\bullet)^T$	Transposição de vetor ou matriz;
$(\bullet)^{1/2}$	Raiz quadrada matricial;
\square	Término de definições, observações, exemplos, definições, algoritmos e teoremas;
$\ \bullet\ _r$	Norma- r de um vetor ou matriz;
\downarrow_φ	Operador redução de ordem φ ;
$[\Phi]^n$	Caixa unitária de ordem n ;
φ	Ordem de redução de zonotopo;
$\nabla_x f(x_a)$	Gradiente ou Jacobiana de $f(x)$ em relação a x avaliada em x_a ;
$\text{mid}(\bullet)$	Ponto médio de vetor ou matriz intervalar;
\triangleq	Iguais por definição;
\in	Pertence a;
$\ \bullet\ _r$	Norma- r de um vetor ou matriz;
T_s	Período de amostragem.

Capítulo 4

\leq	Menor ou igual a;
$<$	Menor do que;
$>$	Maior do que;
$\xrightleftharpoons[k_2]{k_1}$	Sentido reversível de reação dadas as concentrações k_1 e k_2 ;
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais positivos;

\mathbb{R}^n	$\mathbb{R}^{n \times 1}$ (Espaço Euclidiano de dimensão n);
n	Dimensão do espaço Euclidiano;
k	Instante de tempo;
k_1	Proporção da taxa de reação;
k_2	Proporção da taxa de reação;
k_3	Proporção da taxa de reação;
k_4	Proporção da taxa de reação;
a	Limite inferior da restrição intervalar do vetor de estados;
b	Limite superior da restrição intervalar do vetor de estados;
w	Ruído de processo;
v	Ruído de medição;
Q	Matriz de covariância do ruído de processo;
R	Matriz de covariância do ruído de medição;
x	Vetor de estados;
y	Vetor de saída;
u	Vetor de entrada;
T_s	Período de amostragem;
t	Instante de tempo contínuo;
R^A	Espécie de reação;
R^B	Espécie de reação;
R^C	Espécie de reação;
$0_{a \times b}$	Matriz com a linhas e b colunas, cujos elementos são nulos;
$I_{n \times n}$	Matriz identidade de ordem n ;
S^e	Matriz estequiométrica;
$r^c(t)$	Taxas de reação em tempo contínuo;
q^f	Taxa de entrada volumétrica;
q^o	Taxa de fluxo efluente;
V^R	Volume do reator;
T^{CPU}	Tempo de processamento médio da CPU;
R^T	Constante de conversão de mol/l para atm;
c^f	Vetor de concentração em mol/l;
$[\Phi]^n$	Caixa unitária de ordem n ;
$[x]$	Vetor intervalar;
\hat{x}	Valor esperado ou centro da variável X ;
P^{xx}	Matriz de covariância da variável aleatória X ;
\mathcal{X}	Zonotopo;
\mathcal{S}	Faixa;
\oplus	Soma de Minkowski;
φ	Ordem de redução de zonotopo;
G^x	Matriz Geradora do zonotopo \mathcal{X} ;
w^g	Ruído Gaussiano de processo;
w^z	Ruído zonotópico de processo;
v^g	Ruído Gaussiano de medição;
v^z	Ruído zonotópico de medição;
$\mathcal{U}(a,b)$	Distribuição uniforme com limites inferior e superior a e b , respectivamente;
δx	Erro da variável x ;
η	Parâmetro de influência do filtro de Kalman Gaussiano e zonotópico.

Lista de Acrônimos

CPU	<i>Central Processing Unit;</i>
CSTR	<i>Continuously Stirred Tank Reactor;</i>
EKF	Filtro de Kalman Estendido;
ICUT	Transformação <i>Unscented</i> com Restrição;
INTLAB	<i>INTerval LABoratory;</i>
IUKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> com a Abordagem ICUT;
IZF	Filtro Zonotópico com Restrição Intervalar nos Estados;
KF	Filtro de Kalman (do inglês, <i>Kalman Filter</i>);
MPT	<i>Multi-Parametric Toolbox;</i>
MT	<i>Mean Trace;</i>
OUKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> com Otimização;
PDF	Função Densidade de Probabilidade;
RMSE	<i>Root-Mean-Square Error;</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio;</i>
TUKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> com a Abordagem de Truncamento da PDF;
UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i> ;
UT	Transformação <i>Unscented</i> ;
VA	Variável ou Vetor Aleatório;
VAG	Variável Aleatória Gaussiana;
VZ	Variável Zonotópica;
ZF	Filtro Zonotópico;
ZGKF	Filtro de Kalman Gaussiano e Zonotópico;
ZKF	Filtro de Kalman Zonotópico;
ZOH	<i>Zero-Order-Holder.</i>

Introdução

“No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus.”

Jo 1:1

1.1 Motivação e Justificativa

No âmbito de sistemas de controle, muitas vezes as variáveis de interesse não podem ser medidas diretamente, sendo o estimador de estados uma ferramenta usada para estimá-las. O estimador utiliza um modelo representativo do sistema dinâmico junto com medições de algumas variáveis. No contexto de estimação de estados foi proposta uma ferramenta ótima denominada filtro de Kalman (do inglês, *Kalman filter* (KF)) para sistemas lineares e Gaussianos (Kalman et al., 1960). Esta ferramenta é classificada como abordagem *clássica* no âmbito de filtragem estocástica e é baseada em dois passos: *predição* e *atualização*. Dado que o caso de sistemas lineares e Gaussianos pode ser difícil de se verificar na prática, melhorias têm sido propostas, tais como estimar estados de sistemas não lineares (Särkkä, 2013), satisfazer restrições (Teixeira et al., 2010b) e considerar parâmetros variantes no tempo (Abdullah e Hassan, 2014). Atualmente existem variações do KF como o filtro de Kalman estendido (do inglês, *extended Kalman filter* (EKF)), baseado em aproximações por séries de Taylor, e o filtro de Kalman *unscented* (do inglês, *unscented Kalman filter* (UKF)), baseado em vetores determinísticos denominados pontos sigma, com o intuito de gerar estimativas *aproximadas* para sistemas não lineares. Esses filtros consideram que os ruídos são aproximados por função densidade de probabilidade (do inglês, *probability density function* (PDF)) Gaussiana. As estimativas geradas para sistemas não lineares são aproximações, dado que a transformação não linear de uma variável aleatória Gaussiana (VAG) não conserva a PDF Gaussiana. Assim, o EKF e o UKF buscam aproximar a PDF da VA transformada por uma PDF Gaussiana para aplicar os passos do KF.

Nas últimas décadas, estimar estados satisfazendo restrições, tanto de *igualdade* quanto de *desigualdade*, têm sido de interesse tanto no âmbito acadêmico quanto no industrial (Teixeira et al., 2010a). As restrições permitem melhorar as soluções obtidas, compatibilizando-as com as restrições e melhorando a precisão, uma vez que os KFs convencionais solucionam o problema de filtragem ótima irrestrita. Neste trabalho,

três abordagens estocásticas que consideram restrições intervalares nos estados são estudadas. A primeira abordagem é baseada na projeção dos pontos sigma nas bordas das restrições intervalares na etapa de predição. Esta abordagem foi proposta por [Vachhani et al. \(2006\)](#), a fim de que os benefícios do UKF fossem combinados com o problema de otimização com restrições proposto pelos mesmos autores em [Vachhani et al. \(2005\)](#). A segunda abordagem consiste em resolver um problema de otimização, a fim de que as soluções obtidas satisfaçam as restrições na etapa de assimilação de dados ([Rengaswamy et al., 2013](#)). Por fim, a terceira abordagem é denominada truncamento da PDF e corresponde a confinar a maior região da PDF dentro das restrições na etapa de assimilação de dados. Esta abordagem foi proposta por [Shimada et al. \(1998\)](#) com o intuito de limitar ambiguidades na estimação da forma e postura de uma mão humana baseado em um modelo de objeto.

Na formulação do problema, é comum encontrar parâmetros variantes no tempo, os quais devem ser levados em consideração na estimação de estados. Na prática, os parâmetros do sistema são incertos devido principalmente a impactos ambientais sobre o sistema e a medição dos mesmos. Na indústria microeletrônica, esse caso é muito recorrente, uma vez que os valores nominais de componentes, como resistores, são afetados pela mudança de temperatura. A forma mais simples e difundida na literatura para estimar estados de sistemas com parâmetros incertos é o passeio aleatório (do inglês, *random walk*), isto é, a variação no tempo dos parâmetros é modelada como uma dinâmica muito lenta ([Leite et al., 2004](#); [Abdullah e Hassan, 2014](#); [Rego, 2016](#)). Neste caso, o vetor de parâmetros inicial é tratado como uma VAG, composta de média, valor nominal, e matriz de covariância. Ao longo das iterações, o vetor de parâmetros atual, a estimar, é igual ao vetor de parâmetros no instante de tempo anterior, por isso há autores que caracterizam os parâmetros estimados como *estados estáticos*. Como essa forma de estimar estados e parâmetros pode oferecer elevada carga computacional, dado que a ordem do sistema é aumentada, e não representa adequadamente dinâmicas rápidas de parâmetros variantes, novas maneiras de abordar esse problema têm sido estudadas. Uma forma mais realista de tratar parâmetros incertos é apresentada em ([Abdullah e Hassan, 2014](#)), que inclui sistema não linear e parâmetros variantes sujeitos a restrições.

Embora as abordagens estocásticas que consideram restrições melhorem as estimativas de estados, pois a PDF Gaussiana se torna mais precisa, elas possuem limitações e, assim, geram soluções aproximadas. Uma das limitações é restringir o domínio da VA, a qual deixa de ser exatamente uma VAG, cujo suporte é ilimitado. Assim, nas últimas décadas, a abordagem de associação de conjuntos (do inglês, *set membership*) tem sido palco de crescente atenção. Essa abordagem, por meio da teoria de conjuntos ([Jaulin e Kieffer, 2001](#); [Moore et al., 2009](#); [Le et al., 2013a](#)), busca estimar parâmetros ([Bravo et al., 2004](#)) ou estados ([Alamo et al., 2005](#)) de forma *garantida*, ou seja, a solução obtida sempre contém o resultado exato e desconhecido, desde que as hipóteses realizadas no início do projeto sejam satisfeitas. A motivação da estimação via associação de conjuntos é considerar que os ruídos do sistema são desconhecidos, mas limitados.

Então, assumindo-se que os limites das incertezas são conhecidos, os ruídos podem assumir qualquer característica de amplitude. Em associação de conjuntos, considera-se sempre o pior caso de ruído, sendo isto um fator negativo na precisão dos algoritmos relacionados.

Nessa abordagem, os estados são caracterizados por conjuntos, os quais podem ser poliedros, politopos, intervalos, paralelotopos, zonotopos, elipsoides e faixas (Le et al., 2013a), por exemplo. Dentre os conjuntos citados, zonotopos têm ganhado relevância por causa de propriedades que aumentam a precisão do conjunto e reduzem a carga computacional (Scott et al., 2016). Portanto, neste trabalho, abordagens zonotópicas são apresentadas com maior enfoque. Em (Alamo et al., 2005) foi proposto um filtro baseado em zonotopos e intervalos (ZF). Basicamente, os passos do ZF são: (i) predição, (ii) medição e (iii) interseção. Este filtro é aplicável tanto para sistemas lineares quanto não lineares, e permite tratar duas abordagens distintas no passo de interseção: (i) minimização de segmentos e (ii) minimização de volume. No primeiro caso, o tempo de processamento é o menor, enquanto no segundo caso são obtidos os conjuntos mais precisos, isto é, de menor tamanho, através de um problema de otimização. O ZF não é um algoritmo ótimo e, por usar operações intervalares, está sujeito aos efeitos de alargamento e dependência, que contribuem para a inexatidão do método. O primeiro efeito resulta de sobrestimações de conjuntos, enquanto o outro efeito ocorre quando um dado conjunto aparece mais de uma vez em uma operação. Estes efeitos conduzem a resultados sobrestimados e à sensibilidade a erros de linearização. Outra limitação do ZF é o longo tempo de processamento devido à minimização de volume. A seguir, são explicitados alguns trabalhos gerados a partir do ZF e dessas limitações.

Em (Bravo et al., 2006a), a interseção proveniente da minimização de volume é melhorada no tempo de processamento e na ordem do zonotopo gerado. Basicamente, o algoritmo de otimização é substituído por iterações que geram zonotopos candidatos na interseção, cujo zonotopo de saída pode ser escolhido segundo algum critério, como o menor volume. Além disso, todos os zonotopos candidatos possuem a mesma ordem do zonotopo de entrada. Em (Bravo et al., 2006b), um controle preditivo robusto baseado em modelo para sistemas não lineares com restrição nos estados é proposto, cujo método de predição utiliza um dos passos do ZF para limitar os conjuntos alcançáveis (do inglês, *reachable sets*) por zonotopos. Devido à álgebra intervalar, o ZF é suscetível a erros de linearização no passo de predição, além dos efeitos de alargamento e dependência. Assim, em (Alamo et al., 2008) é apresentado um exemplo em que o ZF diverge, mesmo utilizando minimização de volume. Para tal ocasião, é proposto um algoritmo de estimação de estados baseado em programação DC (do inglês, *difference of convex functions*), em que a função DC é uma função composta pela diferença de duas outras funções convexas. O algoritmo proposto é uma melhoria em relação ao ZF e utiliza programação DC no passo de predição e medição, em vez de operações intervalares, para limitar erros de linearização, reduzir o efeito de alargamento e remover o efeito de dependência. Em (Le et al., 2013b), uma melhoria na interseção é proposta usando um

critério de otimização para sistemas lineares. Tal critério minimiza o *P-radius* associado a um zototopo. Com isso, um compromisso entre precisão, proveniente da minimização de volume, e carga computacional, pela minimização de segmentos, é obtido. Como a abordagem de programação DC, a minimização do *P-radius* é indicada quando a minimização de volume gera resultados muito incertos.

Dado que a essência do KF é representar incertezas por meio de variáveis aleatórias, enquanto da associação de conjuntos é representar incertezas por meio de conjuntos, poucos trabalhos unem tais abordagens. Em (Chen et al., 1997) é proposto o KF intervalar, que consiste em estender o usual KF para modelos lineares intervalares com considerações estatísticas clássicas. Em (Balestrino et al., 2006) é realizada uma revisão bibliográfica sobre dois algoritmos para estimação de estados de sistemas lineares e fracamente não lineares: (i) algoritmo elipsoidal para definir os limites dos estados e (ii) filtro de partículas para melhor indicar as estimativas dos estados, sendo selecionadas apenas as partículas que pertencem ao conjunto elipsoidal. Em (Xiong et al., 2012) é apresentada uma alternativa para computar inversões de matrizes intervalares do filtro proposto por Chen et al. (1997). Em (Combastel, 2015) é proposto o filtro de Kalman Gaussiano e zototópico (do inglês, *Zonotopic and Gaussian Kalman Filter* (ZGKF)) para sistemas lineares voltado para estimação de estados e detecção de faltas, pelo qual é possível tratar casos de ruídos com suportes limitado e ilimitado simultaneamente. Em (Combastel, 2016) é proposta uma extensão do filtro proposto em (Combastel, 2015) para sistemas não lineares chamado de filtro de Kalman Gaussiano e zototópico estendido (do inglês, *Extended Zonotopic and Gaussian Kalman Filter* (EZGKF)), que é baseado em linearizações como o EKF comum, não sendo necessário realizar o truncamento de termos não lineares.

A motivação deste trabalho é explorar vantagens e desvantagens das principais abordagens estocásticas e zototópicas na estimação de estados.

1.2 Formulação do Problema

Seja o sistema dinâmico não linear a tempo discreto

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1), \quad (1.1)$$

$$y_k = h(x_k, v_k, k), \quad (1.2)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são os modelos de processo e medição, respectivamente, e $x_k \in \mathbb{R}^n$ os estados a estimar. A partir de $k \geq 1$, assume-se que os vetores de medição $y_k \in \mathbb{R}^m$ e entrada $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$ são conhecidos. As parcelas $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ representam ruídos de processo e medição, respectivamente. Considere ainda que os estados satisfazem restrições intervalares

$$a_{i,k} \leq x_{i,k} \leq b_{i,k}, \quad (1.3)$$

com $a_{i,k} \leq b_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A seguir, duas considerações distintas sobre os estados e os termos de ruído são apresentadas. Na abordagem estocástica, assume-se ruídos brancos, de média nula e mutuamente não correlacionados, com matrizes de covariância definidas como $E[w_k w_k^T] = Q_k \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e $E[v_k v_k^T] = R_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Ademais, as estimativas de média $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e covariância $P_0^{xx} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ do estado inicial x_0 , e as matrizes de covariância Q_{k-1} e R_k são consideradas conhecidas.

Na abordagem de associação de conjuntos, os termos de ruído são assumidos desconhecidos mas limitados pelos conjuntos compactos correspondentes $w_{k-1} \in \mathcal{W}_{k-1}$ e $v_k \in \mathcal{V}_k$. Os estados iniciais devem satisfazer o conjunto $x_0 \in \mathcal{X}_0$. Os conjuntos \mathcal{W}_{k-1} , \mathcal{V}_k e \mathcal{X}_0 são considerados conhecidos.

1.3 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é fazer uma análise comparativa entre as abordagens estocástica e zotópica no contexto de estimação de estados. Como objetivos específicos desse trabalho, pretende-se:

- Estudar algoritmos com abordagem estocástica e zotópica;
- Apresentar os algoritmos relacionados às duas abordagens com notação unificada;
- Aplicar esses algoritmos em estudos de casos, a fim de comparar o desempenho dos métodos;
- Explicitar possíveis limitações dos algoritmos estudados.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 1 são expostas a motivação e os objetivos da dissertação. Para isso, são introduzidas duas abordagens para estimar estados: estocástica e associação de conjuntos. Além disso, é apresentada a estrutura geral do texto.

No Capítulo 2, notações, conceitos e exemplos são apresentados para caracterizar variáveis aleatória e zotópica. Primeiramente, são apresentadas as variáveis aleatórias de interesse neste trabalho: uniformes, Gaussianas e chi quadrado. Em seguida, no contexto de associação de conjuntos, vários tipos de conjuntos são definidos, tais como faixa, politopo convexo, intervalo, paralelotopo, zototopo e elipsoide, destacando-se as principais propriedades. Depois, os resultados de transformação linear e não linear de VA e variável zotópica (VZ) são mostrados.

No Capítulo 3 são apresentados nove algoritmos para estimar estados de sistemas lineares e não lineares, dentre eles seis são de abordagem estocástica e os outros três de abordagem znotópica. Em especial, um dos algoritmos znotópicos é proposto na Subseção 3.3.3 para aplicar restrições intervalares nos estados estimados.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos para seis exemplos: dois lineares e os outros quatro não lineares, dentre os quais dois deles tratam restrições nos estados. Com base nos resultados, os algoritmos são analisados e comparados, explicitando-se vantagens e desvantagens dos algoritmos.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e as propostas de continuidade.

Prolegômenos

“Procura apresentar-te a Deus aprovado, como obreiro que não tem do que se envergonhar, que maneja bem a palavra da verdade.”

2 Tm 2:15

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar definições básicas relacionadas a dois tipos de incerteza: aleatória e zonotópica. Primeiramente, a Seção 2.2 é apresentada segundo abordagens similares de Kay (1993) e Särkkä (2013). Conceitos, notações e tipos de variáveis aleatórias são introduzidos e exemplificados nessa seção. Em seguida, a Seção 2.3 apresenta o conceito mais geral de conjuntos, denominado associação de conjuntos (do inglês, *set membership*), para representar uma variável de interesse. Definições de alguns conjuntos mais utilizados na literatura, tais como os conjuntos elipsoidal e zonotópico, são exploradas com base em (Le et al., 2013a; Rego, 2016; Scott et al., 2016). Com isso, a definição de uma variável zonotópica é apresentada. A partir dessas definições, alguns conjuntos são exemplificados graficamente. Na Seção 2.4, exemplos de transformações lineares e não lineares de variáveis aleatórias e variáveis zonotópicas são mostrados. Por fim, a Seção 2.5 conclui este capítulo com observações dos assuntos discutidos.

2.2 Definições Básicas e Notações de uma Variável Aleatória

A abordagem aleatória é comumente utilizada para representar matematicamente fenômenos com incerteza associada. A ideia de incerteza está relacionada a não exatidão do resultado de um dado evento. O termo aleatório se refere à característica não previsível de valores ao longo dos eventos. Por meio da função densidade de probabilidade, é possível caracterizar matematicamente o padrão de valores da variável aleatória (VA). Na prática, a utilização da abordagem aleatória é motivada pela existência de ruídos em sistemas dinâmicos. Graças ao teorema do limite central, o efeito

combinado dos ruídos pode ser aproximado pela distribuição Gaussiana, que é uma função simples de ser representada e caracteriza uma VA.

2.2.1 Definições Básicas

Esta subseção é iniciada com a definição de uma VA.

Definição 2.2.1. Variável aleatória (Kay, 1993).

A VA X é uma função que mapeia um espaço amostral \mathcal{S} no conjunto dos números reais \mathbb{R} .

□

O espaço amostral \mathcal{S} pode ser enumerável, subconjunto dos números naturais \mathbb{N} , ou não enumerável, subconjunto dos números reais \mathbb{R} , caracterizando a VA como discreta ou contínua, respectivamente. O espaço amostral pode ser numérico ou não numérico e corresponde a todos os possíveis resultados de entrada do mapeamento. A saída do mapeamento corresponde aos elementos do espaço amostral traduzidos em números, que pertencem ao conjunto dos números reais. Durante a realização de um experimento associado a uma variável aleatória contínua, apenas parte do conjunto amostral é observado, visto que o número de eventos é limitado em cada realização.

Para melhor entendimento dos conceitos apresentados, são propostos alguns exemplos baseados em (Kay, 1993):

Exemplo 2.2.1. Considere um experimento de M lançamentos, ou eventos, aleatórios de um dado. Como um dado tem seis faces, o espaço amostral é discreto e representado por $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$. Neste caso, a saída do mapeamento pode coincidir com o espaço amostral, pois este é numérico. Os M lançamentos estão associados a um padrão de valores, descrito por uma VA.

□

Exemplo 2.2.2. Considere agora um experimento de M lançamentos aleatórios de uma moeda, cujos elementos não são numéricos. O espaço amostral é dado por $\mathcal{S} = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$. Uma estratégia comum é associar um número a cada elemento do espaço amostral, por exemplo $\mathcal{S}^x = \{0,1\}$. O mapeamento $X(\bullet)$ associa os M elementos observados do espaço amostral original \mathcal{S} a um subconjunto \mathcal{S}^x do conjunto dos números reais. Um mapeamento possível é apresentado a seguir:

$$X(s_i) = \begin{cases} 0, & s_i = \text{Cara} \\ 1, & s_i = \text{Coroa}, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que s_i é o resultado do i -ésimo lançamento.

□

Exemplo 2.2.3. Considere um experimento de lançamentos aleatórios de um dardo em uma superfície circular de raio unitário, em que cada raio observado no lançamento do dardo é computado. Neste caso, o espaço amostral é numérico e formado pelo conjunto $\mathcal{S} = [0; 1] \subset \mathbb{R}$, cujo conjunto de saída é a própria reta real de intervalo unitário $\mathcal{S}^x = \mathcal{S}$.

□

Os exemplos 2.2.1 e 2.2.2 são relativos a uma VA discreta, uma vez que o espaço amostral é enumerável. Por outro lado, o Exemplo 2.2.3 trata de uma VA contínua, pois o espaço amostral é um subconjunto dos números reais.

2.2.2 Descrição de Probabilidade de uma Variável Aleatória

O padrão de valores de uma VA está associado a uma descrição probabilística, que depende do domínio da VA. A descrição probabilística da VA discreta é denominada função massa de probabilidade. No caso contínuo, é chamada de função densidade de probabilidade (PDF) $p(x)$. O foco deste trabalho está em VA contínuas, portanto, apenas propriedades relacionadas a tais variáveis são apresentadas.

Considere uma VA de dimensão n , ou vetor aleatório $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$, que mapeia um espaço amostral original \mathcal{S} em um espaço amostral numérico $\mathcal{S}^x = \mathbb{R}^n$, dado pelo espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Além disso, considere que $x \in X$ é um valor, ou realização, do espaço amostral numérico. As propriedades de uma PDF são:

Propriedade 2.2.1. A PDF é não negativa.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

□

Propriedade 2.2.2. A integral da PDF em todo o seu domínio deve satisfazer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (2.3)$$

□

Definição 2.2.2. Valor esperado e covariância de um vetor aleatório (Kay, 1993).

O valor esperado \hat{x} de um vetor aleatório X é definido como o vetor dos valores esperados de cada variável do vetor aleatório

$$\hat{x} = E[X] = E \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p(x_1) dx_1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p(x_2) dx_2 \\ \vdots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_n p(x_n) dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A covariância P^{xx} de uma VA com PDF $p(x)$ é uma matriz quadrada definida como

$$P^{xx} = \text{cov}(X, X) \triangleq E \left[(X - \hat{x})(X - \hat{x})^T \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \hat{x})(x - \hat{x})^T p(x) dx. \quad (2.5)$$

□

Há PDFs muito conhecidas devido à simplicidade de representação, como a uniforme e a Gaussiana. A representação de uma VA uniforme X é $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, em que a e b são os limites inferior e superior da VA, respectivamente. A VA uniforme X é caracterizada pela PDF $p(x) = \frac{1}{b-a}$, para $a \leq x \leq b$, e $p(x) = 0$ caso contrário.

A PDF Gaussiana necessita apenas da média e da covariância para ser completamente caracterizada. A representação de uma VA Gaussiana (VAG) de dimensão n X é $X \sim \mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$, com $\hat{x} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_n]^T$ e

$$P^{xx} = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_1, X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{cov}(X_2, X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}.$$

O vetor aleatório Gaussiano X é caracterizado pela PDF multivariável (Kay, 1993)

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(P^{xx})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \hat{x})^T (P^{xx})^{-1} (x - \hat{x}) \right\}. \quad (2.6)$$

Se a matriz de covariância P^{xx} é diagonal, as componentes da VA são não correlacionadas e, especialmente para a PDF Gaussiana, são independentes. Assim, outra forma de expressar a PDF Gaussiana multivariável com P^{xx} diagonal é dada por (Kay, 1993)

$$p(x) = \prod_{i=1}^n p(x_i). \quad (2.7)$$

Caso a média da PDF Gaussiana seja nula e a matriz de covariância seja a matriz identidade, a PDF é chamada de Normal.

Definição 2.2.3. Distribuição chi quadrado (Särkkä, 2013).

Considere uma VAG X de dimensão n com média \hat{x} e matriz de covariância P^{xx} . Uma VA associada a X e distribuída com PDF chi quadrado (do inglês, *chi square*), com n graus de liberdade, é representada por $X^\chi \sim \chi_n^2(n, 2n)$, em que $E[X^\chi] = n$ e $\text{cov}(X^\chi) = 2n$, e é definida como

$$X^\chi \triangleq (X - \hat{x})^T (P^{xx})^{-1} (X - \hat{x}), \quad (2.8)$$

cuja realização $x^\chi \in X^\chi$ satisfaz $0 \leq x^\chi < +\infty$.

□

2.3 Definições Básicas e Notações de Conjuntos

2.3.1 Técnicas de Associação de Conjuntos

Antes de definir uma variável zonotópica, uma abordagem mais geral chamada de associação de conjuntos é apresentada. Associação de conjuntos é basicamente uma forma de representar uma variável de interesse por meio de conjuntos compactos deterministicamente escolhidos. Essa abordagem pode ser utilizada no contexto de identificação de sistemas, estimação de estados e controle.

Em todos os problemas que envolvem associação de conjuntos, as estimativas devem atender a três premissas básicas: (i) informação *a priori* sobre o sistema, (ii) medições da entrada e da saída do modelo disponíveis e (iii) ruídos limitados sem a necessidade de serem conhecidos. Essa abordagem não exige conhecimento sobre as propriedades estatísticas de erros, mas assume que esses são limitados. Uma vez atendidas as premissas feitas no início do projeto do estimador, a abordagem de associação de conjuntos é caracterizada como garantida.

Neste trabalho, técnicas de associação de conjuntos são utilizadas para estimação de estados. Há várias estruturas diferentes e possíveis que compõem a metodologia de associação de conjuntos. Algumas representações comuns de conjuntos são ilustradas na Figura 2.1. Em todos os casos, as linhas contínuas determinam os formatos dos conjuntos e as linhas pontilhadas mostram como cada conjunto é formado.

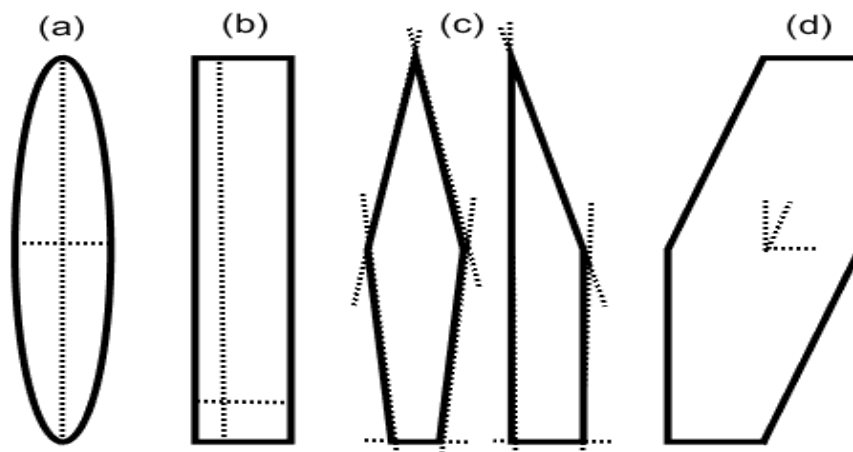


Figura 2.1: Representação em \mathbb{R}^2 de alguns conjuntos comuns: (a) elipsoide, (b) caixa, (c) polítopo convexo (regular e irregular) e (d) zonotopo (conjuntos_gerais @).

2.3.2 Definições Básicas sobre Aritmética Intervalar

Esta subseção é apresentada para melhor compreensão da definição de um zonotopo. Algumas definições e notações sobre aritmética intervalar são apresentadas com base em (Jaulin e Kieffer, 2001; Alamo et al., 2005; Moore et al., 2009; Rego, 2016).

Definição 2.3.1. O intervalo $[x]$ é definido como

$$[x] \triangleq [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad (2.9)$$

em que \underline{x} e \bar{x} representam os limites inferior e superior, respectivamente.

□

Observação 2.3.1. O intervalo $[x]$ é chamado de *degenerado* quando $\underline{x} = \bar{x} = x$. Assim, o intervalo $[x]$ contém um único elemento x e pode ser reescrito como $[x] = [x; x] = x$.

□

Definição 2.3.2. O diâmetro, o ponto médio e o valor absoluto de um intervalo $[x]$ são, respectivamente, definidos como

$$\text{diam}([x]) \triangleq \bar{x} - \underline{x}, \quad (2.10)$$

$$\text{mid}([x]) \triangleq \frac{1}{2}(\underline{x} + \bar{x}), \quad (2.11)$$

$$|[x]| \triangleq \max\{|\underline{x}|, |\bar{x}|\}. \quad (2.12)$$

□

As quatro operações básicas na aritmética intervalar são soma, subtração, multiplicação e divisão.

Definição 2.3.3. A soma e a subtração dos intervalos $[x]$ e $[y]$ são, respectivamente, dadas por

$$[x] + [y] \triangleq [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}], \quad (2.13)$$

$$[x] - [y] \triangleq [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}]. \quad (2.14)$$

□

Definição 2.3.4. A multiplicação dos intervalos $[x]$ e $[y]$ é dada por

$$[x] \cdot [y] \triangleq [\min(L); \max(L)], \quad (2.15)$$

em que $L = \{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}$.

□

Exemplo 2.3.1. A soma, a subtração e a multiplicação dos intervalos $[x] = [-1; 5]$ e $[y] = [-3; 1]$ são dadas por

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [-1; 5] + [-3; 1] = [-4; 6], \\ [x] - [y] &= [-1; 5] - [-3; 1] = [-1 - 1; 5 + 3] = [-2; 8], \\ [x] \cdot [y] &= [\min(L); \max(L)] = [-15; 5], \end{aligned}$$

em que $L = \{-15, -1, 3, 5\}$.

□

Propriedade 2.3.1. O intervalo $[x]$ pode ser representado, alternativamente, por meio do ponto médio e do diâmetro do seu intervalo:

$$[x] = \text{mid}([x]) + \frac{1}{2} \text{diam}([x])[-1; 1]. \quad (2.16)$$

□

Definição 2.3.5. A divisão de $[x]$ por $[y]$ é dada por

$$[x]/[y] \triangleq [\underline{x}; \bar{x}] \cdot \left[\frac{1}{\bar{y}}; \frac{1}{\underline{y}} \right], \quad (2.17)$$

em que $y \in \mathbb{R}_+$.

□

Outras operações de divisão envolvendo intervalos com valores negativos, nulos e limites infinitos são apresentados em (Jaulin e Kieffer, 2001).

Definição 2.3.6. A interseção entre os intervalos $[x]$ e $[y]$ é definida como

$$\begin{aligned} [x] \cap [y] &\triangleq \{z : z \in [x], z \in [y]\} \\ &= [\max\{\underline{x}, \underline{y}\}; \min\{\bar{x}, \bar{y}\}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Caso a interseção seja vazia, ela é representada por $[x] \cap [y] = \emptyset$.

□

Exemplo 2.3.2. A divisão e a interseção de $[x] = [-1; 2]$ por $[y] = [1; 6]$ são dadas por

$$\begin{aligned} [x]/[y] &= [-1; 2] \cdot [1/6; 1] = [-1; 2], \\ [x] \cap [y] &= [\max\{-1, 1\}; \min\{2, 6\}] = [1; 2]. \end{aligned}$$

□

Algumas propriedades algébricas decorrentes das definições apresentadas são:

Propriedade 2.3.2. Comutatividade e associatividade.

A adição satisfaz à comutatividade $[x] + [y] = [y] + [x]$ e à associatividade $[x] + ([y] + [z]) = ([x] + [y]) + [z]$. O valor nulo é o elemento neutro na adição, tal que $0 + [x] = [x] + 0 = [x]$.

A multiplicação satisfaz à comutatividade $[x] \cdot [y] = [y] \cdot [x]$ e à associatividade $[x]([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y])[z]$. O valor unitário é o elemento neutro na multiplicação, tal que $1 \cdot [x] = [x] \cdot 1 = [x]$. A multiplicação do valor nulo por um intervalo resulta no próprio elemento nulo $0 \cdot [x] = [x] \cdot 0 = 0$.

□

Propriedade 2.3.3. Não existência de elementos inversos da adição.

De maneira geral, a adição de um intervalo com o negativo do mesmo intervalo corresponde a $[x] + (-[x]) = [\underline{x} - \bar{x}; \bar{x} - \underline{x}] = \text{diam}([x])[-1; 1]$. O intervalo $-[x]$ é o elemento inverso de $[x]$, se e somente se $\underline{x} = \bar{x}$, assim, $[x] + (-[x]) = [0; 0] = 0$. Além disso, a divisão de um intervalo pelo mesmo intervalo é unitária, se e somente se $\text{diam}([x]) = 0$.

□

Propriedade 2.3.4. Sub-distributividade.

Aplicar a lei de distributividade em uma operação com intervalos pode conduzir a um resultado conservador. A operação distributiva $[x]([y] + [z]) = [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z]$ é exata somente se $[y] \cdot [z] \in \mathbb{R}_+$.

□

Propriedade 2.3.5. Cancelamento.

Tendo em vista que não existem elementos inversos, a operação $[x] + [z] = [y] + [z] \Rightarrow [x] = [y]$. Além disso, $[z] \cdot [x] = [z] \cdot [y] \Rightarrow [x] = [y]$, dado que $[z]/[z] \Rightarrow 1$.

□

As definições unidimensionais apresentadas anteriormente são abrangidas para os casos multidimensionais com vetores e matrizes intervalares. Para simplificação de notação, tanto um elemento ou intervalo unidimensional, quanto um vetor elementar ou intervalar, são representados por letra minúscula, enquanto letra maiúscula representa matriz elementar ou intervalar. A representação de um intervalo unidimensional é uma semirreta, em \mathbb{R}^2 um retângulo, e em \mathbb{R}^3 um paralelepípedo retângulo. Por isso um vetor intervalar tridimensional também é chamado de caixa.

Definição 2.3.7. Uma matriz intervalar $[A] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é definida como

$$[A] \triangleq \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times m} : \underline{a}_{i,j} \leq a_{i,j} \leq \bar{a}_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2.19)$$

em que i e j são os índices da linha e da coluna da matriz $[A]$, respectivamente.

□

Definição 2.3.8. A caixa unitária de ordem n é definida como um vetor intervalar composto de n intervalos unitários $[\Phi]^n \triangleq [-1; 1]^n$.

□

Definição 2.3.9. O diâmetro e o ponto médio da matriz intervalar $[A]$ são calculados para cada elemento da matriz $[A]$:

$$\begin{aligned} \text{diam}([A]) &\triangleq \text{diam}([a_{i,j}]), \forall i, j, \\ \text{mid}([A]) &\triangleq \text{mid}([a_{i,j}]), \forall i, j. \end{aligned}$$

□

Definição 2.3.10. A norma infinito da matriz intervalar $[A]$ é o maior somatório de valor absoluto dos elementos ou intervalos de uma linha da matriz:

$$\|[A]\|_{\infty} \triangleq \max_i \sum_j |[a_{i,j}]|. \quad (2.20)$$

□

Exemplo 2.3.3. O diâmetro, o ponto médio e a norma infinito da matriz intervalar

$$[A] = \begin{bmatrix} [-1; 9] & [-3; 4] \\ [2; 7] & [-4; 9] \end{bmatrix} \text{ são dados por}$$

$$\text{diam}([A]) = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 5 & 13 \end{bmatrix},$$

$$\text{mid}([A]) = \begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 9/2 & 5/2 \end{bmatrix},$$

$$\|[A]\|_{\infty} = \max \{ \|[[-1; 9]]\| + \|[[-3; 4]]\|, \|[[2; 7]]\| + \|[[-4; 9]]\| \} = \max \{ 9 + 4, 7 + 9 \} = 16.$$

□

A seguir, a função *elementar* e a função *extensão intervalar natural* são definidas, sendo esta última uma extensão da função elementar baseada em operações intervalares.

