

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1065

**EXPANSÃO EM MULTIPLOS ESFÉRICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO
APLICADA À TRANSFORMAÇÃO CAMPO PRÓXIMO-CAMPO DISTANTE**

Franz Müller Eduardo Camilo

DATA DA DEFESA: 13/07/2018

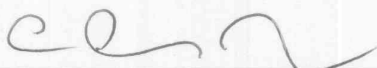
**"Expansão em Multipolos Esféricos no Domínio do Tempo
Aplicada à Transformação Campo Próximo-campo Distante"**

Franz Müller Eduardo Camilo

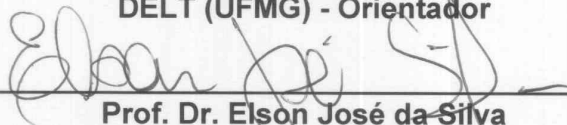
Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 13 de julho de 2018.

Por:



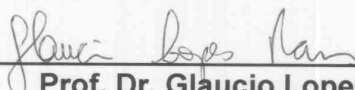
**Prof. Dr. Cássio Gonçalves do Rego
DELT (UFMG) - Orientador**



**Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)**



**Prof. Dr. Sandro Trindade Mordente Gonçalves
Engenharia Elétrica (CEFET MG)**



**Prof. Dr. Glaucio Lopes Ramos
DETEM (UFSJ) - Coorientador**

EXPANSÃO EM MULTIPOLOS ESFÉRICOS NO
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADA À
TRANSFORMAÇÃO CAMPO PRÓXIMO-CAMPO
DISTANTE

FRANZ MÜLLER EDUARDO CAMILO

EXPANSÃO EM MULTIPOLOS ESFÉRICOS NO
DOMÍNIO DO TEMPO APLICADA À
TRANSFORMAÇÃO CAMPO PRÓXIMO-CAMPO
DISTANTE

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: CÁSSIO GONÇALVES DO REGO
COORIENTADOR: GLAUCIO LOPES RAMOS

Belo Horizonte

Julho de 2018

*Dedico este trabalho a Nosso Senhor Jesus Cristo pelas mãos da Virgem Maria...
Totus Tuus.*

Agradecimentos

Este trabalho não teria sido possível sem o apoio de departamentos, instituições e pessoas às quais gostaria de registrar meu reconhecimento. Deste modo, agradeço:

- A Deus pelos muitos auxílios;
- À minha família pelo apoio;
- Ao professor Cássio Gonçalves do Rego pela orientação, apoio e aprendizado. Destaco sua grande competência técnica, sua proximidade dos alunos e as muitas conversas em que partilhou sua valiosa experiência de vida conosco no GAPTEM;
- Ao professor Glaucio Lopes Ramos do DETEM/UFSJ pela coorientação. Resalto sua grande dedicação, as muitíssimas horas que tirou para me ensinar os detalhes dos códigos, para me ajudar concretamente a superar os inúmeros obstáculos técnicos que surgiram ao longo deste trabalho e pelas várias simulações que executou. Certamente, os resultados alcançados não poderiam ser os mesmos sem o seu constante apoio. Reconheço também seu incentivo desde a graduação para que eu fizesse o mestrado;
- Ao professor Fernando José da Silva Moreira do DELT/UFMG pelos conhecimentos transmitidos nas disciplinas;
- À CAPES pelo suporte financeiro;
- Aos colegas do GAPTEM e também aos das disciplinas pelo suporte, conversas, dicas, apoio e companheirismo;
- Ao Rafael Vareto, aluno do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, pelas dicas de programação em C++;
- Ao Domingos Rodrigues do LCC-CENAPAD/UFMG pela grande dedicação em nos auxiliar na execução dos códigos no servidor do CENAPAD;

- Ao Departamento de Computação (DECOM) do CEFET-MG por conceder ao prof. Glaucio uma conta de acesso ao servidor de alto desempenho, tornando possível a realização de inúmeras simulações;
- Aos amigos pelo apoio e orações.

“A fé e a razão constituem como que as duas asas pelas quais o espírito humano se eleva para a contemplação da verdade. Foi Deus quem colocou no coração do homem o desejo de conhecer a verdade e, em última análise, de O conhecer a Ele, para que, conhecendo-O e amando-O, possa chegar também à verdade plena sobre si próprio.”

(São João Paulo II)

Resumo

Este trabalho consiste de várias análises, testes e estudos que visam gerar conhecimento e meios úteis para acelerar a execução computacional da transformada de campo próximo para campo distante baseada na expansão em multipolos esféricos no domínio do tempo. Inicialmente, uma vasta e minuciosa revisão bibliográfica com observações práticas e comentários sobre o método foram elaborados. As correntes superficiais calculadas pelo método FDTD (do inglês *Finite-Difference Time-Domain*) na região do campo próximo de uma antena foram utilizadas como argumento de entrada. Deste modo, diversos parâmetros do FDTD e da transformada por multipolos foram testados com o objetivo de se obter sua convergência mediante maior eficiência em termos de custo computacional. Além disso, a implementação de programação paralela MPI (do inglês *Message-Passing Interface*) permitiu acelerar significativamente a execução do programa. As antenas de teste adotadas foram um dipolo de meia-onda em 10 GHz e, posteriormente, uma antena impressa *quasi-yagi* de dupla banda.

Como uma de suas contribuições práticas principais, este trabalho desenvolveu uma técnica de análise estatística aplicada à redução de dados de entrada da transformada, que poderia possibilitar a eliminação de iterações que agregam precisão desprezível ou nula ao resultado final. A análise estatística permitiu a geração de diagramas precisos com redução de dados de 90% para o dipolo de meia-onda e de 60% para a antena *quasi-yagi*. Por sua vez, as equações que fornecem as amplitudes de cada multipolo da expansão são responsáveis por praticamente todo o custo computacional do método. Foi descoberto neste trabalho que as parcelas que compõem os somatórios destas equações possuem padrões de recorrência entre os valores assumidos a cada iteração. Esta característica possibilitaria a eliminação de iterações com parcelas recorrentes além de permitir a aplicação das técnicas de redução de dados com mais eficiência. Embora a análise estatística desenvolvida e os padrões de recorrência observados não tenham sido aplicados na prática à redução do custo computacional, eles apresentaram evidências de serem meios promissores na eliminação de iterações desnecessárias e, conseqüentemente, na redução do custo computacional da transformada

para campo distante por multipolos esféricos no domínio do tempo.

Palavras-chave: análise eletromagnética no domínio do tempo, FDTD, transformada de campo próximo-campo distante, harmônicos esféricos, expansão em multipolos esféricos, simulação de antenas impressas, antenas de banda ultra larga (UWB), programação paralela MPI, análise estatística, redução de dados de entrada.

Abstract

This work contains several analyses, tests and studies made to provide knowledge and useful means to speed up the time-domain near-to-far-field (NFF) transform based on spherical multipole expansion program. Initially, a large and detailed bibliographical review with comments and practical observations about the method were elaborated. The antenna near-field region surface currents computed by the FDTD (Finite-Difference Time-Domain) method were used as input data. In this way, some NFF transform and FDTD parameters were checked in order to reach convergence along with greater efficiency in terms of computational cost. In addition, MPI (Message-Passing Interface) parallel programming implementation allowed to speed up significantly the program processing. A half-wave length dipole in 10 GHz and a dual band printed *quasi-yagi* antenna were chosen as test antennas.

As one of its main practical contributions, this work developed a statistical analysis technique applied to the NFF transform input data reduction, which could enable to get rid of iterations that add no or negligible accuracy to the final result. The statistical analysis allowed to generate accurate radiation patterns with 90% data reduction for the half-wave length dipole and 60% for the *quasi-yagi* antenna. On the other hand, the equations that provide every multipole amplitude are responsible for practically all the method computational cost. In this work, it was found out that each portion of those equation summations displays recurrency patterns among the values assumed in every iteration. Those characteristics would allow to eliminate the iteration with recurrent portions as well as to apply the data reduction techniques with more efficiency. Although the developed statistical analysis and the noticed recurrency patterns in practice have not been applied to the computational cost reduction, they present evidences to be promising means to eliminate unnecessary iterations and, consequently, to reduce the time-domain spherical multipole NFF transform computational cost.

Keywords: time-domain electromagnetic analysis, FDTD, near-to-far-field transform, spherical harmonics, spherical multipole expansion, printed antenna simulation, ultra

wide band (UWB) antennas, MPI parallel programming, input data reduction.

Lista de Figuras

2.1	Dipolo elétrico (físico) com observação em duas dimensões no plano zx . . .	6
2.2	Observação sobre o plano bidimensional zx do potencial elétrico gerado por uma distribuição contínua de cargas $\rho(\vec{r}')$ contidas no volume, sendo o infinitésimo de volume representado pelo cubo $d\tau'$ e ponto de observação definido por \vec{r}	10
3.1	Geometria dos harmônicos esféricos $Y_n^m(\theta, \phi)$ de combinação (n, m) [1]. . .	28
5.1	Processo de simulação de antenas adotado neste trabalho.	66
5.2	Dipolo de meia-onda dentro da superfície cúbica de Huygens.	67
5.3	Sinal de excitação aplicado ao dipolo de meia-onda.	69
5.4	Diagrama de radiação no plano xy do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.	70
5.5	Diagrama de radiação no plano xz do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.	70
5.6	Diagrama de radiação no plano yz do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.	71
5.7	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{máx} = 1$	72
5.8	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{máx} = 4$	73
5.9	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{máx} = 8$	73
5.10	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{máx} = 11$	74

5.11 Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{máx} = 1$	75
5.12 Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{máx} = 4$	75
5.13 Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{máx} = 8$	76
5.14 Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{máx} = 11$	76
5.15 Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução analítica e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.	77
5.16 Tempo de processamento da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com diversos valores de $n_{máx}$ para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.	78
5.17 Tempo de processamento da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com paralelização híbrida <i>OpenMP</i> /MPI.	79
5.18 Perda de retorno medida da antena impressa <i>quasi-yagi</i> [2].	80
5.19 Esboço da antena <i>quasi-yagi</i> com todas as medidas.	81
5.20 Sinal de excitação aplicado à antena <i>quasi-yagi</i>	82
5.21 Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	83
5.22 Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	84
5.23 Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	84
5.24 Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	85
5.25 Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	85
5.26 Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	86

5.27	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	86
5.28	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	87
5.29	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 2000 instantes de tempo.	87
5.30	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	89
5.31	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	90
5.32	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	90
5.33	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	91
5.34	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	91
5.35	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	92
5.36	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	92
5.37	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	93
5.38	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	93

5.39	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz.	94
5.40	Diagrama de radiação no plano <i>xy</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	95
5.41	Diagrama de radiação no plano <i>xy</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	95
5.42	Diagrama de radiação no plano <i>xy</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	96
5.43	Diagrama de radiação no plano <i>xz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	96
5.44	Diagrama de radiação no plano <i>xz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	97
5.45	Diagrama de radiação no plano <i>xz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	97
5.46	Diagrama de radiação no plano <i>yz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	98
5.47	Diagrama de radiação no plano <i>yz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	98
5.48	Diagrama de radiação no plano <i>yz</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	99
5.49	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz.	100
5.50	Diagrama de radiação no plano <i>xy</i> da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	100

5.51	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	101
5.52	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	101
5.53	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	102
5.54	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	102
5.55	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	103
5.56	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.	103
5.57	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 8$ e 2000 instantes de tempo.	104
5.58	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.	104
5.59	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz.	105
5.60	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	107
5.61	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	107
5.62	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	108

5.63	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	108
5.64	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	109
5.65	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	109
5.66	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	110
5.67	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	110
5.68	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.	111
5.69	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	113
5.70	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	113
5.71	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	114
5.72	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	114
5.73	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	115
5.74	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.	115
5.75	Sinal de excitação de teste aplicado à antena <i>quasi-yagi</i>	116
5.76	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e <i>wavelet</i> com 3000 instantes de tempo.	117
5.77	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e <i>wavelet</i> com 3000 instantes de tempo.	118

5.78	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e <i>wavelet</i> com 3000 instantes de tempo.	118
5.79	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	119
5.80	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	120
5.81	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	120
5.82	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	121
5.83	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	121
5.84	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	122
5.85	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	122
5.86	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	123
5.87	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo. . .	123
5.88	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada por multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	125
5.89	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	125
5.90	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	126
5.91	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	126
5.92	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	127

5.93	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	127
5.94	Diagrama de radiação no plano xy da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	128
5.95	Diagrama de radiação no plano xz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	128
5.96	Diagrama de radiação no plano yz da antena <i>quasi</i> -yagi em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.	129
6.1	Processo de geração do histograma com os valores da componente \hat{r} dos momentos de corrente elétrica sobre uma das faces da superfície cúbica de Huygens.	133
6.2	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	134
6.3	Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	134
6.4	Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	135
6.5	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	135
6.6	Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	136

6.7	Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	136
6.8	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $0,5\sigma$	138
6.9	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 1σ	138
6.10	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $1,5\sigma$	139
6.11	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 2σ	139
6.12	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $2,5\sigma$	140
6.13	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 3σ	140
6.14	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	143
6.15	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	143
6.16	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	144
6.17	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	144

6.18	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	145
6.19	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	145
6.20	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	146
6.21	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	146
6.22	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	147
6.23	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	147
6.24	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	148
6.25	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	148
6.26	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{máx} = 1$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção.	149
6.27	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	150
6.28	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	150
6.29	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	151
6.30	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	151
6.31	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	152
6.32	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	152
6.33	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	153
6.34	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	153
6.35	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$	154

6.36	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 6$	154
6.37	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 6$	155
6.38	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 6$	155
6.39	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 6$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção.	156
6.40	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	157
6.41	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	157
6.42	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	158
6.43	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	158
6.44	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	159
6.45	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	159
6.46	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	160
6.47	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	160
6.48	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	161
6.49	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	161
6.50	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	162
6.51	Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 11$	162
6.52	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 11$ e soluções com análise estatística do dipolo de meia-onda em 10 GHz para diferentes limiares de seleção.	163

6.53	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	164
6.54	Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	164
6.55	Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	165
6.56	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	165
6.57	Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	166
6.58	Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.	166
6.59	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $0,5\sigma$	167
6.60	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 1σ	168
6.61	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $1,5\sigma$	168

6.62	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 2σ	169
6.63	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $2,5\sigma$	169
6.64	Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 3σ	170
6.65	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	171
6.66	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	172
6.67	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	172
6.68	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	173
6.69	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	173
6.70	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	174
6.71	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	174
6.72	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	175
6.73	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	175
6.74	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	176
6.75	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	176
6.76	Diagrama de radiação da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$	177

6.77 Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{máx} = 1$ e soluções com análise estatística da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz para diferentes limiares de seleção.	178
---	-----

Lista de Tabelas

4.1	Procedimento para o cálculo do número total de multipolos esféricos da expansão para $n_{m\acute{a}x} = 11$	49
4.2	Amplitudes dos multipolos $A_{n,m}$ para $n_{m\acute{a}x} = 5$	50
5.1	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução analítica e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.	77
5.2	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz.	94
5.3	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi-yagi</i> em 1,9 GHz.	99
5.4	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena <i>quasi-yagi</i> em 2,4 GHz.	105
5.5	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ para a antena <i>quasi-yagi</i>	111
5.6	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada padrão para a antena <i>quasi-yagi</i>	116
6.1	Taxa da redução global dos dados de entrada com diferentes limiares de seleção para o dipolo de meia-onda em 10 GHz.	141
6.2	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e as soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.	149

6.3	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 6$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.	156
6.4	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 11$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.	163
6.5	Taxa de redução global dos dados de entrada para a antena <i>quasi-yagi</i> com diferentes limiares de seleção.	170
6.6	Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e soluções com análise estatística da antena <i>quasi-yagi</i> em 0,9 GHz para diferentes limiares de seleção em decibéis.	177
7.1	Comportamento dos somatórios das Equações 7.6 e 7.7 para $L_{el} = 3$ e $k = 4$.	182
7.2	Comportamento dos somatórios das Equações 7.6 e 7.7 para $L_{el} = 3$ e $k = 5$.	183
7.3	Comportamento da função $\vec{f}(k, l, i)$ para somatório com $k_{m\acute{a}x} = 5$	184
7.4	Argumentos possíveis da função $\vec{g}(k, l, i)$ para o somatório com $k_{m\acute{a}x} = 4$	187
7.5	Comportamento da função $\vec{g}(k, l, i)$ para somatório com $k_{m\acute{a}x} = 4$	187
7.6	Comportamento da função $\vec{g}(k, l, i)$ para somatório com $k_{m\acute{a}x} = 4$	188
7.7	Relação entre instantes diferentes da função $\vec{g}(k, l, i)$	189
B.1	Polinômios associados de Legendre de grau n , ordem $m = 0$ e argumento x .	203

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xxix
1 Introdução	1
2 Fundamentos da Expansão em Multipolos	5
2.1 Distribuição de Cargas Pontuais	5
2.2 Dipolo Elétrico (Físico)	6
2.3 Distribuição Contínua de Cargas	9
2.4 Expansão em Multipolos	13
2.5 Momento de Dipolo	14
2.6 Campo Elétrico (\vec{E})	15
2.7 Conclusão Parcial	16
3 Expansão em Multipolos Esféricos	17
3.1 Equações de Maxwell	17
3.2 Equação de Onda Escalar	20
3.2.1 Solução em r : Função de Bessel Esférica	24
3.2.2 Solução em θ : Polinômios Associados de Legendre	25
3.2.3 Solução em ϕ : Exponencial Complexa	26
3.2.4 Harmônicos Esféricos	27
3.2.5 Solução Escalar em Coordenadas Esféricas	29
3.3 Equação Vetorial de Onda	30

3.3.1	Solução \vec{L}	32
3.3.2	Solução \vec{M}	33
3.3.3	Solução \vec{N}	34
3.3.4	Solução Vetorial Fundamental	36
3.3.5	Solução Vetorial em Coordenadas Esféricas	38
3.4	Conclusão Parcial	41
4	Transformada de Campo Próximo para Distante	43
4.1	Transformada no Domínio da Frequência	44
4.1.1	Distribuição Contínua de Corrente	45
4.1.2	Distribuição Discreta de Corrente	46
4.2	Transformada no Domínio do Tempo	50
4.3	Aproximação Linear Temporal dos Dados de Campo Próximo	53
4.4	Potencialidades e Particularidades da Transformada NFF baseada em Multipolos Esféricos	62
4.5	Conclusão Parcial	64
5	Aplicação e Ajuste da Transformada	65
5.1	Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE)	65
5.2	Processo de Simulação	66
5.3	Antena Dipolo de Meia-Onda	67
5.3.1	Resultados Iniciais	69
5.3.2	Análise do Número de Coeficientes da Expansão	71
5.3.3	Programação Paralela	78
5.4	Antena Impressa <i>Quasi</i> -Yagi	80
5.4.1	Resultados Iniciais	82
5.4.2	Análise do Número de Coeficientes da Expansão	88
5.4.3	Análise do Número de Instantes de Tempo	106
5.4.4	Análise do Método FDTD	112
5.5	Conclusão Parcial	129
6	Análise Estatística dos Momentos de Corrente	131
6.1	Antena Dipolo de Meia-Onda	132
6.1.1	Redução de Dados	137
6.1.2	Resultados	141
6.2	Antena <i>Quasi</i> -Yagi	163
6.2.1	Redução de Dados	167
6.2.2	Resultados	170

6.3	Conclusão Parcial	178
7	Análise das Equações das Amplitudes dos Multipolos	179
7.1	Parcela dos Momentos de Correntes	179
7.1.1	Análise de $\vec{f}(k, l, i)$	184
7.1.2	Análise de $\vec{g}(k, l, i)$	187
7.1.3	Equações das Amplitudes em Função de \vec{f} e \vec{g}	191
7.2	Conclusões Parciais	192
8	Conclusão	193
	Referências Bibliográficas	197
	Apêndice A Expansão Binomial	201
	Apêndice B Polinômios Associados de Legendre	203

Capítulo 1

Introdução

A teoria da expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos foi inicialmente motivada pelos problemas de espalhamento eletromagnético e difração por uma esfera. Acredita-se que A. Clebsch foi o pioneiro na investigação matematicamente rigorosa do espalhamento da luz por uma esfera em 1861. Ele publicou seus estudos em 1863 [3], antes mesmo de Maxwell ter apresentado sua teoria sobre campos eletromagnéticos em 1865 [4]. Utilizando separação de variáveis, Clebsch propôs uma expansão de ondas através do produto de harmônicos esféricos superficiais e funções de Bessel esféricas. No entanto, estas funções matemáticas especiais não eram conhecidas na época e Clebsch precisou desenvolver representações adequadas em séries [5].

Muitos pesquisadores, entre eles L. Lorenz, Lord Rayleigh, G. Mie, P. Debye e Nicholson, se voltaram para a investigação do problema do espalhamento da luz por uma esfera, especialmente depois da apresentação da teoria de Maxwell. À vista disso, o primeiro termo elétrico (dipolo) da expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos foi analisado em 1889 por Hertz [6], que apresentou o elemento de corrente alternada infinitesimalmente curto e o relacionou com o conhecido dipolo eletrostático pontual. Em 1919, Bromwich propôs uma abordagem geral para se construir soluções elementares das equações de Maxwell em sistemas de coordenadas curvilíneos, incluindo o sistema de coordenadas esféricas [7]. Posteriormente, Hansen desenvolveu uma forma concisa para estas “funções de onda vetoriais”, chamadas por ele de “funções de multipolos” [8], que foram detalhadamente desenvolvidas por Stratton em 1941 [9]. Muitos outros pesquisadores abordaram a expansão em multipolos em seus trabalhos através da utilização de vários sistemas de coordenadas diferentes [5].

Basicamente, o termo “expansão em multipolos” está relacionado com a eletrostática, onde cada parcela de uma expansão em série infinita pode ser fisicamente interpretada como um termo multipolar. Em coordenadas esféricas, o termo inicial representa

um monopolo esférico, o segundo um dipolo, o terceiro um quadripolo e assim por diante, sendo todos eles localizados na origem do sistema de coordenadas. A dependência radial é expressa por potências de $1/r$, onde r é a distância radial. Analogamente, a dependência radial da expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos na eletrodinâmica é descrito pelas equações de Bessel esféricas e suas derivadas. Neste caso, todos os termos dos multipolos esféricos eletrodinâmicos apresentam a mesma dependência radial de aproximadamente $1/r$ na região de campo distante [5].

A expansão em multipolos esféricos é, dentre outras aplicações práticas, utilizada por uma técnica de transformação para campo distante a partir do campo próximo medido ou calculado sobre uma superfície esférica ao redor de antenas com excitação harmônica ou por transientes [5]. Esta técnica de transformação no domínio do tempo, que é o tema central deste trabalho, permite que o campo eletromagnético radiado por uma antena seja calculado em qualquer região do campo distante sem que novas integrações das correntes sejam realizadas. Outra vantagem é que, uma vez que as amplitudes de cada coeficiente da expansão no domínio do tempo foram calculadas, diagramas de radiação podem ser rapidamente gerados em qualquer frequência dentro da faixa em análise sem novos cálculos de amplitude [10]. Estas são algumas das características que favorecem a escolha desta transformada. Além disso, as técnicas de análise eletromagnética no domínio do tempo são uma ferramenta importante na caracterização de campos eletromagnéticos, especialmente em sistemas de banda ultra larga (UWB, do inglês *ultra wide band*). Embora as técnicas no domínio do tempo costumem apresentar alto custo computacional, elas oferecem algumas vantagens relevantes que os métodos no domínio da frequência não apresentam. Os métodos no domínio do tempo, por exemplo, permitem um entendimento físico mais claro dos fenômenos em análise, pois o campo eletromagnético é conhecido a cada instante de tempo. Estas técnicas também fornecem a resposta a transientes, o que não é possível com os métodos no domínio da frequência [11].

O foco deste trabalho é a transformada de campo próximo para distante (NFF, do inglês *near-to-far-field*) por multipolos esféricos no domínio do tempo aplicada à análise de antenas impressas. Para tal fim, esta transformação, que apresenta um elevado custo computacional, foi realizada a partir do campo próximo fornecido pela técnica das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD, do inglês *finite-difference time-domain*). A associação entre FDTD e transformada NFF por multipolos esféricos foi abordada anteriormente em uma tese de doutorado deste grupo de pesquisa [12], fornecendo uma base importante para o bom êxito desta dissertação. Este trabalho de mestrado, por sua vez, concentrou esforços em avançar na compreensão da técnica da transformada, propondo meios para se acelerar a execução computacional da mesma.

Inicialmente, uma discussão sobre a redução dos coeficientes da expansão foi levantada juntamente com a análise da influência da fonte de excitação e da condição de camada absorvente do FDTD. Posteriormente, a programação paralela MPI (do inglês *Message-Passing Interface*) foi implementada com o objetivo de se executar a transformada em um *cluster* de computadores. Além disso, uma nova técnica baseada em análise estatística foi proposta visando a redução do volume de dados processados pela transformada. Por último, um rearranjo das equações das amplitudes dos multipolos foi sugerido.

Esta dissertação possui a seguinte estrutura: os três primeiros capítulos após esta introdução reúnem vasta teoria sobre a expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos desde seus fundamentos até a transformada de campo próximo para campo distante. A justificativa para esta longa discussão teórica se deve ao fato de que os artigos e livros apresentam este assunto de forma bastante superficial e muito fragmentada. Isto dificulta excessivamente o entendimento do tema devido à sua grande complexidade. A teoria apresentada nesta dissertação constitui uma das suas contribuições mais relevantes, pois em nenhum outro trabalho se encontra toda esta informação reunida e com o nível de detalhamento com que é apresentado aqui. Deste modo, o Capítulo 2 é basicamente conceitual, abordando os fundamentos da expansão em multipolos na eletrostática. O Capítulo 3 desenvolve a expansão em multipolos dos campos eletrodinâmicos desde a equação de onda até sua solução vetorial em coordenadas esféricas. É importante ressaltar que este capítulo traz observações interessantes e, com notação padronizada, indica o possível desenvolvimento algébrico que resultou nas soluções finais encontradas na literatura sem muita ou nenhuma explicação. Esses dois capítulos contêm conceitos fundamentais e demonstrações detalhadas; porém, embora sejam relevantes e fortemente recomendados, eles não são necessários para o entendimento dos resultados experimentais e das contribuições práticas considerando a aplicação em análise de antenas. Em contrapartida, o Capítulo 4 é o mais importante e tema central deste trabalho, sendo essencial para a compreensão dos experimentos e seus resultados. Ele contém toda a teoria da transformada de campo próximo para campo distante (NFF) baseada na expansão em multipolos esféricos desde sua solução no domínio da frequência até sua formulação discreta no domínio do tempo. Observações práticas importantes foram reunidas no fim desse capítulo.

Os Capítulos 5 e 6 contêm os resultados experimentais da transformada para uma antena dipolo de meia-onda e uma antena impressa *quasi-yagi*. Desta forma, o Capítulo 5 apresenta os resultados iniciais e realiza uma série de análises visando a convergência, maior precisão, aceleração e compreensão prática do método. O Capítulo 6 propõe de forma inédita uma análise estatística utilizada na redução dos argumentos de entrada

da transformada, que gerou um artigo representado na Conferência Européia em Antenas e Propagação (EuCAP 2018) em Londres, Reino Unido [13]. Já o Capítulo 7 apresenta uma inédita análise algébrica das equações das amplitudes dos multipolos, que são responsáveis pela maior parcela do custo computacional do algoritmo. Esse capítulo estabelece algumas observações importantes e sugere a reescrita das equações das amplitudes dos multipolos em um formato que favoreça a aplicação das técnicas de redução de dados, a exemplo da técnica da análise estatística proposta nesta dissertação. Por fim, o Capítulo 8 contém as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos da Expansão em Multipolos

Ainda que a expansão do campo eletromagnético dinâmico em multipolos esféricos, tema central deste trabalho, possua características distintas e muito mais complexas do que a de campos eletrostáticos, o conceito de multipolos se apresenta de forma muito mais intuitiva e simples na eletrostática do que na eletrodinâmica. Por conseguinte, este capítulo possui uma importância basicamente conceitual e ilustrativa, mas que possibilita uma melhor compreensão de conceitos não tão evidentes na teoria eletrodinâmica em coordenadas esféricas abordada no próximo capítulo.

Deste modo, é interessante observar que a expansão do campo eletromagnético em multipolos tem sua origem na eletrostática, onde se observa que o potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas pode ser reescrito como um somatório do potencial individual de vários multipolos individuais (monopolo, dipolo, quadriplo e assim por diante) [9, 5]. Inicialmente é interessante entender a definição de multipolos através da análise do potencial elétrico de cargas pontuais para, posteriormente, identificá-los na expansão do potencial elétrico de uma distribuição contínua de cargas eletrostáticas, como será visto a seguir.

2.1 Distribuição de Cargas Pontuais

Uma distribuição de cargas é percebida como sendo uma única carga pontual quando é observada de uma posição muito distante. Nesta posição distante, o potencial elétrico $V(r)$ gerado por esta distribuição de cargas pode ser aproximado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.1)$$

onde Q é a carga total e r é a distância entre o observador e o centro da distribuição de cargas [14].

2.2 Dipolo Elétrico (Físico)

O dipolo elétrico físico é composto por duas cargas elétricas iguais e opostas ($\pm q$), separadas simetricamente por uma distância total d . O potencial elétrico de um dipolo percebido por um observador distante pode ser calculado através da Equação 2.3, onde R_+ é a distância entre o observador e a carga $+q$, e R_- é a distância entre o observador e a carga $-q$. Por fim, tem-se que r é a distância entre o observador e a origem do sistema de coordenadas e que θ é o ângulo entre r e a linha ao longo do eixo z que liga a carga $+q$ à origem do sistema de coordenadas, conforme apresentado na Figura 2.1.

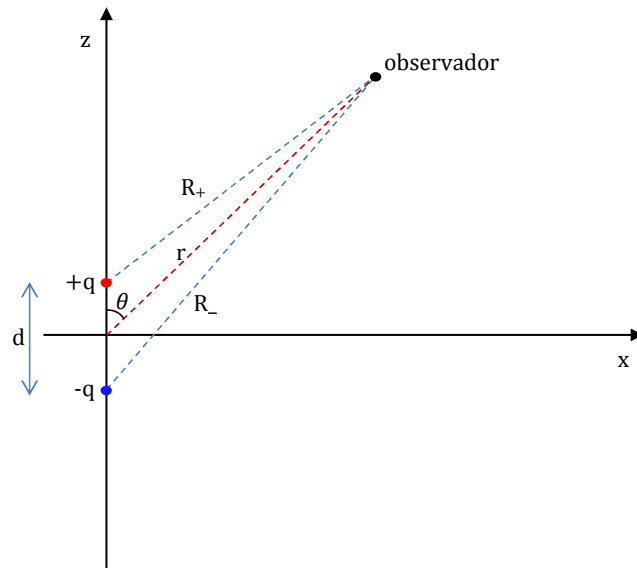


Figura 2.1: Dipolo elétrico (físico) com observação em duas dimensões no plano zx .

O potencial elétrico $V(r)$ calculado a uma distância r do centro de um conjunto qualquer de n cargas é dado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \quad (2.2)$$

onde a distância r entre o observador e o centro da distribuição de cargas pontuais está relacionada geometricamente à distância r_i entre o observador e a i -ésima carga pontual, como pode ser visualizado na Figura 2.1 e demonstrado pelas Equações 2.5, 2.10 e 2.12.

No caso do dipolo elétrico, o potencial se torna

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right). \quad (2.3)$$

É possível obter R_+ e R_- em função das variáveis r e θ comuns a ambas distâncias através da aplicação da lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta. \quad (2.4)$$

Desta forma, para R_+ :

$$R_+^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2r \left(\frac{d}{2}\right) \cos \theta,$$

$$R_+^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta. \quad (2.5)$$

Reescrevendo a Equação 2.5 com o termo r^2 em evidência, obtém-se que

$$R_+^2 = r^2 \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta \right).$$

Como o observador está em uma posição muito distante, onde $r \gg d$, o termo com segunda ordem no denominador pode ser desprezado. Logo,

$$R_+^2 \simeq r^2 \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right),$$

$$R_+ \simeq r \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{R_+} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Aplicando-se a expansão binomial encontrada no Apêndice A para o termo da raiz quadrada na Equação 2.6 e desprezando-se os termos de segunda ordem e ordens superiores:

$$\boxed{\frac{1}{R_+} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)}. \quad (2.7)$$

De forma análoga, aplicando-se a lei dos cossenos para R_- , tem-se que:

$$R_-^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 - 2r \left(\frac{d}{2} \right) \cos(180^\circ - \theta). \quad (2.8)$$

Através de algumas identidades trigonométricas, pode-se provar que

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta. \quad (2.9)$$

Logo, a equação 2.8 torna-se

$$R_-^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 + 2r \left(\frac{d}{2} \right) \cos \theta. \quad (2.10)$$

Através de manipulações análogas às aquelas realizadas para R_+ , a Equação 2.10 pode ser reescrita de forma aproximada como

$$\boxed{\frac{1}{R_-} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)}. \quad (2.11)$$

Substituindo-se as Equações 2.7 e 2.11 na Equação 2.3:

$$V(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \left[\left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right] \right\},$$

$$V(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{d}{r} \cos \theta \right] \right\},$$

$$\boxed{V(r) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d \cos \theta}. \quad (2.12)$$

Conclui-se, portanto, que em um ponto de observação muito distante, o potencial $V(r)$ do dipolo elétrico decai com a razão de $1/r^2$. Este decaimento é maior do que o de uma carga única (monopolo) que tem razão $1/r$. Desta mesma forma, se dois dipolos forem unidos para formar um quadripolo, o potencial decai na proporção de $1/r^3$. Além disso, se dois quadripolos forem unidos para formar um octopolo, o potencial decai com a razão $1/r^4$. Em resumo, pode-se dizer que para um multipolo contendo uma quantidade de $p = 2^n$ cargas pontuais, o potencial elétrico para um observador distante decai com a razão $1/r^{(n+1)}$. Esta é uma observação muito importante para a definição da expansão em multipolos que será feita a seguir.

2.3 Distribuição Contínua de Cargas

Quando a distribuição discreta de cargas é substituída por uma distribuição contínua, como mostrado na Figura 2.2, o somatório da Equação 2.2 é substituído pela integral da Equação 2.13. Desta vez, a razão $1/R$ irá ponderar cada infinitésimo de volume de cargas elétricas $\rho(\vec{r}')d\tau'$ em vez de ponderar uma única carga $\pm q$. Assim, o potencial elétrico $V(\vec{r})$ percebido por um observador posicionado em \vec{r} é dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') d\tau',$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \rho(\vec{r}') d\tau',} \quad (2.13)$$

onde

$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ é a distância entre carga e observador;

\vec{r} é a posição do observador;

\vec{r}' é a posição do infinitésimo de volume de carga;

$\rho(\vec{r}')$ é a densidade volumétrica de carga;

$d\tau'$ é um infinitésimo de volume;

ϵ_0 é a permissividade elétrica do espaço livre.

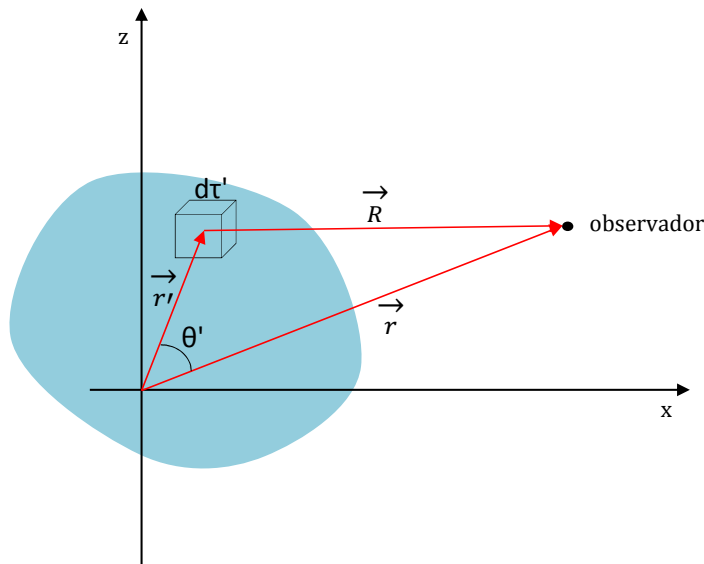


Figura 2.2: Observação sobre o plano bidimensional zx do potencial elétrico gerado por uma distribuição contínua de cargas $\rho(\vec{r}')$ contidas no volume, sendo o infinitésimo de volume representado pelo cubo $d\tau'$ e ponto de observação definido por \vec{r} .

De forma similar ao que foi feito para o dipolo elétrico físico na Seção 2.2, buscou-se reescrever a distância R entre observador e carga em função da posição r' e do ângulo

θ' localizado entre \vec{r} e \vec{r}' . Aplicando-se a lei dos cossenos apresentada na Equação 2.4 com relação ao ângulo θ' , tem-se que:

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'. \quad (2.14)$$

Reescrevendo-se a Equação 2.14 com r^2 em evidência:

$$R^2 = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \theta' \right],$$

$$R^2 = r^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \left[\left(\frac{r'}{r} \right) - 2 \cos \theta' \right] \right\}. \quad (2.15)$$

Definindo-se uma variável auxiliar

$$\alpha = \left(\frac{r'}{r} \right) \left[\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right], \quad (2.16)$$

para facilitar as manipulações, a Equação 2.15 pode ser reescrita de forma mais compacta com a substituição da Equação 2.16. Logo,

$$R^2 = r^2 (1 + \alpha),$$

$$R = r \sqrt{1 + \alpha},$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} (1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.17)$$

Quando o observador estiver muito distante da distribuição de cargas, $r \gg r'$ e, conseqüentemente, $\alpha \ll 1$. Esta situação faz a expansão binomial de $(1 + \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ apresentada no Apêndice A se tornar uma opção interessante, visto que os termos de ordem elevada poderão ser desprezados quando $r \gg r'$. Desta forma,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{5}{16}\alpha^3 + \dots \right). \quad (2.18)$$

Desfazendo-se a substituição de α conforme a Equação 2.16, tem-se que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right) \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \theta' \right)^3 + \dots \right]. \quad (2.19)$$

Realizando-se as multiplicações e abrindo-se os polinômios, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{1}{r} & \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \left(\frac{r'}{r} \right) (\cos \theta') + \frac{3}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^4 - \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (\cos \theta') \right. \\ & + \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (\cos^2 \theta') - \frac{5}{16} \left(\frac{r'}{r} \right)^6 + \frac{15}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^5 (\cos \theta') \\ & \left. - \frac{15}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^4 (\cos^2 \theta') + \frac{5}{2} (\cos^3 \theta') + \dots \right]. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Agrupando-se os termos de mesma razão $(r'/r)^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, a Equação 2.20 é reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{1}{r} & \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) (\cos \theta') + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5 \cos^3 \theta' - 3 \cos \theta'}{2} \right) + \dots \right]. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Pode-se observar que os termos que multiplicam a razão $(r'/r)^n$ são polinômios associados de Legendre $P_n^m(x)$ de grau $n = 0, 1, 2, \dots$, ordem $m = 0$ e argumento $x = \cos \theta'$ (descritos no Apêndice B). Logo, a razão $1/R$ pode ser reescrita como um somatório de polinômios associados de Legendre $P_n(\cos \theta')$ ponderados pela razão $(r'/r)^n$:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta').} \quad (2.22)$$

2.4 Expansão em Multipolos

Substituindo-se a Equação 2.22 na Equação 2.13 e considerando-se que a distância r é uma constante para a integral do potencial elétrico, obtém-se que

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.23)$$

Expandindo-se os primeiros termos do somatório:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d\tau' + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3 \cos^2 \theta' - 1}{2} \right) \rho(\vec{r}') d\tau' + \dots \right]. \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 constitui a **expansão em multipolos** do potencial eletrostático em potências de $1/r^{(n+1)}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ e assim por diante. Conforme foi visto no fim da Seção 2.2, o primeiro termo com $n = 0$ e razão $1/r$ corresponde à contribuição monopolar; o segundo termo com $n = 1$ e razão $1/r^2$ corresponde à contribuição dipolar; o terceiro termo de razão $1/r^3$ corresponde à contribuição quadripolar; o quarto termo de razão $1/r^4$ corresponde à contribuição octopolar e assim sucessivamente. O conceito de expansão em multipolos se apresenta de forma muito mais clara e intuitiva na eletrostática do que na eletrodinâmica. Desta forma, o entendimento deste conceito neste momento será de grande utilidade na compreensão do tema central deste trabalho que se baseia na expansão em multipolos esféricos na eletrodinâmica demonstrada no Capítulo 3.

A Equação 2.23 fornece um resultado exato para observador posicionado a qualquer distância. No entanto, é de grande utilidade que esta equação seja aplicada em aproximações para observador muito distante, onde o termo mais baixo do somatório diferente de zero corresponde ao potencial elétrico aproximado para grandes distâncias r do observador e os demais termos do somatório são utilizados para melhorar a precisão do resultado final. Portanto, o custo de se expandir o potencial elétrico em multipolos se justifica pelas aproximações que se tornam possíveis e viáveis quando o observador se encontra suficientemente distante das fontes, reduzindo-se e facilitando-se os cálculos de campo nas regiões distantes das fontes.

2.5 Momento de Dipolo

Normalmente a expansão em multipolos do potencial elétrico é dominada pelo termo de menor razão $1/r$, que corresponde ao termo do monopolo. Assim, o potencial do monopolo é dado por:

$$V_{mon}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.25)$$

A carga total Q do termo correspondente ao multipolo é dada por:

$$Q = \int \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.26)$$

Logo,

$$V_{mon}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (2.27)$$

No entanto, se a carga total for nula, o próximo termo da expansão em multipolos será o termo do dipolo, a não ser que este termo também seja nulo. Por sua vez, o potencial elétrico correspondente ao termo do dipolo na expansão em multipolos é dado por:

$$V_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.28)$$

Calculando-se o produto interno entre \vec{r}' (vetor posição da carga) e \hat{r} (vetor unitário da posição do observador), obtém-se que:

$$\vec{r}' \cdot \hat{r} = |\vec{r}'| |\hat{r}| \cos \theta' = r' \cos \theta'. \quad (2.29)$$

Substituindo-se a Equação 2.29 na Equação 2.28, a mesma pode ser reescrita na forma de um produto escalar:

$$V_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.30)$$

A integral da Equação 2.30 não depende de \vec{r} e é chamada de **momento de dipolo** da distribuição de cargas:

$$\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'. \quad (2.31)$$

Substituindo-se a Equação 2.31 na Equação 2.30, obtém-se que o potencial elétrico correspondente ao termo do dipolo em função do momento de dipolo é dado por:

$$V_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{p} \cdot \hat{r}, \quad (2.32)$$

cujo conceito será útil para se compreender os momentos de corrente elétrica e magnética utilizados pela transformada de campo próximo para campo distante na Seção 4.3. Desta forma, é importante ressaltar que o potencial elétrico do termo dipolar extraído da expansão em multipolos da Equação 2.24 é uma aproximação do resultado para o dipolo físico da Seção 2.2. O dipolo físico possui contribuições multipolares superiores que não estão presentes na Equação 2.32. No entanto, esta aproximação do termo dipolar se torna cada vez melhor e mais próxima do resultado do dipolo físico à medida que o observador se torna cada vez mais distante das cargas.

2.6 Campo Elétrico (\vec{E})

O campo elétrico pode ser calculado a partir do potencial elétrico através da seguinte equação:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V. \quad (2.33)$$

Considerando um dipolo puro (sem componentes multipolares superiores) com momento de dipolo na origem e apontando para a direção \hat{z} , o potencial elétrico é dado por:

$$V_{dip}(r, \theta) = \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.34)$$

Aplicando-se a Equação 2.34 na Equação 2.33, obtém-se que

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

ou seja,

$$\vec{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (2.35)$$

Observa-se que o campo elétrico do dipolo elétrico puro decai com a razão $1/r^3$. O campo do monopolo decairia com a razão $1/r^2$, quadripolos com razão $1/r^4$, octopolos com razão $1/r^5$ e assim por diante. Em resumo, o campo elétrico correspondente a uma distribuição com $p = 2^n$ cargas pontuais decai com a razão $1/r^{(n+2)}$, pois o gradiente em coordenadas esféricas introduz mais um fator $1/r$ ao que já havia no potencial elétrico.

2.7 Conclusão Parcial

O campo eletrostático pode ser expandido em um somatório de termos que correspondem fisicamente a multipolos (monopolos, dipolos, quadripolos, etc) com decaimento determinado por potências de $1/r$, onde r é a distância radial do ponto de observação a partir da origem do sistema. Embora esta expansão tenha sua origem na teoria clássica de campos eletrostáticos, sua maior contribuição acontece na eletrodinâmica, abordada no próximo capítulo.

Capítulo 3

Expansão em Multipolos Esféricos

Derivando-se das equações de Maxwell, a equação de onda é o fundamento de inúmeras teorias e métodos em eletromagnetismo e telecomunicações, entre eles a expansão do campo eletromagnético dinâmico em multipolos esféricos. Esta expansão, que constitui a solução da equação de onda vetorial, é gerada através da combinação de algumas funções matemáticas especiais que surgem como solução da equação de onda escalar em coordenadas esféricas. Deste modo, a solução vetorial permite decompor os campos eletromagnéticos em uma série de harmônicos esféricos cujos termos representam multipolos (dipolos, quadripolos, octopolos, etc) em coordenadas esféricas. Mesmo que a expansão em multipolos esféricos consista em uma decomposição físico-matemática teórica do campo eletromagnético, ela desempenha um papel significativo em eletromagnetismo computacional aplicado a análise de antenas e espalhamento. Este capítulo se concentra na derivação matemática da expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos desde a equação de onda até os campos expandidos, apresentando propriedades e conceitos importantes envolvendo este método.

3.1 Equações de Maxwell

Os campos eletromagnéticos dinâmicos obedecem às equações de onda, por isso os termos onda e campo são sinônimos neste caso. Considerando os campos harmônicos com variação temporal representada por $e^{-j\omega t}$ em uma região linear, homogênea, isotrópica e sem fontes (densidades de corrente elétrica e magnética impressas nulas, ou seja, $\vec{J}_{el}^{imp} = \vec{J}_{mag}^{imp} = 0$), as equações de campo são dadas por [9, 15]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{H}, \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -j\omega\varepsilon\vec{E}, \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0. \quad (3.4)$$

Aplicando-se a operação do rotacional aos dois membros da Equação 3.1:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad (3.5)$$

Substituindo-se a Equação 3.2 na Equação 3.5:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = j\omega\mu(-j\omega\varepsilon\vec{E}),$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \omega^2\mu\varepsilon\vec{E}. \quad (3.6)$$

Define-se o número de onda k do meio como $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$, onde μ é a permeabilidade magnética e ε é a permissividade elétrica do meio. Logo, a Equação 3.6 pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = k^2\vec{E},$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k^2\vec{E} = 0}, \quad (3.7)$$

chamada de **equação de onda vetorial complexa**.

Realizando-se o mesmo procedimento com a Equação 3.2 do campo magnético, obtém-se de forma análoga que

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0,} \quad (3.8)$$

e, portanto, \vec{H} é uma solução para a mesma equação complexa de onda que \vec{E} .

Há uma identidade vetorial que se aplica a um vetor qualquer \vec{A} na forma de um laplaciano ($\vec{\nabla}^2$) como segue

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.9)$$

Aplicando-se esta identidade vetorial às equações de onda 3.7 e 3.8, obtém-se que

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad (3.10)$$

e

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad (3.11)$$

Substituindo-se as Equações 3.3 e 3.4 nas Equações 3.10 e 3.11:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E}, \quad (3.12)$$

e para o campo magnético:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{H} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{\nabla}^2 \vec{H}. \quad (3.13)$$

Substituindo-se as Equações 3.12 e 3.13 respectivamente nas Equações 3.7 e 3.8, obtém-se as **equações de onda vetoriais**:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,} \quad (3.14)$$

e

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.} \quad (3.15)$$

As componentes em coordenadas cartesianas de \vec{E} e \vec{H} satisfazem a **equação de onda escalar complexa** ou **equação de Helmholtz**:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0,} \quad (3.16)$$

onde ψ é um escalar que pode representar as componentes retangulares E_x , E_y e E_z ou H_x , H_y e H_z de forma independente de suas componentes de direção, sendo possível, por fim, associá-las e encontrar a mesma solução das Equações vetoriais 3.14 e 3.15.

A importância da equação de onda escalar se deve ao fato de ser muito mais fácil resolver uma equação escalar do que uma equação vetorial. Desta forma, ela possui um papel fundamental na solução de diversos problemas de radiação de ondas eletromagnéticas, inclusive na expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos.

3.2 Equação de Onda Escalar

A equação de Helmholtz é uma equação diferencial parcial devido ao operador laplaciano [$\vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi)$], que caracteriza esta equação como sendo uma equação de Laplace. Para resolvê-la, aplica-se a separação de variáveis, que é uma técnica que divide uma equação diferencial parcial de n variáveis em n equações diferenciais ordinárias. Se houver n variáveis na equação, $(n - 1)$ constantes são introduzidas e determinadas pelas condições do problema a ser resolvido [16].

Sendo k^2 o número de onda e, portanto, uma constante, a equação de Helmholtz pode ser separada em coordenadas esféricas da seguinte forma:

$$\vec{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Abrindo-se o laplaciano em coordenadas esféricas, a equação de Helmholtz se torna:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (3.17)$$

Supõe-se ser possível a separação de variáveis em três funções independentes de r , θ e ϕ :

$$\boxed{\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi).} \quad (3.18)$$

Substituindo-se a Equação 3.18 na 3.17, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR\Theta\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dR\Theta\Phi}{d\theta} \right) \\ + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{d^2 R\Theta\Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como cada função R , Θ e Φ são independentes, as derivadas parciais se tornam ordinárias. As funções que são constantes para uma determinada derivada podem ser reescritas fora das mesmas como segue:

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{(r \sin \theta)^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0. \quad (3.20)$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação 3.20 por $(r \sin \theta)^2 / R\Theta\Phi$, encontra-se que:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + (kr \sin \theta)^2 = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = - \left[\frac{\text{sen}^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\text{sen} \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (kr \text{sen} \theta)^2 \right]. \quad (3.22)$$

O termo do primeiro membro da Equação 3.22 só depende de ϕ , ou seja, a separação de Φ foi obtida. Já os termos no segundo membro da equação só dependem de θ e r . Como r , θ e ϕ são variáveis independentes, o segundo membro da equação é uma constante com relação à função Φ . Desta forma, o segundo membro desta equação pode ser substituído por uma constante. Na maioria dos problemas práticos, ϕ aparece como um ângulo de azimute. Isto sugere uma solução periódica (exponencial complexa, seno ou cosseno) ao invés de uma exponencial real. Considerando-se as propriedades de derivação de exponenciais complexas, escolhe-se $-m^2$ como a constante de separação para Φ , que deve ser então um inteiro ao quadrado. Logo,

$$\boxed{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2.} \quad (3.23)$$

Substituindo-se a Equação 3.23 na Equação 3.21:

$$\frac{\text{sen}^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\text{sen} \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + (kr \text{sen} \theta)^2 - m^2 = 0. \quad (3.24)$$

Dividindo-se a Equação 3.24 acima por $\text{sen}^2 \theta$, obtém-se:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (kr)^2 = - \frac{1}{\Theta \text{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta}. \quad (3.25)$$

O primeiro membro da Equação 3.25 acima depende somente de r e o segundo membro só depende de θ . Portanto, todas as três variáveis foram separadas. O membro dependente somente de θ pode ser igualado a uma constante $n(n+1)$:

$$- \frac{1}{\Theta \text{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\text{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta} = n(n+1).$$

Logo:

$$\frac{1}{\Theta \operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + n(n+1) = 0. \quad (3.26)$$

Multiplicando-se a Equação 3.26 por Θ , encontra-se que:

$$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right] \Theta = 0.} \quad (3.27)$$

Consequentemente, o termo dependente de r também se iguala à constante $n(n+1)$ como segue:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (kr)^2 = n(n+1). \quad (3.28)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para a derivada com relação a r na Equação 3.28, obtém-se:

$$\frac{1}{R} \left[\left(\frac{d}{dr} r^2 \right) \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{dR}{dr} \right) \right] + (kr)^2 - n(n+1) = 0,$$

$$\frac{1}{R} \left[2r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} \right] + (kr)^2 - n(n+1) = 0. \quad (3.29)$$

Multiplicando-se a Equação 3.29 acima por R :

$$\boxed{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [(kr)^2 - n(n+1)]R = 0.} \quad (3.30)$$

Desta forma, uma equação diferencial parcial de três variáveis foi substituída por três equações diferenciais ordinárias representadas pelas Equações 3.23, 3.27 e 3.30. A solução destas equações diferenciais ordinárias será discutida nas seções a seguir. A Equação 3.27 é identificada como **equação associada de Legendre**, onde n é um inteiro não-negativo porque θ é uma variável angular. Se k^2 é uma constante (positiva), a Equação 3.30 se torna a **equação de Bessel esférica**. A solução mais geral para a equação de Helmholtz em coordenadas esféricas se torna uma combinação linear de

todas as soluções possíveis para $\psi_{n,m}(r, \theta, \phi)$. Logo:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} \psi_{n,m},$$

$$\boxed{\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} R_n(r) \Theta_{n,m}(\theta) \Phi_m(\phi).} \quad (3.31)$$

3.2.1 Solução em r : Função de Bessel Esférica

Quando a equação de Helmholtz foi separada em coordenadas esféricas, a componente radial foi expressa pela Equação 3.30 e possui a seguinte forma:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [(kr)^2 - n(n+1)]R = 0.$$

Devido ao comportamento do ângulo polar θ , a constante de separação deve ter a forma $n(n+1)$, sendo n um número inteiro não-negativo. A Equação 3.30 tem a característica de ser auto-adjunta, mas não é uma equação de Bessel. No entanto, se a seguinte substituição for realizada:

$$R(r) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}, \quad (3.32)$$

a Equação 3.30 se torna

$$r^2 \frac{d^2 Z}{dr^2} + r \frac{dZ}{dr} + \left[(kr)^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0, \quad (3.33)$$

que é a equação de Bessel, cuja solução é a **função de Bessel esférica**. Z é uma função de Bessel (Bessel, Neumann ou Hankel) de ordem $(n + \frac{1}{2})$ para n inteiro.

As funções de Bessel esféricas $z_n(x)$ possuem as seguintes relações com as funções de Bessel $Z_{n+1/2}(x)$:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad (3.34)$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x), \quad (3.35)$$

$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x), \quad (3.36)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x). \quad (3.37)$$

Portanto, na solução do potencial escalar $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$, encontra-se que

$$R(r) = z_n(kr). \quad (3.38)$$

3.2.2 Solução em θ : Polinômios Associados de Legendre

Quando a equação de Helmholtz foi separada em coordenadas esféricas, a componente polar foi expressa pela Equação 3.27 e possui a seguinte forma:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0.$$

Se a constante de separação m^2 for nula, a equação acima se torna a **equação de Legendre**. Caso contrário, a equação acima representa a **equação associada de Legendre**, que possui as funções associadas de Legendre $P_n^m(x)$ como solução:

$$\Theta \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad m \leq n. \quad (3.39)$$

A fórmula de Rodrigues na definição de $P_n^m(\cos\theta)$, apresentada a seguir, é usada para incluir valores negativos de m e possibilitar a aplicação de propriedades de ortogonalidade:

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n, \quad -n \leq m \leq n. \quad (3.40)$$

A vantagem desta abordagem sobre simplesmente definir $P_n^m(\cos \theta)$ para $0 \leq m \leq n$ e garantir que $P_n^{-m} = P_n^m$ é que as relações de recorrência que valem para $0 \leq m \leq n$ permaneçam válidas para $-n \leq m \leq 0$.

A ortogonalidade da função associada de Legendre em coordenadas esféricas apresenta o seguinte resultado:

$$\int_0^\pi P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{pq}, \quad (3.41)$$

onde a função delta de Dirac indica que este resultado não é nulo somente para $p = q$. Portanto, normalizando a função associada de Legendre, suas funções ortonormais (ortogonal e normalizada) com relação ao ângulo polar θ são da forma:

$$\Theta_{nm}(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta), \quad (3.42)$$

para $n \geq 0$ e $-n \leq m \leq n$, de acordo com as propriedades da função associada de Legendre.

Conclui-se que a função $\Theta(\theta)$ apresentada acima é solução para o potencial escalar $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ da equação de Helmholtz.

3.2.3 Solução em ϕ : Exponencial Complexa

Quando a equação de Helmholtz foi separada em coordenadas esféricas, a componente azimutal foi expressa pela Equação 3.23 e possui a seguinte configuração:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2.$$

Esta equação diferencial possui soluções na forma de senos ou cossenos, ou, como preferível neste problema específico, exponenciais complexas:

$$\Phi(\phi) = e^{-jm\phi} \text{ ou } e^{jm\phi}, \quad (3.43)$$

com m inteiro, que satisfaz a condição de ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{m_1}^* \Phi_{m_2} d\phi = 2\pi \delta_{m_1} \delta_{m_2}. \quad (3.44)$$

Na maioria dos problemas, para que $\Phi(\phi)$ seja uma função unívoca do ângulo de azimute, m deve ser inteiro. Portanto, na solução do potencial escalar $\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$, a função Φ ortonormal com relação à integração sobre o ângulo de azimute é tal que:

$$\boxed{\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jm\phi}.} \quad (3.45)$$

3.2.4 Harmônicos Esféricos

Os harmônicos esféricos são funções $Y_n^m(\theta, \phi)$ de dois ângulos e dois índices que são ortonormais sobre a superfície esférica. Eles são gerados a partir da multiplicação das funções ortonormais em θ e ϕ encontradas anteriormente como solução da equação de Helmholtz. Desta forma:

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \Theta_{nm}(\theta) \Phi_m(\phi),$$

$$\boxed{Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi},} \quad (3.46)$$

para $n \geq 0$ e $-n \leq m \leq n$, de acordo com as propriedades da função associada de Legendre.

O fator $(-1)^m$ extra não é necessário; porém, é mais conveniente ao se dirigir para certos cálculos de mecânica quântica, particularmente na teoria quântica do momento angular. Este é um fator de fase, frequentemente chamado de fase de Condon-Shortley,

em homenagem aos autores de um texto clássico sobre espectroscopia atômica. O efeito deste $(-1)^m$ sobre a Equação 3.46 e sobre a Equação 3.39 para $P_n^{-m}(\cos \theta)$ é introduzir uma alternância de sinal entre os harmônicos esféricos com m positivo.

A integral completa de ortogonalidade se torna

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} Y_{n_1}^{m_1*}(\theta, \phi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \delta_{n_1 n_2} \delta_{m_1 m_2}. \quad (3.47)$$

As funções $Y_n^m(\theta, \phi)$ adquiriram o nome de **harmônicos esféricos** primeiramente porque elas são definidas sobre a superfície de uma esfera com ângulo polar θ e ângulo azimutal ϕ . Já o termo **harmônico** foi incluído porque as soluções da equação de Laplace são chamadas de funções harmônicas e $Y_n^m(\theta, \phi)$ é a parte angular de tal solução.

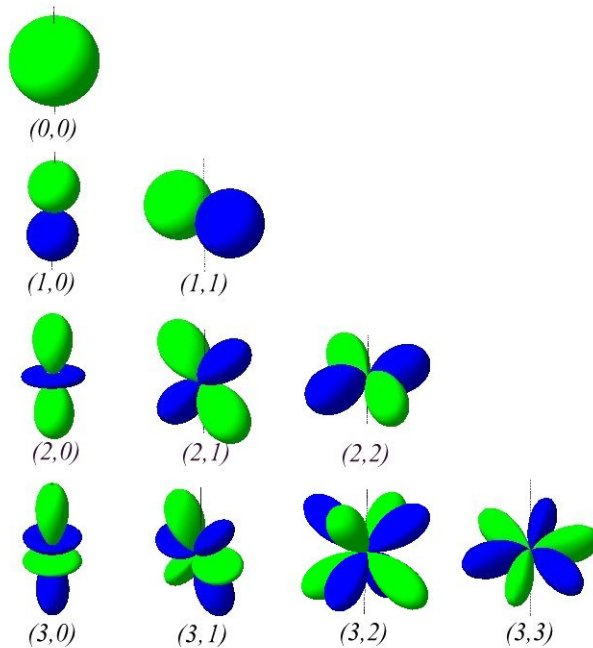


Figura 3.1: Geometria dos harmônicos esféricos $Y_n^m(\theta, \phi)$ de combinação (n, m) [1].