Definição 2.3.11. Função elementar.

Uma função contínua $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é chamada de elementar quando elementos do espaço \mathbb{R}^n são transformados em elementos do espaço \mathbb{R}^m .

□

Definição 2.3.12. Extensão intervalar natural.

Seja $y = h(x)$ em que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua elementar. A extensão intervalar natural $\Delta\{h\}$ é obtida substituindo a variável elementar x pelo intervalo $[x]$ e as operações elementares pelas intervalares.

□

O mapeamento de cada elemento do conjunto vetor intervalar $[x]$ pela função h conduz ao conjunto imagem exato. A extensão intervalar natural $\Delta\{h\}$ busca representar a imagem $h([x])$ por uma caixa que a contém. Então, o resultado obtido pode ser mais conservador. Este resultado é apresentado no fato a seguir.

Fato 2.3.1. (Alamo et al., 2005).

A extensão intervalar natural $\Delta\{h\}$ associada a uma função contínua elementar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobre um vetor intervalar $[x] \subseteq \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$h([x]) \subseteq \Delta\{h\}([x]). \quad (2.21)$$

□

Uma maneira de diminuir o conservadorismo da imagem causado pela extensão intervalar natural é determinar a função *extensão do valor médio*. Antes de introduzir essa função, um conjunto e a soma de Minkowski de dois conjuntos genéricos são definidos. A soma de Minkowski representa a soma dos elementos dos conjuntos, ou seja, a soma é realizada ponto a ponto.

Definição 2.3.13. Conjunto.

Conjunto é um agrupamento de elementos com características similares como conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos, por exemplo.

□

Definição 2.3.14. Soma de Minkowski (Alamo et al., 2005).

A soma de Minkowski de dois conjuntos Z_1 e Z_2 é definida como $Z_1 \oplus Z_2 = \{z_1 + z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\}$.

□

Fato 2.3.2. Extensão do valor médio (Alamo et al., 2005).

Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função elementar, cujas derivadas são contínuas no conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, e $\hat{x} \in \mathcal{X}$ um vetor elementar. Assim,

$$h(\mathcal{X}) \subseteq h(\hat{x}) \oplus \nabla_x h(\mathcal{X})(\mathcal{X} - \hat{x}), \quad (2.22)$$

em que $\nabla_x h(\mathcal{X})$ é a Jacobiana de $h(x)$ calculada em relação a x e avaliada em \mathcal{X} .

□

A extensão do valor médio é uma função que lembra a linearização analítica com o ponto de equilíbrio igual ao centro \hat{x} do conjunto \mathcal{X} . Entretanto, a Jacobiana é avaliada sobre o conjunto \mathcal{X} em vez do ponto de equilíbrio \hat{x} .

Observação 2.3.2. Note que a extensão do valor médio não assume que \mathcal{X} seja necessariamente um intervalo $[x]$. A função $\nabla_x h(\mathcal{X})$ pode ser sobrestimada por uma extensão intervalar $\Delta \{\nabla_x h(\mathcal{X})\}$, que não é necessariamente uma extensão intervalar natural $\Delta \{\nabla_x h([x])\}$. Portanto, a saída da extensão do valor médio não é necessariamente um intervalo. Caso $\nabla_x h(\mathcal{X})$ seja uma extensão intervalar natural $\Delta \{\nabla_x h([x])\}$, a extensão do valor médio retorna um intervalo menos conservador do que a extensão intervalar natural $\Delta \{h\}([x])$ (Jaulin e Kieffer, 2001).

□

Considere as funções elementares $\text{sen}(x)$, x^2 , $\exp(x)$, $\ln(x)$ e \sqrt{x} . Desde que $[x] \in \mathbb{R}_+$ e as funções elementares sejam monotonicamente crescentes, as extensões intervalares naturais podem ser obtidas diretamente avaliando os limites de $[x]$ na função elementar. Por exemplo, considere a função elementar $h(x) = \exp(x)$ e o intervalo $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] \in \mathbb{R}_+$. A extensão intervalar natural correspondente é

$$\Delta \{h\}([x]) = \left[\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x}) \right].$$

Há dois problemas relacionados à aritmética intervalar denominados efeito de dependência (do inglês, *dependency effect*) e efeito de alargamento (do inglês, *wrapping effect*) (Moore et al., 2009). Ressalta-se que tais problemas não são específicos da aritmética intervalar, e sim de transformações de variáveis elementares que são substituídas por conjuntos. O efeito de dependência ocorre quando uma dada variável aparece mais de uma vez em uma operação, pois o efeito de cada uma delas é considerado de forma independente. Isso justifica a não existência do elemento nulo. Por sua vez, o efeito de alargamento é explicado pelo autor com base em um problema de valor inicial para um sistema de n equações diferenciais ordinárias. Em geral, ainda que um conjunto de pontos iniciais seja representado por um dado conjunto, como um intervalo, as soluções obtidas ao longo do tempo não são caracterizadas pelo mesmo tipo de conjunto. Dado que o conjunto solução é sobrestimado pelo mesmo tipo de conjunto inicial, pontos

extras são incluídos, caracterizando, assim, o efeito de alargamento. Embora o efeito de alargamento seja explicado para casos multidimensionais, ele também pode ocorrer em casos unidimensionais (Jaulin e Kieffer, 2001).

A partir de (2.21), infere-se que a extensão intervalar natural não é única, pois diferentes extensões intervalares naturais podem ser obtidas reescrevendo uma função elementar, já que existe o efeito de alargamento. Além disso, as diferentes extensões intervalares naturais podem conduzir a resultados cada vez mais imprecisos. Entretanto, a extensão do valor médio (2.22) busca reduzir tal conservadorismo, provendo uma imagem de menor diâmetro em relação à mesma extensão intervalar natural escolhida.

Exemplo 2.3.4. Considere as seguintes funções elementares equivalentes $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h_1(x,y) = (x - y)^2$, $h_2(x,y) = (x - y)(x - y)$ e $h_3(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Para os intervalos $[x] = [1;3]$ e $[y] = [2;9]$, as imagens correspondentes são:

$$\Delta\{h_1\}([x],[y]) = [0;64], \Delta\{h_2\}([x],[y]) = [-8;64], \Delta\{h_3\}([x],[y]) = [-49;86].$$

O Exemplo 2.3.4 trata um caso unidimensional de transformação. A menor quantidade de vezes que as variáveis intervalares podem aparecer corresponde à extensão intervalar natural $\Delta\{h_1\}([x],[y])$, por isso a imagem retornada tem o menor diâmetro intervalar. Entretanto, nem sempre a escolha de um formato da função elementar com o menor número de vezes que as variáveis aparecem na função torna a imagem do conjunto mínima devido ao efeito de alargamento. Para isso, deve-se garantir que a função h e os operadores elementares sejam contínuos e as variáveis apareçam uma única vez (Jaulin e Kieffer, 2001).

□

2.3.3 Conceitos Básicos de Elipsoides e Polítopos Convexos

Nesta seção vários tipos de conjuntos são matematicamente caracterizados. Um *poliedro* é um conjunto formado pela interseção de uma quantidade finita de *semiespaços* fechados. Quando o poliedro é limitado, este é chamado de *politopo*. Um conjunto convexo pode ser caracterizado como aquele no qual a semirreta traçada por dois pontos interiores quaisquer está confinada no conjunto. Há várias maneiras de representar um *politopo convexo*, tais como representação por semiespaços H^{rep} (do inglês, *half spaces representation*), vértices V^{rep} e geradores G^{rep} . Na primeira representação, o politopo convexo é definido como a interseção entre n_g semiespaços delimitados por n_g hiperplanos (Chisci et al., 1998), sendo o número deles a medida da complexidade da representação. Na segunda representação, o politopo convexo é originado de um conjunto de n_g vértices. Na terceira representação, o politopo convexo é formado por n_g geradores de um zonotopo. Ressalta-se que G^{rep} representa apenas politopos convexos centralmente simétricos, V^{rep} politopos convexos e H^{rep} poliedros em geral. Ao representar um dado politopo convexo por semiespaços, embora o número de

vértices possa ser maior devido ao aumento de dimensão e de complexidade, o número de geradores é menor. Assim, percebe-se que o custo computacional de se trabalhar com zonotopos é menor.

Definição 2.3.15. Faixa (Rego, 2016).

Uma faixa (do inglês, *strip*) é definida como

$$\mathcal{S} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \rho\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.23)$$

em que $\rho \in \mathbb{R}_+$ representa a largura da faixa, $d \in \mathbb{R}$ representa o deslocamento da faixa no espaço Euclidiano, e $c \in \mathbb{R}^n$ representa a direção da faixa. Além disso, $v_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d + \rho\}$ e $v_- = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d - \rho\}$ são os hiperplanos paralelos que delimitam o conjunto \mathcal{S} .

□

Definição 2.3.16. Poliedro: Representação por Semiespaços (Le et al., 2013a).

Sejam $H \in \mathbb{R}^{n_g \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^{n_g}$ uma matriz e um vetor elementar, respectivamente. O poliedro $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\mathcal{P} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq b\}. \quad (2.24)$$

□

Caso o poliedro seja limitado, o conjunto formado é um politopo. Note que tomar a i -ésima linha $\text{lin}_i(H)$ e o i -ésimo elemento b_i é o mesmo que definir um semiespaço delimitado por um hiperplano (2.23).

Definição 2.3.17. Politopo convexo: Representação por Vértices (Le et al., 2013a).

Para um conjunto finito de pontos $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_g}\}$, o politopo \mathcal{P} pode ser definido como o envoltório convexo (do inglês, *convex hull*) do conjunto \mathcal{V} :

$$\mathcal{P} = \text{conv}(\mathcal{V}) \triangleq \left\{ a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{n_g} v_{n_g} : a_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^{n_g} a_i = 1, v_i \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (2.25)$$

□

Definição 2.3.18. Zonotopo (Bo et al., 2013; Scott et al., 2016; Rego, 2016).

Sejam $G^x = \begin{bmatrix} g_1^x & g_2^x & \dots & g_{n_g}^x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n_g}$ e $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ a matriz geradora e o centro do zonotopo \mathcal{X} , respectivamente. Além disso, seja $\xi \in \mathbb{R}^{n_g}$ um vetor elementar que pertence à caixa unitária $[\Phi]^{n_g}$, tal que $\|\xi\|_\infty \leq 1$. O zonotopo $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ é definido como

(Scott et al., 2016)

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &\triangleq \{\hat{x} + G^x \xi : \xi \in [\Phi]^{n_g}, \|\xi\|_\infty \leq 1\} \\ &= \left\{ \hat{x} + \sum_{j=1}^{n_g} \xi_j g_j^x : -1 \leq \xi_j \leq 1 \right\} \\ &= \hat{x} \oplus G^x [\Phi]^{n_g}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

\mathcal{X} é um paralelotopo se em (2.26) $n_g = n$ e G^x for invertível (Bo et al., 2013). \mathcal{X} é um intervalo se em (2.26) $n_g = n$ e G^x for uma matriz diagonal (Rego, 2016). Assim, é possível representar um intervalo qualquer $[x] \in \mathbb{R}^n$ por meio de zonotopo analogamente a (2.16):

$$[x] = \text{mid}([x]) \oplus \frac{1}{2} \text{diag}(\text{diam}([x])) [\Phi]^n,\tag{2.27}$$

em que $\text{diag}(\bullet)$ retorna uma matriz diagonal.

□

Observação 2.3.3. Na literatura, diferentes notações para um zonotopo são encontradas. Por exemplo, em (Alamo et al., 2005), um zonotopo \mathcal{X} com centro \hat{x} e matriz geradora G^x é representado pela soma de Minkowski $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x [\Phi]^{n_g}$. Em (Combastel, 2015), a representação do mesmo zonotopo é dada por $\mathcal{X} = \mathcal{Z}(\hat{x}, G^x)$ ou $\mathcal{X} = \langle \hat{x}, G^x \rangle$. A notação adotada neste trabalho faz uso da soma de Minkowski, pois é a forma mais usual de representar conjuntos zonotópicos na literatura.

□

Três exemplos são propostos a seguir usando pacotes de extensão do software MATLAB[®]. O primeiro exemplo ilustra como gerar o mesmo politopo por meio das representações H^{rep} , V^{rep} e G^{rep} . O segundo deles apresenta graficamente o resultado da soma de duas caixas em \mathbb{R}^2 . Por fim, o terceiro exemplo gera três tipos de politopos especiais em \mathbb{R}^3 : caixa ou intervalo, paralelotopo e zonotopo. O primeiro exemplo é proposto no pacote de extensão *Multi-Parametric Toolbox* (MPT), enquanto os restantes no pacote de extensão *INTerval LABORatory* (INTLAB). Esta escolha dos algoritmos é realizada porque o pacote MPT permite tratar todos os conjuntos definidos neste trabalho, enquanto o pacote INTLAB é mais particular e trata apenas aritmética afim, isto é, zonotopos em geral.

Exemplo 2.3.5. Considere o mesmo politopo convexo \mathcal{P} representado por: (a) H^{rep} ,

$$H = \begin{bmatrix} 0,0806 & 0,2357 & 0,2417 & -0,0806 & -0,2357 & -0,2417 \\ -0,2417 & -0,2357 & -0,0806 & 0,2417 & 0,2357 & 0,0806 \end{bmatrix}^T,$$

$$k = [0,9670 \ 0,9428 \ 0,9670 \ 0,9670 \ 0,9428 \ 0,9670]^T, \text{ (b) } V^{\text{rep}},$$

$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$, e (c) G^{rep} , $\mathcal{X} = 0_{2 \times 1} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} [\Phi]^3$. O seguinte algoritmo gera cada uma das representações desejadas:

```
% Algoritmo que gera o mesmo politopo
%  $H^{\text{rep}}$ 
h1 = [0.0806 0.2357 0.2417 -0.0806 -0.2357 -0.2417];
h2 = [-0.2417 -0.2357 -0.0806 0.2417 0.2357 0.0806];
H = [h1 ; h2]; % Matriz H
k = [0.9670 0.9428 0.9670 0.9670 0.9428 0.9670]'; % vetor k
X1 = Polyhedron('A',H,'b',k'); % gera o politopo por  $H^{\text{rep}}$ 
%  $V^{\text{rep}}$ 
V = [-6 -6 ; -4 0 ; 0 4 ; 6 6 ; 4 0 ; 0 -4]; % vértices
X2 = Polyhedron(V); % gera o politopo por  $V^{\text{rep}}$ 
%  $G^{\text{rep}}$ 
c = [0 ; 0]; % centro do zonotopo
G = [1 2 3; 3 2 1]; % geradores do zonotopo
B = Polyhedron('lb',[-1 -1 -1]','ub',[1 1 1]'); % caixa unitária
X3 = c + G*B; % politopo gerado segundo a metodologia  $G^{\text{rep}}$ 
```

A Figura 2.2 ilustra o politopo convexo definido de três maneiras diferentes.

□

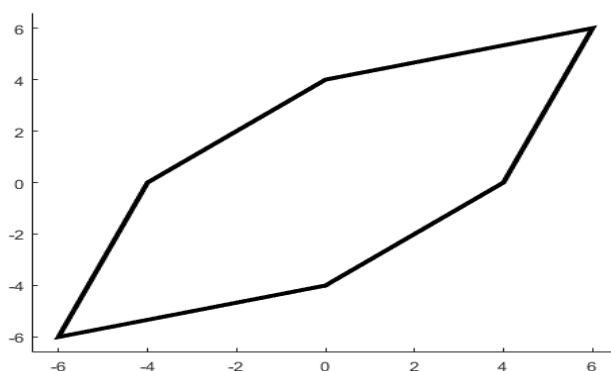


Figura 2.2: Representação em \mathbb{R}^2 do mesmo politopo convexo por H^{rep} , V^{rep} e G^{rep} (plot_politopo_convexo @).

Exemplo 2.3.6. Sejam \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 duas caixas de centros $\hat{x}_1 = [0,5 \ 0,5]^T$ e $\hat{x}_2 = [1 \ 1]^T$, e matrizes geradoras $G_1 = G_2 = I_{2 \times 2}$. A soma de \mathcal{X}_1 com \mathcal{X}_2 resulta na caixa \mathcal{X}_3 com centro $\hat{x}_3 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ e matriz geradora $G_3 = [G_1 \ G_2]$. O seguinte algoritmo gera as

figuras correspondentes:

```
% Algoritmo que gera a soma de duas caixas
% Primeira caixa
x1 = 0.5*ones(2,1); % centro da caixa X1
G1 = eye(2); % matriz geradora da caixa X1
B1 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo
X1 = x1 + G1*affari(B1); % gera a variável intervalar
plotaffari(X1) % gera o gráfico correspondente da caixa X1
hold % mantém a curva anterior na primeira figura
% Segunda caixa
x2 = ones(2,1); % centro da caixa X2
G2 = eye(2); % matriz geradora da caixa X2
B2 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo
X2 = x2 + G2*affari(B2); % gera a variável intervalar
plotaffari(X2) % gera o gráfico correspondente da caixa X2
% Terceira caixa
X3 = X1 + X2; % soma das outras caixas
plotaffari(X3) % gera a figura correspondente da caixa
```

Os conjuntos gerados pelo código anterior são apresentados na Figura 2.3.

□

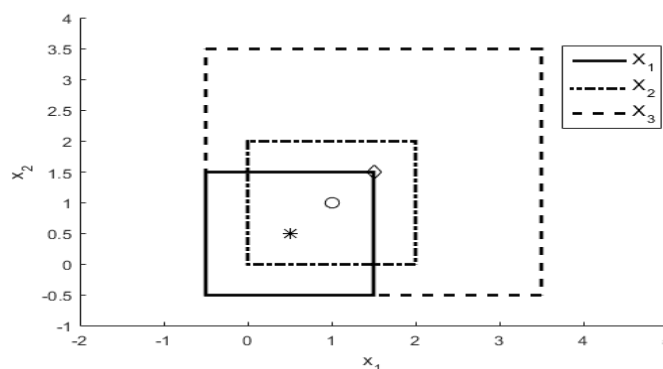


Figura 2.3: Representação em \mathbb{R}^2 da soma de duas caixas (plot_soma_duas_caixas @).

Exemplo 2.3.7. Sejam $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ os centros dos polítopos de matrizes geradoras $G_1, G_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $G_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. G_1, G_2 e G_3 caracterizam intervalo, paralelepípedo e zonotopo, respectivamente. O seguinte algoritmo gera as figuras correspondentes:

```

% Algoritmo que gera uma caixa ou intervalo
x1 = ones(3,1); % centro da caixa
G1 = eye(3); % matriz geradora
B1 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo
Z1 = x1 + G1*affari(B1); % gera a variável znotópica
plotaffari(Z1) % gera a figura correspondente da caixa
% Algoritmo que gera um paralelotopo
x2 = ones(3,1); % centro do paralelotopo
G2 = [1 0 1 ; 0 1 0 ; 0 0 1 ]; % matriz geradora
B2 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo
Z2 = x2 + G2*affari(B2); % gera a variável znotópica
figure % gera uma nova figura
plotaffari(Z2) % gera a figura correspondente do paralelotopo
% Algoritmo que gera um znotopo
x3 = ones(3,1); % centro do znotopo
G3 = [1 -1 0 -1; 0 -1 3 1; -1 -1 0 -1]; % matriz geradora
B3 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1) ; infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)];
Z3 = x3 + G3*affari(B3); % gera a variável znotópica
figure % gera uma nova figura
plotaffari(Z3) % gera a figura correspondente do znotopo

```

Os conjuntos gerados pelo código anterior são apresentados na Figura 2.4.

□

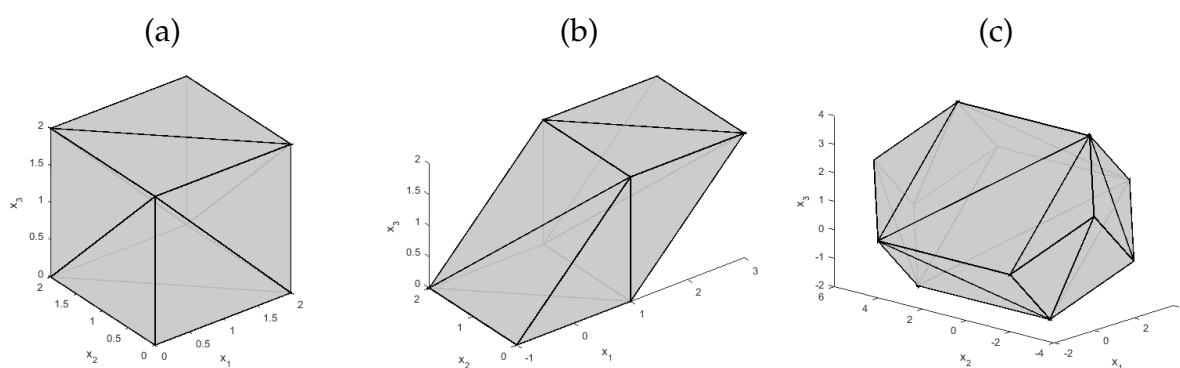


Figura 2.4: Representação em \mathbb{R}^3 de (a) uma caixa, (b) um paralelotopo e (c) um znotopo (plot_intervalo_paralelotopo_znotopo @).

Definição 2.3.19. Elipsoide (Scott et al., 2016).

Sejam $Q^e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ a matriz geradora e o centro do elipsoide \mathcal{X}^e , respectivamente. Além disso, seja $\xi \in \mathbb{R}^n$ um vetor elementar que pertence à caixa unitária $[\Phi]^n$,

tal que $\|\xi\|_2 \leq 1$. O elipsoide $\mathcal{X}^e \subset \mathbb{R}^n$ é definido como

$$\mathcal{X}^e \triangleq \{\hat{x} + Q^e \xi : \xi \in [\Phi]^n, \|\xi\|_2 \leq 1\}. \quad (2.28)$$

□

Zonotopo e elipsoide são transformações afins da caixa unitária $[\Phi]$, a diferença é que um zonotopo utiliza o vetor ξ com norma- ∞ , enquanto um elipsoide usa norma-2. Portanto, um elipsoide $\mathcal{X}^e = \mathcal{E}(\hat{x}, P^{ee})$, tal que $P^{ee} \triangleq Q^e (Q^e)^T$ é uma matriz simétrica positiva semidefinida, pode ser representado de forma análoga a (2.8) quando P^{ee} for invertível (Scott et al., 2016):

$$\mathcal{X}^e \triangleq \{e : (e - \hat{x})^T (P^{ee})^{-1} (e - \hat{x}) \leq 1\}. \quad (2.29)$$

No exemplo a seguir, os limites de um elipsoide em \mathbb{R}^2 são gerados pelo pacote computacional proposto por Kurzhanskiy e Varaiya (2006) segundo a forma (2.29).

Exemplo 2.3.8. Considere o elipsoide $\mathcal{E}(x^e, P^{ee})$, tal que $x^e = 0_{2 \times 1}$ e $P^{ee} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. O seguinte algoritmo é proposto para gerar os limites do elipsoide \mathcal{X}^e usando o *software* MATLAB®:

```
% Algoritmo que gera os limites de um elipsoide
% Centro do elipsoide
xe = [0 ; 0];
% Matriz geradora do elipsoide
Pee = [1 -1; -1 4];
% Gerando um objeto elipsoidal
obj = ellipsoid(xe,Pee);
% Gerando os limites do elipsoide correspondente
plot(obj)
```

O elipsoide gerado pelo código anterior é apresentado na Figura 2.5.

□

Polítopos convexos e zonótopos possuem complexidade arbitrária, ao contrário dos outros conjuntos que possuem complexidade fixa. A seguir, são apresentadas algumas propriedades de zonotopo.

Propriedade 2.3.6. Sejam os zonótopos $\mathcal{X}_1 = \hat{x}_1 \oplus G^{x_1}[\Phi]^{n_{x_1}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 = \hat{x}_2 \oplus G^{x_2}[\Phi]^{n_{x_2}} \subset \mathbb{R}^n$, e $R \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Zonótopos satisfazem às propriedades de soma de Minkowski, repre-

sentada por \oplus ,

$$\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = (\hat{x}_1 + \hat{x}_2) \oplus \begin{bmatrix} G^{x_1} & G^{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Phi]^{n_g^{x_1}} \\ [\Phi]^{n_g^{x_2}} \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

e de mapeamento linear

$$R\mathcal{X} = R\hat{x} \oplus RG^x[\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^k. \quad (2.31)$$

□

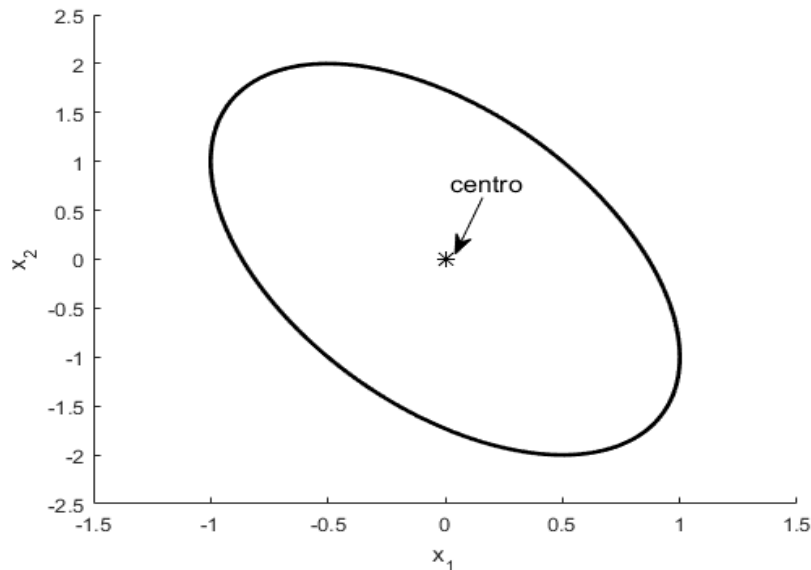


Figura 2.5: Representação em \mathbb{R}^2 de um elipse (gerando_elipse @).

Propriedade 2.3.7. A partir da soma de Minkowski (2.30), a permutação das colunas da matriz geradora G^x não altera o zonotopo formado (Le et al., 2013a).

□

Em geral, algoritmos que aproximam polítopos por paralelótopos ou zonótopos demandam menor tempo de processamento, mas tornam o conjunto estimado mais conservador (Chisci et al., 1998). Além disso, a simetria existente em zonótopos, intervalos, paralelótopos e elipsóides conduz a uma baixa representatividade de conjuntos fortemente assimétricos.

Observação 2.3.4. Intervalos não satisfazem (2.31) a menos que R seja diagonal. Paralelótopos e elipsóides não satisfazem (2.30). Em geral, a interseção entre zonótopos não é um zonotopo, dado que o conjunto resultante pode ser assimétrico, mas tal interseção

é fechada para politopos convexos. Ainda que a interseção entre politopos seja exata, a representação (2.24) apresenta elevado custo computacional. Por isso, a utilização de zonotopos tem ganhado muita popularidade (Scott et al., 2016).

□

Em (2.30), verifica-se uma dificuldade computacional, pois a complexidade de um zonotopo aumenta cada vez que dois zonotopos quaisquer são somados. Sendo assim, o operador redução \downarrow_φ é utilizado para reduzir a ordem n_g de um zonotopo, cuja ordem de redução é φ . A matriz geradora obtida $\downarrow_\varphi G^x$ deve satisfazer à propriedade de inclusão.

Proposição 2.3.1. Inclusão de um zonotopo (Combastel, 2015).

Seja $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g}$ um zonotopo e \downarrow_φ o operador redução de ordem φ . A matriz $\downarrow_\varphi G^x$ satisfaz à seguinte propriedade de inclusão:

$$\hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \hat{x} \oplus \downarrow_\varphi G^x[\Phi]^\varphi. \quad (2.32)$$

□

A inclusão (2.32) implica que o zonotopo de ordem reduzida $\hat{x} \oplus \downarrow_\varphi G^x[\Phi]^\varphi$ deve sempre conter o zonotopo original $\hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g}$. Essa propriedade naturalmente conduz à diminuição da precisão do zonotopo, visto que o tamanho, ou o volume, do conjunto reduzido tende a ser cada vez maior ao longo das iterações. O algoritmo de redução de zonotopo é apresentado a seguir.

Algoritmo 2.3.1. Redução de zonotopo (Combastel, 2005).

O algoritmo de redução de zonotopo é resumido na função

$$\downarrow_\varphi G^x = \text{reducao_zonotopo}(G^x, \varphi).$$

Seja $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^n$, em que $G^x \in \mathbb{R}^{n \times n_g}$, e φ a ordem de redução do zonotopo \mathcal{X} . Os procedimentos para obter o zonotopo de ordem reduzida $\downarrow_\varphi G^x$ são dados por:

- 1: Calcule a norma-2 de cada gerador ou coluna $g_j^x = \text{col}_j(G^x) \in \mathbb{R}^n$ da matriz G^x e ordene as colunas de forma decrescente:

$$G^{xs} = [g_1^x \ \cdots \ g_j^x \ \cdots \ g_{n_g}^x], \quad \|g_j^x\|_2 \geq \|g_{j+1}^x\|_2. \quad (2.33)$$

- 2: Se $n_g \leq \varphi$, então $\downarrow_\varphi G^x = G^{xs}$. Caso contrário, dada a matriz G^{xs} , cujas colunas g_j^x estão dispostas em ordem decrescente de norma-2, determine as matrizes

$$G_{>}^x = [g_1^x \ \cdots \ g_{\varphi-n}^x], \quad (2.34)$$

que são as primeiras $\varphi - n$ colunas de G^{xs} , e

$$G_{<}^x = \begin{bmatrix} g_{\varphi-n+1}^x & \cdots & g_{n_g}^x \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

que são as colunas restantes de G^{xs} .

3: Calcule a matriz

$$G^b = \text{diag}(|G_{<}^x| 1_{n_{g_{<}} \times 1}), \quad (2.36)$$

em que $|G_{<}^x|$ é o valor absoluto de cada elemento da matriz $G_{<}^x$, $1_{n_{g_{<}} \times 1}$ é o vetor de elementos unitários e $\text{diag}(\bullet)$ é a matriz diagonal retornada.

4: Calcule o zonotopo de ordem reduzida $\downarrow_{\varphi} G^x$ dado por

$$\downarrow_{\varphi} G^x = \begin{bmatrix} G_{>}^x & G^b \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

□

Note que para $\varphi = n$, $G_{<}^x = G^{xs}$ em (2.36), que corresponde à matriz geradora original G^x graças à Propriedade 2.3.7. Assim, todo zonotopo satisfaz à inclusão $\hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \hat{x} \oplus G^b[\Phi]^n$, pois $G^b \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a menor caixa que contém o zonotopo original G^x . A seguir é apresentado um exemplo de redução de zonotopo usando o pacote de extensão INTLAB.

Exemplo 2.3.9. Seja o zonotopo $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$, com $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ e $G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$. O seguinte algoritmo gera as figuras correspondentes ao zonotopo antes e depois da redução:

```
% Algoritmo que reduz um zonotopo com ordem de redução  $\varphi=2$ 
% zonotopo inicial
x = [-1 ; 1]; % centro do zonotopo
G = [1 -1 1; -1 1 1]; % matriz geradora
B = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo
X = x + G*affari(B); % gera a variável znotópica
% redução de zonotopo para  $\varphi=2$ 
rnorm = zeros(1,size(G,2)); % armazena a norma-2 das colunas de G
for j=1:size(G,2)
rnorm(j) = norm(G(:,j),2); % norma-2 associada a colunas de G
end
rcresc = sort(rnorm); % ordem crescente de norma-2
rdec = zeros(size(rcresc)); % será colocado na ordem decrescente
for j=1:size(G,2)
rdec(j) = rcresc(size(G,2)+1-j);
```

```

end
% Reordenando as colunas de G em ordem decrescente de norma-2
Gdec = zeros(size(G));
k = zeros(1,size(G,2)); % sinaliza se a coluna de G já foi selecionada
for m=1:size(G,2)
for j=1:size(G,2)
if (rdec(m)==rnorm(j) && k(j)==0)
Gdec(:,m) = G(:,j);
k(j) = 1; % mostra que essa coluna deve ser esquecida
break % pula direto para o for externo, isso evita sobrepor ...
% a coluna m ao varrer o for interno e encontrar outra coluna com a
% mesma norma
end
end
end
φ = 2; % ordem de redução
Gmaior = Gdec(:,1:φ-size(G,1));
Gmenor = Gdec(:,φ-size(G,1)+1:size(G,2));
bGmenor = diag(abs(Gmenor)*ones(size(Gmenor,2),1));
Gbarra = [Gmaior bGmenor]; % redução obtida

B2 = [infsup(-1,1) ; infsup(-1,1)]; % hipercubo do zototopo reduzido
X2 = x + Gbarra*affari(B2); % zototopo reduzido

hold on % permite sobrepor figuras
plotaffari(X)
plotaffari(X2)

```

As matrizes geradoras G^x e \bar{G}^x associadas aos zototopos \mathcal{X} e \mathcal{X}_2 , respectivamente, são:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{G} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os zototopos gerados são apresentados na Figura 2.6. Percebe-se que o zototopo de ordem reduzida possui uma área maior que o zototopo inicial devido à propriedade de inclusão. A diminuição da precisão do conjunto reduzido simplifica a representação computacional.

□

O teorema a seguir permite representar um zototopo \mathcal{X} pela menor caixa que o contém.

Teorema 2.3.1. Envoltório intervalar de um zonotopo (Rego, 2016).

Sejam $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^n$ o zonotopo e $rs(G^x)$ o somatório do valor absoluto dos elementos das linhas de G^x que formam uma matriz diagonal do tipo $rs(G^x)_{i,i} \triangleq \sum_{j=1}^{n_g} |g_{i,j}^x|$.

A menor caixa que contém o zonotopo \mathcal{X} é dada por $\hat{x} \oplus rs(G^x)[\Phi]^n$, que é denominado envoltório intervalar de \mathcal{X} . Portanto, o envoltório intervalar de um zonotopo \mathcal{X} pode ser representado como a extensão natural

$$\Delta\{\mathcal{X}\} \triangleq \hat{x} \oplus rs(G^x)[\Phi]^n. \quad (2.38)$$

□

Observação 2.3.5. Caso seja utilizada álgebra intervalar para computar o zonotopo (2.26), o resultado obtido é a menor caixa que contém tal zonotopo dado por (2.38).

□

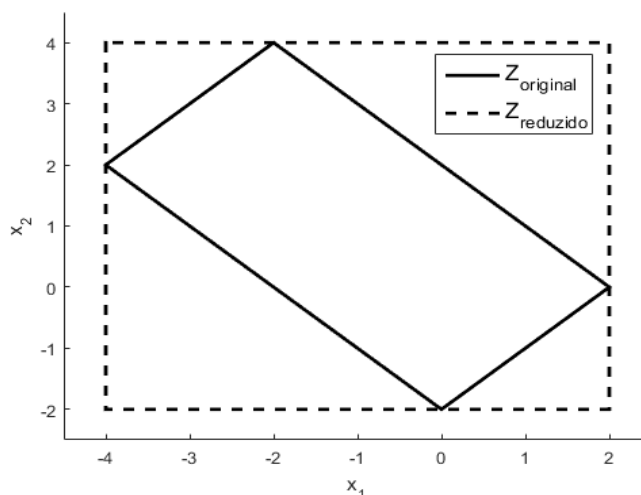


Figura 2.6: Exemplo de um zonotopo antes e após sua redução (reducao_zonotopo @).

Às vezes, a matriz geradora de um zonotopo pode ser intervalar, sendo necessário transformá-la em uma matriz geradora elementar. Assim, o teorema a seguir permite obter uma matriz geradora elementar a partir da intervalar, gerando um zonotopo mais conservador.

Teorema 2.3.2. Inclusão de zonotopo: Generalização do método de Kühn (Alamo et al., 2005).

Considere uma família de zonotos representada por $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus [G^x][\Phi]^{n_g}$, em que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é o centro e $[G^x] \in \mathbb{R}^{n \times n_g}$ é a matriz geradora intervalar. A inclusão de zonotopo

$\diamond\{\mathcal{X}\}$ é definida como

$$\diamond\{\mathcal{X}\} \triangleq \hat{x} \oplus \left[\text{mid}([G^x]) \quad L \right] \begin{bmatrix} [\Phi]^{n_g} \\ [\Phi]^n \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

sendo $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonal dada por $l_{i,i} = \sum_{j=1}^{n_g} \frac{\text{diam}([g_{i,j}^x])}{2}$, $i = 1, \dots, n$.

Desse modo, $\mathcal{X} \subseteq \diamond\{\mathcal{X}\}$.

□

2.4 Transformação de Variáveis Aleatórias Gaussianas e Variáveis Zonotópicas

Esta seção apresenta os resultados de transformações afins e não lineares aplicadas em VAGs e variáveis zonotópicas (VZ), que são o cerne dos métodos de filtragem.

2.4.1 Caso Linear

Seja

$$Y = AX + b \quad (2.40)$$

uma transformação afim da variável X . Os dois fatos a seguir mostram que a transformação afim de uma VAG e uma VZ preserva a PDF e o conjunto original.

Fato 2.4.1. Transformação afim de uma VAG.

Seja $X \sim \mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$ uma VAG, em que \hat{x} é a média e P^{xx} é a matriz de covariância. A transformação afim $Y = AX + b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, resulta na VAG $Y \sim \mathcal{N}(\hat{y}, P^{yy})$, em que

$$\hat{y} = A\hat{x} + b, \quad (2.41)$$

$$P^{yy} = AP^{xx}A^T. \quad (2.42)$$

□

Fato 2.4.2. Transformação afim de uma variável zonotópica.

Seja $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g}$ uma VZ, em que \hat{x} é o centro e G^x é a matriz geradora. A transformação afim $\mathcal{Y} = A\mathcal{X} \oplus b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, resulta no zonotopo $\mathcal{Y} = \hat{y} \oplus G^y[\Phi]^{n_g}$, em que

$$\hat{y} = A\hat{x} + b, \quad (2.43)$$

$$G^y = AG^x. \quad (2.44)$$

□

Exemplo 2.4.1. Considere a transformação $y = Ax + b$, com $A = 1,5I_{2 \times 2}$ e $b = [0,5 \ 0,5]^T$, a VAG $X \sim \mathcal{N}(1_{2 \times 1}, I_{2 \times 2})$ e a VZ $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} [\Phi]^4$. Na Figura 2.7, a PDF de X , o conjunto zonotópico de \mathcal{X} e as transformações correspondentes são ilustrados.