A Figura 3.1 apresenta a geometria de alguns harmônicos esféricos a fim de se ilustrar o comportamento espacial dos mesmos diante da variação dos índices m e n nos domínios de θ e ϕ . O eixo em torno do qual os harmônicos esféricos foram desenhados em três dimensões representa o eixo z , a partir do qual parte o ângulo de elevação θ . As diferentes cores foram utilizadas apenas para contribuir com o efeito tridimensional das

geometrias. Uma vez que o objetivo desta figura foi somente esboçar o comportamento espacial dos harmônicos esféricos, a mesma não está em escala. É importante ressaltar que a expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos é composta por um somatório de harmônicos esféricos ou de suas derivadas ponderados por certas amplitudes. Portanto, a visualização destas geometrias fornece uma referência espacial interessante na compreensão de como um campo eletromagnético qualquer pode ser obtido através da combinação linear destas funções.

3.2.5 Solução Escalar em Coordenadas Esféricas

De acordo com a separação de variáveis realizada anteriormente, o potencial escalar, solução da equação de onda escalar expresso pela Equação 3.31 em coordenadas esféricas, pode ser reescrito como

$$\psi_{n,m} = z_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (3.48)$$

sendo a solução geral dada pela combinação linear de todos os possíveis valores de $\psi_{n,m}$, como segue:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} \psi_{n,m},$$

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{n,m} R_n(r) \Theta_{n,m}(\theta) \Phi_m(\phi),$$

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} z_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi),$$

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} z_n(kr) (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi}, \quad (3.49)$$

onde a constante $a_{n,m}$ pode ser encontrada através da aplicação das condições de contorno do problema e das propriedades de ortogonalidade.

3.3 Equação Vetorial de Onda

Dentro de qualquer domínio fechado de um meio homogêneo, isotrópico e sem fontes, todos os vetores que caracterizam o campo eletromagnético – os vetores de campo \vec{E} , \vec{H} , o potencial vetor e os vetores hertzianos – satisfazem a mesma equação diferencial. Se \vec{C} representa qualquer um desses vetores [9], então

$$\vec{\nabla}^2 \vec{C} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = 0. \quad (3.50)$$

Devido à linearidade da equação de onda, campos com variação arbitrária podem ser construídos a partir de soluções harmônicas sem haver nenhuma perda de generalidade ao se assumir que o vetor \vec{C} contém o tempo somente como um fator $e^{-j\omega t}$. Desta forma, as derivadas parciais da Equação 3.50 se tornam:

$$\frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial t^2} = -j\omega \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = -j\omega(-j\omega)\vec{C} = -\omega^2 \vec{C}, \quad (3.51)$$

e

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = -j\omega \vec{C}. \quad (3.52)$$

Substituindo-se estes resultados na Equação 3.50:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{C} - \mu\epsilon(-\omega^2)\vec{C} - \mu\sigma(-j\omega)\vec{C} = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{C} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{C} + j\sigma\mu\omega \vec{C} = 0,$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{C} + (\epsilon\mu\omega^2 + j\sigma\mu\omega)\vec{C} = 0.$$

Normalmente, o número de onda pode ser escrito como $k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + j\sigma\mu\omega$, onde σ é a condutividade do meio. Logo:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0.} \quad (3.53)$$

Substituindo-se a propriedade vetorial da Equação 3.9 na equação de onda vetorial 3.53, a mesma pode ser reescrita como:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0. \quad (3.54)$$

A Equação 3.53 constitui uma equação de onda vetorial e pode sempre ser substituída por um sistema de três equações escalares, mas a solução deste sistema para qualquer componente de \vec{C} é impraticável na maioria dos casos. Três equações independentes são obtidas somente quando \vec{C} é resolvido em coordenadas retangulares. Desta forma:

$$\vec{\nabla}^2 C_i + k^2 C_i = 0, \quad (i = x, y, z). \quad (3.55)$$

Muito pouca atenção é dada à determinação de soluções vetoriais independentes para a equação vetorial de onda, mas o problema foi abordado por [8], [17] e [18]. Desta forma, sendo a função escalar ψ uma solução da equação escalar de onda ou equação de Helmholtz, como apresentado anteriormente pela Equação 3.16, três soluções vetoriais independentes são construídas para a equação vetorial de onda mostrada de forma genérica na Equação 3.53. Estas soluções são dadas por:

$$\boxed{\vec{L}(\vec{r}, \omega) = \vec{\nabla} \psi,} \quad (3.56)$$

$$\boxed{\vec{M}(\vec{r}, \omega) = (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \psi,} \quad (3.57)$$

e

$$\boxed{\vec{N}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M}.} \quad (3.58)$$

As soluções \vec{L} , \vec{M} e \vec{N} satisfazem a Equação 3.53 quando substituídas em \vec{C} e possuem certas propriedades notáveis que seguem diretamente de suas definições como serão vistas detalhadamente nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 a seguir.

3.3.1 Solução \vec{L}

A equação de onda escalar apresentada na Equação 3.16 é:

$$\vec{\nabla}^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Considerando-se as propriedades do laplaciano de um escalar, sabe-se que:

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi).$$

Deste modo, a equação escalar de onda se torna:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) + k^2 \psi = 0. \quad (3.59)$$

A partir da Equação 3.59, uma solução vetorial \vec{L} é estabelecida de forma que

$$\boxed{\vec{L} = \vec{\nabla} \psi.} \quad (3.60)$$

Substituindo-se a Equação 3.60 na Equação 3.59, encontra-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} + k^2 \psi = 0,$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = -k^2 \psi.} \quad (3.61)$$

Tomando-se a solução \vec{L} da Equação 3.60 e aplicando-se o rotacional aos dois membros da equação, obtém-se que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{L} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi. \quad (3.62)$$

Sabe-se das propriedades vetoriais que [19]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = 0. \quad (3.63)$$

Logo, a Equação 3.62 se torna:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{L} = 0.} \quad (3.64)$$

3.3.2 Solução \vec{M}

Considera-se que

$$\boxed{\vec{M} = (\vec{a} \times \vec{\nabla})\psi,} \quad (3.65)$$

seja uma segunda solução da equação de onda vetorial, sendo \vec{a} qualquer vetor constante de tamanho unitário.

Aplicando-se o divergente aos dois membros da Equação 3.65, encontra-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{\nabla})\psi. \quad (3.66)$$

A partir da aplicação da seguinte propriedade vetorial:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = -\vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C}, \quad (3.67)$$

ao segundo membro da Equação 3.66, ela pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi). \quad (3.68)$$

Substituindo-se a Equação 3.63 na 3.68, a mesma se torna:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0.} \quad (3.69)$$

Portanto, o vetor \vec{M} é solenoidal, ou seja, seu divergente é nulo.

Relacionando-se as soluções \vec{L} e \vec{M} , observa-se que:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{a} \times \vec{L},} \quad (3.70)$$

e que

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{\nabla} \psi \cdot (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \psi,$$

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \psi^2. \quad (3.71)$$

Considerando-se as propriedades vetoriais definidas pelas Equações 3.67 e 3.63, a Equação 3.71 se torna:

$$\vec{L} \cdot \vec{M} = -\vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi^2),$$

$$\boxed{\vec{L} \cdot \vec{M} = 0.}$$

Isto significa que para cada mesma função geradora ψ , o vetor \vec{M} é perpendicular ao vetor \vec{L} .

3.3.3 Solução \vec{N}

Substituindo-se a solução \vec{M} da Equação 3.65 na 3.54, obtém-se que

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{M}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{M} + k^2 \vec{M} = 0. \quad (3.72)$$

Considerando-se a propriedade da solução \vec{M} expressa pela Equação 3.69, a Equação 3.72 se torna:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{M} + k^2 \vec{M} = 0,$$

$$k^2 \vec{M} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{M},$$

$$\vec{M} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M} \right). \quad (3.73)$$

A partir da Equação 3.73, define-se uma terceira solução vetorial

$$\vec{N} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M}, \quad (3.74)$$

e a Equação 3.73 pode ser reescrita como

$$\vec{M} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{N}. \quad (3.75)$$

Aplicando-se o divergente aos dois membros da Equação 3.74, encontra-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}).$$

Considerando-se a seguinte propriedade vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (3.76)$$

conclui-se que:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{N} = 0}, \quad (3.77)$$

ou seja, o vetor \vec{N} é solenoidal.

Substituindo-se a Equação 3.65 da solução \vec{M} na solução \vec{N} da Equação 3.74, a solução \vec{N} em função de ψ se torna:

$$\vec{N} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{\nabla}) \psi. \quad (3.78)$$

3.3.4 Solução Vetorial Fundamental

As soluções particulares da equação de onda escalar dada pela Equação 3.16 são finitas, contínuas e únicas em um dado domínio e formam um conjunto discreto. Cada uma dessas n finitas soluções podem ser representadas pela função característica ψ_n associada a três soluções vetoriais \vec{L}_n , \vec{M}_n e \vec{N}_n da equação vetorial de onda dada pela Equação 3.53. Desta forma, qualquer função de onda pode ser representada como uma combinação linear das funções vetoriais características. Desde que \vec{L}_n , \vec{M}_n e \vec{N}_n possuam certas propriedades ortogonais, os coeficientes da expansão podem ser determinados. Quando uma dada função é puramente solenoidal, ou seja, o seu divergente é nulo, a expansão é feita somente em termos de \vec{M}_n e \vec{N}_n . Entretanto, termos em \vec{L}_n tem que ser incluídos caso o divergente da função não se anule. Assim, os vetores \vec{M}_n e \vec{N}_n são obviamente apropriados para a representação dos campos \vec{E} e \vec{H} , pois um é proporcional ao rotacional do outro. Portanto, se o tempo entra somente como um fator $e^{-j\omega t}$ e se não há cargas em todo o meio homogêneo e isotrópico de condutividade σ , os campos eletromagnéticos dados pelas Equações 3.1 e 3.2, são reescritos como [9]:

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \vec{\nabla} \times \vec{H}, \quad (3.79)$$

e

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (3.80)$$

Supõe-se que o potencial vetor possa ser representado por uma expansão em funções vetoriais características da forma:

$$\vec{A} = \frac{j}{\omega} \sum_n (a_n \vec{M}_n + b_n \vec{N}_n + c_n \vec{L}_n), \quad (3.81)$$

onde os coeficientes a_n , b_n e c_n são determinados a partir da distribuição de corrente.

Através da relação

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.82)$$

o campo magnético é encontrado a partir da substituição da Equação 3.81 na Equação 3.82 como

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \left[\frac{j}{\omega} \sum_n (a_n \vec{M}_n + b_n \vec{N}_n + c_n \vec{L}_n) \right],$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[\sum_n (a_n \vec{\nabla} \times \vec{M}_n + b_n \vec{\nabla} \times \vec{N}_n + c_n \vec{\nabla} \times \vec{L}_n) \right]. \quad (3.83)$$

Substituindo-se as Equações 3.64, 3.74 e 3.75 na Equação 3.83:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \sum_n (a_n k \vec{N}_n + b_n k \vec{M}_n + 0). \quad (3.84)$$

Logo:

$$\boxed{\vec{H} = -\frac{k}{j\omega\mu} \sum_n (a_n \vec{N}_n + b_n \vec{M}_n)}. \quad (3.85)$$

Aplicando-se a Equação 3.85 à 3.79:

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{k^2} \vec{\nabla} \times \left[-\frac{k}{j\omega\mu} \sum_n (a_n \vec{N}_n + b_n \vec{M}_n) \right],$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{k} \left[\sum_n (a_n \vec{\nabla} \times \vec{N}_n + b_n \vec{\nabla} \times \vec{M}_n) \right]. \quad (3.86)$$

Substituindo-se as Equações 3.74 e 3.75 na Equação 3.86:

$$\vec{E} = -\frac{1}{k} \left[\sum_n (a_n k \vec{M}_n + b_n k \vec{N}_n) \right]. \quad (3.87)$$

Logo:

$$\boxed{\vec{E} = - \sum_n (a_n \vec{M}_n + b_n \vec{N}_n).} \quad (3.88)$$

3.3.5 Solução Vetorial em Coordenadas Esféricas

As soluções para a equação de onda vetorial em coordenadas esféricas podem ser deduzidas diretamente a partir das funções características da equação escalar correspondente representada pelo $\psi_{n,m}$ da Equação 3.48. Uma das soluções da equação vetorial de onda da Equação 3.53, a solução \vec{L} , pode ser obtida facilmente através da aplicação de um gradiente em coordenadas esféricas como segue:

$$\vec{L}_{n,m} = \vec{\nabla} \psi_{n,m},$$

$$\boxed{\vec{L}_{n,m} = \frac{\partial}{\partial r} \psi_{n,m} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{n,m} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_{n,m} \hat{\phi}.} \quad (3.89)$$

Para se obter as soluções independentes \vec{M} e \vec{N} representadas pelas Equações 3.65 e 3.74, o vetor \vec{a} deveria ser constante. Este procedimento seria possível em coordenadas esféricas, porém, \vec{M} e \vec{N} não seriam normais entre si nem seriam tangenciais sobre a superfície inteira da esfera. Se no lugar de \vec{a} for usado um vetor radial \vec{r} , a função vetorial ($\vec{r} \times \vec{L}$) obtida é tangencial à esfera. No entanto, \vec{r} não é um vetor constante e, conseqüentemente, de forma alguma obedece a condição estabelecida inicialmente para a geração de soluções independentes. De fato, a solução tangencial \vec{M} pode ser construída a partir de um vetor radial. Entretanto, este procedimento pode falhar em outros sistemas de coordenadas.

Logo, substitui-se \vec{a} por \vec{r} na solução \vec{M} da Equação 3.65. Sendo $\vec{r} = r \hat{r}$ um vetor radial de módulo r constante, a solução vetorial \vec{M} se torna

$$\boxed{\vec{M}_{nm} = (\vec{r} \times \vec{\nabla})\psi_{nm}.} \quad (3.90)$$

O termo $(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ está relacionado com o operador de momento angular orbital da mecânica quântica, comum em problemas atômicos ou de eletromagnetismo com simetria esférica [16, 20]. Logo:

$$\vec{M}_{n,m} = \vec{r} \times \vec{L}_{n,m}. \quad (3.91)$$

Substituindo-se a Equação 3.89 na Equação 3.91, encontra-se que:

$$\vec{M}_{n,m} = r\hat{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial r}\psi_{n,m} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\psi_{n,m} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\psi_{n,m} \hat{\phi} \right),$$

$$\boxed{\vec{M}_{n,m} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\psi_{n,m} \hat{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\psi_{n,m} \hat{\phi}.} \quad (3.92)$$

A partir da Equação 3.74, as componentes da terceira solução podem ser facilmente encontradas como:

$$\vec{N}_{n,m} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M}_{n,m}. \quad (3.93)$$

Substituindo-se a Equação 3.92 na Equação 3.93, obtém-se que:

$$\vec{N}_{n,m} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\psi_{n,m} \hat{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}\psi_{n,m} \hat{\phi} \right),$$

$$\vec{N}_{n,m} = \frac{1}{k} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r \psi_{n,m}) + k^2 r \psi_{n,m} \right] \hat{r} + \frac{1}{kr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(r \psi_{n,m}) \hat{\theta} + \frac{1}{kr \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi}(r \psi_{n,m}) \hat{\phi}.$$

Como $\psi_{n,m}$ precisa satisfazer a equação de Bessel apresentada na Equação 3.30, a componente radial de $\vec{N}_{n,m}$ adquire a seguinte forma mais simples:

$$N_r = \frac{n(n+1)}{kr} \psi_{n,m}. \quad (3.94)$$

Portanto, a terceira solução vetorial em coordenadas esféricas tem a seguinte forma:

$$\vec{N}_{n,m} = \frac{n(n+1)}{kr} \psi_{n,m} \hat{r} + \frac{1}{kr} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \psi_{n,m}) \hat{\theta} + \frac{1}{kr \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} (r \psi_{n,m}) \hat{\phi}. \quad (3.95)$$

Uma vantagem das coordenadas esféricas sobre outros sistemas mais genéricos é que as condições de contorno em ambas componentes tangenciais \vec{M} e \vec{N} são idênticas. Para se obter as expressões explícitas para as funções vetoriais de onda \vec{M} e \vec{N} , é necessário apenas realizar as derivadas contidas nas Equações 3.92 e 3.95 [9]. Desta forma, as funções vetoriais de onda podem ser reescritas em função dos harmônicos esféricos da seguinte maneira [10, 21]:

$$\vec{M}_{n,m}(\vec{r}) = z_n(kr) \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi), \quad (3.96)$$

e

$$\vec{N}_{n,m}(\vec{r}) = -\frac{z_n(kr)}{kr} n(n+1) Y_{n,m}(\theta, \phi) \hat{r} - \frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} [r z_n(kr)] \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi), \quad (3.97)$$

sendo $\vec{m}_{n,m}$ e $\vec{n}_{n,m}$ funções vetoriais transversas, ou seja, funções que compõem um conjunto ortogonal sobre uma superfície esférica fechada dadas por:

$$\vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{n,m}(\theta, \phi) \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{n,m}(\theta, \phi) \hat{\phi}, \quad (3.98)$$

e

$$\vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) = \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{n,m}(\theta, \phi) \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{n,m}(\theta, \phi) \hat{\phi}. \quad (3.99)$$

Por fim, o campo eletromagnético das Equações 3.85 e 3.88 podem ser reescritos em coordenadas esféricas por meio de uma expansão em multipolos esféricos de modo

que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{n,m} \vec{N}_{n,m}(\vec{r}) + \frac{Z}{j} B_{n,m} \vec{M}_{n,m}(\vec{r}) \right], \quad (3.100)$$

e

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{j}{Z} A_{n,m} \vec{M}_{n,m}(\vec{r}) + B_{n,m} \vec{N}_{n,m}(\vec{r}) \right], \quad (3.101)$$

onde $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ representa a impedância intrínseca do vácuo. Os termos $A_{n,m}$ e $B_{n,m}$ são as amplitudes dos multipolos elétricos e magnéticos encontrados ao longo da expansão no domínio da frequência. Já as funções vetoriais solenoidais $\vec{M}_{n,m}(\vec{r})$ e $\vec{N}_{n,m}(\vec{r})$ compõem um sistema fundamental das Equações homogêneas 3.7 e 3.8.

3.4 Conclusão Parcial

Embora a expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos apresente um grau elevado de complexidade, sua solução vetorial analítica é um grande diferencial. Além do mais, esta solução é formada por funções matemáticas especiais com propriedades bem conhecidas. Desta forma, a expansão em multipolos esféricos permite a observação das características vetoriais dos problemas em eletromagnetismo com a possibilidade de inúmeras análises e compreensões de etapas específicas do método, como será proposto nos Capítulos 5, 6 e 7.

Considerando somente a aplicação prática desta expansão em problemas de engenharia, este capítulo e o anterior, que focaram em demonstrações físicas e matemáticas, poderiam ser omitidos sem prejuízo. No entanto, os conceitos e entendimento proporcionados fornecem uma contribuição muito importante em termos de conhecimento científico e domínio da técnica. De fato, o próximo capítulo é o teórico mais importante e tema central deste trabalho, que irá aplicar todos os conceitos discutidos até então em uma transformada de campo próximo para campo distante através da expansão em multipolos esféricos no domínio tempo. Esta transformada é aplicada como ferramenta na análise de antenas e espalhamento e possui vantagens singulares considerando problemas eletromagnéticos no domínio do tempo.

Capítulo 4

Transformada de Campo Próximo para Distante

A maioria dos métodos numéricos aplicados à solução de problemas de antenas e espalhamento não fornecem o campo radiado ou espalhado diretamente. Ao contrário, eles resolvem as equações de Maxwell dentro de um domínio discretizado, como no caso do método dos elementos finitos, diferenças finitas ou integração finita; ou produzem densidades de correntes equivalentes sobre superfícies discretizadas, como acontece com a maior parte dos métodos de equações integrais. Por conseguinte, é necessário realizar uma transformação para se obter o campo distante espalhado ou radiado a partir do campo próximo em cada um desses casos [5].

Diversos métodos de transformação do campo próximo em distante (NFF, do inglês *near-to-far-field*) se originam de uma forma fechada da função de Green no espaço livre ou de uma formulação do potencial vetor equivalente. Consequentemente, no geral, cada novo ponto de observação requer uma nova integração de todos os pontos da fonte sobre a superfície de Huygens, que é a superfície fechada imaginária posicionada ao redor da antena ou espalhador. Este esforço computacional recorrente pode ser evitado através do uso de uma transformada NFF cujo método tenha origem na forma bilinear da função de Green no espaço livre. A transformada NFF baseada na expansão em multipolos esféricos, apresentada neste capítulo, é um exemplo deste método [10].

Desta forma, uma vez que as amplitudes dos multipolos esféricos foram obtidos, a expansão em multipolos no domínio do tempo é válida em qualquer ponto arbitrário da região de campo distante. Em outras palavras, apenas uma integração da fonte é necessária, mesmo que os pontos de observação na região de campo distante sejam diferentes. Além disso, como expansão em multipolos esféricos significa repre-

sentação em série ortogonal não-redundante, todas as vantagens deste método analítico podem ser exploradas no pós-processamento numérico dos dados obtidos no domínio do tempo. Por fim, toda a informação do campo eletromagnético é armazenado em poucas amplitudes escalares de multipolos, que podem ser utilizadas para caracterizar as propriedades globais do campo. Cada uma destas amplitudes dos multipolos representam um pedaço do campo interpretável fisicamente, ou seja, representam um modo. Esta característica permite intervir no espectro espacial do campo, permitindo até mesmo aprimorar os resultados gerados [10].

Este capítulo apresenta a demonstração matemática da transformada NFF baseada em uma série de multipolos esféricos. O método é desenvolvido inicialmente no domínio da frequência e, posteriormente, replicado para o domínio do tempo através da transformada de Fourier. Por fim, é apresentada uma aproximação linear que permite aplicar a técnica a problemas discretos no domínio do tempo, como acontece nos casos em que o campo próximo foi, por exemplo, calculado através do método do FDTD (do inglês, *finite-difference time-domain* ou diferenças finitas no domínio do tempo).

4.1 Transformada no Domínio da Frequência

Considerando-se que a corrente elétrica e magnética (fictícia) impressas são representadas respectivamente por \vec{J}_{el}^{imp} e \vec{J}_{mag}^{imp} , as variáveis $\underline{\vec{J}}_{el}^{imp}$ e $\underline{\vec{J}}_{mag}^{imp}$ referentes às densidades de corrente elétrica e magnética impressas efetivas são, respectivamente, dadas por

$$\underline{\vec{J}}_{el}^{imp}(\vec{r}) = \vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}) + \frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{J}_{mag}^{imp}(\vec{r}), \quad (4.1)$$

e

$$\underline{\vec{J}}_{mag}^{imp}(\vec{r}) = \vec{J}_{mag}^{imp}(\vec{r}) - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}). \quad (4.2)$$

Assumindo que todas as correntes impressas estão localizadas dentro de uma esfera imaginária de raio r_0 centrada na origem do sistema de coordenadas escolhido, o campo elétrico fora desta esfera imaginária “mínima” pode ser descrito como [10]

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu_o \iiint_V \tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}') dv', \quad (4.3)$$

onde $\tilde{\Gamma}$ é a função bidimensional de Green no espaço livre dada por

$$\tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') = jk \left[\sum_{n,m} \frac{\vec{N}_{n,m}^{II}(\vec{r}) \vec{N}_{n,m}^{I*}(\vec{r}')}{n(n+1)} + \sum_{n,m} \frac{\vec{M}_{n,m}^{II}(\vec{r}) \vec{M}_{n,m}^{I*}(\vec{r}')}{n(n+1)} \right]. \quad (4.4)$$

O asterisco representa o complexo conjugado. O índice superior I indica o uso de funções de Bessel esféricas $j_n(kr)$ para satisfazer a condição de regularidade no interior da esfera, enquanto o índice superior II indica o uso de funções de Hankel esféricas de segundo tipo $h_n^{(2)}$ a fim de se satisfazer a condição de radiação no exterior da esfera. O número de onda no espaço livre é definido por $k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Normalmente, no contexto de uma transformada NFF, a Equação 4.4 é aplicada com relação à sua forma fechada

$$\tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left[\tilde{I} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right] \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (4.5)$$

Neste caso, geralmente qualquer novo ponto de observação \vec{r} resulta em um novo integrando na Equação 4.3 e requer uma integração completamente nova sobre todos os pontos \vec{r}' da fonte. Esta desvantagem pode ser evitada usando-se a forma bidimensional da Equação 4.4.

4.1.1 Distribuição Contínua de Corrente

Substituindo-se a Equação 4.4 na 4.3 e considerando-se a seguinte propriedade dos harmônicos esféricos

$$Y_{n,m}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{n,-m}(\theta, \phi), \quad (4.6)$$

a expansão em multipolos esféricos no domínio da frequência fora da esfera mínima é obtida como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n,m} A_{n,m} \vec{N}_{n,m}^{II}(\vec{r}) + \frac{Z}{j} \sum_{n,m} B_{n,m} \vec{M}_{n,m}^{II}(\vec{r}). \quad (4.7)$$

As respectivas amplitudes dos multipolos para uma dada densidade de corrente elétrica impressa são dadas por

$$A_{n,m} = -k^2 Z \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \iiint_V \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}') \cdot \vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}') dv', \quad (4.8)$$

e

$$B_{n,m} = -jk^2 \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \iiint_V \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}') \cdot \vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}') dv', \quad (4.9)$$

e para uma densidade de corrente magnética

$$A_{n,m} = jk^2 \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \iiint_V \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}') \cdot \vec{J}_{mag}^{imp}(\vec{r}') dv', \quad (4.10)$$

e

$$B_{n,m} = -\frac{k^2}{Z} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \iiint_V \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}') \cdot \vec{J}_{mag}^{imp}(\vec{r}') dv'. \quad (4.11)$$

4.1.2 Distribuição Discreta de Corrente

Nos casos especiais para um dipolo elétrico e magnético equivalente, cada dipolo localizado em \vec{r}_d sobre a superfície de Huygens é representado respectivamente por $\vec{J}_{el}^{imp}(\vec{r}) = \vec{C}_{el} \delta(\vec{r} - \vec{r}_d)$ e $\vec{J}_{mag}^{imp}(\vec{r}) = \vec{C}_{mag} \delta(\vec{r} - \vec{r}_d)$. As amplitudes dos multipolos são encontradas através da propriedade de filtro da função δ (função Delta de Dirac) como sendo

$$A_{n,m} = -k^2 Z \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{C}_{el}, \quad (4.12)$$

$$B_{n,m} = -jk^2 \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{C}_{el}, \quad (4.13)$$

$$A_{n,m} = jk^2 \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{C}_{mag}, \quad (4.14)$$

e

$$B_{n,m} = -\frac{k^2}{Z} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{C}_{mag}. \quad (4.15)$$

A distribuição de corrente equivalente (medida ou calculada) pode ser obtida a partir dos campos elétricos e magnéticos tangenciais sobre uma superfície fechada que envolve as fontes físicas do campo em análise. No contexto dos multipolos esféricos, esta distribuição de corrente equivalente é apropriadamente substituída por dipolos elétricos e magnéticos correspondentes. As amplitudes dos multipolos para cada um desses dipolos elementares são analiticamente encontradas pelas Equações de 4.12 a 4.15. Conseqüentemente, uma simples soma termo-a-termo das amplitudes individuais de cada dipolo elementar é capaz de fornecer a amplitude geral resultante para os multipolos de um dado campo eletromagnético [10].

Um arranjo de dipolos elétricos equivalentes, provenientes dos momentos de corrente elétrica discretos $\vec{C}_{el}^{[i]}$ ($i = 1, 2, \dots, L_{el}$), consiste de uma quantidade de L_{el} dipolos hertzianos localizados em $\vec{r}_{el}^{[i]}$ ($i = 1, 2, \dots, L_{el}$). Da mesma forma, uma quantidade de L_{mag} dipolos magnéticos, oriundos dos momentos de corrente magnética $\vec{C}_{mag}^{[i]}$, são posicionados em $\vec{r}_{mag}^{[i]}$ ($i = 1, 2, \dots, L_{mag}$). Deste modo, fora do domínio esférico de raio \vec{r}_H (posição da superfície de Huygens) sobre a qual estão localizados todos os dipolos elementares, as amplitudes totais dos multipolos são dadas por

$$A_{n,m} = -k^2 Z \left[\sum_{i=1}^{L_{el}} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}_{el}^{[i]}) \cdot \vec{C}_{el}^{[i]} - \frac{j}{Z} \sum_{i=1}^{L_{mag}} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}_{mag}^{[i]}) \cdot \vec{C}_{mag}^{[i]} \right], \quad (4.16)$$

e

$$B_{n,m} = -k^2 \frac{1}{Z} \left[\sum_{i=1}^{L_{mag}} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}_{mag}^{[i]}) \cdot \vec{C}_{cmag}^{[i]} - \frac{Z}{j} \sum_{i=1}^{L_{el}} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}_{el}^{[i]}) \cdot \vec{C}_{el}^{[i]} \right]. \quad (4.17)$$

Uma vez que as amplitudes dos multipolos $A_{n,m}$ e $B_{n,m}$ foram encontradas por meio das Equações 4.16 e 4.17, o campo no domínio da frequência e as demais grandezas relacionadas podem ser avaliadas analiticamente em qualquer ponto arbitrário do domínio $r > r_H$, ou seja, fora da superfície fechada de Huygens. Em particular, representações assintóticas das funções de Hankel esféricas de segundo tipo são obtidas para o campo distante. Logo, o campo elétrico e magnético na região de campo distante são dadas por

$$\vec{E}_\infty(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{kr} \left[- \sum_{n,m} j^n A_{n,m} \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) + Z \sum_{n,m} j^n B_{n,m} \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) \right], \quad (4.18)$$

e

$$\vec{H}_\infty(\vec{r}) = \frac{e^{-jkr}}{kr} \left[- \frac{1}{Z} \sum_{n,m} j^n A_{n,m} \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) - \sum_{n,m} j^n B_{n,m} \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) \right]. \quad (4.19)$$

As Equações de 4.16 a 4.19 compõem a transformada NFF baseada em multipolos esféricos no domínio da frequência. É importante ressaltar que o limite superior $n_{máx}$ depende do comprimento elétrico da fonte kr_0 (o número de onda k vezes o raio r_0 da esfera mínima que contém todas as fontes físicas, ou seja, r_0 se refere à superfície de Huygens). O limite $n_{máx}$ possui ordem n , sendo necessário para se obter a convergência do somatório e o resultado correto da expansão. Em particular, $n_{máx}$ não depende da localização dos dipolos sobre a superfície de Huygens, mas somente do raio onde elas se situam. Este parâmetro pode ser encontrado empiricamente a partir das propriedades das funções de Bessel esféricas $j_n(kr_0)$ de forma que

$$n_{máx} \approx kr_0 + 1, 8d^{\frac{2}{3}}(kr_0)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.20)$$

Esta é uma escolha apropriada para a avaliação do campo distante para uma precisão de d dígitos [10].

Após se realizar o cálculo de $n_{máx}$, o número total de coeficientes da expansão em multipolos esféricos é obtido conforme mostrado na Tabela 4.1. A análise é feita para cada valor de n de 1 a $n_{máx}$, considerando-se que o índice m é dado por

$$-n \leq m \leq +n. \quad (4.21)$$

Tabela 4.1: Procedimento para o cálculo do número total de multipolos esféricos da expansão para $n_{máx} = 11$.

n	m	Quantidade de Valores
1	-1, 0, 1	3
2	-2, -1, 0, 1, 2	5
3	-3, -2, ..., 2, 3	7
4	-4, -3, ..., 3, 4	9
5	-5, -4, ..., 4, 5	11
6	-6, -5, ..., 5, 6	13
7	-7, -6, ..., 6, 7	15
8	-8, -7, ..., 7, 8	17
9	-9, -8, ..., 8, 9	19
10	-10, -9, ..., 9, 10	21
11	-11, -10, ..., 10, 11	23
Total		143

Devido à variação de m , o número de multipolos para cada valor de n individualmente é $(2n + 1)$. Desta forma, a quantidade total *multi* de multipolos para todos os valores de n de 1 a $n_{máx}$ foi sintetizada por uma equação desenvolvida nesta dissertação expressa por

$$multi = n_{máx}(2n_{máx} + 1) - 2 \sum_{n=1}^{(n_{máx}-1)} n. \quad (4.22)$$

Supondo-se $n_{máx} = 5$, as amplitudes dos multipolos são calculadas para as combinações (n, m) exibidas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Amplitudes dos multipolos $A_{n,m}$ para $n_{máx} = 5$.

n	m=-5	m=-4	m=-3	m=-2	m=-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
1					$A_{1,-1}$	$A_{1,0}$	$A_{1,1}$				
2				$A_{2,-2}$	$A_{2,-1}$	$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$			
3			$A_{3,-3}$	$A_{3,-2}$	$A_{3,-1}$	$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$		
4		$A_{4,-4}$	$A_{4,-3}$	$A_{4,-2}$	$A_{4,-1}$	$A_{4,0}$	$A_{4,1}$	$A_{4,2}$	$A_{4,3}$	$A_{4,4}$	
5	$A_{5,-5}$	$A_{5,-4}$	$A_{5,-3}$	$A_{5,-2}$	$A_{5,-1}$	$A_{5,0}$	$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$

4.2 Transformada no Domínio do Tempo

As variáveis no domínio da frequência e no domínio do tempo são encontradas através da aplicação da transformada de Fourier e sua inversa definidas por

$$\vec{F}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.23)$$

e

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{r}, \omega) e^{+j\omega t} d\omega, \quad (4.24)$$

onde as funções em letras maiúsculas estão no domínio da frequência e as minúsculas no tempo. Desta forma, ao se aplicar a transformada inversa de Fourier à representação da Equação 4.18 para o campo distante no domínio da frequência, o campo elétrico distante no domínio do tempo se torna

$$\vec{e}_{\infty}(\vec{r}, t) = - \sum_{n,m} a_{n,m} \left(t - \frac{r}{v_c} \right) \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) + Z \sum_{n,m} b_{n,m} \left(t - \frac{r}{v_c} \right) \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi), \quad (4.25)$$

onde $v_c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ denota a velocidade da luz e \vec{r} representa o ponto de observação de módulo r e ângulos (θ, ϕ) na região de campo distante. As amplitudes dos multipolos no domínio do tempo são encontradas como

$$a_{n,m}(t) = j^n \frac{v_c}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{n,m}(\omega)}{\omega} e^{+j\omega t} d\omega, \quad (4.26)$$

e

$$b_{n,m}(t) = j^n \frac{v_c}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{n,m}(\omega)}{\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.27)$$

Ao se substituir as Equações 4.16 e 4.17 nas Equações 4.26 e 4.27, aplicando-se o teorema da convolução e observando-se o princípio da causalidade, obtém-se que

$$a_{n,m}(t) = \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \left[Z \sum_{i=1}^{L_{el}} \int_0^t \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t-t') \cdot \vec{c}_{el}^{[i]}(t') dt' + \sum_{i=1}^{L_{mag}} \int_0^t \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t-t') \cdot \vec{c}_{mag}^{[i]}(t') dt' \right], \quad (4.28)$$

e

$$b_{n,m}(t) = \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \left[\frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{L_{mag}} \int_0^t \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t-t') \cdot \vec{c}_{mag}^{[i]}(t') dt' - \sum_{i=1}^{L_{el}} \int_0^t \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t-t') \cdot \vec{c}_{el}^{[i]}(t') dt' \right]. \quad (4.29)$$

O primeiro par de convoluções $\vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t)$ e $\vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t)$ possui parcelas correspondentes às transformadas de Fourier das soluções vetoriais $N_{n,-m}^I$ e $M_{n,-m}^I$ representadas respectivamente pelas Equações 3.96 e 3.97, que compõem o cálculo das amplitudes dos multipolos no domínio da frequência. Desta forma, o primeiro par de convoluções é definido por

$$\vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t) = -j^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \vec{N}_{n,-m}^I(\vec{r}^{[i]}) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.30)$$

e

$$\vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t) = j^{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \vec{M}_{n,-m}^I(\vec{r}^{[i]}) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.31)$$

enquanto o segundo par de convoluções $\vec{c}_{el}^{[i]}(t)$ e $\vec{c}_{mag}^{[i]}(t)$ é o momento de corrente elétrica e magnética no domínio do tempo obtido, neste trabalho, através do método FDTD na região de campo próximo.

Para avaliação das Equações 4.30 e 4.31, a transformada de Fourier inversa da função de Bessel esférica dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_n\left(\frac{\omega}{v_c} r\right) e^{j\omega t} d\omega = \begin{cases} \frac{1}{2} j^n \frac{v_c}{r} P_n\left(t \frac{v_c}{r}\right), & \text{se } |t| < \frac{r}{v_c} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{r}{v_c}, \end{cases} \quad (4.32)$$

é utilizada, onde $P_n(t(v_c/r))$ são polinômios de Legendre. Associando-se as Equações 3.96, 4.32 e a propriedade de diferenciação no tempo da transformada inversa de Fourier, obtém-se que

$$\begin{aligned} \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t) &= \frac{j^n}{2\pi v_c} \left(\int_{-\infty}^{\infty} j\omega j_n(kr^{[i]}) e^{j\omega t} d\omega \right) \vec{m}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^n v_c}{2} \frac{P_n\left(t \frac{v_c}{r^{[i]}}\right)}{r^{[i]2}} \vec{m}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}), & \text{se } |t| < \frac{r^{[i]}}{v_c} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{r^{[i]}}{v_c}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Posteriormente, aplicando-se a relação da Equação 3.93, a Equação 4.30 se torna

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t) &= -\frac{j^n}{2\pi} \left[\vec{\nabla} \times \int_{-\infty}^{\infty} \vec{M}_{n,m}^I(\vec{r}) e^{j\omega t} d\omega \right]_{\vec{r}=\vec{r}^{[i]}} \\ &= -j^n \left[\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_n(kr) e^{j\omega t} d\omega \right) \vec{m}_{n,-m}(\theta, \phi) \right]_{\vec{r}=\vec{r}^{[i]}} \\ &= \begin{cases} \frac{-(-1)^n v_c}{2} \left[\vec{\nabla} \times \frac{P_n\left(t \frac{v_c}{r}\right)}{r} \vec{m}_{n,-m}(\theta, \phi) \right]_{\vec{r}=\vec{r}^{[i]}}, & \text{se } |t| < \frac{r^{[i]}}{v_c} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{r^{[i]}}{v_c}. \end{cases} \end{aligned}$$

Expandindo-se a operação do rotacional, finalmente encontra-se que

$$\vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^n v_c}{2} \\ \times \left[\frac{P_n\left(t \frac{v_c}{r^{[i]}}\right)}{r^{[i]2}} n(n+1) Y_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \hat{r} \right. \\ \left. - v_c t \frac{P'_n\left(t \frac{v_c}{r^{[i]}}\right)}{r^{[i]3}} \vec{n}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \right], & \text{se } |t| < \frac{r^{[i]}}{v_c} \\ 0, & \text{se } |t| > \frac{r^{[i]}}{v_c}. \end{cases} \quad (4.34)$$

Os resultados apresentados nas Equações 4.33 e 4.34 permitem uma observação interessante, que está de acordo com as considerações geométrico-fenomenológicas: o campo distante é obtido através de uma convolução do campo próximo no domínio do tempo com fatores $\vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t)$ e $\vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t)$, que são diferentes de zero somente em uma determinada janela no tempo. A largura desta janela no tempo é proporcional a $r^{[i]}$, que é proporcional à distância do dipolo equivalente ao centro do sistema de coordenadas. Conseqüentemente, conclui-se que o custo numérico para a convolução é minimizado ao se localizar a superfície sobre a qual estão as correntes equivalentes tão perto quanto possível do objeto que gera o espalhamento [10].

4.3 Aproximação Linear Temporal dos Dados de Campo Próximo

Os resultados presentes na Seção 4.2 são válidos se os valores dos dipolos equivalentes forem dados para amostras discretas no tempo (normalmente obtidos através do FDTD). Agora, é mostrado como uma aproximação linear temporal dos dados de campo próximo pode ser analiticamente realizada dentro do método descrito [10]. O procedimento é similar àquele usado no tratamento de meios dispersivos no FDTD [22].

Para este fim, as Equações 4.28 e 4.29 são avaliadas em $k_{m\acute{a}x}$ instantes de tempo discretos $t = k\Delta t$, tal que $k = 1, 2, 3, \dots, k_{m\acute{a}x}$ e Δt é o intervalo de tempo entre amostras consecutivas. Considera-se que as abreviações $a_{n,m}(k\Delta t) = a_{n,m}^k$ e $b_{n,m}(k\Delta t) = b_{n,m}^k$ representam as amplitudes $a_{n,m}$ e $b_{n,m}$ no k -ésimo instante de tempo. Além disso, substituindo-se os argumentos dos pares de convolução, obtém-se que

$$\begin{aligned}
a_{n,m}^k(t) &= \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \\
&\times \left[Z \sum_{i=1}^{L_{el}} \int_0^{k\Delta t} \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t') \cdot \vec{c}_{el}^{[i]}(k\Delta t - t') dt' + \sum_{i=1}^{L_{mag}} \int_0^{k\Delta t} \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t') \cdot \vec{c}_{mag}^{[i]}(k\Delta t - t') dt' \right],
\end{aligned} \tag{4.35}$$

e

$$\begin{aligned}
b_{n,m}^k(t) &= \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \\
&\times \left[\frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{L_{mag}} \int_0^{k\Delta t} \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t') \cdot \vec{c}_{mag}^{[i]}(k\Delta t - t') dt' - \sum_{i=1}^{L_{el}} \int_0^{k\Delta t} \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t') \cdot \vec{c}_{el}^{[i]}(k\Delta t - t') dt' \right].
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Os momentos de corrente elétrica e magnética $\vec{c}_{el}^{[i]}$ e $\vec{c}_{mag}^{[i]}$ no domínio do tempo são então expressos em termos das seguintes aproximações lineares:

$$\vec{c}_{el}^{[i]}(k\Delta t - t') = \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} + \frac{1}{\Delta t}(t' - l\Delta t) \left(\vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} \right), \tag{4.37}$$

e

$$\vec{c}_{mag}^{[i]}(k\Delta t - t') = \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} + \frac{1}{\Delta t}(t' - l\Delta t) \left(\vec{c}_{mag}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} \right), \tag{4.38}$$

$$l\Delta t \leq t' \leq (l+1)\Delta t, \quad l = 0, 1, 2, \dots, (k-1),$$

onde $\vec{c}^{k,[i]} = \vec{c}^{[i]}(k\Delta t)$, ou seja, $\vec{c}^{k,[i]}$ é o i -ésimo momento de corrente no k -ésimo instante de tempo. Ao se substituir as Equações 4.37 e 4.38 nas Equações 4.35 e 4.36, se alcança as seguintes representações

$$\begin{aligned}
 a_{n,m}^k &= \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \\
 &\times \left\{ Z \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\left((1+l) \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} - l \vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} \right) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} \right) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \\
 &+ \sum_{i=1}^{L_{mag}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\left((1+l) \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} - l \vec{c}_{mag}^{k-(l+1),[i]} \right) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{c}_{mag}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} \right) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \right\}, \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 b_{n,m}^k &= \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{L_{mag}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\left((1+l) \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} - l \vec{c}_{mag}^{k-(l+1),[i]} \right) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{c}_{mag}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{mag}^{k-l,[i]} \right) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \\
 &- \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\left((1+l) \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} - l \vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} \right) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} \right) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \right\}. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

É interessante observar nas Equações 4.39 e 4.40 que o cálculo de cada amplitude dos multipolos $a_{n,m}$ e $b_{n,m}$ no k -ésimo instante de tempo considera todos os dipolos equivalentes presentes sobre a superfície de Huygens no intervalo de tempo do instante inicial ao k -ésimo instante. Isto pode ser concluído a partir dos pares de somatórios, seus limites e através dos índices temporais dos dipolos equivalentes que compõem as convoluções realizadas no tempo. Desta forma, as amplitudes em um dado intervalo de tempo possuem contribuições de todos os dipolos equivalentes em todos os instantes de tempo anteriores. Em outras palavras, o cálculo de cada amplitude leva sempre em conta a distribuição de corrente sobre toda a superfície fechada de Huygens, além de serem temporalmente cumulativas. Os somatórios são ponderados pelas quatro funções vetoriais $\vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]}$, $\vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]}$, $\vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]}$ e $\vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]}$. Estas funções vetoriais representam as seguintes

integrais:

$$\vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} = \int_{l\Delta t}^{(l+1)\Delta t} \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t') dt', \quad (4.41)$$

$$\vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} = \int_{l\Delta t}^{(l+1)\Delta t} t' \vec{\alpha}_{n,m}^{[i]}(t') dt', \quad (4.42)$$

$$\vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} = \int_{l\Delta t}^{(l+1)\Delta t} \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t') dt', \quad (4.43)$$

e

$$\vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} = \int_{l\Delta t}^{(l+1)\Delta t} t' \vec{\beta}_{n,m}^{[i]}(t') dt'. \quad (4.44)$$

Cada uma das integrais das Equações de 4.41 a 4.44 pode ser avaliada completamente de forma analítica, empregando-se integração parcial e integrais especiais que envolvem os polinômios de Legendre [23]. A primeira integral é dada por:

$$\begin{aligned}
 \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} &= \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} \frac{Y_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]})}{r^{[i]}} \hat{r} \\
 &\times \begin{cases} \gamma_n^{l,[i]} - \gamma_n^{(l+1),[i]}, & \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ \gamma_n^{l,[i]}, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1 \end{cases} \\
 &- \frac{(-1)^n \vec{n}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]})}{2} \frac{1}{r^{[i]}} \\
 &\times \begin{cases} \left[\frac{v_c(l+1)\Delta t}{r^{[i]}} P_n \left(\frac{v_c(l+1)\Delta t}{r^{[i]}} \right) - \frac{v_c l \Delta t}{r^{[i]}} P_n \left(\frac{v_c l \Delta t}{r^{[i]}} \right) \right. \\ \left. - \left(\gamma_n^{l,[i]} - \gamma_n^{(l+1),[i]} \right) \right], & \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ 1 - \frac{v_c l \Delta t}{r^{[i]}} P_n \left(\frac{v_c l \Delta t}{r^{[i]}} \right) - \gamma_n^{l,[i]}, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

onde a função auxiliar $\gamma_n^{l,[i]}$ é definida como

$$\gamma_n^{l,[i]} = \sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2} P_n^{-1} \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right). \tag{4.46}$$

Para a segunda integral $\vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]}$, obtida para o caso em que $n > 1$:

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} &= \frac{(-1)^n}{2v_c} n(n+1) Y_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \hat{r} \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{(l+1),[i]} - \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{l,[i]} \right], \quad \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ - \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{l,[i]}, \quad \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, \quad \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1 \end{array} \right. \\
&- \frac{(-1)^n}{2v_c} \vec{n}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \\
&\times \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2 \left[-l^2 P_n \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) + (l+1)^2 P_n \left(\frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) \right] \right. \\ \left. - 2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{(l+1),[i]} + 2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{l,[i]} \right], \quad \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ \left[1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2 P_n \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) + 2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right)^2}}{(n-1)(n+2)} \lambda_n^{l,[i]} \right], \quad \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, \quad \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1, \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde a segunda função auxiliar é dada por

$$\lambda_n^{l,[i]} = \sqrt{1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right)^2} P_n\left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right) + \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} P_n^1\left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right). \quad (4.48)$$

No caso de $n = 1$, a integral especial $\vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]}$ é simplificada para:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{1,m}^{l,[i]} &= -\frac{1}{6v_c} \left[2Y_{1,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \hat{r} - \vec{n}_{1,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \right] \\ &\times \begin{cases} \left[\left(\frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right)^3 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right)^3 \right], & \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ 1 - \left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right)^3, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.49)$$

A terceira integral é avaliada por:

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} &= \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{r^{[i]}} \vec{m}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \\ &\times \begin{cases} P_n\left(\frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right) - P_n\left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right), & \text{se } \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ 1 - P_n\left(\frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}}\right), & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1)\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ 0, & \text{se } \left| \frac{l\Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.50)$$

enquanto a última integral é apresentada como:

$$\begin{aligned}
\vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} &= \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{v_c} \vec{m}_{n,-m}(\theta^{[i]}, \phi^{[i]}) \\
&\times \begin{cases} \left\{ \frac{\Delta t v_c}{r^{[i]}} \times \left[-l P_n \left(\frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) + (l+1) P_n \left(\frac{(l+1) \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) \right] \right. \\ \left. + \gamma_n^{l,[i]} - \gamma_n^{(l+1),[i]} \right\}, & \text{se } \left| \frac{(l+1) \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 \\ \\ \left\{ 1 - \frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} P_n \left(\frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right) + \gamma_n^{l,[i]} \right\}, & \text{se } \left| \frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1) \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| \\ \\ 0, & \text{se } \left| \frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

onde novamente a função auxiliar $\gamma_n^{l,[i]}$ definida em 4.46 é empregada [10].

Analisado-se as funções vetoriais das Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51, observa-se que todas elas dependem da posição espacial $(r^{[i]}, \theta^{[i]}, \phi^{[i]})$ de cada dipolo equivalente sobre a superfície de Huygens. Logo, a contribuição fornecida por cada dipolo equivalente no cálculo das amplitudes dos multipolos depende de sua posição espacial. Três aproximações são sugeridas de acordo com algumas proporções dadas por $\left| \frac{(l+1) \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1$, $\left| \frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| < 1 < \left| \frac{(l+1) \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right|$ e $\left| \frac{l \Delta t v_c}{r^{[i]}} \right| > 1$, sendo que o último intervalo gera resultados nulos em todas as quatro integrais. Desta forma, as funções integrais são nulas sempre que

$$\frac{l \Delta t c}{r_{m\acute{a}x}} > 1, \tag{4.52}$$

onde " l " está relacionado ao número de intervalos de tempo, Δt é o incremento de tempo, " c " é a velocidade da luz no espaço livre e $r_{m\acute{a}x}$ é a distância do dipolo equivalente mais distante com relação à origem do sistema de coordenadas. É interessante conhecer o número de intervalos de tempo a partir do qual as integrais sejam nulas, a fim de se evitar desperdício de horas de processamento computacional desnecessariamente. Logo, o número de intervalos de tempo " l " a partir dos quais as funções integrais são nulas pode ser calculado rearranjando-se a Equação 4.52 da seguinte forma:

$$l > \frac{r_{máx}}{\Delta t c}. \quad (4.53)$$

Considerando-se que

$$l_0 = \frac{r_{máx}}{\Delta t c}, \quad (4.54)$$

é o l -ésimo instante a partir do qual as equações integrais são nulas, a Equação 4.53 é reescrita como

$$l > l_0, \quad (4.55)$$

ou seja, as Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51 se tornam nulas para todo l maior que l_0 .

Após todas as amplitudes dos multipolos esféricos terem sido calculadas para os k intervalos discretos de tempo, o campo elétrico distante $\vec{e}_\infty(\vec{r}, t)$ pode ser rapidamente encontrado através da expansão em multipolos esféricos mostrada na Equação 4.56 a seguir:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\infty(\vec{r}, t) = & - \sum_{n=1}^{n_{máx}} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m} \left(t - \frac{r}{v_c} \right) \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) \\ & + Z \sum_{n=1}^{n_{máx}} \sum_{m=-n}^{+n} b_{n,m} \left(t - \frac{r}{v_c} \right) \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde o campo elétrico $\vec{e}_\infty(\vec{r}, t)$ é observado na região de campo distante em uma dada posição \vec{r} qualquer e no k -ésimo instante de tempo $t = k\Delta t$ dentro do intervalo temporal em análise. Como o campo está no domínio do tempo e discretizado em $k_{máx}$ intervalos, sendo o k -ésimo instante de tempo $t = k\Delta t$ e r uma distância de observação radial fixa, reescreve-se a Equação 4.56 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\infty^k(\theta, \phi) = & - \sum_{n=1}^{n_{máx}} \sum_{m=-n}^{+n} a_{n,m}(k - k_i) \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) \\ & + Z \sum_{n=1}^{n_{máx}} \sum_{m=-n}^{+n} b_{n,m}(k - k_i) \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde $k_i = \frac{r}{v_c} \frac{1}{\Delta t}$ é o k -ésimo instante de tempo no qual a onda eletromagnética chega a um dado ponto de observação \vec{r} , ou seja, $\frac{r}{v_c}$ é o tempo gasto pela onda eletromagnética na velocidade da luz v_c para percorrer a distância r entre a superfície de Huygens sobre a qual os momentos de corrente estão localizados e o ponto de observação \vec{r} na região de campo distante. Por fim, o campo elétrico na região de campo distante pode ser reescrito de forma simplificada como:

$$\vec{e}_{\infty}^k(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{n_{\text{máx}}} \sum_{m=-n}^{+n} \left\{ -a_{n,m}^{[k-k_i]} \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) + Z \cdot b_{n,m}^{[k-k_i]} \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) \right\}. \quad (4.58)$$

4.4 Potencialidades e Particularidades da Transformada NFF baseada em Multipolos Esféricos

A transformada NFF baseada em multipolos esféricos apresenta algumas particularidades que a fazem mais interessante ou mais vantajosa com relação a outros métodos. Entre estas vantagens, é interessante ressaltar que todas as funções especiais (polinômios de Legendre, funções associadas de Legendre e funções de Bessel esféricas) necessárias para avaliar as amplitudes dos multipolos esféricos no domínio do tempo são calculadas somente nos pontos onde os dipolos equivalentes estão localizados. Desta forma, estas funções não são avaliadas novamente quando os pontos de observação são alterados.

Além disso, uma vez que as amplitudes dos multipolos foram encontradas, qualquer nova observação na região de campo distante pode ser obtida através de um simples pós-processamento da expansão em multipolos. Ao contrário, diversas técnicas de transformação NFF convencionais exigem que os pontos desejados para o campo distante sejam definidos antes do cálculo do campo próximo realizado através do método FDTD, por exemplo. As técnicas convencionais também podem demandar um grande volume de dados de campo sobre a superfície de Huygens no domínio do tempo, que terá de ser armazenado para um pós-processamento puramente numérico. Esta situação, contornada pelo método dos multipolos, exigiria maior capacidade de memória e processamento.

Considerando-se as potencialidades do método dos multipolos, destaca-se a téc-

nica do filtro espacial de frequência relacionado ao critério da Equação 4.20. Este critério estabelece um número máximo de valores para as amplitudes dos multipolos necessário para uma solução satisfatória do campo distante espalhado no domínio da frequência. Como as amplitudes dos multipolos no domínio do tempo estão relacionadas àquelas no domínio da frequência por operações lineares, o mesmo critério é válido também no domínio do tempo. Este fato pode ser interpretado como um filtro espacial passa-baixa para campos no domínio do tempo. Além de reduzir o custo computacional, este filtro permite que até mesmo a precisão dos resultados possa ser aprimorada durante o estágio de pós-processamento através da eliminação de amplitudes de multipolos de alta ordem.

Em outras palavras, considerar mais amplitudes de multipolos além do valor fornecido pela Equação 4.20 não melhora o resultado. Ao contrário, pode até tornar o resultado pior [24]. A razão para este comportamento é que as amplitudes de multipolos de alta ordem não são obviamente nulas — suas contribuições são devido a erros numéricos com a frequência espacial mais alta, originados, por exemplo, na região entre o objeto que gera o espalhamento e a superfície de Huygens ou devido ao método em si. Sendo sempre conhecida a distância máxima do “espalhador” à origem do sistema, a técnica NFF por multipolos esféricos inclui a possibilidade de proporcionar um filtro espacial eficiente e fácil de implementar. Este filtro pode melhorar a precisão dos resultados até mesmo durante o estágio de pós-processamento.

A aproximação linear apresentada na Seção 4.3 também representa uma potencialidade da técnica por multipolos esféricos. Isto ocorre da seguinte maneira: uma superfície de Huygens menor proporciona menores distâncias $r^{[i]}$ entre os dipolos equivalentes e a origem do sistema de coordenadas. Desta forma, os intervalos de integração das convoluções das Equações 4.28 e 4.29 se tornam menores, observando-se também as Equações 4.33 e 4.34. Uma vez que a informação de campo distante deve ser armazenada em uma janela de tempo menor, enquanto a frequência de amostragem (ou seja, intervalo de tempo) permanece inalterada, uma interpolação entre os pontos de amostragem obviamente se tornam mais importantes e mais efetivos. Desta forma, a aproximação linear permite posicionar a superfície de Huygens mais próximo do “espalhador”. Consequentemente, menos dipolos equivalentes, menos memória e muito menos tempo de processamento são necessários.

A complexidade numérica da transformada NFF baseada em uma expansão de multipolos esféricos se concentra basicamente no cálculo das amplitudes dos multipolos, que irão possuir todo o conteúdo necessário para se expandir qualquer observação futura na região de campo distante. Como o pós-processamento analítico da representação dos multipolos obtidos pode ser realizado interativamente quase que em “tempo

real”, somente o tempo de processamento necessário para o cálculo das amplitudes dos multipolos tem que ser considerado. Em outras palavras, o tempo de CPU e de memória necessários não dependem do número desejado de pontos de observação na região de campo distante.

4.5 Conclusão Parcial

A transformada NFF apresentada permite obter o campo distante por meio de uma expansão em multipolos esféricos no domínio do tempo gerada a partir dos dados de campo próximo calculados numericamente por métodos como o FDTD. Uma vez que as amplitudes dos multipolos foram calculadas, o campo distante pode ser analisado e pós-processado utilizando-se as vantagens da expansão em multipolos esféricos.

Mais do que os algoritmos convencionais, a representação em multipolos esféricos permite manipular e até mesmo aprimorar os resultados durante a fase de pós-processamento através de uma técnica de filtro espacial. Além disso, uma aproximação linear dos dados de campo próximo pode ser totalmente realizada analiticamente e permite posicionar a superfície de Huygens muito próximo do “espalhador” ou antena [10]. Diante de todas estas vantagens, a transformada NFF baseada em multipolos esféricos se apresenta como uma opção interessante para a análise de antenas no domínio do tempo, como será apresentado no capítulo a seguir.

Capítulo 5

Aplicação e Ajuste da Transformada

O objetivo principal deste trabalho é a investigação ou desenvolvimento de meios úteis à aceleração computacional da transformada NFF baseada em multipolos esféricos no domínio do tempo. Para tal fim, diversas análises foram realizadas em vista de um entendimento mais detalhado do método. Observou-se as propriedades dos dados de entrada, influência de variáveis de configuração do algoritmo e até mesmo a implementação de processamento paralelo em C++. Basicamente, dois estudos de caso foram escolhidos: uma antena dipolo de meia-onda e uma antena impressa *quasi-yagi*. A raiz do erro médio quadrático (RMSE) foi definida como indicador de precisão e fator de comparação entre resultados ao longo de todo este trabalho. A seguir, a descrição detalhada de cada estudo de caso é apresentada.

5.1 Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE)

A raiz do erro médio quadrático (RMSE, do inglês *root mean square error*) é utilizada como métrica estatística padrão para medir o desempenho de modelos matemáticos em várias áreas de pesquisa. Uma das características da RMSE é a aplicação de um peso maior aos erros com maior valor absoluto. Neste trabalho, ela foi aplicada ao cálculo do erro da diretividade da seguinte forma:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[D_n^{[1]}(\theta, \phi) - D_n^{[2]}(\theta, \phi) \right]^2}, \quad (5.1)$$

onde $D_n^{[1]}$ é a diretividade de referência, $D_n^{[2]}$ é a diretividade em análise, n representa o n -ésimo ponto do diagrama de radiação e N é o número total de pontos.

Como toda medida estatística condensa um grande volume de dados em um único valor, ela somente fornece uma projeção dos erros do modelo e apenas destaca determinado aspecto das características do erro [25]. Neste trabalho, a RMSE é a métrica estatística adotada como referência numérica em suporte à comparação visual dos diagramas de radiação.