□

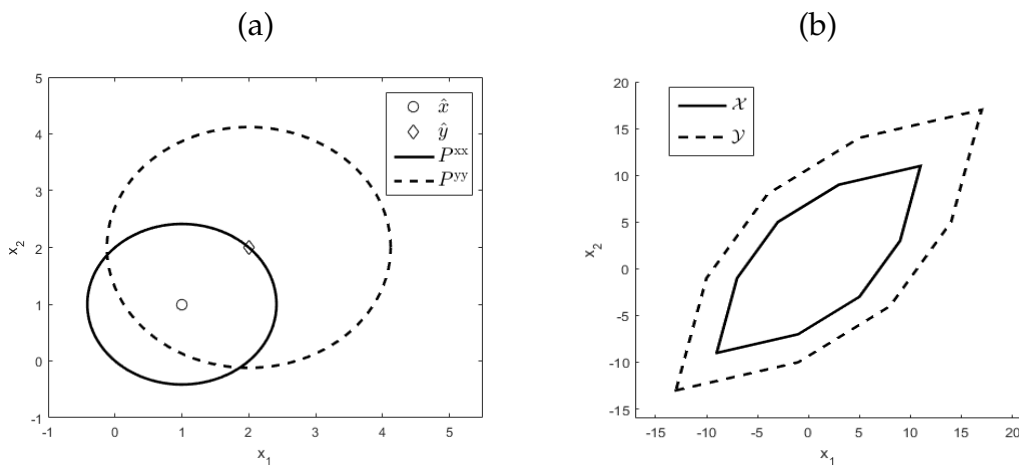


Figura 2.7: Exemplo da transformação afim $y = Ax + b$, representada por linha tracejada, de: (a) uma VAG X e (b) uma VZ \mathcal{X} , representadas por linha contínua (transformacao_linear @).

2.4.2 Caso Não Linear

Seja

$$Y = h(X_1, X_2, d) \tag{2.45}$$

uma transformação não linear das variáveis *a priori* X_1 e X_2 , em que d é um vetor determinístico. A transformação não linear de uma VAG e uma VZ não preserva a PDF e o conjunto original, mas uma aproximação dos mesmos é gerada.

Há duas abordagens comuns na literatura que permitem aproximar a PDF da VA Y : a estendida e a transformação *unscented* (UT). A abordagem estendida é baseada nas séries de Taylor truncadas nos termos de primeira ordem.

Fato 2.4.3. Transformação não linear de uma variável aleatória Gaussiana.

Sejam as VAGs $X_1 \sim \mathcal{N}(\hat{x}_1, P^{x_1x_1})$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\hat{x}_2, P^{x_2x_2})$, em que \hat{x}_1 e \hat{x}_2 são as médias e $P^{x_1x_1}$ e $P^{x_2x_2}$ são as matrizes de covariância correspondentes, e o vetor determinístico

d. Segundo a abordagem estendida, a VA Y dada por (2.45) é aproximada pela PDF Gaussiana $Y \sim \mathcal{N}(\hat{y}, P^{yy})$, em que

$$\hat{y} = h(\hat{x}_1, \hat{x}_2, d), \quad (2.46)$$

$$H_1 = \nabla_{x_1} h(\hat{x}_1, \hat{x}_2, d), \quad (2.47)$$

$$H_2 = \nabla_{x_2} h(\hat{x}_1, \hat{x}_2, d), \quad (2.48)$$

$$P^{yy} = H_1 P^{x_1 x_1} H_1^T + H_2 P^{x_2 x_2} H_2^T. \quad (2.49)$$

□

A UT aproxima a média $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ e a covariância $P^{yy} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ da VA Y por meio dos pontos sigma X^{sp} , que são vetores deterministicamente escolhidos. Os passos da UT são detalhados no algoritmo 2.4.1 segundo a sistematização proposta por Menegaz et al. (2015). Este algoritmo é apresentado de forma genérica, a fim de que qualquer transformação não linear de duas VAs seja utilizada.

Algoritmo 2.4.1. Transformação *unscented*.

O algoritmo da UT é resumido na função

$$[\hat{y}, P^{yy}, P^{x_1 y}] = \text{UT}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, P^{x_1 x_1}, P^{x_2 x_2}, d, h).$$

Seja a transformação não linear genérica

$$y = h(x_1, x_2, d), \quad (2.50)$$

em que x_1 e x_2 são VAs com médias $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^r$ e matrizes de covariância $P^{x_1 x_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P^{x_2 x_2} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, e $d \in \mathbb{R}^p$ é um vetor determinístico. Os procedimentos para obter a UT são apresentados a seguir.

- Gerar pontos sigma.

1: A partir das VAs x_1 e x_2 , defina o vetor de estados aumentado \tilde{x} como

$$\tilde{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

em que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ e $\tilde{n} = n + r$.

2: Com base nas matrizes $P^{x_1 x_1}$ e $P^{x_2 x_2}$, defina a matriz de covariância $P^{\tilde{x} \tilde{x}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ como

$$P^{\tilde{x} \tilde{x}} \triangleq \begin{bmatrix} P^{x_1 x_1} & 0_{n \times r} \\ 0_{r \times n} & P^{x_2 x_2} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

3: Compute os pontos sigma $\text{col}_j(X^{\text{sp}}) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ e os pesos correspondentes $\gamma_j, j = 1, \dots, 2\tilde{n}$, como

$$\begin{aligned} X^{\text{sp}} &\triangleq \begin{bmatrix} X^{\text{sp1}} \\ X^{\text{sp2}} \end{bmatrix} \\ &= \hat{x}1_{1 \times 2\tilde{n}} + \sqrt{\tilde{n}} \left[(P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \quad - (P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2\tilde{n}}, \quad (2.54)$$

em que $\text{col}_j(X^{\text{sp}})$ é a j -ésima coluna da matriz $X^{\text{sp}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times 2\tilde{n}}$, $1_{1 \times 2\tilde{n}} \in \mathbb{R}^{1 \times 2\tilde{n}}$ é o vetor de elementos unitários, $(\bullet)^{1/2}$ é a raiz quadrada matricial, que pode ser obtida pela fatoração de Cholesky. Além disso, $X^{\text{sp1}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ e $X^{\text{sp2}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ são partições da matriz X^{sp} .

- Transformar os pontos sigma.

Propague cada ponto sigma $\text{col}_j(X^{\text{sp1}})$ e $\text{col}_j(X^{\text{sp2}})$ pela transformação (2.50) gerando

$$\text{col}_j(Y^{\text{sp}}) = h\left(\text{col}_j(X^{\text{sp1}}), \text{col}_j(X^{\text{sp2}}), d\right), \quad (2.55)$$

com $j = 1, \dots, 2\tilde{n}$.

- Gerar estimativas de média e covariância.

Com base em (2.55), estime a média \hat{y} e as covariâncias P^{yy} e P^{x_1y} como

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^{2\tilde{n}} \gamma_j \text{col}_j(Y^{\text{sp}}), \quad (2.56)$$

$$P^{yy} = \sum_{j=1}^{2\tilde{n}} \gamma_j \left[\text{col}_j(Y^{\text{sp}}) - \hat{y} \right] \left[\text{col}_j(Y^{\text{sp}}) - \hat{y} \right]^T, \quad (2.57)$$

$$P^{x_1y} = \sum_{j=1}^{2\tilde{n}} \gamma_j \left[\text{col}_j(X^{\text{sp1}}) - \hat{x}_1 \right] \left[\text{col}_j(Y^{\text{sp}}) - \hat{y} \right]^T. \quad (2.58)$$

Assim como P^{x_1y} , a matriz de covariância P^{x_2y} pode ser obtida.

□

O fato a seguir apresenta o resultado da aplicação da UT nas VAs X_1 e X_2 .

Fato 2.4.4. Transformação *unscented*.

Sejam $X_1 \sim \mathcal{N}(\hat{x}_1, P^{x_1x_1})$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(\hat{x}_2, P^{x_2x_2})$ VAGs *a priori*, com médias \hat{x}_1 e \hat{x}_2 e covariâncias $P^{x_1x_1}$ e $P^{x_2x_2}$, tal que $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ são realizações das VAs correspondentes, e $d \in \mathbb{R}^p$ o vetor determinístico. Dada a transformação não linear (2.45), a UT das VAs X_1 e X_2 resulta em

$$[\hat{y}, P^{yy}, P^{x_1y}] = \text{UT}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, P^{x_1x_1}, P^{x_2x_2}, d, h). \quad (2.59)$$

□

A VZ $\mathcal{Y} = \hat{y} \oplus G^y[\Phi]^{n_g^y} \subset \mathbb{R}^m$ associada a (2.45) é obtida por meio de quatro sobrestimações sucessivas da transformação exata. Primeiramente, a transformação exata $h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d)$ é sobrestimada usando a extensão do valor médio (2.22)

$$h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d) \subseteq h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d) \oplus (\nabla_{x_1} h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d)) G^{x_1}[\Phi]^{n_g^{x_1}}.$$

Em seguida, a função $h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)$ é sobrestimada por uma extensão intervalar natural ou pela extensão do valor médio, gerando o zonotopo $\text{mid}(h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)) \oplus U[\Phi]^{n_g^u}$, e a função $(\nabla_{x_1} h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d)) G^{x_1}$ é sobrestimada por uma extensão intervalar, a fim de que seja retornado um conjunto intervalar

$$h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d) \subseteq \text{mid}(h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)) \oplus U[\Phi]^{n_g^u} \oplus [M][\Phi]^{n_g^{x_1}}.$$

Por fim, o zonotopo $0_{m \times 1} \oplus [M][\Phi]^{n_g^{x_1}}$ é sobrestimado por outro zonotopo usando a inclusão de zonotopo (2.39)

$$h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d) \subseteq \text{mid}(h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)) \oplus U[\Phi]^{n_g^u} \oplus \diamond \{0_{m \times 1} \oplus [M][\Phi]^{n_g^{x_1}}\}.$$

Assim, $\hat{y} = \text{mid}(h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d))$, $G^y = [U \ G^b]$, G^b é a matriz geradora da inclusão de zonotopo $\diamond \{0_{m \times 1} \oplus [M][\Phi]^{n_g^{x_1}}\}$ e $n_g^y = n_g^u + n + n_g^{x_1}$.

O fato a seguir mostra o resultado da aplicação de (2.45) sobre as VZs \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 .

Fato 2.4.5. Transformação não linear de uma variável zonotópica (Alamo et al., 2005).

Sejam os zonotosos $\mathcal{X}_1 = \hat{x}_1 \oplus G^{x_1}[\Phi]^{n_g^{x_1}} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{X}_2 = \hat{x}_2 \oplus G^{x_2}[\Phi]^{n_g^{x_2}} \subset \mathbb{R}^r$, em que \hat{x}_1 e \hat{x}_2 são os centros e G^{x_1} e G^{x_2} são as matrizes geradoras correspondentes, e o vetor determinístico $d \in \mathbb{R}^p$. Com base na extensão do valor médio (2.22), a transformação não linear $\mathcal{Y} = h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d)$ é aproximada pelo zonotopo

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \hat{y} \oplus G^y[\Phi]^{n_g^y} \subset \mathbb{R}^m \\ &= \text{mid}(h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)) \oplus [U \ G^b][\Phi]^{n_g^y}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

em que U é a matriz geradora do conjunto $h(\hat{x}_1, \mathcal{X}_2, d)$, G^b é a matriz geradora da inclusão de zonotopo $\diamond \{0_{m \times 1} \oplus [M][\Phi]^{n_g^{x_1}}\}$ dada por (2.39), $[M] = \Delta \{\nabla_{x_1} h(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, d)\} G^{x_1}$ é uma matriz intervalar e $n_g^y = n_g^u + n + n_g^{x_1}$.

□

Exemplo 2.4.2. Considere a transformação não linear de coordenadas polares para coordenadas cartesianas $y = [x_1 \cos(x_2) \ x_1 \sin(x_2)]^T$, em que x_1 é o raio e x_2 é o ângulo, as VAGs $X_1 \sim \mathcal{N}(3, 1)$ e $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e as VZs $\mathcal{X}_1 = 3 \oplus 3[\Phi]$ e $\mathcal{X}_2 = 0 \oplus 3[\Phi]$. Na Figura

2.8, as VAs X_1 e X_2 , representadas pela VA aumentada \tilde{X} , as VZs \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , representadas pela VZ aumentada $\tilde{\mathcal{X}}$, e as transformações correspondentes são ilustradas.

□

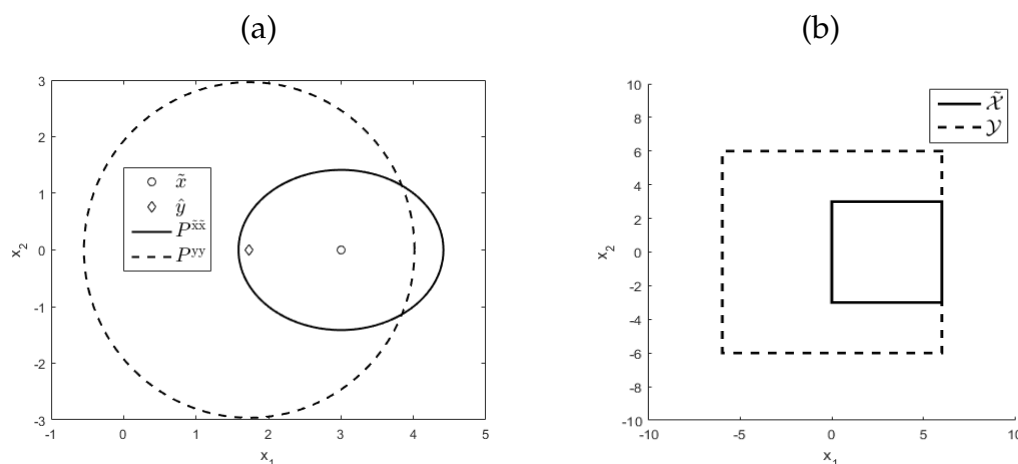


Figura 2.8: Exemplo da transformação não linear $y = [x_1 \cos(x_2) \quad x_1 \sin(x_2)]^T$, representada por linha tracejada, de: (a) VAGs X_1 e X_2 , e (b) VZs \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 , representadas por linha contínua e pelas variáveis aumentadas \tilde{X} e $\tilde{\mathcal{X}}$, respectivamente (transformacao_nao_linear @).

2.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou um resumo das ferramentas necessárias para compreensão de abordagens que serão discutidas nos capítulos seguintes. A VAG e a VZ foram definidas com maior enfoque, dado que servirão de base no contexto de estimação de estados. Além disso, ressaltou-se que a transformação afim de uma VAG e uma VZ preserva a representação original das variáveis. Por outro lado, a transformação não linear de uma VAG e uma VZ não preserva a representação original, mas uma aproximação da distribuição ou conjunto da representação original. A motivação em caracterizar incertezas por meio de VA está nos valores não previsíveis assumidos pelas incertezas ao longo dos eventos. A motivação em caracterizar incertezas por meio de VZ está relacionada a elas serem limitadas por um conjunto compacto independentemente do padrão de valores assumidos, ou seja, não é necessário conhecer o comportamento das incertezas, somente seus valores limites.

Métodos de Estimação de Estados

“Na casa de meu Pai há muitas moradas; do contrário, já vo-lo teria dito; pois vou preparar-vos lugar.”

Jo 14:2

3.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados métodos de filtragem estocástica e zonotópica. Na Seção 3.2, filtros estocásticos baseados no filtro de Kalman são apresentados para sistemas não lineares. Como esses filtros produzem estimativas *aproximadas*, também são apresentadas abordagens que levam em consideração restrições nos estados para melhorar as estimativas, como transformação *unscented* com restrição intervalar, otimização e truncamento da PDF. Posteriormente, a Seção 3.3 trata da estimação de estados de sistemas lineares e não lineares por meio de técnicas denominadas associação de conjuntos. O método de filtragem é denominado *garantido* desde que os estados do sistema pertençam ao conjunto estimado, atendidas as hipóteses iniciais com relação aos limites dos ruídos. Neste trabalho, são apresentadas duas abordagens de filtragem zonotópica. Uma delas é mostrada a partir do observador de Luenberger para sistemas lineares e a outra é formulada tanto para sistemas lineares quanto não lineares com base em zonotopos, aproximações intervalares e faixas. Enfim, a Seção 3.4 conclui este capítulo, discutindo vantagens e desvantagens das abordagens apresentadas.

3.2 Métodos de Filtragem Estocástica

Filtro é uma solução para o problema de estimação de estados. Algoritmos baseados no filtro de Kalman (do inglês, *Kalman Filter* (KF)) são muito utilizados desde a proposição do mesmo em (Kalman et al., 1960). O KF é uma ferramenta destacada na literatura devido à sua otimalidade na estimação de estados, a qual é obtida para sistemas dinâmicos lineares submetidos a ruídos Gaussianos. Assim, o KF é um estimador de mínima variância e máxima verossimilhança, ou seja, as estimativas geradas são as mais precisas e prováveis, respectivamente (Jazwinski, 2007; Gelb, 1974). Desde a publicação do KF padrão, outros filtros baseados na versão original têm sido propostos

para sistemas não lineares, tais como o filtro de Kalman estendido (EKF) e o *unscented* (UKF). O EKF aproxima o modelo matemático não linear (1.1)-(1.2) por uma expansão em séries de Taylor, enquanto o UKF utiliza a transformação *unscented* (UT) para gerar os pontos sigma, que são vetores deterministicamente escolhidos, e obter estimativas relacionadas ao vetor aleatório (VA) transformado. Em geral, as soluções obtidas pelos filtros estocásticos no contexto não linear são aproximadas, dado que são baseados em VAs Gaussianas (VAG), cuja PDF não é preservada em transformações não lineares. Basicamente, o KF é composto de duas etapas: *predição* e *assimilação de dados*.

Em alguns casos, além do modelo matemático do sistema (1.1)-(1.2) e das observações y_k disponíveis, informações *a priori* sobre o sistema são conhecidas e podem ser transformadas em restrições nos estados. As restrições nos estados podem ser de igualdade e desigualdade. Originalmente, as estimativas dos algoritmos de filtragem de Kalman não satisfazem restrições nos estados. Assim, diferentes abordagens têm sido propostas: transformação *unscented* com restrição intervalar (ICUT) (Kottakki et al., 2014), otimização de uma função de custo (Rengaswamy et al., 2013) e truncamento da função densidade de probabilidade (PDF) (Boada et al., 2016).

Por conveniência, a formulação geral do problema (1.1)-(1.2) é repetida:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1), \quad (3.1)$$

$$y_k = h(x_k, v_k, k), \quad (3.2)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ são os modelos de processo e medição, respectivamente, e $x_k \in \mathbb{R}^n$ os estados a estimar sujeitos às restrições intervalares

$$a_{i,k} \leq x_{i,k} \leq b_{i,k}, \quad (3.3)$$

com $a_{i,k} \leq b_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Deseja-se estimar a VA *a posteriori* X_k por meio de média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} .

3.2.1 Filtro de Kalman

Considere o sistema dinâmico linear a tempo discreto

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + B_{k-1}^g w_{k-1}, \quad (3.4)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k^g v_k, \quad (3.5)$$

em que A_{k-1} , B_{k-1} , B_{k-1}^g , C_k e D_k^g são matrizes variantes no tempo, o superescrito g significa transformação linear de uma VAG, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados a estimar, $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entrada, $y_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $w_k \in \mathbb{R}^q$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ são os ruídos de processo e medição, respectivamente. Os ruídos w_{k-1} e v_k são considerados brancos, Gaussianos e não correlacionados, com média nula e covariância $E[w_k w_k^T] = Q_k$ e $E[v_k v_k^T] = R_k$, respectivamente. Assume-se que as estimativas dos estados iniciais \hat{x}_0

e P_0^{xx} , as matrizes de covariância Q_{k-1} e R_k , o vetor de entrada u_k , as observações y_k e as matrizes A_{k-1} , B_{k-1} , B_{k-1}^g , C_k e D_k^g são conhecidos para $k \geq 1$.

Espera-se que um ganho ótimo K_k seja encontrado, a fim de que o funcional de custo

$$J_k^{\text{MV}}(K_k) \triangleq \text{tr}(P_{k|k}^{\text{xx}}) \quad (3.6)$$

seja otimizado segundo o critério de mínima variância

$$K_k \triangleq \arg \min_{\hat{K}_k} J_k^{\text{MV}}(\hat{K}_k), \quad (3.7)$$

em que o superescrito MV no funcional de custo J indica mínima variância.

O algoritmo a seguir apresenta os passos do KF clássico ([Kalman et al., 1960](#)).

Algoritmo 3.2.1. Filtro de Kalman.

O algoritmo do KF é resumido na função

$$[\hat{x}_k, P_k^{\text{xx}}] = \text{KF}(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{\text{xx}}, A_{k-1}, B_{k-1}, B_{k-1}^g, C_k, D_k^g, Q_{k-1}, R_k, u_{k-1}, y_k).$$

Dadas as inicializações da função KF em $k = 0$, os passos seguintes determinam a predição e a assimilação de dados.

- Predição.

1: Calcule a média *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ utilizando o modelo de processo (3.4)

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1}. \quad (3.8)$$

2: Calcule a matriz de covariância $P_{k|k-1}^{\text{xx}}$ *a priori* utilizando o modelo de processo (3.4)

$$P_{k|k-1}^{\text{xx}} = A_{k-1}P_{k-1}^{\text{xx}}A_{k-1}^T + B_{k-1}^g Q_{k-1} (B_{k-1}^g)^T. \quad (3.9)$$

3: Compute a média $\hat{y}_{k|k-1}$ com base na estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ e no modelo de medição (3.5)

$$\hat{y}_{k|k-1} = C_k \hat{x}_{k|k-1}. \quad (3.10)$$

4: Calcule as matrizes de covariância $P_{k|k-1}^{\text{xy}}$ e $P_{k|k-1}^{\text{yy}}$ utilizando os modelos de processo (3.4) e medição (3.5)

$$P_{k|k-1}^{\text{xy}} = P_{k|k-1}^{\text{xx}} C_k^T, \quad (3.11)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{yy}} = C_k P_{k|k-1}^{\text{xx}} C_k^T + D_k^g R_k (D_k^g)^T. \quad (3.12)$$

- Assimilação de dados.

1: Calcule o ganho de Kalman

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} \left(P_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1}. \quad (3.13)$$

2: Calcule a média *a posteriori*

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - \hat{y}_{k|k-1}). \quad (3.14)$$

3: Calcule a matriz de covariância *a posteriori*

$$P_k^{xx} = P_{k|k-1}^{xx} - K_k P_{k|k-1}^{yy} K_k^T. \quad (3.15)$$

□

Algumas limitações do KF clássico são gerar estimativas sem o compromisso de satisfazer restrições e não tratar parâmetros incertos.

3.2.2 Filtro de Kalman Estendido

Basicamente o EKF lineariza o modelo do sistema em torno de um ponto de equilíbrio e aplica os passos do KF. Portanto, busca-se minimizar de forma aproximada o mesmo funcional de custo (3.6). A partir do modelo não linear a tempo discreto (3.1)-(3.2), a linearização correspondente, usando séries de Taylor truncadas nos termos de primeira ordem, é dada por

$$x_k = f(x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}}, w^{\text{eq}}, k-1) + F_{k-1}^x (x_{k-1} - x^{\text{eq}}) + F_{k-1}^u (u_{k-1} - u^{\text{eq}}) + F_{k-1}^w \bar{w}_{k-1}, \quad (3.16)$$

$$y_k = h(x^{\text{eq}}, v^{\text{eq}}, k) + H_k^x (x_k - x^{\text{eq}}) + H_k^v \bar{v}_k, \quad (3.17)$$

em que

$$F_{k-1}^x = \nabla_x f(x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}}, w^{\text{eq}}, k-1), \quad (3.18)$$

$$F_{k-1}^u = \nabla_u f(x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}}, w^{\text{eq}}, k-1), \quad (3.19)$$

$$F_{k-1}^w = \nabla_w f(x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}}, w^{\text{eq}}, k-1), \quad (3.20)$$

$$H_k^x = \nabla_x h(x^{\text{eq}}, v^{\text{eq}}, k), \quad (3.21)$$

$$H_k^v = \nabla_v h(x^{\text{eq}}, v^{\text{eq}}, k) \quad (3.22)$$

são matrizes Jacobianas avaliadas nos pontos de equilíbrio $x^{\text{eq}}, u^{\text{eq}}, w^{\text{eq}} = 0_{q \times 1}$ e $v^{\text{eq}} = 0_{r \times 1}$, e as parcelas de ruído \bar{w}_{k-1} e \bar{v}_k representam, ao mesmo tempo, as parcelas de ruído w_{k-1} e v_k e erros de linearização. Os termos de ruído \bar{w}_{k-1} e \bar{v}_k são considerados brancos, Gaussianos e não correlacionados, com média nula e covariância $E[\bar{w}_k \bar{w}_k^T] = \bar{Q}_k$ e $E[\bar{v}_k \bar{v}_k^T] = \bar{R}_k$, respectivamente.

Observação 3.2.1. Quando as funções f e h são contínuas e não lineares, cada matriz Jacobiana associada ao modelo linearizado e discretizado é calculada da seguinte maneira: (i) linearize as funções contínuas e não lineares $f(x(t), u(t), w(t))$ e $h(x(t), v(t))$, obtendo um modelo linearizado contínuo cujas matrizes Jacobianas são dadas por $F^c = \nabla_x f(x^{eq}, u^{eq}, w^{eq})$ e $H^c = \nabla_x h(x^{eq}, v^{eq})$; (ii) em seguida, discretize o modelo linearizado contínuo segundo o método *zero-order-holder* (ZOH) com período de amostragem T_s , a fim de que as matrizes Jacobianas do modelo discretizado $F^d = \exp(F^c T_s)$ e $H^d = \exp(H^c T_s)$ sejam aproximadas pela expansão em séries de Taylor da exponencial de matriz truncadas na terceira ordem, ou seja, $F^d \approx I + F^c T_s + \frac{1}{2} (F^c T_s)^2 + \frac{1}{6} (F^c T_s)^3$ (Leite et al., 2004). Neste método de discretização, as entradas são mantidas constantes durante o intervalo de amostragem T_s .

□

Os pontos de equilíbrio x^{eq} e u^{eq} são considerados como, respectivamente, a média mais recente da VA X e o próprio vetor determinístico u . As transformações não lineares são aproximadas por transformações lineares como no Fato 2.4.3. O algoritmo a seguir apresenta os passos do EKF clássico (Prakash et al., 2014).

Algoritmo 3.2.2. Filtro de Kalman estendido.

O algoritmo do EKF é resumido na função

$$\left[\hat{x}_k, P_k^{xx} \right] = \text{EKF} \left(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{xx}, F_{k-1}^x, F_{k-1}^u, F_{k-1}^w, H_k^x, H_k^v, \bar{Q}_{k-1}, \bar{R}_k, u_{k-1}, y_k, f, h \right).$$

Dadas as inicializações da função EKF em $k = 0$, os passos seguintes determinam a predição e a assimilação de dados.

- Predição.

1: Calcule a média *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ utilizando o modelo de processo não linear (3.1)

$$\hat{x}_{k|k-1} = f \left(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0_{q \times 1}, k-1 \right). \quad (3.23)$$

2: Calcule a matriz de covariância $P_{k|k-1}^{xx}$ *a priori* utilizando o modelo de processo linearizado (3.16)

$$P_{k|k-1}^{xx} = F_{k-1}^x P_{k-1}^{xx} \left(F_{k-1}^x \right)^T + F_{k-1}^w \bar{Q}_{k-1} \left(F_{k-1}^w \right)^T. \quad (3.24)$$

3: Compute a média $\hat{y}_{k|k-1}$ com base na estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ e no modelo de medição não linear (3.2)

$$\hat{y}_{k|k-1} = h \left(\hat{x}_{k|k-1}, 0_{r \times 1}, k \right). \quad (3.25)$$

4: Calcule as matrizes de covariância $P_{k|k-1}^{xy}$ e $P_{k|k-1}^{yy}$ utilizando os modelos de processo (3.16) e medição (3.17) linearizados

$$P_{k|k-1}^{xy} = P_{k|k-1}^{xx} \left(H_k^x \right)^T, \quad (3.26)$$

$$P_{k|k-1}^{yy} = H_k^x P_{k|k-1}^{xx} \left(H_k^x \right)^T + H_k^y \bar{R}_k \left(H_k^y \right)^T. \quad (3.27)$$

- Assimilação de dados.

Com base em (3.13)-(3.15), determine as estimativas de média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} *a posteriori*.

□

O EKF é uma aplicação do KF para sistemas não lineares, na qual é conservada a eficiência computacional ao longo das recursões. Entretanto, o EKF está sujeito a algumas limitações como: baixo desempenho para sistemas fortemente não lineares, as estimativas de estados podem divergir, exige a existência das matrizes Jacobianas e não trata restrições, nem parâmetros incertos.

3.2.3 Filtro de Kalman *Unscented*

Nesta subseção é apresentado o algoritmo do UKF conforme sistematização proposta por Menegaz et al. (2015). Esse algoritmo permite tratar casos em que os ruídos de processo w e medição v são aditivos ou multiplicativos. O UKF foi proposto por Julier e Uhlmann (2004), motivado por limitações do EKF oriundas, principalmente, de linearização. Assim como o KF, o UKF possui duas etapas: predição e assimilação de dados. A etapa de predição do UKF é composta pela propagação da VA X_{k-1} pelo modelo de processo (3.1), gerando $X_{k|k-1}$, e pela transformação desta VA pelo modelo de medição (3.2) gerando $Y_{k|k-1}$. O funcional de custo considerado é o mesmo do KF (3.6), portanto, a etapa de assimilação de dados é a mesma do KF. Note que, a menos do instante de tempo k , a transformação (2.50) equivale ao modelo de medição (3.2) quando $x_1 = x_k$ e $x_2 = v_k$.

Algoritmo 3.2.3. Filtro de Kalman *Unscented*.

O algoritmo do UKF é resumido na função

$$\left[\hat{x}_k, P_k^{xx} \right] = \text{UKF} \left(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{xx}, Q_{k-1}, R_k, u_{k-1}, y_k, f, h \right).$$

A seguir, são apresentados os passos para obter as estimativas *a posteriori* do UKF. Lembre-se que a função UT formulada no Algoritmo 2.4.1 permite aplicar qualquer tipo de transformação não linear para duas VAs.

- Predição.

A partir do Algoritmo 2.4.1 da UT e da inicialização da função UKF em $k = 0$, a etapa de predição é dada por:

- 1: Determine as estimativas de média $\hat{x}_{k|k-1}$ e covariância $P_{k|k-1}^{xx}$ *a priori*

$$\left[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{xx}, 0_{n \times n} \right] = \text{UT} \left(\hat{x}_{k-1}, 0_{q \times 1}, P_{k-1}^{xx}, Q_{k-1}, u_{k-1}, f \right), \quad (3.28)$$

em que f é o modelo de processo (3.1).

- 2: Determine as estimativas de média $\hat{y}_{k|k-1}$ e covariâncias $P_{k|k-1}^{yy}$ e $P_{k|k-1}^{xy}$

$$\left[\hat{y}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{yy}, P_{k|k-1}^{xy} \right] = \text{UT} \left(\hat{x}_{k|k-1}, 0_{r \times 1}, P_{k|k-1}^{xx}, R_k, 0, h \right), \quad (3.29)$$

em que h é o modelo de medição (3.2).

- Assimilação de dados.

Com base em (3.13)-(3.15), determine as estimativas de média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} *a posteriori*.

□

Os passos do UKF são ilustrados no diagrama da Figura 3.1.

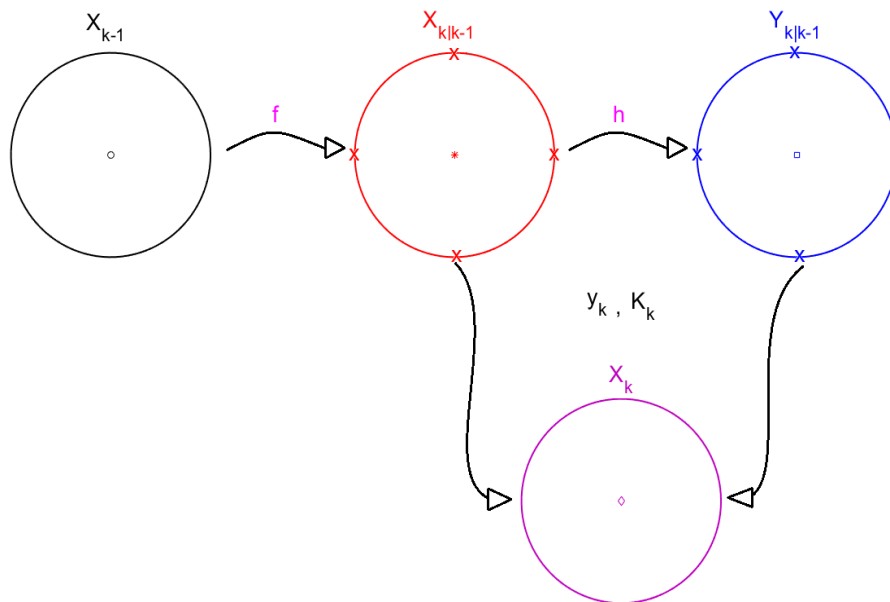


Figura 3.1: Ilustração dos passos de predição, durante o qual propagam-se as VAs X_{k-1} e $X_{k|k-1}$, produzindo $X_{k|k-1}$ e $Y_{k|k-1}$ respectivamente, e assimilação de dados, no qual a VA X_k é estimada, do UKF.

O UKF é um algoritmo bem conhecido na literatura por ser um algoritmo aproximado de mínima variância baseado no KF, não necessitar do modelo linearizado do

sistema, e gerar resultados mais precisos do que o EKF. A linearização neste caso é feita de forma estatística, em que uma VAG é transformada em outra VAG por um modelo não linear (Julier e Uhlmann, 2004). Segundo os próprios autores do UKF, é mais simples aproximar uma PDF do que aproximar um modelo não linear (Julier e Uhlmann, 2004), ao contrário do que é feito no EKF. Duas limitações deste filtro são não tratar parâmetros incertos e gerar estimativas sem o compromisso de satisfazer restrições. A motivação das abordagens estocásticas exploradas nas próximas subseções é tratar restrições durante a estimação de estados.

3.2.4 Filtro de Kalman com Restrição Intervalar na Transformação *Unscented*

Diferentemente da UT, a ICUT aplica a UT com restrição intervalar na etapa de predição do UKF. A restrição intervalar é aplicada nos pontos sigma, os quais devem satisfazer

$$a_{i,k} \leq X_{(i,j),k}^{\text{sp}} \leq b_{i,k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, (2n + 1). \quad (3.30)$$

Caso o vetor \hat{x}_k não satisfaça (3.3), o mesmo deve ser projetado nas bordas da restrição antes de utilizar a ICUT. Desse modo, quando um ponto sigma ultrapassa os limites da restrição intervalar, o ponto sigma também é projetado nos limites da restrição, para que (3.30) seja satisfeita. Assim, os pontos sigma X_k^{sp} não satisfazem a relação de média e covariância da VAG que os gerou, e os pesos γ passam a ser diferenciados. Isso quer dizer que, embora os pontos sigma X_k^{sp} sejam gerados pela média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} , as operações (2.56) e (2.57) não retornam as mesmas estimativas da VAG inicial. Então, a média e a covariância dos pontos sigma calculados capturam a informação de restrição intervalar na etapa de predição (Teixeira et al., 2010b).

Neste trabalho, a abordagem UT é trocada pela ICUT na predição do UKF, tal que o mesmo funcional de custo (3.6) seja considerado para cálculo do ganho de Kalman K_k . Assim, obtém-se o algoritmo chamado de IUKF. O procedimento da ICUT é apresentado no algoritmo a seguir baseado em (Kottakki et al., 2014) e na sistematização proposta por Menegaz et al. (2015).

Algoritmo 3.2.4. Transformação *unscented* com restrição intervalar nos estados.

Este algoritmo é resumido na função

$$[\hat{y}, P^{yy}, P^{x1y}] = \text{ICUT}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, P^{x1x1}, P^{x2x2}, d, h, a, b, \kappa).$$

Considere novamente a transformação não linear genérica

$$y = h(x_1, x_2, d),$$

em que x_1 e x_2 são VAs com médias $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ e matrizes de covariância $P^{x1x1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $P^{x2x2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e d é um vetor determinístico. Dada a inicialização da

função ICUT, em que κ é o parâmetro que determina o espalhamento dos pontos sigma, os passos seguintes determinam o algoritmo da ICUT:

- Gerar pontos sigma com restrição intervalar nos estados.

1: A partir das VAs x_1 e x_2 , defina o vetor de estados aumentado $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ como (2.51), em que $\tilde{n} = n + m$.

2: Com base nas matrizes $P^{x_1 \times x_1}$ e $P^{x_2 \times x_2}$, defina a matriz de covariância $P^{\tilde{x}\tilde{x}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ como (2.52).

3: Determine $N \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times 2\tilde{n}}$

$$N \triangleq \left[(P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \quad - (P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right]. \quad (3.31)$$

4: Para $i = 1, \dots, \tilde{n}$ e $j = 1, \dots, 2\tilde{n}$, determine $\Omega \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times 2\tilde{n}}$

$$\Omega_{(i,j)} \triangleq \begin{cases} \sqrt{\tilde{n} + \kappa}, & N_{(i,j)} = 0 \\ \min \left(\sqrt{\tilde{n} + \kappa}, \frac{\tilde{b}_i - \hat{x}_i}{N_{(i,j)}} \right), & N_{(i,j)} > 0 \\ \min \left(\sqrt{\tilde{n} + \kappa}, \frac{\tilde{a}_i - \hat{x}_i}{N_{(i,j)}} \right), & N_{(i,j)} < 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

em que $\tilde{a} = \begin{bmatrix} a \\ -\infty_{m \times 1} \end{bmatrix}$ e $\tilde{b} = \begin{bmatrix} b \\ +\infty_{m \times 1} \end{bmatrix}$, ou seja, as restrições da VA x_2 são consideradas ilimitadas.