5.2 Processo de Simulação

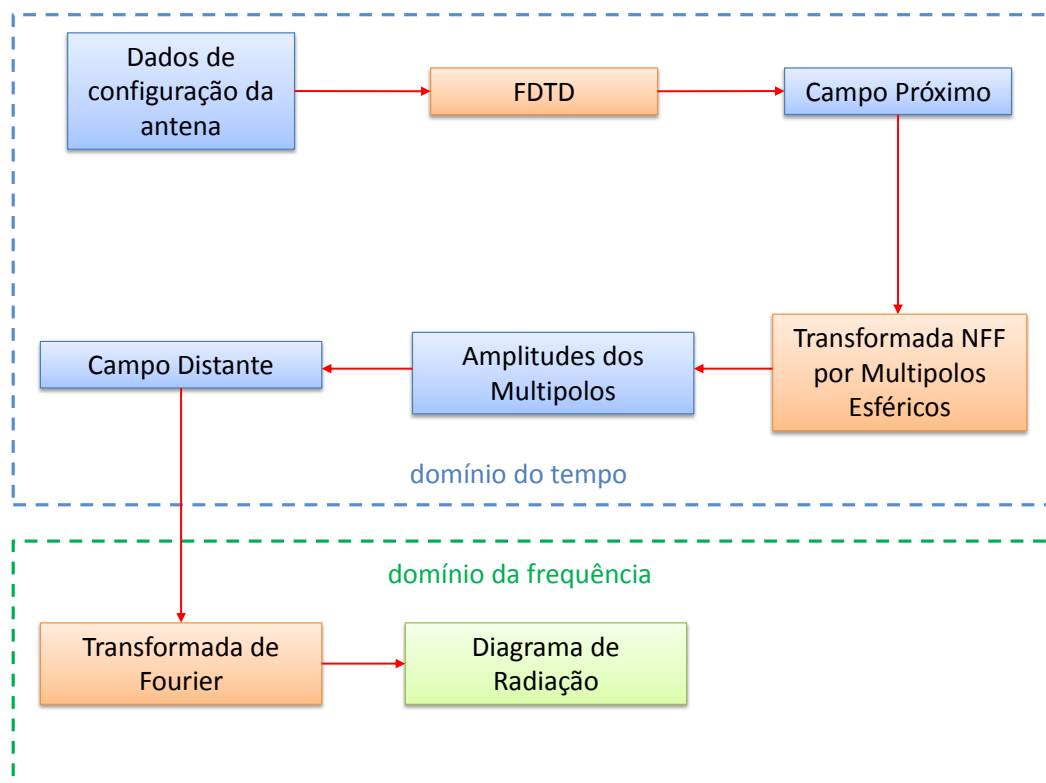


Figura 5.1: Processo de simulação de antenas adotado neste trabalho.

O processo de simulação adotado neste trabalho é realizado na sua maior parte no domínio do tempo. Tanto o campo próximo quanto distante foram calculados no domínio do tempo, como pode ser visualizado na Figura 5.1. Inicialmente, os dados físicos da antena são entregues ao método FDTD, que fornece os momentos de corrente elétrica e magnética superficiais que descrevem o comportamento do campo próximo radiado. Estes momentos de corrente, por sua vez, são transformados para campo

distante por meio da transformada de campo próximo para distante através da expansão em multipolos esféricos no domínio do tempo. Esta transformada gera as amplitudes dos multipolos esféricos da expansão no domínio do tempo. A partir destas amplitudes, o campo pode ser calculado para qualquer ponto de observação na região de campo distante em qualquer instante do domínio de simulação. Portanto, todo o trabalho foi realizado no domínio do tempo e o domínio da frequência foi utilizado somente na geração dos diagramas de radiação através da aplicação da transformada de Fourier aos dados de campo distante no domínio do tempo.

5.3 Antena Dipolo de Meia-Onda

Inicialmente, a transformada NFF baseada em multipolos esféricos no domínio do tempo foi aplicada à geração de diagramas de radiação para o dipolo de meia-onda em 10 GHz. Embora esta não seja uma antena UWB, ela possui solução analítica. Desta forma, o dipolo de meia-onda é muito útil na validação do método. Além do mais, esta antena possui uma construção simples, que favorece uma discretização menos detalhada e com execução mais rápida do algoritmo. Estas características tornam o dipolo de meia-onda uma antena adequada para experimentos iniciais.

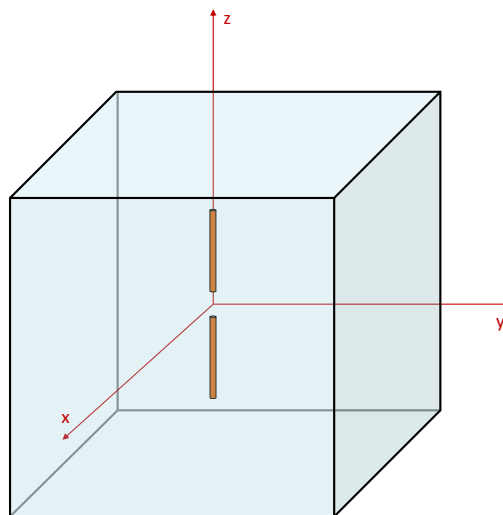


Figura 5.2: Dipolo de meia-onda dentro da superfície cúbica de Huygens.

A transformada NFF em discussão utiliza os momentos de corrente sobre uma superfície cúbica de Huygens na região do campo próximo fornecida por um algoritmo FDTD com condição de contorno absorvente WP-PML. Esta combinação entre FDTD/WP-PML no cálculo do campo próximo e da transformada para campo distante

baseada em multipolos esféricos no domínio do tempo foi proposta de forma detalhada em [12]. A discretização espacial foi de $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,484 \text{ mm}$. O dipolo de meia-onda filamentar em 10 GHz possui comprimento de 15 mm e está centrado na origem do sistema de coordenadas ao longo do eixo z , como ilustrado pela Figura 5.2. Foi definido um incremento temporal Δt de 0,6415 ps. Todas estas configurações foram realizadas com base nas condições de convergência do método FDTD utilizado.

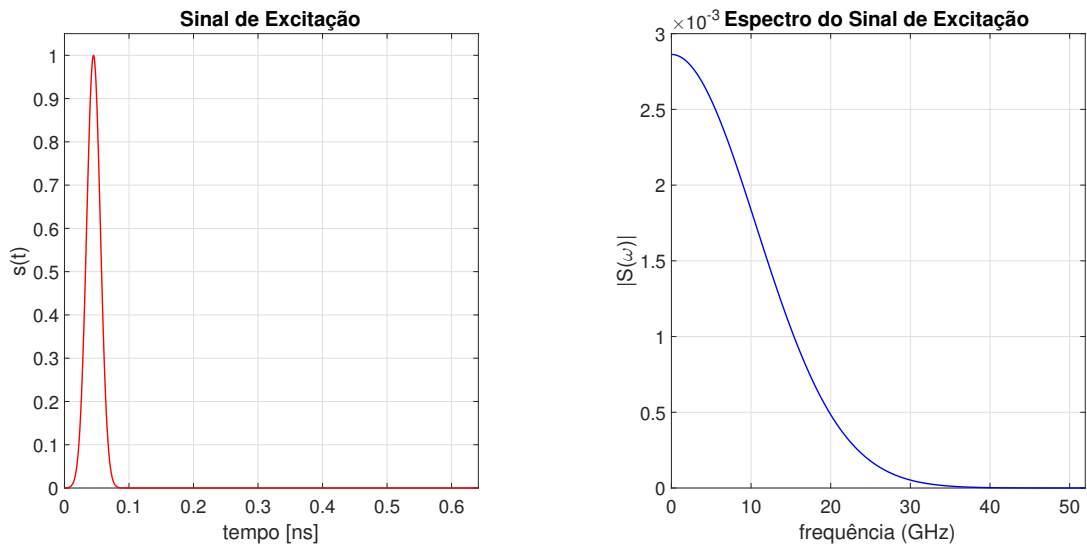
O domínio espacial de simulação é composto por 101 x 101 x 101 cubos de Yee, dentro do qual a antena está centralizada. Os momentos de corrente elétrica e magnética foram calculados sobre uma superfície cúbica de Huygens centralizada na origem e composta por 51 x 51 x 51 cubos de Yee. Dentro do domínio espacial, a camada composta pelos 5 últimos cubos de Yee foi definida com condição absorvente WP-PML. O sinal de excitação da antena é um pulso gaussiano dado por:

$$s(t) = \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{T} \right)^2 \right], \quad (5.2)$$

onde $T = 15 \times 10^{-12}$ e $t_0 = 3T$. O k -ésimo instante de tempo discreto é tal que $t = k\Delta t$.

A Figura 5.3(a) exhibe o pulso gaussiano de excitação aplicado ao dipolo de meia-onda em 10 GHz. Neste caso, o sinal todo possui um total de 1000 instantes de tempo. A escolha deste formato de sinal de excitação é muito comum em métodos de análise de antenas no domínio do tempo devido ao seu largo espectro de frequência, como pode ser observado na Figura 5.3(b).

Os momentos de corrente elétrica e magnética calculados pelo método FDTD/WP-PML sobre a superfície de Huygens descrevem o campo próximo da antena. Desta forma, eles foram aplicados à transformada de campo próximo para distante baseada em expansão de multipolos esféricos no domínio do tempo a fim de se obter a caracterização do campo eletromagnético radiado pela antena na região de campo distante. Foram considerados 3 multipolos na expansão, que provém do limite do somatório $n_{máx} = 1$. A distância de referência na região de campo distante foi definida como 60 mm a partir da origem do sistema de coordenadas. O índice " l " dos somatórios utilizados no cálculo das amplitudes dos multipolos nas Equações 4.39 e 4.40 foi limitado em 112, pois a partir deste ponto as funções integrais das Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51 são nulas conforme definição do método. Com exceção de $n_{máx}$, que será discutido posteriormente, estes parâmetros foram calculados de acordo com os critérios de convergência da transformada descritos na Seção 4.3.



(a) Pulso gaussiano no domínio do tempo.

(b) Espectro de frequência do sinal de excitação.

Figura 5.3: Sinal de excitação aplicado ao dipolo de meia-onda.

5.3.1 Resultados Iniciais

Após o campo distante ter sido calculado em cada um dos 1000 instantes de tempo, os mesmos foram submetidos a uma transformada rápida de Fourier a fim de se obter os campos no domínio da frequência. Os diagramas de radiação foram gerados na frequência de ressonância deste dipolo de meia-onda em 10 GHz. As Figuras de 5.4 a 5.6 apresentam a comparação entre a solução analítica e a solução gerada pela transformada baseada em multipolos esféricos. Visualmente, observa-se grande concordância entre os resultados e suas soluções analíticas. A raiz do erro médio quadrático foi de 0,07 dB no plano xy , 1,84 dB no plano xz e 1,5 dB no plano yz . Embora o dipolo não seja uma antena UWB, estes resultados validam esta transformada para esta antena na frequência de 10 GHz.

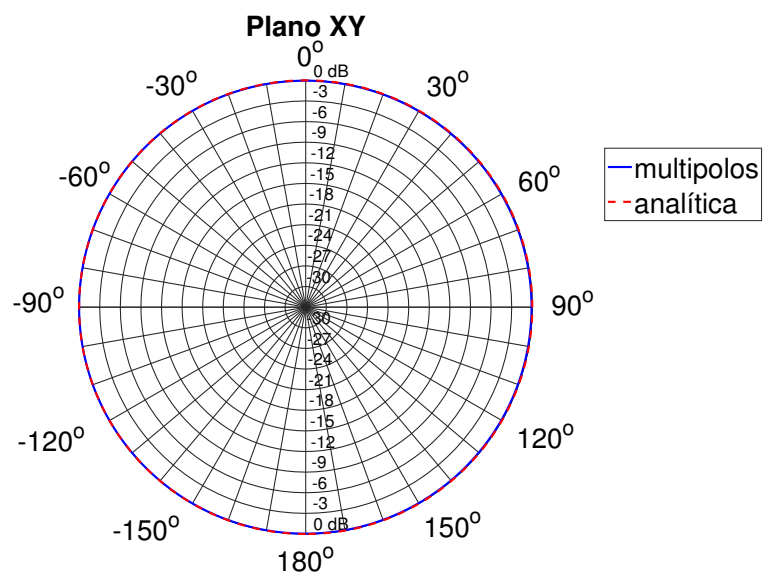


Figura 5.4: Diagrama de radiação no plano xy do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.

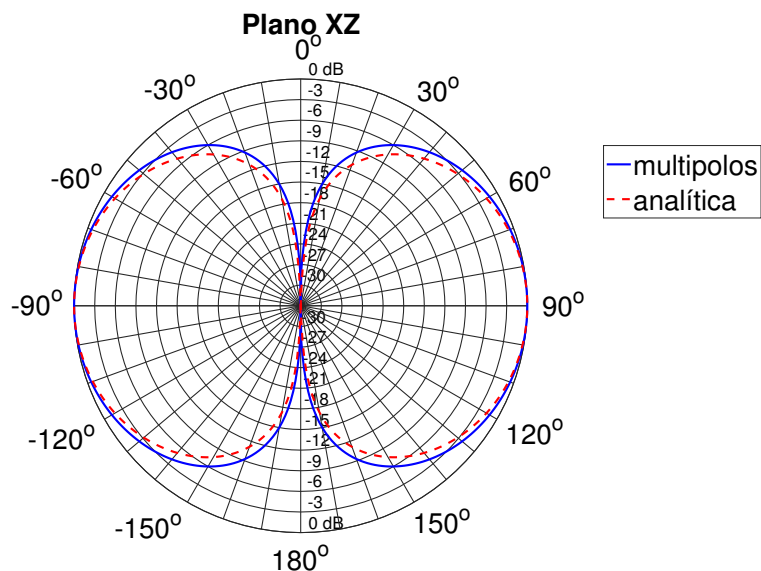


Figura 5.5: Diagrama de radiação no plano xz do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.

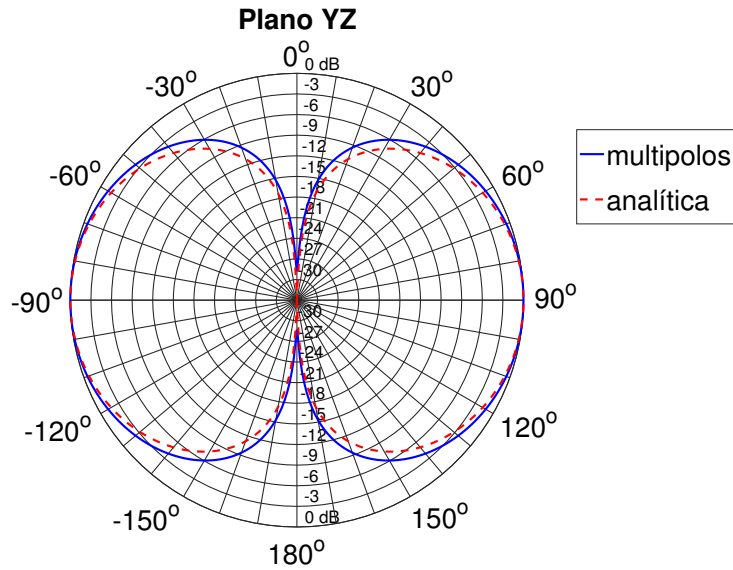


Figura 5.6: Diagrama de radiação no plano yz do dipolo de meia-onda em 10 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e sua solução analítica.

5.3.2 Análise do Número de Coeficientes da Expansão

O cálculo do número de multipolos necessários para a convergência da transformada NFF tem sido realizado de acordo com a Equação 4.20. No entanto, uma análise foi realizada para o dipolo de meia-onda neste trabalho, apontando para uma nova reflexão a respeito de como este método se comporta para diferentes quantidades de multipolos considerados na expansão. Já era conhecido que as amplitudes de multipolos de ordem mais alta podem inserir erro numérico à expansão, por isso o ideal é se utilizar o número mínimo de coeficientes necessários para a convergência do método [24].

Diferente de outras expansões, que se tornam mais precisas quando o número de coeficientes são aumentados, a expansão em multipolos esféricos envolvidos nesta transformada NFF pode se tornar menos precisa ou até mesmo inconsistente quando são considerados coeficientes em excesso, como foi discutido na Seção 4.4. Todavia, observou-se que a convergência desta expansão pode acontecer a partir de um número de multipolos muito inferior ao proposto pela literatura. Do ponto de vista numérico, coeficientes em excesso pode significar menos precisão. Do ponto de vista computacional, calcular coeficientes em excesso significa desperdício de recurso computacional, que é tão exigido na aplicação desta transformada.

De acordo com a Equação 4.20, seriam necessários 143 coeficientes na expansão em multipolos para o dipolo de meia-onda em 10 GHz. Este número provém do valor de $n_{m\acute{a}x} = 11$. As Figuras de 5.7 a 5.10 apresentam alguns resultados no plano xy para diversos valores de $n_{m\acute{a}x}$. Observa-se que o resultado do plano xy para $n_{m\acute{a}x} = 1$ apresentou a melhor concordância. O valor do erro neste plano é desprezível nesta configuração, como pode ser consultado na Tabela 5.1. À medida que $n_{m\acute{a}x}$ aumentou, ou seja, o número de coeficientes da expansão aumentou, observou-se que os pólos do diagrama no plano xy em torno de 0° e 180° tenderam a se afastar da solução analítica em direção ao centro do diagrama. O gráfico da Figura 5.15 mostra que o plano xy , que possui formato omnidirecional, sofreu a menor variação para diferentes valores de $n_{m\acute{a}x}$ quando comparado aos demais planos. O valor do erro neste plano apresentou um comportamento praticamente constante para valores de $n_{m\acute{a}x}$ de 4 a 11.

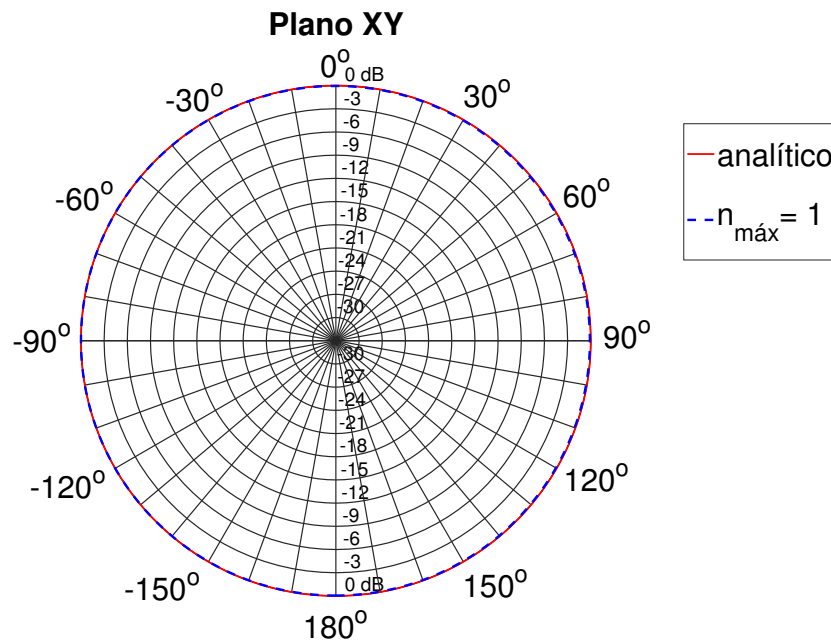


Figura 5.7: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{m\acute{a}x} = 1$.

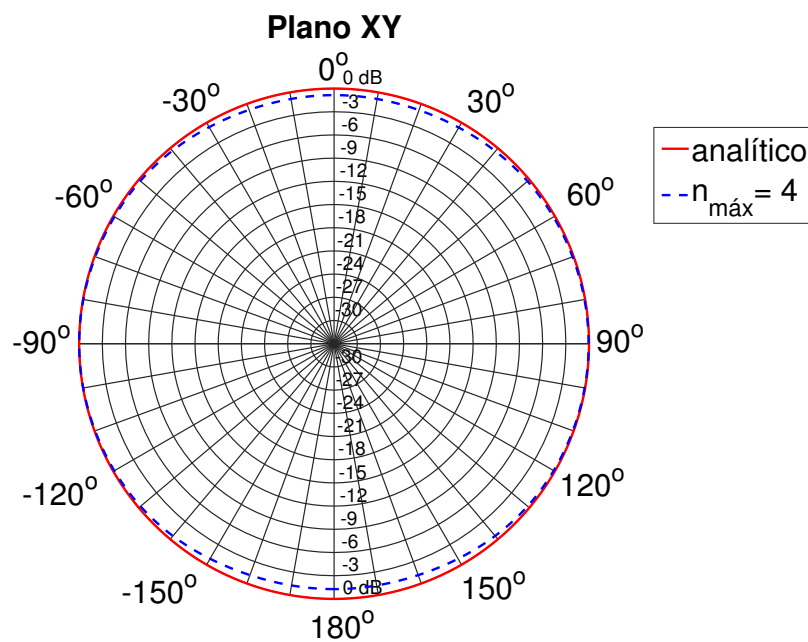


Figura 5.8: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{\text{máx}} = 4$.

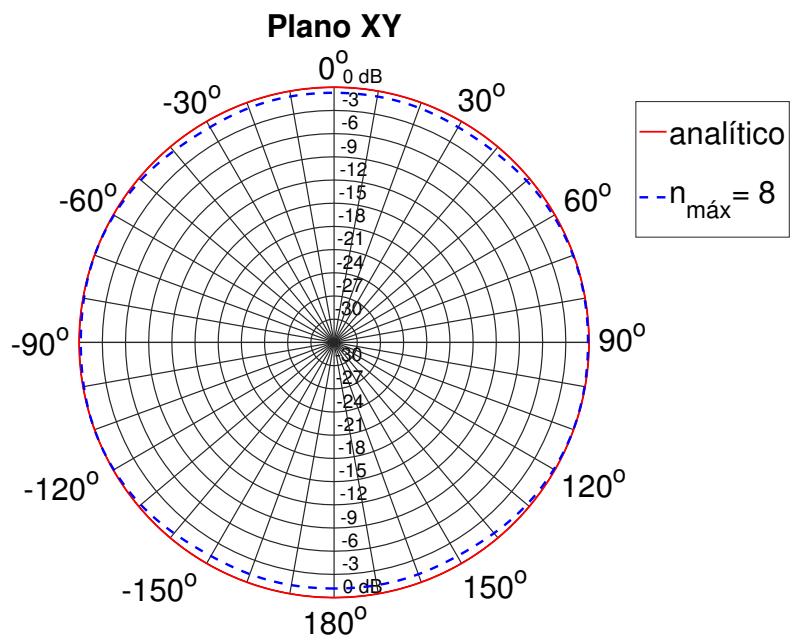


Figura 5.9: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{\text{máx}} = 8$.

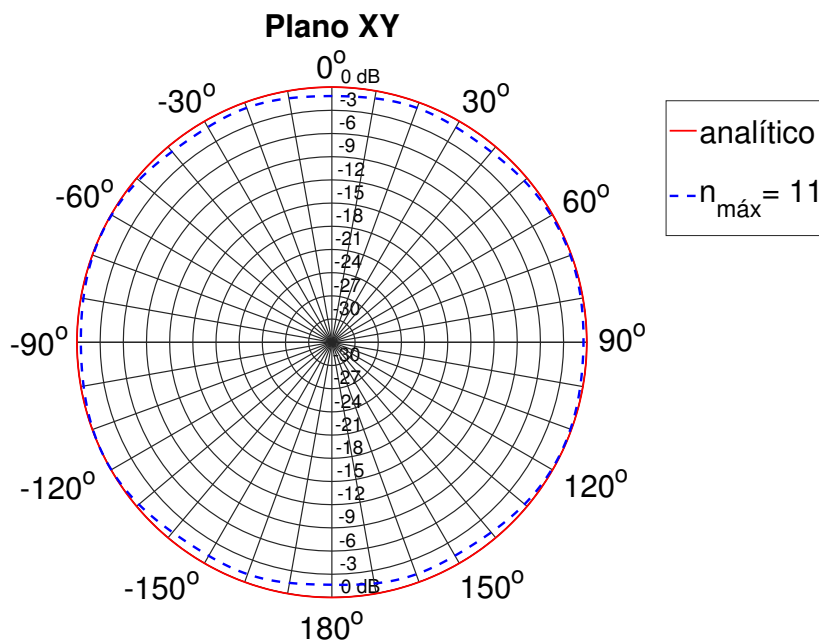


Figura 5.10: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para $n_{máx} = 11$.

As Figuras de 5.11 a 5.14 apresentam alguns resultados do teste de convergência no plano xz . De acordo com a Tabela 5.1, a configuração para $n_{máx} = 1$ gerou o menor erro também neste plano. Embora diagramas para $n_{máx}$ maiores, em especial o diagrama da Figura 5.12, apresentaram melhor concordância visual no geral, algumas variações acentuadas em torno de 0° e 180° influenciaram negativamente o valor do erro. De qualquer forma, a variação do erro não foi significativa nos planos xz e yz para diferentes valores de $n_{máx}$, como pode ser verificado na Tabela 5.1 e Figura 5.15. É importante ressaltar que o dipolo de meia-onda é uma antena filamentar e apresenta construção simples, o que pode ter influenciado a convergência a partir de poucos coeficientes na expansão.

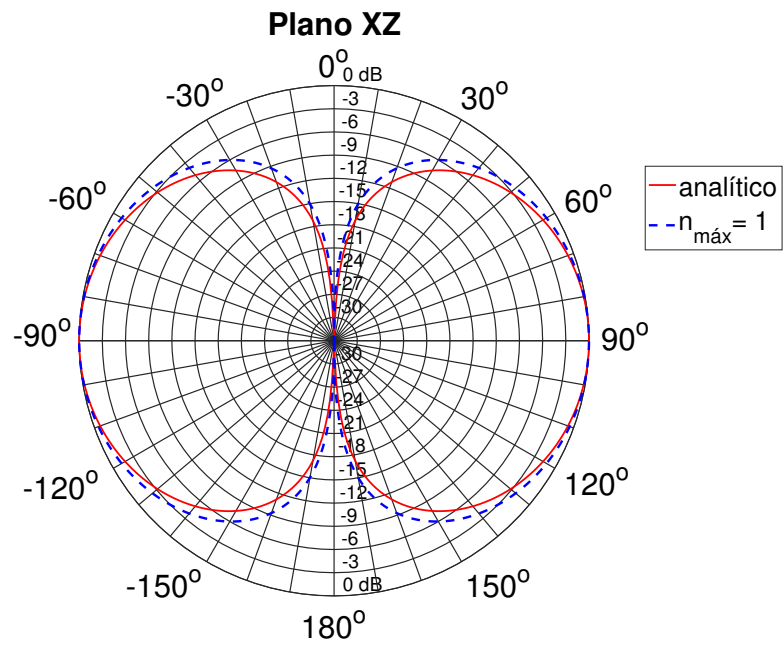


Figura 5.11: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{\text{máx}} = 1$.

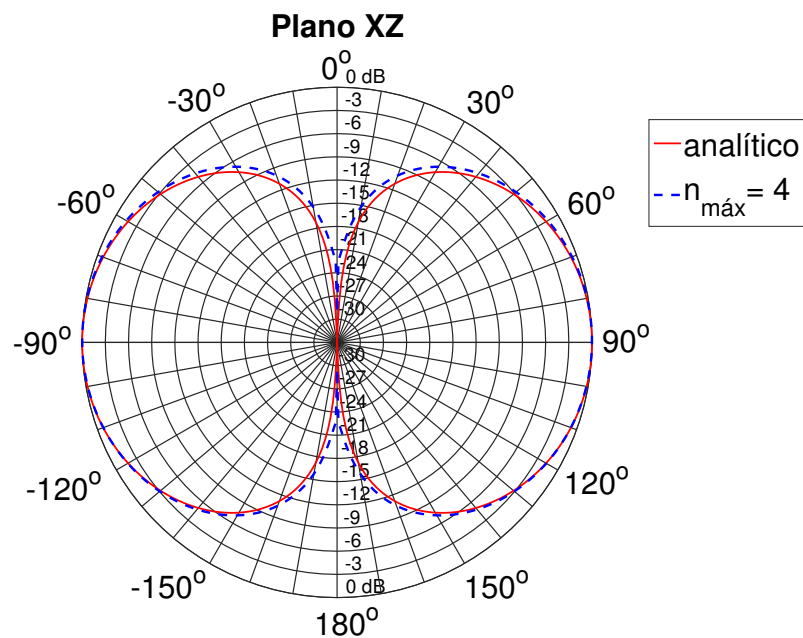


Figura 5.12: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{\text{máx}} = 4$.

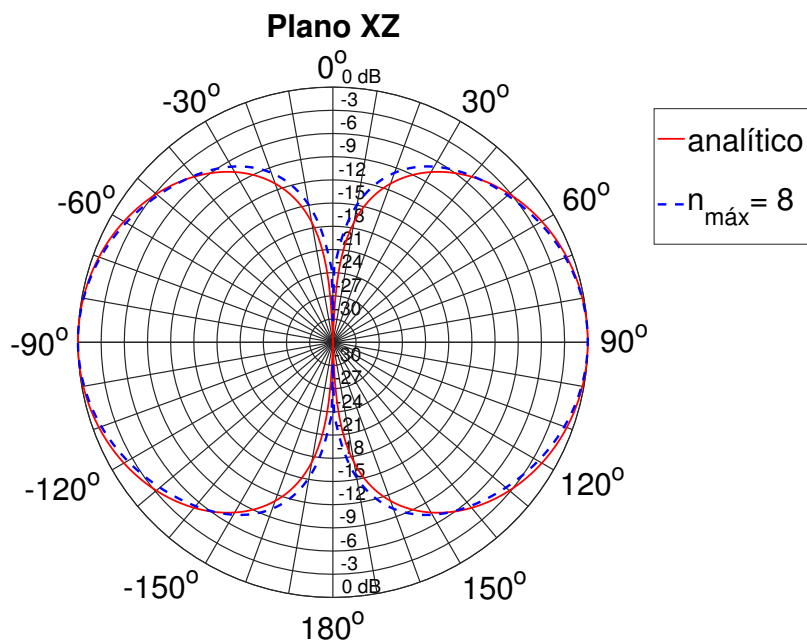


Figura 5.13: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{\text{máx}} = 8$.

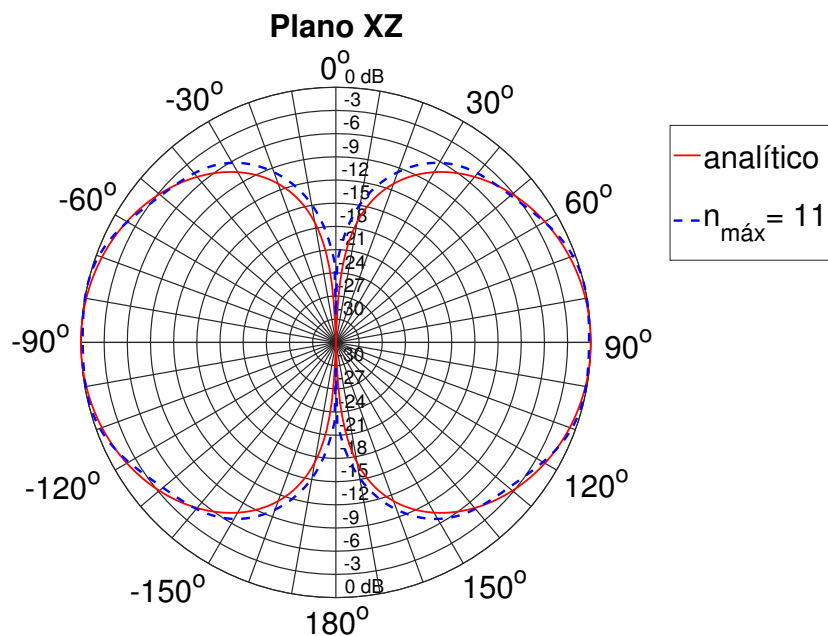


Figura 5.14: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xz para $n_{\text{máx}} = 11$.

Tabela 5.1: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução analítica e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.

$n_{m\acute{a}x}$	Plano xy	Plano xz	Plano yz
1	0,06673	1,83552	1,47013
2	0,95765	1,93817	1,81026
3	0,78118	2,06831	1,71168
4	0,65140	1,95870	1,79744
5	0,64140	2,35235	1,94166
6	0,63450	2,14970	1,81252
7	0,65064	1,84291	1,71838
8	0,66941	1,88200	1,75727
9	0,71750	1,95364	1,68058
10	0,73771	2,03256	1,72071
11	0,78528	2,11659	1,75262

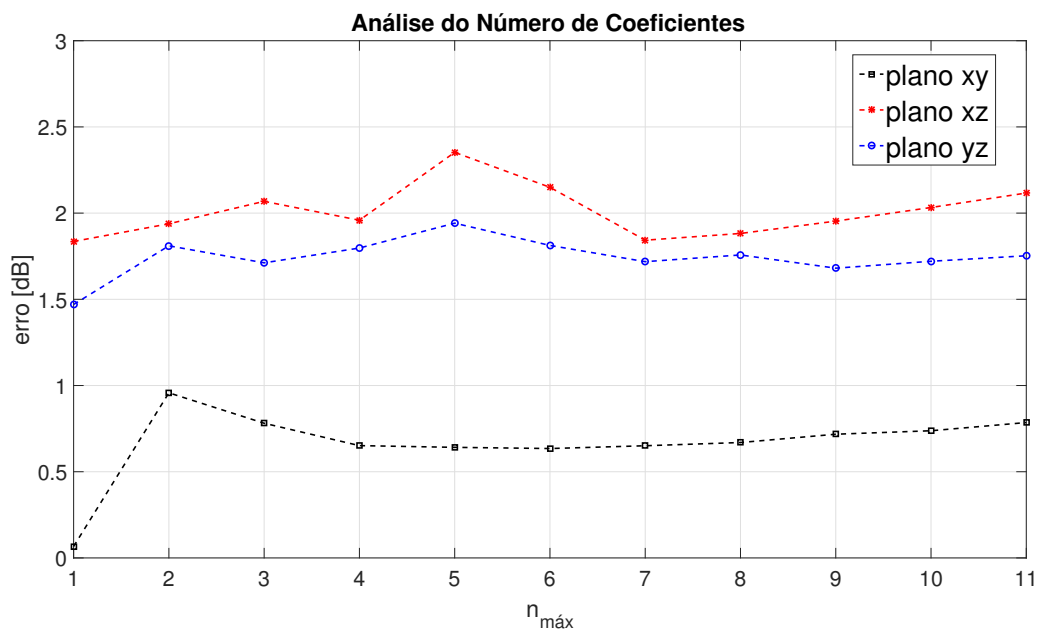


Figura 5.15: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução analítica e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.

Observa-se que, neste estudo de caso, foi possível obter o diagrama de radiação da antena a partir do número mínimo de coeficientes da expansão em multipolos esféricos

esféricos. Isto significa considerar 3 coeficientes em vez dos 143 sugeridos pela literatura. A convergência com um número inferior de termos pode ter a ver com a geometria simples dos diagramas de radiação, que podem talvez necessitar da combinação de poucos multipolos para serem obtidos. De qualquer forma, uma vez que o cálculo das amplitudes de cada coeficiente da expansão compreende a maior parcela do custo computacional do método, esta redução influencia drasticamente o tempo de simulação da antena. A simulação para $n_{m\acute{a}x} = 1$ gastou cerca de 2% do tempo de simulação do caso onde $n_{m\acute{a}x} = 11$. A Figura 5.16 permite identificar o comportamento exponencial do tempo de simulação em função de $n_{m\acute{a}x}$.

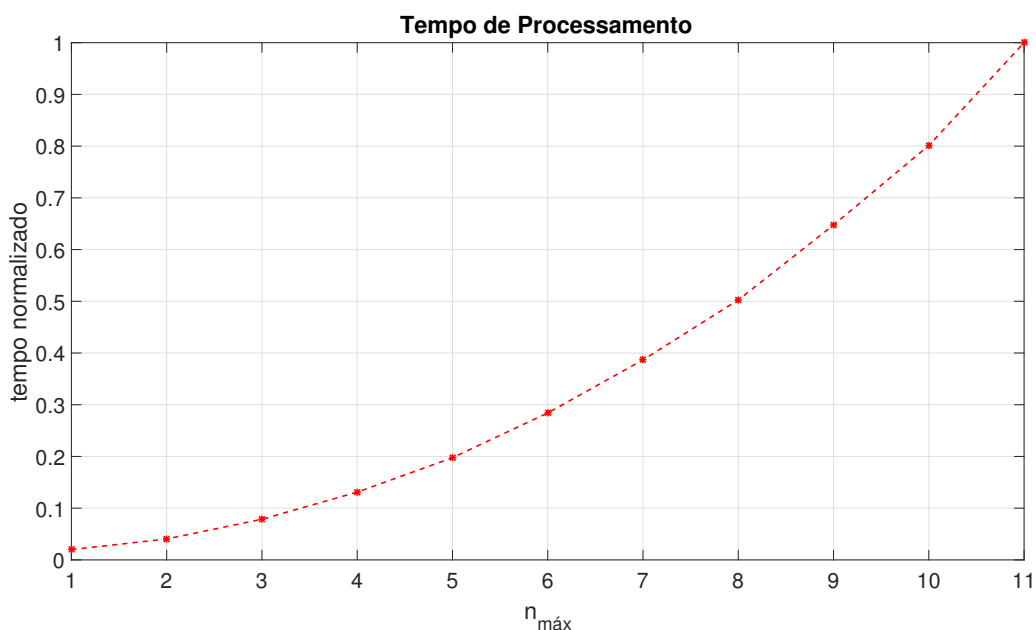


Figura 5.16: Tempo de processamento da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com diversos valores de $n_{m\acute{a}x}$ para a antena dipolo de meia-onda em 10 GHz.

5.3.3 Programação Paralela

Os códigos utilizados neste trabalho foram paralelizados anteriormente em [26], através da implementação do *OpenMP* em C++. *OpenMP* é uma interface utilizada para programação em multiprocessadores, que consiste de um conjunto de instruções e uma biblioteca de funções de suporte. O código com *OpenMP* distribui iterações distintas para serem executadas paralelamente por cada unidade disponível de um mesmo multiprocessador. Esta implementação acelera a execução do código através da utilização mais eficiente dos recursos computacionais disponíveis [27].

Como contribuição deste trabalho de mestrado, o MPI (Interface para Transferência de Mensagens, do inglês *Message-Passing Interface*) foi implementado aos códigos da transformada NFF por multipolos esféricos. Esta interface possibilita a execução do programa em um *cluster*, que é um conjunto de processadores interligados por uma rede e que se comporta como um único servidor. A utilização de um *cluster* aumenta significativamente o recurso computacional disponível, acelerando a execução do programa de forma considerável [27].

Além da implementação do MPI, o *OpenMP* foi mantido neste trabalho. Em muitos casos, programas híbridos utilizando simultaneamente MPI e *OpenMP* são executados mais rapidamente que programas usando somente MPI. Desta forma, as iterações do programa são distribuídas igualmente entre cada processador do *cluster* por meio do MPI e redistribuídos internamente entre as unidades de um mesmo processador pelo *OpenMP*. Cada conjunto distinto de iterações entregue a cada máquina do *cluster* pelo MPI é chamado de processo ou tarefa [27].

A Figura 5.17 apresenta o tempo de processamento da transformada NFF por multipolos esféricos aplicada à antena dipolo de meia-onda em 10 GHz com $n_{máx} = 11$ em código com paralelização híbrida *OpenMP*/MPI. Observa-se o ganho expressivo gerado pela utilização de um *cluster*, de forma que a execução paralela em 10 processos MPI gastou pouco mais de 10% do tempo gasto por um único processo.

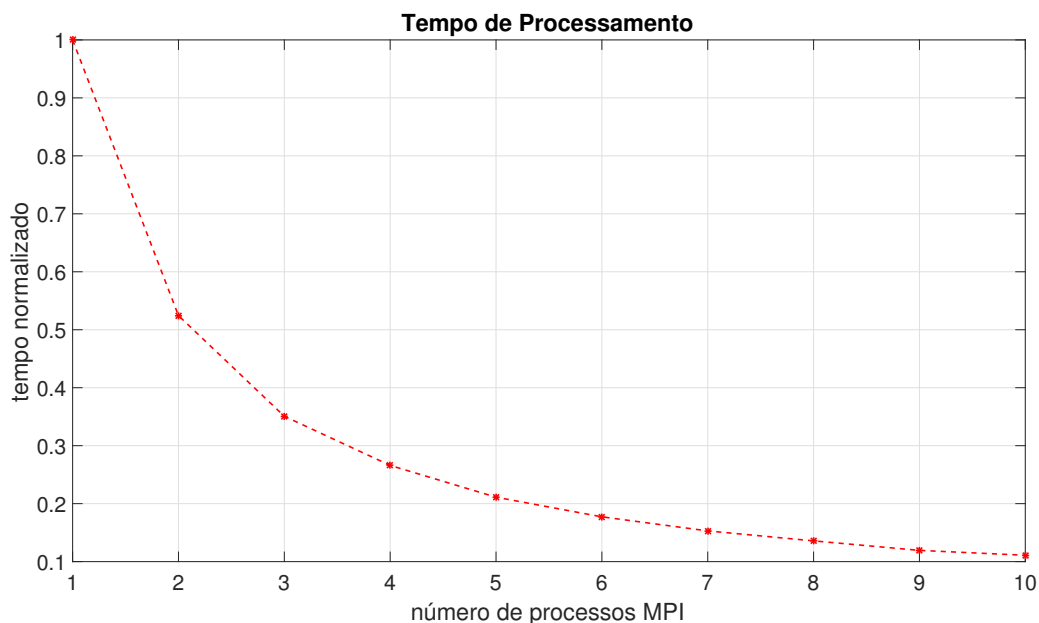


Figura 5.17: Tempo de processamento da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com paralelização híbrida *OpenMP*/MPI.

5.4 Antena Impressa *Quasi-Yagi*

Após se realizar várias simulações e testes com a transformada NFF baseada em multipolos esféricos utilizando-se a antena dipolo de meia-onda, o método foi aplicado a uma antena impressa. Foi escolhida a antena impressa de dupla banda *quasi-yagi* proposta em [2] para aplicações em RFID e WLAN. Esta antena foi escolhida a fim de se validar a precisão do método para antenas impressas. A antena *quasi-yagi* é apresentada na Figura 5.19 com todas as suas dimensões. A dimensão de 46 mm é paralela ao eixo x , a dimensão de 60 mm é paralela ao eixo y e a espessura do substrato é paralela ao eixo z . A região hachurada representa o plano terra, que é particionado. Escolheu-se o substrato FR-4 com 1,25 mm de espessura e permissividade elétrica relativa de 4,5. As simulações realizadas ao longo deste trabalho consideraram substrato sem perdas. A Figura 5.18 exhibe a perda de retorno da antena *quasi-yagi* medida fisicamente em [2]. Observa-se duas bandas com frequência de ressonância em 0,9 GHz e 2,4 GHz.

Utilizou-se o método FDTD com condição de contorno absorvente WP-PML no cálculo dos momentos de corrente elétrica e magnética sobre a superfície de Huygens [12]. A discretização espacial foi de $\Delta x = \Delta y = 0,5$ mm e $\Delta z = 0,417$ mm. Foi definido um incremento temporal Δt de 0,619 ps. Todas estas configurações foram realizadas com base nas condições de convergência do método FDTD utilizado.

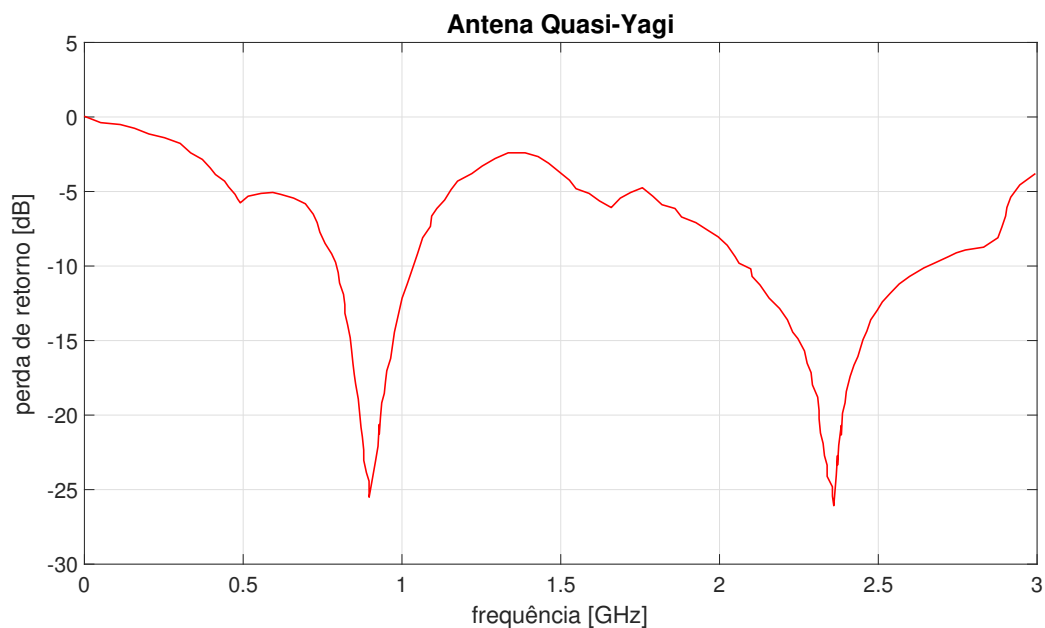


Figura 5.18: Perda de retorno medida da antena impressa *quasi-yagi* [2].

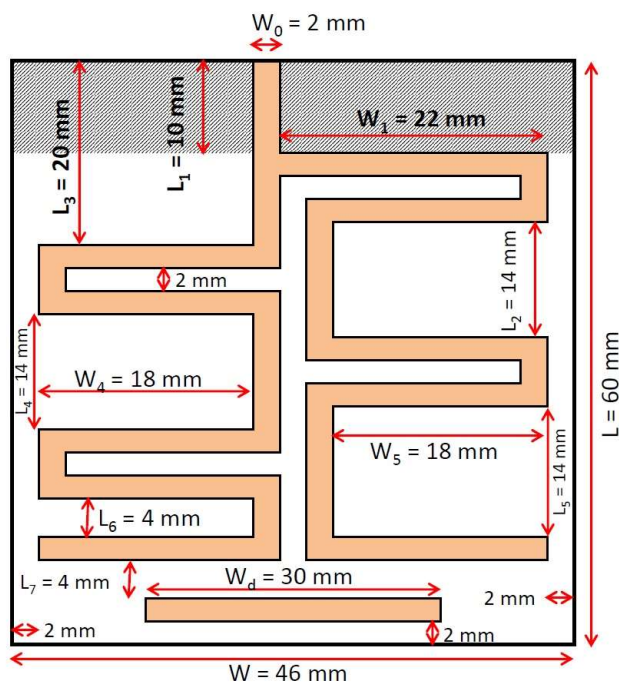
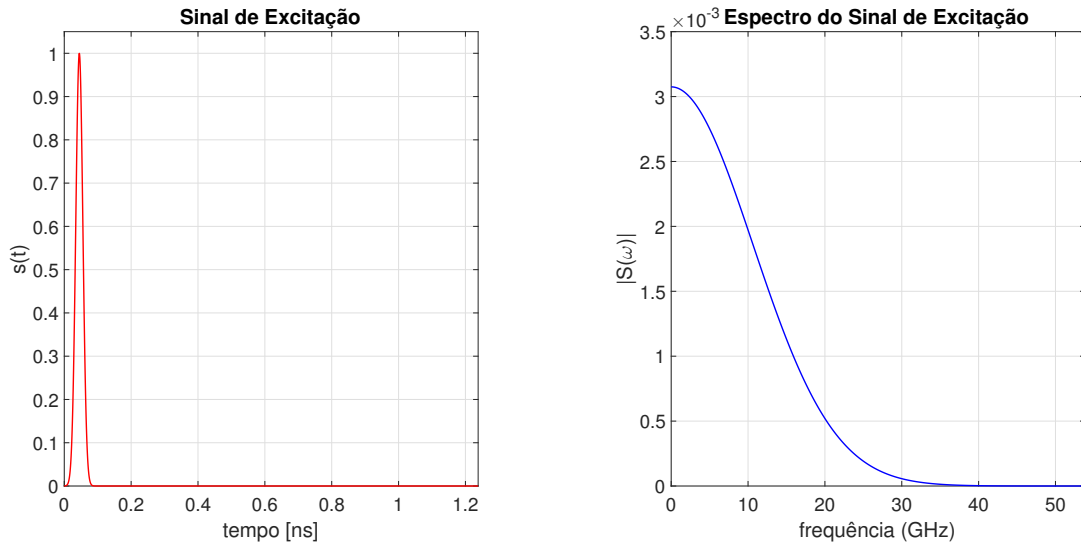


Figura 5.19: Esboço da antena *quasi-yagi* com todas as medidas.

O domínio espacial de simulação da antena *quasi-yagi* com FDTD/WP-PML é composto por $180 \times 180 \times 200$ cubos de Yee nas direções x , y e z respectivamente, dentro do qual a antena está centralizada. Os momentos de corrente elétrica e magnética foram calculados sobre uma superfície cúbica de Huygens centralizada na origem e composta por $152 \times 152 \times 182$ cubos de Yee. Dentro do domínio espacial, a camada composta pelos 5 últimos cubos de Yee foi definida com condição absorvente WP-PML. O sinal de excitação da antena é um pulso gaussiano gerado pela Equação 5.2, a mesma utilizada no estudo de caso do dipolo de meia-onda. A Figura 5.20(a) exibe o pulso gaussiano de excitação aplicado à microfita de entrada da antena *quasi-yagi*. Neste caso, o sinal todo possui um total de 2000 instantes de tempo. O espectro de frequência deste pulso é mostrado na Figura 5.20(b).

Após os momentos de corrente descrevendo o campo próximo terem sido calculados através do FDTD/WP-PML, os mesmos foram aplicados à transformada de campo próximo-campo distante baseada em multipolos esféricos. Inicialmente, foram considerados 3 multipolos na expansão, que provém do limite do somatório $n_{m\acute{a}x} = 1$. A distância de referência na região de campo distante foi definida como 80 mm a partir da origem do sistema de coordenadas. O índice " l " dos somatórios utilizados no cálculo



(a) Sinal de excitação no domínio do tempo.

(b) Espectro de frequência do sinal de excitação.

Figura 5.20: Sinal de excitação aplicado à antena quasi-yagi.

das amplitudes dos multipolos nas Equações 4.39 e 4.40 foi limitado em 360, pois a partir deste ponto as funções integrais das Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51 são nulas conforme definição do método. Com exceção de $n_{máx}$, que será discutido posteriormente, estes parâmetros foram calculados de acordo com os critérios de convergência da transformada descritos na Seção 4.3. A seguir são apresentados alguns resultados e uma série de análises importantes.

5.4.1 Resultados Iniciais

As Figuras de 5.21 a 5.23 apresentam os diagramas de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz. As soluções de referência foram geradas pelo programa de simulação de antenas CST no modo *Frequency Domain*. Os diagramas gerados a partir da transformada por multipolos esféricos acompanham a solução do CST para esta frequência. Já as Figuras de 5.24 a 5.26 apresentam os diagramas de radiação para a frequência de 1,9 GHz. Observa-se que a solução por meio da transformada baseada em multipolos esféricos não acompanhou a solução do CST e tampouco demonstrou uma tendência significativa de aproximação quanto aos detalhes do contorno dos diagramas. A mesma discrepância ocorreu na frequência de 2,4 GHz, como pode ser observado nos diagramas de radiação das Figuras de 5.27 a 5.29. No entanto, o formato dos diagramas apresentam certa semelhança com a referência no caso de 2,4 GHz. Como o contorno dos diagramas são bastante suaves, não há evidências suficientemente fortes que permitam

declarar a existência de uma tendência rumo à convergência. Portanto, as simulações com as configurações inicialmente adotadas para o método FDTD/WP-PML em conjunto com a transformada por multipolos esféricos convergiram plenamente para o caso da frequência mais baixa e não convergiram para as frequências mais elevadas dentro da faixa em análise. Uma série de análises com o intuito de levantar as possíveis causas desta divergência para as frequências de 1,9 GHz e 2,4 GHz são apresentadas nas próximas seções.

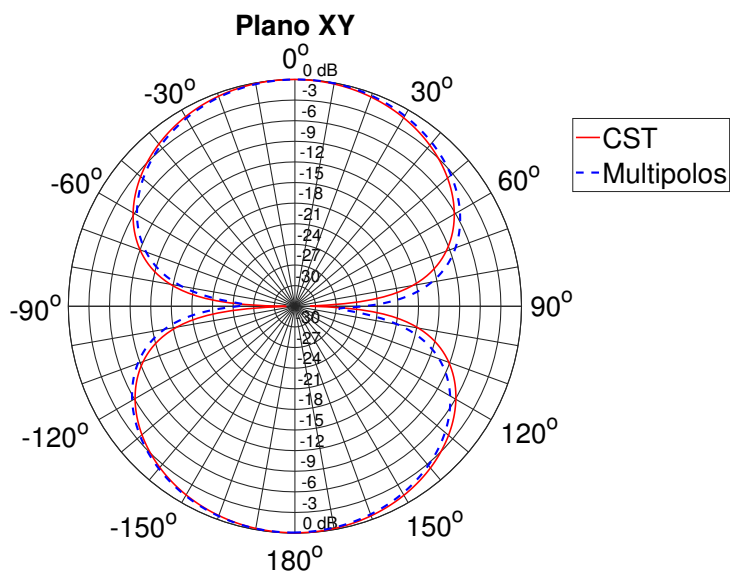


Figura 5.21: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

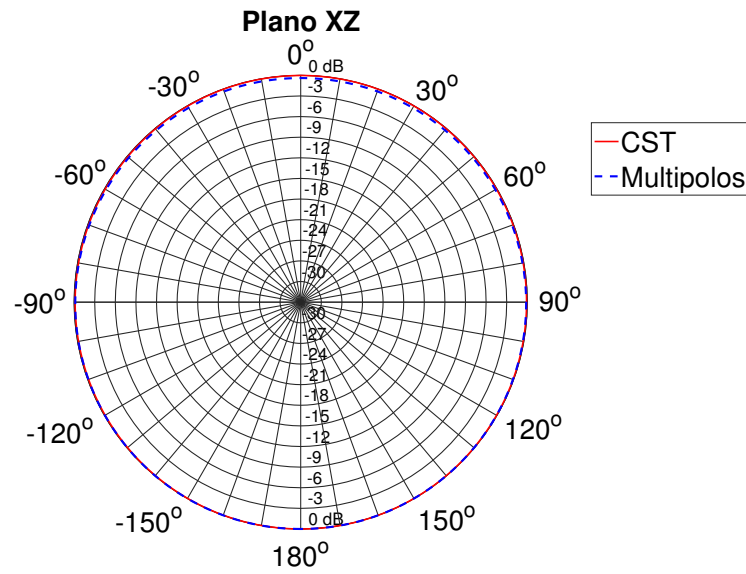


Figura 5.22: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

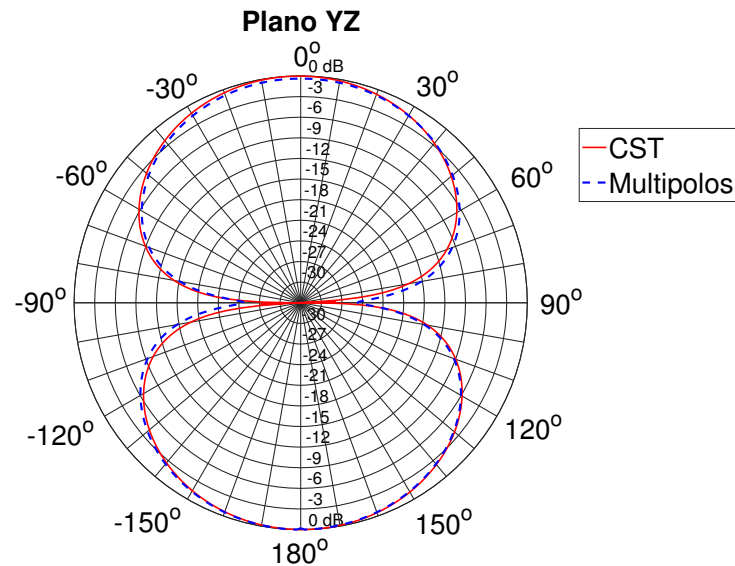


Figura 5.23: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

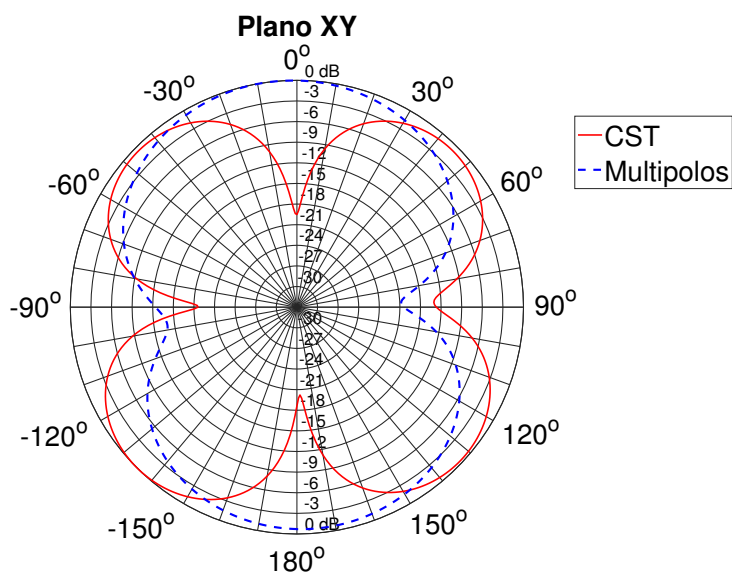


Figura 5.24: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

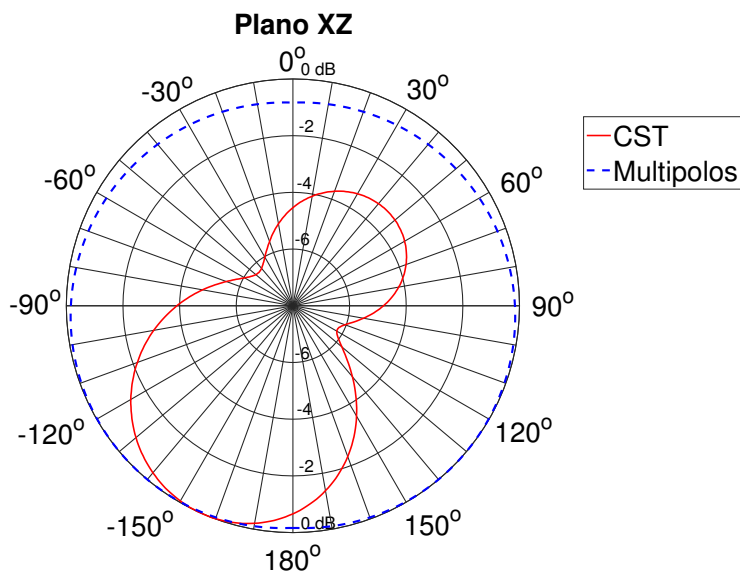


Figura 5.25: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

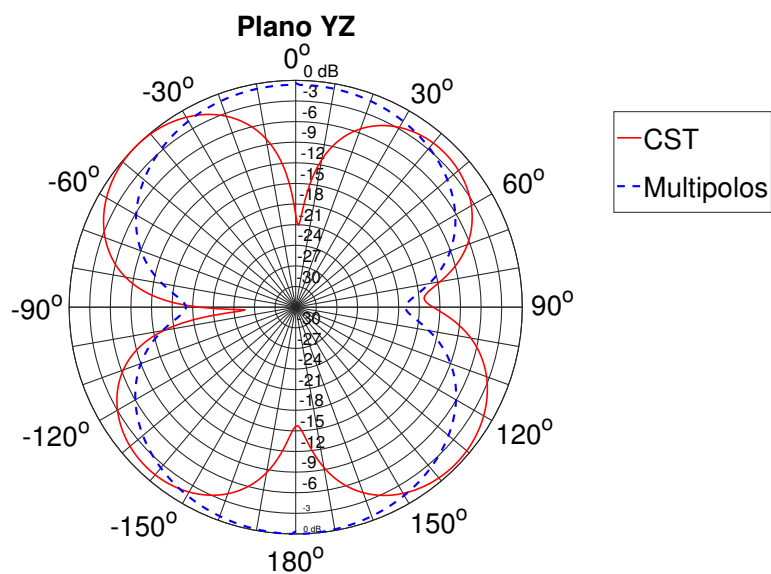


Figura 5.26: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

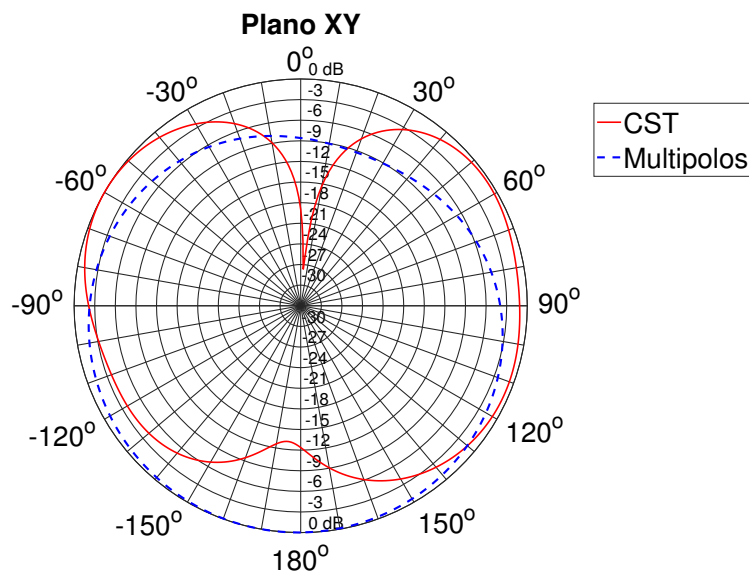


Figura 5.27: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

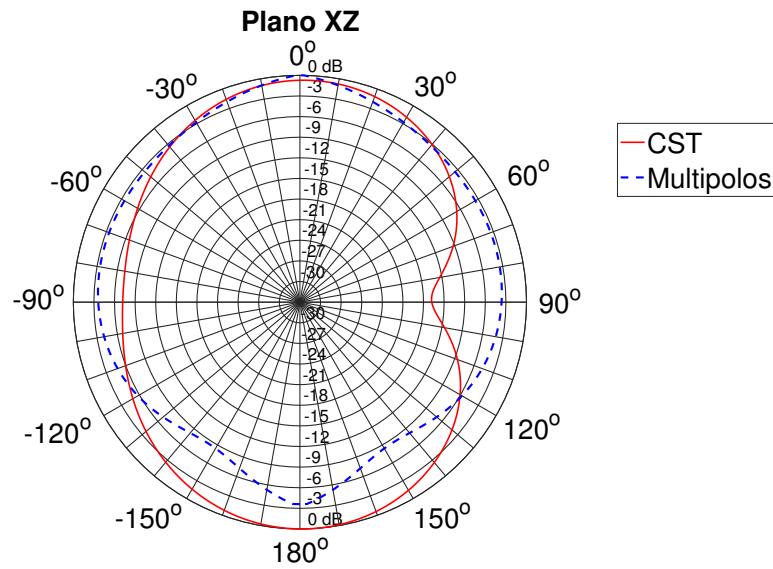


Figura 5.28: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

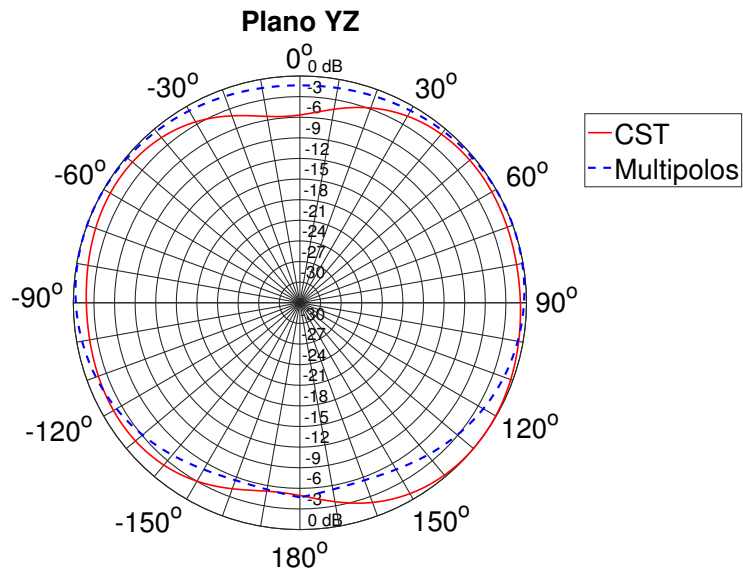


Figura 5.29: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 2000 instantes de tempo.