5: Encontre o vetor $\theta \in \mathbb{R}^{2\tilde{n}}$

$$\theta_j \triangleq \min(\text{col}_j(\Omega)). \quad (3.33)$$

6: Dado o parâmetro $\kappa > -\tilde{n}$, calcule as variáveis ϱ e β

$$\varrho \triangleq \frac{2\kappa - 1}{2(\tilde{n} + \kappa) \left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \theta_j - (2\tilde{n} + 1) \sqrt{\tilde{n} + \kappa} \right)}, \quad (3.34)$$

$$\beta \triangleq \frac{1}{2(\tilde{n} + \kappa)} - \varrho \sqrt{\tilde{n} + \kappa}. \quad (3.35)$$

7: Encontre o vetor de pesos $\gamma \in \mathbb{R}^{2\tilde{n}+1}$

$$\gamma_0 \triangleq \beta, \quad \gamma_j \triangleq \varrho \theta_j + \beta. \quad (3.36)$$

8: Por fim, determine a matriz de pontos sigma $X^{\text{sp}} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times (2\tilde{n}+1)}$

$$\begin{aligned} X^{\text{sp}} &\triangleq \begin{bmatrix} X^{\text{sp}1} \\ X^{\text{sp}2} \end{bmatrix} \\ &= \hat{x} \mathbf{1}_{1 \times (2\tilde{n}+1)} + \begin{bmatrix} 0_{\tilde{n} \times 1} & S_+ & S_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

sendo $X^{\text{sp}1} \in \mathbb{R}^{n \times (2\tilde{n}+1)}$ e $X^{\text{sp}2} \in \mathbb{R}^{m \times (2\tilde{n}+1)}$ partições da matriz X^{sp} , e

$$\begin{aligned} S_+ &\triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \text{col}_1 \left((P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right) & \dots & \theta_{\tilde{n}} \text{col}_{\tilde{n}} \left((P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right) \end{bmatrix}, \\ S_- &\triangleq \begin{bmatrix} -\theta_{(\tilde{n}+1)} \text{col}_1 \left((P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right) & \dots & -\theta_{2\tilde{n}} \text{col}_{\tilde{n}} \left((P^{\tilde{x}\tilde{x}})^{1/2} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Transformar os pontos sigma.

Calcule os pontos sigma transformados, Y^{sp} , pela equação (2.55), com $j = 1, \dots, (2\tilde{n}+1)$.

- Gerar estimativas de média e covariância.

Estime a média \hat{y} e as covariâncias P^{yy} e P^{x_1y} por meio de (2.56)-(2.58).

□

Observação 3.2.2. Quando a covariância da PDF de entrada, relacionada a 1σ , ultrapassa a região de restrição, a ICUT garante que os pontos sigma X^{sp} , gerados por (2.57), pertençam à região de restrição e a covariância obtida seja menos incerta do que a covariância de entrada.

□

Observação 3.2.3. Quando a covariância da PDF Gaussiana de entrada, relacionada a 1σ , não ultrapassa os limites das restrições, a ICUT se resume a UT, logo, o IUKF se resume ao UKF, de tal forma que os pontos sigma e os pesos relacionados a cada uma das abordagens retornam a mesma média e covariância. Além disso, o ponto sigma de peso γ_0 é escolhido sempre como a média \hat{x} .

□

A seguir, uma aplicação dos sub-passos 1 a 8 da abordagem ICUT é exemplificada a fim de ilustrar a Observação 3.2.2.

Exemplo 3.2.1. Considere $x \in \mathbb{R}^2$, $\hat{x} = [0,25 \quad 1]^T$, $P^{\text{xx}} = I_{2 \times 2}$, com restrições $a = [-0,5 \quad 0]^T$ e $b = [2 \quad 2,5]^T$. Na Figura 3.2, a média \hat{x} representada por (\circ) satisfaz (3.3), mas a covariância P^{xx} representada por $(-)$ ultrapassa os limites estabelecidos pelas restrições a e b . Assim, aplicando os sub-passos 1 a 8 da ICUT, as estimativas de média, representada por (\diamond) , e covariância, representada por $(-\cdot-)$, dos pontos sigma são geradas

juntamente com os pesos correspondentes representados por (x) . A média dos pontos sigma necessariamente satisfaz (3.3), devido à projeção dos pontos sigma nas bordas da restrição ultrapassadas. Essa projeção implica em pontos sigma não centralmente simétricos e uma covariância menos incerta.

□

O algoritmo do IUKF é apresentado a seguir com base no Algoritmo 3.2.4 da ICUT.

Algoritmo 3.2.5. Filtro de Kalman com restrição intervalar na transformação *unscented*. Este algoritmo é resumido na função

$$\left[\hat{x}_k, P_k^{xx} \right] = \text{IUKF} \left(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{xx}, Q_{k-1}, R_k, u_{k-1}, y_k, a_k, b_k, \kappa, f, h \right).$$

Dada a inicialização da função IUKF em $k = 0$, os procedimentos para obter as estimativas *a posteriori* do IUKF são apresentados a seguir.

- Predição.

1: Determine as estimativas de média $\hat{x}_{k|k-1}$ e covariância $P_{k|k-1}^{xx}$ *a priori*

$$\left[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{xx}, 0_{n \times n} \right] = \text{ICUT} \left(\hat{x}_{k-1}, 0_{q \times 1}, P_{k-1}^{xx}, Q_{k-1}, u_{k-1}, f, a_k, b_k, \kappa \right), \quad (3.38)$$

em que f é o modelo de processo (3.1).

2: Determine as estimativas de média $\hat{y}_{k|k-1}$ e covariâncias $P_{k|k-1}^{yy}$ e $P_{k|k-1}^{xy}$

$$\left[\hat{y}_k, P_k^{yy}, P_k^{xy} \right] = \text{ICUT} \left(\hat{x}_{k|k-1}, 0_{r \times 1}, P_{k|k-1}^{xx}, R_k, 0, h, a_k, b_k, \kappa \right), \quad (3.39)$$

em que h é o modelo de medição (3.2).

- Assimilação de dados.

Com base em (3.13)-(3.15), determine as estimativas de média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} *a posteriori*.

□

A principal vantagem do IUKF em relação ao UKF está na aplicação da ICUT na etapa de predição em vez da UT, sendo geradas estimativas de média e covariância mais coerentes com a região das restrições. Como a ICUT tem passos similares aos da UT, o tempo de processamento do IUKF e do UKF são próximos. Entretanto, o IUKF não trata parâmetros incertos nem leva em conta que o passo de assimilação de dados possa conduzir a resultados imprecisos.

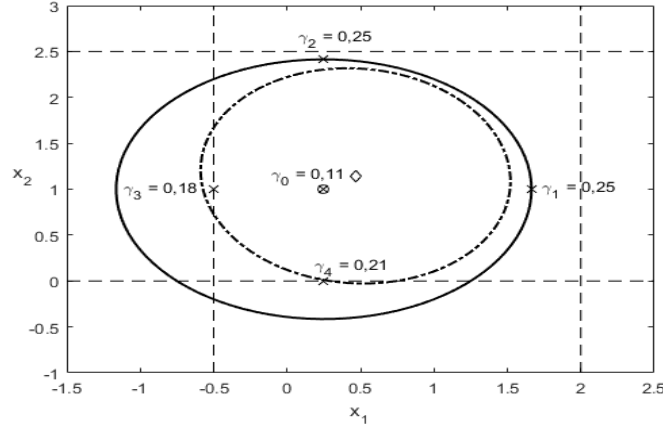


Figura 3.2: Exemplo da geração de pontos sigma pela ICUT, em que as estimativas iniciais de média $\hat{x} = [0,25 \ 1]^T$, representada por (\diamond), e covariância $P^{xx} = I_{2 \times 2}$, representada por (—), de $x \in \mathbb{R}^2$ são apresentadas com a média representada por (\diamond), a covariância representada por (—) e os pesos (\times) dos pontos sigma após aplicar os sub-passos 1 a 8 com $\kappa = 0$ (aplicacao_da_abordagem_ICUT @).

3.2.5 Filtro de Kalman *Unscented* com Otimização

Este filtro realiza uma otimização em cada ponto sigma e, ao final, tem-se uma contribuição atualizada do conjunto de pontos sigma otimizados. Portanto, trata-se de uma otimização local. O problema de otimização é formulado para o j -ésimo ponto sigma $\text{col}_j(X_k^{\text{spx}})$, com $j = 1, \dots, 2n$. A função de custo a ser minimizada é (Rengaswamy et al., 2013)

$$J_k^{\text{MP}}(\text{col}_j(X_k^{\text{spx}})) \triangleq (\text{col}_j(X_k^{\text{spx}}) - \text{col}_j(\hat{X}_{k|k-1}^{\text{spx}}))^T (P_{k|k-1}^{\text{xx}})^{-1} (\bullet) + (y_k - h(\text{col}_j(X_k^{\text{spx}}), \text{col}_j(X_k^{\text{spv}}), k))^T R_k^{-1}(\bullet), \quad (3.40)$$

em que (\bullet) representa a mesma expressão em $(\bullet)^T$ que pré-multiplica a inversão matricial $(\bullet)^{-1}$ correspondente, as estimativas de estados $\text{col}_j(\hat{X}_{k|k-1}^{\text{spx}})$ e $P_{k|k-1}^{\text{xx}}$ são dadas pela função UT no Algoritmo 2.4.1, enquanto os pontos sigma $\text{col}_j(X_k^{\text{spx}})$ e $\text{col}_j(X_k^{\text{spv}})$, cujos superescritos estão relacionados ao vetor de estados x_k e medição v_k , respectivamente, são utilizados na equação (2.55) para gerar o j -ésimo ponto sigma transformado, $\text{col}_j(Y_k^{\text{sp}})$, pelo modelo de medição h . O j -ésimo ponto sigma ótimo, $\text{col}_j(\hat{X}_k^{\text{sp0}})$, é dado por

$$\text{col}_j(\hat{X}_k^{\text{sp0}}) \triangleq \arg \min_{a_k \leq \text{col}_j(X_k^{\text{spx}}) \leq b_k} J_k^{\text{MP}}(\text{col}_j(X_k^{\text{spx}})). \quad (3.41)$$

Quando o modelo de medição (3.2) é linear, ele pode ser reescrito como

$$y_k = C_k x_k + v_k.$$

Neste caso, em especial, (3.40) pode ser reduzida à seguinte função de custo (Prakash et al., 2010)

$$J_k^{\text{MP}}(\text{col}_j(X_k^{\text{SPX}})) = (\text{col}_j(X_k^{\text{SPX}}))^T \left((P_{k|k-1}^{\text{xx}})^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k \right) \text{col}_j(X_k^{\text{SPX}}) - 2 \left((\hat{X}_{k|k-1}^{\text{SPX}})^T (P_{k|k-1}^{\text{xx}})^{-1} + (y_k - \hat{\nu}_k)^T R_k^{-1} C_k \right) \text{col}_j(X_k^{\text{SPX}}). \quad (3.42)$$

A formulação (3.42) reduz consideravelmente o tempo de processamento. No *software* MATLAB[®], a função *quadprog* permite resolver problemas de programação quadrática, enquanto a função *fmincon* permite resolver problemas tanto lineares quanto não lineares. Note que, dado que as matrizes $P_{k|k-1}^{\text{xx}}$ e R_k são definidas positivas, a função de custo J^{MP} é estritamente convexa (Bernstein, 2009). Isso quer dizer que o mínimo existente na função é global e, assim, apenas um ponto sigma ótimo é obtido. Entretanto, como os pontos sigma finais são obtidos pelos pontos sigma individualmente calculados, tal resultado é tratado como *local*.

O algoritmo do UKF com otimização (OUKF) a seguir é dividido em dois passos: predição e assimilação de dados.

Algoritmo 3.2.6. Filtro de Kalman *unscented* com otimização.

Este algoritmo é resumido na função

$$\left[\hat{x}_k, P_k^{\text{xx}} \right] = \text{OUKF} \left(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{\text{xx}}, Q_{k-1}, R_k, u_{k-1}, y_k, a_k, b_k, f, h \right).$$

Dada a inicialização da função OUKF em $k = 0$, os passos para obter as estimativas *a posteriori* do OUKF são apresentados a seguir.

- Predição.

- 1: A partir da função UT no Algoritmo 2.4.1, calcule as estimativas de média $\hat{x}_{k|k-1}$ e covariância $P_{k|k-1}^{\text{xx}}$ *a priori*

$$\left[\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}^{\text{xx}}, 0_{n \times n} \right] = \text{UT} \left(\hat{x}_{k-1}, 0_{q \times 1}, P_{k-1}^{\text{xx}}, Q_{k-1}, u_{k-1}, f \right), \quad (3.43)$$

em que f é o modelo de processo (3.1).

- 2: Em seguida, determine a matriz de pontos sigma, $\hat{X}_{k|k-1}^{\text{SPX}}$, e os pesos γ_j correspondentes por meio das equações (2.53) e (2.54), respectivamente.

- Assimilação de dados.

- 1: Utilize um algoritmo de otimização em (3.40) para gerar o j -ésimo ponto sigma ótimo, $\text{col}_j(\hat{X}_k^{\text{SP0}})$, dado que o j -ésimo ponto sigma transformado $\text{col}_j(Y_k^{\text{SP}})$ é dado pelo modelo de medição h (3.2)

$$\text{col}_j(Y_k^{\text{SP}}) = h \left(\text{col}_j(X_k^{\text{SPX}}), \text{col}_j(X_k^{\text{SPV}}), k \right) \quad (3.44)$$

e os pontos sigma $\text{col}_j(X_k^{\text{spX}})$ e $\text{col}_j(X_k^{\text{spV}})$, cujos superescritos estão relacionados ao vetor de estados x_k e medição v_k , respectivamente, são obtidos por (2.51)-(2.53).

- 2: A partir da matriz de pontos sigma otimizados \hat{X}_k^{spo} e dos pesos γ correspondentes, calcule a estimativa de média \hat{x}_k e covariância P_k^{xx} *a posteriori* por meio de (2.56) e (2.57), respectivamente.

□

Observação 3.2.4. Em geral, mesmo que as matrizes de covariância $P_{k|k-1}^{\text{xx}}$ e R_k sejam definidas positivas e conduzam a mínimos globais, os pontos sigma obtidos não são estritamente ótimos, dado que as mesmas matrizes não são conhecidas exatamente.

□

A principal vantagem do OUKF em relação a UKF e IUKF é gerar estimativas de centro e covariância, relacionada a 1σ , que estejam contidas na região das restrições. Três limitações deste filtro são não tratar parâmetros incertos, gerar estimativas aproximadas, dado que a PDF Gaussiana original passa a ser limitada, e o tempo de processamento, uma vez que é necessário executar um algoritmo de otimização para cada ponto sigma a cada instante de tempo.

3.2.6 Filtro de Kalman *Unscented* com Truncamento da Função Densidade de Probabilidade

A abordagem de truncamento da PDF trata restrições de desigualdade e pode ser implementada tanto para algoritmos de EKF como UKF. Em resumo, estimativas de média e covariância *a posteriori* são geradas pelo EKF ou UKF. Então, o mesmo funcional de custo (3.6) é considerado. Em seguida, por meio de uma terceira etapa no algoritmo de filtragem, as restrições intervalares são aplicadas individualmente, de forma que as estimativas de média e covariância truncadas \hat{x}_k^t e $P_k^{\text{xx}t}$, respectivamente, sejam obtidas recursivamente a cada passo i , com $i = 1, \dots, n$. O objetivo principal dessa abordagem é confinar a maior área da PDF de x_k dentro da região intervalar. O procedimento de truncamento da PDF apresentado é baseado em (Teixeira et al., 2010a) e (Boada et al., 2016).

Como a UT não leva em consideração restrições, estas são aplicadas apenas no processo de truncamento, o qual recebe estimativas já atualizadas. A combinação do UKF com a abordagem de truncamento da PDF é denominada TUKF neste trabalho. A seguir, o algoritmo do TUKF é apresentado.

Algoritmo 3.2.7. Filtro de Kalman *unscented* com truncamento da função densidade de probabilidade.

Este algoritmo é resumido na função

$$\left[\hat{x}_k^t, P_k^{\text{xx}t} \right] = \text{TUKF} \left(\hat{x}_{k-1}, P_{k-1}^{\text{xx}}, Q_{k-1}, R_k, \mu_{k-1}, y_k, a_k, b_k, f, h \right).$$

Considere $\hat{x}_{k,i}^t$ e $P_{k,i}^{\text{xx}t}$ as estimativas de média e covariância do vetor aleatório x_k^t como saídas da recursão, provenientes da imposição das primeiras $i-1$ restrições intervalares (3.3), em que o superescrito t indica as estimativas obtidas pelo truncamento.

1: Dada a inicialização do TUKF em $k = 0$, estime a média \hat{x}_k e a covariância P_k^{xx} a posteriori pelo Algoritmo 3.2.3 utilizando a função UKF.

2: Na primeira recursão, $i = 1$, inicialize as estimativas $\hat{x}_{k,1}^t$ e $P_{k,1}^{\text{xx}t}$:

$$\hat{x}_{k,1}^t = \hat{x}_k, \quad (3.45)$$

$$P_{k,1}^{\text{xx}t} = P_k^{\text{xx}}. \quad (3.46)$$

3: Depois, execute os quatro passos seguintes para cada recursão i , com $i = 1, \dots, n$:

(a) Aplique a decomposição de Schur na matriz simétrica $P_{k,i}^{\text{xx}t}$ para obter a matriz ortogonal $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ou matriz de autovetores, e a matriz diagonal $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ou forma canônica de Jordan, tal que

$$SWS^T = P_{k,i}^{\text{xx}t}.$$

(b) Dado que a matriz ortogonal $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaz

$$\Theta W^{1/2} \text{col}_i(S^T) = \left[\sqrt{P_{(i,i),k,i}^{\text{xx}t}} \quad 0_{1 \times (n-1)} \right]^T,$$

aplique a ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar a matriz ortogonal Θ que é dada por

$$\text{lin}_l(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k,i}^{\text{xx}t}}} \text{lin}_i(S)W^{1/2}, & l = 1 \\ \left(e_l - \sum_{q=1}^{l-1} \left(e_l^T \text{col}_q(\Theta^T) \right) \text{col}_q(\Theta^T) \right)^T, & l = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.47)$$

sendo $e_l = \text{col}_l(I_{n \times n})$, $\text{lin}_l(\bullet)$ a l -ésima linha e $\text{col}_l(\bullet)$ a l -ésima coluna; caso $\text{lin}_l(\Theta) = 0_{1 \times n}$, então faça a seguinte correção

$$\text{lin}_l(\Theta) = \left(e_1 - \sum_{q=1}^{l-1} \left(e_1^T \text{col}_q(\Theta^T) \right) \text{col}_q(\Theta^T) \right)^T; \quad (3.48)$$

depois, normalize cada linha da matriz Θ

$$\text{lin}_l(\Theta) = \frac{1}{\|\text{lin}_l(\Theta)\|_2} \text{lin}_l(\Theta), \quad l = 1, \dots, n. \quad (3.49)$$

- (c) Calcule os parâmetros normalizados da restrição intervalar $c_{k,i} \leq z_{i,k,i}^t \leq d_{k,i}$, em que $z_{k,i}^t \triangleq \Theta W^{-1/2} S^T (x_k - \hat{x}_{k,i}^t) \in \mathbb{R}^n$ é a VA transformada, sendo $c_{k,i} < d_{k,i} \in \mathbb{R}$ determinados por

$$c_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k,i}^{\text{xxt}}}} (a_{i,k} - x_{i,k,i}^t), \quad (3.50)$$

$$d_{k,i} = \frac{1}{\sqrt{P_{(i,i),k,i}^{\text{xxt}}}} (b_{i,k} - x_{i,k,i}^t). \quad (3.51)$$

A média $\hat{z}_{k,i}^t$ e a covariância $P_{k,i}^{\text{zzt}}$ de $z_{k,i}^t$ são dadas, respectivamente, por

$$\hat{z}_{k,i}^t = [\mu_i \quad 0_{1 \times (n-1)}]^T \quad (3.52)$$

$$P_{k,i}^{\text{zzt}} = \text{diag} \left([\sigma_i^2 \quad 1_{1 \times (n-1)}]^T \right), \quad (3.53)$$

em que a média μ_i e a variância σ_i^2 truncadas são dadas por

$$v_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \left[\text{erf} \left(\frac{d_{k,i}}{\sqrt{2}} \right) - \text{erf} \left(\frac{c_{k,i}}{\sqrt{2}} \right) \right]}, \quad (3.54)$$

$$\mu_i = v_i \left[\exp \left(\frac{-c_{k,i}^2}{2} \right) - \exp \left(\frac{-d_{k,i}^2}{2} \right) \right], \quad (3.55)$$

$$\sigma_i = v_i \left[\exp \left(\frac{-c_{k,i}^2}{2} \right) (c_{k,i} - 2\mu_i) - \exp \left(\frac{-d_{k,i}^2}{2} \right) (d_{k,i} - 2\mu_i) + \mu_i^2 + 1 \right], \quad (3.56)$$

sendo

$$\text{erf}(b) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^b \exp(-\tau^2) d\tau \quad (3.57)$$

a função de erro.

- (d) Determine a transformação inversa

$$\hat{x}_{k,i+1}^t = S W^{1/2} \Theta^T \hat{z}_{k,i}^t + \hat{x}_{k,i}^t, \quad (3.58)$$

$$P_{k,i+1}^{\text{xxt}} = S W^{1/2} \Theta^T P_{k,i}^{\text{zzt}} \Theta W^{1/2} S^T. \quad (3.59)$$

4: Por fim, em $i = n$, faça

$$\hat{x}_k^t = \hat{x}_{k,n+1}^t, \quad (3.60)$$

$$P_k^{\text{xxt}} = P_{k,n+1}^{\text{xxt}}. \quad (3.61)$$

□

Basicamente, as estimativas *a posteriori* provenientes do Algoritmo 3.2.3 do UKF e cada restrição intervalar (3.3) são utilizadas para transformar o vetor aleatório $x_{k,i}$ em $z_{k,i}^t$. O vetor $z_{k,i}^t$ é a versão de $x_{k,i}$ truncada nos limites (3.50) e (3.51) com menor variância σ_i^2 e maior probabilidade na média μ_i , a fim de que a maior área da PDF pertença a restrição. Após determinar as estimativas de média $\hat{z}_{k,i}^t$ e covariância $P_{k,i}^{\text{zzt}}$, a transformação inversa (3.58) e (3.59) é aplicada para obter $x_{k,i+1}^t$. Finalmente, na última recursão, $i = n$, todas as restrições intervalares (3.3) foram utilizadas. A seguir, o procedimento de truncamento é exemplificado.

Exemplo 3.2.2. Considere $x_k \in \mathbb{R}^2$ uma VA *a posteriori* com média $\hat{x}_k = [0,25 \ 1]^T$, covariância $P_k^{\text{xx}} = I_{2 \times 2}$ e restrições intervalares $a_k = [-0,5 \ 0]^T$ e $b_k = [2 \ 2,5]^T$. Na Figura 3.3, \hat{x}_k é representado por (\circ), a covariância P_k^{xx} é representada por ($—$) e as restrições a_k e b_k são representadas por ($-$). A partir do algoritmo de truncamento, as estimativas de média e covariância truncadas correspondentes são $\hat{x}_k^t = [0,5430 \ 1,1452]^T$, representada por (\diamond), e $P_k^{\text{xxt}} = \text{diag}\left([0,4003 \ 0,4157]^T\right)$, representada por ($- \cdot -$), que são mais precisas do que a VAG de entrada.

□

Em relação ao IUKF, o TUKF tem a vantagem de retornar como saída do algoritmo estimativas mais precisas, ou seja, menor variância. Em relação ao OUKF, o tempo de processamento do TUKF é menor devido a não executar um algoritmo de otimização. Uma desvantagem do TUKF é não tratar parâmetros incertos.

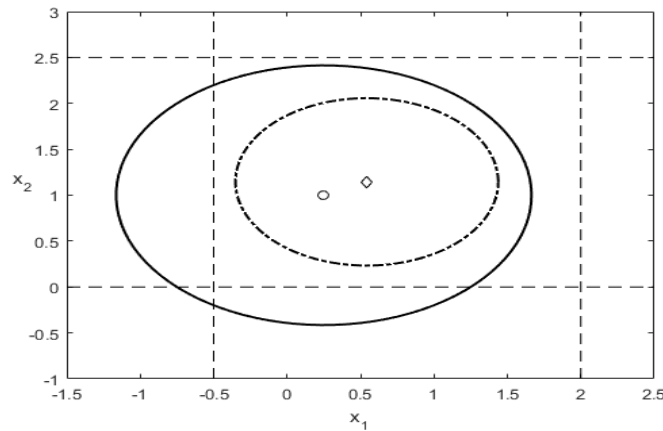


Figura 3.3: Exemplo da abordagem de truncamento em que as estimativas de média $\hat{x}_k = [0,25 \ 1]^T$, representada por (\circ), e covariância $P_k^{xx} = I_{2 \times 2}$, representada por ($—$), de $x_k \in \mathbb{R}^2$ são usadas no passo de truncamento para obter a média $\hat{x}_k^t = [0,5430 \ 1,1452]^T$, representada por (\diamond), e covariância $P_k^{xxt} = \text{diag}([0,4003 \ 0,4157]^T)$, representada por ($- \cdot -$) (aplicacao_da_abordagem_de_truncamento @).

3.3 Métodos de Filtragem por Associação de Conjuntos

Nesta seção são apresentados métodos alternativos de filtragem, baseados no contexto de associação de conjuntos para representar incertezas. Ou seja, em vez de representar incertezas por meio de VA, elas são representadas por conjuntos. Ao contrário dos filtros estocásticos, que são soluções aproximadas para sistemas não lineares, o método de filtragem por associação de conjuntos é denominado garantido quando as hipóteses no início do projeto são satisfeitas. Essas hipóteses são discutidas ao longo das próximas subseções.

3.3.1 Filtro de Kalman Gaussiano e Zonotópico

O filtro de Kalman Gaussiano e zonotópico (ZGKF) pode ser tratado como um método de filtragem híbrida para sistemas lineares, porque ele aborda a fusão de características intrínsecas do KF com a teoria de conjuntos zonotópicos. Embora o ZGKF seja chamado de filtro, ele apresenta a estrutura de um preditor. No ZGKF, a parcela zonotópica garante robustez ao pior caso de perturbação no sistema e computação de domínios, enquanto a parcela estocástica contribui para avaliação probabilística de testes. As definições apresentadas nesta subseção são baseadas em (Combastel, 2015).

A seguir, o vetor de estados é definido como um vetor híbrido x_k^h , que é modelado por duas fontes de incerteza: zonotópica e Gaussiana.

Definição 3.3.1. Vetor híbrido (Combastel, 2015).

Sejam o zototopo degenerado $\mathcal{X}_k = 0_{n \times 1} \oplus G_k^x[\Phi]^{n_s^x} \in \mathbb{R}^n$ e a VAG $X_k \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P_k^{xx})$, em que $x_k^z \in \mathcal{X}_k$ e $x_k^g \in X_k$. O vetor híbrido x_k^h é definido como

$$x_k^h \triangleq \hat{x}_k^h + x_k^z + x_k^g, \quad (3.62)$$

em que $\hat{x}_k^h \in \mathbb{R}^n$ é o centro do vetor de estados x_k^h .

□

A VAG $X \sim \mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$ é utilizada para definir um elipsoide, cuja expressão matemática é igual a (2.29) a menos da parametrização unitária, pois a parametrização é dada pelo maior valor da VA chi quadrado (2.8). Como a VAG tem suporte ilimitado, atribui-se a taxa de erro α do tipo I, que representa a probabilidade da VAG não satisfazer o elipsoide de confiança correspondente.

Definição 3.3.2. Elipsoide de Confiança (Combastel, 2015).

Seja a VAG $X \sim \mathcal{N}(\hat{x}, P^{xx})$, em que $x \in X$ é uma realização, e α o erro do tipo I. O elipsoide de confiança é definido como

$$\mathcal{E}(\hat{x}, P^{xx})_\alpha \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x})^T (P^{xx})^{-1} (x - \hat{x}) \leq \chi_n^2 (1 - \alpha) \right\}, \quad (3.63)$$

em que $\chi_n^2 (1 - \alpha) \in \mathbb{R}$ é o maior valor da distribuição chi quadrado com n graus de liberdade que limita superiormente a matriz de covariância P^{gg} com probabilidade $(1 - \alpha)$. Dessa forma, a probabilidade de x pertencer ao elipsoide (3.63) é

$$p(x \in \mathcal{E}(\hat{x}, P^{xx})_\alpha) = 1 - \alpha. \quad (3.64)$$

□

A partir do elipsoide de confiança definido anteriormente, no teorema a seguir é indicado que o vetor híbrido possui probabilidade mínima de $(1 - \alpha)$ de pertencer ao conjunto resultante da soma do zototopo com o elipsoide de confiança, que são as representações das parcelas zototópica e Gaussiana, respectivamente.

Teorema 3.3.1. Domínios de confiança (Combastel, 2015).

Seja $x^h = \hat{x}^h + x^z + x^g$ o vetor híbrido tal que $x^z \in \mathcal{X} = 0_{n \times 1} \oplus G^x[\Phi]^{n_s^x}$, $x^g \in X \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P^{gg})$ e $\alpha \in [0; 1]$. A seguinte probabilidade é satisfeita:

$$p(x^h \in \hat{x}^h \oplus G^x[\Phi]^{n_s^x} \oplus \mathcal{E}(0_{n \times 1}, P^{gg})_\alpha) \geq (1 - \alpha). \quad (3.65)$$

□

No teorema a seguir, o zototopo \mathcal{X} e o elipsoide de confiança gerado pela VAG X são aproximados individualmente por uma caixa que os contém. A soma destas caixas resulta em outra caixa. Logo, o resultado da soma de Minkowski em (3.65) está contido na nova caixa e o domínio de confiança obtido é ainda maior.

Teorema 3.3.2. Caixa de confiança (Combastel, 2015).

Sejam o zonotopo $\mathcal{X} = 0_{n \times 1} \oplus G^x[\Phi]^{n_g^x} \in \mathbb{R}^n$, o elipsoide de confiança gerado pela VAG $X \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P^{gg})$ e o centro $\hat{x}^h \in \mathbb{R}^n$, que definem o vetor híbrido x^h . Dada a taxa de erro $\alpha \in [0; 1]$, o envoltório intervalar do vetor híbrido x^h é dado por

$$x^\alpha = [\hat{x}^h - r^\alpha; \hat{x}^h + r^\alpha], \quad (3.66)$$

em que $r^\alpha = |G^x| 1_{n_g^x \times 1} + \Upsilon \text{diag}^{\frac{1}{2}}(P^{gg})$, $\Upsilon = \sqrt{\chi_n^2(1-\alpha)}$, $\chi_n^2(1-\alpha) \in \mathbb{R}$ é o maior valor da distribuição chi quadrado com n graus de liberdade, e $\text{diag}^{\frac{1}{2}}(\bullet)$ retorna um vetor coluna contendo a raiz quadrada de cada elemento diagonal da matriz P^{gg} .

□

O critério de otimalidade do ZGKF é a mínima variância. A função de custo J^{ZG} é definida para minimizar conjuntamente as parcelas zotópica e Gaussiana do vetor híbrido. O parâmetro η representa a influência do peso de cada tipo de incerteza na minimização da função de custo J^{ZG} .

Definição 3.3.3. Função de custo J^{ZG} (Combastel, 2015).

Sejam o zonotopo $\mathcal{X}_k = 0_{n \times 1} \oplus G_k^x[\Phi]^{n_g^x} \in \mathbb{R}^n$ e a VAG $X_k \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P_k^{gg})$, que representam o vetor híbrido x_k^h , e $\eta \in [0; 1]$. O critério de minimização J_k^{ZG} é definido como

$$J_k^{ZG}(K_{k-1}) \triangleq (1-\eta)\text{tr}\left(G_k^x(G_k^x)^T\right) + \eta\text{tr}\left(P_k^{gg}\right), \quad (3.67)$$

em que K_{k-1} é o ganho que minimiza a função de custo J_k^{ZG} .

□

A seguir é definida a norma de Frobenius, que é usada como um critério de tamanho de zonotopo.

Definição 3.3.4. Norma de Frobenius (Combastel, 2015).

Seja o zonotopo $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g^x} = \hat{x} \oplus [g_1^x \ g_2^x \ \dots \ g_{n_g^x}^x][\Phi]^{n_g^x}$. A norma de Frobenius de G^x é dada por

$$\|G^x\|_F \triangleq \sqrt{\text{tr}(G^x(G^x)^T)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_g^x} \|g_j^x\|_2^2}. \quad (3.68)$$

□

Seja o sistema dinâmico linear a tempo discreto

$$x_k^h = A_{k-1}x_{k-1}^h + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}^z + w_{k-1}^g, \quad (3.69)$$

$$y_{k-1} = C_{k-1}x_{k-1}^h + v_{k-1}^z + v_{k-1}^g, \quad (3.70)$$

em que $A_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{k-1} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C_{k-1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são matrizes variantes no tempo, $y_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ o vetor de saída e $x_k^h \in \mathbb{R}^n$ os estados a estimar. Observe que (3.69)-(3.70) apresenta duas fontes de incerteza. Primeiramente, w^z e w^g são ruídos de natureza zonotópica e Gaussiana, respectivamente, que modelam incertezas limitadas e ilimitadas associadas ao modelo de processo. Analogamente, os ruídos v^z e v^g modelam incertezas limitadas e ilimitadas relacionadas ao modelo de medição. As variáveis w e v são mutuamente independentes e têm as seguintes características:

$$w_{k-1}^z \in \mathcal{W}_{k-1} = 0_{n \times 1} \oplus G_{k-1}^w [\Phi]^{n_g^w}, \quad (3.71)$$

$$v_{k-1}^z \in \mathcal{V}_{k-1} = 0_{m \times 1} \oplus G_{k-1}^v [\Phi]^{n_g^v}, \quad (3.72)$$

$$w_{k-1}^g \in W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, Q_{k-1}), \quad (3.73)$$

$$v_{k-1}^g \in V_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{m \times 1}, R_{k-1}). \quad (3.74)$$

Por meio da formulação do problema (3.69)-(3.74), o seguinte estimador de estados é proposto em [Combastel \(2015\)](#) para predizer o vetor híbrido x_k^h :

$$x_k^h = A_{k-1}x_{k-1}^h + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}^z + w_{k-1}^g + K_{k-1}(y_{k-1} - C_{k-1}x_{k-1} - v_{k-1}^z - v_{k-1}^g). \quad (3.75)$$

Dado que o vetor híbrido satisfaz (3.62), cada parcela do mesmo é utilizada no estimador (3.75), graças à superposição satisfeita, para definir a predição do vetor híbrido. Assim, \hat{x}_k^h representa apenas os resultados centrais do estimador, x_k^z resultados associados à incerteza zonotópica e x_k^g resultados associados à incerteza Gaussiana. Então, a predição de x_k^h é dada por

$$\hat{K}_{k-1} \triangleq \arg \min_{K_{k-1}} J_k^{ZG}(K_{k-1}), \quad (3.76)$$

$$\hat{x}_k^h \triangleq A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + \hat{K}_{k-1}(y_{k-1} - C_{k-1}\hat{x}_{k-1}), \quad (3.77)$$

$$x_k^z \triangleq A_{k-1}x_{k-1}^z + w_{k-1}^z - \hat{K}_{k-1}(C_{k-1}x_{k-1}^z + v_{k-1}^z), \quad (3.78)$$

$$x_k^g \triangleq A_{k-1}x_{k-1}^g + w_{k-1}^g - \hat{K}_{k-1}(C_{k-1}x_{k-1}^g + v_{k-1}^g), \quad (3.79)$$

em que $x_{k-1}^z \in \mathcal{X}_{k-1} = 0_{n \times 1} \oplus G_{k-1}^x [\Phi]_{k-1}^{n_g^x}$ e $x_{k-1}^g \in X_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P_{k-1}^{gg})$.

O vetor híbrido predito $x_k^h = \hat{x}_k^h + x_k^z + x_k^g$ é caracterizado por $x_k^z \in \mathcal{X}_k = 0_{n \times 1} \oplus G_k^x [\Phi]_k^{n_g^x}$ e $x_k^g \in X_k \sim \mathcal{N}(0_{n \times 1}, P_k^{gg})$. A matriz G_k^x é obtida pelo esquema clássico de predição de zonotopo ([Kühn, 1998](#)) gerando

$$\bar{G}_{k-1}^x = \downarrow_\varphi G_{k-1}^x, \quad (3.80)$$

$$G_k^x = \left[(A_{k-1} - \hat{K}_{k-1}C_{k-1})\bar{G}_{k-1}^x \quad G_{k-1}^w \quad -\hat{K}_{k-1}G_{k-1}^v \right]. \quad (3.81)$$

Em (3.80), $\downarrow_\varphi G_{k-1}^x$ corresponde à redução da parcela zonotópica G_{k-1}^x , sendo \downarrow_φ o operador redução de ordem φ , cujos passos de redução são apresentados no Algoritmo 2.3.1.

A matriz de covariância P_k^{gg} é obtida ao computar a covariância de x_k^g em (3.79). Dadas as relações matriciais $(A+B)^T = A^T + B^T$ e $(AB)^T = B^T A^T$, e garantindo independência entre x_k^g , w_k^g e v_k^g , a covariância de x_k^g resulta em

$$P_k^{gg} = (A_{k-1} - \hat{K}_{k-1}C_{k-1})P_{k-1}^{gg} (A_{k-1} - \hat{K}_{k-1}C_{k-1})^T + Q_{k-1} + \hat{K}_{k-1}R_{k-1}\hat{K}_{k-1}^T. \quad (3.82)$$

Com base na função de custo (3.67) e na predição (3.76)-(3.82), a proposição a seguir permite computar o ganho K_{k-1} de maneira ótima.

Proposição 3.3.1. Ganho ótimo do observador (Combastel, 2015).

Seja a função de custo J_k^{ZG} dada por (3.67), G_k^x por (3.81) e P_k^{gg} por (3.82). O ganho ótimo do observador $\hat{K}_{k-1} = \arg \min_{K_{k-1}} J_k^{ZG}(K_{k-1})$ é dado por

$$\hat{K}_{k-1} = A_{k-1}P_{k-1}^{xx}C_{k-1}^T (C_{k-1}P_{k-1}^{xx}C_{k-1}^T + R_{k-1}^{zg})^{-1}, \quad (3.83)$$

em que

$$P_{k-1}^{xx} = (1 - \eta)\bar{G}_{k-1}^x (\bar{G}_{k-1}^x)^T + \eta P_{k-1}^{gg}, \quad (3.84)$$

$$R_{k-1}^{zg} = (1 - \eta)G_{k-1}^v (G_{k-1}^v)^T + \eta R_{k-1}. \quad (3.85)$$

□

A seguir, é apresentado o algoritmo do ZGKF.

Algoritmo 3.3.1. Filtro de Kalman Gaussiano e zonotópico.

Este algoritmo é resumido na função

$$[\hat{x}_k^h, G_k^x, P_k^{gg}] = \text{ZGKF}(\hat{x}_{k-1}^h, G_{k-1}^x, P_{k-1}^{gg}, A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1}, G_{k-1}^w, G_{k-1}^v, Q_{k-1}, R_{k-1}, \eta, \varphi).$$

Os passos a seguir determinam o algoritmo do ZGKF.

- 1: Dada a inicialização da função ZGKF em $k = 0$, calcule as matrizes P_{k-1}^{xx} e R_{k-1}^{zg} por meio de (3.84) e (3.85), respectivamente, e compute o ganho ótimo \hat{K}_{k-1} em (3.83).
- 2: Utilize (3.77) para calcular o centro predito do vetor de estados \hat{x}_k^h .
- 3: Utilize o Algoritmo 2.3.1 para reduzir o zonotopo de entrada G_{k-1}^x , gerando \bar{G}_{k-1}^x , e calcule a matriz geradora predita G_k^x por (3.81).
- 4: Calcule a matriz de covariância predita P_k^{gg} com base em (3.82).

□

Os passos do ZGKF são ilustrados no diagrama da Figura 3.4.

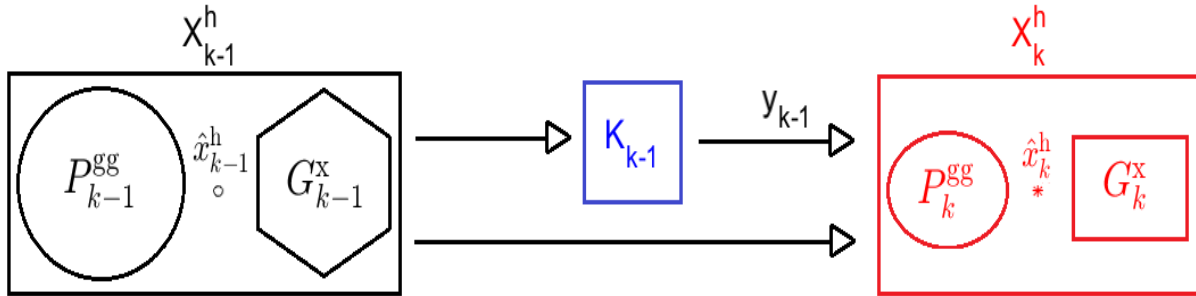


Figura 3.4: Ilustração dos passos do ZGKF, em que X_{k-1}^h é a variável híbrida inicial composta por parcelas Gaussiana P_{k-1}^{gg} , centro \hat{x}_{k-1}^h e zonotópica G_{k-1}^x . A partir desta variável, um ganho K_{k-1} é calculado e, por meio de observações até o instante $k-1$, a variável híbrida atual X_k^h é estimada.

Note que o Algoritmo 3.3.1 não necessita de computar a caixa de confiança (3.66) e considera o suporte ilimitado da incerteza Gaussiana x^g ao longo das iterações. Como o suporte da VAG é ilimitado, utilizá-la para definir os limites de uma VA chi quadrado conduz ao intervalo $[0; +\infty)$. Conforme está definido em (3.63), o valor de parametrização do elipsoide de confiança, neste caso, equivale a $+\infty$ e o erro α é nulo. Dado que o vetor de estados a estimar satisfaz o vetor híbrido (3.62), os estados exatos do sistema pertencem ao conjunto formado pela soma das incertezas zonotópica e Gaussiana. A caixa de confiança é proposta para representar graficamente os estados estimados. Embora a probabilidade dos estados exatos pertencerem à caixa de confiança (3.66) seja unitária, representá-la graficamente corresponde a um resultado impreciso, pois o elipsoide é o próprio espaço Euclidiano. Por isso é proposto representar graficamente uma caixa de confiança com $\alpha > 0$ na qual o elipsoide de confiança é um subconjunto do espaço Euclidiano, a fim de que a diminuição do conservadorismo gere resultados precisos em torno dos estados exatos. Ainda que este procedimento conduza a uma caixa não garantida, para o usual limite de confiança 99,73% (3σ), a soma das incertezas zonotópica e Gaussiana gera um conjunto preciso com probabilidade próxima da unidade.

Observação 3.3.1. A minimização da norma de Frobenius sugere sensibilidade à ordem de redução φ , resultando em conjuntos zonotópicos mais ou menos conservadores. Isso ocorre porque tal minimização não reduz volume efetivamente, pois está associada à redução de norma-2. Segundo (Kühn, 1998), não há uma maneira direta para escolher a ordem de redução φ , pois esta representa um compromisso entre precisão e tempo de processamento. Para diferentes sistemas dinâmicos, espera-se que uma mesma ordem de redução φ conduza a diferentes tamanhos de zonotopo e tempo de processamento. Portanto, uma maneira prática para escolher a ordem de redução φ é por meio de simulações do estimador sem aplicar qualquer algoritmo de redução de ordem. Neste

caso, a ordem de redução φ é escolhida como a ordem de zonotopo n_g para a qual a norma de Frobenius não se altera significativamente ao longo do tempo. Para sistemas dinâmicos contínuos, a ordem de redução pode ser escolhida como a maior possível tal que o tempo de processamento médio da CPU não ultrapasse o período de amostragem do hardware.

Observação 3.3.2. Considere os dois casos extremos para $\eta \in [0; 1]$. Caso $\eta = 1$, não há a presença de ruídos zonotópicos, então, (3.62) resulta em $x_k^h = \hat{x}_k^h + x_k^g$. Assim, o ZGKF reduz ao preditor de Kalman (Kalman et al., 1960). Caso $\eta = 0$, não há a presença de ruídos Gaussianos, então, (3.62) resulta em $x_k^h = \hat{x}_k^h + x_k^z$. Desse modo, o ZGKF reduz ao KF zonotópico (ZKF) (Combastel, 2015).

□

3.3.2 Filtro Zonotópico

A seguir, o filtro zonotópico (ZF) proposto por Alamo et al. (2005) é apresentado em dois casos: (i) não linear, que é o mais geral, e (ii) linear.

Caso Não Linear

Nesta subseção é apresentado o ZF baseado em (Alamo et al., 2005) e (Bravo et al., 2006b) para o caso de sistema não autônomo. Uma importante vantagem deste filtro em relação às soluções aproximadas provenientes das filtragens de Kalman apresentadas na Seção 3.2 é estimar estados garantidos inclusive de sistemas não lineares. Para que as estimativas sejam de fato garantidas, é necessário que as premissas do filtro sejam atendidas, caso contrário não se pode afirmar a característica garantida do mesmo.

Considere o sistema não linear a tempo discreto

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1), \quad (3.86)$$

$$y_k = h(x_k, v_k, k), \quad (3.87)$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ os modelos de processo e medição, respectivamente, $u_{k-1} \in \mathbb{R}^p$ a entrada e $x_k \in \mathbb{R}^n$ os estados a estimar. As parcelas $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ são os ruídos de processo e medição, respectivamente, que podem assumir qualquer característica de amplitude, determinística ou aleatória, desde que estejam limitados aos zonotos correspondentes, isto é, $w_{k-1} \in \mathcal{W}_{k-1}$ e $v_k \in \mathcal{V}_k$. Além disso, os estados iniciais x_0 devem pertencer ao zonotopo inicial $x_0 \in \mathcal{X}_0$, que é um conjunto convexo e compacto.

O algoritmo do ZF é originalmente proposto em três passos, mas nesta subseção é considerado um quarto passo para reduzir zototopo: (i) limitar a trajetória incerta $f(\mathcal{X}_{k-1}, u_{k-1}, \mathcal{W}_{k-1}, k-1)$, (ii) computar o conjunto de estados consistente $\mathcal{Y}_{k|k-1}$, (iii) computar o conjunto de estados incerto e exato \mathcal{X}_k e (iv) reduzir o zonotopo \mathcal{X}_k

para o zonotopo \check{X}_k . Dado o conjunto compacto X_{k-1} , a trajetória incerta limitada $f(X_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1)$ do sistema não linear é obtida utilizando uma extensão intervalar $\Psi(X_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1)$ tal que

$$\check{X}_{k|k-1} = \Psi(X_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1) \supseteq f(X_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1).$$

O conjunto de estados consistente $\mathcal{Y}_{k|k-1}$ é definido como

$$\mathcal{Y}_{k|k-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : y_k \in h(x, V_k, k)\}$$

e aproximado pela faixa $\check{\mathcal{Y}}_{k|k-1}$. O conjunto de estados incerto e exato X_k é definido pela interseção

$$X_k = f(X_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1) \cap \mathcal{Y}_{k|k-1}, k \geq 1,$$

e aproximado por

$$\check{X}_k = \check{X}_{k|k-1} \cap \check{\mathcal{Y}}_{k|k-1}.$$

Por fim, a redução de ordem do zonotopo \check{X}_k é realizada pelo operador \downarrow_φ com ordem de redução φ . O primeiro passo é semelhante à predição do KF, enquanto os passos (ii) e (iii) são semelhantes à assimilação de dados. O quarto passo é introduzido para reduzir tempo de processamento.

A seguir, são apresentados três teoremas bases do algoritmo do ZF proposto por [Alamo et al. \(2005\)](#). Depois, o algoritmo do ZF é apresentado retomando os teoremas. O primeiro teorema é o resultado do Fato 2.4.5 e permite obter a predição de um zonotopo pelo modelo de processo f .

Teorema 3.3.3. Dada a função $f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1)$, o zonotopo $\check{X}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} \oplus G_{k-1}^x [\Phi]^{n_x^x}$ e o zonotopo $W_{k-1} = \hat{w}_{k-1} \oplus G_{k-1}^w [\Phi]^{n_w^w}$, tem-se que

- O zonotopo

$$\mathcal{Z} \triangleq f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1), \quad (3.88)$$

- A matriz intervalar

$$[M] \triangleq \Delta \left\{ \nabla_x f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1) \right\} G_{k-1}^x, \quad (3.89)$$

- O zonotopo

$$\Psi(\check{X}_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1) = \mathcal{Z} \oplus \diamond \{0_{n \times 1} \oplus [M][\Phi]^{n_x^x}\}, \quad (3.90)$$

são tais que $f(\check{X}_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1) \subseteq \Psi(\check{X}_{k-1}, u_{k-1}, W_{k-1}, k-1)$.

□

Quando $f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, k-1)$ é uma função linear, a soma de Minkowski pode ser utilizada no Teorema 3.3.3, a fim de que $f(\check{X}_{k-1}, u_{k-1}, \mathcal{W}_{k-1}, k-1)$ seja computado de maneira exata (Bravo et al., 2006b). Pelo teorema a seguir, é possível definir uma faixa, que é um conjunto consistente com a medição.

Teorema 3.3.4. Dada a função $h(x_k, v_k, k)$, o zonotopo $\check{X}_{k|k-1}$, o zonotopo \mathcal{V}_k e as observações y_k , é possível obter o vetor $c_i \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $s_i, \rho_i \in \mathbb{R}$

$$c_i = \text{mid} \left(\Delta \left\{ \nabla_x h_i(\check{X}_{k|k-1}, \mathcal{V}_k, k)^T \right\} \right), \quad (3.91)$$

$$[\Lambda] = \Delta \left\{ c_i^T \check{X}_{k|k-1} - h_i(\check{X}_{k|k-1}, \mathcal{V}_k, k) \right\}, \quad (3.92)$$

$$s_i = \text{mid}([\Lambda]), \quad (3.93)$$

$$\rho_i = \frac{1}{2} \text{diam}([\Lambda]), \quad (3.94)$$

tal que $[\Lambda] \supseteq \{c_i^T \check{X}_{k|k-1} - h_i(\check{X}_{k|k-1}, \mathcal{V}_k, k)\}$. Neste caso, a faixa $\check{Y}_{i,k|k-1} = \{x : |c_i^T x - d_i| \leq \rho_i\}$, em que $d_i = y_{i,k} + s_i$, é tal que $\check{X}_{k|k-1} \cap \mathcal{Y}_{i,k|k-1} \subseteq \check{X}_{k|k-1} \cap \check{Y}_{i,k|k-1}$.

□

Observação 3.3.3. Em (3.92), o conjunto exato é sobrestimado por um intervalo $[\Lambda]$, visto que os parâmetros s_i e ρ_i são obtidos por operações intervalares. Antes de realizar a sobrestimação, qualquer extensão intervalar pode ser usada, de modo que os zonotos envolvidos nas operações não são necessariamente transformados em envoltório intervalar. Note que quando h é uma função não linear, o efeito de dependência surge na equação (3.92), já que o conjunto $\check{X}_{k|k-1}$ aparece mais de uma vez. No entanto, a mesma equação pode não ser sujeita ao efeito de alargamento, visto que apenas uma dimensão da transformação é usada por vez.

□

A interseção entre o zonotopo $\check{X}_{k|k-1}$ e a faixa $\check{Y}_{i,k|k-1}$ pode ser computada de duas maneiras neste trabalho. A primeira delas é dada pelo seguinte teorema (Alamo et al., 2005):

Teorema 3.3.5. Dado o zonotopo $\check{X}_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} \oplus G_{k|k-1}^x [\Phi]^{n_s^x}$, o vetor $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e a faixa $\check{Y}_{k|k-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \rho\}$, tem-se que

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \lambda (d - c^T \hat{x}_{k|k-1}), \quad (3.95)$$

$$G_k^x = \left[(I_{n \times n} - \lambda c^T) G_{k|k-1}^x \quad \rho \lambda \right], \quad (3.96)$$

são tais que $\mathcal{X}_k \cap \mathcal{Y}_k \subseteq \check{X}_k = \hat{x}_k \oplus G_k^x [\Phi]^{(n_s^x+1)}$.

□

O vetor λ é dado pela minimização de um critério de tamanho do zonotopo $\check{X}_k(\lambda)$, que influencia no conservadorismo do conjunto atualizado. Dois critérios de minimização são apresentados em (Alamo et al., 2005): (i) minimização de segmentos ou norma de Frobenius e (ii) minimização de volume.

Dado um zonotopo $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^n$ e uma faixa $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \rho\}$, pode-se computar o vetor $\lambda \in \mathbb{R}^n$, de forma análoga ao ganho de Kalman, buscando minimizar a norma de Frobenius do zonotopo $\check{X}_k(\lambda)$

$$\lambda = \frac{G^x (G^x)^T c}{c^T G^x (G^x)^T c + \rho^2}. \quad (3.97)$$

Outra forma de definir o vetor λ é utilizar o algoritmo de minimização de volume (Alamo et al., 2005). Dado um zonotopo $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^n$ e uma faixa $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \rho\}$, pode-se calcular, por meio de um algoritmo de otimização, o vetor λ que minimiza o volume do zonotopo $\check{X}_k(\lambda)$

$$\text{Vol}(\check{X}_k(\lambda)) = 2^n \sum_{i=1}^{N(n_g, n)} \left| \det \left[(I_{n \times n} - \lambda c^T) A_i \right] \right| + 2^n \sum_{i=1}^{N(n_g, n-1)} \left| \det \left[(I_{n \times n} - \lambda c^T) B_i \quad \rho \lambda \right] \right|, \quad (3.98)$$

em que $N(n_g, n)$ é a combinação matemática que retorna os diferentes caminhos de escolher n elementos de um conjunto n_g , $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota todas as matrizes que podem ser obtidas tomando n colunas da matriz G^x e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ denota todas as matrizes que podem ser obtidas tomando $n-1$ colunas da matriz G^x .

Observação 3.3.4. Outra forma de calcular a interseção \check{X}_k é proposta por Bravo et al. (2006a). Dado um zonotopo $\mathcal{X} = \hat{x} \oplus G^x[\Phi]^{n_g} = \hat{x} \oplus [g_1^x \ g_2^x \ \dots \ g_{n_g}^x][\Phi]^{n_g} \subset \mathbb{R}^n$ e uma faixa $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : |c^T x - d| \leq \rho\}$, para $j = 0, 1, \dots, n_g$, são definidos $(n_g + 1)$ zonotosos $\bar{X}(j) = \bar{x}(j) \oplus \bar{G}(j)[\Phi]^{n_g}$ em que

$$\bar{x}(j) = \begin{cases} \hat{x} + \frac{(d - c^T \hat{x})}{c^T g_j^x} g_j^x, & \text{se } 1 \leq j \leq n_g \text{ e } c^T g_j^x \neq 0 \\ \hat{x}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.99)$$

$$\bar{g}_i^j = \begin{cases} g_i^x - \frac{c^T g_i^x}{c^T g_j^x} g_j^x, & \text{se } i \neq j \\ \frac{\rho}{c^T g_j^x} g_j^x, & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (3.100)$$

$$\bar{G}(j) = \begin{cases} [\bar{g}_1^j \ \bar{g}_2^j \ \dots \ \bar{g}_{n_g}^j], & \text{se } 1 \leq j \leq n_g \text{ e } c^T g_j^x \neq 0 \\ G^x, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.101)$$

O zonotopo escolhido é o de menor volume com base na equação

$$\text{Vol}(\bar{\mathcal{X}}) = 2^n \sum_{i=1}^{N(n_g, n)} |\det(A_i)|. \quad (3.102)$$

□

Em geral, a minimização de segmentos (3.97) apresenta menor custo computacional do que algoritmos baseados em minimização de volume, apesar de gerar zonotopos mais conservadores. A abordagem de minimização de volume (3.98) necessita de um algoritmo de otimização a cada iteração, por isso demanda mais tempo de processamento do que a minimização de segmentos. Essa minimização gera um zonotopo menos conservador, mas não impede que algumas direções do zonotopo sejam muito incertas. O volume $\text{Vol}(\check{\mathcal{X}}(\lambda))$ é uma função convexa de λ , pois zonotopo é um conjunto convexo, assim, só existe uma solução. Então, encontrar o vetor ótimo λ que minimiza o volume do zonotopo $\check{\mathcal{X}}(\lambda)$ é um problema convexo (Bravo et al., 2004).

Em (3.99)-(3.101), são gerados $(n_g + 1)$ zonotopos candidatos que satisfazem $\mathcal{X} \cap \mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{X}} = \bar{x} \oplus \bar{G}[\Phi]^{n_g}$. O critério para escolha do melhor zonotopo é o menor volume dado por (3.102), que permite computar o volume de um zonotopo qualquer. Esta interseção apresenta melhoria significativa em relação a (3.98) devido à ausência do algoritmo de minimização. Assim, resultados similares são obtidos com tempo de processamento muito menor. Além disso, a ordem do zonotopo de entrada é mantida. A seguir, o algoritmo do ZF é apresentado.

Algoritmo 3.3.2. Filtro zonotópico.

Este algoritmo é resumido na função

$$\bar{\mathcal{X}}_k = \text{ZF}(\check{\mathcal{X}}_{k-1}, \mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{V}_k, u_{k-1}, y_k, \varphi, f, h).$$

Dada a inicialização da função ZF em $k = 0$, em que φ é a ordem de redução, os passos seguintes definem o algoritmo do ZF.

- Predição do zonotopo $\check{\mathcal{X}}_{k|k-1}$.
Utilize o Teorema 3.3.3 para computar o zonotopo $\check{\mathcal{X}}_{k|k-1}$.
- Medição.
A partir dos zonotopos $\check{\mathcal{X}}_{k|k-1}$ e \mathcal{V}_k , e da i -ésima medição $y_{i,k}$, utilize o Teorema 3.3.4 para computar a i -ésima faixa $\check{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}$.
- Interseção (Alamo et al., 2005).
Compute a interseção $\check{\mathcal{X}}_k$ por meio do Teorema 3.3.5 com base na minimização de segmentos (3.97). Enquanto todas as medições $y_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, m$, não forem utilizadas, volte ao passo anterior.

- Redução do zonotopo $\check{\mathcal{X}}_k$.

Utilize o Algoritmo 2.3.1 de redução de zonotopo para reduzir a ordem do zonotopo $\check{\mathcal{X}}_k$ gerando $\bar{G}_k^x = \downarrow_{\varphi} G_k^x$, que é a matriz geradora do zonotopo de saída deste algoritmo $\bar{\mathcal{X}}_k$.

□

Os passos do ZF são ilustrados no diagrama da Figura 3.5.

Observação 3.3.5. Há ocasiões em que o ZF não converge devido à sensibilidade do filtro a dinâmicas não lineares, oriunda da utilização da aritmética intervalar nos dois primeiros passos do ZF. Isso ocorre devido ao efeito de alargamento e ao efeito de dependência. Uma forma de contornar isso, mesmo que nem sempre garanta convergência e resultados precisos, é linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio a cada instante de tempo, como é realizado no EKF (3.16)-(3.17). Neste caso, o ponto de equilíbrio x^{eq} é escolhido como a estimativa mais atual de centro do zonotopo \mathcal{X} .

□

O algoritmo proposto por Alamo et al. (2005) é geral, dado que estima estados de sistemas tanto lineares quanto não lineares. Entretanto, esse algoritmo apresenta algumas limitações, principalmente no contexto não linear, que têm sido melhoradas, como longo tempo de processamento da minimização de volume, sensibilidade aos efeitos de alargamento e dependência, e imprecisão na estimação de estados com modelo de saída não linear.

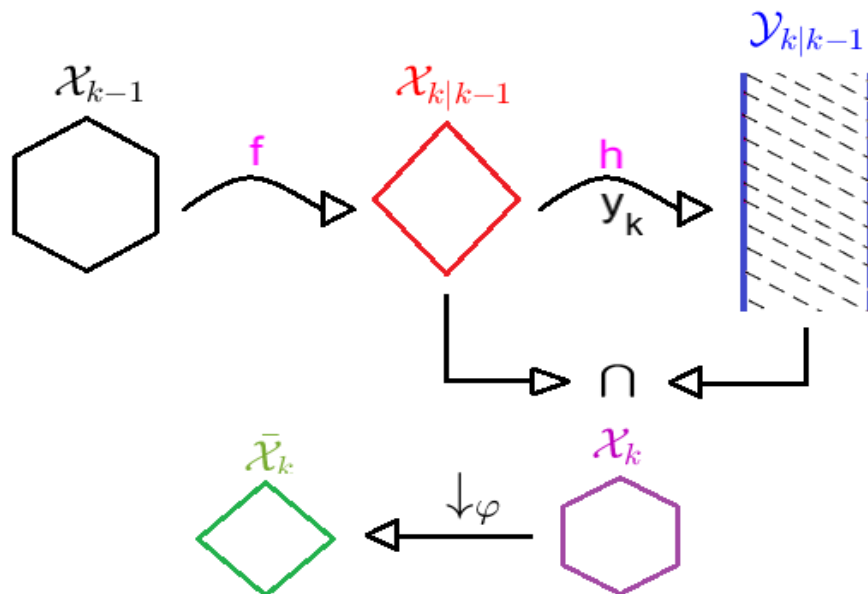


Figura 3.5: Ilustração dos passos de predição, $\mathcal{X}_{k|k-1}$, medição, $\mathcal{Y}_{k|k-1}$, interseção, \mathcal{X}_k , e redução de zonotopo, $\bar{\mathcal{X}}_k$, do ZF.

Caso Linear

Considere que as funções f e h são lineares, gerando o sistema dinâmico linear a tempo discreto

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + B_{k-1}^z w_{k-1}, \quad (3.103)$$

$$y_k = C_k x_k + D_k^z v_k, \quad (3.104)$$

em que A_{k-1} , B_{k-1} , B_{k-1}^z , C_k e D_k^z são matrizes variantes no tempo, o superescrito z significa transformação linear de uma variável zonotópica, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados a estimar, u_{k-1} é o vetor de entrada, y_k é o vetor de saída, $w_{k-1} \in \mathbb{R}^q$ e $v_k \in \mathbb{R}^r$ são os ruídos de processo e medição, respectivamente, que são assumidos desconhecidos, mas limitados aos zonotos correspondentes, isto é, $w_{k-1} \in \mathcal{W}_{k-1}$ e $v_k \in \mathcal{V}_k$. Além disso, os estados iniciais x_0 devem pertencer ao zonotopo inicial $x_0 \in \mathcal{X}_0$.

A seguir, é apresentada a versão simplificada do ZF para o modelo linear (3.103)-(3.104).

Algoritmo 3.3.3. Filtro zonotópico linear.

Este algoritmo é resumido na função

$$\bar{\mathcal{X}}_k = \text{LZF}(\check{\mathcal{X}}_{k-1}, A_{k-1}, B_{k-1}, B_{k-1}^z, C_k, D_k^z, \mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{V}_k, u_{k-1}, y_k, \varphi).$$

Dada a inicialização da função LZF em $k = 0$, em que φ é a ordem de redução, os procedimentos a seguir determinam os passos do ZF para o caso linear.

- Predição do zonotopo $\check{\mathcal{X}}_{k-1}$.

Dado o modelo de processo (3.103), o zonotopo $\check{\mathcal{X}}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} \oplus G_{k-1}^x [\Phi]_{k-1}^{n_s^x}$ e o zonotopo $\mathcal{W}_{k-1} = \hat{w}_{k-1} \oplus G_{k-1}^w [\Phi]_{k-1}^{n_s^w}$, determine o zonotopo $\check{\mathcal{X}}_{k|k-1} = \hat{x}_{k|k-1} \oplus G_{k|k-1}^x [\Phi]_{k|k-1}^{n_s^x}$ de forma exata pelo esquema clássico de predição de zonotopo (Kühn, 1998), em que

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + B_{k-1}^z \hat{w}_{k-1}, \quad (3.105)$$

$$G_{k|k-1}^x = \begin{bmatrix} B_{k-1}^z G_{k-1}^w & A_{k-1} G_{k-1}^x \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

- Medição.

A partir dos zonotos $\check{\mathcal{X}}_{k|k-1}$ e \mathcal{V}_k , e da i -ésima medição $y_{i,k}$, utilize o Teorema 3.3.4 para computar a i -ésima faixa $\check{\mathcal{Y}}_{i,k|k-1}$. Note que, como h é linear, (3.92) é simplificada em

$$[\Lambda] = \Delta \{D_k^z \mathcal{V}_k\}. \quad (3.107)$$

- Interseção (Alamo et al., 2005).

Compute a interseção \check{X}_k por meio do Teorema 3.3.5 com base na minimização de segmentos (3.97). Enquanto todas as medições $y_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, m$, não forem utilizadas, volte ao passo anterior.

- Redução do zonotopo \check{X}_k .

Utilize o Algoritmo 2.3.1 de redução de zonotopo para reduzir a ordem do zonotopo \check{X}_k gerando $\bar{G}_k^x = \downarrow_{\varphi} G_k^x$, que é a matriz geradora do zonotopo de saída deste algoritmo \check{X}_k .

□

Observação 3.3.6. Note que (3.107) depende apenas do zonotopo de ruído de medição. Assim, não existe efeito de dependência. Entretanto, ainda que não exista efeitos de alargamento e dependência no cômputo da faixa \check{Y} , o efeito de alargamento aparece ao aproximar o conjunto consistente exato \mathcal{Y} pela faixa \check{Y} , que é um conjunto ilimitado.

□

3.3.3 Filtro Zonotópico Não Linear com Restrição Intervalar nos Estados

O ZF proposto por Alamo et al. (2005) não trata restrições nos estados. Então, é possível obter zonotopos inconsistentes com a região de restrição. Uma maneira intuitiva de levar em conta restrições intervalares nos estados é aplicar uma interseção entre o zonotopo obtido pelo ZF e a caixa de restrição, que representa o conjunto intervalar de restrição. Como zonotopos não satisfazem à propriedade de interseção, esta deve ser sobrestimada a fim de ser representada por um zonotopo. Com o intuito de tratar restrições intervalares nos estados, este trabalho propõe uma variação do ZF, cujo algoritmo é denominado IZF. Este algoritmo independe dos tipos de interseção e minimização utilizados. Após os passos de predição, medição e interseção do ZF, uma interseção entre o zonotopo obtido pelo ZF e a caixa de restrição é proposta. O procedimento de interseção é o mesmo do ZF, ou seja, a interseção desejada é aproximada pela interseção entre zonotopo e faixa. A diferença é que cada faixa é definida diretamente pelas restrições intervalares, portanto, não há efeitos de alargamento e dependência associados. O algoritmo do IZF é apresentado a seguir.

Algoritmo 3.3.4. Filtro zonotópico não linear com restrição intervalar nos estados.

Este algoritmo é resumido na função

$$\bar{X}_k = \text{IZF}(\check{X}_{k-1}, \mathcal{W}_{k-1}, \mathcal{V}_k, u_{k-1}, y_k, \varphi, a_k, b_k, f, h).$$

Dada a inicialização da função IZF em $k = 0$, os passos seguintes definem o algoritmo do IZF.

- Predição do zonotopo $\check{X}_{k|k-1}$.

Utilize o Teorema 3.3.3 para computar o zonotopo $\check{X}_{k|k-1}$.

- Medição.

A partir dos zonotosos $\check{X}_{k|k-1}$ e \mathcal{V}_k , e da i -ésima medição $y_{i,k}$, utilize o Teorema 3.3.4 para computar a i -ésima faixa $\check{Y}_{i,k|k-1}$.

- Interseção-I (Alamo et al., 2005).

Compute a interseção \check{X}_k por meio do Teorema 3.3.5 com base na minimização de segmentos (3.97). Enquanto todas as medições $y_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, m$, não forem utilizadas, volte ao passo anterior.

- Interseção-II.

- 1: Dada a interseção \check{X}_k , determine o envoltório intervalar correspondente por (2.38)

$$\mathcal{H} = \Delta \{ \check{X}_k \}. \quad (3.108)$$

- 2: Dado o envoltório intervalar \mathcal{H} e a caixa de restrição \mathcal{R} , definida pelas restrições a_k e b_k , calcule a interseção intervalar

$$\mathcal{I} = \mathcal{H} \cap \mathcal{R}. \quad (3.109)$$

- 3: Caso a interseção \mathcal{I} seja igual ao envoltório intervalar \mathcal{H} , o zonotopo \check{X}_k é escolhido como a saída deste sub-passo, pois a restrição já é satisfeita pelo zonotopo. Caso contrário, utilize cada restrição intervalar da caixa \mathcal{R} para gerar uma faixa \mathcal{S} e, com isso, realize os mesmos procedimentos da Interseção-I para computar a interseção entre a faixa \mathcal{S} e o zonotopo \check{X}_k .

- Redução do zonotopo \check{X}_k .

Utilize o Algoritmo 2.3.1 de redução de zonotopo para reduzir a ordem do zonotopo do passo anterior gerando $\bar{G}_k^x = \downarrow_\varphi G_k^x$, que é a matriz geradora do zonotopo de saída deste algoritmo \check{X}_k .

□

A fim de melhor evidenciar os passos do IZF, o diagrama da Figura 3.6 é apresentado supondo que a interseção proposta neste trabalho é aplicada a cada iteração.

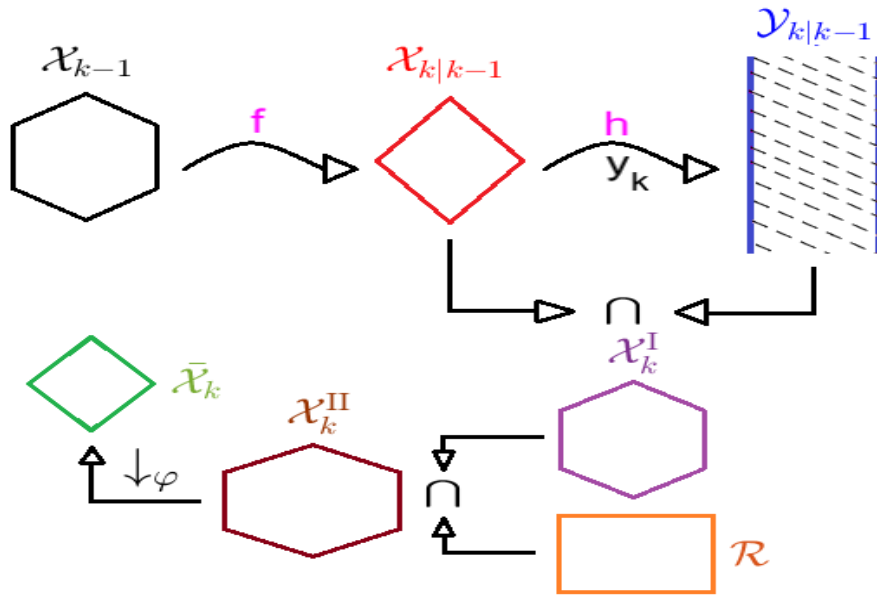


Figura 3.6: Ilustração dos passos de predição, $\mathcal{X}_{k|k-1}$, medição, $\mathcal{Y}_{k|k-1}$, interseção-I, \mathcal{X}_k^I , interseção-II, \mathcal{X}_k^{II} , e redução de zonotopo, $\bar{\mathcal{X}}_k$, do IZF. Neste caso, a interseção-II é aplicada a cada iteração.

As restrições intervalares a_k e b_k , representadas pela caixa de restrição \mathcal{R} , são utilizadas em todas as iterações do Algoritmo 3.3.4. A interseção \mathcal{I} é escolhida como parâmetro para identificar se o zonotopo $\check{\mathcal{X}}_k$, obtido pelo passo Interseção-I, satisfaz completamente as restrições intervalares. Quando o zonotopo não satisfaz todas as restrições, a interseção entre a caixa de restrição \mathcal{R} e o zonotopo $\check{\mathcal{X}}_k$ é realizada por meio da Interseção-II, que gera um resultado menos conservador do que \mathcal{I} . Como a interseção só é considerada de forma conveniente, diminui-se a perda de precisão desnecessária que o algoritmo teria caso ela sempre fosse incorporada no zonotopo de saída. Pelo pacote de extensão INTLAB, a interseção entre intervalos pode ser computada pela função *intersect*.

O passo de interseção proposto no Algoritmo 3.3.4 é exemplificado a seguir.

Exemplo 3.3.1. Considere o zonotopo $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e a caixa de restrição $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}$. Aplicando o quarto passo do Algoritmo 3.3.4 e utilizando as minimizações de segmentos e volume propostas por Alamo et al. (2005) são gerados os resultados ilustrados na Figura 3.7.

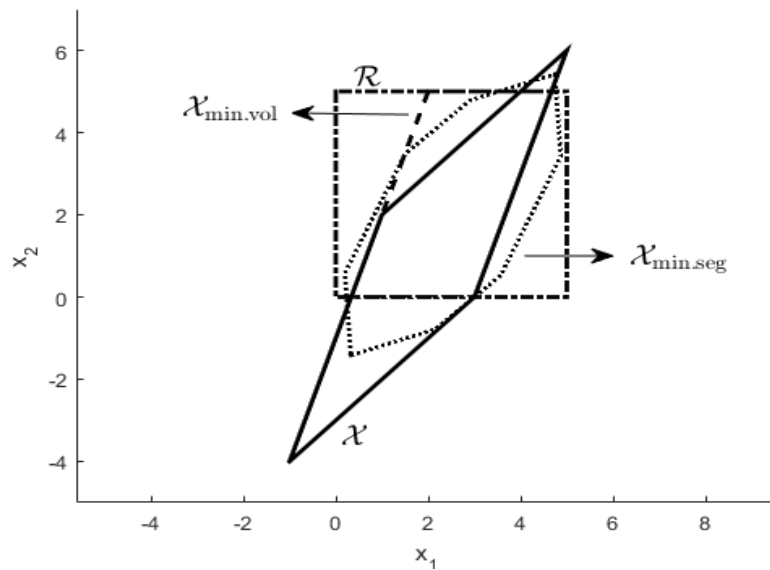


Figura 3.7: Exemplo de aplicação do quarto passo do Algoritmo 3.3.4 para realizar a interseção entre a caixa de restrição intervalar \mathcal{R} , representada por $(-\cdot-)$, e o zonotopo \mathcal{X} , representado por $(—)$, gerando outros zonotopos pelas minimizações de segmentos ($\mathcal{X}_{\min.\text{seg}}$), representado por $(:)$, e volume ($\mathcal{X}_{\min.\text{vol}}$), representado por $(--)$, (intersecao_caixa_e_zonotopo @).

Note que as interseções retornadas são sobrestimadas. Isso ocorre porque, em geral, a interseção entre zonotopos não é um zonotopo, visto que o conjunto exato nem sempre é centralmente simétrico. Então, é necessário sobrestimar o conjunto exato para reescrevê-lo em termos de zonotopos comuns.

□

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo, foram apresentados diferentes algoritmos para estimar estados visando atender restrições intervalares. Nos filtros estocásticos foram expostas as abordagens ICUT, otimização e truncamento da PDF *a posteriori*. Uma vez que a covariância da VAG original, relacionada a 1σ , ultrapassa a região da restrição intervalar, a ICUT tem a vantagem de gerar estimativas de média e covariância mais precisas por meio de pontos sigma com pesos diferenciados. A abordagem de otimização sempre gera estimativas de estados restritas à região de restrição com pelo menos 68% de confiança. A abordagem de truncamento da PDF tem a vantagem de sempre modificar os dois primeiros momentos da PDF original, de maneira que a maior área da PDF pertença à região da restrição. Estas abordagens geram soluções mais precisas do que o UKF, no

entanto, os resultados obtidos pelos filtros correspondentes são aproximados, devido a erros de linearização estatística empregada pela UT.

Quanto às técnicas de associação de conjuntos, o ZGKF é formulado para sistemas lineares inspirado no observador de Luenberger. Este filtro funde conhecimentos estatísticos sobre VAG com conjuntos zonotópicos. A caixa de confiança (3.66) é introduzida a fim de que limites para os estados sejam obtidos segundo o erro α .