5.4.2 Análise do Número de Coeficientes da Expansão

Uma análise da transformada foi realizada com a antena *quasi-yagi* variando-se o número de coeficientes considerados na expansão em multipolos esféricos. As Figuras de 5.30 a 5.38 apresentam os resultados na frequência de 0,9 GHz. O caso para $n_{máx} = 1$ foi apresentado anteriormente nas Figuras de 5.21 a 5.23. Observa-se que à medida que $n_{máx}$ aumenta, ou seja, a quantidade de coeficientes na expansão em multipolos aumenta, o diagrama de radiação vai se deformando. O valor de $n_{máx}$ calculado de acordo com a literatura seria 11. No entanto, observa-se que valores menores apresentam melhor resultado, como o caso de $n_{máx} = 1$, que demonstrou grande precisão utilizando o número mínimo de coeficientes. A Tabela 5.2 contém a raiz do erro médio quadrático para todos os caso de $n_{máx}$ entre 1 e 11. O gráfico do erro na Figura 5.39 permite observar que o erro aumenta significativamente com os valores menores de $n_{máx}$ e depois tende a se tornar mais constante.

As Figuras de 5.40 a 5.48 apresentam os resultados em 1,9 GHz. O caso para $n_{máx} = 1$ foi apresentado anteriormente nas Figuras de 5.24 a 5.26. Observa-se que os diagramas se deformam à medida que o número de coeficientes da expansão aumenta. No entanto, o resultado não converge em nenhum dos casos. A Tabela 5.3 e o gráfico correspondente da Figura 5.39 contém a raiz do erro médio quadrático para todos os casos de $n_{máx}$ entre 1 e 11. Neste intervalo, o erro tende a ser bastante estável em todas as situações analisadas.

Por fim, o teste de convergência em 2,4 GHz pode ser verificado através das Figuras de 5.40 a 5.38. O caso para $n_{máx} = 1$ foi apresentado anteriormente nas Figuras de 5.27 a 5.29. Os planos xy e xz não demonstraram progresso na convergência do método. O plano yz apresentou um contorno bastante parecido com a referência em vários casos. Contudo, por possuir um contorno suave e os demais planos terem divergido, não há evidências suficientes para se afirmar que o método está convergindo nesta frequência. De fato, o caso para $n_{máx} = 1$ já possuía um formato parecido com a referência, não se podendo inferir a relação desta observação com o número de coeficientes da expansão. A Tabela 5.4 e o gráfico correspondente da Figura 5.59 contém a raiz do erro médio quadrático para todos os casos de $n_{máx}$ entre 1 e 11. Observa-se que o erro tem um comportamento praticamente constante em todos os casos analisados.

De acordo com os resultados para a frequência de 0,9 GHz, que convergiram, pode-se afirmar que o melhor resultado demandou um número de coeficientes muito mais baixo do que a literatura recomenda. Além disso, o resultado da simulação calculado de acordo com a literatura apresentou deformações. Para os casos com as

frequências mais elevadas em 1,9 GHz e 2,4 GHz, não foi observado nem mesmo sinal de melhora na convergência da transformada quando o número de coeficiente da expansão foi aumentado. Portanto, constata-se que quantidades de coeficientes menores têm apresentado melhores resultados e que a divergência em frequências mais altas não parece ser provocada pelo número de coeficientes considerados na expansão.

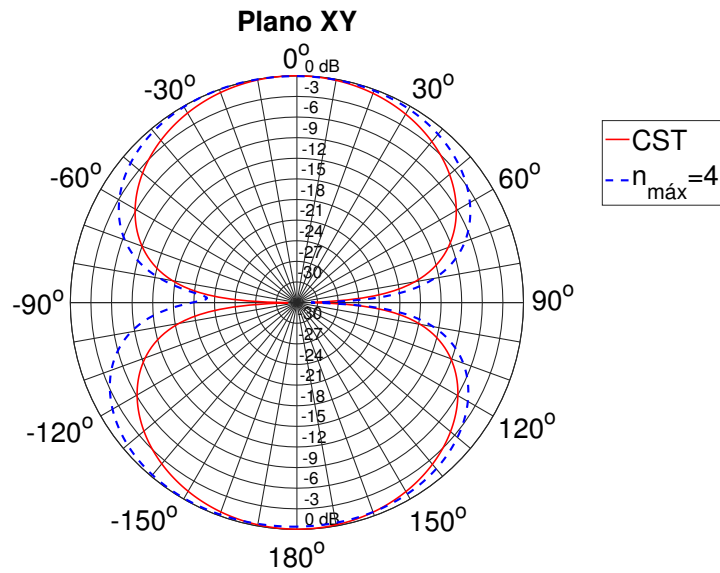


Figura 5.30: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

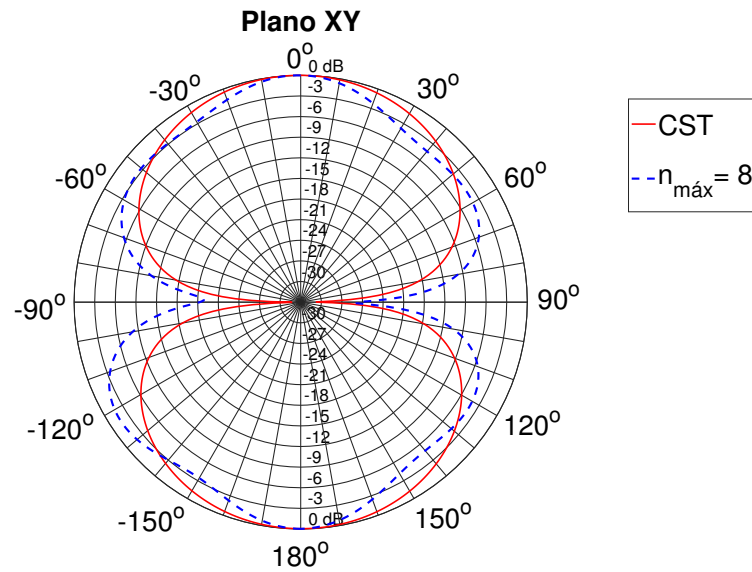


Figura 5.31: Diagrama de radiação no plano xy da antenna *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

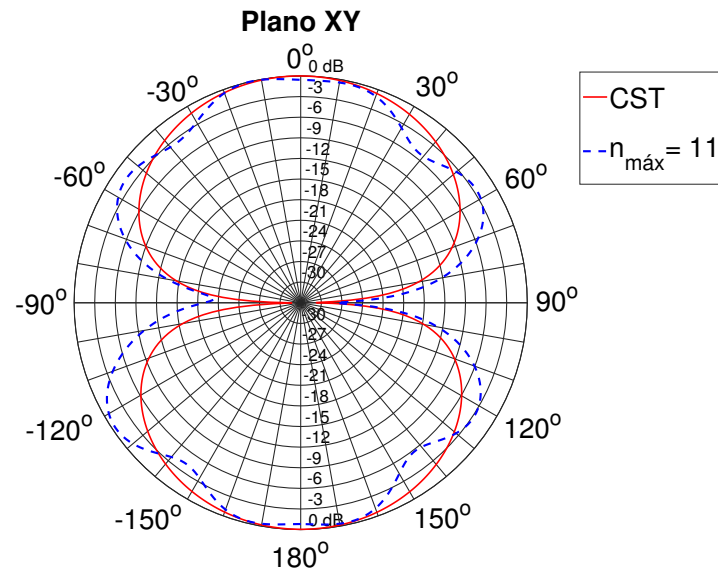


Figura 5.32: Diagrama de radiação no plano xy da antenna *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

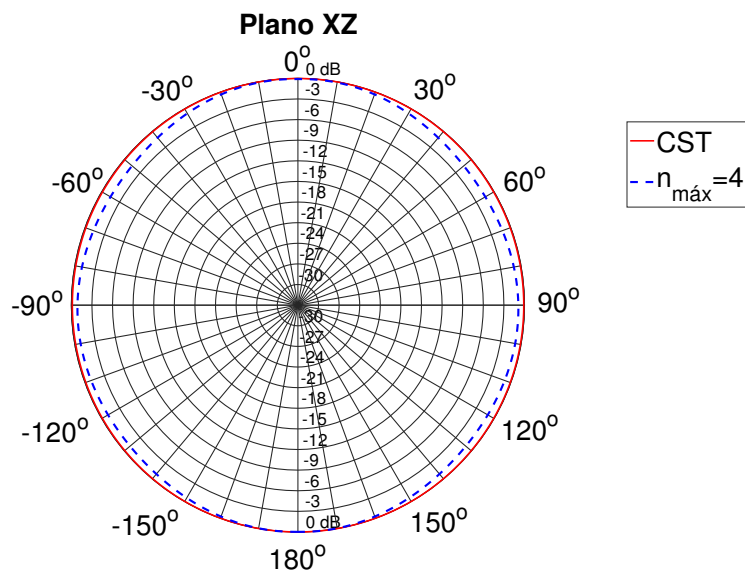


Figura 5.33: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

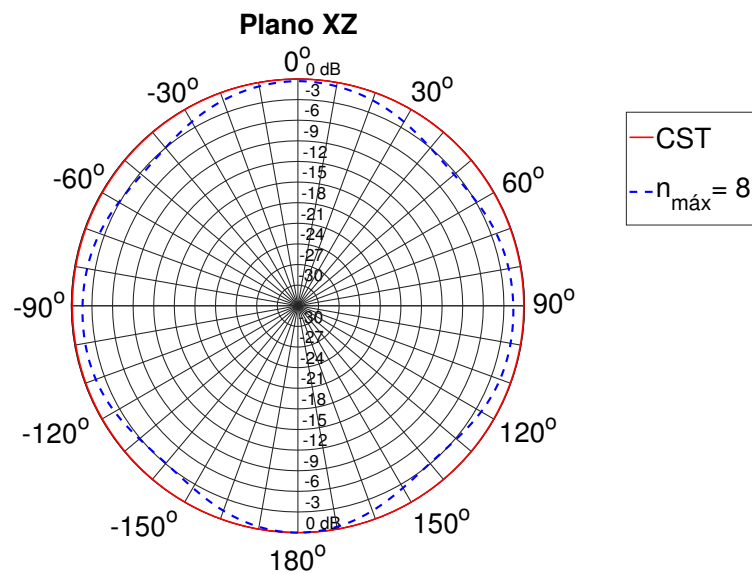


Figura 5.34: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

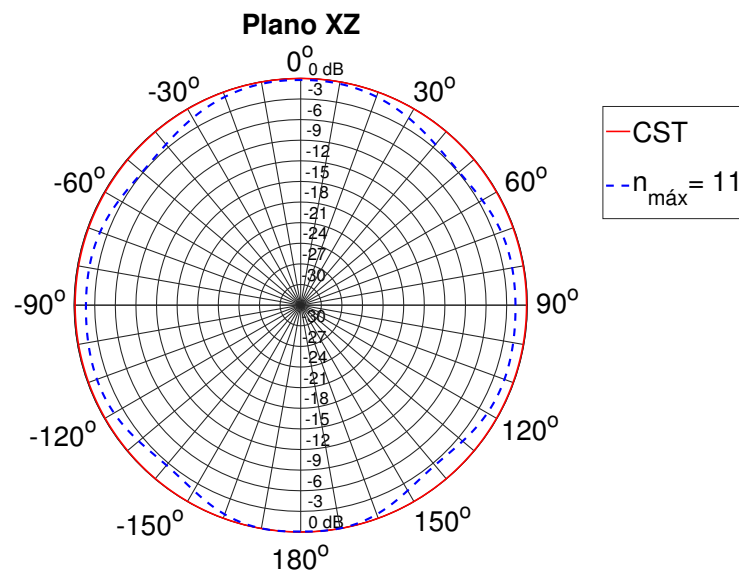


Figura 5.35: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

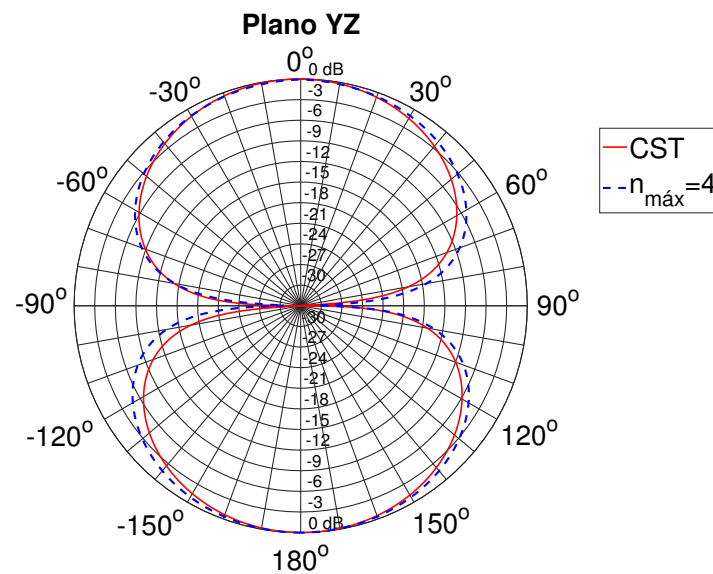


Figura 5.36: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

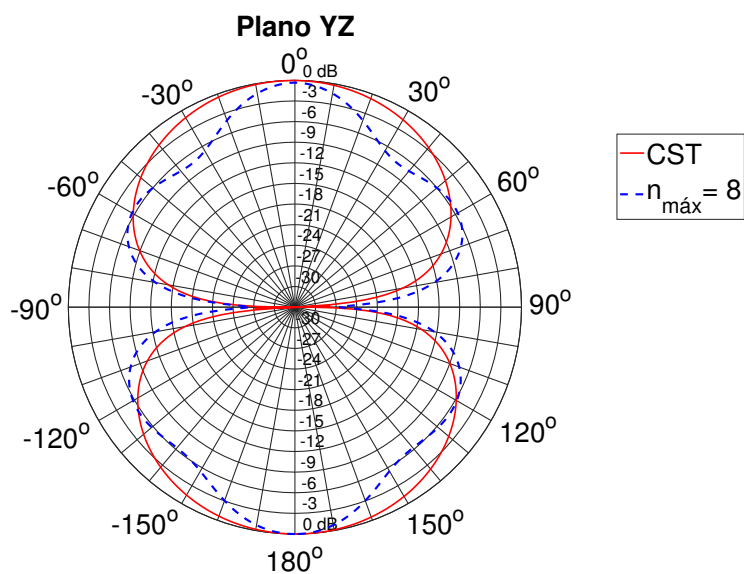


Figura 5.37: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

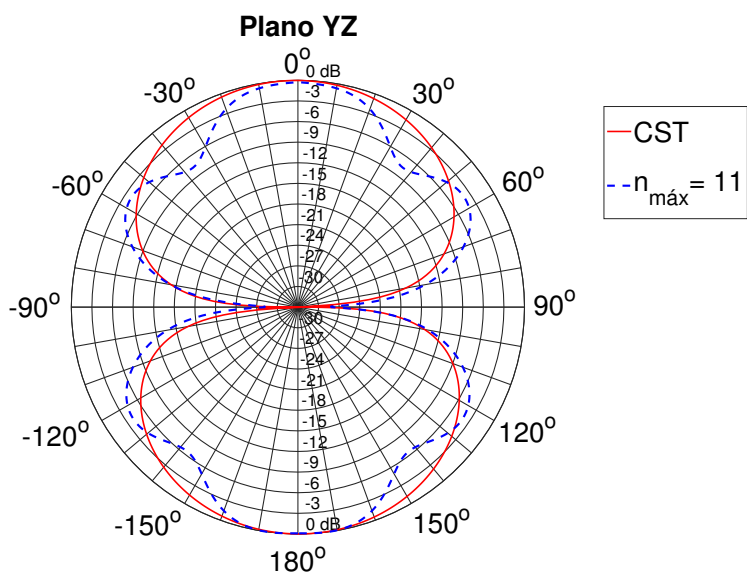


Figura 5.38: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

Tabela 5.2: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz.

$n_{m\acute{a}x}$	Plano xy	Plano xz	Plano yz
1	1,67067	0,17797	1,91092
2	1,77564	0,13272	1,81739
3	3,07674	0,54636	1,91122
4	2,84807	0,85173	1,84957
5	3,46992	1,49355	3,43269
6	3,60343	1,57693	3,39673
7	3,38049	2,13580	3,33984
8	3,43081	2,04472	3,37896
9	3,09289	2,01209	2,89684
10	3,04515	1,96605	2,92130
11	3,03070	1,68339	2,87881

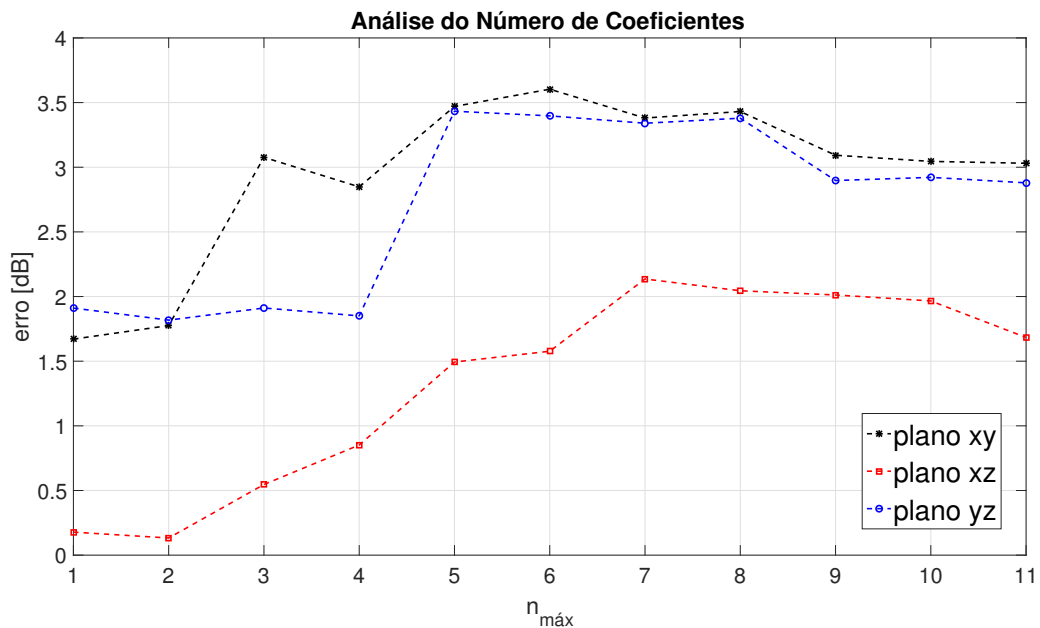
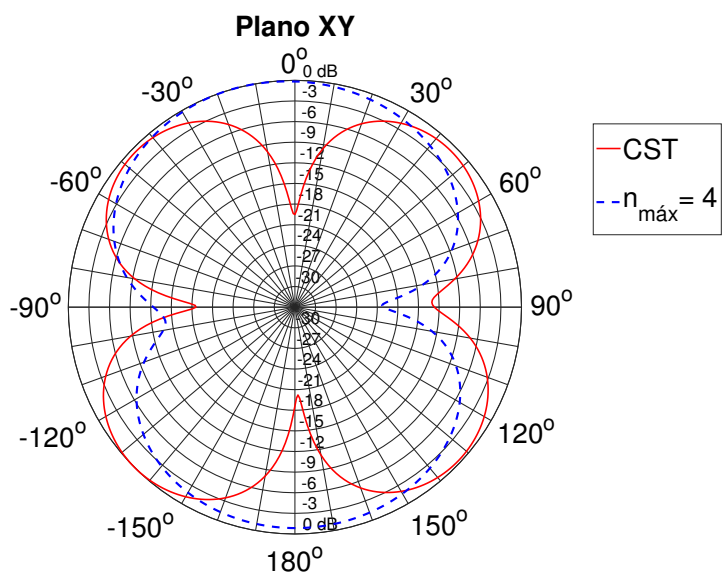


Figura 5.39: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz.



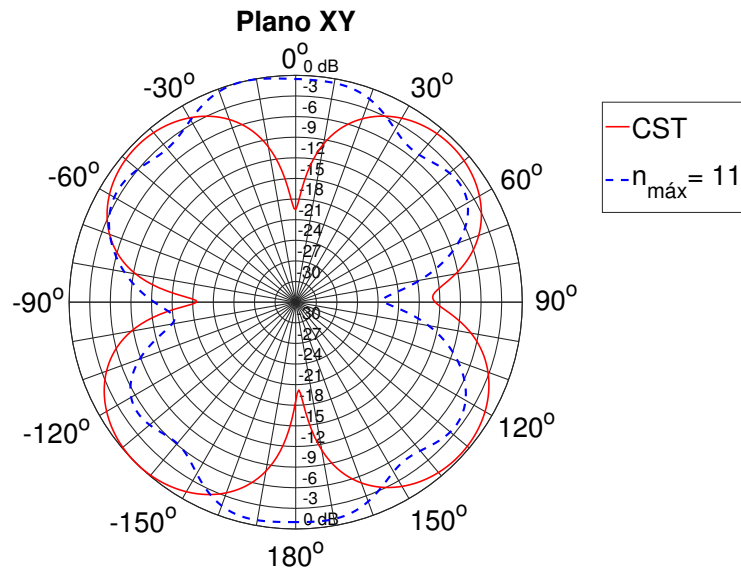


Figura 5.42: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

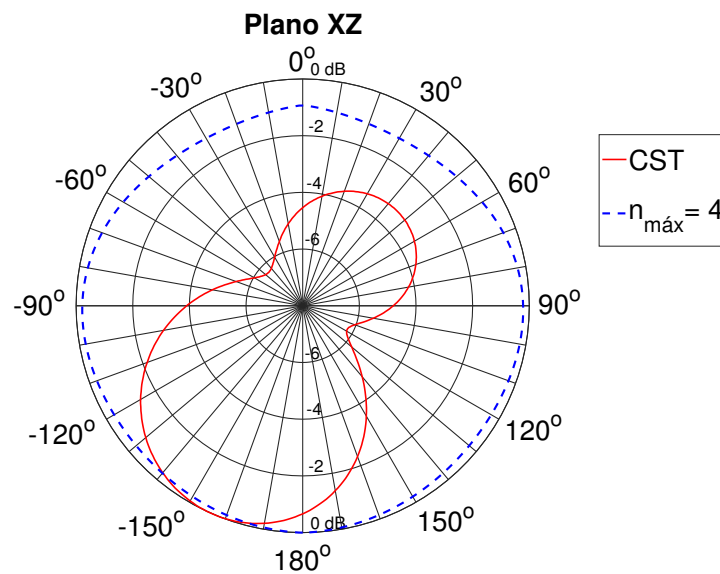


Figura 5.43: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

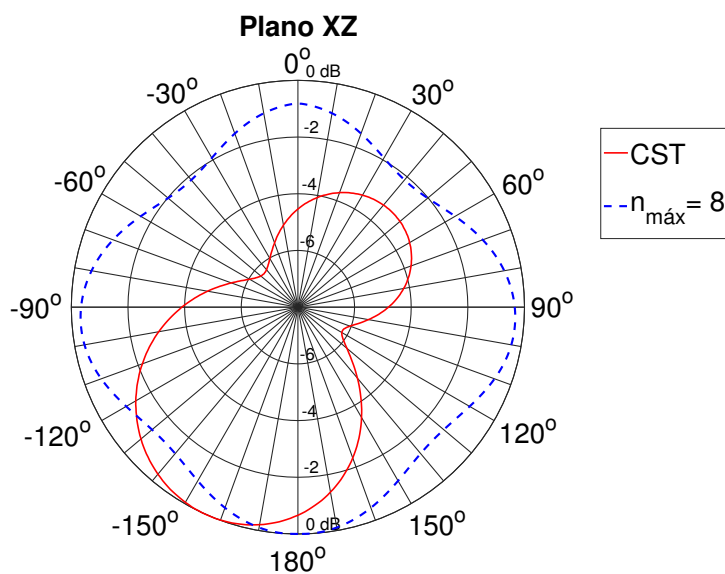


Figura 5.44: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

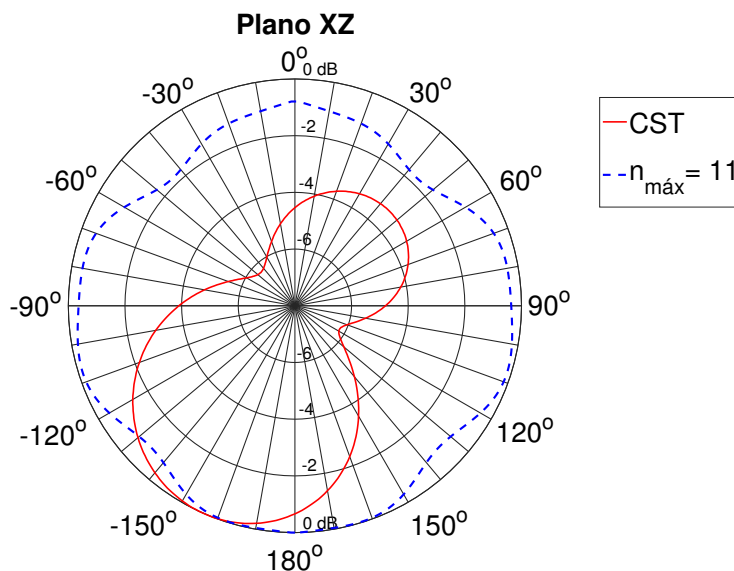


Figura 5.45: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

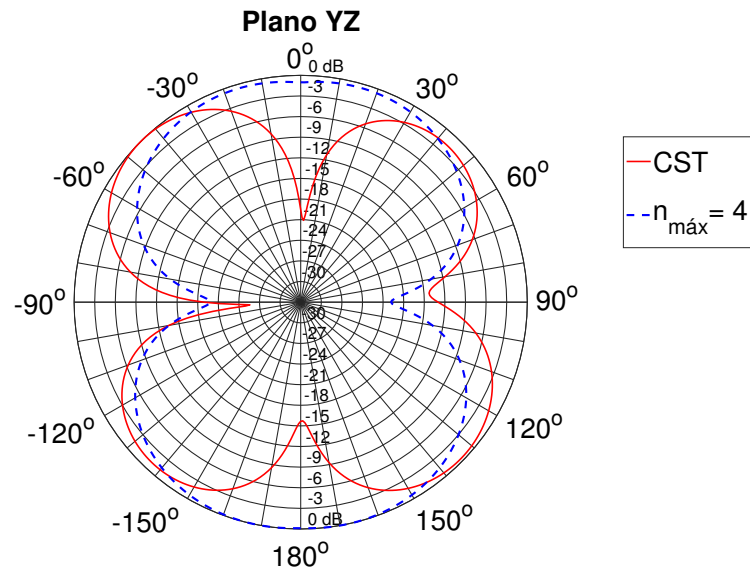


Figura 5.46: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

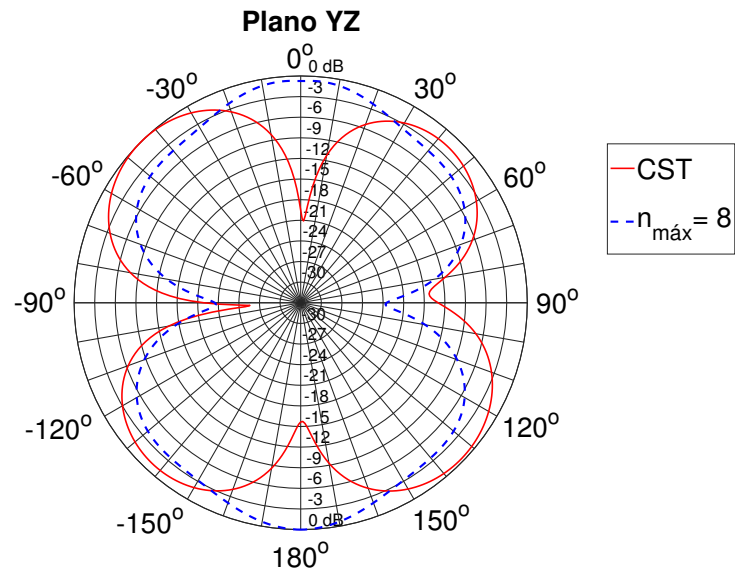


Figura 5.47: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

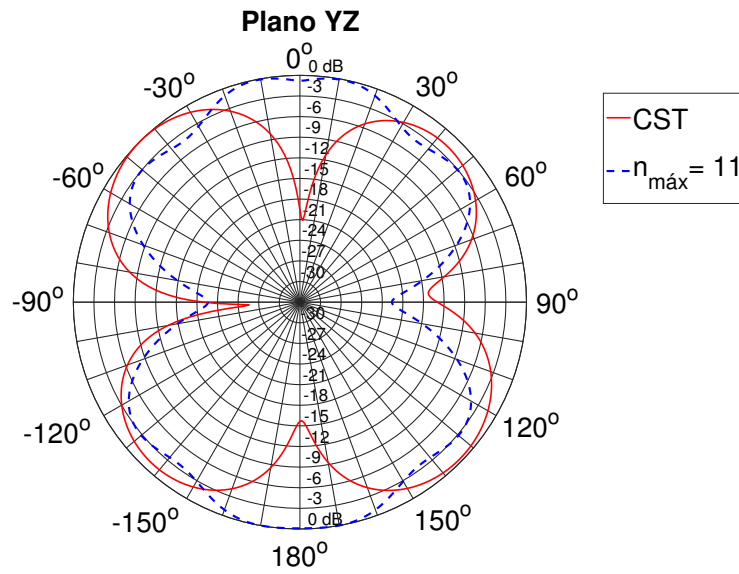


Figura 5.48: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

Tabela 5.3: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz.

$n_{máx}$	Plano xy	Plano xz	Plano yz
1	6,41948	3,86230	5,92453
2	6,50231	3,79362	5,83680
3	6,24842	3,62797	5,80334
4	6,20970	3,63131	5,87595
5	6,10440	3,37323	5,73169
6	6,11421	3,41216	5,73636
7	6,26336	3,20817	5,87896
8	6,29215	3,20082	5,90047
9	6,38088	3,29933	6,07662
10	6,04105	2,35477	6,86637
11	6,31250	3,47522	6,03251

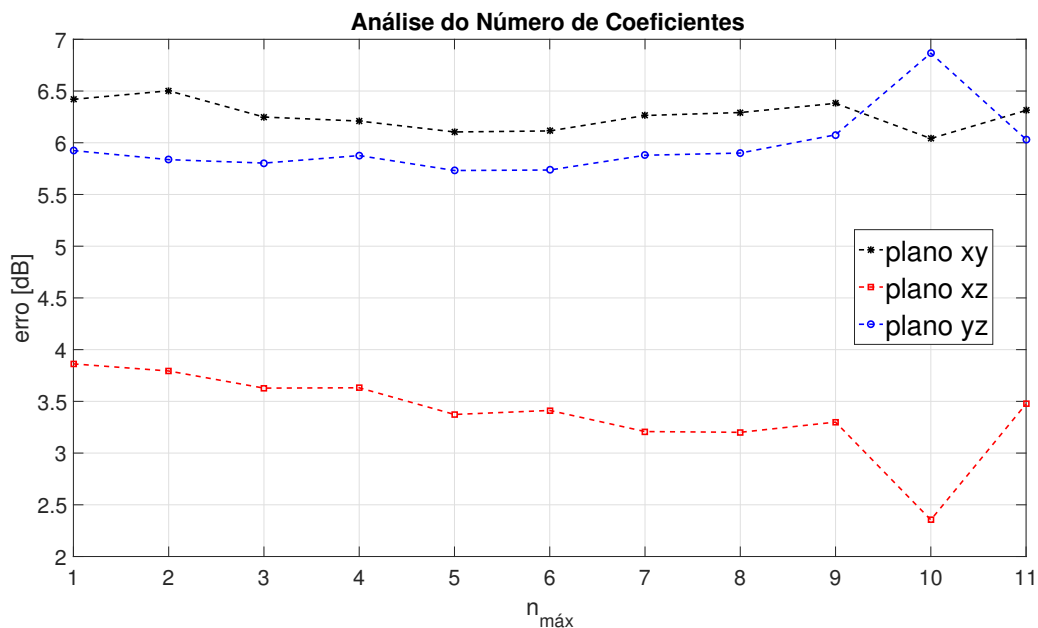


Figura 5.49: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz.

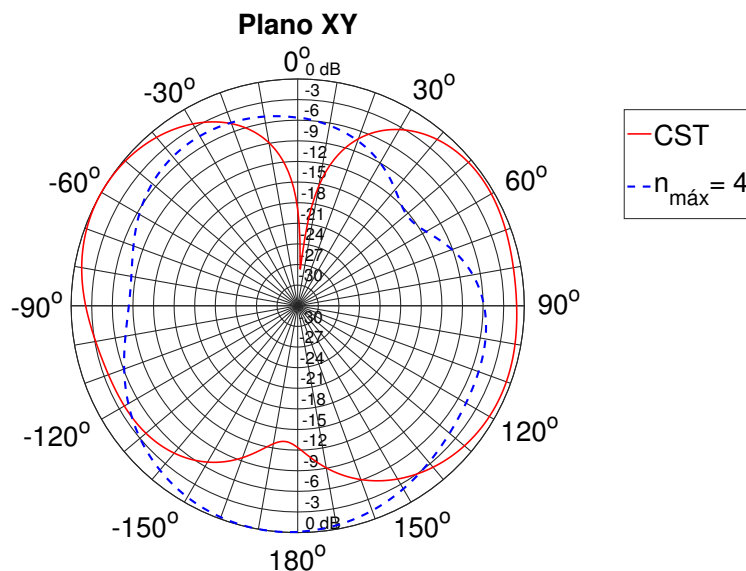


Figura 5.50: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

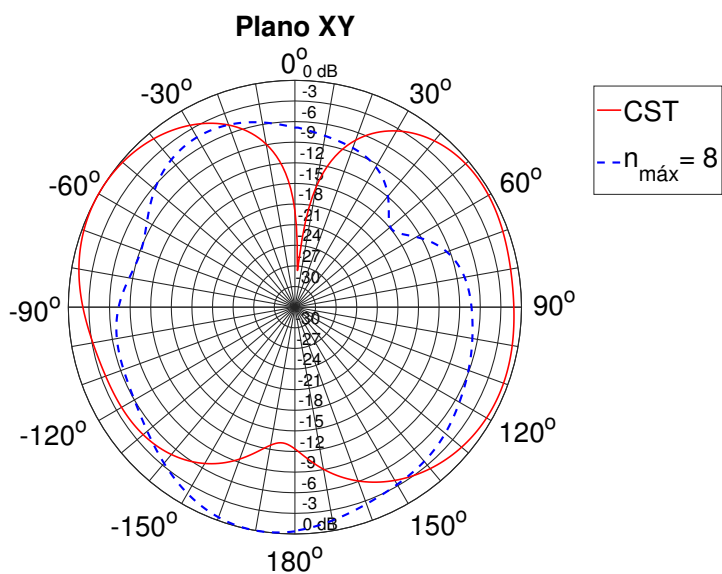


Figura 5.51: Diagrama de radiação no plano xy da antenna *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

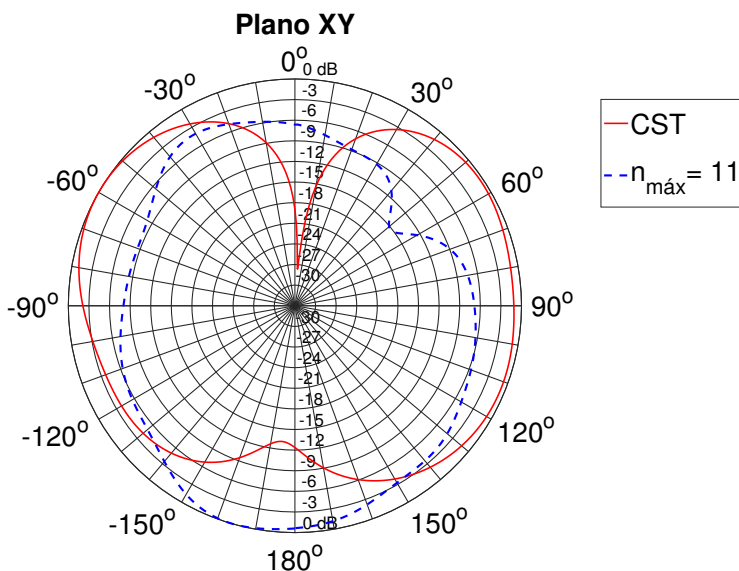


Figura 5.52: Diagrama de radiação no plano xy da antenna *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

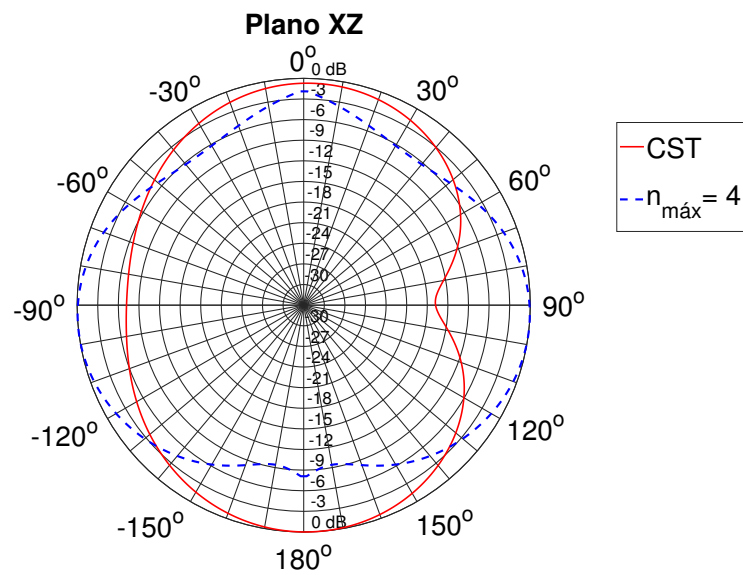


Figura 5.53: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 4$ e 2000 instantes de tempo.

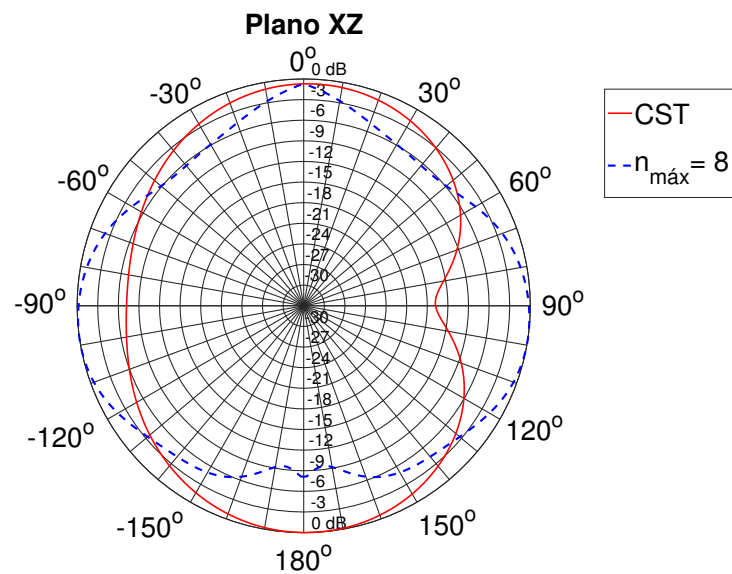
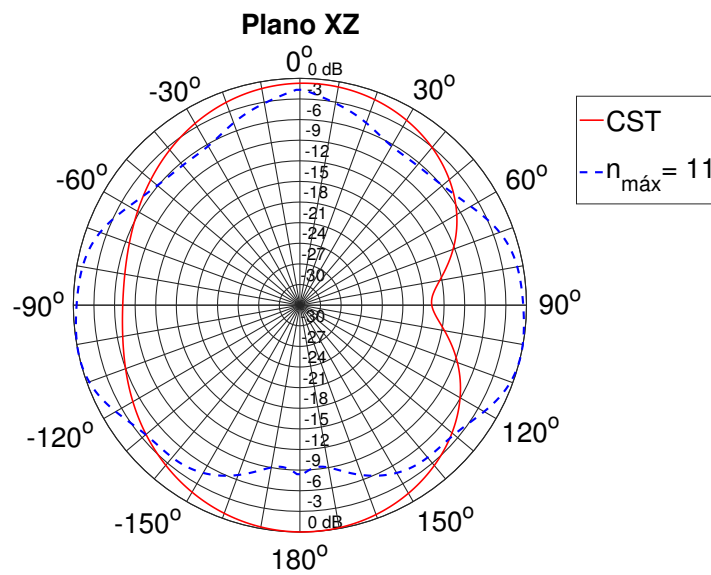


Figura 5.54: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 8$ e 2000 instantes de tempo.



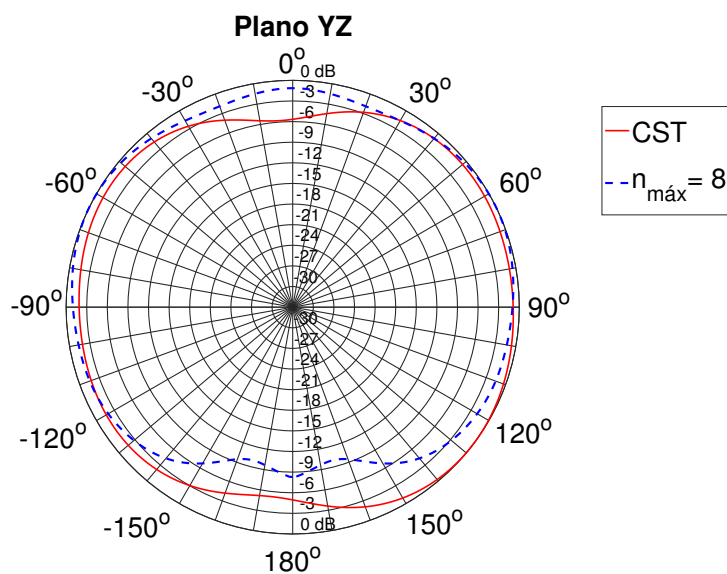


Figura 5.57: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 8$ e 2000 instantes de tempo.

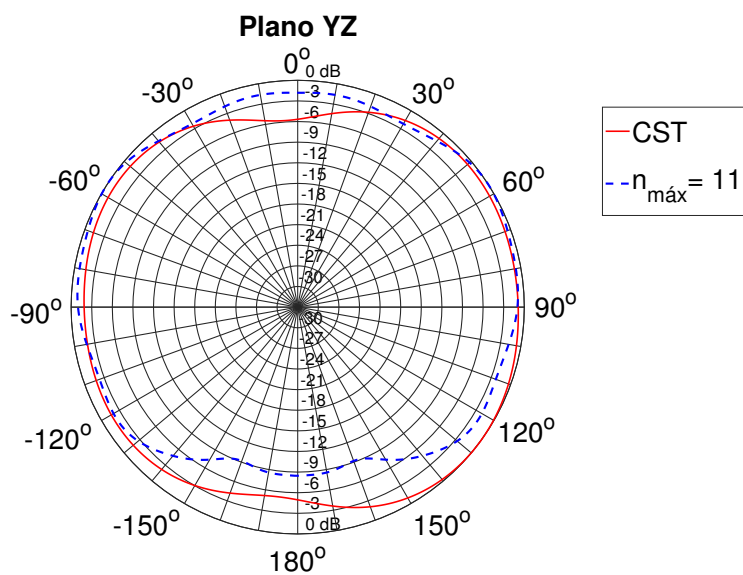


Figura 5.58: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{\text{máx}} = 11$ e 2000 instantes de tempo.

Tabela 5.4: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz.

$n_{m\acute{a}x}$	Plano xy	Plano xz	Plano yz
1	5,73019	4,35282	2,03236
2	6,78769	6,24661	2,36671
3	6,97019	6,18273	2,37671
4	6,95302	6,03822	2,50677
5	7,01155	5,89178	2,56695
6	7,14203	5,82918	2,77457
7	7,18063	5,69649	2,82289
8	7,18418	5,77698	2,85450
9	7,15570	5,76134	2,76421
10	7,14126	5,76654	2,75192
11	7,11554	5,78402	2,77513

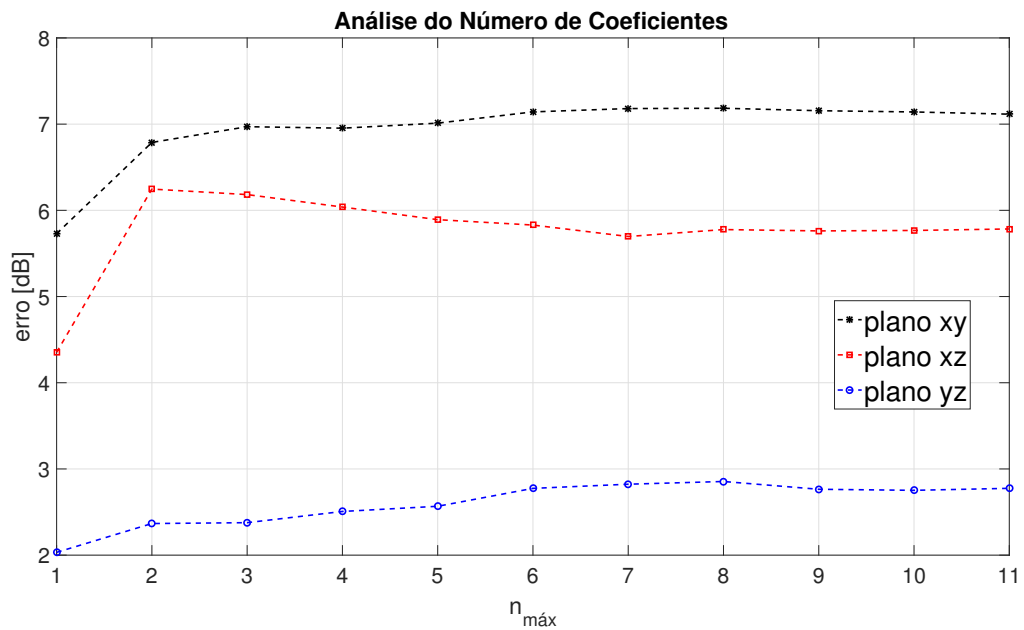


Figura 5.59: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos para a antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz.

5.4.3 Análise do Número de Instantes de Tempo

Após se realizar a análise da transformada em função do número de coeficientes da expansão em multipolos esféricos, o domínio temporal de simulação foi o próximo parâmetro verificado. Por um lado, a escolha do número de instantes de tempo considerados precisa garantir que o pulso aplicado à entrada da antena e suas reflexões sejam completamente propagadas através da superfície de Huygens. Por outro lado, um número excessivo de instantes de tempo demanda maior capacidade de memória durante a execução da transformada por multipolos esféricos. Servidores com capacidade de processamento elevada podem ser requeridos dependendo do número de instantes de tempo e de coeficientes necessários para a convergência do método.

Nesta etapa da análise, a simulação da antena *quasi-yagi* apresentada até então foi repetida com 3000 instantes de tempo em vez dos 2000 considerados anteriormente para $n_{máx} = 1$. As Figuras de 5.60 a 5.62 mostram os diagramas de radiação em 0,9 GHz. Observa-se que o resultado continua convergindo nesta frequência. No entanto, os diagramas das Figuras de 5.63 a 5.68 para as frequências de 1,9 GHz e 2,4 GHz continuam divergindo, com exceção do plano yz em 2,4 GHz. Neste último caso, o diagrama de radiação apresenta um formato semelhante ao CST, como pode ser verificado na Figura 5.68. Contudo, como afirmado anteriormente, não há evidência de que o plano yz em 2,4 GHz está de fato convergindo, pois seu contorno é suave e os demais planos divergiram completamente.

A Tabela 5.5 apresenta a raiz do erro médio quadrático tanto para o caso anterior com 2000 instantes de tempo bem como para a análise atual com 3000 instantes. Não houve sinais de melhora nos resultados divergentes com o aumento do domínio temporal de simulação. Em vista disso, suspeita-se que a divergência dos resultados não está relacionada com as configurações da transformada por multipolos esféricos estabelecidas, mas podem ser provenientes dos momentos de corrente superficiais fornecidos pelo método FDTD/WP-PML.

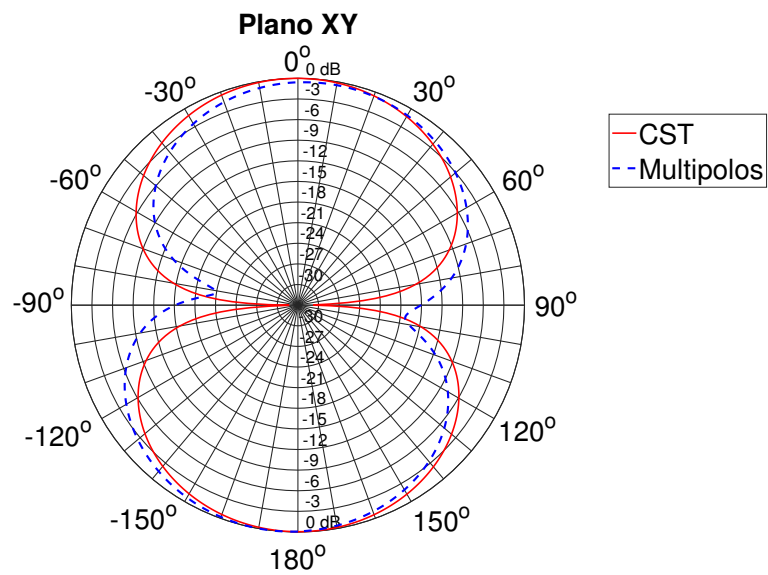


Figura 5.60: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

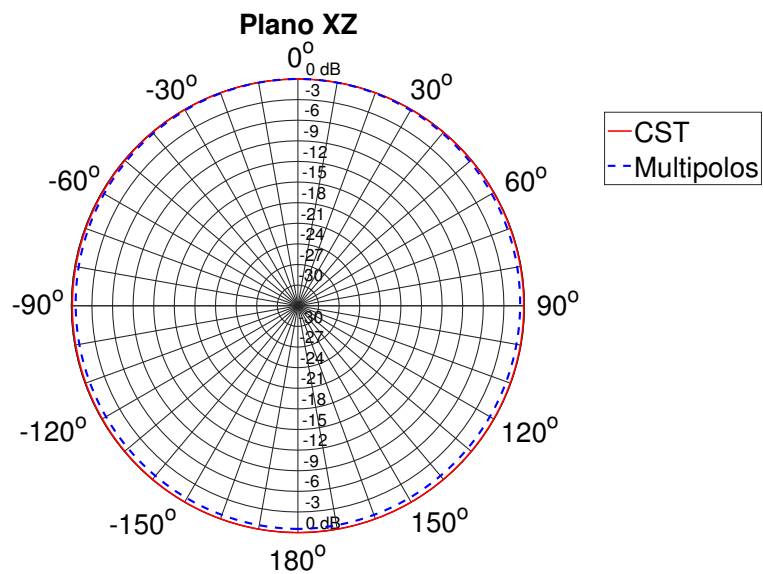


Figura 5.61: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

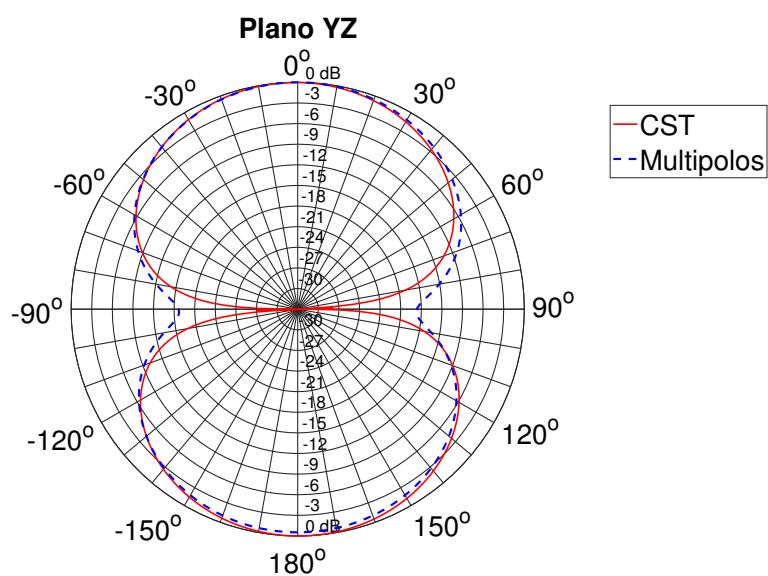


Figura 5.62: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

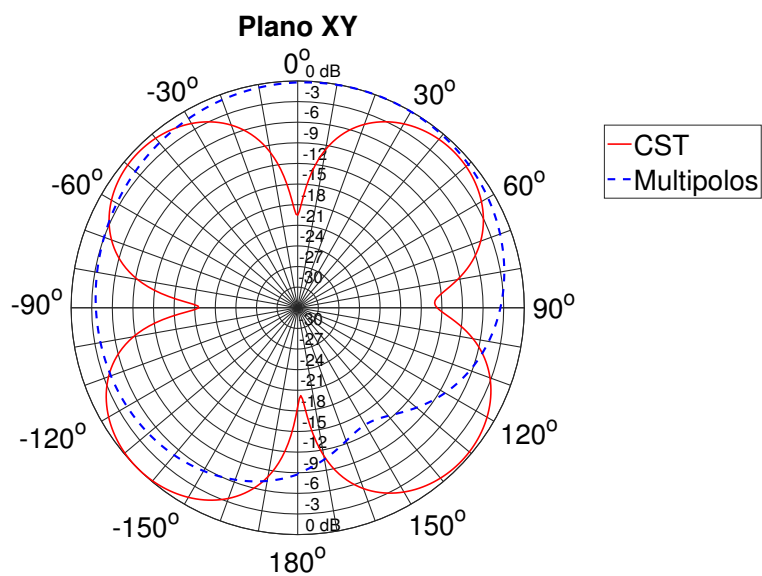


Figura 5.63: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

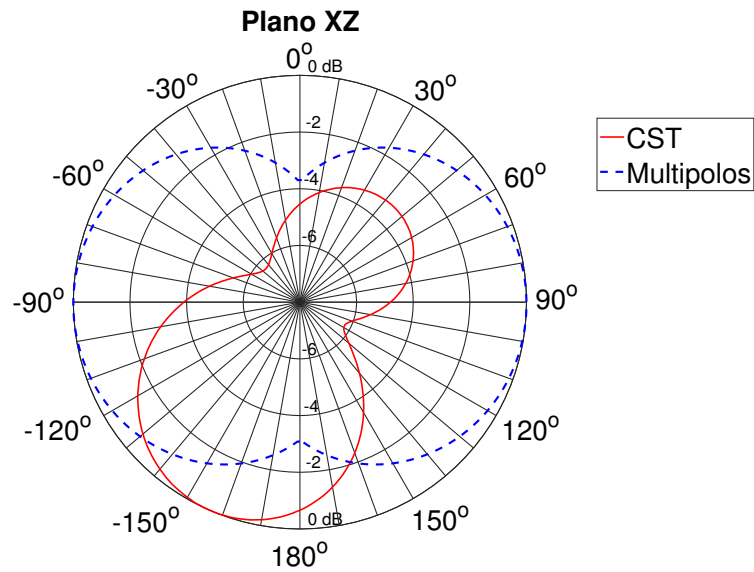


Figura 5.64: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

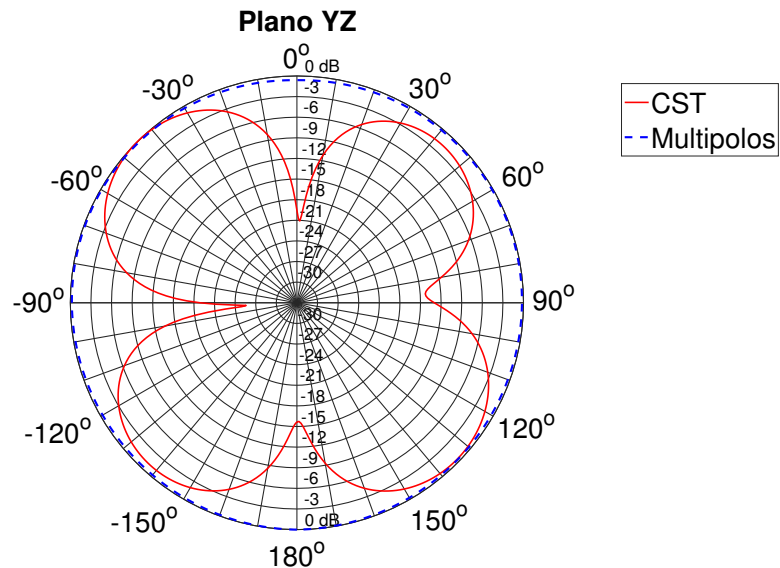


Figura 5.65: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

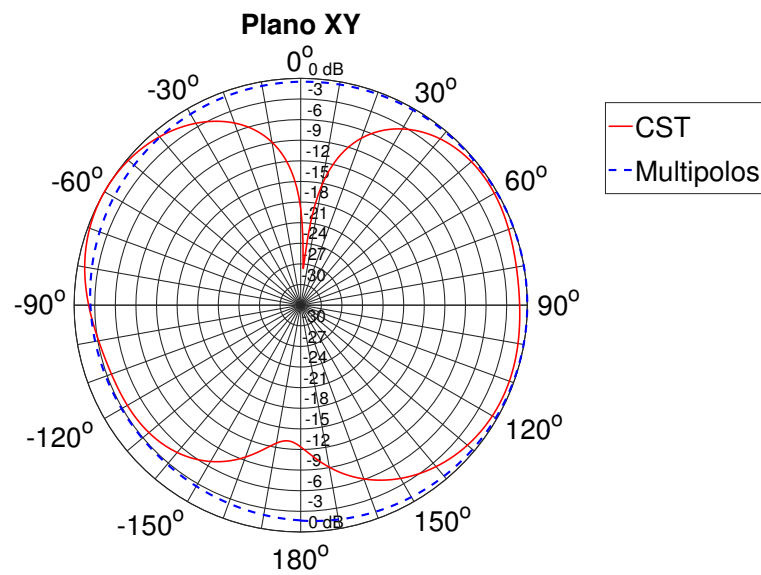


Figura 5.66: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

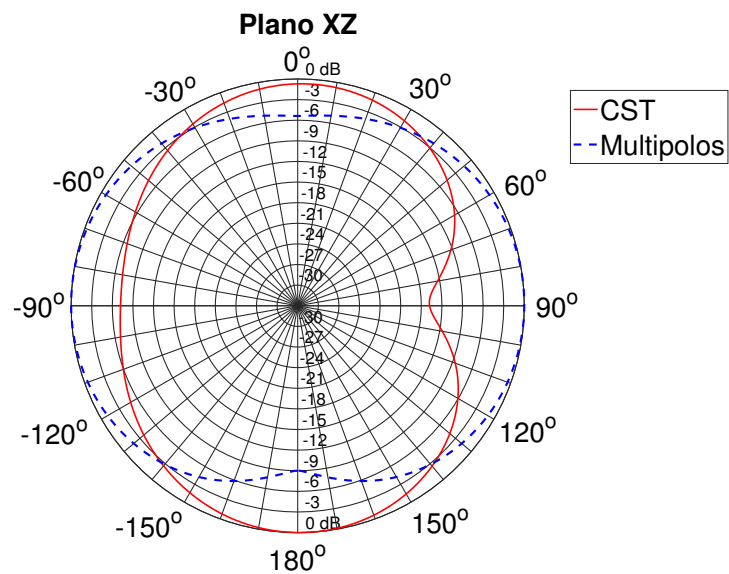


Figura 5.67: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{m\acute{a}x} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

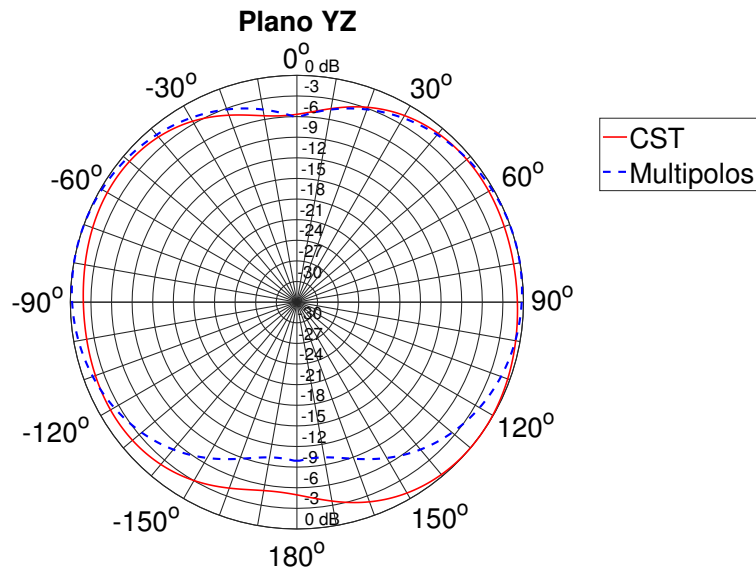


Figura 5.68: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ e 3000 instantes de tempo.