O ZF é outra técnica de associação de conjuntos formulada pela interseção entre zonotopo e faixa. Diferentemente do ZGKF, o ZF pode ser utilizado também em sistemas não lineares. Estes filtros só podem conduzir à estimação garantida quando as hipóteses feitas no início do projeto são satisfeitas. Em geral, o ZF apresenta melhor desempenho do que o ZGKF. O ZF pode se tornar impreciso em sistemas não lineares devido ao efeito de dependência, dado que os zonotos dos estados aparecem mais de uma vez, e ao efeito de alargamento, pois o algoritmo considera sobrestimações em cada passo. Duas formas de computar a interseção do ZF foram apresentadas: interseção proposta por [Alamo et al. \(2005\)](#), visando redução da norma de Frobenius ou volume de zonotopo, e a outra proposta por [Bravo et al. \(2006a\)](#) baseada em mínimo volume. Mesmo quando a minimização de volume é utilizada, o ZF não impede que alguns estados sejam imprecisos, ou seja, nem todas as direções alcançam a mesma precisão. A partir do ZF, foi proposto um novo passo, a fim de que restrições intervalares fossem consideradas, gerando o algoritmo IZF.

Exemplos Numéricos

“Eles disseram: Crê no Senhor Jesus Cristo e serás salvo, tu e tua casa.”

At 16:31

4.1 Introdução

Neste capítulo são aplicados os métodos de filtragem estocástica e de associação de conjuntos apresentados no Capítulo 3 a seis exemplos. O objetivo principal é compreender como os algoritmos funcionam frente a: incerteza nos parâmetros, incertezas de natureza Gaussiana e zonotópica, e restrições nos estados. Além disso, deseja-se analisar a questão de sintonia dos filtros, sensibilidade a condições iniciais e explorar vantagens e desvantagens dos algoritmos. Primeiramente, dois sistemas lineares são apresentados baseados em incerteza nos parâmetros (Alamo et al., 2005) e incerteza híbrida (Combastel, 2015), cuja estimação de estados é realizada pelos métodos KF, ZGKF e ZF. Depois, dois sistemas não lineares são utilizados para comparar o UKF e o ZF, a saber: sistema de Lorenz (Wolf et al., 1985) e rastreamento de um veículo (Xu et al., 2017). Em seguida, dois sistemas não lineares *benchmark* com restrições intervalares são apresentados: reator em batelada (Tenny et al., 2004) e reator de tanque continuamente misturado (Kolås et al., 2009). Neste caso, a estimação de estados é feita pelos algoritmos UKF, IUKF, TUKF, OUKF e IZF. Para comparar os métodos de filtragem utilizados, os índices de desempenho raiz quadrada do erro quadrático médio, traço médio e tempo de processamento médio da CPU são empregados. Com o intuito de evitar ambiguidades sobre exatidão de estimativas, o termo *precisão* é usado para caracterizar incerteza de matriz de covariância e matriz geradora, enquanto *acurácia* é usado para médias e centros.

4.2 Sistemas Lineares

Dois exemplos são apresentados nesta seção. O primeiro deles considera um sistema sujeito a incertezas Gaussianas, cujo domínio é ilimitado, e a um parâmetro intervalar

desconhecido. No segundo exemplo, o sistema abordado não considera parâmetro desconhecido, mas contém incertezas de natureza Gaussiana e zonotópica, cujo domínio é restringido por zonotopos. Para estimar os estados destes sistemas, são utilizados os algoritmos KF, ZGKF e ZF.

4.2.1 Sistema com Parâmetro Intervalar

Descrição do Processo

Considere o sistema linear (Alamo et al., 2005)

$$x_k = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1 + 0,3\zeta_{k-1} \end{bmatrix} x_{k-1} + 0,02 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} w_{k-1}, \quad (4.1)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x_k + 0,2v_k, \quad (4.2)$$

em que $\zeta_{k-1} \in \mathcal{X}_{k-1}^\zeta \subset \mathbb{R}$ é um parâmetro desconhecido mas limitado no intervalo $[-1; 1]$, $w_{k-1} \in W_{k-1} \subset \mathbb{R}$ e $v_k \in V_k \subset \mathbb{R}$ são ruídos Gaussianos de processo e medição, respectivamente. Além disso, x_k é o vetor de estados a estimar, tal que $x_0 \in X_0$.

Este sistema foi proposto por Xie et al. (1994) com o intuito de comparar duas abordagens de filtragem: a técnica padrão de KF e outra que leva em conta o parâmetro intervalar desconhecido ζ_{k-1} com norma limitada, a fim de minimizar o traço da matriz de covariância garantida dos estados. Neste exemplo, deseja-se computar os estados do sistema na presença do parâmetro variante no tempo ζ_{k-1} .

Para simular o sistema proposto, são escolhidos $x_0 = 0_{2 \times 1}$, em que $0_{2 \times 1}$ é o vetor de elementos nulos, realizações da PDF uniforme $\mathcal{U}(-1,1)$ para ζ_{k-1} , e realizações $W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, Q_{k-1})$ e $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ com $Q_{k-1} = R_k = 1$. Seis cenários são propostos para avaliar o desempenho dos filtros de acordo com a sintonia dos estados e termos de ruído dos mesmos: (i) cenário preciso cuja sintonia é a referência, uma vez que as incertezas Gaussianas são consideradas conhecidas exatamente, (ii) inicialização ruim das estimativas de estados, (iii)-(vi) sintonia ruim dos ruídos de processo e medição. No cenário (i), o KF é inicializado com a média $\hat{x}_0 = 0_{2 \times 1}$ e matrizes de covariância $P_0^{\text{xx}} = I_{2 \times 2}$, $Q_{k-1} = R_k = 1$, em que $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade. Como existem apenas ruídos Gaussianos, o ZGKF reduz ao preditor de Kalman, $\eta = 1$, $P_0^{\text{gg}} = P_0^{\text{xx}}$ e $\alpha = 0,0027$ é o usual nível de confiança $3\sigma_x$. O ZGKF e o ZF são sintonizados com $\mathcal{W}_{k-1} = \mathcal{V}_k = 0 \oplus 3[\Phi]$, $X_0 = 0_{2 \times 1} \oplus 3I_{2 \times 2}[\Phi]^2$ e ordem de redução $\varphi = 14$, em que $[\Phi] = [-1; 1]$ é a caixa unitária. Note que as incertezas zonotópicas são escolhidas como os menores intervalos que contêm o domínio das incertezas aleatórias com 99,73% de confiança. Os estados iniciais dos algoritmos usados são ilustrados na Figura 4.1, em que o intervalo do ZGKF é gerado segundo a caixa de confiança (3.66).

Como o KF e o ZGKF não consideram parâmetros incertos, durante a estimação de estados, o parâmetro ζ_{k-1} é escolhido fixo e igual a zero, que é o valor médio dele. Por outro lado, como o ZF utiliza aritmética intervalar, é possível considerar o

parâmetro intervalar ζ , substituindo-o pelo intervalo correspondente $\mathcal{X}_{k-1}^{\zeta} = 0 \oplus 1[\Phi]$. Dois algoritmos de minimização são utilizados com o ZF: minimização de segmentos (3.97) e minimização de volume (3.99)-(3.101).

No cenário (ii), o desvio padrão das estimativas de estados iniciais $\sigma_{x_i} \triangleq \sqrt{P_{(i,i)}^{xx}}$ é aumentado em 100 vezes. Nos cenários (iii) e (iv), os desvios padrão dos ruídos de processo e medição são aumentados em 100 vezes, respectivamente. Por fim, nos cenários (v) e (vi), os desvios padrão dos ruídos de processo e medição são reduzidos em 100 vezes, respectivamente. Note que, na simulação do sistema, os parâmetros de estados e ruídos são sempre os mesmos da referência, a diferença é que estes parâmetros são considerados diferentes na entrada dos algoritmos conforme o cenário considerado.

Para comparar as estimativas dos filtros empregados, dois critérios de desempenho são apresentados: (i) o tempo de processamento médio da CPU (T^{CPU}) e (ii) a raiz quadrada do erro quadrático médio da estimativa central do j -ésimo estado ($RMSE_j$)

$$RMSE_j = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_{j,k} - \hat{x}_{j,k,m})^2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

em que n é a quantidade de variáveis de estados, N é o tempo final e M é a quantidade de realizações Monte Carlo. A configuração do computador utilizado é: HD de 160Gb, memória RAM de 3,25Gb, Windows 7 Ultimate, processador Intel core 2 Quad CPU Q6700 2,66GHz e placa de vídeo off-board GeForce 9600Gt com 512Mb de memória.

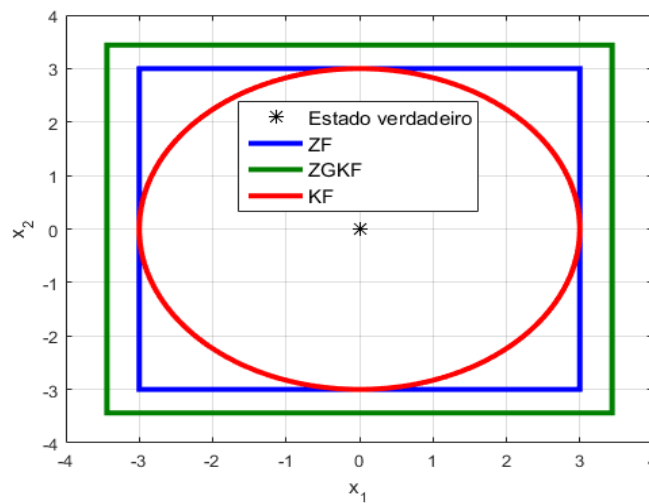


Figura 4.1: Conjuntos iniciais de estados para os algoritmos KF (elipsoide), ZGKF e ZF (zonotopos).

Resultados da Simulação

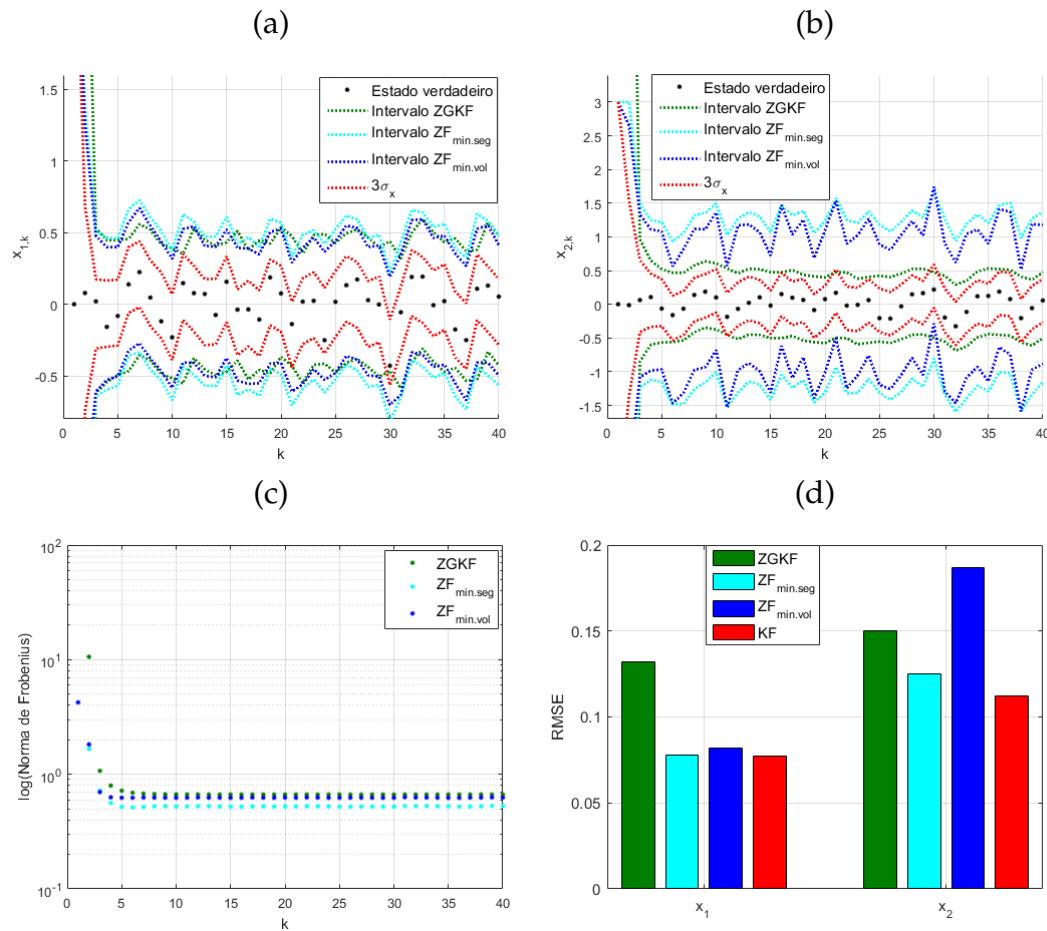


Figura 4.2: Estimação de estados do sistema linear com parâmetro intervalar para o cenário (i). (a)-(b) correspondem aos estados estimados, (c) é a norma de Frobenius de zonotopos para uma realização Monte Carlo; e (d) é o RMSE de centros e médias estimados após 100 realizações Monte Carlo.

As Figuras 4.2a-4.2c dizem respeito a uma simulação Monte Carlo do sistema linear para o cenário (i) e a Figura 4.2d a 100 realizações Monte Carlo. Nas Figuras 4.2a e 4.2b são apresentados os estados estimados, sendo os algoritmos ZF com minimização de segmentos (ZF_{min.seg}) e ZF com minimização de volume (ZF_{min.vol}) os únicos que consideram o parâmetro intervalar. Em torno dos estados verdadeiros são apresentados os intervalos $\Delta\{\mathcal{X}\}$ e o nível de confiança $3\sigma_x$ (para o KF). Estimativas de centro e média dos filtros são comparadas apenas no índice RMSE, a fim de facilitar a visualização das figuras. Na Figura 4.2c é apresentado um critério de tamanho de zonotopo, neste caso a norma de Frobenius. Com base nesses resultados, percebe-se que o KF e o ZGKF alcançam menor incerteza, dado que neste cenário as matrizes de covariância dos

ruídos são consideradas conhecidas exatamente. Dentre os estimadores zotópicos, o algoritmo $ZF_{\min.\text{seg}}$ retorna menor norma de Frobenius inclusive do que o ZGKF, pois para $\eta = 1$ este algoritmo tem a prioridade de reduzir apenas a covariância dos estados preditos.

Tabela 4.1: Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema linear com parâmetro intervalar para o cenário (i).

	KF	ZGKF	$ZF_{\min.\text{seg}}$	$ZF_{\min.\text{vol}}$
$T^{\text{CPU}} (10^{-3}\text{s})$	0,069	0,164	3,94	20,0

Ainda que os algoritmos KF e ZGKF não considerem parâmetros incertos na estimação de estados, nota-se que, ao trabalhar com o valor médio do parâmetro intervalar ζ_{k-1} , todos os filtros apresentam bom desempenho, pois os intervalos e o nível de confiança $3\sigma_x$ são capazes de incluir a maior parte dos estados verdadeiros para um longo do tempo de simulação. Percebe-se que o $ZF_{\min.\text{vol}}$ alcança menor incerteza do que $ZF_{\min.\text{seg}}$, mas não conduz necessariamente ao melhor centro com base na Figura 4.2d, uma vez que a abordagem de volume prioriza a escolha do menor volume. Por outro lado, reduzir norma de Frobenius está intimamente ligado a reduzir a norma-2, que é a mesma norma comparada no índice RMSE, por isso o centro do $ZF_{\min.\text{seg}}$ é mais acurado do que o $ZF_{\min.\text{vol}}$. Dentre todas as estimativas de RMSE, a média do KF é a mais acurada, devido à dupla contribuição de atualização da média *a posteriori*: ganho de Kalman e medição atual.

Na Tabela 4.1, o índice T^{CPU} de cada algoritmo é apresentado. Aquele com o menor tempo de processamento é o KF, enquanto o maior tempo é do $ZF_{\min.\text{vol}}$. Isso já era esperado, pois o cômputo de domínios utilizando conjuntos é uma metodologia de estimação de estados custosa computacionalmente, neste caso devido ao crescimento do número de geradores de zototopo, conduzindo a um maior tempo de processamento.

No cenário (ii), ao aumentar a covariância dos estados iniciais P_0^{xx} , após algumas iterações o cenário (ii) converge para o cenário (i). Isso ocorre nos filtros $ZF_{\min.\text{seg}}$ e $ZF_{\min.\text{vol}}$, porque o passo de predição de zototopo é exato.

Os resultados para os cenários (iii)-(vi) são apresentados na Figura 4.3, na qual é ilustrada a estimação apenas do estado x_2 que contém o parâmetro intervalar. Como esperado, o índice T^{CPU} é o mesmo em todos os cenários. Com base nos resultados, o erro de sintonia do ruído de processo gera menor precisão do que o erro de sintonia do ruído de medição para os filtros baseados em ruído Gaussiano, KF e ZGKF. Por outro lado, os filtros zotópicos, $ZF_{\min.\text{seg}}$ e $ZF_{\min.\text{vol}}$, sugerem maior sensibilidade ao erro de sintonia do ruído de medição.

Em geral, considerar que a sintonia de ruído seja menos precisa conduz a resultados mais conservadores, e o contrário também é verdadeiro. Entretanto, ruídos mais precisos podem levar a estados não garantidos.

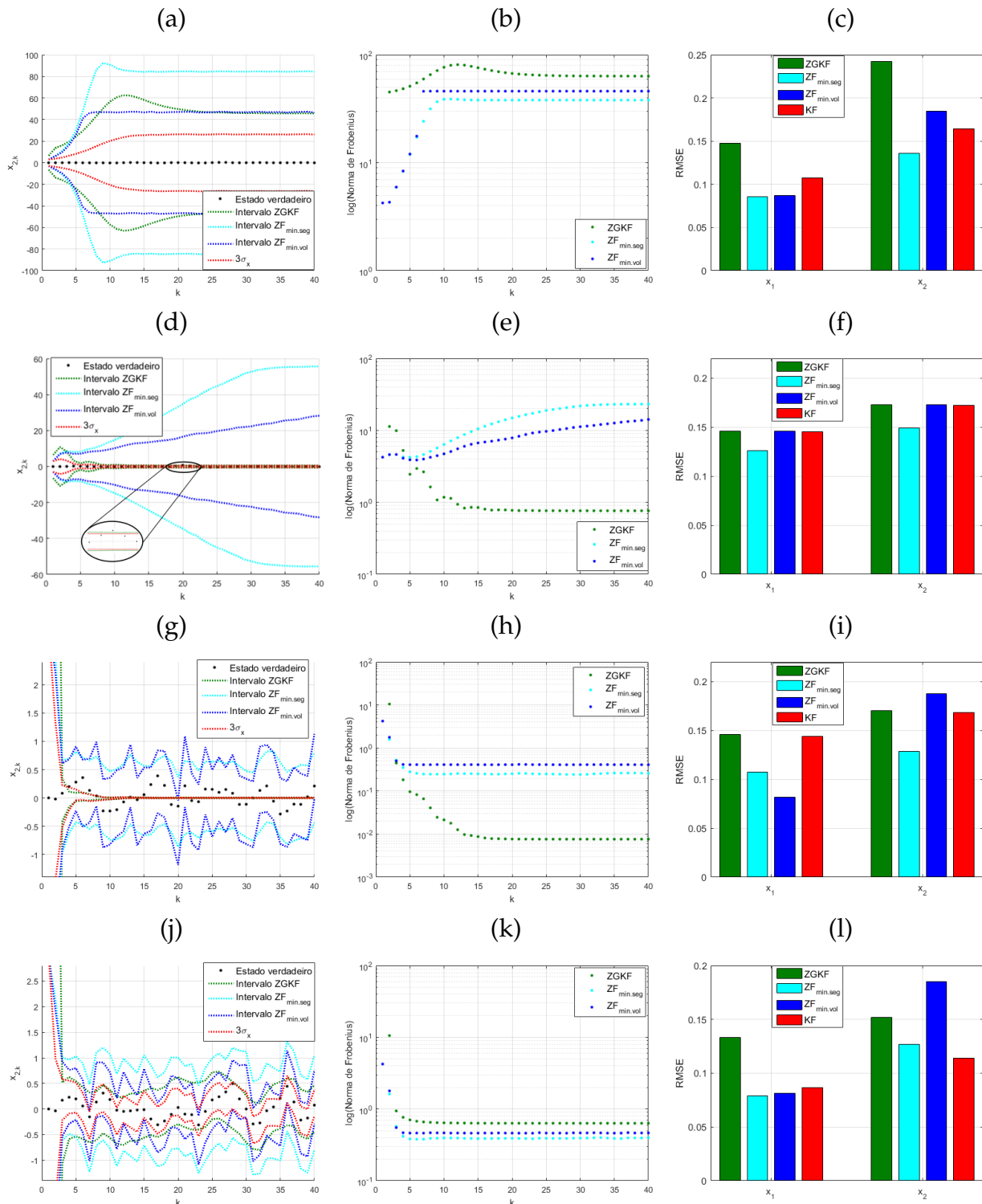


Figura 4.3: Estimação de estados do sistema linear com parâmetro intervalar para os cenários (iii)-(vi). (a)-(c) correspondem ao cenário (iii), $100\sigma_w$, (d)-(f) ao cenário (iv), $100\sigma_v$, (g)-(i) ao cenário (v), $0,01\sigma_w$, e (j)-(l) ao cenário (vi), $0,01\sigma_v$. A primeira coluna de figuras, formada por (a), (d), (g) e (j), é a estimação do estado x_2 ; a segunda coluna, formada por (b), (e), (h) e (k), corresponde à norma de Frobenius; e a terceira coluna, formada por (c), (f), (i) e (l), é o índice RMSE.

No cenário (v), os métodos KF e ZGKF não garantem inclusão dos estados do sistema, enquanto no cenário (vi) os resultados são próximos do cenário (i). A ordem de redução φ escolhida é suficiente para gerar resultados similares aos obtidos quando $\varphi > 14$. A minimização de segmentos é mais sensível à alteração da ordem de redução, visto que esta influencia diretamente a incerteza final do conjunto. Por outro lado, a minimização de volume usada é capaz de gerar muitos conjuntos zonotópicos candidatos para baixa ordem de redução e escolher o mais preciso deles. Ressalta-se que nos cenários (iii)-(vi) o centro do $ZF_{\min.\text{seg}}$ é mais acurado do que a média do KF, ou seja, a média só se destaca quando a sintonia de ruído é precisa.

4.2.2 Sistema com Ruídos Gaussiano e Zonotópico

Descrição do Processo

O seguinte sistema dinâmico linear a tempo discreto é proposto por [Combastel \(2015\)](#):

$$x_k = A_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}^z + w_{k-1}^g, \quad (4.4)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k^z + v_k^g, \quad (4.5)$$

em que $A_{k-1} = \begin{bmatrix} 2,55 & -2,52 & 0,95 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C_k = [1 \quad -2,7 \quad 1,4]$. As parcelas $w_{k-1}^z \in$

\mathcal{W}_{k-1} e $w_{k-1}^g \in W_{k-1}$ são ruídos zonotópico e Gaussiano, respectivamente, associados ao modelo de processo, tal que $\mathcal{W}_{k-1} = 0_{3 \times 1} \oplus G_{k-1}^w[\Phi]^3$ e $W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{3 \times 1}, Q_{k-1})$, com $G_{k-1}^w = 10^{-2}I_{3 \times 3}$, $Q_{k-1} = 0_{3 \times 3}$, em que $0_{3 \times 3}$ é a matriz de elementos nulos. Analogamente, as parcelas $v_k^z \in \mathcal{V}_k$ e $v_k^g \in V_k$ são ruídos associados ao modelo de medição, tal que $\mathcal{V}_k = 0 \oplus G_k^v[\Phi]$ e $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$, com $G_k^v = 0$ e $R_k = 0,25$.

As realizações do ruído zonotópico de processo w_{k-1}^z são geradas por $w_{k-1}^z = G_{k-1}^w [1 \quad -1 \quad 1]^T v$, em que $v \in [-1; 1]$ é um sinal de onda quadrada com período de 12 instantes de tempo. As realizações do ruído zonotópico de medição v_k^z são geradas com a PDF uniforme $\mathcal{U}(-G_k^v, G_k^v)$. A entrada u_{k-1} é um degrau de amplitude 0 a 0,25 no instante de tempo $k = 100$. O vetor de estados iniciais é $x_0 = [4 \quad 4 \quad 4]^T$.

Para estimar os estados do sistema, são usados os algoritmos KF, ZGKF e ZF nos mesmos seis cenários do exemplo anterior, avaliando-se o desempenho dos filtros de acordo com a sintonia destes. No cenário (i) são escolhidos $\hat{x}_0 = 0_{3 \times 1}$, $P_0^{\text{xx}} = 0_{3 \times 3}$, $Q_{k-1} = 10^{-4} \times 1/9 I_{3 \times 3}$ e R_k para o KF, a fim de que o elipsoide do ruído de processo esteja inscrito no intervalo $0_{3 \times 1} \oplus [\Phi]^3$ com 99,73% de confiança. Para os outros filtros, são escolhidos $G_0^x = 5I_{3 \times 3}$ e $\varphi = 100$, tal que $x_0 \in 0_{3 \times 1} \oplus 5I_{3 \times 3}[\Phi]^3$, como verificado na Figura 4.4. Uma vez que há ruídos de natureza Gaussiana e zonotópica, para o ZGKF são escolhidos $P_0^{\text{gg}} = P_0^{\text{xx}}$, $\eta = 0,5$ e $\alpha = 0,0027$.

Resultados da Simulação

Na Figura 4.5 são apresentados os resultados da estimação de estados do sistema linear com ruídos Gaussiano e zonotópico. As Figuras 4.5a-4.5b ilustram o estado estimado x_3 para uma realização Monte Carlo, e o RMSE, após 100 realizações Monte Carlo, para o cenário (i), respectivamente. As Figuras 4.5c-4.5f ilustram apenas o estado x_3 estimado nos cenários (iii)-(vi), respectivamente. Os outros estados estimados não são apresentados, mas os resultados são similares. No cenário (i), como o ruído de processo não é bem aproximado por uma VAG, o pior desempenho observado é do KF, pois o nível de confiança $3\sigma_x$ falha muitas vezes em incluir o estado verdadeiro. Dentre os métodos ZGKF e ZF, o ZGKF gera incertezas mais precisas, pois a presença do ruído de medição Gaussiano permite que, além da norma de Frobenius, a covariância dos estados preditos seja minimizada. O ZF é usado com a minimização de segmentos e gera menor RMSE.

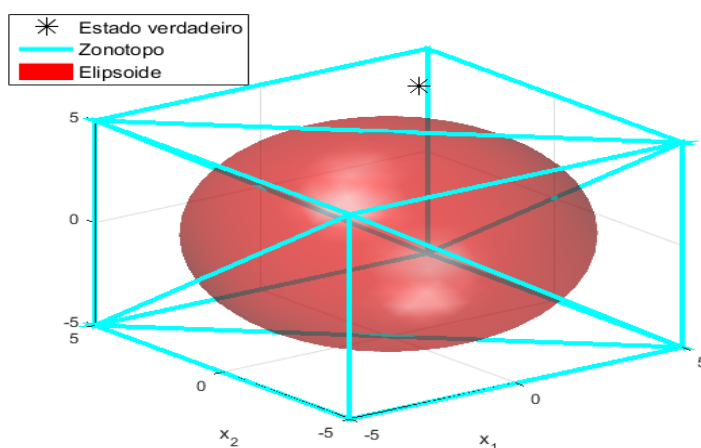


Figura 4.4: Zonotopo inicial dos filtros zonotópicos.

Tabela 4.2: Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema linear com ruído Gaussiano e zonotópico para o cenário (i).

	KF	ZGKF	ZF
$T^{\text{CPU}} (10^{-3}\text{s})$	0,0631	0,380	1,08

O índice T^{CPU} de cada estimador de estados é apresentado na Tabela 4.2. Percebe-se que algoritmos baseados em zonotosos demandam maior tempo de processamento. A ordem de redução $\varphi = 100$ é escolhida tal que os resultados obtidos são similares aos gerados por $\varphi > 100$.

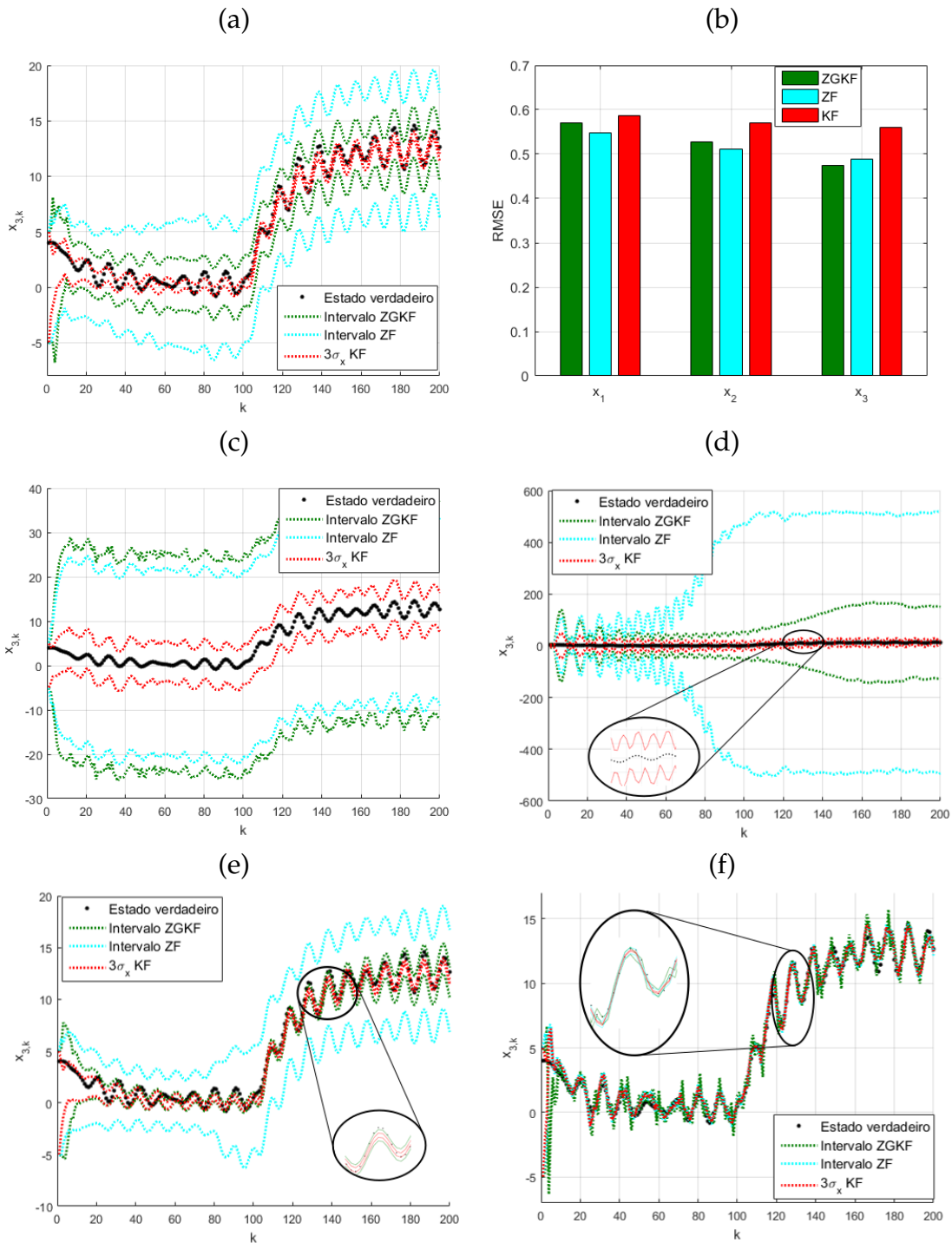


Figura 4.5: Estimação de estados do sistema linear com ruído Gaussiano e zonotópico para os cenários (i), (iii)-(vi). (a)-(b) correspondem ao cenário (i), referência, (c) ao cenário (iii), $100\sigma_w$, (d) ao cenário (iv), $100\sigma_v$, (e) ao cenário (v), $0,01\sigma_w$, e (f) ao cenário (vi), $0,01\sigma_v$.

Desse modo, a minimização de volume não é usada, devido ao tempo de proces-

samento e aos resultados gerados serem próximos dos obtidos pela minimização de segmentos. Note pelos dois exemplos lineares apresentados que a escolha da ordem de redução varia para cada um deles, sendo um compromisso entre precisão e tempo de processamento. As mesmas observações realizadas no exemplo anterior sobre a questão de sintonia para os outros cenários são válidas. Em especial, o ZGKF, por tratar duas naturezas distintas de ruído neste exemplo, sugere maior sensibilidade à alteração de sintonia das mesmas nos cenários considerados. No cenário (v), os métodos KF e ZGKF falham em incluir os estados do sistema, porque o ruído de processo limitado é considerado muito pequeno, assim, os valores $\pm 0,01$ do sinal quadrado nunca são incluídos na sintonia, piorando inclusive o desempenho do KF. A Figura 4.5d ilustra a sensibilidade do ZF à sintonia do ruído de medição. Isso ocorre porque a largura da faixa é proporcional ao diâmetro do intervalo, quanto maior este for, maior será a região envolvida pela faixa, conduzindo a zonotopos mais conservadores.

4.3 Sistemas Não Lineares

Por meio dos exemplos desta seção, algumas limitações do ZF na aplicação a sistemas não lineares são evidenciadas. Dois cenários são investigados: (i) modelo de medição não linear e (ii) dinâmica caótica. No primeiro caso, dado que o modelo de medição é não linear, a largura da faixa obtida no passo de medição varia segundo a predição de zonotopo. Devido ao efeito de dependência, a largura da faixa cresce rapidamente e, então, o filtro não converge. No segundo caso, devido ao processo de discretização do sistema não linear com dinâmica caótica, a predição de zonotopo passa a ser muito conservadora, devido aos efeitos de alargamento e dependência, e à ordem de grandeza alcançada pelos estados do sistema, comprometendo a convergência do filtro.

Uma maneira de contornar ambas as limitações é utilizar o sistema linearizado durante o processo de filtragem (Rego, 2016). Com isso, o passo de predição de zonotopo não está sob influência do efeito de alargamento e do efeito de dependência. Além disso, no passo de medição não há mais efeito de dependência e a largura da faixa é controlada pelo zonotopo de medição. Desse modo, o filtro pode alcançar convergência. Ao linearizar o modelo do sistema, é necessário sintonizar o ZF, de forma que as parcelas de ruído incluam erros de linearização. Portanto, além das limitações citadas, deseja-se analisar a questão de sintonia do ZF e compará-lo com o UKF.

4.3.1 Rastreamento de um Veículo Terrestre

Descrição do Processo

Considere a dinâmica de um veículo terrestre genérico com módulo de velocidade constante dada por (Xu et al., 2017)

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} + T_s x_{3,k-1} \\ x_{2,k-1} + T_s x_{4,k-1} \\ x_{3,k-1} s / s_k^a \\ x_{4,k-1} s / s_k^a \end{bmatrix} + w_{k-1}, \quad (4.6)$$

em que $T_s = 0,5s$ é o período de amostragem, $s = 15m/s$ é a velocidade constante de referência e $s_k^a = \sqrt{x_{3,k-1}^2 + x_{4,k-1}^2}$ é o termo de normalização das componentes de velocidade tal que $x_{3,k}^2 + x_{4,k}^2 = s^2$. O ruído de processo $w_{k-1} \in W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{4 \times 1}, Q_{k-1})$

é branco com covariância $Q_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}$, considerando $3\sigma_{w_{3,4}} = 0,3m/s$ um erro de baixa incerteza para os estados de velocidade.

Assume-se que a posição do veículo é medida em coordenadas polares sobre o plano \mathbb{R}^2 e dada pelo modelo de medição

$$y_k = \begin{bmatrix} \sqrt{x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2} \\ \text{atan}\left(\frac{x_{2,k}}{x_{1,k}}\right) \end{bmatrix} + v_k, \quad (4.7)$$

em que $v_k \in V_k \sim \mathcal{N}(0_{2 \times 1}, R_k)$ é o ruído de medição com desvio padrão σ_v , tal que $3\sigma_{v_1} = 0,15m$ e $3\sigma_{v_2} = 2,618 \times 10^{-3}rad$, que são dados por sensores precisos, GPS NovAtel OEMStar e IMU Xsens MTi-G respectivamente (Rego, 2016).

Este sistema é simulado com $x_0 = [5 \ 5 \ 1 \ 1]^T$. Para estimação de estados, são utilizados EKF, UKF e ZF. Os resultados do EKF são apresentados apenas neste exemplo, a fim de que o leitor note a semelhança de resultados e perceba que o UKF é uma forma de linearização também. A inicialização dos filtros estocásticos é dada pela média $\hat{x}_0 = [3 \ 3 \ 3 \ 3]^T$ e pelas matrizes de covariância $P_0^{xx} = I_{4 \times 4}$, $\bar{Q}_{k-1} = 1,5Q_{k-1}$ e $\bar{R}_k = 1,5R_k$. Para o ZF, todo o sistema é linearizado em cada instante de tempo em torno da estimativa mais atual do centro do zonotopo \mathcal{X} . Os zonotosos iniciais

são escolhidos como $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus 3I_{4 \times 4}[\Phi]^4$, $\mathcal{W}_{k-1} = 0_{4 \times 1} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3674 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3674 \end{bmatrix} [\Phi]^4$

e $\mathcal{V}_k = 0_{2 \times 1} \oplus 10^{-2} \text{diag}\left([18,37 \ 0,32]^T\right) [\Phi]^2$. Para reduzir o intervalo do zonotopo

estimado, a ordem de redução φ é escolhida como $\varphi = 10.000$. O ZF é utilizado com a minimização de segmentos, que é um método mais rápido do que a minimização de volume. Note que as parcelas de ruído nos filtros estocásticos e no ZF são maiores do que o ruído efetivo no sistema, visto que é necessário incluir erros de linearização durante a sintonia dos filtros.