Tabela 5.5: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada NFF baseada em multipolos esféricos com $n_{máx} = 1$ para a antena *quasi-yagi*.

Frequência [GHz]	Instantes	Plano xy	Plano xz	Plano yz
0,9	2000	1,67067	0,17797	1,91092
0,9	3000	3,62875	0,47178	3,63779
1,9	2000	6,41948	3,86230	5,92453
1,9	3000	6,67974	3,49846	7,67356
2,4	2000	5,73019	4,35282	2,03236
2,4	3000	5,89564	6,01089	2,75762

5.4.4 Análise do Método FDTD

As análises realizadas nas seções anteriores tiveram como foco as configurações básicas da transformada NFF por multipolos esféricos no domínio do tempo. Como nenhuma evidência para a divergência dos resultados fora encontrada, o foco passa a ser o cálculo dos momentos de corrente superficial. A seguir, é apresentada uma análise da fonte de excitação da antena e do tipo de condição absorvente adotada no método FDTD.

5.4.4.1 Fonte de Excitação

O pulso gaussiano, exibido na Figura 5.20, apresenta banda de frequência larga o suficiente para englobar a faixa de análise da antena *quasi-yagi* que vai até 3 GHz. Porém, para garantir que a divergência dos resultados não fosse causado pela fonte de alimentação, a mesma foi substituída. Como a análise realizada nesta seção não depende da transformada em multipolos esféricos no domínio do tempo, mas se concentra no método FDTD, uma outra transformada de campo próximo para distante, desta vez no domínio da frequência, foi adotada na geração dos diagramas de radiação. Esta transformada é comumente utilizada e encontrada em diversos livros de eletromagnetismo [22, 28], por isso será chamada neste trabalho de transformada padrão.

Como esta segunda transformada opera diretamente no domínio da frequência, ela permite uma execução muito mais rápida e em um domínio temporal maior quando comparada com a transformada em multipolos no domínio do tempo. Além do mais, esta transformada padrão convergiu na frequência de 0,9 GHz e também divergiu nas frequências de 1,9 GHz e 2,4 GHz. Isto permite inferir que as divergências realmente não estão relacionadas ao processo de transformação para campo distante, mas são anteriores a ela. As Figuras de 5.69 a 5.74 exibem os diagramas gerados pela transformada padrão no domínio da frequência em 0,9 GHz e 1,9 GHz a partir dos momentos de corrente fornecidos pelo FDTD/WP-PML e excitação com pulso gaussiano. A Tabela 5.6 contém os valores do erro dos resultados da transformada padrão.

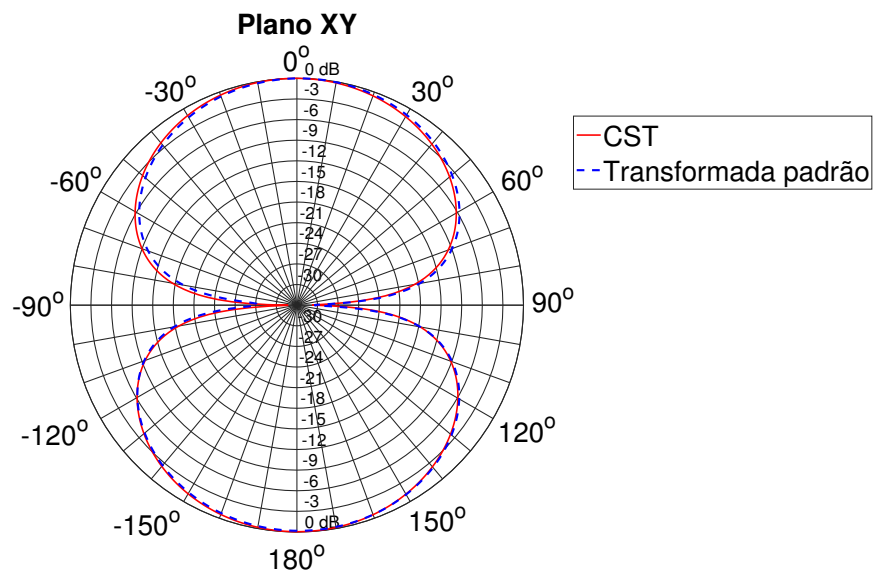


Figura 5.69: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

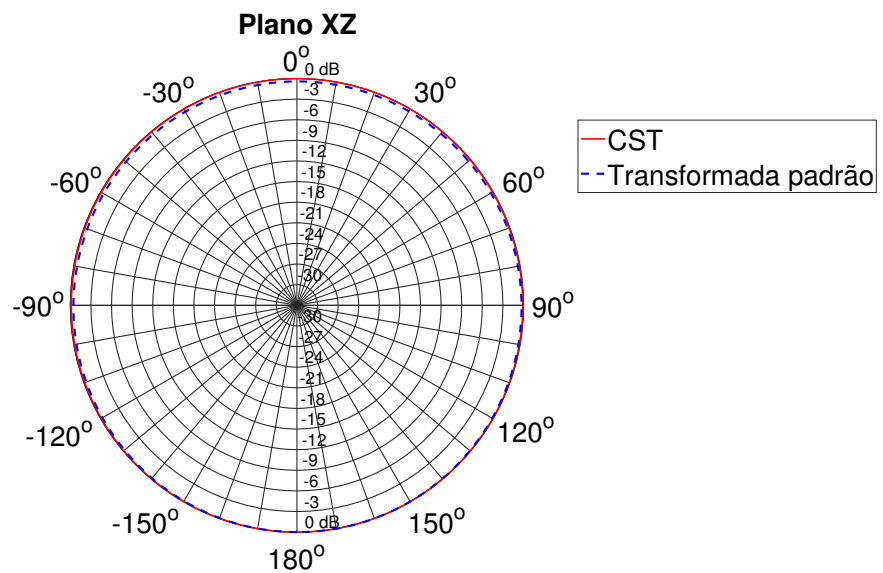


Figura 5.70: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

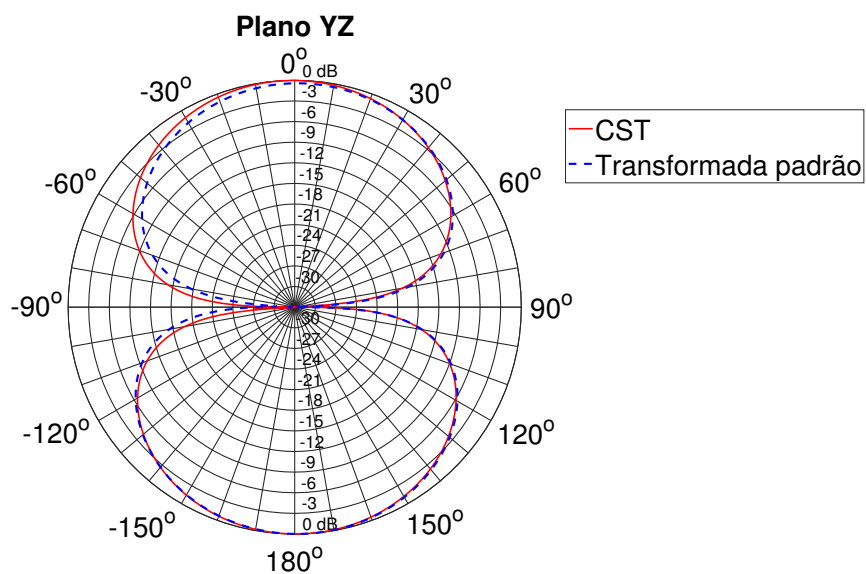


Figura 5.71: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

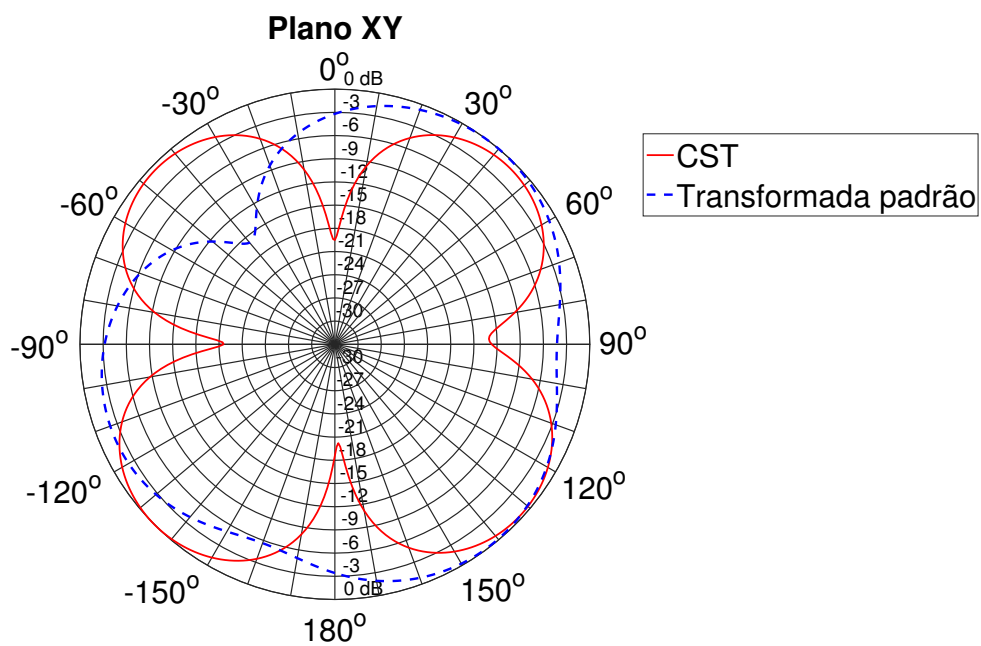


Figura 5.72: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

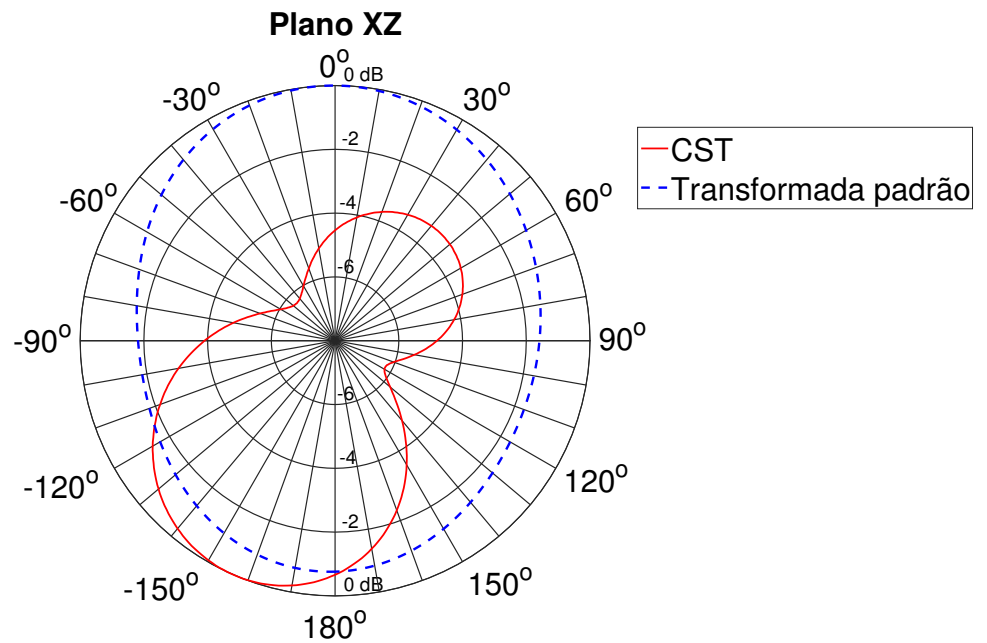


Figura 5.73: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

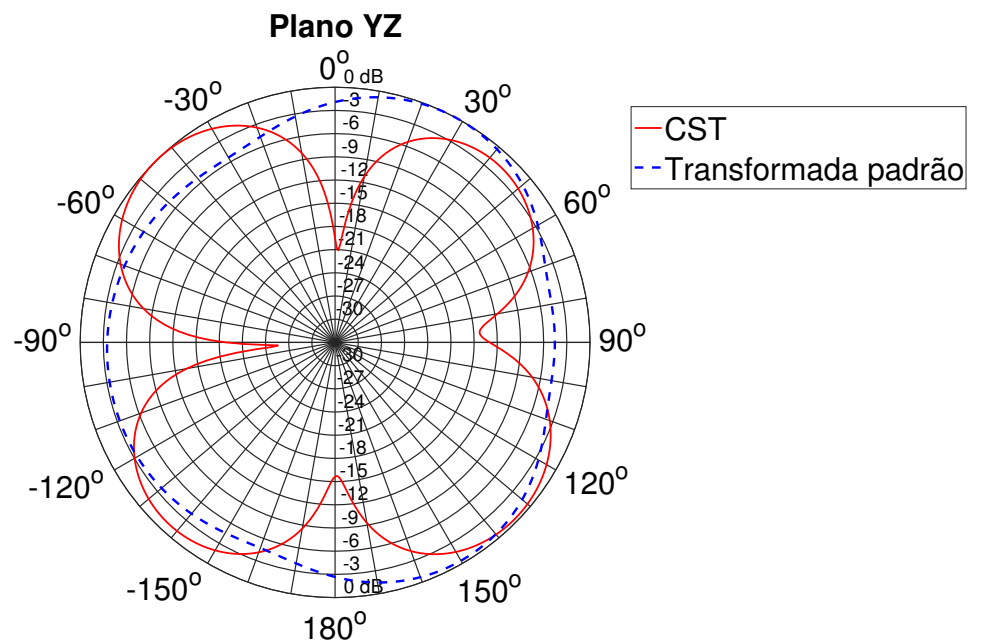


Figura 5.74: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

Tabela 5.6: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) em decibéis entre solução do CST e solução da transformada padrão para a antena *quasi-yagi*.

Frequência [GHz]	Plano xy	Plano xz	Plano yz
0,9	0,72172	0,26829	1,72686
1,9	6,78980	3,32495	6,23041

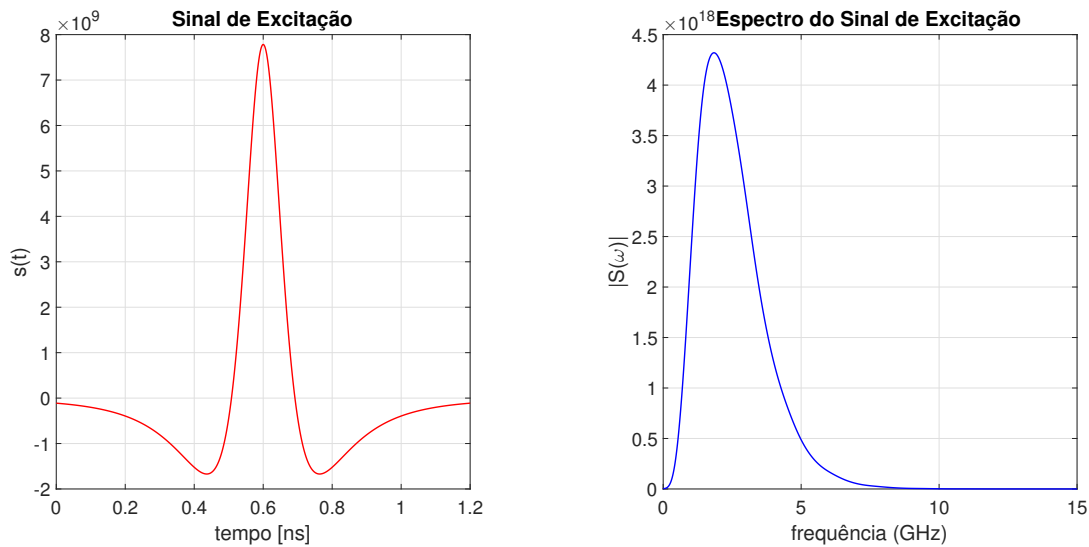
Desta forma, o pulso gaussiano utilizado como sinal de excitação da antena foi substituído por uma *wavelet* definida por

$$s(t) = \text{Re} \left\{ \frac{j}{\pi} \left[\frac{6,75}{(t-t_0) + jT} - \frac{13,5}{(t-t_0) + j2T} + \frac{6,75}{(t-t_0) + j3T} \right] \right\}, \quad (5.3)$$

onde T é dado por

$$T = \frac{1}{2\pi f_c} \ln(3), \quad (5.4)$$

f_c é a frequência central do pulso e t_0 é o atraso para ajuste do pulso no domínio do tempo [29]. O k -ésimo instante de tempo discreto é tal que $t = k\Delta t$. Para a simulação realizada, $f_c = 1,9$ GHz, $t_0 = 0,6$ ns, $\Delta t = 0,619$ ps e 3000 instantes de tempo.



(a) Sinal de excitação no domínio do tempo.

(b) Espectro de frequência do sinal de excitação.

Figura 5.75: Sinal de excitação de teste aplicado à antena *quasi-yagi*.

Este sinal possui o espectro centrado na frequência em análise e não possui componente DC. Inicialmente, pelo fato do resultado em frequência mais baixa ter convergido e em frequência mais altas não, cogitou-se a possibilidade de que as componentes do espectro nestas frequências não tivessem amplitude suficiente para garantir a convergência da transformada no caso do pulso gaussiano. O sinal gerado por esta *wavelet* possui espectro estreito e centrado na frequência em análise, por isso não é o mais adequado quando se deseja gerar diagramas em inúmeras frequências. Além disso, este pulso requer um domínio temporal muito maior do que o pulso gaussiano, como pode ser observado na Figura 5.75. No entanto, este pulso foi muito adequado para a análise pontual pretendida nesta seção.

As Figuras de 5.76 a 5.78 mostram a comparação entre os diagramas de radiação gerados a partir do pulso gaussiano e da *wavelet*. Observa-se grande concordância entre os resultados para ambos os pulsos. Embora esta solução não coincida com a referência, o fato de terem sido muito próximas para os dois tipos de pulsos sustenta a afirmação de que o pulso gaussiano utilizado atende perfeitamente as frequências em análise. Portanto, a divergência dos resultados em 1,9 GHz e 2,4 GHz não parece ter sido provocada pela fonte de excitação da antena.

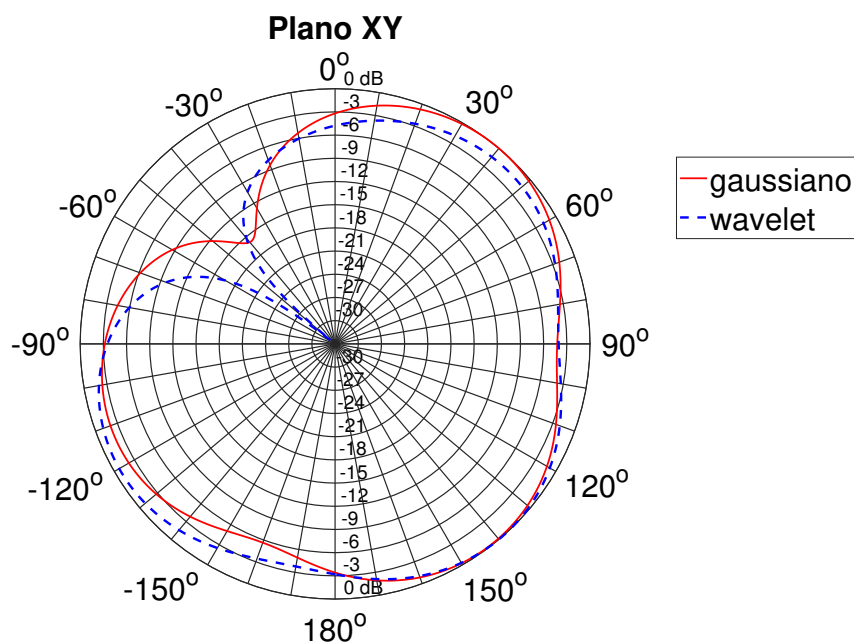


Figura 5.76: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e *wavelet* com 3000 instantes de tempo.

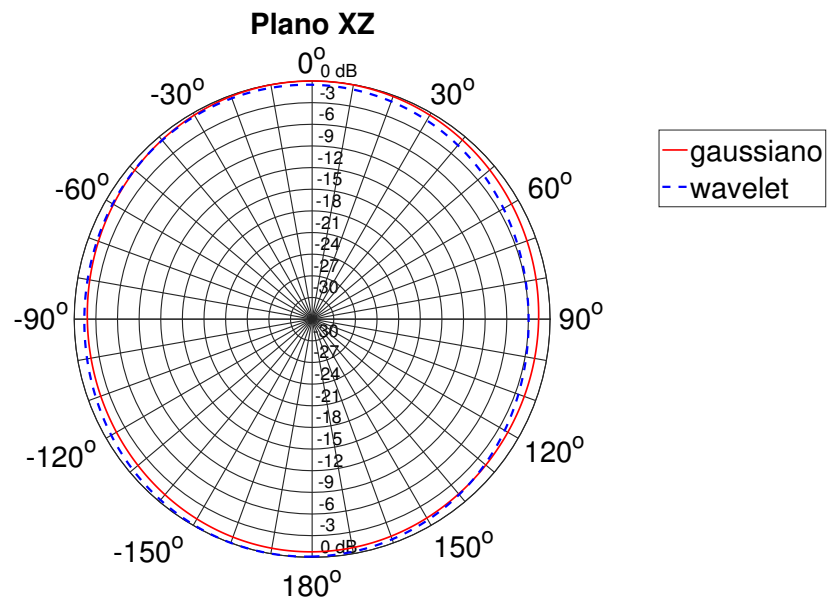


Figura 5.77: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e *wavelet* com 3000 instantes de tempo.

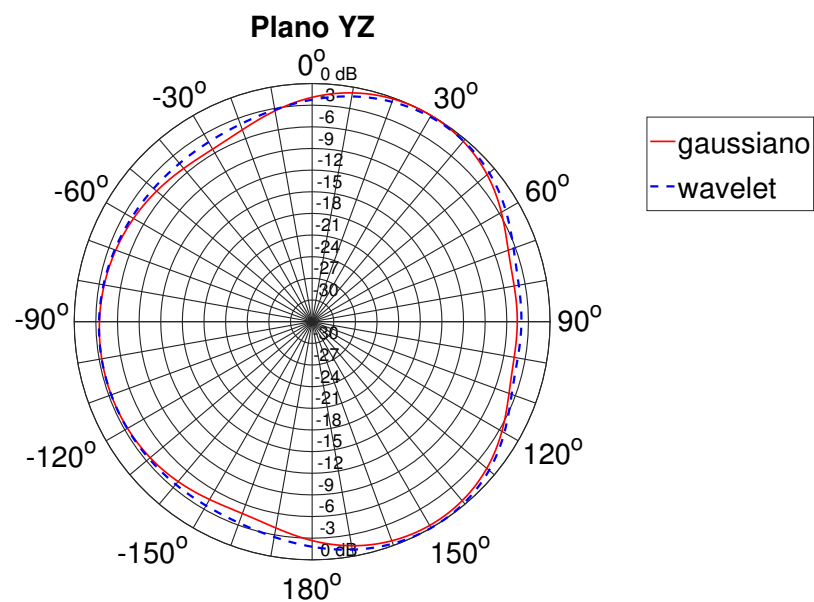


Figura 5.78: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através da transformada padrão com pulso gaussiano e *wavelet* com 3000 instantes de tempo.

5.4.4.2 Condição de Contorno Absorvente

Depois de todas as análises realizadas anteriormente na tentativa de se explicar a divergência dos resultados em frequências mais elevadas, a condição de contorno absorvente do FDTD foi a última suspeita. Desta forma, a condição WP-PML foi substituída pela CPML [22]. O domínio espacial de simulação foi dividido em $132 \times 160 \times 43$ cubos de Yee nas direções x , y e z respectivamente. A antena foi centralizada e as 8 últimas camadas em torno de todo o domínio foram definidas com condição absorvente CPML. As dimensões do cubo de Yee foram as mesmas utilizadas no caso da condição de contorno WP-PML utilizada inicialmente, ou seja, $\Delta x = \Delta y = 0,5 \text{ mm}$ e $\Delta z = 0,417 \text{ mm}$.

As Figuras de 5.79 a 5.87 exibem os diagramas de radiação gerados pelo FDTD/CPML em conjunto com a transformada padrão no domínio da frequência em 0,9 GHz, 1,9 GHz e 2,4 GHz. Observa-se que o resultado para 0,9 GHz continua convergindo como já ocorria com a WP-PML. No entanto, desta vez os resultados também convergiram em 1,9 GHz e 2,4 GHz. Nota-se que os contornos dos diagramas poderiam ter o detalhes mais definidos, alterando-se provavelmente as configurações do FDTD/CPML. Contudo, eles já possuem o formato da solução gerada pelo CST de forma clara em todos os planos.

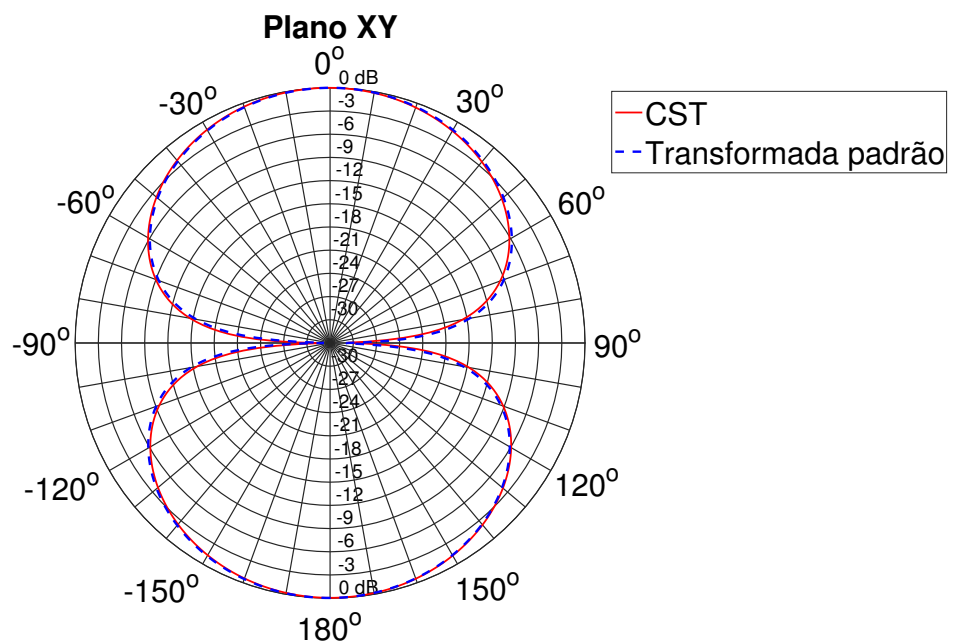


Figura 5.79: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

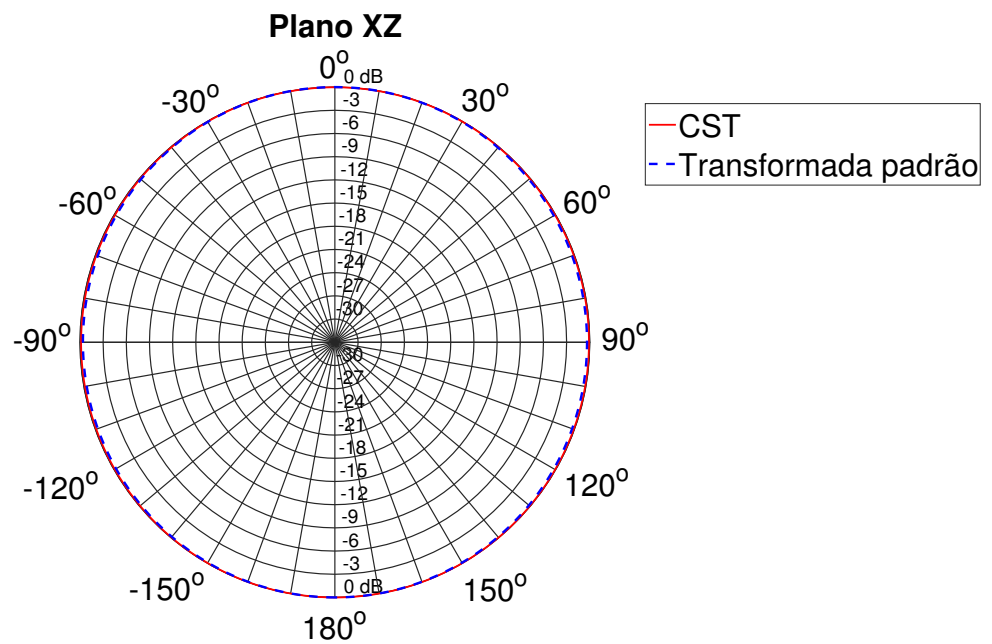


Figura 5.80: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

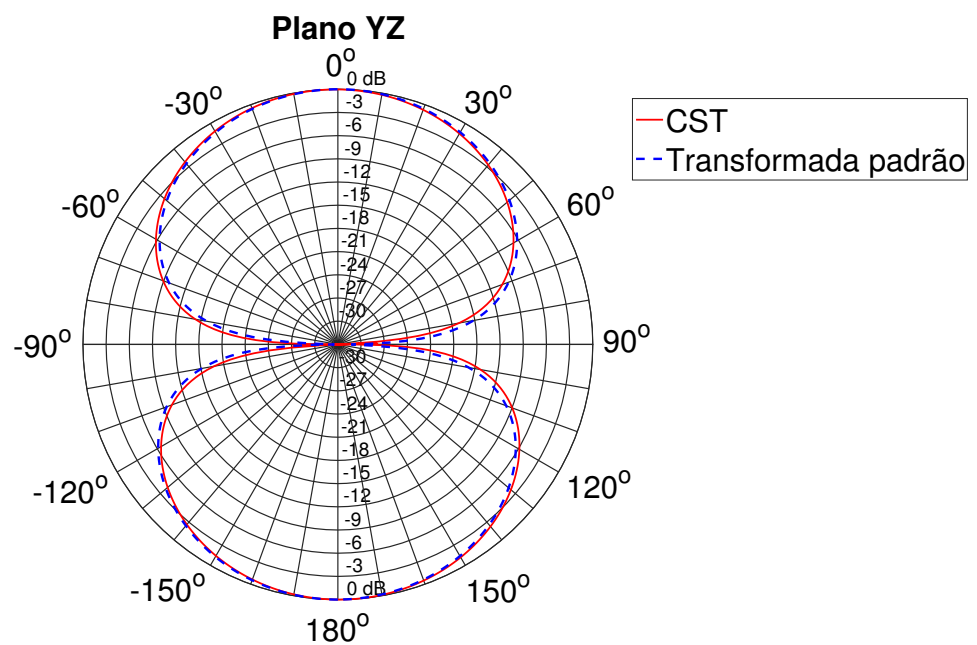


Figura 5.81: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

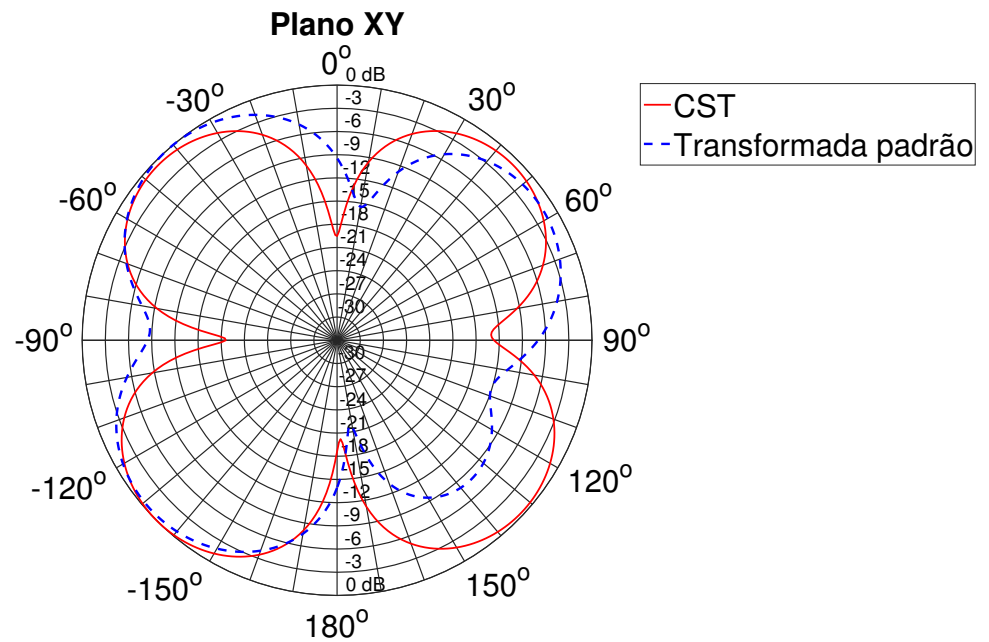


Figura 5.82: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

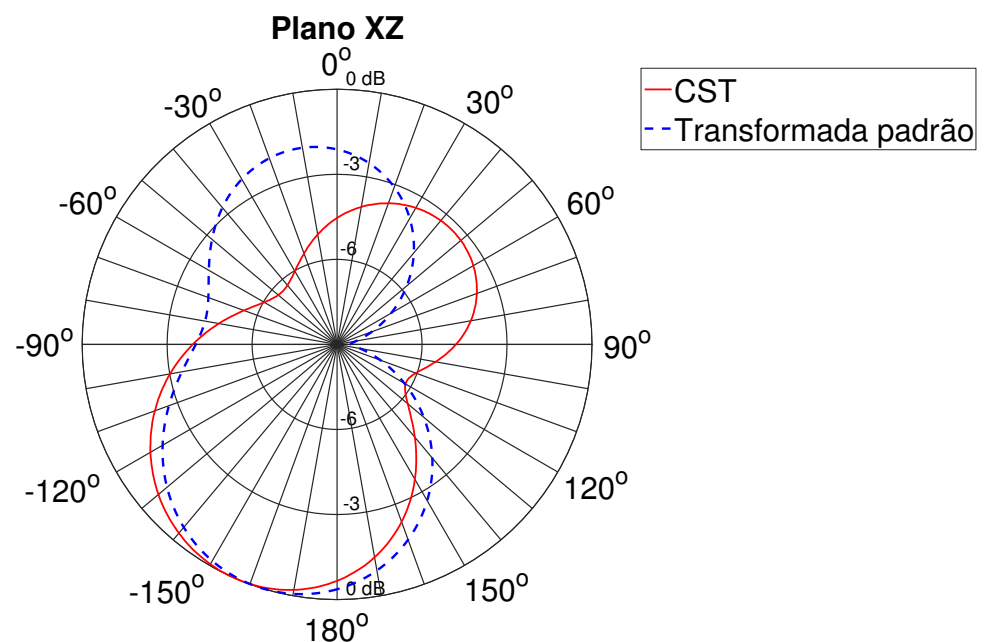


Figura 5.83: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

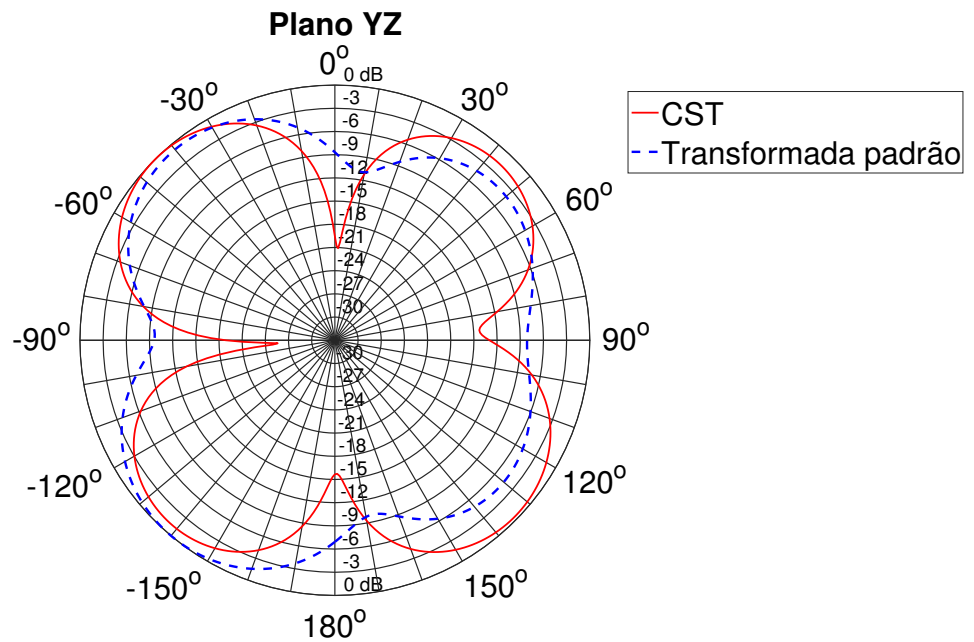


Figura 5.84: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

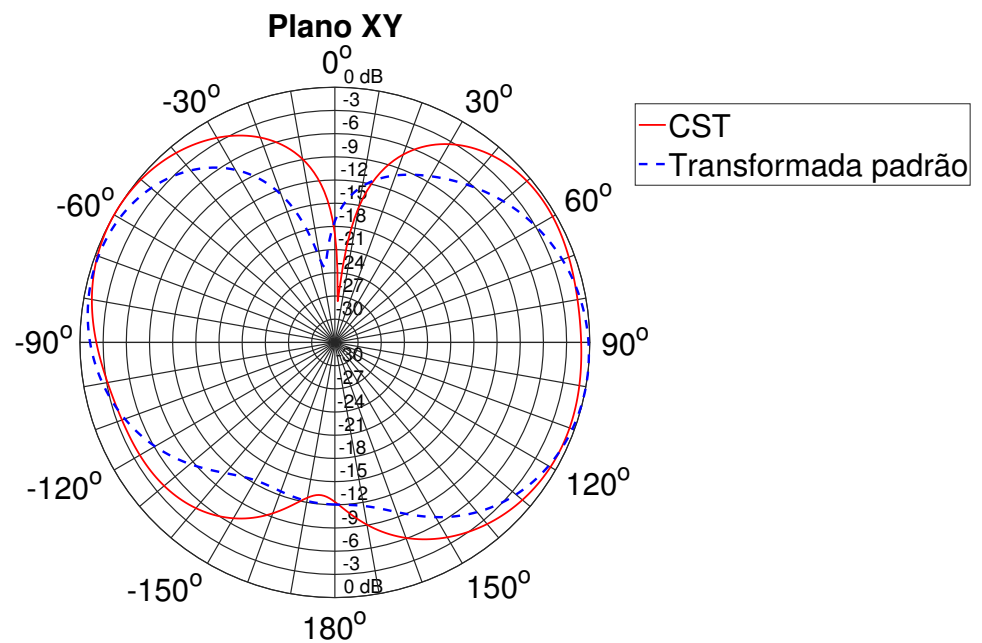


Figura 5.85: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

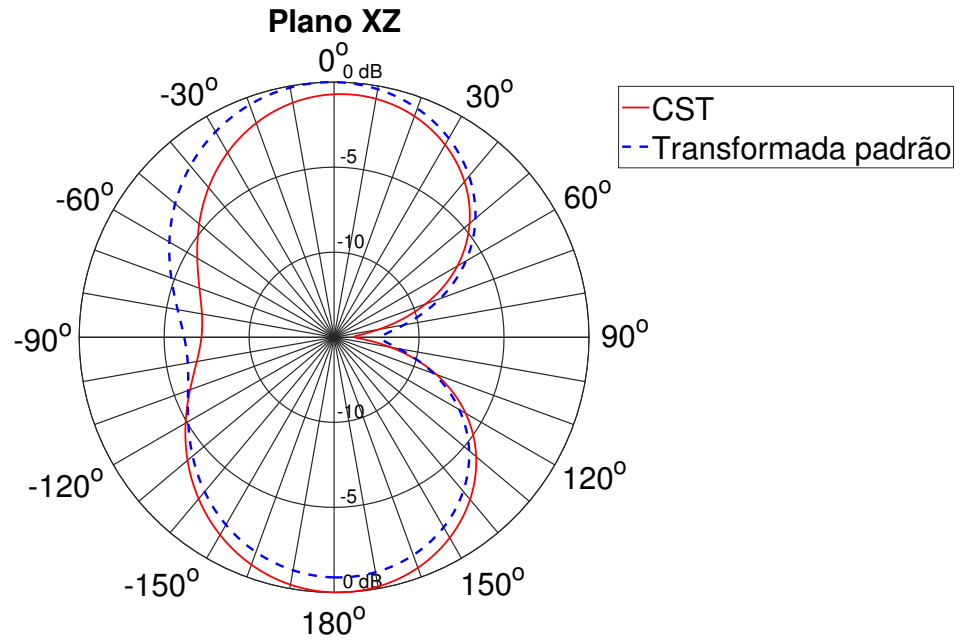


Figura 5.86: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

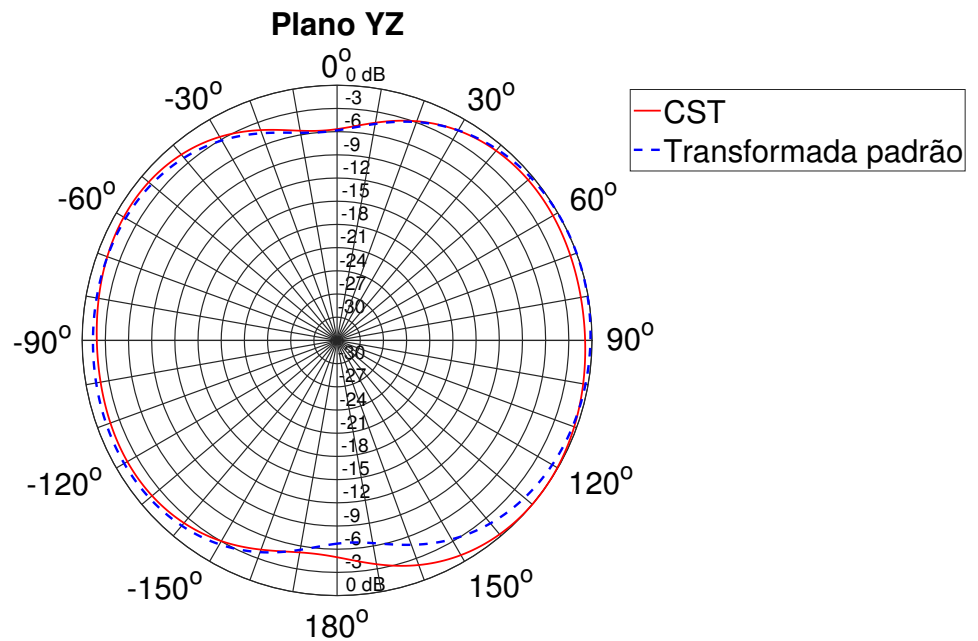


Figura 5.87: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada padrão com 3000 instantes de tempo.

Uma vez observada a influência positiva gerada pela substituição da condição absorvente com a transformada padrão no domínio da frequência, os momentos de corrente gerados a partir do FDTD/CPML foram aplicados à transformada por multipolos esféricos no domínio tempo. Foram considerados 63 multipolos na expansão, que provém do limite do somatório $n_{máx} = 7$. A distância de referência na região de campo distante foi definida como sendo 72 mm a partir da origem do sistema de coordenadas. O índice "l" dos somatórios utilizados no cálculo das amplitudes dos multipolos nas Equações 4.39 e 4.40 foi limitado em 180, pois a partir deste ponto as funções integrais das Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51 são nulas conforme definição do método. Estes parâmetros foram calculados de acordo com os critérios de convergência da transformada descritos na Seção 4.3.

As Figuras de 5.88 a 5.96 mostram os diagramas de radiação gerados pela associação do FDTD/CPML e a transformada por multipolos esféricos no domínio do tempo. Observa-se que a solução em 0,9 GHz manteve o contorno da referência, embora esteja achatado nos planos xz e yz . O plano yz em 1,9 GHz apresentou o formato da referência, apesar de também estar achatado. Estas deformações podem ter a ver com o fato de uma das dimensões da superfície de Huygens ser muito mais estreita em comparação com as demais. A solução em 2,4 GHz não convergiu, embora demonstre a tendência do formato da referência.

Análises futuras precisam investigar as melhores medidas para a superfície de Huygens do FDTD/CPML visando a transformada por multipolos esféricos. Nos resultados apresentados, a superfície de Huygens não é um um cubo, mas um paralelepípedo. As evidências indicam que a expansão em multipolos requer uma superfície mais regular e com faces de mesmo tamanho como vinha sendo praticado na utilização do FDTD/WP-PML. Entretanto, a transformada padrão no domínio da frequência garantiu a credibilidade do FDTD/CPML em frequências mais elevadas da faixa de operação da antena *quasi*-yagi em contraposição ao FDTD/WP-PML.

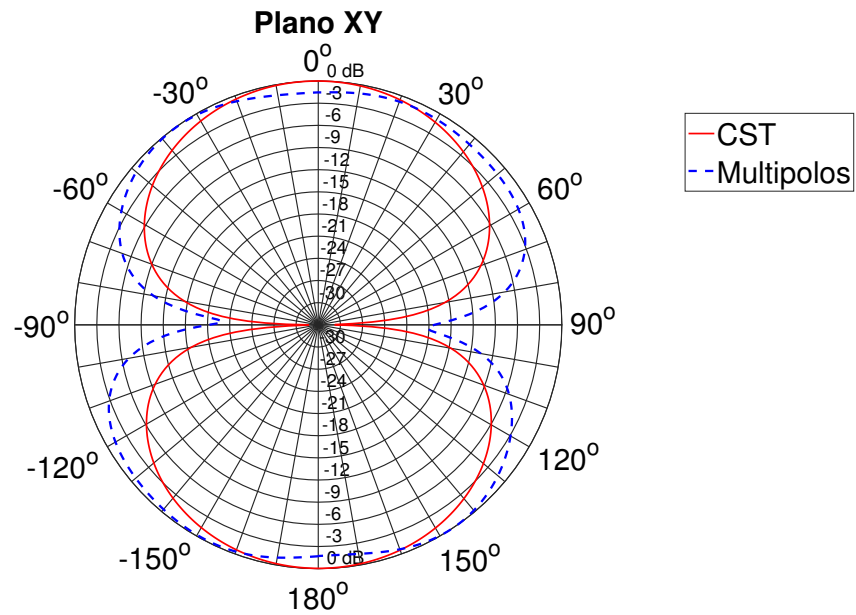


Figura 5.88: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada por multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

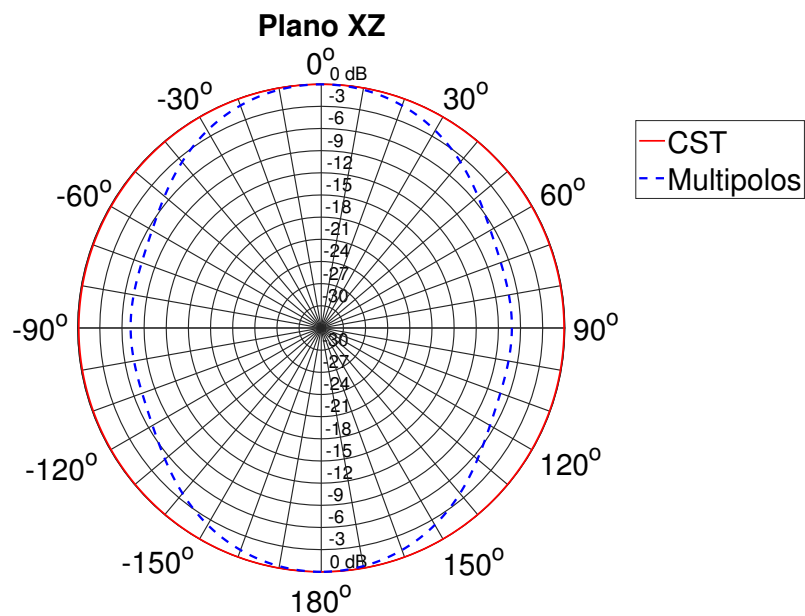


Figura 5.89: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{máx} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

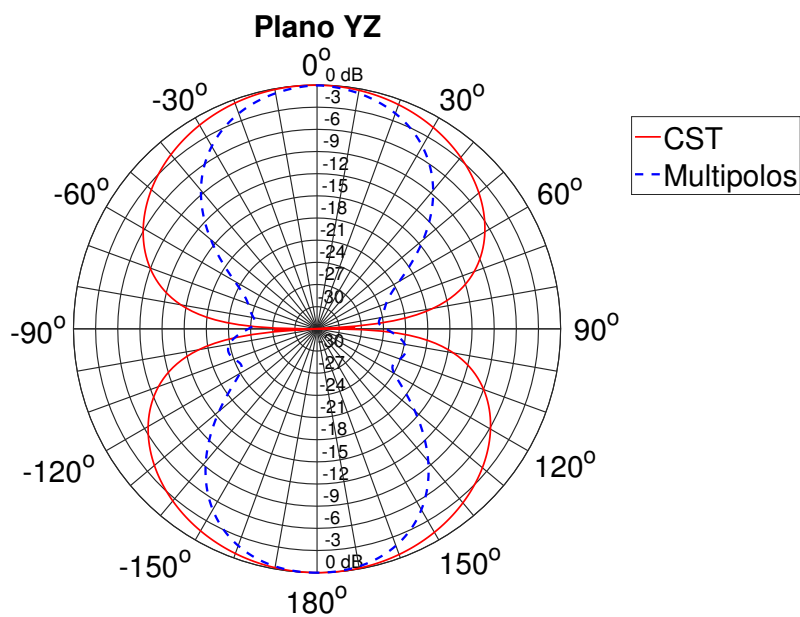


Figura 5.90: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

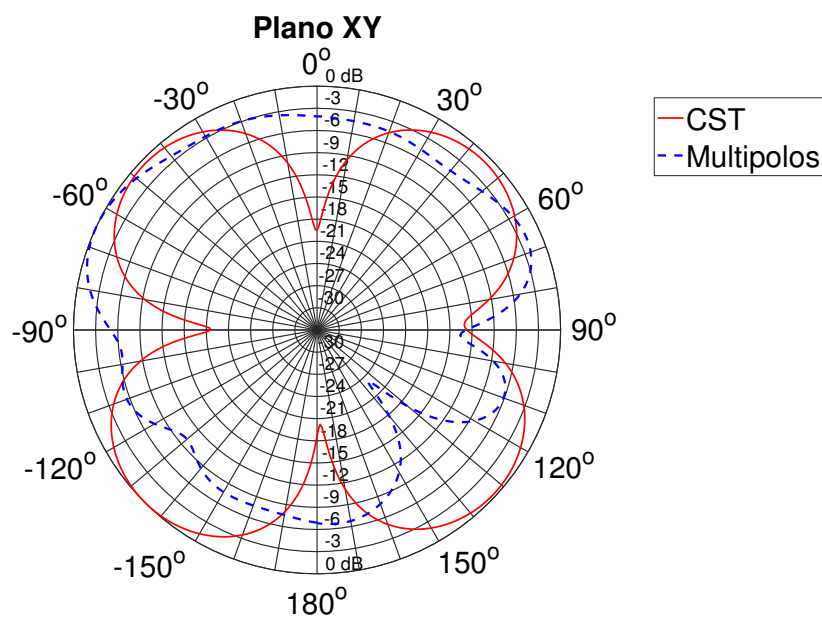


Figura 5.91: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

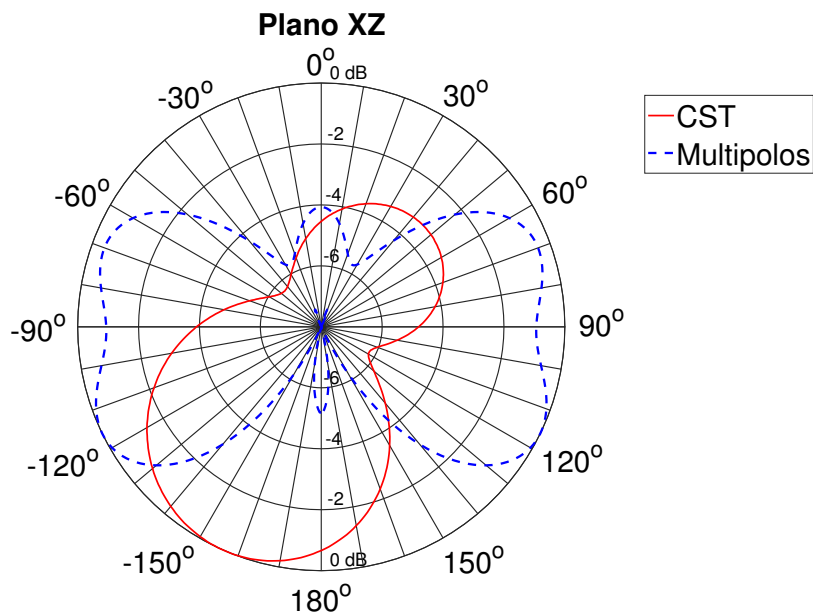


Figura 5.92: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

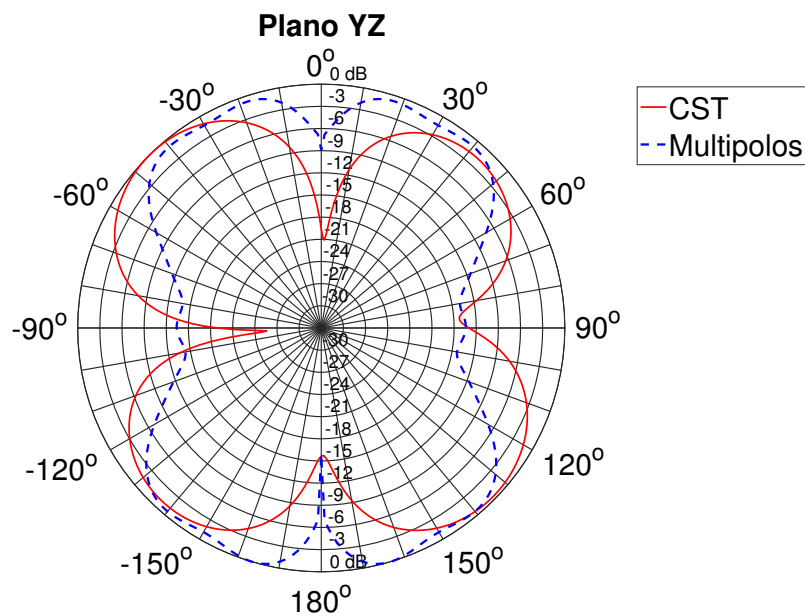


Figura 5.93: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi-yagi* em 1,9 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

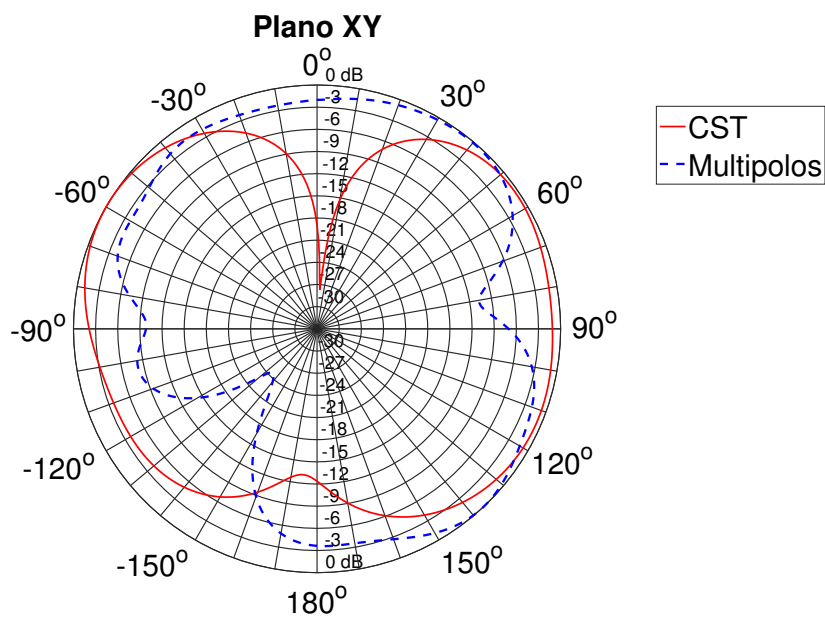


Figura 5.94: Diagrama de radiação no plano xy da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

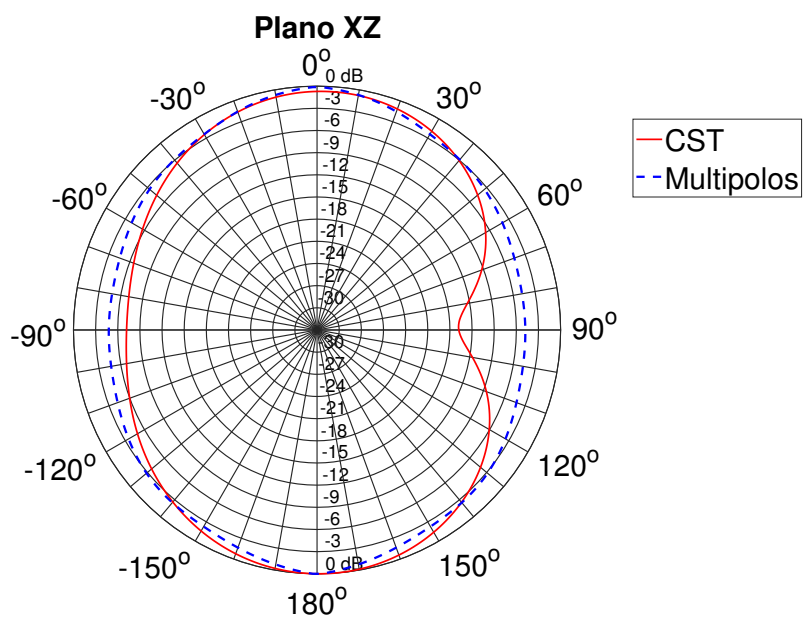


Figura 5.95: Diagrama de radiação no plano xz da antena *quasi-yagi* em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

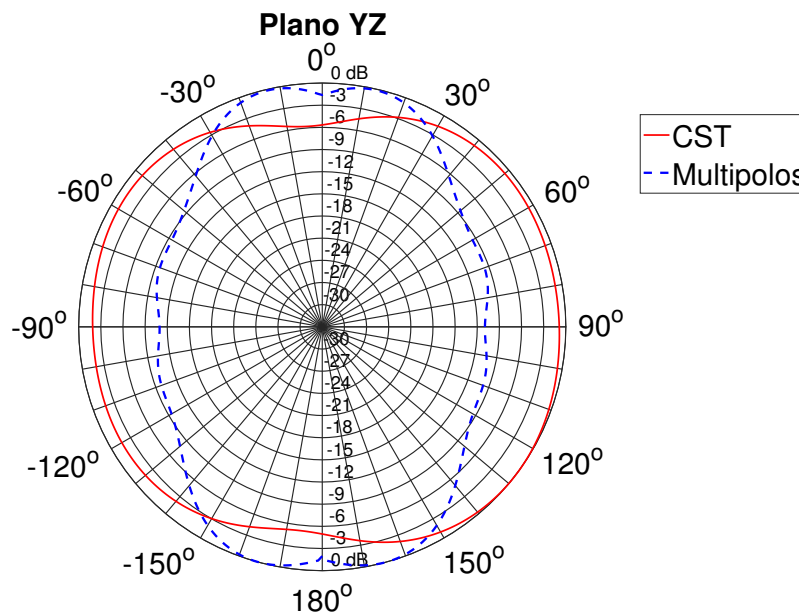


Figura 5.96: Diagrama de radiação no plano yz da antena *quasi*-yagi em 2,4 GHz através do FDTD/CPML e transformada multipolos com $n_{m\acute{a}x} = 7$ e 3000 instantes de tempo.

5.5 Conclusão Parcial

As simulações realizadas com as antenas dipolo de meia-onda e impressa *quasi*-yagi proporcionaram várias observações interessantes sobre a transformada NFF por multipolos esféricos. Inicialmente, concluiu-se que a técnica pode convergir com um número de coeficientes na expansão bem menor do que o valor sugerido pela literatura. Isto possivelmente se deve à geometria simples dos diagramas de radiação, que se supõem poderem ser obtidos a partir da combinação de poucos multipolos. Na tentativa de se solucionar a divergência das soluções para frequências mais elevadas da antena *quasi*-yagi, constatou-se que a condição de camada absorvente WP-PML do FDTD impôs limitações às análises; porém, a condição CPML pareceu ser uma alternativa eficiente.

Embora esta transformada exiba um elevado custo computacional, o ajuste ideal de seus parâmetros bem como a implementação de programação paralela pôde torná-la mais viável em termos de processamento. No geral, os resultados mostraram que a transformada NFF por multipolos esféricos é uma técnica promissora na análise de antenas impressas no domínio do tempo. Deste modo, a redução dos dados de entrada

da transformada também poderia contribuir para seu melhor desempenho. Para tal fim, o próximo capítulo apresenta uma ferramenta inédita desenvolvida neste trabalho motivada pela busca de meios que favoreçam a aceleração da execução dos códigos utilizados.

Capítulo 6

Análise Estatística dos Momentos de Corrente

Uma das motivações iniciais deste trabalho era a utilização de técnicas de processamento de sinais aplicada à seleção e redução dos dados de entrada da transformada NFF baseada em multipolos esféricos. Estes dados de entrada são formados pelos momentos de corrente elétrica e magnética calculados através do FDTD sobre a superfície de Huygens, que envolve a região de campo próximo da antena. Os valores assumidos por estes momentos de corrente em inúmeros instantes de tempo compõem um grande volume de dados. No entanto, a maioria dos momentos de corrente são nulos ou desprezíveis pelo fato da antena ser excitada por um pulso único e estreito e o domínio temporal de simulação ser longo o suficiente para garantir a propagação total do sinal aplicado e suas reflexões. Desta forma, a transformada NFF utiliza parte do recurso computacional desnecessariamente, visto que grande parcela dos dados de entrada oferecem contribuição nula ou desprezível ao cálculo do campo distante.

Além disso, a transformada NFF baseada na expansão em multipolos esféricos no domínio do tempo apresenta alto custo computacional. Ela poderia ser computacionalmente mais leve caso fosse possível selecionar os valores de entrada que realmente são fundamentais para a sua convergência. Um outro trabalho aplicou a técnica de Análise de Componentes Principais (PCA) para selecionar os momentos de corrente mais significativos [30]. Similarmente, o trabalho apresentado nesta dissertação busca outras técnicas aplicadas à redução dos dados de entrada e que poderiam colaborar com a aceleração computacional desta transformada NFF.

Diante desta proposta, decidiu-se inicialmente realizar uma análise estatística dos dados de entrada a fim de se entender melhor a natureza dos momentos de corrente e avaliar qual seria a melhor ferramenta para sua seleção. De forma inesperada, observou-

se que a distribuição estatística dos momentos de corrente simultaneamente em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para uma dada direção em coordenadas esféricas tendia a uma distribuição gaussiana centrada próximo à origem do sistema de coordenadas. Constatou-se que havia um grande volume de dados nulos ou relativamente pequenos no centro da distribuição estatística.

Deste modo, os valores dos momentos de corrente poderiam ser facilmente selecionados de acordo com sua amplitude absoluta. Esta seleção estatística apresentaria um custo computacional menor em comparação às técnicas de análise de sinais visadas inicialmente. Em outras palavras, os dados poderiam ser selecionados através do processo de comparação entre sua amplitude absoluta e múltiplos do desvio padrão dos dados em análise. Os momentos de corrente simultaneamente em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação foram analisados em conjuntos de acordo com sua direção vetorial em coordenadas esféricas e a região da superfície de Huygens onde se encontram. A seguir são exibidas algumas análises estatísticas realizadas para a antena dipolo de meia-onda e para a antena *quasi-yagi* descritas no Capítulo 5.

6.1 Antena Dipolo de Meia-Onda

Primeiramente, a análise estatística foi realizada através da geração dos histogramas dos dados de entrada da transformada NFF para o dipolo de meia-onda em 10 GHz. Os histogramas das Figuras de 6.2 a 6.7 correspondem aos momentos de corrente elétrica ou magnética nas direções \hat{r} , $\hat{\theta}$ ou $\hat{\phi}$ calculados sobre a face da superfície cúbica de Huygens que se encontra no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes discretos do domínio de simulação simultaneamente. A posição das faces da superfície cúbica de Huygens com relação ao sistema de coordenadas pode ser consultada na Figura 5.2. Neste caso do dipolo de meia-onda, cada face da superfície de Huygens possui 51 x 51 momentos de corrente discretos com componentes vetoriais \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ em 1000 instantes de tempo.

Esta análise estatística não leva em conta a posição de cada momento de corrente sobre a superfície de Huygens mas somente suas amplitudes. Cada histograma possui 50 barras, sendo que este número foi escolhido de forma aleatória visando a melhor resolução do envelope gaussiano do histograma. Os valores máximos e mínimos do eixo das abscissas foram definidos a fim de se garantir que os valores máximos absolutos, mesmo que em um número muito menor de amostras, não ficasse fora da figura. A mesma análise estatística foi realizada com os demais momentos de corrente sobre as cinco outras faces da superfície cúbica de Huygens. O mesmo comportamento gaussiano

da distribuição estatística foi observado em todos os demais conjuntos de dados.

A Figura 6.1 representa o processo da análise estatística para a componente \hat{r} dos momentos de corrente elétrica sobre uma das faces da superfície cúbica de Huygens. Cada um dos quadros, que representa uma face da superfície cúbica em cada k -ésimo instante de tempo, é discretizado em l linhas e c colunas, sendo que um momento de corrente elétrica e outro de corrente magnética foram calculados em cada uma destas posições discretas pelo FDTD. Estes momentos estão em coordenadas esféricas e possuem componentes \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$. A variável $c_r^k(i, j)$ representa a componente \hat{r} do momento de corrente localizado na i -ésima linha e j -ésima coluna no k -ésimo instante de tempo. A Figura 6.1 mostra que a componente \hat{r} dos momentos de corrente é extraída de cada posição da superfície de Huygens e em cada quadro temporal para formar o conjunto de dados da análise estatística. Por fim, é gerado um histograma com todos os dados do conjunto. Os conjuntos de dados são definidos conforme a direção em coordenadas esféricas \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$; cada uma das faces da superfície cúbica de Huygens; e a natureza dos momentos de corrente: elétrica ou magnética.

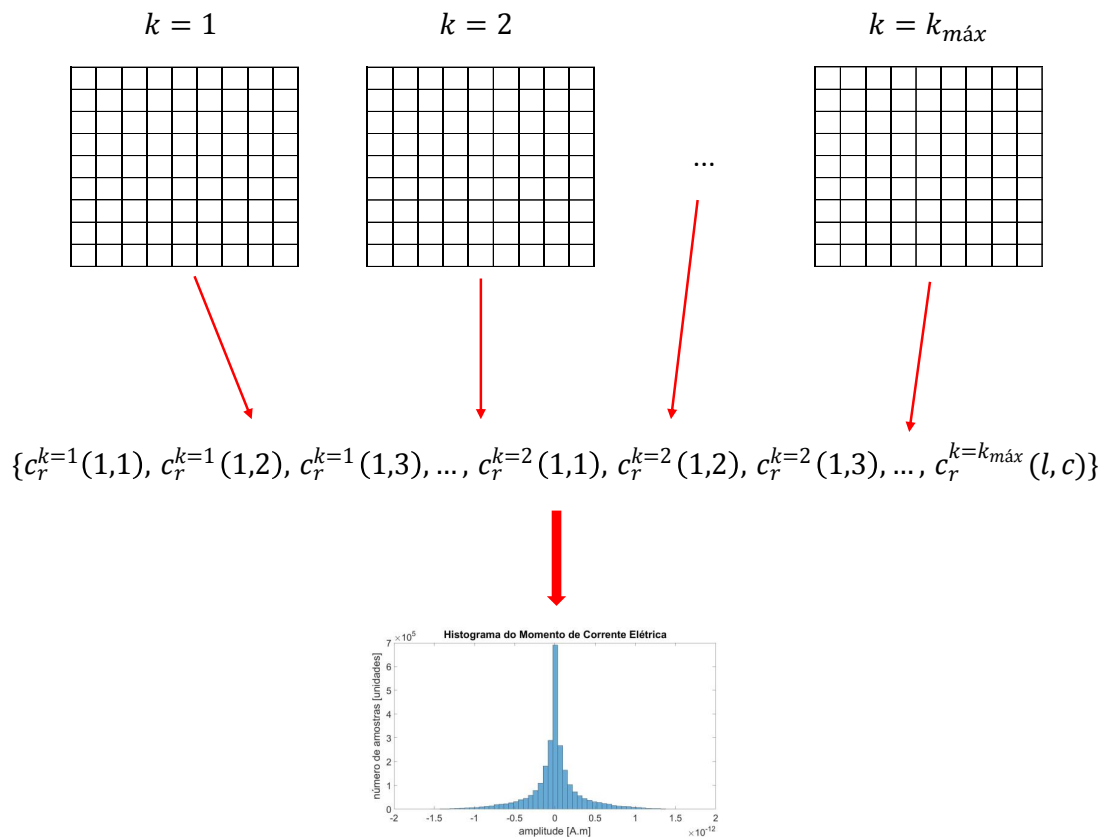


Figura 6.1: Processo de geração do histograma com os valores da componente \hat{r} dos momentos de corrente elétrica sobre uma das faces da superfície cúbica de Huygens.

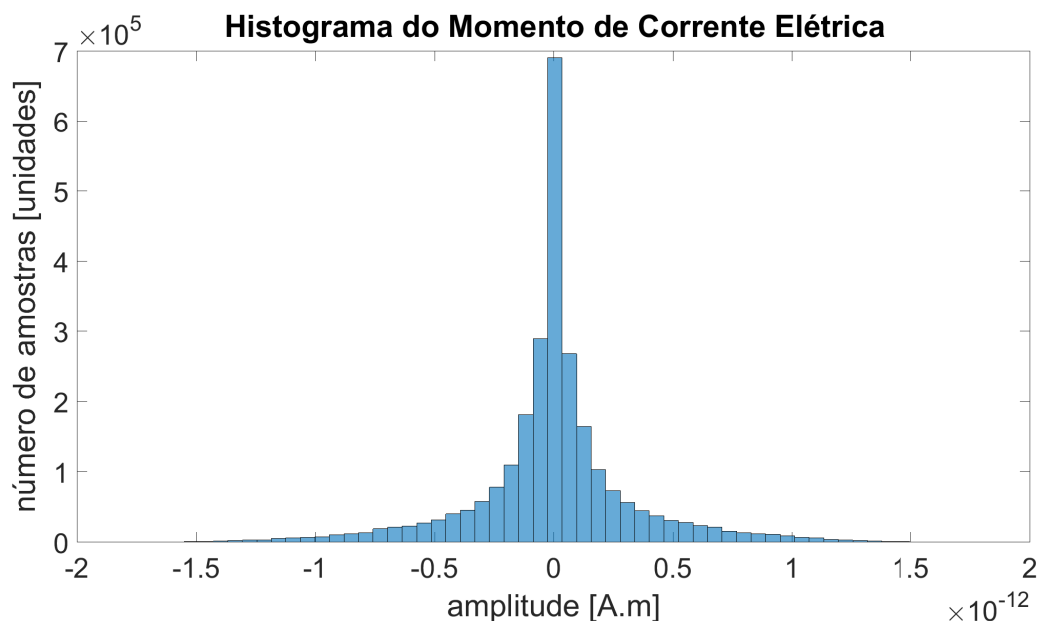


Figura 6.2: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

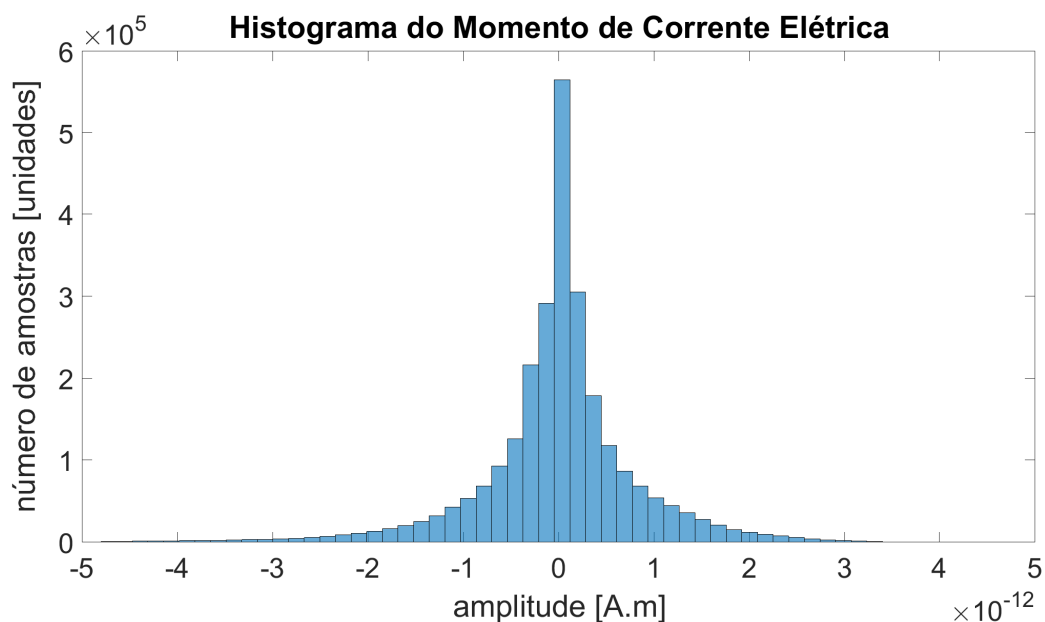


Figura 6.3: Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

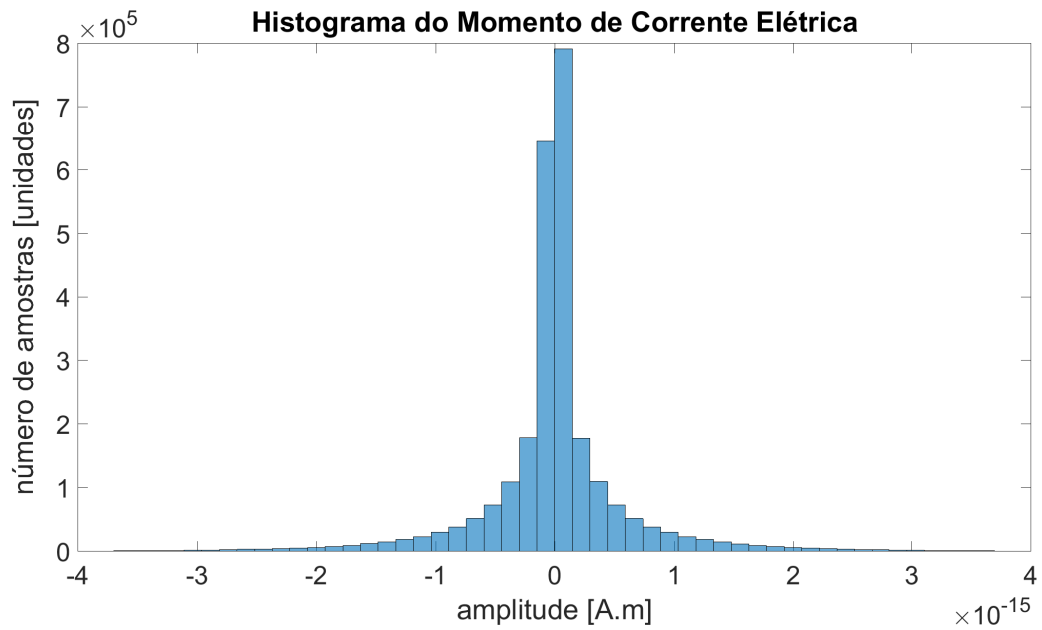


Figura 6.4: Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

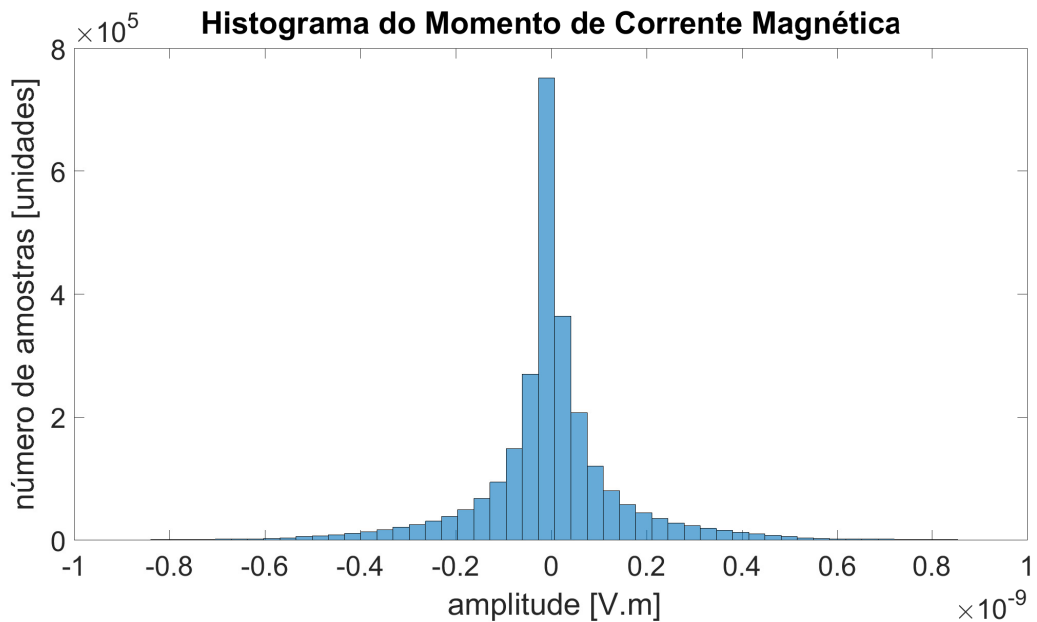


Figura 6.5: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

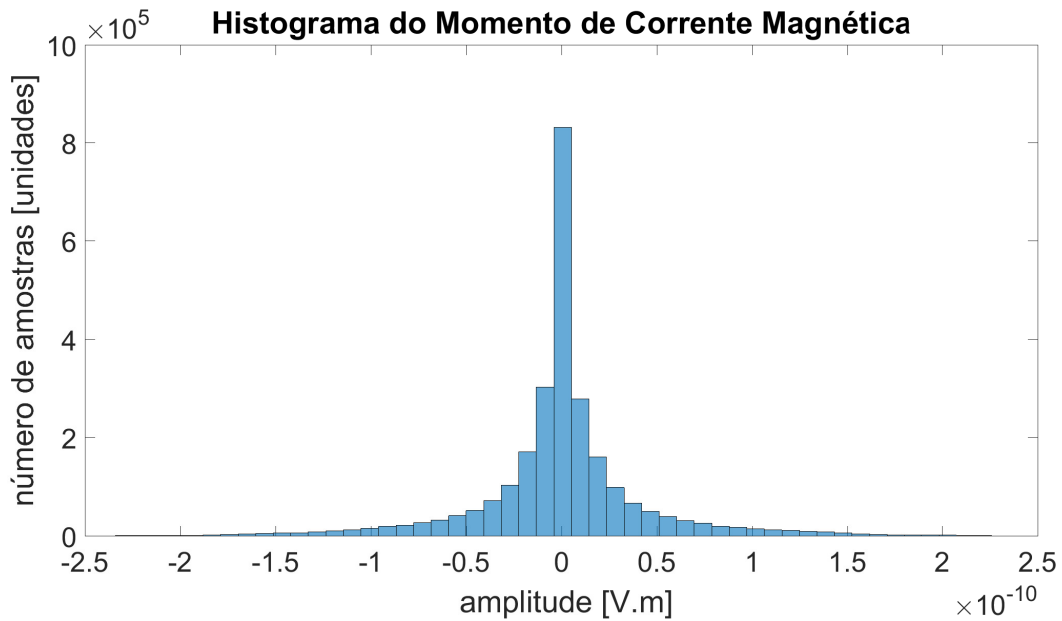


Figura 6.6: Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

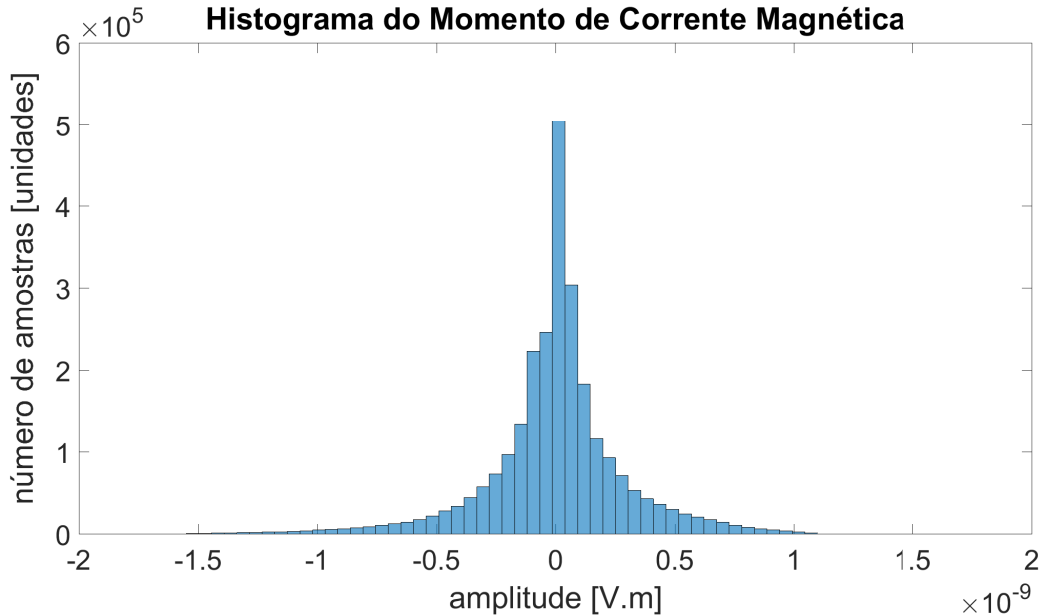


Figura 6.7: Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

Observa-se que estes histogramas apresentam um envelope com formato gaussiano centrado aproximadamente na origem do sistema de coordenadas. É possível

perceber claramente que o maior volume destes dados são nulos ou muito pequenos quando comparado ao valor máximo absoluto. Por este motivo, grande parte do recurso computacional é utilizado desnecessariamente ou é aplicado na geração de uma contribuição desprezível para o campo distante. Portanto, a eliminação dos valores pequenos dos momentos poderia permitir a redução de muitas das várias iterações executadas durante o cálculo das amplitudes dos multipolos esféricos. Esta redução de dados poderia acelerar a execução do algoritmo.

Estes momentos de corrente influenciam diretamente a transformada NFF baseada em multipolos esféricos durante o cálculo das amplitudes dos multipolos expresso pelas Equações 4.35 e 4.36. Posteriormente, essas amplitudes são utilizadas na obtenção do campo distante em qualquer localização para instantes dentro do domínio de simulação. Por fim, os campos instantâneos permitem a geração dos diagramas de radiação em uma determinada frequência por meio da transformada de Fourier.

6.1.1 Redução de Dados

Uma redução dos dados contendo os valores dos momentos de corrente foi realizada após a análise estatística apresentada anteriormente. Esta redução consiste em se eliminar todos os valores absolutos de momentos de corrente menores que um limiar múltiplo do desvio padrão (σ) do conjunto. Embora a análise estatística seja realizada independentemente da posição, a eliminação de dados é realizada em cada posição específica da superfície de Huygens de acordo com o limiar. O limiar de redução foi variado de forma gradativa a fim de se analisar o efeito deste procedimento sobre a geração dos diagramas de radiação produzidos a partir da transformada NFF baseada em multipolos esféricos. Cada conjunto de dados foi especificado de acordo com a natureza da corrente (elétrica ou magnética), a direção em coordenadas esféricas (\hat{r} , $\hat{\theta}$ ou $\hat{\phi}$) e a face da superfície cúbica de Huygens onde se encontram. As Figuras de 6.8 a 6.13 mostram os dados referentes ao histograma da Figura 6.2 após a redução para os limiares de $0,5\sigma$, 1σ , $1,5\sigma$, 2σ , $2,5\sigma$ e 3σ . Estes histogramas correspondem ao conjunto da componente \hat{r} do momento de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal ao lado negativo do eixo y .

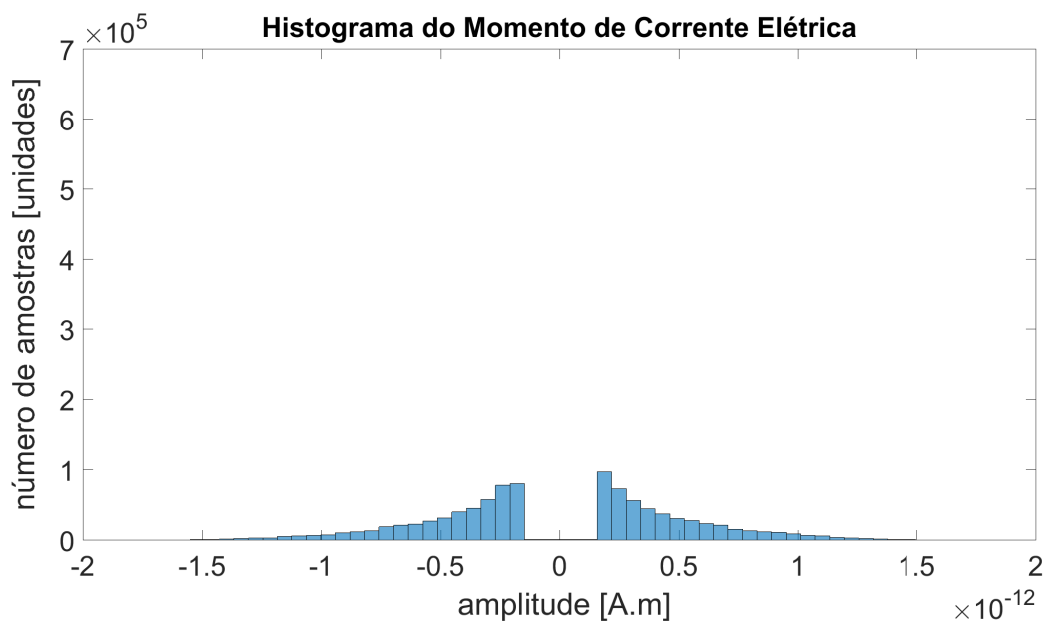


Figura 6.8: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $0,5\sigma$.

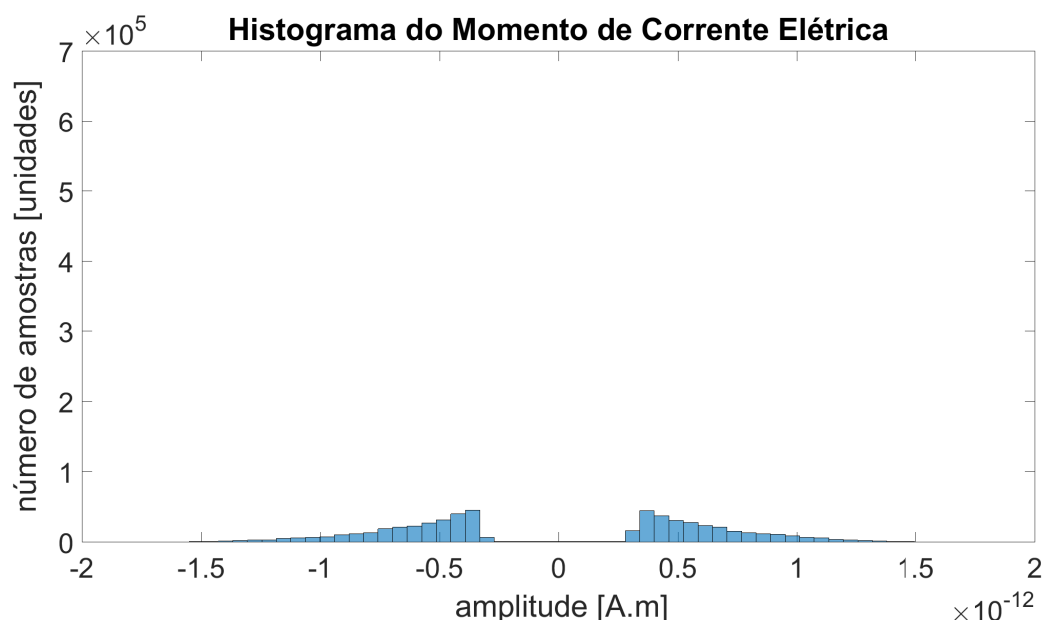


Figura 6.9: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 1σ .

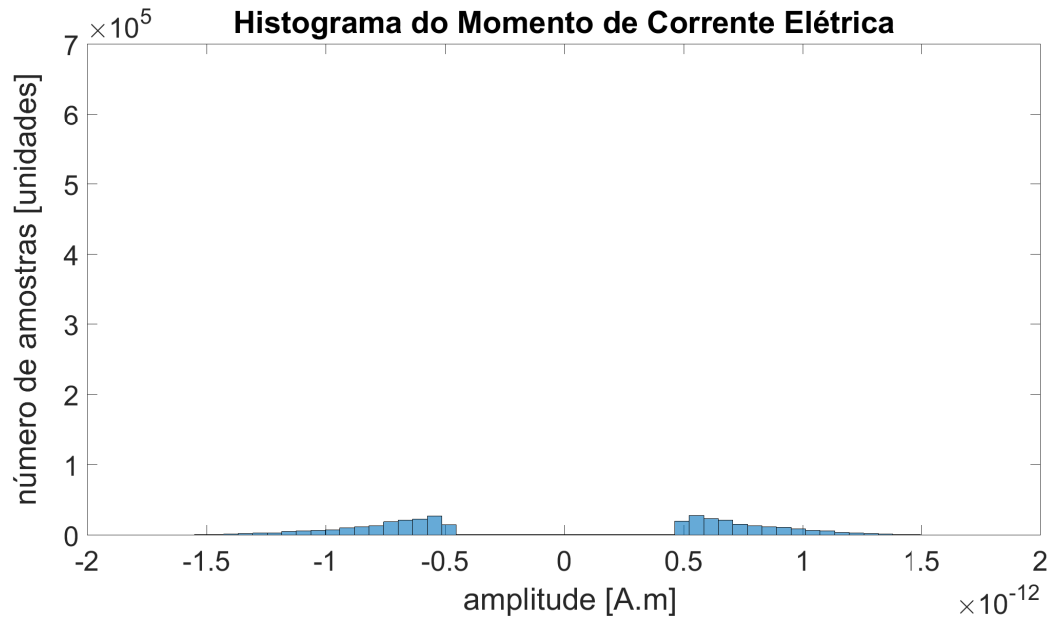


Figura 6.10: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $1,5\sigma$.

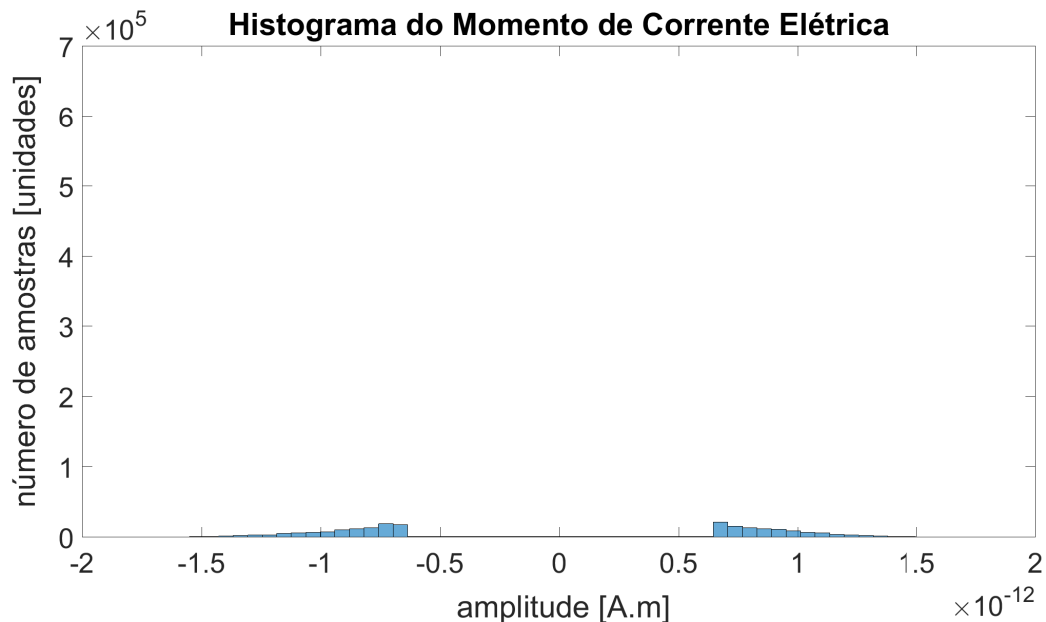


Figura 6.11: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 2σ .

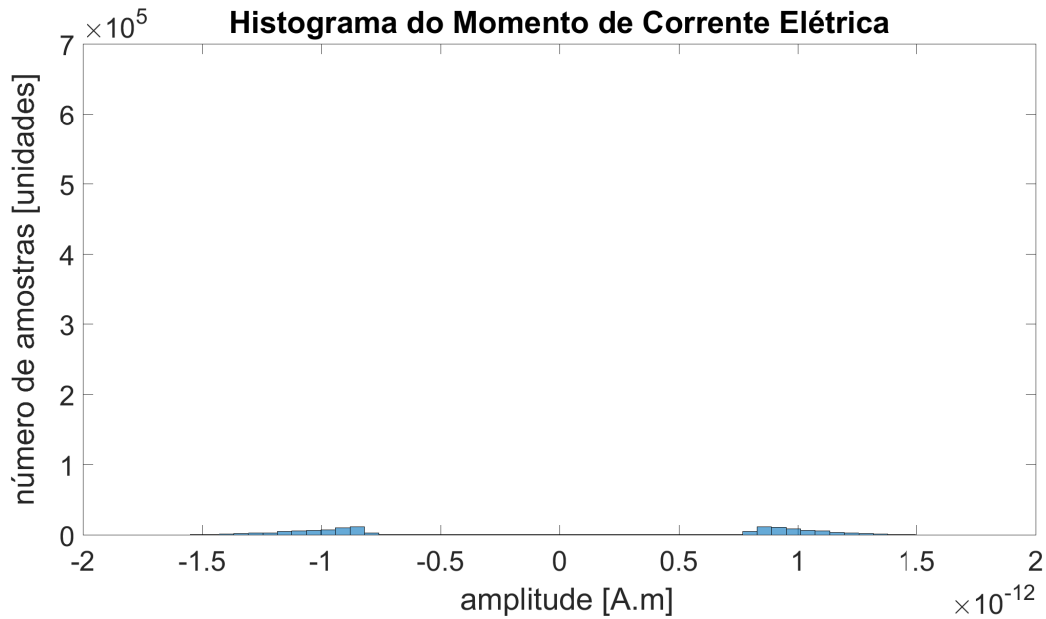


Figura 6.12: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $2,5\sigma$.

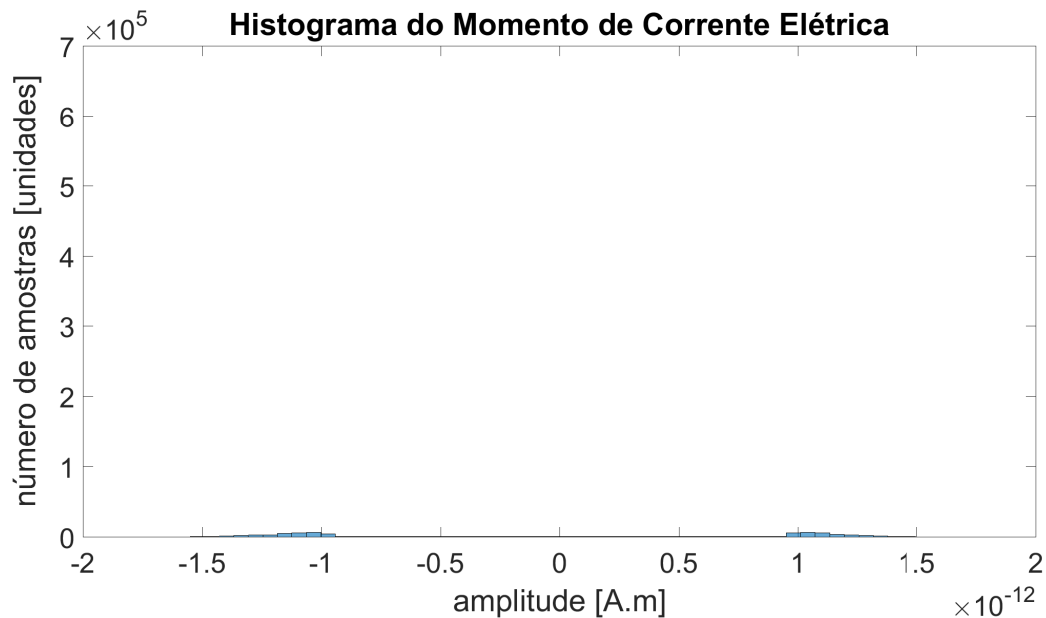


Figura 6.13: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 3σ .

Este procedimento foi repetido com os demais conjuntos de momentos de corrente elétrica e magnética, para todas as direções em coordenadas esféricas e sobre cada uma das faces da superfície cúbica de Huygens separadamente. Os valores eliminados dos dados de entrada originais foram substituídos por zero, que produz o mesmo efeito da eliminação do dado propriamente dita. Portanto, o objetivo principal desta etapa é a validação da técnica de redução de dados através de análise estatística. Posteriormente, esta técnica poderá contribuir para o desenvolvimento de um algoritmo que, de fato, ignore os valores eliminados.

A Tabela 6.1 apresenta a taxa global da redução de dados para cada limiar no estudo de caso do dipolo de meia-onda. Observa-se que o maior volume da redução de dados acontece no centro do histograma devido ao seu envelope aparentemente gaussiano. Por fim, quase todo o volume de dados foi eliminado na faixa de 3σ , como era de se esperar no caso de uma gaussiana perfeita.

Tabela 6.1: Taxa da redução global dos dados de entrada com diferentes limiares de seleção para o dipolo de meia-onda em 10 GHz.

Limiar de Seleção	Taxa da Redução de Dados
$0,5\sigma$	56,01 %
$1,0\sigma$	72,07 %
$1,5\sigma$	80,08 %
$2,0\sigma$	84,75 %
$2,5\sigma$	87,59 %
$3,0\sigma$	89,40 %

6.1.2 Resultados

Uma vez que os conjuntos com os dados dos momentos de corrente foram processados, os mesmos foram aplicados à transformada NFF baseada em multipolos esféricos. Os diagramas de radiação das Figuras de 6.14 a 6.25 apresentam os resultados da análise estatística para a configuração da transformada quando $n_{máx} = 1$ no estudo de caso do dipolo de meia-onda em 10 GHz. Os diagramas destas figuras têm como referência a solução por multipolos esféricos para o mesmo valor de $n_{máx} = 1$ sem qualquer redução. Observa-se uma grande concordância dos resultados com a solução original (identificada como "multipolos" nos diagramas) mesmo diante de reduções tão expressivas no volume dos dados de entrada. Em destaque, o limiar de 3σ utiliza somente cerca de

10% dos dados de entrada e apresenta erros inferiores a 0,3 dB quando comparado com a solução original sem redução, como pode ser observado na Tabela 6.2.

A grande vantagem desta redução é o fato de que inúmeras iterações que geram contribuição desprezível ao resultado final poderiam ser eliminadas, viabilizando uma significativa economia do custo computacional. A Figura 6.26 permite observar o comportamento do erro de acordo com cada limiar de seleção em cada plano. Um outro ponto relevante é a configuração de $n_{máx} = 1$, que significa considerar apenas os três primeiros coeficientes da expansão em multipolos esféricos. A obtenção das amplitudes de cada elemento da expansão constituem a maior demanda computacional do método. Desta forma, quanto menos elementos na expansão, menos amplitudes precisam ser calculadas e menor capacidade computacional é exigida.

As Figuras de 6.27 a 6.38 apresentam os resultados da análise estatística para a configuração da transformada NFF com $n_{máx} = 6$. O diagrama de referência etiquetado como "multipolos" exhibe a solução a partir dos dados originais sem redução. Nota-se que, quando o número de coeficientes considerados na expansão aumenta, o efeito da análise estatística sobre o erro também aumenta em comparação ao caso anterior com $n_{máx} = 1$. A Tabela 6.3 e a Figura 6.39 apresentam o erro gerado para este caso. Portanto, a análise estatística forneceu um resultado melhor quando o número de coeficientes da expansão foi menor. Este efeito é duplamente vantajoso, pois permite associar a redução de coeficientes da expansão juntamente com a redução dos dados de entrada da transformada.

Por fim, as Figuras de 6.40 a 6.51 exibem o resultado da análise estatística do dipolo de meia-onda para a transformada com $n_{máx} = 11$. Este caso com um número maior de coeficientes na expansão, calculado de acordo com a literatura, foi mais sensível à redução de dados e apresentou maior deformação do diagrama. Contudo, o erro envolvido foi pequeno, como pode ser visto na Tabela 6.4 e na Figura 6.52. No geral, observa-se que a análise estatística forneceu um resultado bastante preciso a partir de uma parcela muito pequena dos dados de entrada originais no caso do dipolo de meia-onda em todas as configurações adotadas.

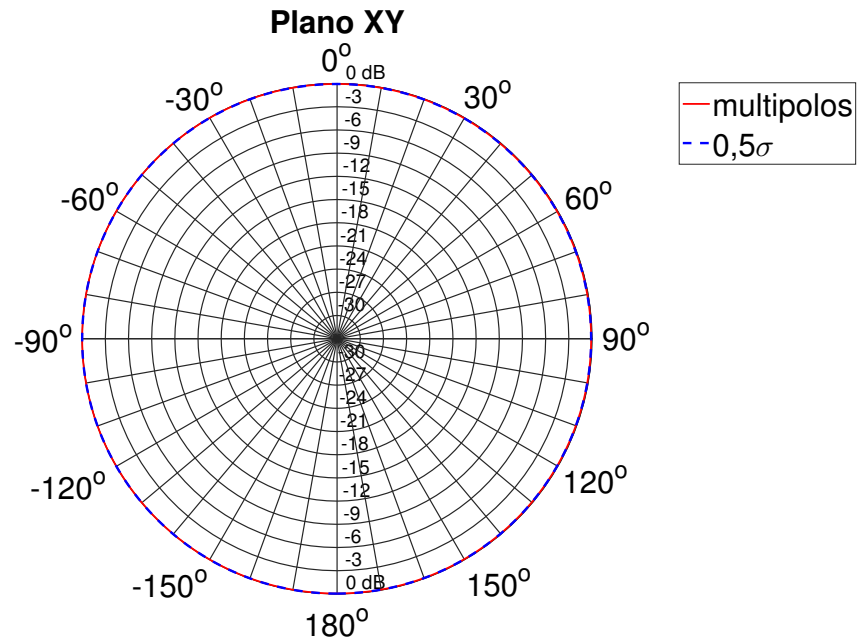


Figura 6.14: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

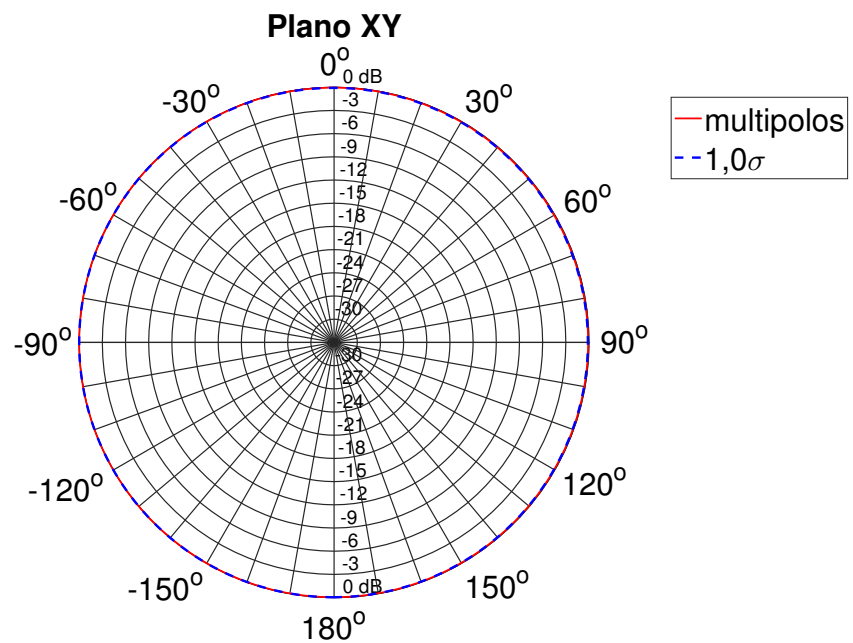


Figura 6.15: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

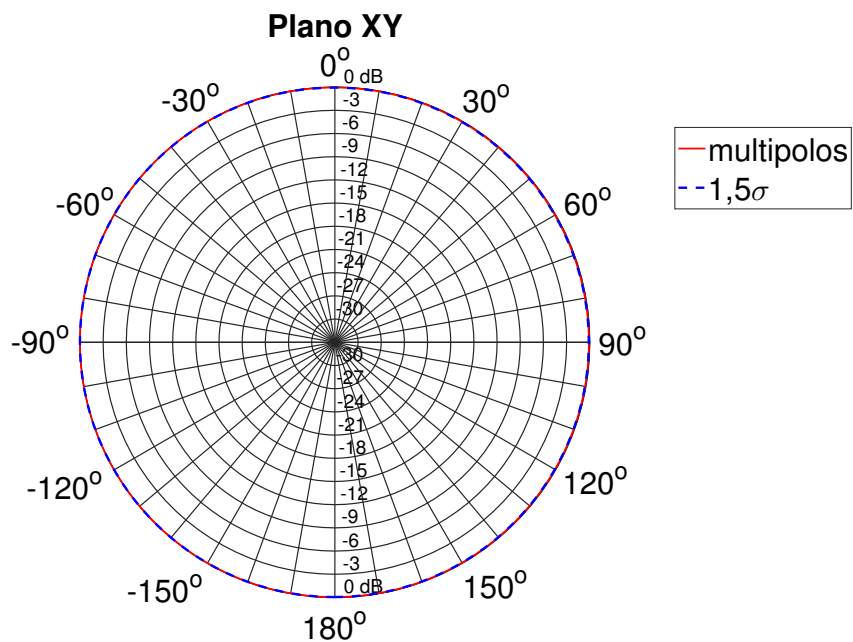


Figura 6.16: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

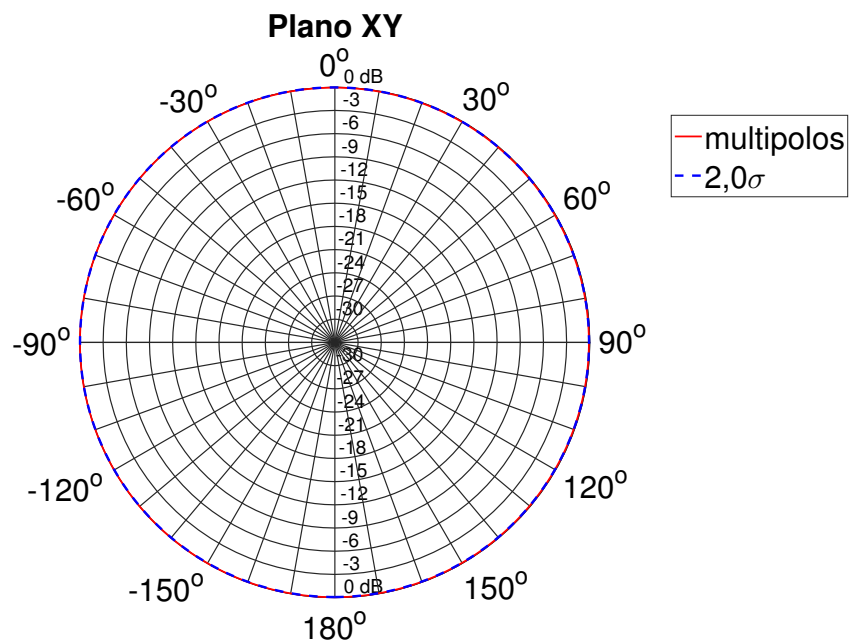


Figura 6.17: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

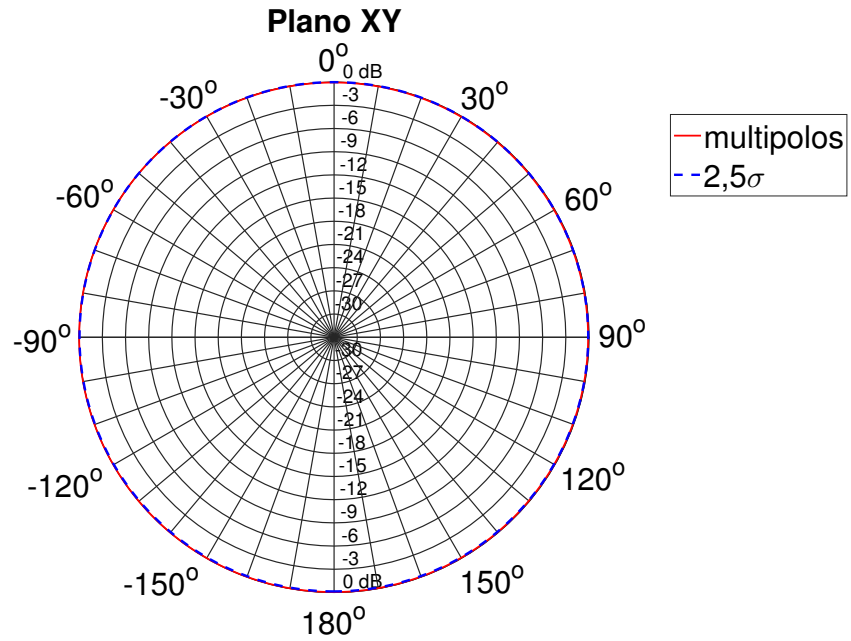


Figura 6.18: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

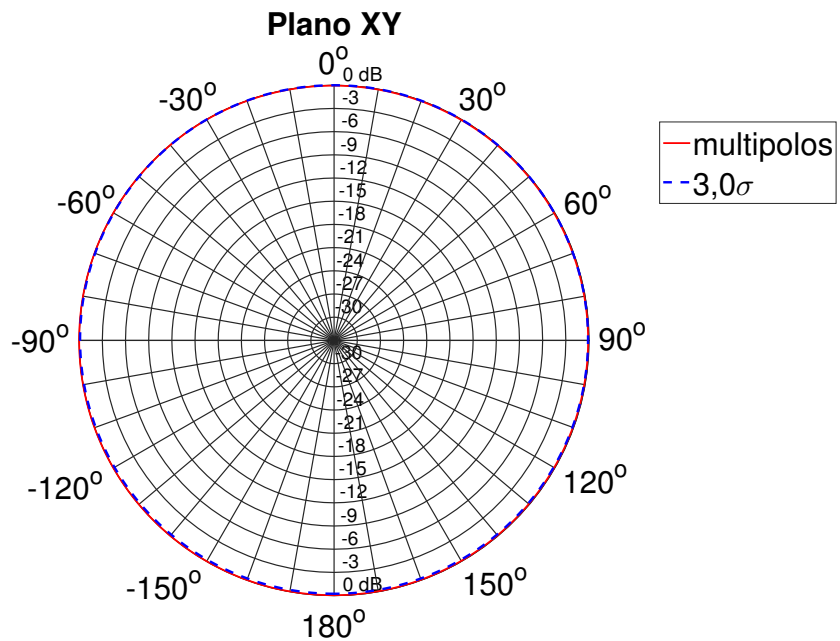


Figura 6.19: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

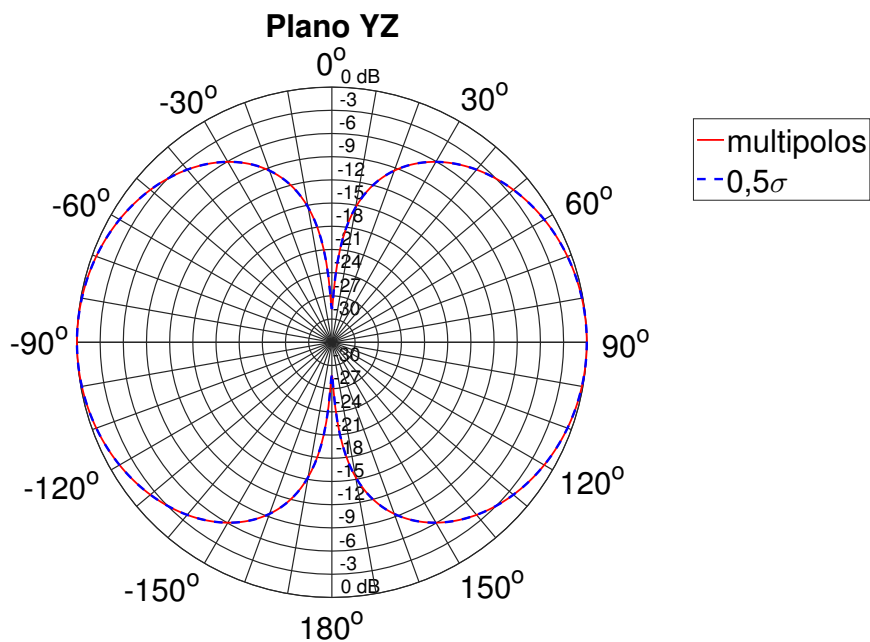


Figura 6.20: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

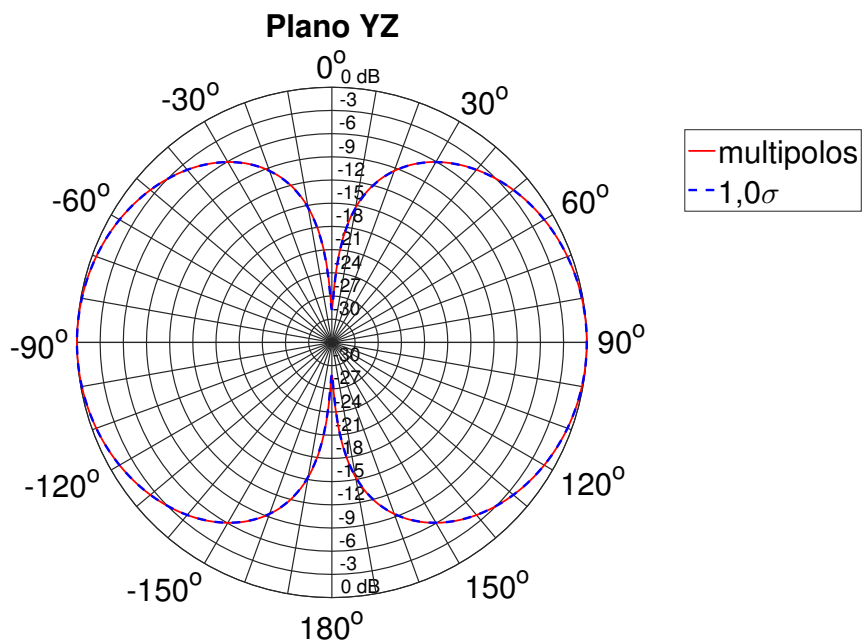


Figura 6.21: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

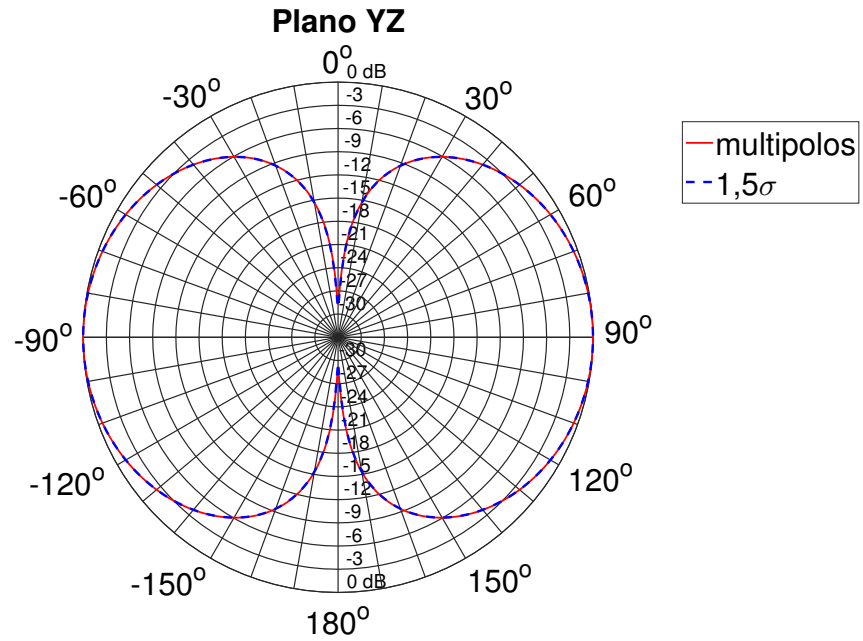


Figura 6.22: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

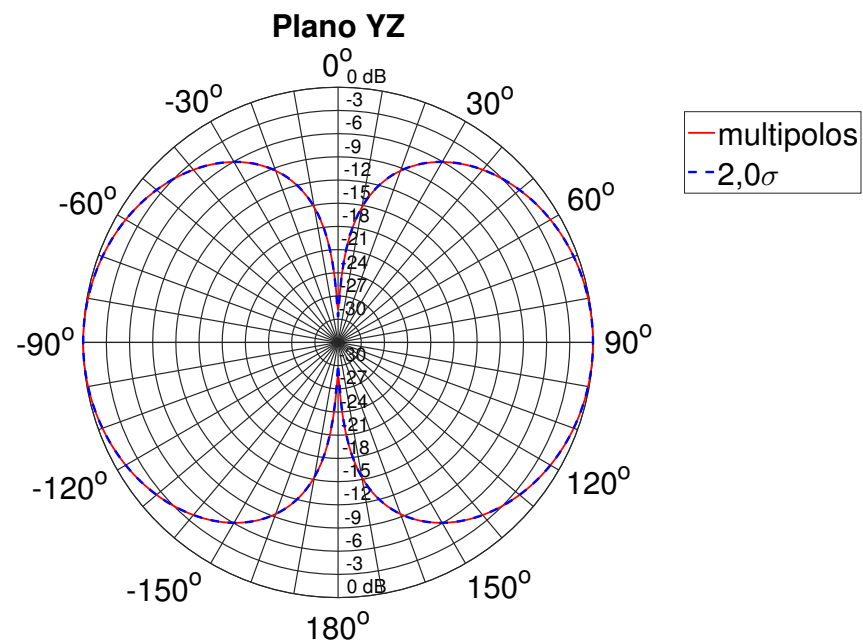


Figura 6.23: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

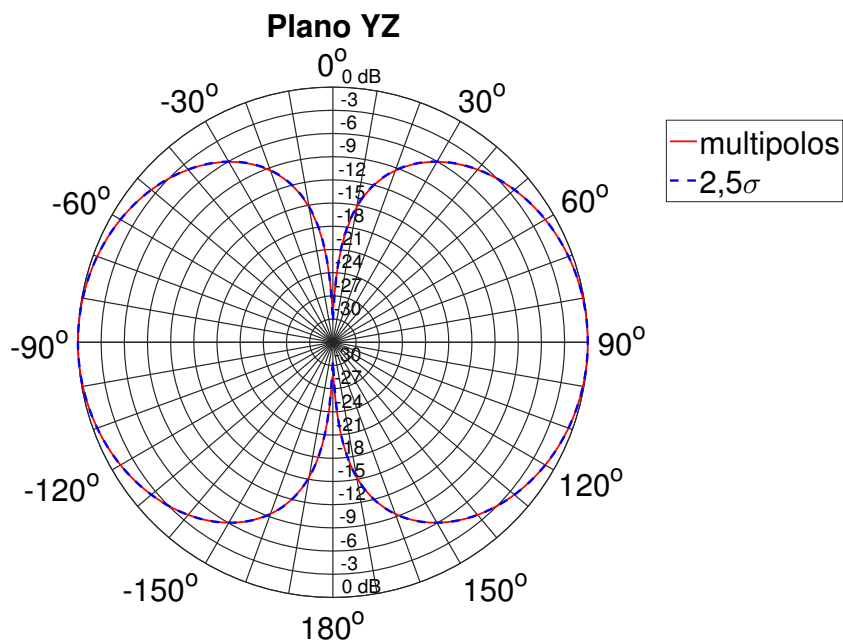


Figura 6.24: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

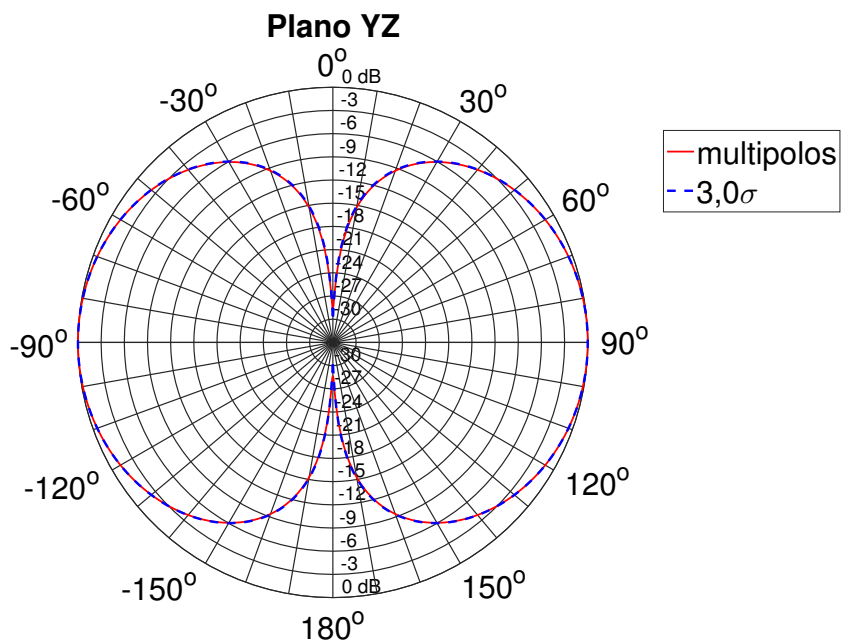


Figura 6.25: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

Tabela 6.2: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e as soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.