Resultados da Simulação

Em aplicações práticas, a ordem de redução φ deve satisfazer o compromisso entre precisão e tempo de processamento. Por meio de simulação do ZF, duas maneiras diferentes de escolher a ordem de redução máxima são: (i) não limitar o número de geradores do zonotopo e verificar a partir de qual ordem a norma de Frobenius não se altera significativamente ao longo do tempo, e (ii) definir uma ordem de redução e verificar se o T^{CPU} não ultrapassa o período de amostragem do hardware. Neste exemplo de rastreamento, $\varphi = 10.000$ é escolhida conforme a segunda maneira.

O ZF com minimização de volume e $\varphi = 14$ gera resultados mais precisos (não mostrados), mas o T^{CPU} é maior do que 0,5s e a incerteza varia rapidamente de ordem de grandeza segundo a dinâmica do erro de linearização. As matrizes de covariância \bar{Q}_{k-1} e \bar{V}_k são sintonizadas com base nos filtros estocásticos, escolhendo-se os menores valores tal que a incerteza das estimativas pode incluir os estados do sistema com 99,73% de confiança.

As Figuras 4.6a e 4.6b correspondem, respectivamente, ao erro dos estados $x_1, \delta x_1$, e $x_4, \delta x_4$, estimados do sistema de rastreamento de um veículo para uma realização Monte Carlo. Os outros estados (não mostrados) apresentam as mesmas características. A Figura 4.6c é o RMSE das estimativas de média e centro dos algoritmos após 100 realizações Monte Carlo. O sistema de rastreamento é linearizado para utilização do ZF, dado que este não converge mesmo utilizando a minimização de volume. Isso ocorre devido aos efeitos de alargamento e dependência que aparecem no zonotopo predito, associado ao modelo de processo, e ao efeito de dependência no passo de medição, associado ao modelo de medição.

Com base nos resultados da Figura 4.6, embora o intervalo do ZF seja mais incerto do que o nível de confiança $3\sigma_x$ dos filtros estocásticos, o centro dele é tão acurado quanto as médias, dado que os ruídos do sistema são considerados muito baixos. Para todos os estados estimados, a incerteza é variante no tempo e possui característica integradora advinda do modelo. Percebe-se também que o ZF é mais sensível à dinâmica do erro de linearização e retorna resultados mais conservadores.

O índice T^{CPU} de cada algoritmo é apresentado na Tabela 4.3. Note que os valores obtidos são coerentes com o período de amostragem de 0,5s.

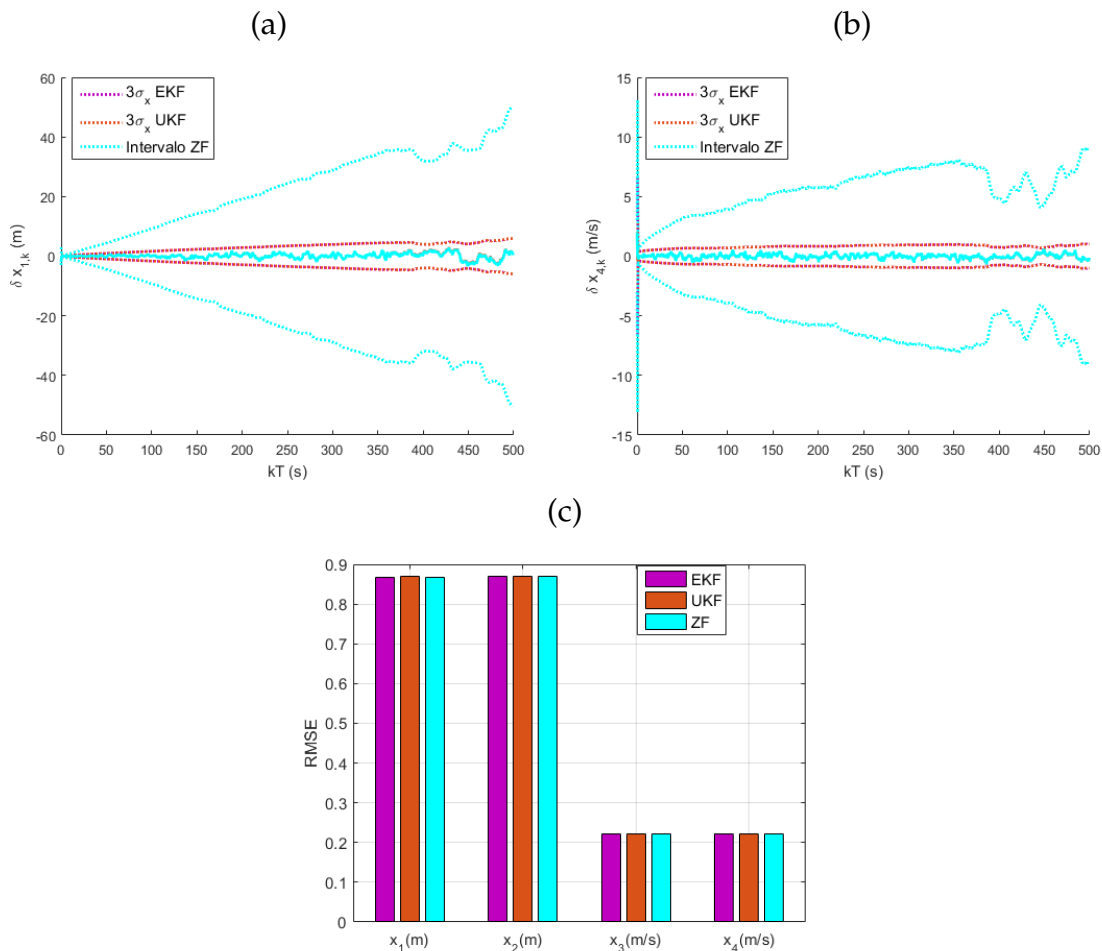


Figura 4.6: Estimação de estados do sistema de rastreamento de um veículo. (a) e (b) correspondem, respectivamente, ao erro dos estados x_1 e x_4 estimados por EKF, UKF e ZF, após linearizar o modelo, para uma realização Monte Carlo; e (c) é o RMSE de centro e média estimados após 100 realizações Monte Carlo.

Tabela 4.3: Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema de rastreamento de um veículo.

	EKF	UKF	ZF
$T^{CPU} (10^{-6}s)$	1,01	1,50	40,0

4.3.2 Sistema de Lorenz

Descrição do Processo

O modelo de Lorenz, proposto por Lorenz (1963), é uma simplificação das equações de Navier-Stokes da mecânica dos fluidos e é puramente determinístico, ou seja, não existe parcela de ruído. As equações de Lorenz são equações de convecção dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 (x_2(t) - x_1(t)) \\ x_1(t) (\psi_2 - x_3(t)) - x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) - \psi_3 x_3(t) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

em que o estado x_1 mede a taxa do movimento convectivo, x_2 a variação horizontal de temperatura e x_3 a variação vertical de temperatura, os parâmetros ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 são números reais positivos e representam, respectivamente, o número de Prandtl, o número de Rayleigh e algumas proporções físicas da região sob consideração. Quando os sinais de x_1 e x_2 são iguais, significa que o fluido quente está subindo e o fluido frio está descendo. Quando os sinais de x_1 e x_2 são contrários, significa que o fluido quente está descendo e o fluido frio está subindo. Valores positivos de x_3 indicam que os gradientes mais fortes ocorrem próximo das fronteiras, que são determinadas por algum conjunto limitante para o qual a trajetória é atraída. Quando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, indica que não há convecção do fluido, uma vez que o movimento convectivo é gerado pela variação de temperatura não nula.

Basicamente, este sistema sugere que um comportamento turbulento e complexo em sistemas com infinitos graus de liberdade, como a atmosfera, pode ser modelado por simples sistemas determinísticos de dimensão finita (Sparrow, 2012). Entretanto, as equações de Lorenz não representam um modelo realista do problema dinâmico do fluido original se ψ_1 é muito distante da unidade. Nesta seção, são considerados os parâmetros $\psi_1 = 16$, $\psi_2 = 45,92$ e $\psi_3 = 4$, que caracterizam a ocorrência de dinâmica caótica do sistema de Lorenz (Wolf et al., 1985).

Para simulação do sistema, o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo é empregado com o período de amostragem $T_s = 0,01s$. Além disso, os estados iniciais são escolhidos como $x_0 = [0,1 \ 0,1 \ 0,1]^T$. O modelo de medição linear assume que o primeiro estado x_1 é medido

$$y_k = [1 \ 0 \ 0]x_k + v_k, \quad (4.9)$$

em que $v_k \in V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ é o ruído de medição, cujo desvio padrão σ_v é escolhido de forma que a relação sinal ruído (do inglês, *signal-to-noise ratio* (SNR)) seja de 20db.

Para estimação de estados, os algoritmos UKF e ZF são utilizados. A matriz de covariância do ruído de processo $w_{k-1} \in \mathbb{R}^3$ é sintonizada com $Q_{k-1} = 10^{-4} \times I_{3 \times 3}$. Este ruído não existe no modelo contínuo, mas é considerado como erro de discretização para melhorar a convergência dos filtros. O UKF é inicializado com a média $\hat{x}_0 =$

$0_{3 \times 1}$ e as matrizes de covariância $P_0^{xx} = 0,25I_{3 \times 3}$, Q_{k-1} e R_k . O ZF é inicializado com $\mathcal{W}_{k-1} = 0_{3 \times 1} \oplus 3 \times 10^{-2} I_{3 \times 3} [\Phi]^3$, representando erros de linearização do sistema não linear, $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus 1,5 I_{3 \times 3} [\Phi]^3$ e $\mathcal{V}_k = 0 \oplus 3 \sqrt{R_k} [\Phi]$. O ZF é utilizado com as minimizações de segmentos e volume, e ordem de redução $\varphi = 20$, por causa do tempo de processamento. A inicialização das estimativas de estados dos filtros é ilustrada na Figura 4.7.

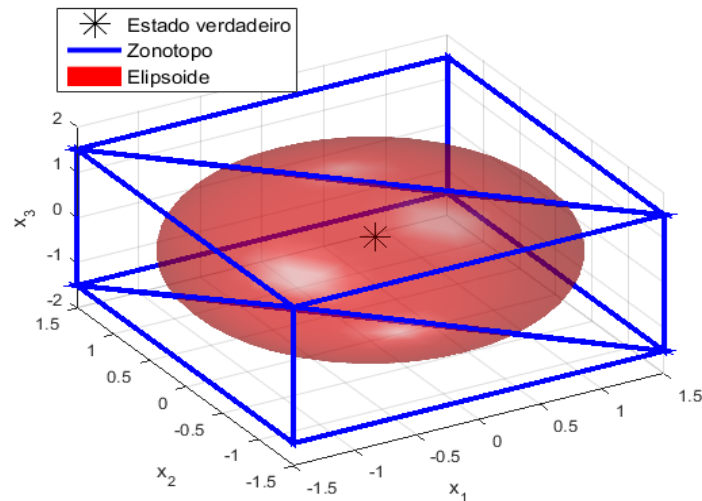


Figura 4.7: Conjuntos iniciais dos algoritmos UKF (elipsoide) e ZF (zonotopo).

Resultados da Simulação

A ordem de redução φ é escolhida como o maior valor tal que o $ZF_{\min.\text{seg}}$ gera resultados com o T^{CPU} mais próximo de 0,01s. Na Figura 4.8, os estados estimados do sistema de Lorenz pelos algoritmos UKF e ZF são apresentados para uma realização Monte Carlo. As Figuras 4.8a, 4.8c e 4.8e se referem aos estados estimados pelo ZF sem linearizar o modelo de processo, enquanto as figuras restantes aos estados estimados pelo ZF após a linearização do modelo. O UKF sempre considera o modelo não linear. Nas Figuras 4.9a e 4.9b, são ilustrados o volume dos zonotopos estimados pelos algoritmos $ZF_{\min.\text{seg}}$ e $ZF_{\min.\text{vol}}$ antes e após a linearização do sistema, respectivamente.

No passo de predição do ZF, a matriz intervalar (3.89) é computada segundo uma matriz Jacobiana discreta. Para o sistema de Lorenz, essa matriz é calculada com base na linearização e, depois, discretização do modelo contínuo não linear, usando expansão em séries de Taylor truncadas na terceira ordem dos termos não lineares, sendo avaliada no intervalo dos estados. Quando os termos não lineares são desconsiderados, há apenas efeito de alargamento. Neste caso, o ZF alcança convergência, mas resultados mais conservadores (não mostrados) são gerados pelas minimizações de segmentos e volume. Considerando os termos não lineares da matriz Jacobiana linearizada e discretizada, o ZF diverge por causa do acréscimo do efeito de dependência, que

acentua o crescimento do conjunto em aproximadamente $kT = 0,5s$, para a minimização de volume.

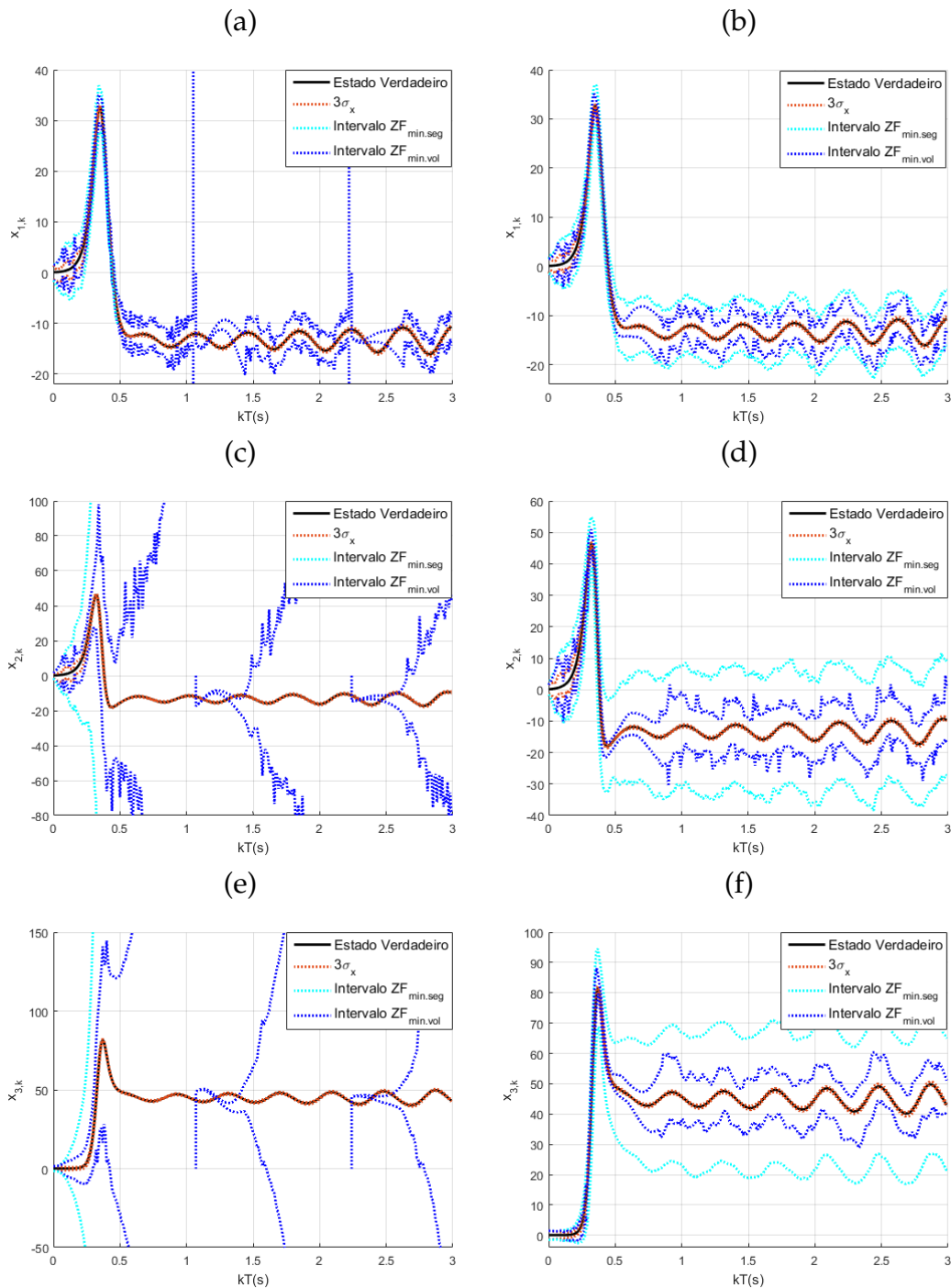


Figura 4.8: Estimação de estados do sistema de Lorenz utilizando UKF e ZF para uma realização Monte Carlo. (a), (c) e (e) correspondem ao ZF com o modelo não linear, enquanto as figuras restantes dizem respeito ao ZF com o modelo linearizado.

O rápido crescimento do conjunto ocorre devido à ordem de grandeza da amplitude alcançada pelos estados x_2 e x_3 nesse instante de tempo, que são as parcelas afetadas pelo efeito de dependência na matriz Jacobiana. Além disso, enquanto o estado x_1 permanece com convergência, o volume do zonotopo cresce lentamente, mas próximo de $kT = 1$ s o volume cresce rapidamente devido à divergência do estado x_1 . Note que este estado diverge por causa dos outros estados, que influenciam a resposta completa do sistema. Ainda que a ordem de redução φ seja muito elevada, o ZF diverge.

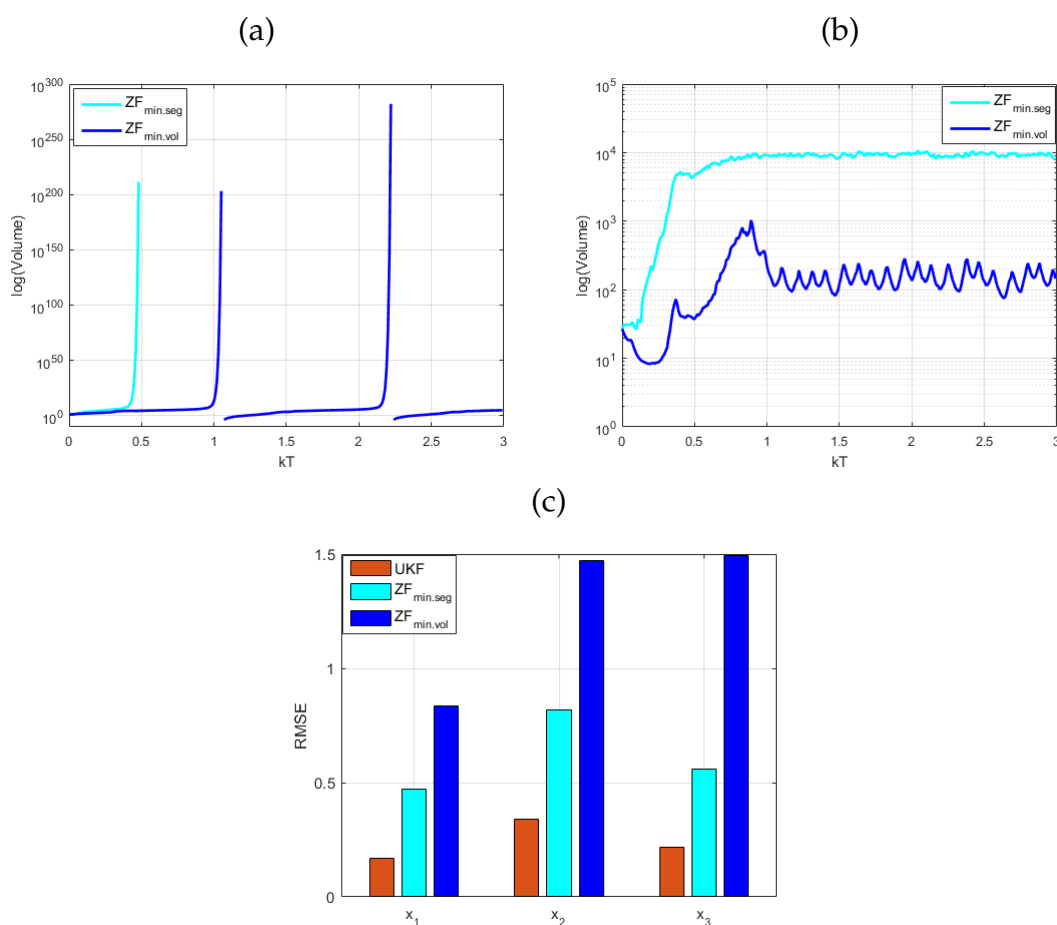


Figura 4.9: (a) e (b) correspondem à evolução do volume de cada zonotopo do ZF antes e depois da linearização do modelo, respectivamente, para uma realização Monte Carlo; e (c) é o RMSE dos estados estimados pelo UKF e pelo ZF, com o modelo linearizado.

Utilizando o modelo linearizado, o ZF garante a convergência porque os efeitos de alargamento e dependência relacionados ao zonotopo predito não influenciam mais o passo de predição. Diferentemente do ZF, o UKF não sugere sensibilidade à dinâmica caótica do sistema e gera resultados precisos e acurados de incerteza e média, como observado na Figura 4.8 e no RMSE da Figura 4.9 após 100 realizações Monte Carlo. O índice de cada estimador de estados é apresentado na Tabela 4.4. O ZF_{min.vol} apresenta

Tabela 4.4: Tabela referente ao índice T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do sistema de Lorenz.

	UKF	ZF _{min.seg}	ZF _{min.vol}
$T^{\text{CPU}} (10^{-3}\text{s})$	0,153	8,13	231

o T^{CPU} maior devido à minimização de volume, cujo valor ultrapassa o período de amostragem de 10ms.

Com base nas Figuras 4.8 e 4.9, a minimização de volume gera menor volume do conjunto estimado, mas é mais sensível à variação de erro, dado que os resultados são suscetíveis a picos. A minimização de segmentos gera melhor desempenho RMSE, mas é mais sensível a sistemas não lineares, uma vez que a redução da norma de Frobenius não implica em minimização de volume, que está diretamente ligado à convergência do filtro.

4.4 Sistemas Não Lineares com Restrição Intervalar nos Estados

Os exemplos desta seção buscam avaliar o desempenho dos algoritmos baseados no UKF e no ZF ante sistemas com restrições intervalares.

4.4.1 Reator em Batelada

Descrição do Processo

A seguinte reação de fase gasosa reversível do reator em batelada (do inglês, *batch reactor*) é considerada (Tenny et al., 2004; Alamo et al., 2005; Teixeira et al., 2010b; Shao et al., 2010)



em que $k_1 = 0,16\text{min}^{-1}\text{atm}^{-1}$ e $k_2 = 0,0064\text{min}^{-1}$ são as proporções das taxas de reação.

Estas reações ocorrem em condições isotérmicas e volume constante, dado que as espécies R^A e R^B estão bem misturadas. Definindo o vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}_+^2$ como pressões parciais de R^A e R^B em atm, a dinâmica da reação (4.10) é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_1x_1^2(t) + 2k_2x_2(t) \\ k_1x_1^2(t) - k_2x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

A simulação do sistema é executada integrando o modelo de processo (4.11) segundo o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo e período de amostragem $T_s = 1s$. A condição inicial do sistema (4.11) é $x_0 = [3 \ 1]^T$. O modelo de medição do reator representa a pressão total medida e é dado por

$$y_k = [1 \ 1]x_k + v_k, \quad (4.12)$$

em que $v_k \in V_k$ é o ruído de medição, tal que $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ com $R_k = 0,01$.

Para estimação de estados, os algoritmos UKF, IUKF, TUKF, OUKF e IZF são utilizados. Como a pressão não pode ser negativa, restrições intervalares são estabelecidas nos estados x_k durante o processo de filtragem, sendo os limites inferior e superior $a_k = 0_{2 \times 1}$ e $b_k = [100 \ 100]^T$, respectivamente. Ainda que não exista ruído no modelo contínuo, o ruído de processo w_{k-1} representa erros de discretização e é considerado nos algoritmos baseados em UKF como realizações $W_{k-1} \sim \mathcal{N}(0_{2 \times 1}, Q_{k-1})$ com $Q_{k-1} = 10^{-10}I_{2 \times 2}$. Para o IZF com minimização de volume, w_{k-1} e v_k são considerados como $\mathcal{W}_{k-1} = 0_{2 \times 1} \oplus 3 \times 10^{-5}I_{2 \times 2}[\Phi]^2$ e $\mathcal{V}_k = 0 \oplus 0,3[\Phi]$, respectivamente, e a ordem de redução φ é escolhida como $\varphi = 14$ por causa do tempo de processamento.

Dois cenários são propostos para estimação de estados: (i) inicialização boa dos estados, mais próxima de x_0 , e (ii) ruim, distante de x_0 . Para o cenário (i), os estados iniciais dos filtros estocásticos são escolhidos como $\hat{x}_0 = [2,5 \ 1,5]^T$ e $P_0^{xx} = 0,16I_{2 \times 2}$, enquanto os estados iniciais do IZF são dados pelo conjunto zonotópico $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus 1,2I_{2 \times 2}[\Phi]^2$. Para o cenário (ii), os estados iniciais dos filtros estocásticos são escolhidos como $\hat{x}_0 = [0,1 \ 4,5]^T$ e $P_0^{xx} = 4I_{2 \times 2}$, enquanto os estados iniciais do IZF são dados pelo conjunto zonotópico $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus 6I_{2 \times 2}[\Phi]^2$. Estas inicializações são ilustradas na Figura 4.10.

Para comparar as estimativas dos filtros empregados, três critérios de desempenho são apresentados: (i) RMSE, (ii) T^{CPU} e (iii) *mean trace* (MT)

$$\text{MT} = \frac{1}{100} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{100} \sum_{k=1}^N \text{tr}(P_{k,m}^{xx}). \quad (4.13)$$

Visto que o modelo de medição (4.12) é linear, o problema de otimização quadrática (3.41) é resolvido pelo OUKF utilizando programação quadrática no *software* MATLAB®, tanto para este exemplo quanto para o próximo. Para utilizar o IZF com minimização de volume nos sistemas não lineares, apenas resultados provenientes da interseção (3.99)-(3.101) são apresentados, por causa do tempo de processamento associado à minimização (3.98).

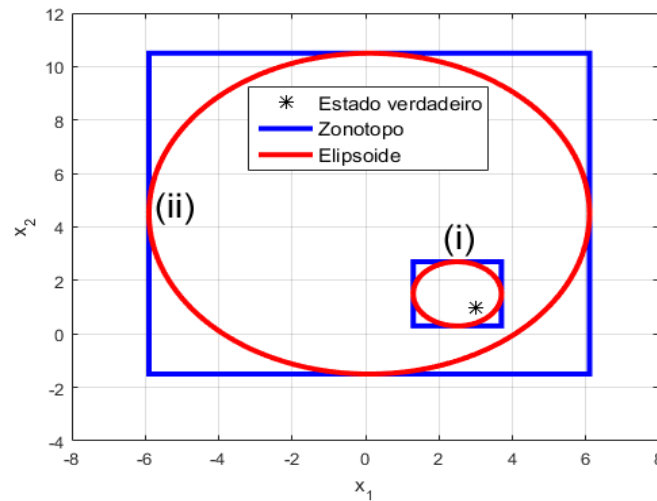


Figura 4.10: Representação dos conjuntos zonotópico e elipsoidal iniciais para os cenários (i) e (ii) do reator em batelada.

Resultados da Simulação

A sintonia dos estados e ruídos para os filtros é realizada no limiar da convergência do ZF, ou seja, para valores maiores há alguma realização na qual o ZF diverge. Além disso, a matriz Jacobiana computada no passo de predição do IZF considera os termos não lineares, sendo suscetível ao efeito de dependência. Na Figura 4.11 são apresentados os estados estimados do reator em batelada e o desvio padrão $\sigma_{x_{2,k}}$ para os dois cenários, com base em uma realização Monte Carlo. As Figuras 4.11a, 4.11c e 4.11e dizem respeito ao cenário (i), enquanto as restantes ao cenário (ii). Na Figura 4.12, são apresentados critérios de tamanho de zonotopo para os dois cenários, com base em uma realização Monte Carlo, e o RMSE das estimativas de média e centro após 100 realizações Monte Carlo para o cenário (i). Para melhor visualização, nas Figuras 4.11a e 4.11c são apresentados apenas resultados do TUKF¹ e do IZF, mas todos os filtros convergem.

A partir dos resultados, os filtros estocásticos convergem mais rápido do que o IZF. Entretanto, inicializar o UKF com uma matriz de covariância que permite valores negativos para os estados atrasa a convergência, devido a incompatibilidade do filtro com o modelo de processo. Mesmo assim a inicialização ruim é realizada para os filtros, pois na prática os estados podem ser negativos devido a algum erro na medida.

Como os estados estimados e o desvio padrão evidenciam que os filtros estocásticos IUKF, TUKF e OUKF convergem para os dois cenários, tais algoritmos não sugerem

¹Para computar a decomposição de Schur no Algoritmo 3.2.7, optou-se por utilizar a função *jordan* proposta por Paul Godfrey, que está disponível em <http://my.fit.edu/~gabdo/jordan.txt>.

sensibilidade a condições iniciais. O desvio padrão dos algoritmos UKF, IUKF e TUKF é praticamente o mesmo.

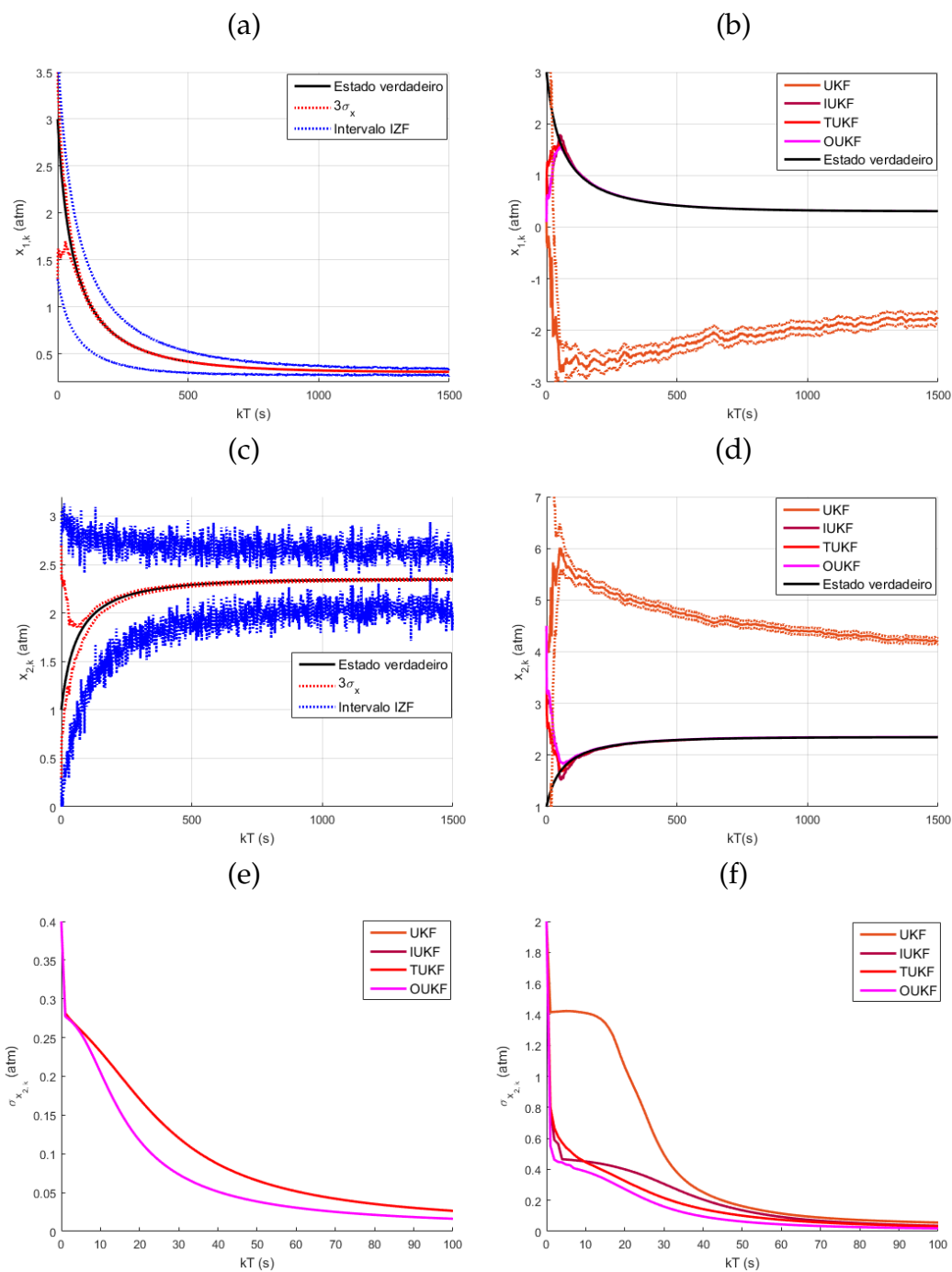


Figura 4.11: Estimação de estados do reator em batelada para uma realização Monte Carlo. As Figuras (a), (c) e (e) dizem respeito ao cenário (i), enquanto as figuras restantes ao cenário (ii). Os estados estimados são apresentados em (a)-(d); (e)-(f) correspondem ao desvio padrão $\sigma_{x_{2,k}}$.

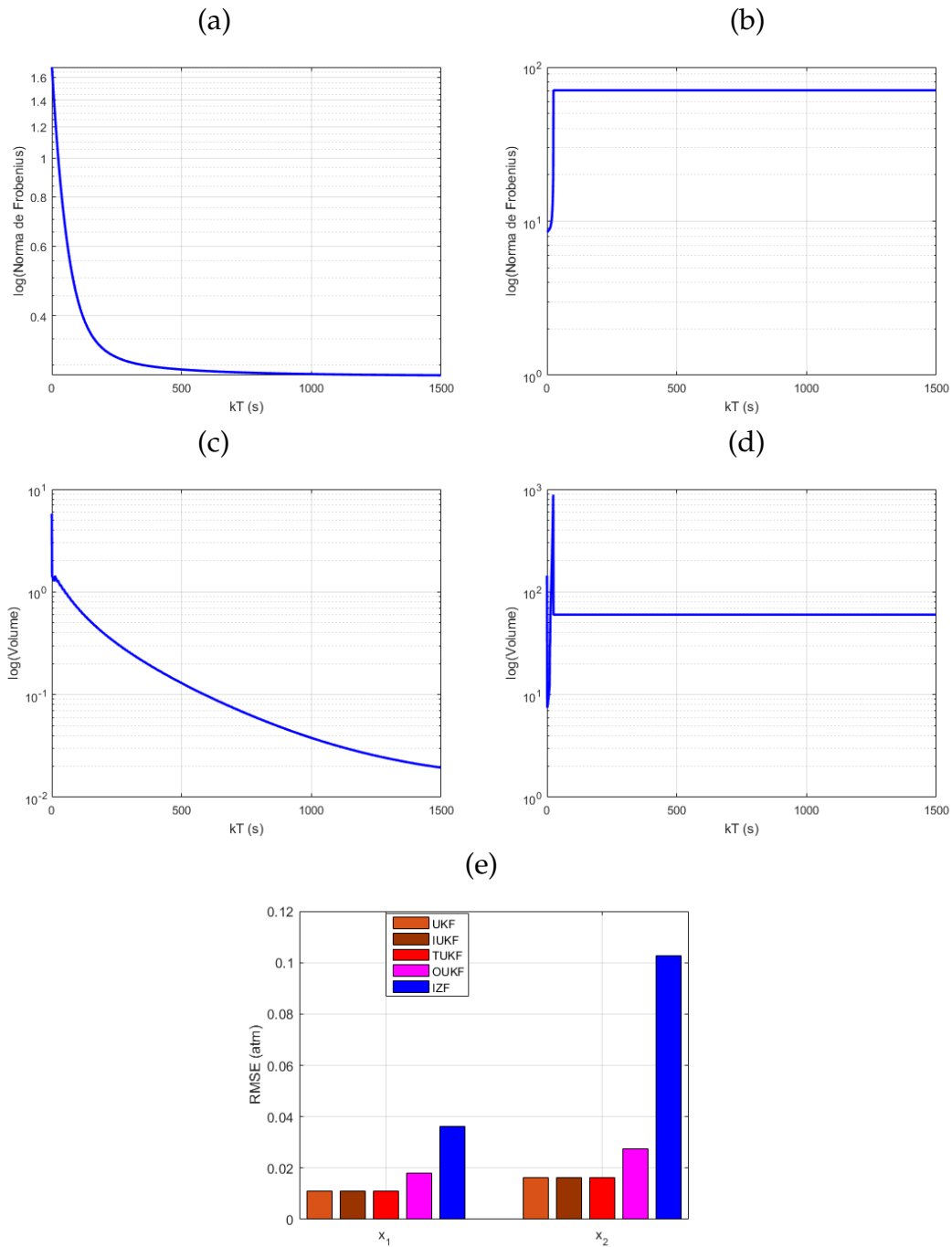


Figura 4.12: (a)-(d) dizem respeito a critérios de tamanho de zontopo do IZF para uma realização Monte Carlo; (e) corresponde ao RMSE dos estados estimados após 100 realizações Monte Carlo. (a), (c) e (e) estão relacionadas ao cenário (i), e as restantes ao cenário (ii).

No cenário (ii), o UKF demora a convergir e permite valores negativos para os estados estimados. Ao aplicar a informação de restrição intervalar no UKF, este converge,

dados que tal informação melhora a média e a covariância dos estados estimados. No cenário (ii), a sensibilidade do IZF a condições iniciais está associada, principalmente, ao efeito de alargamento da matriz intervalar no cômputo da matriz Jacobiana, a qual é influenciada pela inicialização e evolução do estado $X_{1,k}$, pelo período de amostragem T_s e pelo ruído de processo W_{k-1} , alterando assim a estabilidade do filtro.

Os resultados do IZF para este cenário são omitidos porque o centro do estado x_1 varia em torno de 50atm com intervalo $[0;100]$ atm, enquanto o centro do estado x_2 varia em torno de -47,3atm com intervalo $[-97,7;3,0]$ atm. Assim, o IZF permite que o zonotopo dos estados cresça ao longo do tempo até alcançar um conjunto limitante, sem garantir redução de incerteza. Mesmo quando os termos não lineares da matriz Jacobiana são desconsiderados, o IZF não reduz incerteza, devido ao efeito de alargamento. Então, observa-se que aplicar a restrição intervalar na forma de interseção entre conjuntos não resolve o problema de sensibilidade a condições iniciais para o ZF, porque a interseção basicamente é um método de projeção, na qual se descarta o domínio que esteja fora da restrição. Entretanto, a região obtida é grande o suficiente para causar sensibilidade no IZF.