Limiar de Seleção	Plano xy	Plano xz	Plano yz
$0,5\sigma$	0,00656	0,02828	0,00872
$1,0\sigma$	0,02180	0,17581	0,05345
$1,5\sigma$	0,01075	0,09809	0,09429
$2,0\sigma$	0,02074	0,19372	0,14002
$2,5\sigma$	0,05416	0,14886	0,21056
$3,0\sigma$	0,11488	0,28951	0,18328

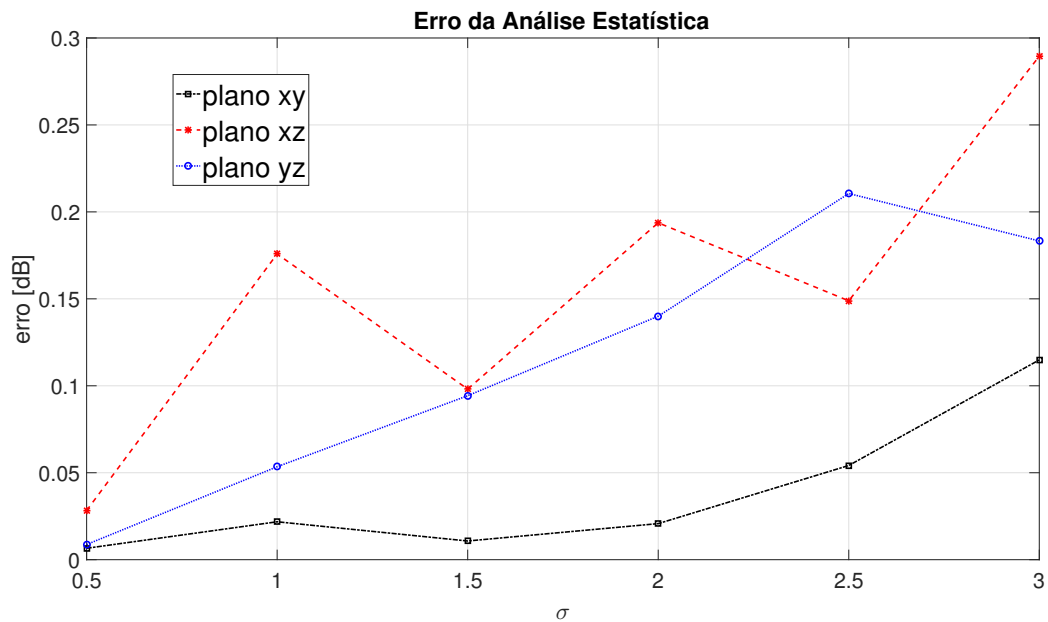


Figura 6.26: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção.

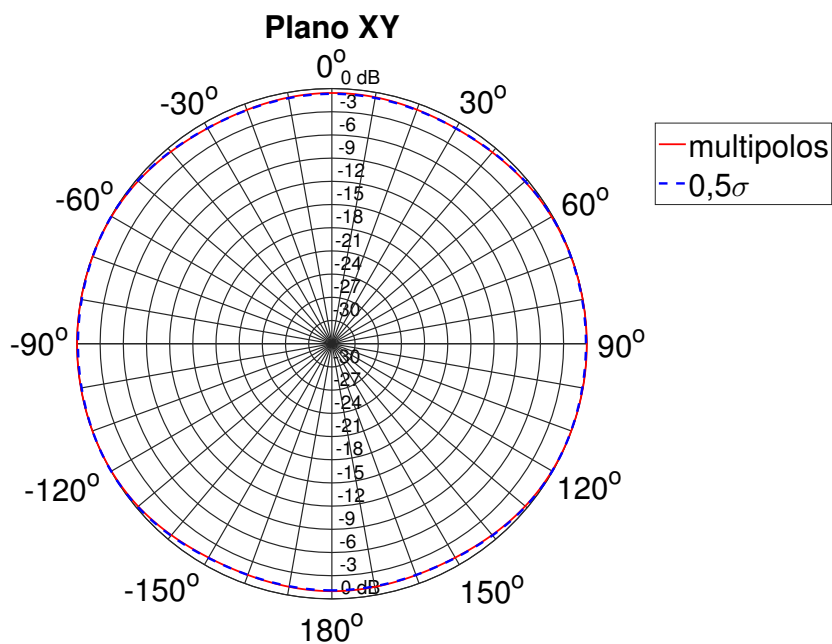


Figura 6.27: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

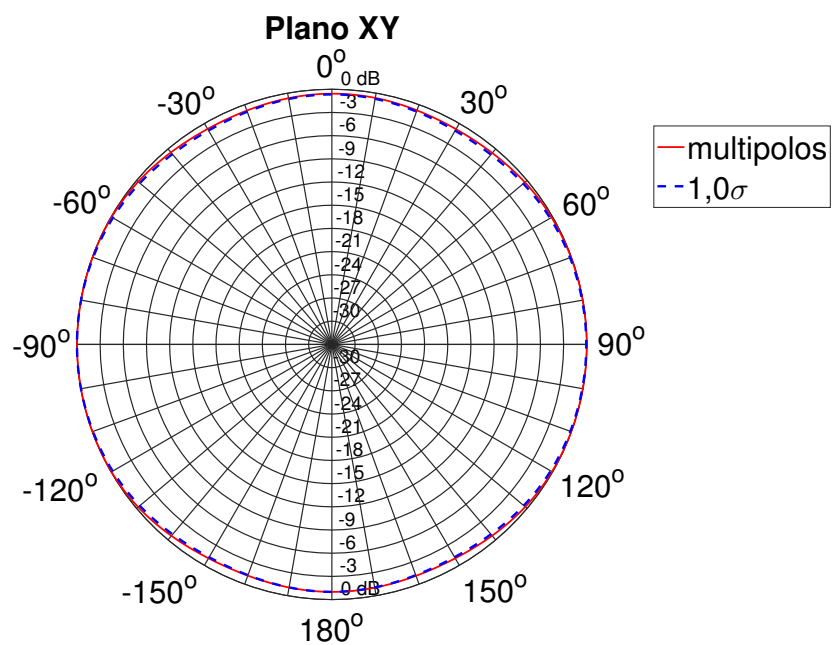


Figura 6.28: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

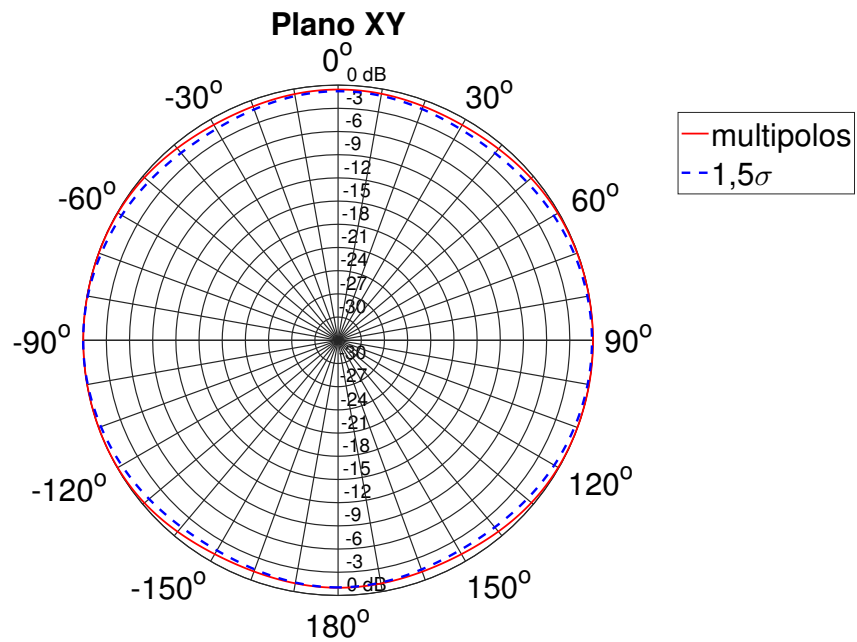


Figura 6.29: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

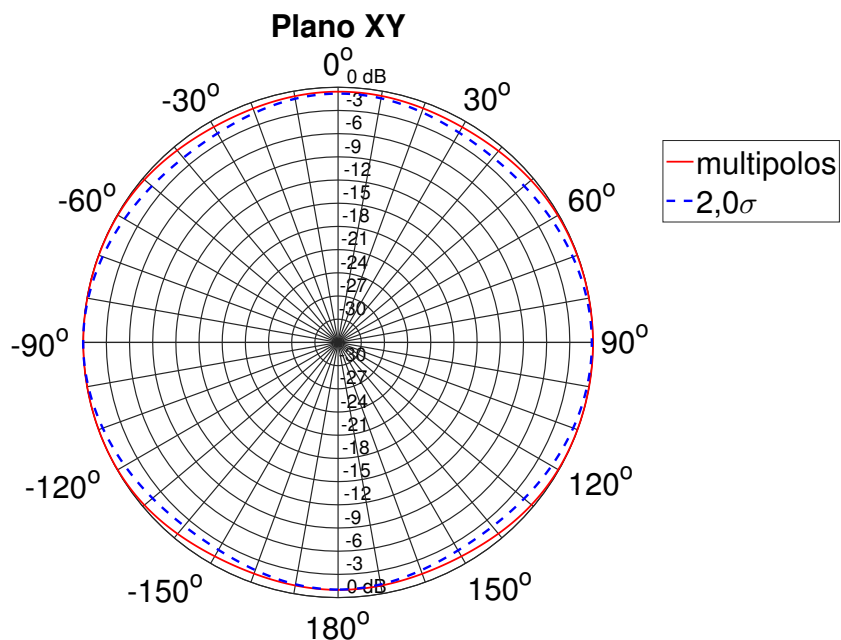


Figura 6.30: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

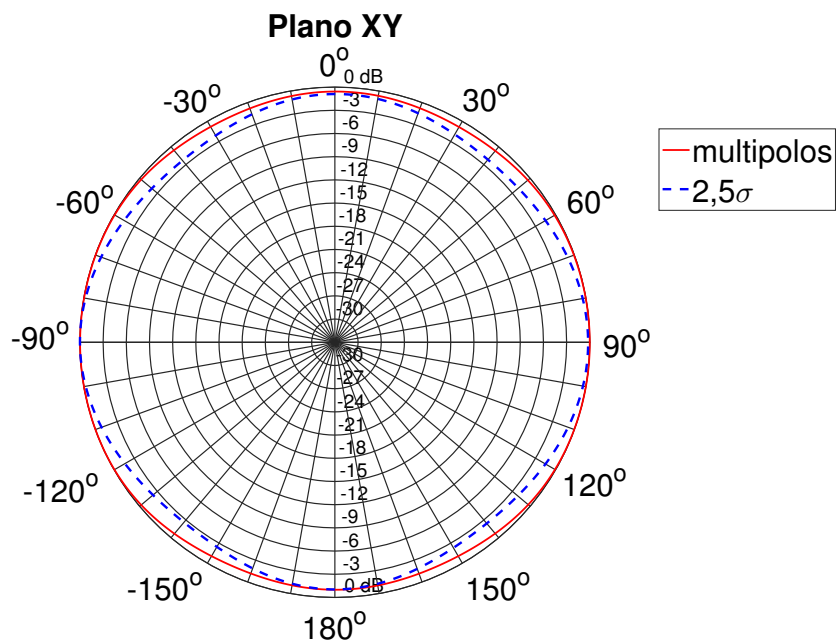


Figura 6.31: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

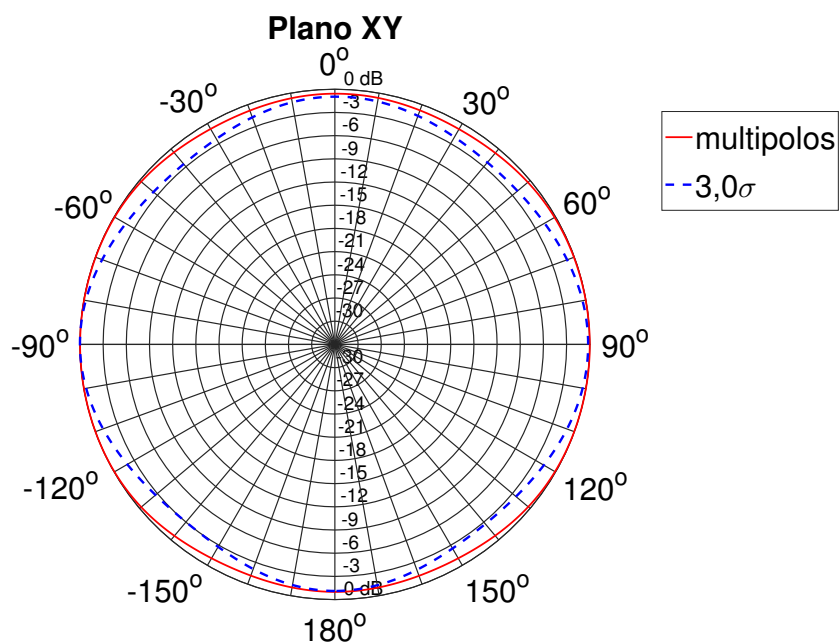


Figura 6.32: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

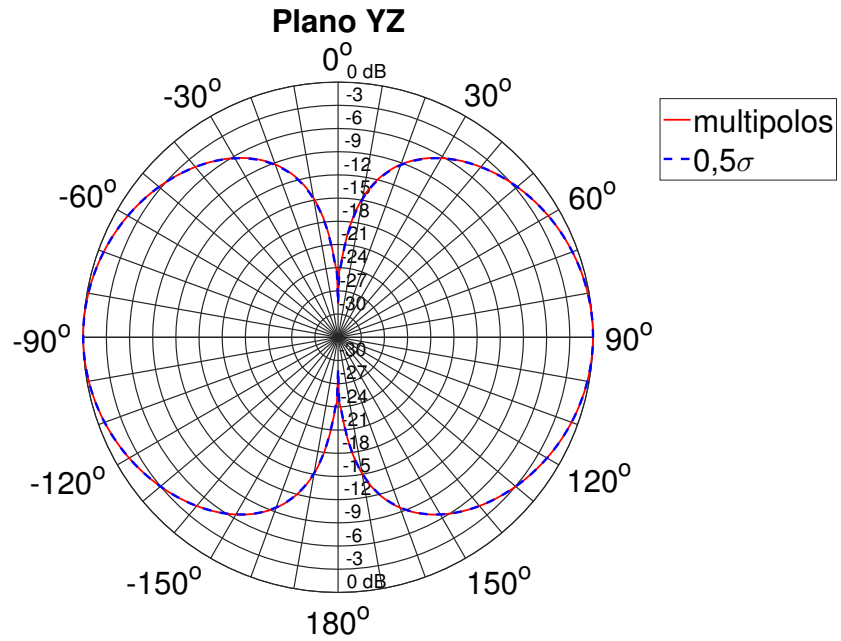


Figura 6.33: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

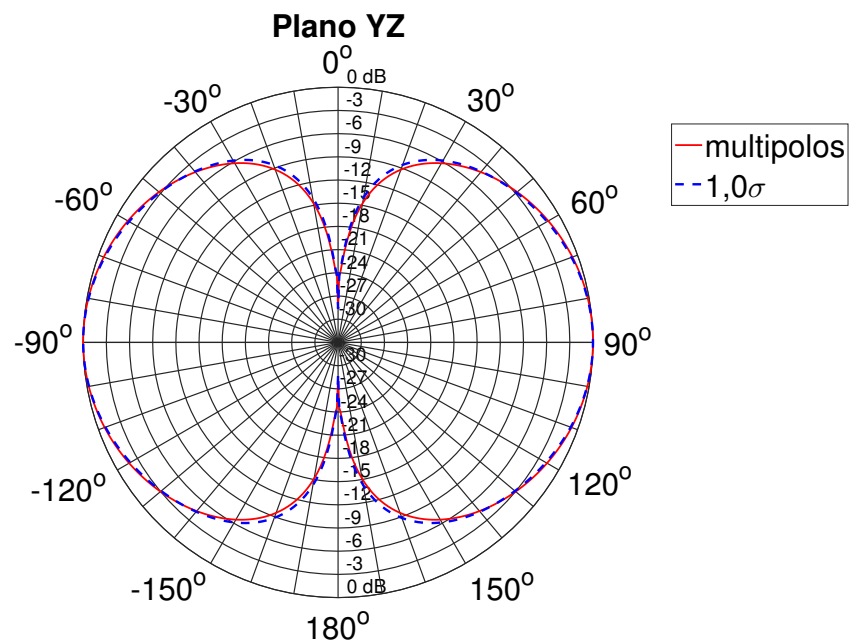


Figura 6.34: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

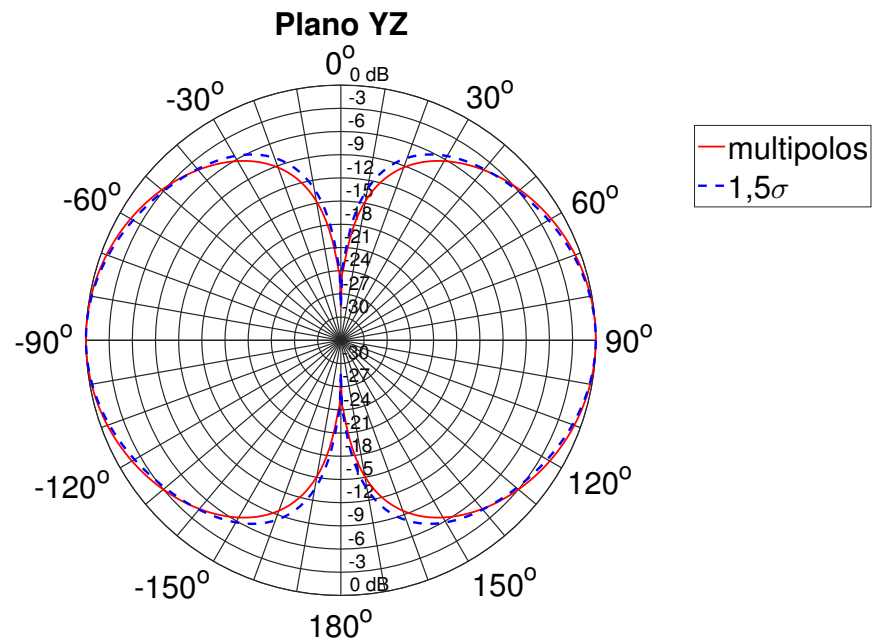


Figura 6.35: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

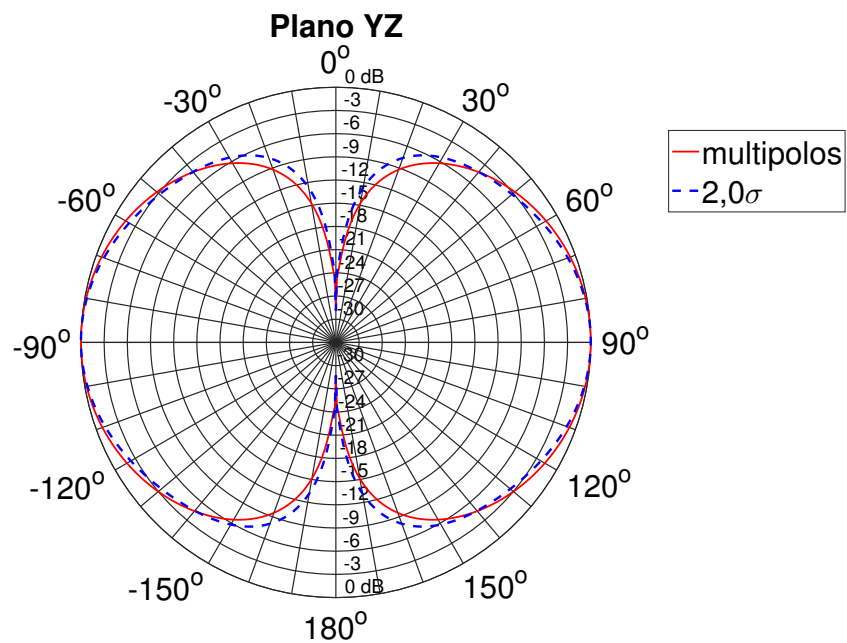


Figura 6.36: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

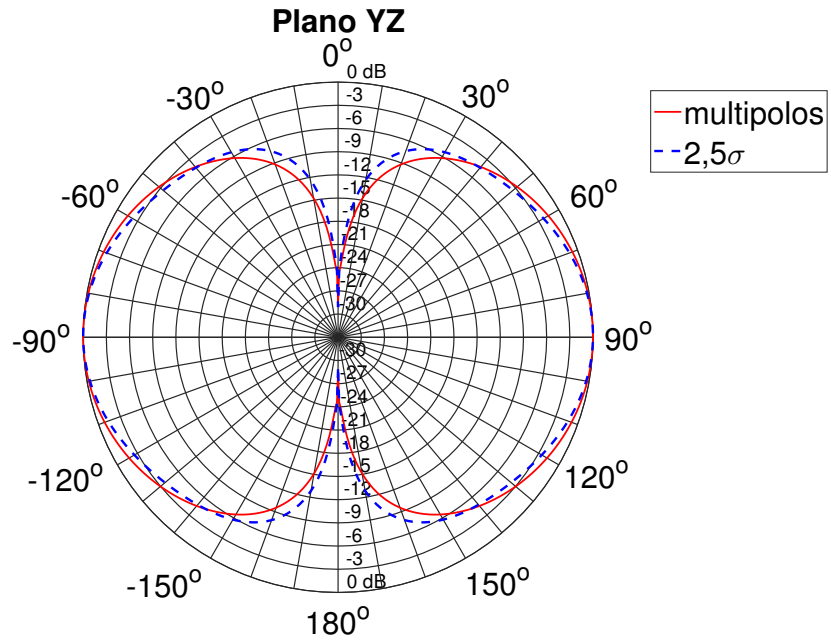


Figura 6.37: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

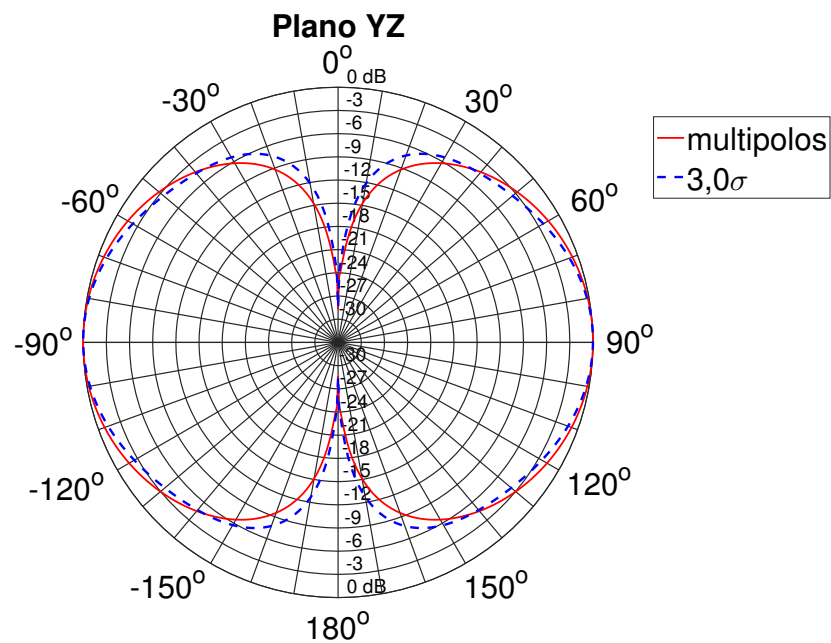


Figura 6.38: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 6$.

Tabela 6.3: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 6$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.

Limiar de Seleção	Plano xy	Plano xz	Plano yz
$0,5\sigma$	0,06451	0,13009	0,05806
$1,0\sigma$	0,16839	0,55268	0,39436
$1,5\sigma$	0,48792	1,18779	0,79984
$2,0\sigma$	0,79039	1,52437	0,96304
$2,5\sigma$	1,11877	1,86010	1,12376
$3,0\sigma$	1,30566	2,15247	1,19570

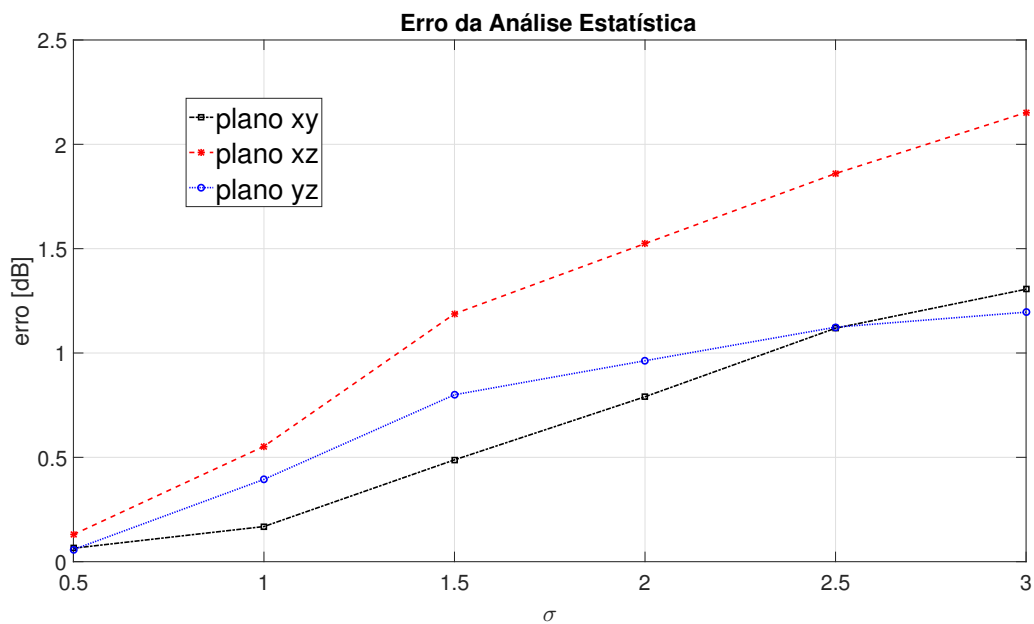


Figura 6.39: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 6$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção.

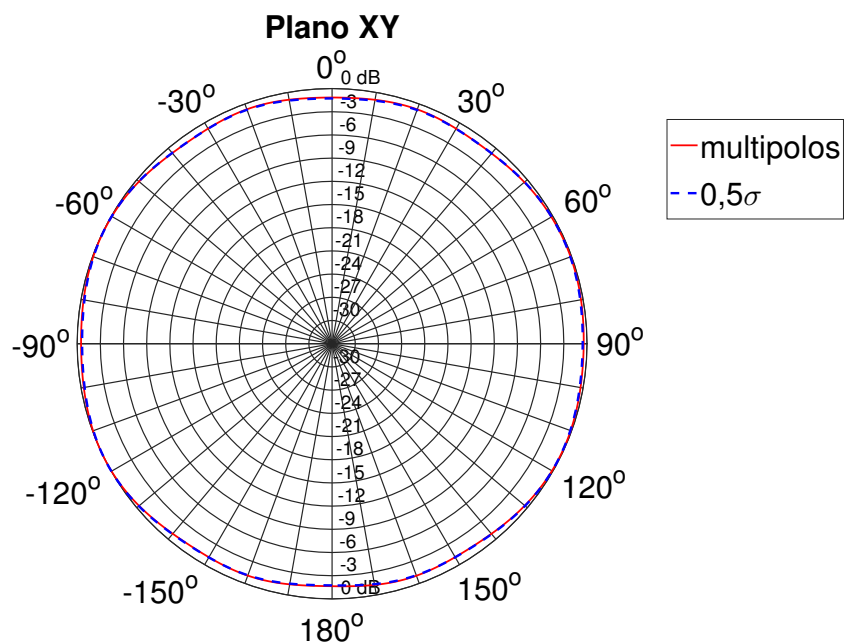


Figura 6.40: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

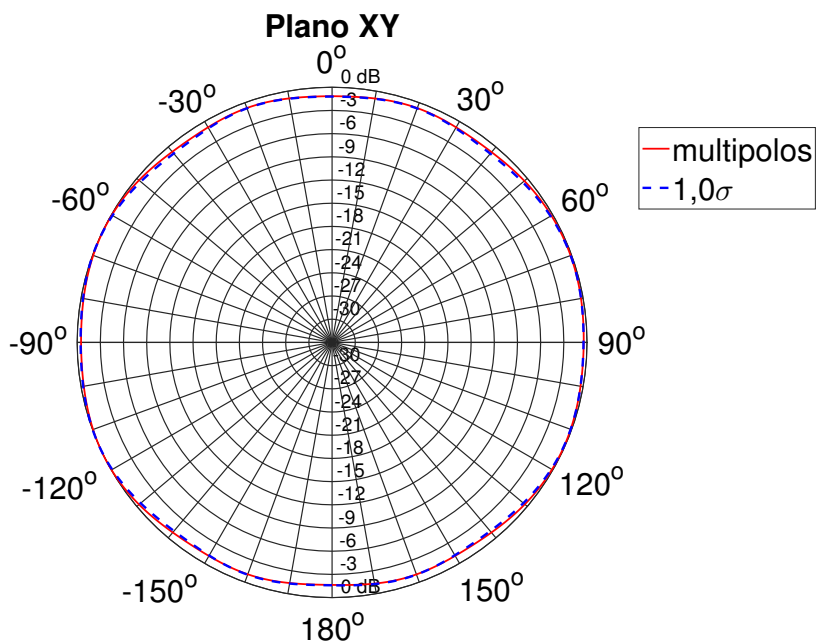


Figura 6.41: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

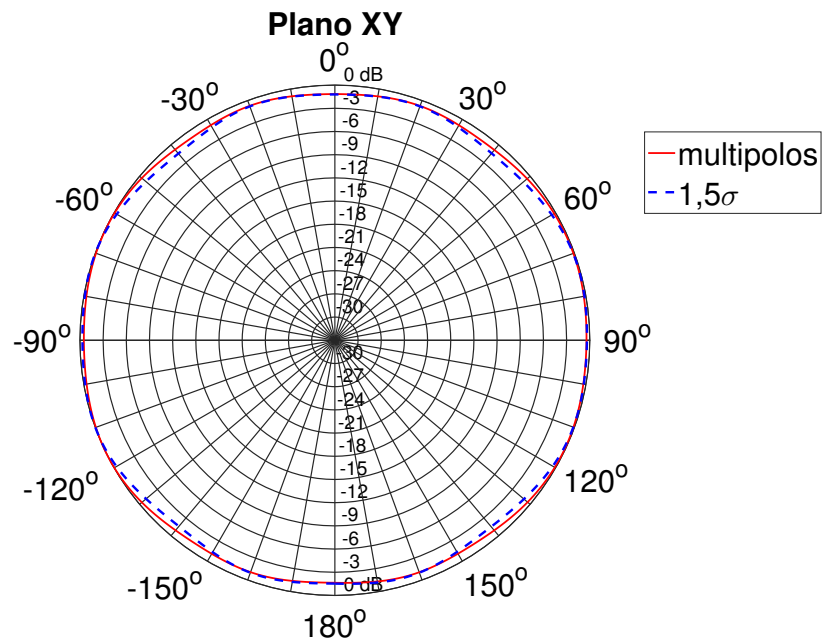


Figura 6.42: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

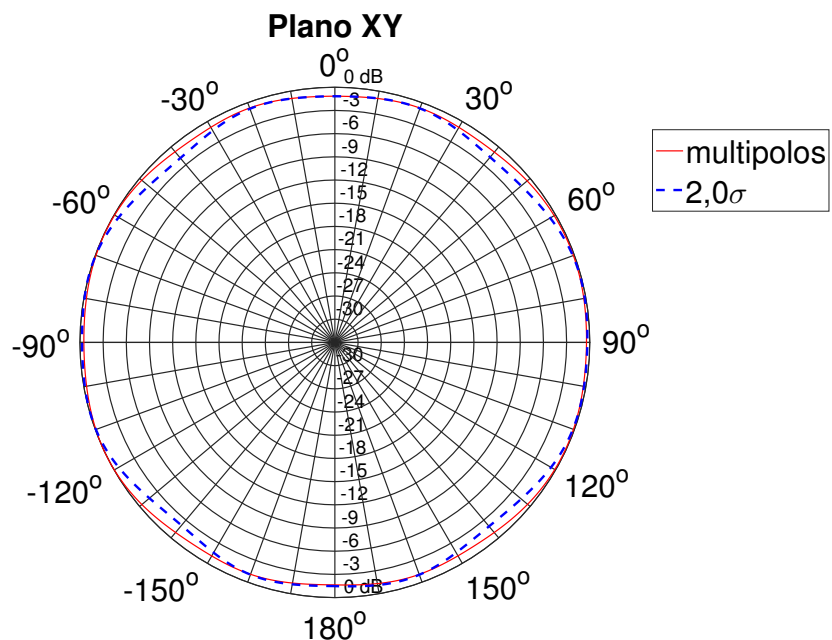


Figura 6.43: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

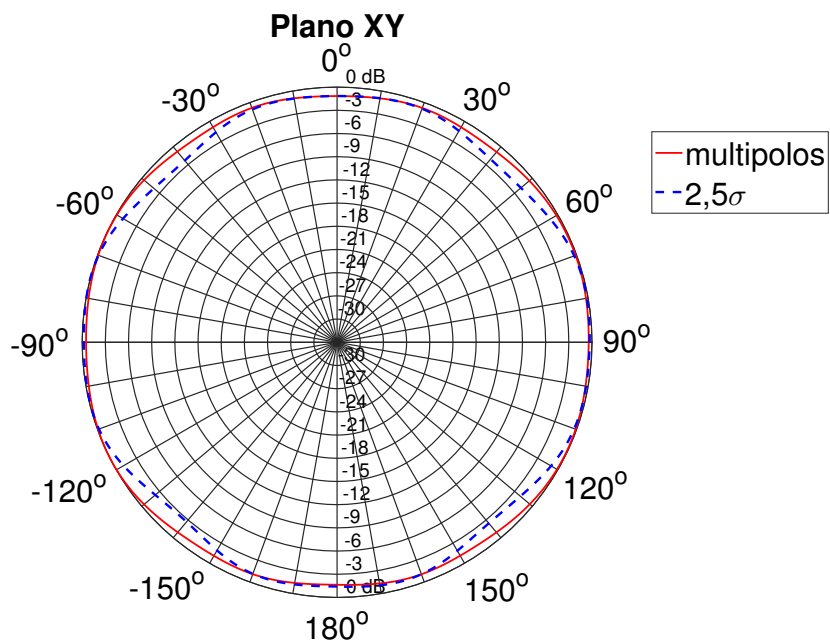


Figura 6.44: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

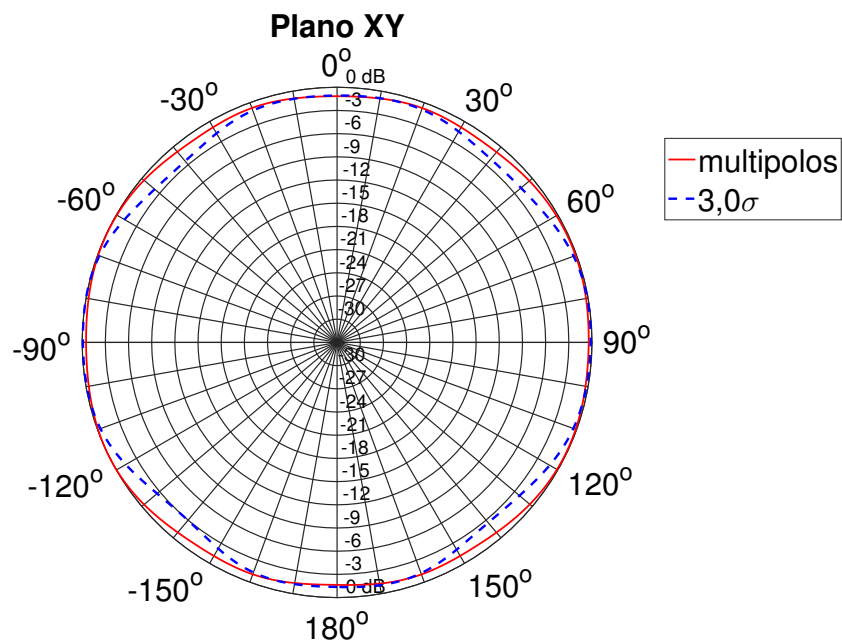


Figura 6.45: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

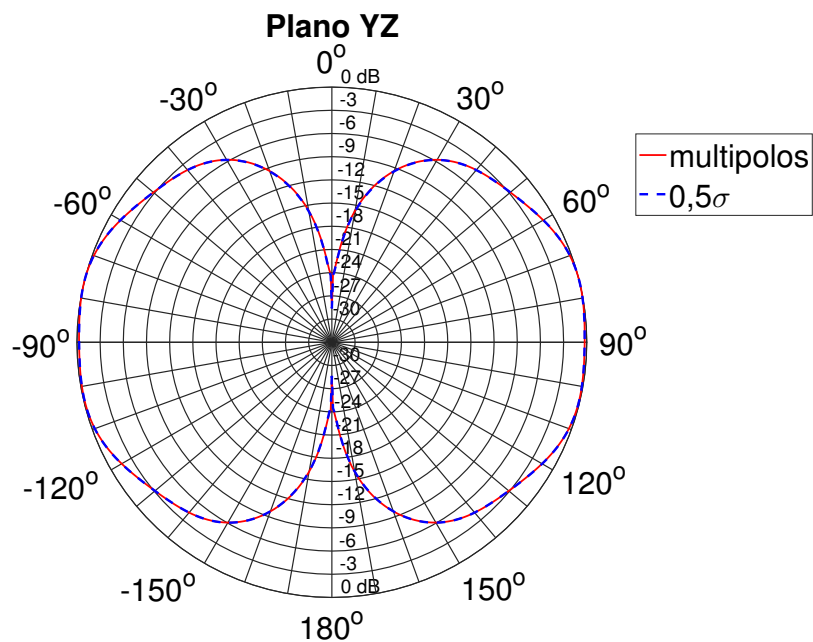


Figura 6.46: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

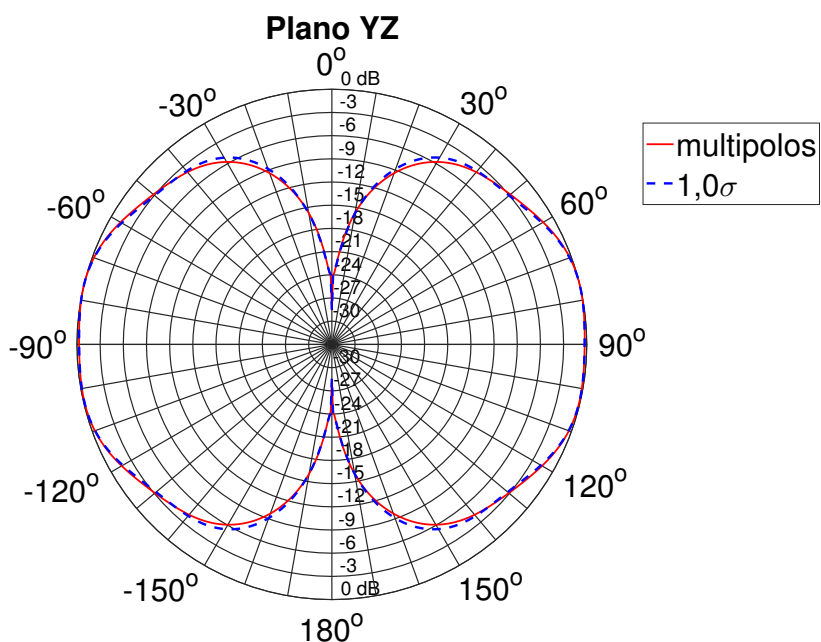


Figura 6.47: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

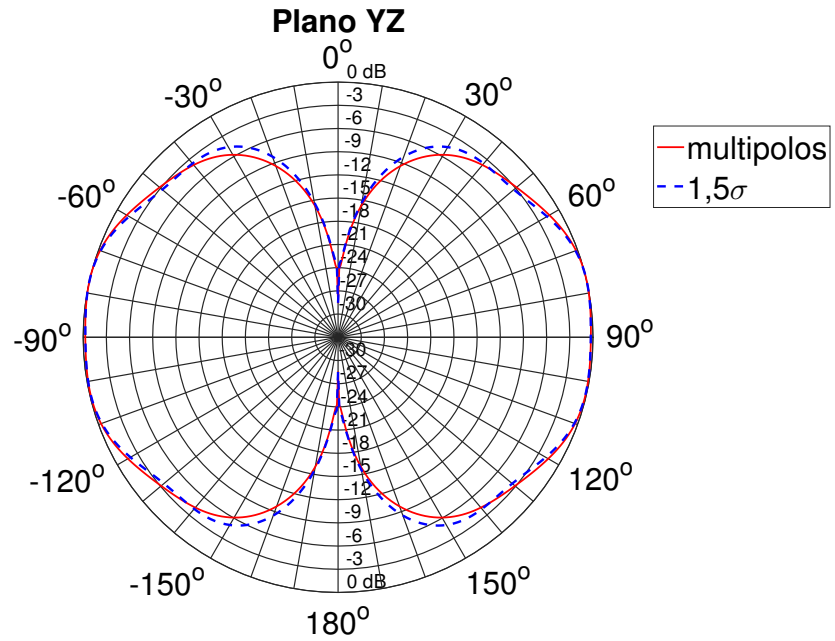


Figura 6.48: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

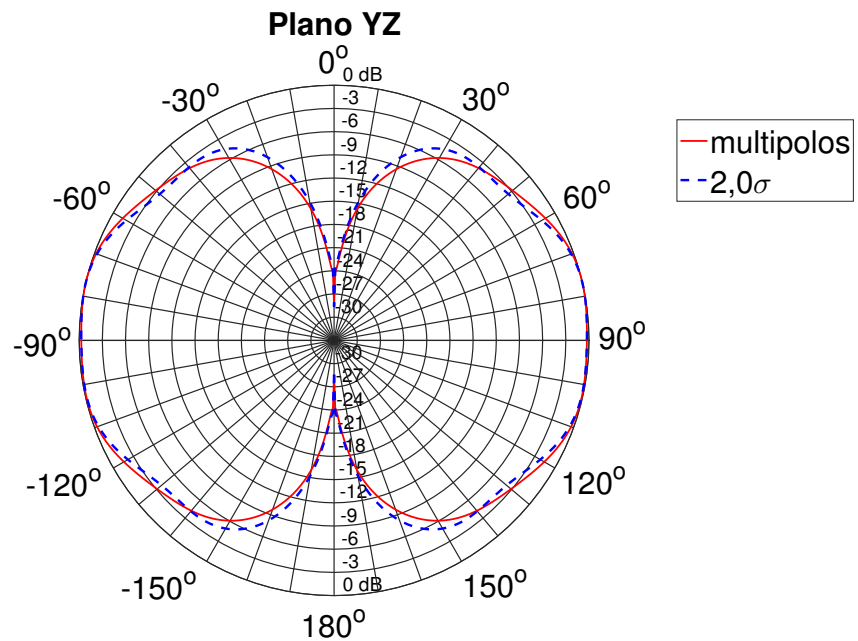


Figura 6.49: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

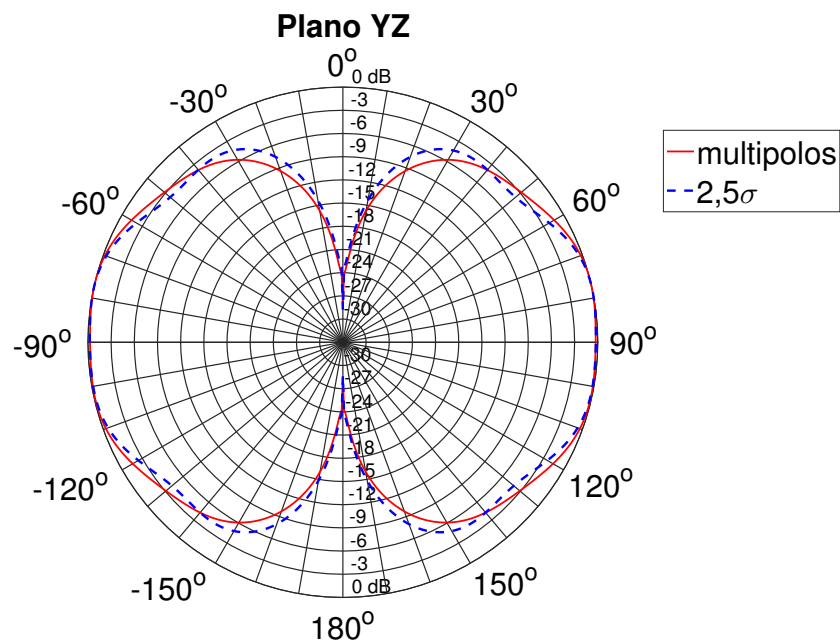


Figura 6.50: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

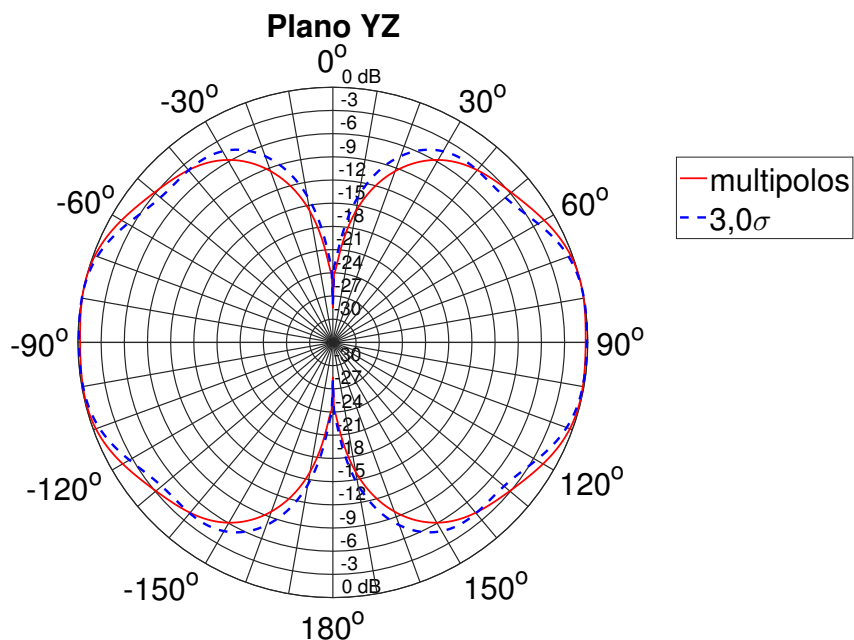


Figura 6.51: Diagrama de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz no plano yz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 11$.

Tabela 6.4: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{máx} = 11$ e soluções com análise estatística para diferentes limiares de seleção em decibéis.

Limiar de Seleção	Plano xy	Plano xz	Plano yz
$0,5\sigma$	0,07215	0,07149	0,05060
$1,0\sigma$	0,13811	0,50318	0,31569
$1,5\sigma$	0,34445	1,10093	0,63250
$2,0\sigma$	0,57972	1,48093	0,80080
$2,5\sigma$	0,85341	1,88451	0,98841
$3,0\sigma$	0,96776	2,24617	1,12880

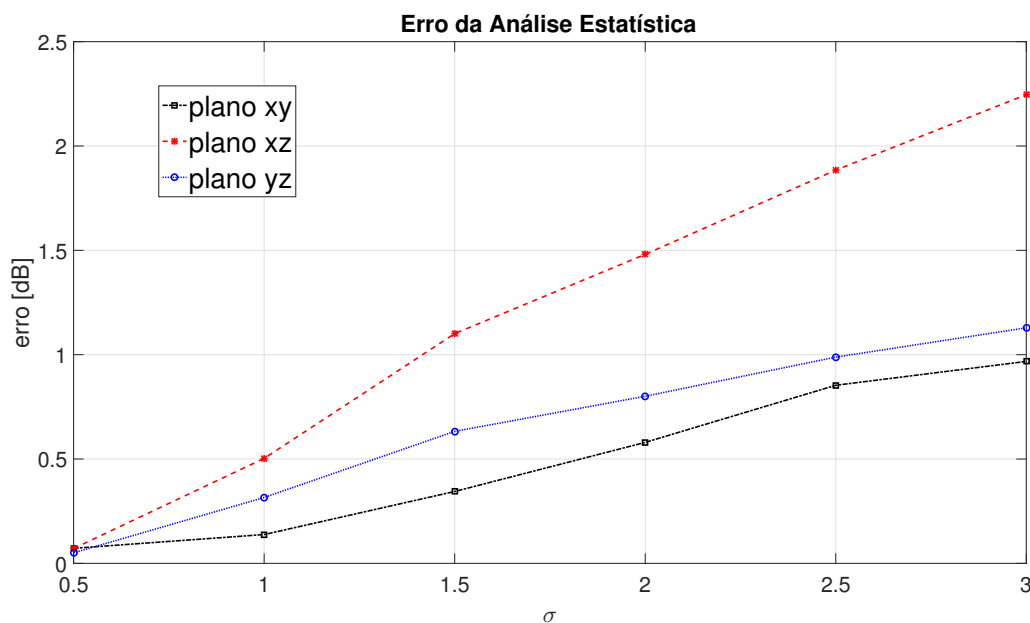


Figura 6.52: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{máx} = 11$ e soluções com análise estatística do dipolo de meia-onda em 10 GHz para diferentes limiares de seleção.

6.2 Antena *Quasi*-Yagi

Uma vez que a análise estatística apresentou resultados interessantes para o dipolo de meia-onda, o mesmo procedimento foi aplicado à antena impressa de dupla banda *quasi*-yagi. As Figuras de 6.53 a 6.58 exibem os histogramas de alguns conjuntos de dados de entrada desta antena sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano

xz ortogonal ao lado negativo do eixo y . O comportamento gaussiano da distribuição estatística foi observado em todos os conjuntos, possibilitando a redução de dados nos mesmos padrões aplicados anteriormente ao dipolo de meia-onda.