Como esperado, o menor RMSE na Figura 4.12e é alcançado pelos filtros estocásticos que tratam restrição intervalar. Segundo a Tabela 4.5, o menor MT e o maior T^{CPU} provêm do OUKF devido ao algoritmo de otimização. Em todos os casos, o T^{CPU} é menor do que o período de amostragem de 1s.

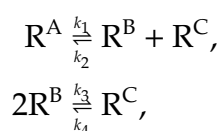
Tabela 4.5: Tabela referente aos índices MT e T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do reator em batelada para o cenário (i).

	UKF	IUKF	TUKF	OUKF	IZF
MT (10^{-4} atm ²)	3,34	3,34	3,34	1,12	—
T^{CPU} (10^{-3} s)	0,226	0,366	1,03	59,5	27,2

4.4.2 Reator de Tanque Continuamente Misturado

Descrição do Processo

Considere as seguintes reações reversíveis de fase gasosa (Kolås et al., 2009; Teixeira et al., 2010b; Shao et al., 2010)



cuas proporções das taxas de reação são $k_1 = 0,5$, $k_2 = 0,05$, $k_3 = 0,2$ e $k_4 = 0,01$, a matriz estequiométrica é $S^e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e as taxas de reação são $r^c(t) = \begin{bmatrix} k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) x_3(t) \\ k_3 x_2^2(t) - k_4 x_3(t) \end{bmatrix}$.

Estas reações ocorrem em condições isotérmicas com as espécies R^A , R^B e R^C bem misturadas, dado que o reator de tanque é continuamente misturado (do inglês, *continuously stirred tank reactor* (CSTR)). O vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}_+^3$ representa as concentrações das espécies R^A , R^B e R^C em mol/l. A dinâmica do CSTR é dada por

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3} \left((S^e)^T r^c(t) + \frac{1}{V^R} \left([c^f \quad -x(t)] u(t) \right) \right), \quad (4.14)$$

em que $V^R = 100\text{l}$ é o volume do reator, $c^f = [0,5 \quad 0,05 \quad 0]^T$ mol/l é o vetor de concentração de entrada permitida, $u(t) = [q^f \quad q^o]^T$ é o vetor de entrada tal que $q^f \geq 0$ e $q^o \geq 0$ são as taxas de entrada e saída volumétrica permitidas, respectivamente.

Para simulação do CSTR, o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo é empregado para integrar o modelo de processo (4.14) com período de amostragem $T_s = 0,25\text{s}$. A condição inicial do sistema é escolhida como $x_0 = [0,5 \quad 0,05 \quad 0]^T$ e $q^f = q^o = 1$. O modelo de medição do CSTR representa a pressão total medida e é dado por

$$y_k = [R^T \quad R^T \quad R^T] x_k + v_k, \quad (4.15)$$

em que $R^T = 32,84\text{atm} \times \text{l/mol}$ é uma constante e v_k é o ruído de medição, cujas realizações são tomadas da VA $V_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ com $R_k = 0,25^2$.

Para estimação de estados, são utilizados os algoritmos UKF, IUKF, TUKF, OUKF e IZF. Como a concentração não pode ser negativa, restrições intervalares são estabelecidas nos estados x_k durante o processo de filtragem, sendo os limites inferior e superior $a_k = 0_{3 \times 1}$ e $b_k = [100 \quad 100 \quad 100]^T$, respectivamente. A matriz de covariância do ruído de processo $w_{k-1} \in \mathbb{R}^3$ é escolhida como $Q_{k-1} = 10^{-6} I_{3 \times 3}$ para os filtros estocásticos. Este ruído de processo é considerado devido a erros de discretização. Para o IZF, w_{k-1} e v_k são considerados como $\mathcal{W}_{k-1} = 0_{3 \times 1} \oplus 3 \times 10^{-3} I_{3 \times 3} [\Phi]^3$ e $\mathcal{V}_k = 0 \oplus 0,75[\Phi]$, respectivamente, e a ordem de redução escolhida é $\varphi = 14$.

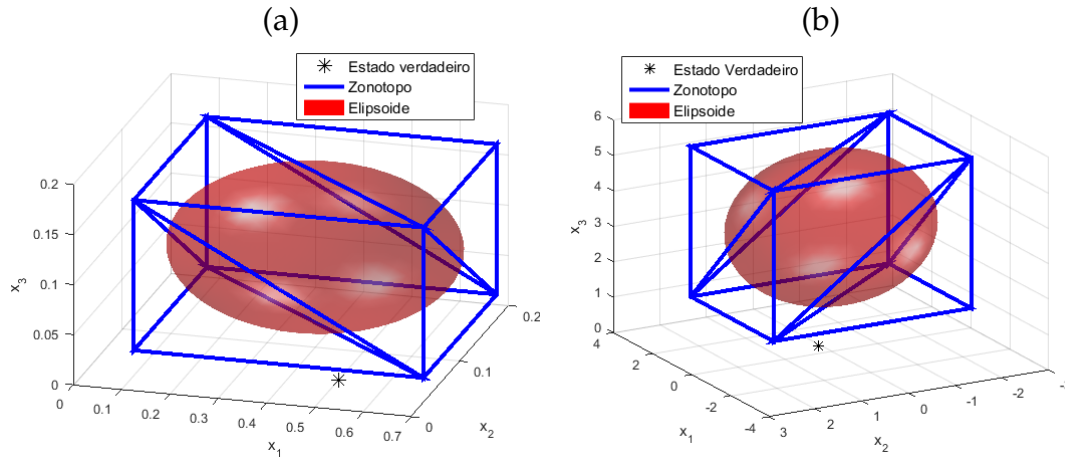


Figura 4.13: Representação gráfica dos conjuntos zonotópico e elipsoidal iniciais para os cenários (i) e (ii) do CSTR.

Os mesmos cenários do exemplo anterior são propostos. Para o cenário (i), os estados iniciais dos filtros estocásticos são escolhidos como $\hat{x}_0 = [0,4 \ 0,1 \ 0,1]^T$ e $P_0^{xx} = 10^{-3} \text{diag} \left([10 \ 0,625 \ 0,625]^T \right)$, enquanto os estados iniciais do IZF são dados por $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus \text{diag} \left([9,49 \ 2,37 \ 2,37]^T \right) [\Phi]^3$.

Para o cenário (ii), os estados iniciais dos filtros estocásticos são escolhidos como $\hat{x}_0 = [0 \ 0 \ 3,5]^T$ e $P_0^{xx} = 0,5I_{3 \times 3}$, enquanto os estados iniciais do IZF são dados pelo conjunto zonotópico $\mathcal{X}_0 = \hat{x}_0 \oplus 2,12I_{3 \times 3}[\Phi]^3$. A inicialização dos filtros para os dois cenários é ilustrada na Figura 4.13.

Resultados da Simulação

Assim como no reator em batelada, a sintonia dos estados e ruídos está no limiar de convergência do ZF, valores superiores provavelmente conduzem a divergência do mesmo. Nas Figuras 4.14 e 4.15, são apresentados os estados estimados, desvios padrões e critérios de tamanho de zonotopo para uma realização Monte Carlo, em que as letras (a), (c) e (e) se referem ao cenário (i), e as restantes ao cenário (ii). Para melhor visualização, no cenário (i), apenas resultados do TUKF e do IZF são explicitados na Figura 4.14, e os gráficos de desvio padrão $\sigma_{x_{3,k}}$ para ambos os cenários são explicitados. No primeiro cenário, o IZF reduz muito a incerteza devido à minimização de volume, cujo intervalo se torna mais preciso do que o nível de confiança dos filtros estocásticos ao longo das iterações.

Com base no cenário (ii), nota-se que o UKF sugere sensibilidade a condições iniciais da matriz de covariância P_0^{xx} , que afetam o tempo de convergência. Além disso, valores negativos são permitidos pelo UKF, uma vez que as restrições a_k e b_k não são conside-

radas nos estados. Para o mesmo cenário, quando considerada a restrição intervalar, os outros filtros estocásticos convergem.

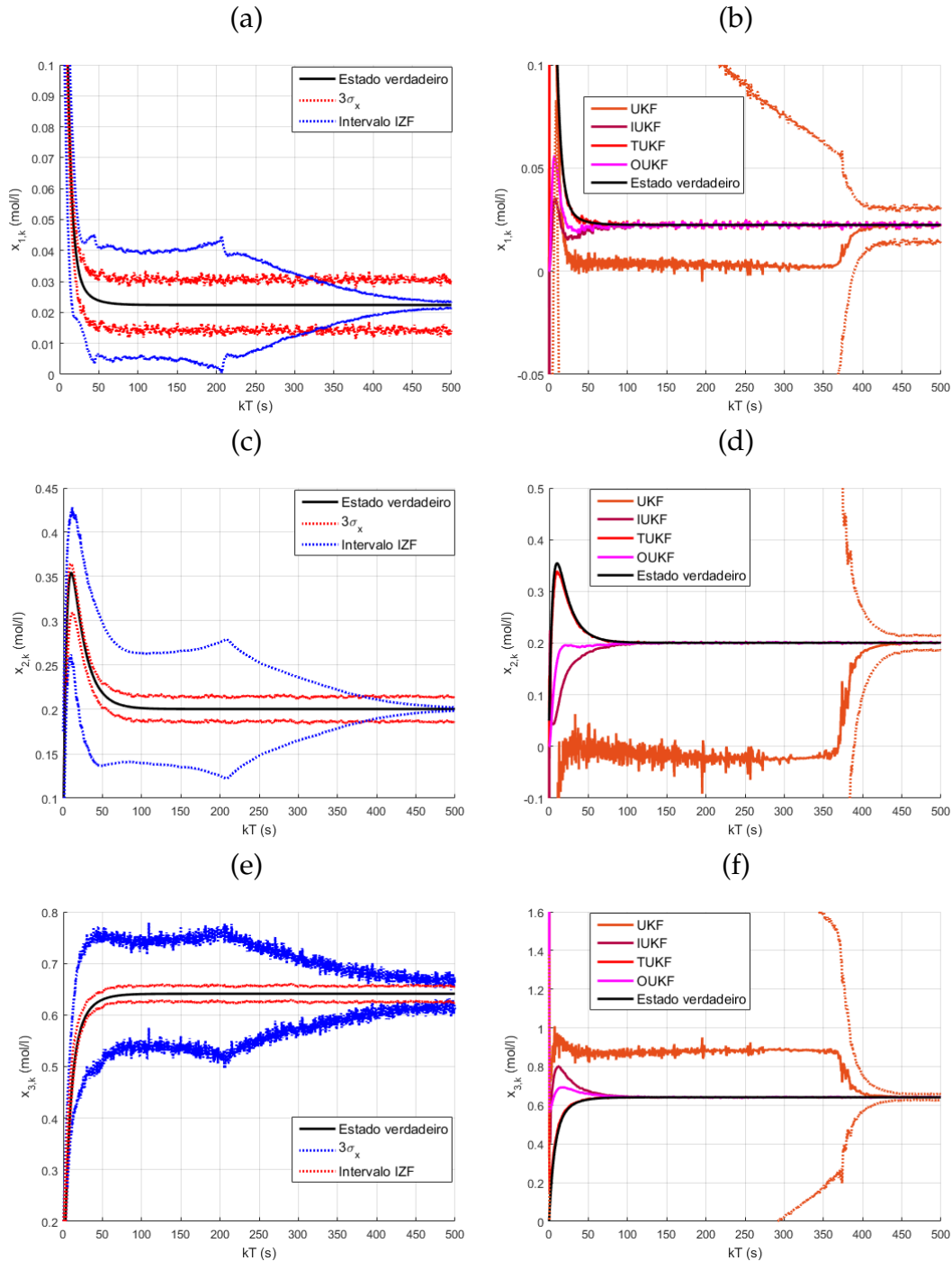


Figura 4.14: Estimação de estados do CSTR para uma realização Monte Carlo. (a), (c) e (e) dizem respeito aos estados estimados para o cenário (i), e as figuras restantes ao cenário (ii).

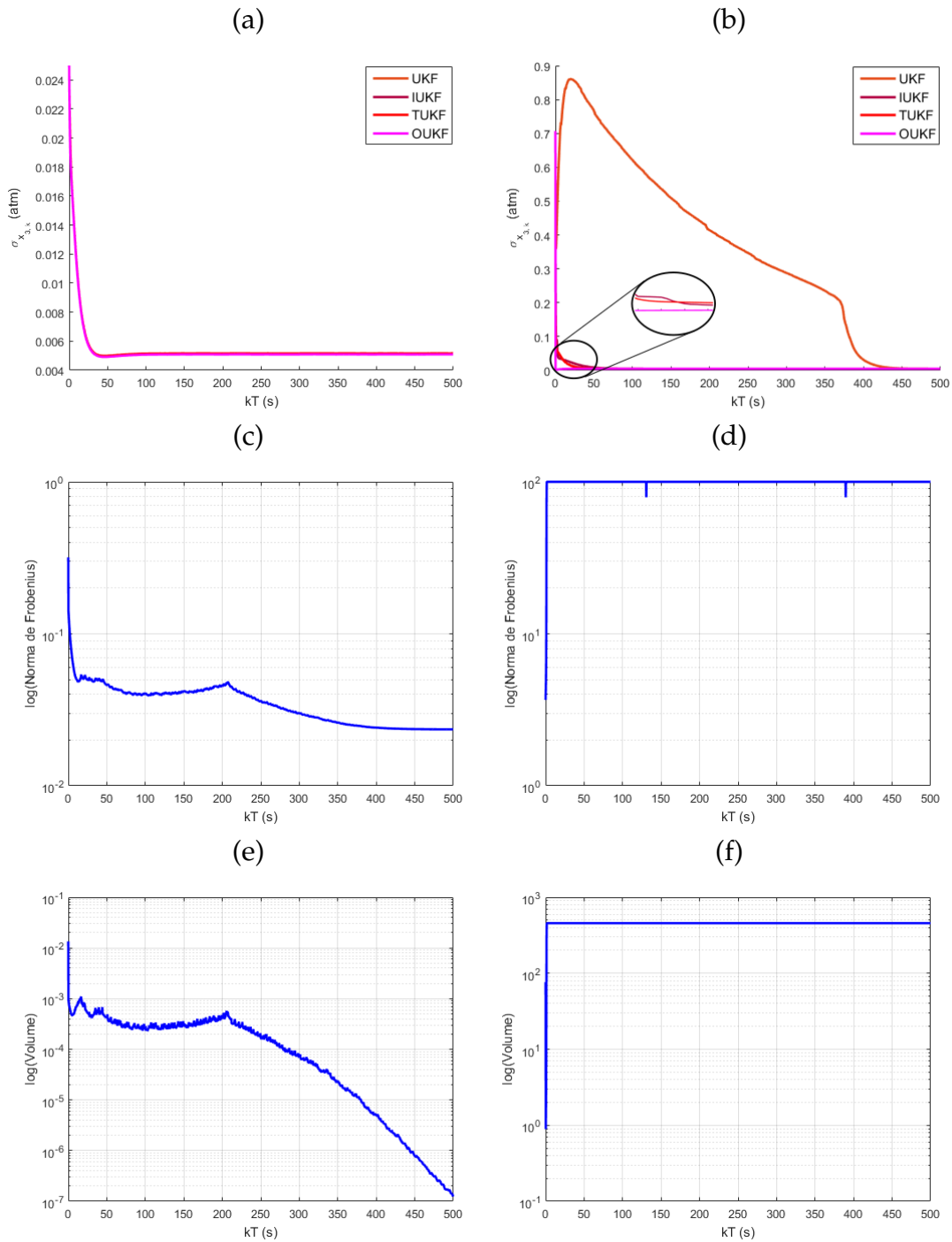


Figura 4.15: (a), (c) e (e) estão relacionadas ao cenário (i), e as restantes ao cenário (ii) para uma realização Monte Carlo. Em (a) e (b) é apresentado o desvio padrão $\sigma_{x_{3,k}}$, (c)-(f) são critérios de tamanho de zototopo do IZF.

No cenário (ii), o IZF é omitido porque o centro e o intervalo variam muito ao longo das iterações. Além disso, o IZF apresenta pior desempenho em relação ao reator em

batelada, dado que o segundo passo de interseção, no qual as restrições são aplicadas, é mais sobrestimado devido ao aumento de ordem do sistema, conduzindo a intervalos de $[-199,1; 0,9]$ a $[0,9; 100]$. O IZF também sugere sensibilidade a condições iniciais e isso pode comprometer a capacidade do filtro em reduzir incerteza, no entanto, aplicar restrição intervalar não é capaz de levar à convergência do mesmo. Isso ocorre porque a interseção comum entre conjuntos funciona como projeção. Assim, o compromisso da interseção entre conjuntos não é reduzir incerteza, obtendo outro conjunto menor do que a própria restrição. Já os filtros estocásticos que tratam restrições, buscam melhorar as estimativas de média e covariância reduzindo a incerteza dos mesmos, por isso eles não sugerem sensibilidade a condições iniciais.

O índice RMSE de médias e centros estimados no cenário (i) é apresentado na Figura 4.16 após 100 realizações Monte Carlo. Em geral, espera-se que o RMSE do IZF seja o pior, visto que a prioridade da minimização de volume não é reduzir norma-2, mas o nível de incerteza obtido pode resultar em centros mais acurados do que as médias dos filtros estocásticos, como evidenciado na figura.

Na Tabela 4.6, são apresentados os índices MT e T^{CPU} , sendo o menor MT do OUKF, devido ao algoritmo de otimização, e o maior T^{CPU} do IZF, por causa da minimização de volume. Note que o aumento da dimensão do sistema, em relação ao reator em batelada, faz com que o IZF tenha maior tempo de processamento do que o OUKF. Em todos os casos, o T^{CPU} é menor do que o período de amostragem de 250ms.

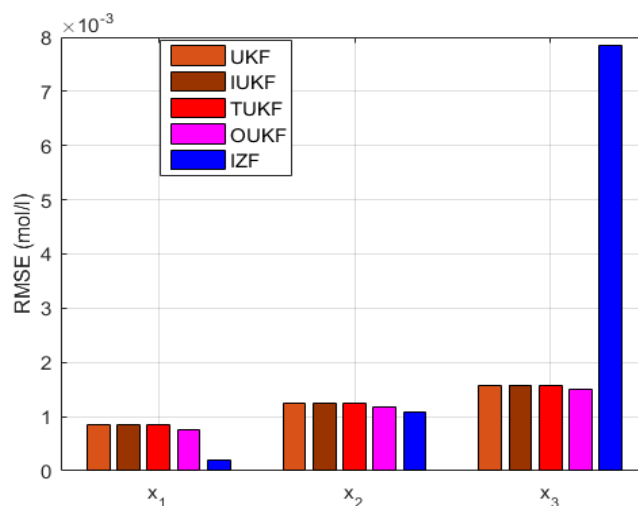


Figura 4.16: Índice RMSE dos estados estimados após 100 realizações Monte Carlo para o cenário (i).

Tabela 4.6: Tabela referente aos índices MT e T^{CPU} após 100 realizações Monte Carlo do CSTR para o cenário (i).

	UKF	IUKF	TUKF	OUKF	IZF
$\text{MT}(10^{-5}\text{mol}^2/\text{l}^2)$	5,60	5,60	5,60	5,43	—
$T^{\text{CPU}}(10^{-3}\text{s})$	0,636	0,777	1,77	62,4	80,3

4.5 Conclusões

A partir da Seção 4.2 foi possível avaliar as principais diferenças entre algoritmos baseados em incerteza aleatória e zotópica. Como esperado, o KF apresenta desempenho ótimo para ruídos puramente Gaussianos, devido à contribuição do ganho de Kalman e da medição atual no passo de assimilação de dados. Nos outros cenários considerados e na presença de ruídos Gaussianos e zotópicos, o ZF com minimização de segmentos gera centros mais acurados com maior intervalo associado. Em relação ao KF, o ZF se destaca pela estimativa garantida, quando atendidas as premissas de pior caso de ruído, e por levar em conta incerteza nos parâmetros. Dentre os algoritmos de associação de conjuntos na literatura, o ZF se destaca pelo menor tempo de processamento. A minimização de segmentos se destaca por melhor estimar os centros, dado que ela está relacionada à minimização de norma-2, mas é mais sensível a sistemas não lineares. A minimização de volume se destaca pela diminuição de incerteza, mas demanda maior tempo de processamento. O ZGKF é um algoritmo híbrido dado que permite considerar incertezas Gaussianas e zotópicas na estimativa de estados. Em geral, o centro do ZGKF é menos acurado do que o centro do ZF com minimização de segmentos, mas é mais rápido.

Como explicitado na Seção 4.3, a abordagem de minimização de segmentos do ZF pode não convergir para sistemas não lineares por dois motivos: (i) para processo linear e medição não linear, a faixa construída tem largura variável com o processo devido ao efeito de dependência e, talvez, ao efeito de alargamento, e (ii) no caso contrário, a faixa tem sua largura limitada pelo zotopo do ruído de medição, mas o zotopo predito cresce rapidamente devido ao efeito de alargamento e, possivelmente, ao efeito de dependência.

Além do sistema de Lorenz, o ZF foi implementado em alguns sistemas na dinâmica caótica como Rossler-chaos e Rossler-hyperchaos (Wolf et al., 1985), não mostrados neste documento. Em todos os casos, o ZF não converge após os efeitos de alargamento e dependência se tornarem muito expressivos, devido à ordem de grandeza da amplitude alcançada pelos estados estimados suscetíveis a tais efeitos. Ao linearizar os modelos em torno do centro mais atual, o ZF convergiu para minimização de segmentos e volume. Em especial, a linearização do modelo Rossler-hyperchaos não foi capaz de levar o ZF à convergência.

Segundo os resultados obtidos na Seção 4.4, os métodos estocásticos que levam em consideração as restrições intervalares nos estados geram melhores estimativas e não sugerem sensibilidade a condições iniciais como o UKF, dado que tais restrições auxiliam na convergência dos algoritmos. Além disso, é possível explicitar quatro pontos muito importantes sobre a minimização de volume do IZF: (i) volume próximo de zero não implica em incerteza quase nula em todas as direções, (ii) a abordagem de volume sugere maior sensibilidade à dinâmica de erro, (iii) sensibilidade a condições iniciais e (iv) aplicar restrições intervalares como interseção não leva, necessariamente, o ZF a convergir. Embora a evolução temporal do volume de um zonotopo se aproxime de zero, a minimização de volume não impede que alguns estados sejam muito incertos, como observado em (Le et al., 2013b), pois o compromisso dessa minimização é escolher o menor volume dentre os possíveis zonotopos candidatos, independentemente das direções. Por exemplo, no reator em batelada, o intervalo do IZF é muito mais preciso no primeiro estado, cerca de oito vezes. No CSTR, o intervalo de x_1 é cerca de duas vezes mais preciso do que o de x_2 , e o intervalo de x_2 é cerca de 10 vezes mais preciso do que o de x_3 . Estes resultados também evidenciam que a minimização de volume pode gerar resultados com picos, devido a dinâmica do erro. Ressalta-se também que o IZF sugere maior sensibilidade a condições iniciais do que o UKF, neste caso por causa do efeito de alargamento, porque a escolha de uma inicialização um pouco diferente daquela caracterizada como “boa” já é suficiente para o filtro não convergir. Entretanto, o UKF converge inclusive para a inicialização “ruim”. Quanto à interseção do IZF, mesmo que ela fosse exata, não seria suficiente para garantir convergência, uma vez que o tamanho da região formada pelas restrições é grande o bastante para que o IZF não reduza incerteza. Isso ocorre por causa do passo de predição de zonotopo, que é sujeito aos efeitos de alargamento e dependência, o qual é mais expressivo quanto maior for a região envolvida.

Conclusões

“Porque dele, por Ele e para Ele são todas as coisas. A Ele, seja a glória para sempre. Amém.”

Rm 11:36

Este capítulo resume o conteúdo apresentado no trabalho, assim como as contribuições do mesmo. Em seguida, são sugeridos possíveis trabalhos futuros, que são limitações percebidas ao longo do trabalho.

5.1 Considerações Gerais

Este trabalho realiza uma análise comparativa de estimação de estados entre duas abordagens, aleatória e zonotópica. A abordagem aleatória é a base dos algoritmos de filtragem de Kalman, que são utilizados há décadas na literatura. Por sua vez, a teoria de conjuntos é a base dos estimadores zonotópicos, que são soluções destacadas pela característica garantida. Para isso, estudou-se de forma detalhada as ferramentas necessárias para compreender a base dos algoritmos empregados.

No Capítulo 2, foram apresentados conceitos essenciais para entendimento das abordagens, tais como conceitos estatísticos de probabilidade, média e covariância, definição e caracterização de uma variável aleatória, intervalar e zonotópica, entre outros. Ao longo do capítulo, exemplificaram-se alguns conceitos para melhor compreensão dos mesmos. Além disso, baseados em tais conceitos, os resultados de transformações lineares e não lineares de variáveis aleatórias e zonotópicas foram apresentados.

Em seguida, no Capítulo 3, as principais abordagens estocásticas e zonotópicas para estimação de estados foram apresentadas, como KF, EKF, UKF, ZGKF e ZF. Por meio destes métodos, os estados são estimados sem o compromisso de satisfazer restrições. Na abordagem zonotópica, é intuitivo tratar restrições intervalares por meio de interseção entre conjuntos, enquanto na abordagem estocástica é demandada uma etapa a mais. Então, foram apresentados também os algoritmos IUKF, OUKF, TUKF e IZF, que levam em conta restrições intervalares nos estados. Em geral, os passos dos algoritmos foram mostrados de forma detalhada e com notação unificada. Por fim, no Capítulo 4,

estudos de casos foram apresentados para que, por meio dos resultados gerados pela implementação dos algoritmos, pudesse ser realizada uma análise crítica dos mesmos.

Acredita-se que este trabalho alcançou seus objetivos e fornece uma boa revisão bibliográfica sobre as principais formas de estimar estados.

5.2 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são explicitadas a seguir. Uma revisão bibliográfica detalhada dos métodos de estimação de estados mais utilizados na literatura é apresentada. A abordagem estocástica é uma abordagem já consolidada, enquanto a abordagem de associação de conjuntos tem ganhado crescente visibilidade, cujos conceitos, para o caso não linear, ainda não estão claros na literatura. Acredita-se que a junção dos conteúdos relacionados a essas abordagens e a metodologia de apresentação dos mesmos, por meio de exemplos e descrição de algoritmos, auxiliarão e incentivarão outras pessoas a trabalhar com as mesmas abordagens não somente na área de estimação de estados.

Os algoritmos empregados neste trabalho foram aplicados em dois exemplos lineares e quatro exemplos não lineares, sendo dois deles com restrição intervalar. Por meio de análise gráfica e índices de desempenho como T^{CPU} , RMSE e MT, foi possível comparar os algoritmos. Para os casos lineares, foi explicitado que o KF só é mais preciso quando os ruídos são puramente Gaussianos e a sintonia destes é muito boa, nos mais variados cenários e na presença de ruídos Gaussianos e zonotópicos, o ZF gera centros mais acurados com menor precisão associada. Para os casos não lineares, explicitou-se que as estimativas da abordagem estocástica são mais precisas e acuradas do que a abordagem zonotópica. Entretanto, há situações em que as estimativas geradas pela abordagem zonotópica são mais precisas e acuradas, como no exemplo CSTR. Além disso, a sensibilidade a condições iniciais é muito mais importante no ZF do que no UKF, pois o ZF pode divergir.

Com base no algoritmo ZF, que não considera restrições nos estados, foi proposta uma forma de realizar interseção entre zonotopo e caixa de restrição. Basicamente, é aplicado um novo passo de interseção sobre o zonotopo proveniente do ZF, antes de reduzir este zonotopo, a fim de que, por meio da interseção entre faixa e zonotopo proposta por [Alamo et al. \(2005\)](#), seja realizada a interseção entre o zonotopo e a caixa de restrição, que é usada para definir cada faixa.

No Capítulo 4 foram explicitadas algumas limitações dos métodos UKF e ZF. Ambos os algoritmos sugerem sensibilidade a condições iniciais e, especificamente o ZF, não converge para sistemas com função de medição não linear e ou sistemas com dinâmica caótica devido a efeitos de alargamento e dependência. Uma maneira de superar as barreiras de convergência do ZF foi linearizar o modelo em torno do centro do zonotopo mais atual. Com isso, foi analisada a sintonia dos filtros, dado que erros de linearização devem ser incluídos para melhorar a dinâmica dos algoritmos.

5.3 Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho, foram verificadas algumas limitações da abordagem zotópica que merecem ser investigadas. Conforme observado no Capítulo 4, as estimativas centrais dos filtros baseados em associação de conjuntos não são tão acuradas quanto as médias estimadas. Desse modo, acredita-se que propor um funcional de custo baseado na norma- ∞ possa ser capaz de melhorar a estimativa central, uma vez que este funcional leva em conta o centro do conjunto.

No Capítulo 4 observou-se que o ZF pode ser sensível ao processo de discretização de sistemas não lineares contínuos. Esta sensibilidade está relacionada ao surgimento ou, até mesmo, intensificação do efeito de dependência. Neste trabalho optou-se por realizar a discretização do modelo linearizado contínuo por meio do método ZOH, em que as matrizes Jacobianas do modelo discretizado são aproximadas pela expansão em séries de Taylor da exponencial de matriz truncadas na terceira ordem. Entretanto, ao substituir intervalos nas matrizes Jacobianas do modelo discretizado, o efeito de dependência surge e pode levar o ZF à divergência. Caso as séries de Taylor sejam truncadas na primeira ordem, é possível obter convergência com menor precisão associada. Com base nisso, acredita-se que seja possível obter convergência e resultados precisos para o ZF utilizando outras formas de discretização.

Em todos os exemplos considerados neste trabalho, a ordem de redução de zonotopos foi considerada constante ao longo das simulações. Para sistemas não lineares, acredita-se que há pontos de operação mais sensíveis à redução de ordem, que podem levar a um crescimento mais rápido e conservador do zonotopo estimado. Possivelmente, a escolha de uma ordem de redução variante no tempo melhore a precisão das estimativas obtidas nesses pontos de operação e atenuar o crescimento acelerado dos zonotopos.

Em (Scott et al., 2016), a teoria de zonotopos com restrição foi proposta para o caso linear. Zonotopos com restrição satisfazem à propriedade de interseção. Dessa forma, conjuntos zotópicos podem ser exatamente computados durante a estimação de estados. Como a teoria de zonotopos com restrição é recente e ainda não está consolidada para o caso não linear, acredita-se que seja possível propor um algoritmo zotópico baseado nessa teoria e no ZF para estimar estados de sistemas não lineares, o qual também será capaz de incorporar as restrições intervalares de forma mais eficiente do que o IZF.

Referências Bibliográficas

- Abdullah, A. A. e Hassan, M. F. (2014). Constrained state estimator for nonlinear discrete-time dynamical systems with uncertain parameters. *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control*, 10(5):1809–1825.
- Alamo, T., Bravo, J. M., e Camacho, E. F. (2005). Guaranteed state estimation by Zonotopes. *Automatica*, 41(6):1035–1043.
- Alamo, T., Bravo, J. M., Redondo, M., e Camacho, E. F. (2008). A set-membership state estimation algorithm based on DC programming. *Automatica*, 44(1):216–224.
- Balestrino, A., Caiti, A., e Crisostomi, E. (2006). Particle filtering within a set-membership approach to state estimation. In *Control and Automation, 2006. MED'06. 14th Mediterranean Conference on*, páginas 1–6. IEEE.
- Bernstein, D. S. (2009). *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas Ed. 2*. Princeton University Press.
- Bo, Z., Kun, Q., Xu-Dong, M., e Xian-Zhong, D. (2013). A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 39(2):146–154.
- Boada, B. L., Garcia-Pozuelo, D., Boada, M. J. L., e Diaz, V. (2016). A Constrained dual Kalman Filter based on PDF Truncation for Estimation of Vehicle Parameters and Road Bank Angle: Analysis and Experimental Validation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 18(4):1006–1016.
- Bravo, J., Alamo, T., e Camacho, E. (2004). Bounded error identification of systems with time-varying parameters. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 4, páginas 4063–4068.
- Bravo, J. M., Alamo, T., e Camacho, E. F. (2006a). Bounded error identification of systems with time-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7):1144–1150.

- Bravo, J. M., Alamo, T., e Camacho, E. F. (2006b). Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on approximated reachable sets. *Automatica*, 42(10):1745–1751.
- Chen, G., Wang, J., e Shieh, L. S. (1997). Interval Kalman filtering. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(1):250–259.
- Chisci, L., Garulli, A., Vicino, A., e Zappa, G. (1998). Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification. *Automatica*, 34(1):15–22.
- Combastel, C. (2005). A state bounding observer for uncertain non-linear continuous-time systems based on zonotopes. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 7228–7234.
- Combastel, C. (2015). Merging Kalman filtering and zonotopic state bounding for robust fault detection under noisy environment. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21):289–295.
- Combastel, C. (2015). Zonotopes and Kalman observers: Gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. *Automatica*, 55:265–273.
- Combastel, C. (2016). An Extended Zonotopic and Gaussian Kalman Filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms: Toward non-linear filtering and fault detection. *Annual Reviews in Control*, 42:232–243.
- Gelb, A. (1974). *Applied optimal estimation*. MIT press.
- Jaulin, L. e Kieffer, M. (2001). *Applied Interval Analysis*. Springer.
- Jazwinski, A. H. (2007). *Stochastic processes and filtering theory*. Courier Corporation.
- Julier, S. J. e Uhlmann, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422.
- Kalman, R. E. et al. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1):35–45.
- Kay, S. M. (1993). *Fundamentals of statistical signal processing*. Prentice Hall PTR.
- Kolås, S., Foss, B. A., e Schei, T. (2009). Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach. *Computers & Chemical Engineering*, 33(8):1386–1401.
- Kottakki, K. K., Bhushan, M., e Bhartiya, S. (2014). Interval constrained state estimation of nonlinear dynamical systems using unscented Gaussian sum filter. In *Control Conference (AUCC), 2014 4th Australian*, páginas 297–302. IEEE.
- Kühn, W. (1998). Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect. *Computing*, 61(1):47–67.

- Kurzhanskiy, A. A. e Varaiya, P. (2006). Ellipsoidal toolbox. Relatório Técnico UCB/EECS-2006-46, EECS Department, University of California, Berkeley.
- Le, V. T. H., Stoica, C., Alamo, T., Camacho, E. F., e Dumur, D. (2013a). *Zonotopes: From guaranteed state-estimation to control*. John Wiley & Sons.
- Le, V. T. H., Stoica, C., Alamo, T., Camacho, E. F., e Dumur, D. (2013b). Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems. *Automatica*, 49(11):3418–3424.
- Leite, A. V., Araujo, R. E., e Freitas, D. (2004). Full and reduced order extended Kalman filter for speed estimation in induction motor drives: A comparative study. In *Power Electronics Specialists Conference, 2004. PESC 04. 2004 IEEE 35th Annual*, volume 3, páginas 2293–2299.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141.
- Menegaz, H. M., Ishihara, J. Y., Borges, G. A., e Vargas, A. N. (2015). A systematization of the unscented Kalman filter theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(10):2583–2598.
- Moore, R. E., Kearfott, R. B., e Cloud, M. J. (2009). *Introduction to interval analysis*. SIAM.
- Prakash, J., Huang, B., e Shah, S. L. (2014). Recursive constrained state estimation using modified extended Kalman filter. *Computers & Chemical Engineering*, 65:9–17.
- Prakash, J., Patwardhan, S. C., e Shah, S. L. (2010). Constrained nonlinear state estimation using ensemble Kalman filters. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(5):2242–2253.
- Rego, B. S. (2016). *Path Tracking Control of a suspended load using a tilt-rotor UAV*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Rengaswamy, R., Narasimhan, S., e Kuppuraj, V. (2013). Receding-horizon nonlinear Kalman (RNK) filter for state estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(8):2054–2059.
- Särkkä, S. (2013). *Bayesian filtering and smoothing*, volume 3. Cambridge University Press.
- Scott, J. K., Raimondo, D. M., Marseglia, G. R., e Braatz, R. D. (2016). Constrained zonotopes: A new tool for set-based estimation and fault detection. *Automatica*, 69:126–136.
- Shao, X., Huang, B., e Lee, J. M. (2010). Constrained Bayesian state estimation—A comparative study and a new particle filter based approach. *Journal of Process Control*, 20(2):143–157.

- Shimada, N., Shirai, Y., Kuno, Y., e Miura, J. (1998). Hand gesture estimation and model refinement using monocular camera-ambiguity limitation by inequality constraints. In *Automatic Face and Gesture Recognition, 1998. Proceedings. Third IEEE International Conference on*, páginas 268–273.
- Sparrow, C. (2012). *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41. Springer Science & Business Media.
- Teixeira, B. O. S., Tôrres, L. A., e Aguirre, L. A. (2010a). Filtragem de Kalman com Restrições para Sistemas Não-Lineares: Revisão e Novos Resultados. *Revista Controle & Automação*, 21(10):127–146.
- Teixeira, B. O. S., Tôrres, L. A. B., Aguirre, L. A., e Bernstein, D. S. (2010b). On unscented Kalman filtering with state interval constraints. *Journal of Process Control*, 20(1):45–57.
- Tenny, M. J., Rawlings, J. B., e Wright, S. J. (2004). Closed-loop behavior of nonlinear model predictive control. *AIChE Journal*, 50(9):2142–2154.
- Vachhani, P., Narasimhan, S., e Rengaswamy, R. (2006). Robust and reliable estimation via unscented recursive nonlinear dynamic data reconciliation. *Journal of process control*, 16(10):1075–1086.
- Vachhani, P., Rengaswamy, R., Gangwal, V., e Narasimhan, S. (2005). Recursive estimation in constrained nonlinear dynamical systems. *AIChE Journal*, 51(3):946–959.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., e Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317.
- Xie, L., Soh, Y. C., e De Souza, C. E. (1994). Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on automatic Control*, 39(6):1310–1314.
- Xiong, J., Jauberthie, C., e Jauberthie, L. T.-M. (2012). New computation aspects for the Interval Kalman Filtering. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(25):77–82.
- Xu, L., Li, X. R., Liang, Y., e Duan, Z. (2017). Constrained dynamic systems: Generalized modeling and state estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 53(5):2594–2609.