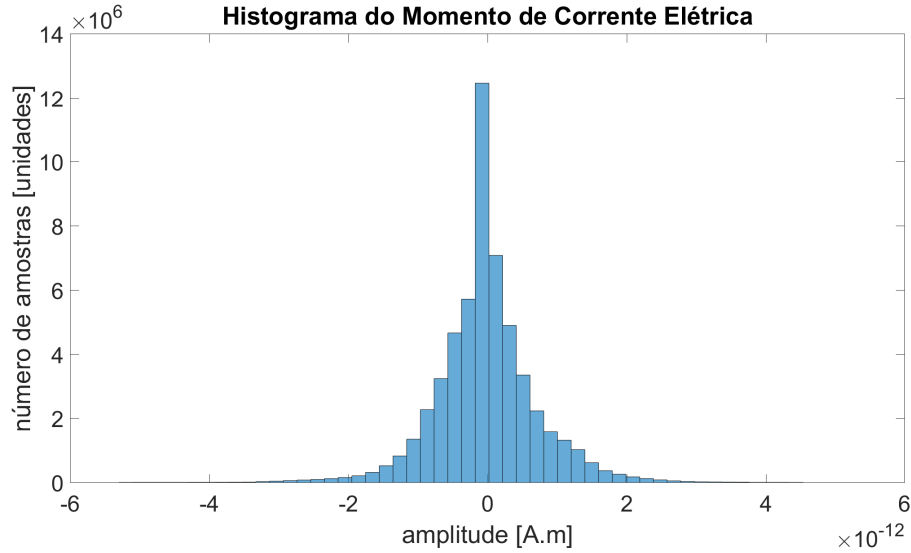


Figura 6.53: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

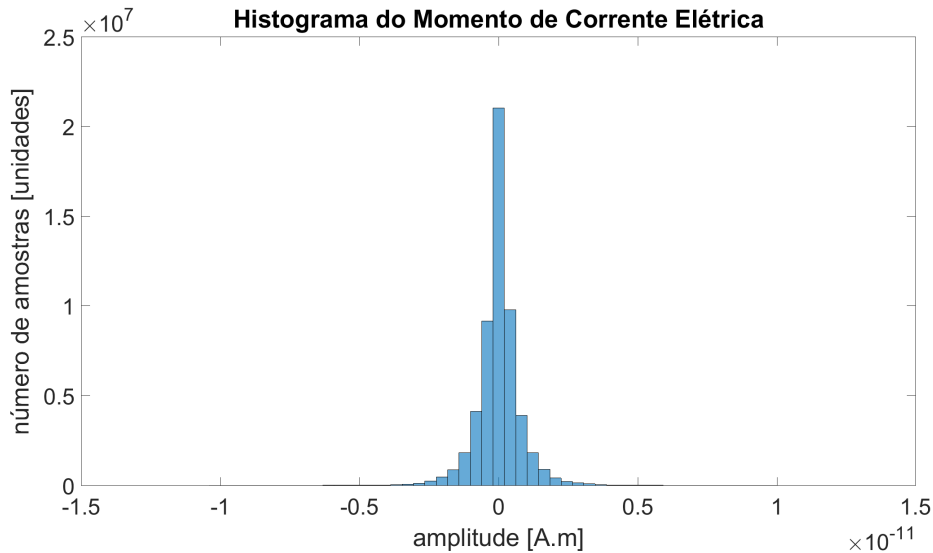


Figura 6.54: Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

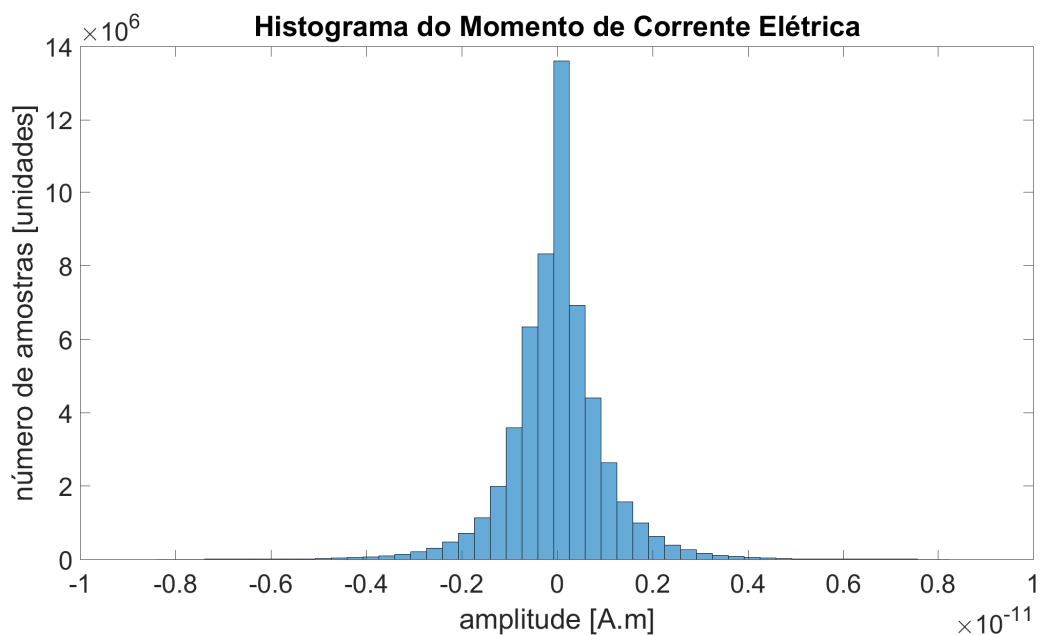


Figura 6.55: Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

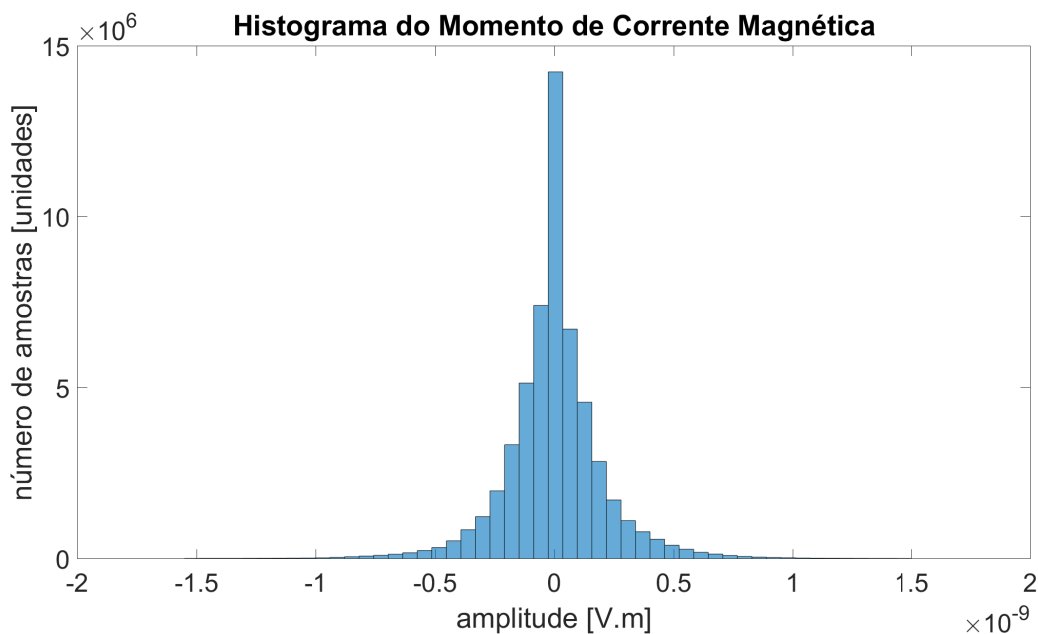


Figura 6.56: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

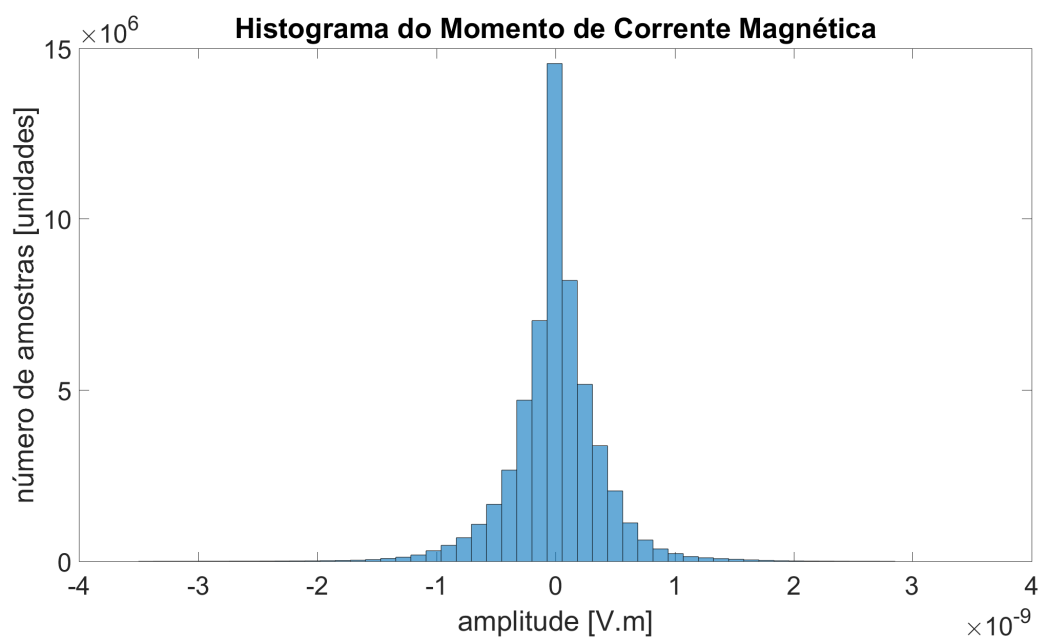


Figura 6.57: Histograma da componente $\hat{\theta}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

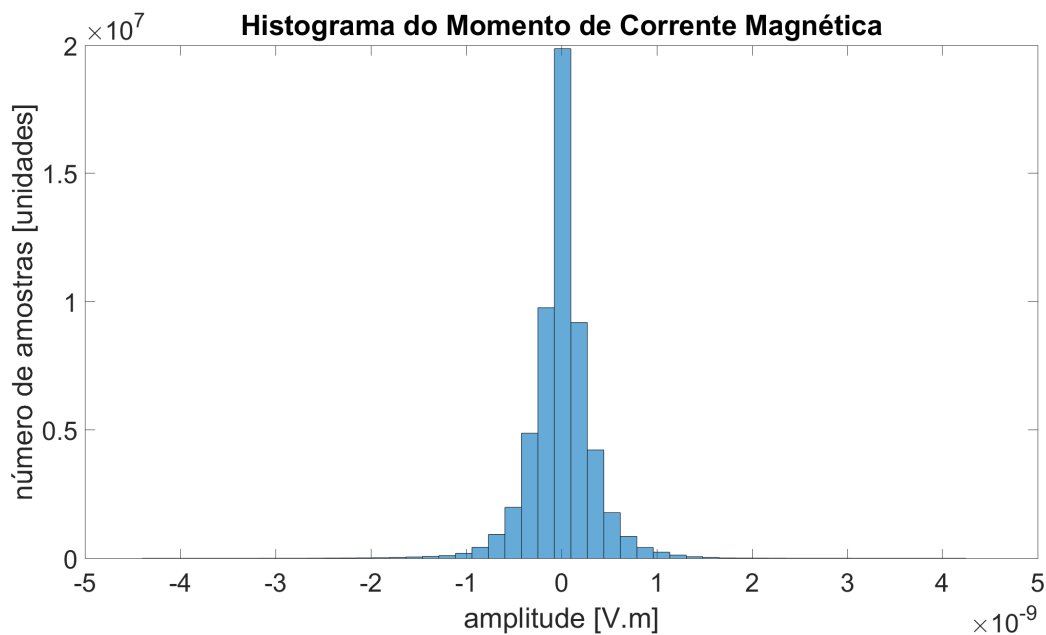


Figura 6.58: Histograma da componente $\hat{\phi}$ de todos os momentos de corrente magnética sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação.

6.2.1 Redução de Dados

As Figuras de 6.59 a 6.64 mostram o efeito da redução de dados descrita na Seção 6.1.1 aplicada à antena *quasi*-yagi para cada limiar de redução de dados sobre a face da superfície cúbica de Huygens que se encontra no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y . A Tabela 6.5 contém a taxa de redução global de dados para cada limiar de seleção.

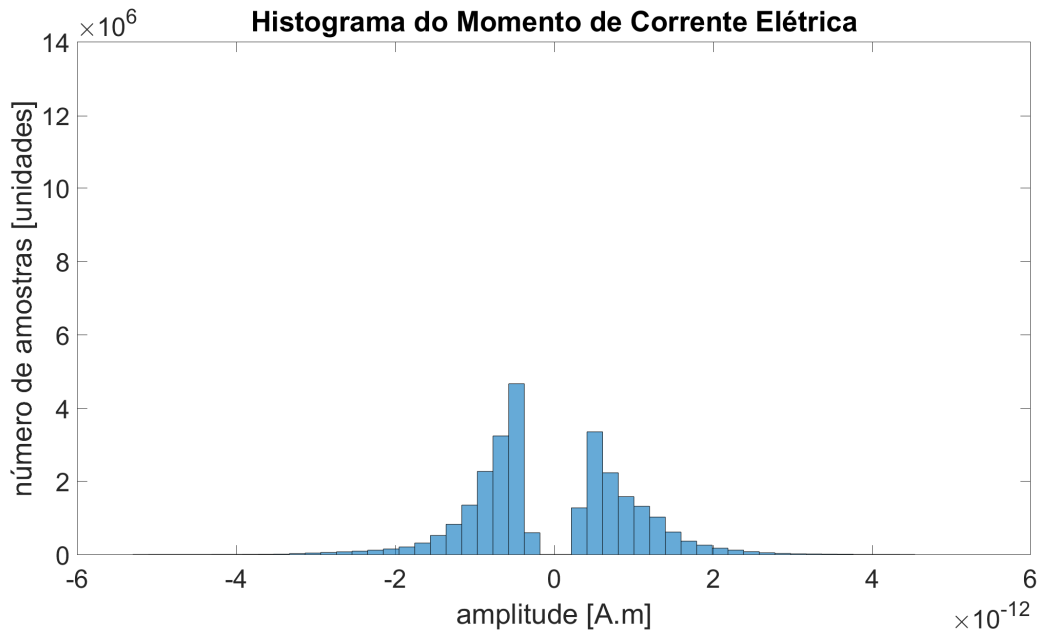


Figura 6.59: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $0,5\sigma$.

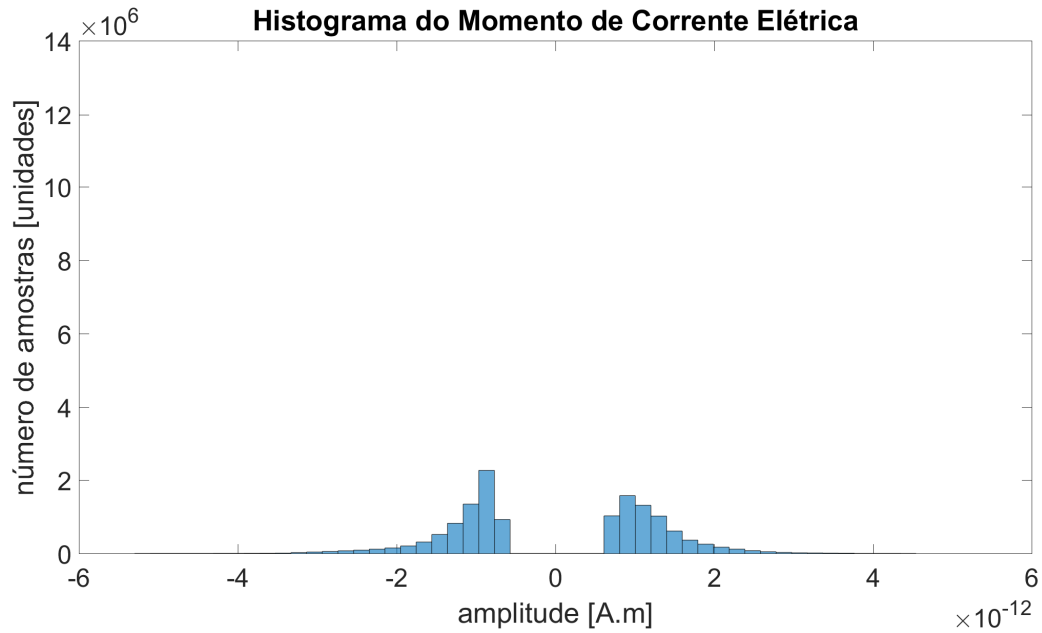


Figura 6.60: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 1σ .

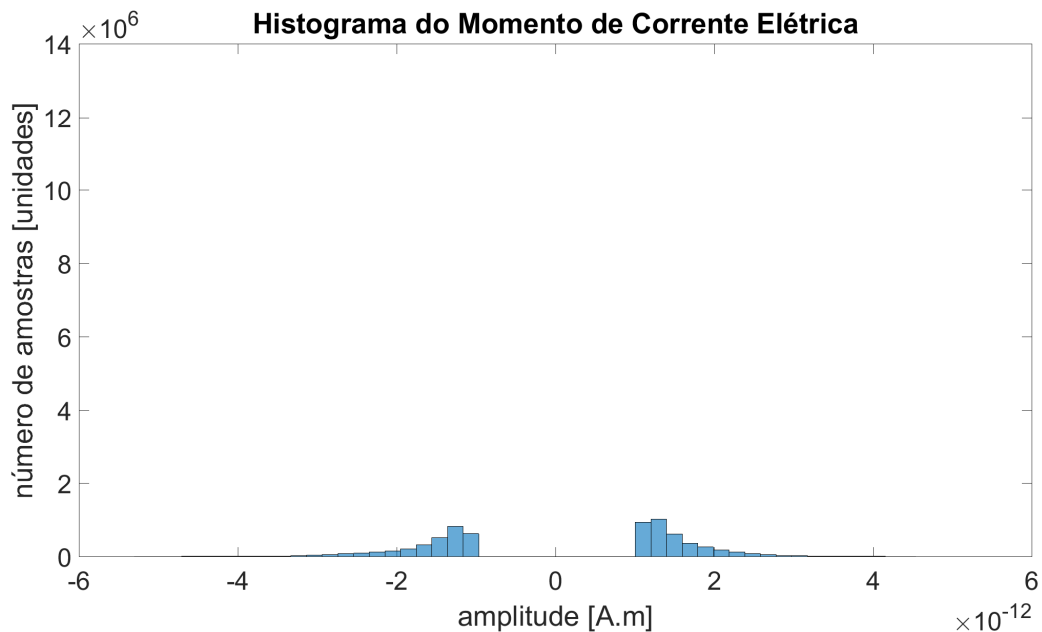


Figura 6.61: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $1,5\sigma$.

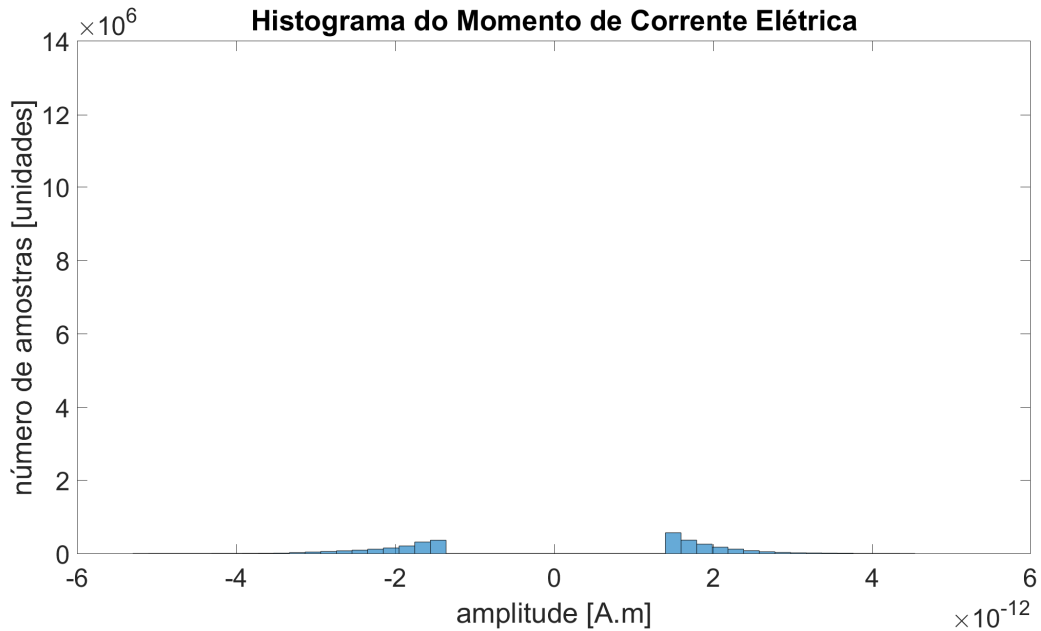


Figura 6.62: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 2σ .

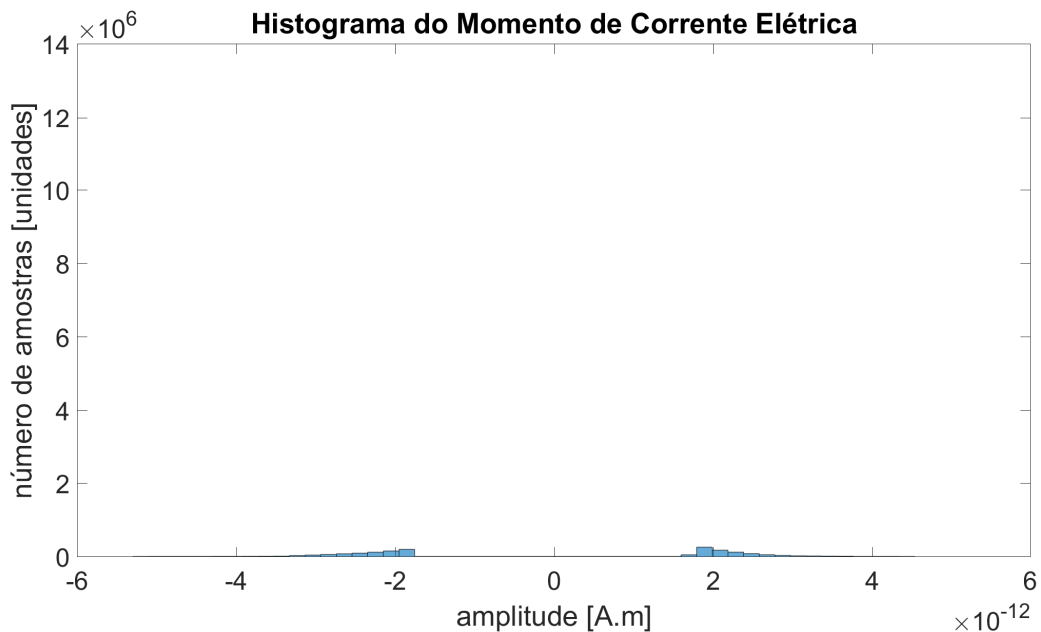


Figura 6.63: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de $2,5\sigma$.

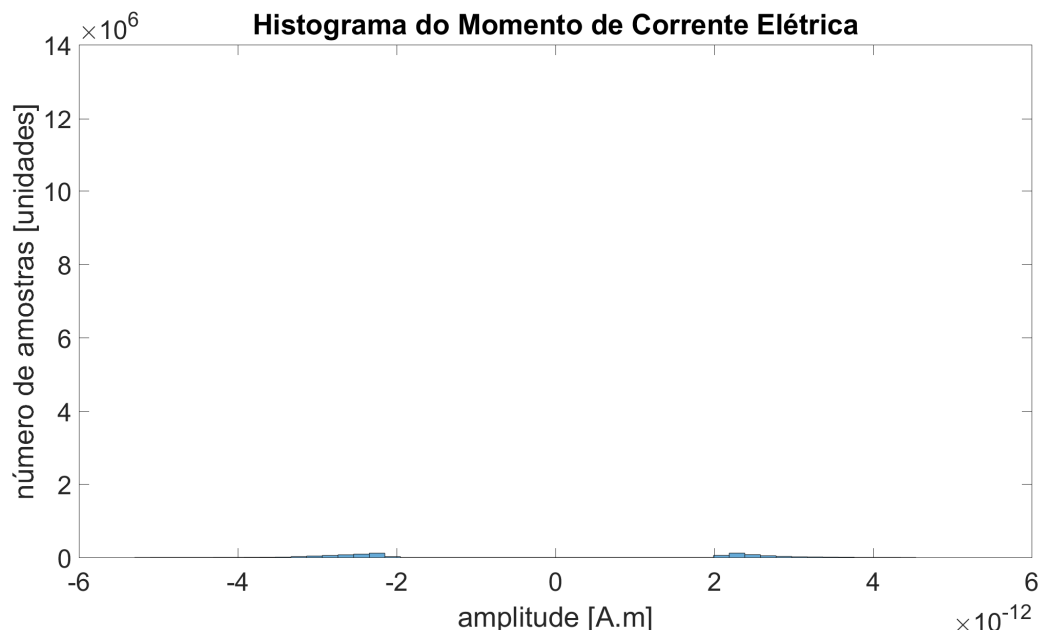


Figura 6.64: Histograma da componente \hat{r} de todos os momentos de corrente elétrica sobre a face da superfície cúbica de Huygens no plano xz ortogonal à porção negativa do eixo y em todos os instantes de tempo discretos do domínio de simulação para redução de dados com limiar de 3σ .

Tabela 6.5: Taxa de redução global dos dados de entrada para a antena *quasi-yagi* com diferentes limiares de seleção.

Limiar de Seleção	Taxa de Redução de Dados
$0,5\sigma$	40,49 %
$1,0\sigma$	63,20 %
$1,5\sigma$	74,93 %
$2,0\sigma$	80,80 %
$2,5\sigma$	83,66 %
$3,0\sigma$	85,07 %

6.2.2 Resultados

As Figuras de 6.65 a 6.76 exibem os diagramas de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz com aplicação da análise estatística. Observa-se que o contorno dos diagramas de radiação neste caso foi mais sensível às reduções de dados em comparação ao dipolo de meia-onda. A *quasi-yagi* é uma antena impressa e ocupa uma área bem

maior que o dipolo de meia-onda, ou seja, suas informações de campo próximo estão espalhadas sobre uma superfície de Huygens com área muito maior. Desta forma, taxas de redução elevadas podem afetar mais facilmente os detalhes do contorno dos diagramas de radiação.

A Tabela 6.6 contém os erros envolvidos na aplicação da análise estatística à antena *quasi*-yagi. A Figura 6.77 permite observar que o erro nos planos não-omnidirecionais aumentou significativamente a cada redução de dados. No entanto, como o volume de dados de entrada para a antena *quasi*-yagi é bem maior do que o do dipolo, a quantidade de dados eliminada ainda é bastante expressiva mesmo diante de taxas de redução menores. A redução com limiar de 1σ , por exemplo, possibilitou a eliminação de mais da metade dos dados de entrada mantendo a precisão do diagrama, como pode ser visto nas Figura 6.66 e 6.72.

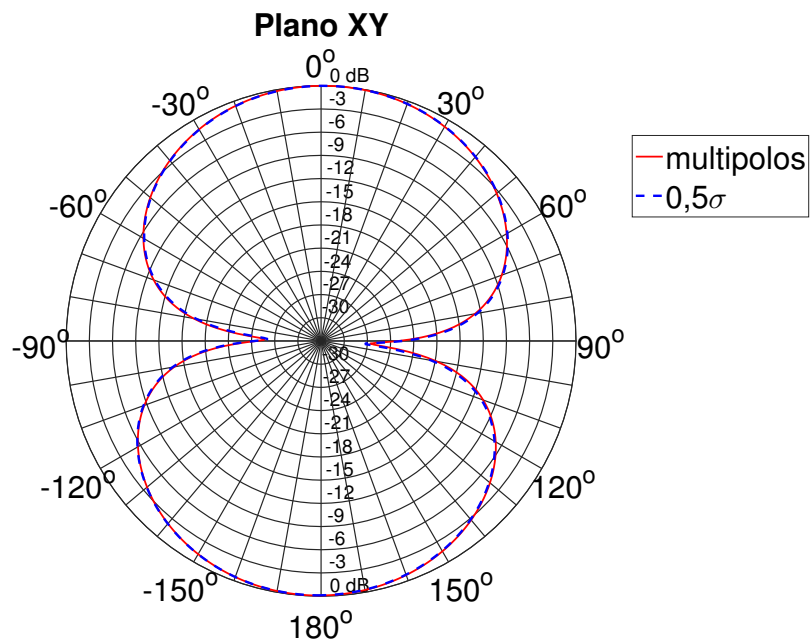


Figura 6.65: Diagrama de radiação da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 1$.

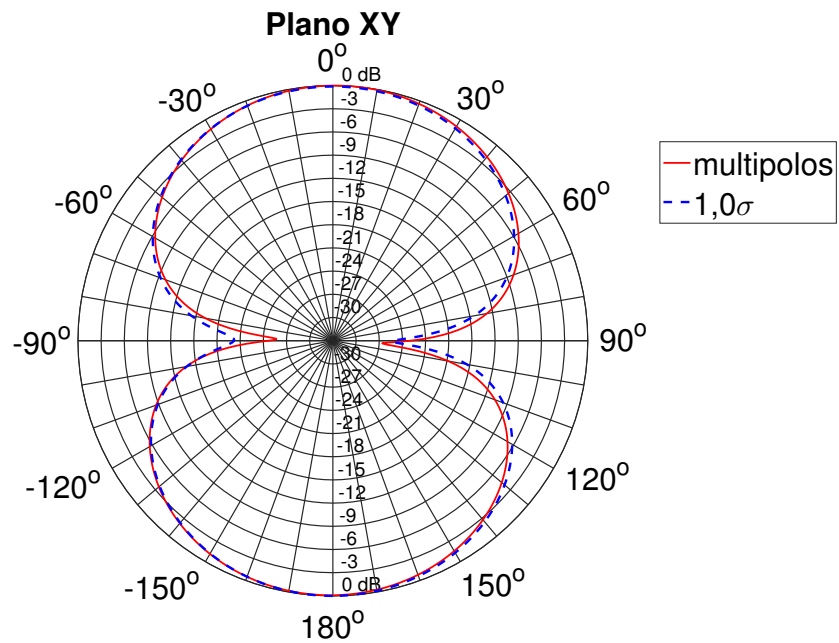


Figura 6.66: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano *xy* para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

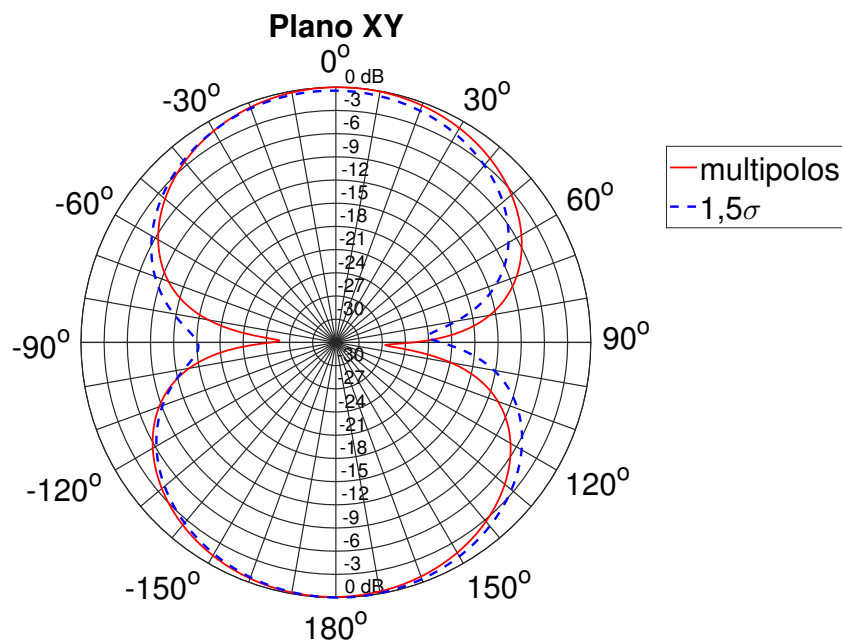


Figura 6.67: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano *xy* para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

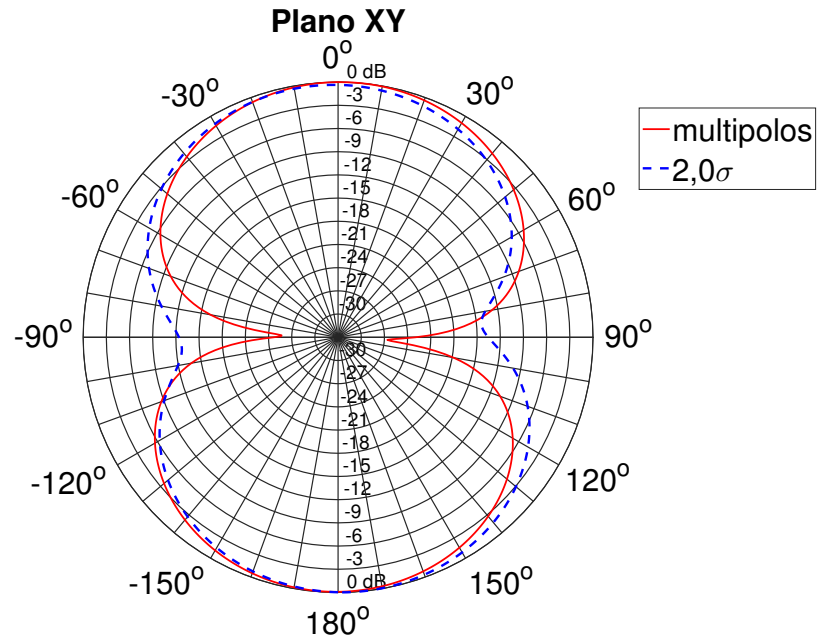


Figura 6.68: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano *xy* para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

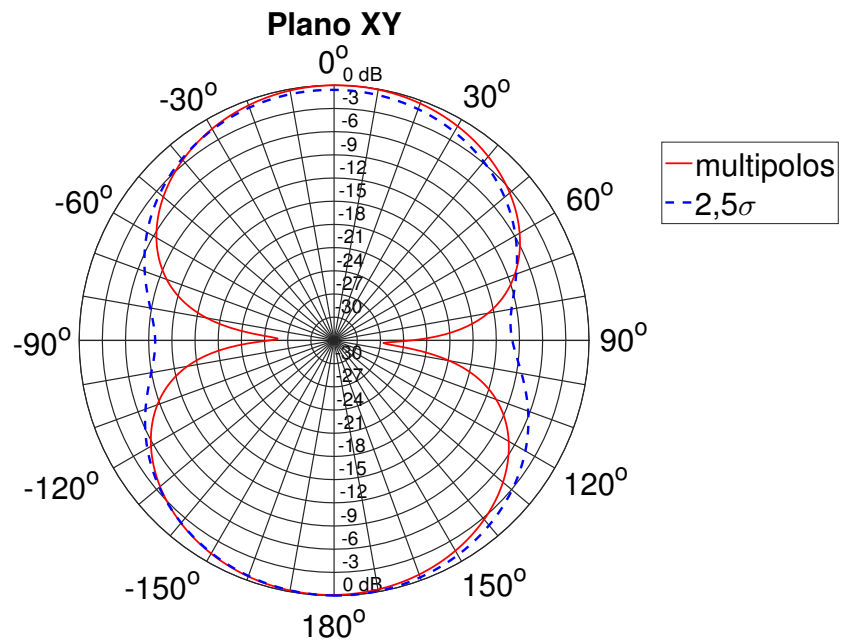


Figura 6.69: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano *xy* para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

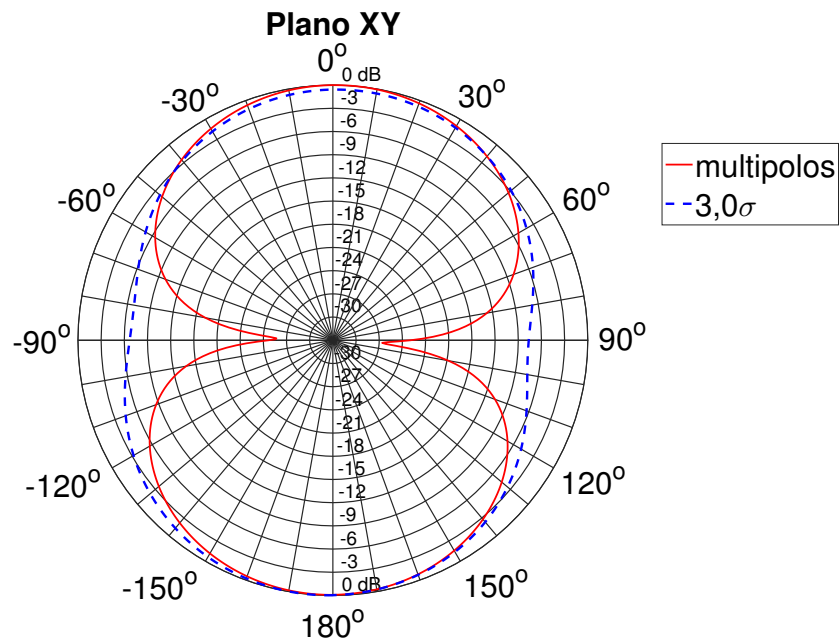


Figura 6.70: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xy para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 1$.

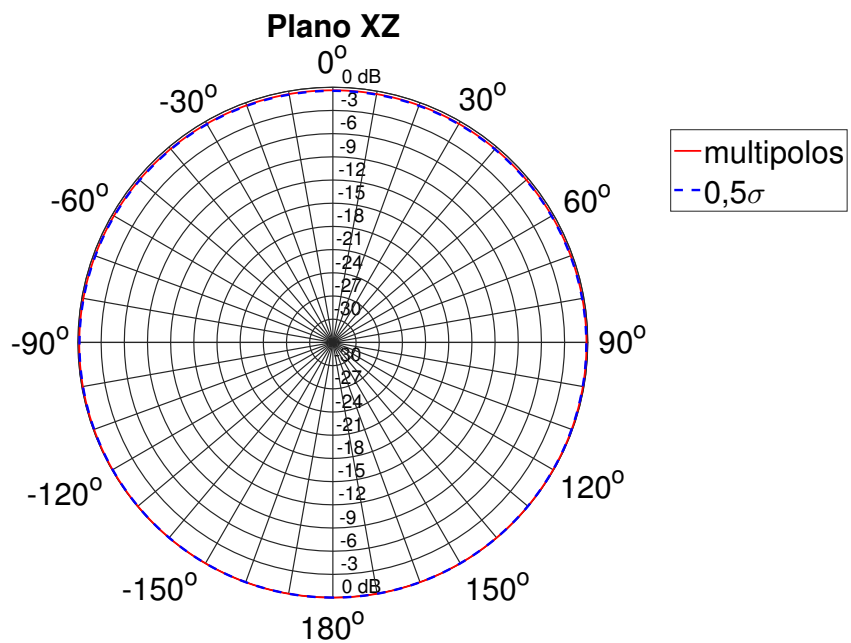


Figura 6.71: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $0,5\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 1$.

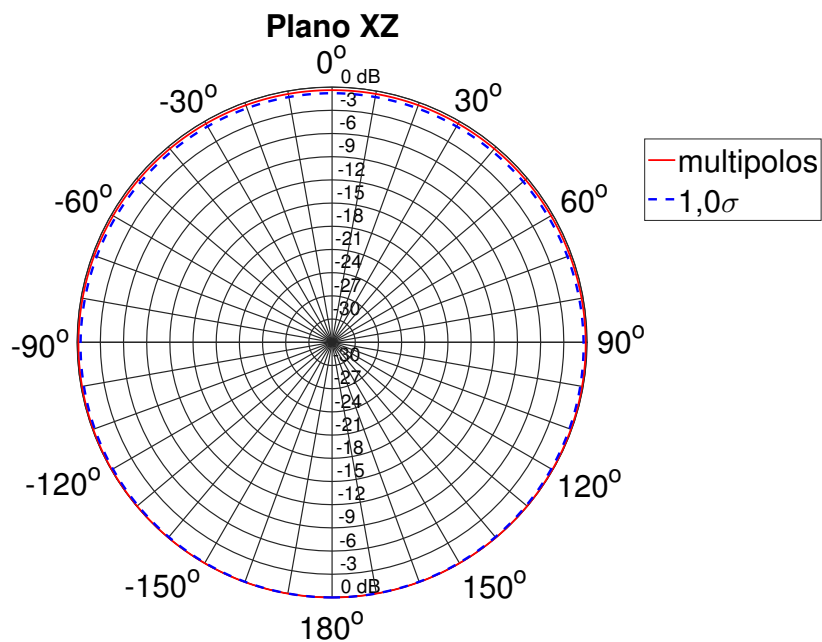


Figura 6.72: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $1,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

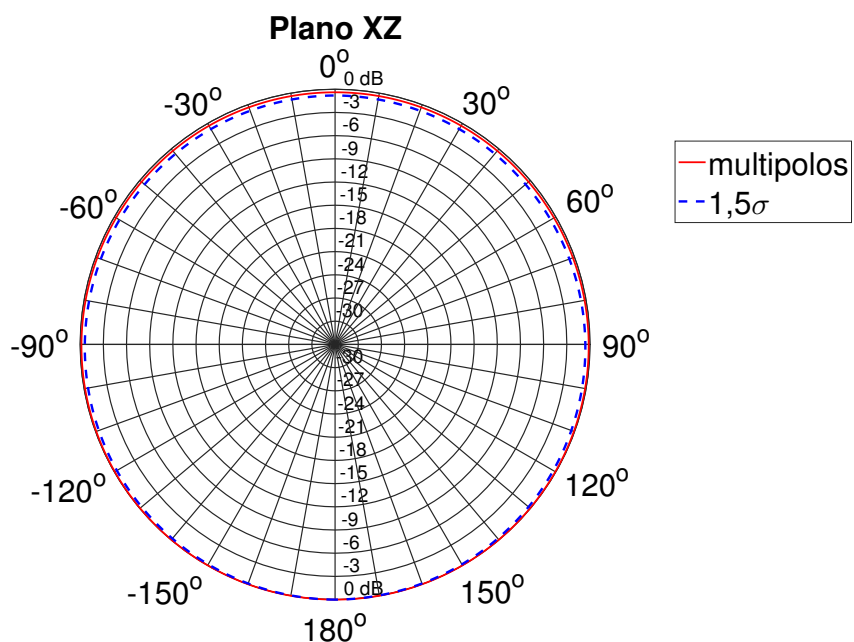


Figura 6.73: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $1,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

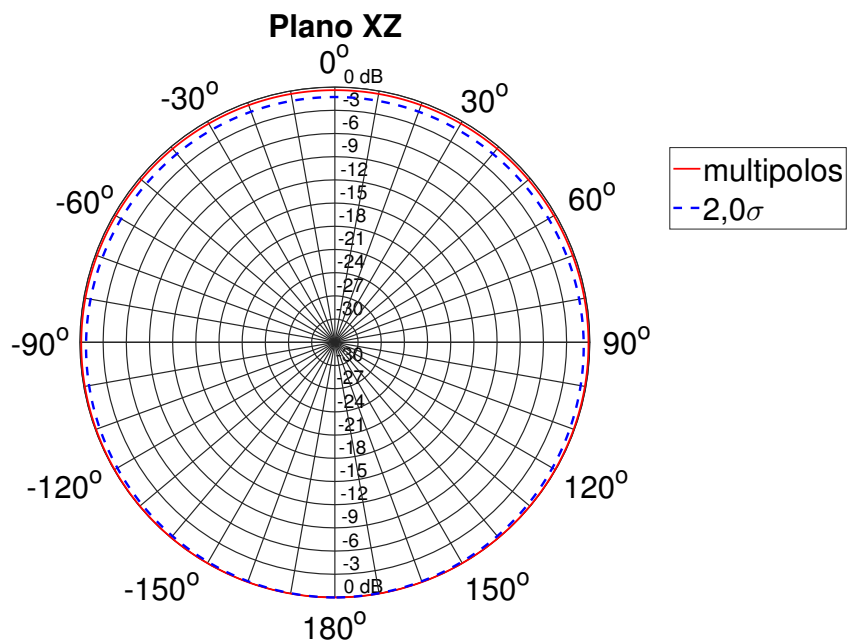


Figura 6.74: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $2,0\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

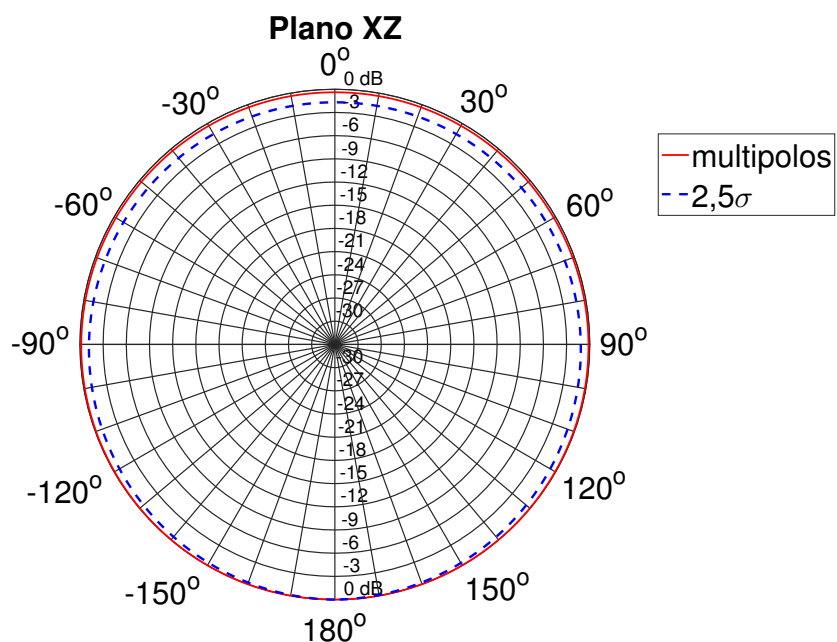


Figura 6.75: Diagrama de radiação da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $2,5\sigma$ e transformada com $n_{máx} = 1$.

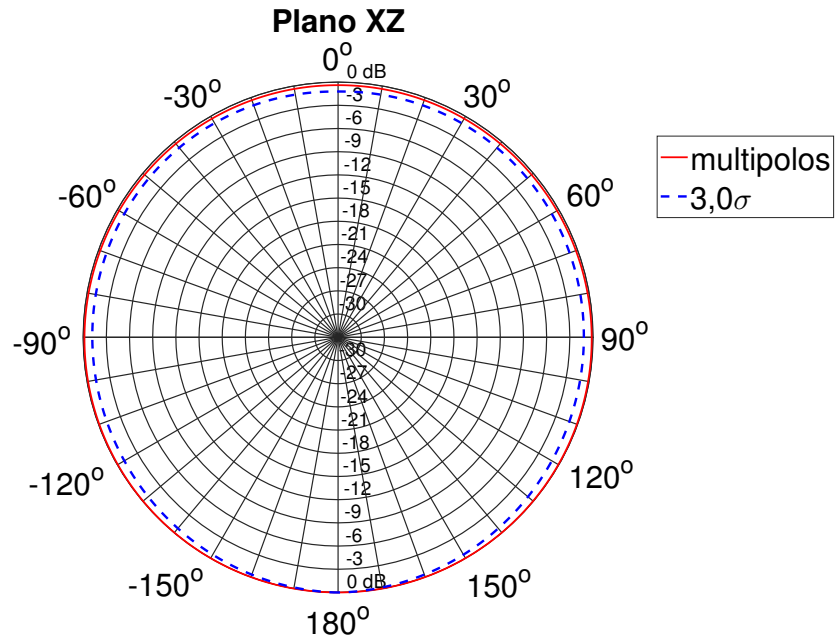


Figura 6.76: Diagrama de radiação da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz no plano xz para análise estatística com limiar de $3,0\sigma$ e transformada com $n_{m\acute{a}x} = 1$.

Tabela 6.6: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e soluções com análise estatística da antena *quasi*-yagi em 0,9 GHz para diferentes limiares de seleção em decibéis.

Limiar de Seleção	Plano xy	Plano xz	Plano yz
$0,5\sigma$	0,23788	0,03836	0,11590
$1,0\sigma$	1,11860	0,28696	1,49779
$1,5\sigma$	2,53637	0,38582	1,57659
$2,0\sigma$	3,35223	0,63008	2,92876
$2,5\sigma$	4,14099	0,93958	3,97167
$3,0\sigma$	5,07506	0,77599	4,54627

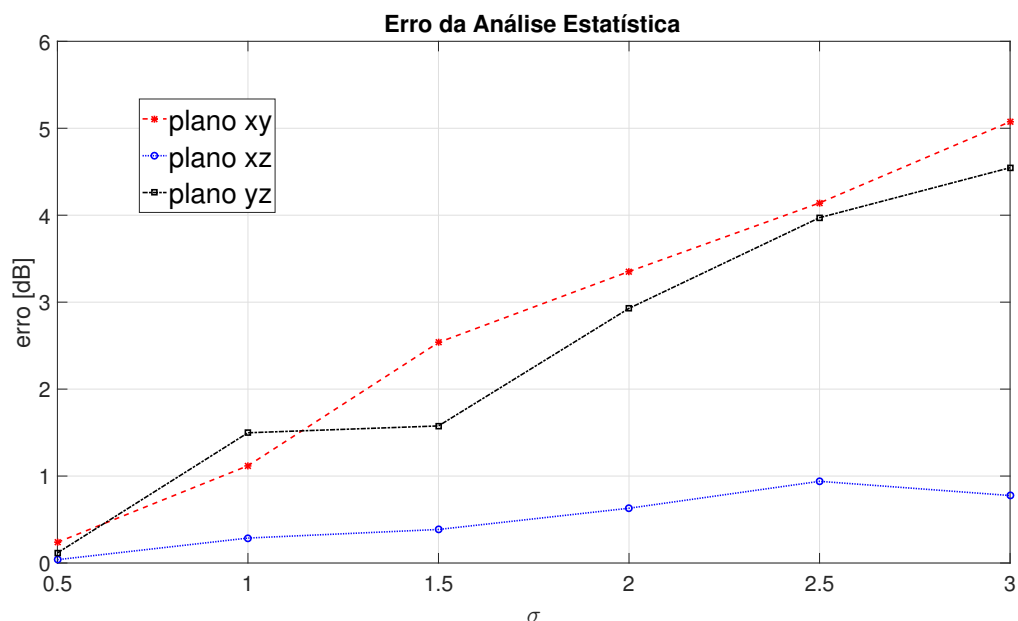


Figura 6.77: Raiz do erro médio quadrático (RMSE) entre a solução original dos multipolos para $n_{m\acute{a}x} = 1$ e soluções com análise estatística da antena *quasi-yagi* em 0,9 GHz para diferentes limiares de seleção.

6.3 Conclusão Parcial

A redução dos dados processados pela transformada NFF baseada em multipolos esféricos é uma opção eficiente utilizada na aceleração deste método de transformação, visto que grande parte dos valores dos momentos de corrente oferecem pequena ou nenhuma contribuição ao resultado final. Em resumo, foi possível gerar os diagramas de radiação do dipolo de meia-onda em 10 GHz com apenas aproximadamente 10% do volume total de valores utilizados originalmente. A antena impressa *quasi-yagi* exigiu um volume de dados maior, em torno de 40% dos dados originais, para garantir a precisão da solução em 0,9 GHz. A baixa complexidade e baixo custo computacional da análise estatística é uma das suas principais vantagens.

As técnicas para redução de dados têm se concentrado sobre os momentos de corrente calculados na região de campo próximo da antena; porém, os momentos são utilizados pelas equações das amplitudes dos multipolos por meio de combinações. Por conseguinte, o capítulo a seguir realiza um estudo inédito de como estas combinações influenciam o resultado final e propõe que as equações sejam reescritas de modo a favorecer a redução de dados.

Capítulo 7

Análise das Equações das Amplitudes dos Multipolos

Este capítulo se concentra na análise algébrica das propriedades das equações envolvidas no cálculo das amplitudes de cada coeficiente dos multipolos esféricos da expansão. É sabido que a maior parcela do custo computacional da transformada NFF baseada em multipolos esféricos é devido ao cálculo destas amplitudes. Deste modo, o estudo destas equações permite propor técnicas eficientes para eliminação de iterações desnecessárias, como acontece no caso da redução de dados tanto por análise estatística quanto por análise de componentes principais (PCA) ou outras técnicas. A seguir, a contribuição de cada elemento individual que compõe as equações das amplitudes dos multipolos é analisada, gerando contribuições algébricas importantes e inéditas para a transformada NFF em foco.

7.1 Parcela dos Momentos de Correntes

Através das Equações 4.39 e 4.40, observa-se parcelas de contribuição dos momentos de correntes tanto elétricas quanto magnéticas em dois formatos básicos. Uma das parcelas possui o seguinte formato

$$\sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} - \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} \right) \dots$$

que pode ser reescrito como

$$\boxed{- \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} - \vec{c}_{el}^{(k-l-1),[i]} \right) \dots} \quad (7.1)$$

A outra parcela identificada nas equações da amplitude apresenta o formato

$$\sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{(k-1)} \left[(1+l) \vec{c}_{el}^{k-l,[i]} - l \vec{c}_{el}^{k-(l+1),[i]} \right] \dots$$

que reescrita, torna-se

$$\boxed{\sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} + l \left(\vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} - \vec{c}_{el}^{(k-l-1),[i]} \right) \right] \dots} \quad (7.2)$$

onde k se refere aos instantes de tempo do domínio de simulação, l é um índice temporal auxiliar e i é o índice de cada um dos dipolos equivalentes discretizados sobre a superfície de Huygens. Lembrando-se que, como esta transformada é aplicada no domínio do tempo, as amplitudes são recalculadas para cada um dos k instantes de tempo que compõem o domínio temporal total da simulação.

O primeiro somatório acessa todos os L_{el} dipolos equivalentes sem exceção. Portanto, cada amplitude dos multipolos possui a contribuição de todos os momentos de corrente sobre a superfície de Huygens em um dado instante de tempo. Já o segundo somatório, juntamente com cada índice temporal $(k-l)$ e $(k-l-1)$, acessa os momentos de corrente de todos os instantes de tempo menores ou iguais a k . Em outras palavras, as amplitudes dos multipolos são temporalmente cumulativas.

A fim de se realizar uma análise mais detalhada de como estas combinações de correntes influenciam o resultado final do cálculo das amplitudes dos multipolos, definiu-se as funções \vec{f} e \vec{g} para representá-las. Desta forma, a combinação de momentos da Equação 7.1 foi definida como

$$\vec{f}(k, l, i) = \vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} - \vec{c}_{el}^{(k-l-1),[i]}, \quad (7.3)$$

e a parcela da Equação 7.2 foi estabelecida como sendo

$$\vec{g}(k, l, i) = \vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} + l \left(\vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} - \vec{c}_{el}^{(k-l-1),[i]} \right). \quad (7.4)$$

Substituindo-se o termo referente à Equação 7.3, a Equação 7.4 pode ser reescrita como

$$\vec{g}(k, l, i) = \vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} + l f(k, l, i). \quad (7.5)$$

Os somatórios das Equações 7.1 e 7.2 se tornam:

$$- \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \vec{f}(k, l, i) \dots \quad (7.6)$$

$$\sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \vec{g}(k, l, i) \dots \quad (7.7)$$

Nas equações para o cálculo das amplitudes, as Equações 7.6 e 7.7 são ponderados pelas funções integrais dadas pelas Equações 4.45, 4.47, 4.50 e 4.51, que são funções de (n, m) . No entanto, $\vec{f}(k, l, i)$ e $\vec{g}(k, l, i)$ se comportam de forma independente dos índices multipolares (n, m) e parecem exibir certa repetição à medida que k aumenta, ou seja, à medida em que as amplitudes de instantes de tempo mais avançados são calculadas.

Para se compreender melhor a dinâmica destas funções $\vec{f}(k, l, i)$ e $\vec{g}(k, l, i)$ dentro dos somatórios, os mesmos foram expandidos a seguir para o caso onde $L_{el} = 3$ e $k = 4$ na Tabela 7.1 e $k = 5$ na Tabela 7.2. O comportamento de ambas funções é descrito nas seções seguintes.

Tabela 7.1: Comportamento dos somatórios das Equações 7.6 e 7.7 para $L_{el} = 3$ e $k = 4$.

i	l	\vec{f}	\vec{g}
1	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[1]} - \vec{c}_{el}^{(3),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[1]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[1]} - \vec{c}_{el}^{(3),[1]}\right)$
1	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[1]} - \vec{c}_{el}^{(2),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[1]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[1]} - \vec{c}_{el}^{(2),[1]}\right)$
1	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[1]} - \vec{c}_{el}^{(1),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[1]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[1]} - \vec{c}_{el}^{(1),[1]}\right)$
1	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[1]} - \vec{c}_{el}^{(0),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[1]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[1]} - \vec{c}_{el}^{(0),[1]}\right)$
2	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[2]} - \vec{c}_{el}^{(3),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[2]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[2]} - \vec{c}_{el}^{(3),[2]}\right)$
2	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[2]} - \vec{c}_{el}^{(2),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[2]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[2]} - \vec{c}_{el}^{(2),[2]}\right)$
2	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[2]} - \vec{c}_{el}^{(1),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[2]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[2]} - \vec{c}_{el}^{(1),[2]}\right)$
2	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[2]} - \vec{c}_{el}^{(0),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[2]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[2]} - \vec{c}_{el}^{(0),[2]}\right)$
3	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[3]} - \vec{c}_{el}^{(3),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[3]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[3]} - \vec{c}_{el}^{(3),[3]}\right)$
3	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[3]} - \vec{c}_{el}^{(2),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[3]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[3]} - \vec{c}_{el}^{(2),[3]}\right)$
3	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[3]} - \vec{c}_{el}^{(1),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[3]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[3]} - \vec{c}_{el}^{(1),[3]}\right)$
3	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[3]} - \vec{c}_{el}^{(0),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[3]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[3]} - \vec{c}_{el}^{(0),[3]}\right)$

Tabela 7.2: Comportamento dos somatórios das Equações 7.6 e 7.7 para $L_{el} = 3$ e $k = 5$.

i	l	\vec{f}	\vec{g}
1	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(5),[1]} - \vec{c}_{el}^{(4),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(5),[1]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(5),[1]} - \vec{c}_{el}^{(4),[1]}\right)$
1	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[1]} - \vec{c}_{el}^{(3),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[1]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[1]} - \vec{c}_{el}^{(3),[1]}\right)$
1	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[1]} - \vec{c}_{el}^{(2),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[1]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[1]} - \vec{c}_{el}^{(2),[1]}\right)$
1	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[1]} - \vec{c}_{el}^{(1),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[1]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[1]} - \vec{c}_{el}^{(1),[1]}\right)$
1	4	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[1]} - \vec{c}_{el}^{(0),[1]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[1]} + 4 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[1]} - \vec{c}_{el}^{(0),[1]}\right)$
2	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(5),[2]} - \vec{c}_{el}^{(4),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(5),[2]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(5),[2]} - \vec{c}_{el}^{(4),[2]}\right)$
2	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[2]} - \vec{c}_{el}^{(3),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[2]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[2]} - \vec{c}_{el}^{(3),[2]}\right)$
2	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[2]} - \vec{c}_{el}^{(2),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[2]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[2]} - \vec{c}_{el}^{(2),[2]}\right)$
2	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[2]} - \vec{c}_{el}^{(1),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[2]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[2]} - \vec{c}_{el}^{(1),[2]}\right)$
2	4	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[2]} - \vec{c}_{el}^{(0),[2]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[2]} + 4 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[2]} - \vec{c}_{el}^{(0),[2]}\right)$
3	0	$\left(\vec{c}_{el}^{(5),[3]} - \vec{c}_{el}^{(4),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(5),[3]} + 0 \left(\vec{c}_{el}^{(5),[3]} - \vec{c}_{el}^{(4),[3]}\right)$
3	1	$\left(\vec{c}_{el}^{(4),[3]} - \vec{c}_{el}^{(3),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(4),[3]} + 1 \left(\vec{c}_{el}^{(4),[3]} - \vec{c}_{el}^{(3),[3]}\right)$
3	2	$\left(\vec{c}_{el}^{(3),[3]} - \vec{c}_{el}^{(2),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[3]} + 2 \left(\vec{c}_{el}^{(3),[3]} - \vec{c}_{el}^{(2),[3]}\right)$
3	3	$\left(\vec{c}_{el}^{(2),[3]} - \vec{c}_{el}^{(1),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[3]} + 3 \left(\vec{c}_{el}^{(2),[3]} - \vec{c}_{el}^{(1),[3]}\right)$
3	4	$\left(\vec{c}_{el}^{(1),[3]} - \vec{c}_{el}^{(0),[3]}\right)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[3]} + 4 \left(\vec{c}_{el}^{(1),[3]} - \vec{c}_{el}^{(0),[3]}\right)$

7.1.1 Análise de $\vec{f}(k, l, i)$

A partir das Tabelas 7.1 e 7.2, observa-se que há uma repetição do valor assumido pela função $\vec{f}(k, l, i)$ a cada incremento de k para uma dada posição fixa de i . Isto significa que não seria necessário repetir o cálculo de \vec{f} para os instantes anteriores do somatório. Para se obter todas as parcelas do somatório em um instante seguinte, basta somente incluir o valor de \vec{f} para o instante atual de k . A Tabela 7.3 exibe o padrão de recorrência de \vec{f} para um domínio temporal de simulação com o total de $k_{máx} = 5$ instantes de tempo. Cada coluna da Tabela 7.3 contém todos os elementos que compõem o somatório da Equação 7.6 em cada instante de tempo k .

Tabela 7.3: Comportamento da função $\vec{f}(k, l, i)$ para somatório com $k_{máx} = 5$.

k = 1	k=2	k=3	k=4	k=5
$\vec{f}(1, 0, i) =$	$\vec{f}(2, 1, i) =$	$\vec{f}(3, 2, i) =$	$\vec{f}(4, 3, i) =$	$\vec{f}(5, 4, i)$
	$\vec{f}(2, 0, i) =$	$\vec{f}(3, 1, i) =$	$\vec{f}(4, 2, i) =$	$\vec{f}(5, 3, i)$
		$\vec{f}(3, 0, i) =$	$\vec{f}(4, 1, i) =$	$\vec{f}(5, 2, i)$
			$\vec{f}(4, 0, i) =$	$\vec{f}(5, 1, i)$
				$\vec{f}(5, 0, i)$

Observa-se, desta forma, que:

$$\begin{aligned}
 \vec{f}((k-1), (l-1), i) &= \vec{f}(k, l, i), \\
 \vec{f}((k-2), (l-2), i) &= \vec{f}(k, l, i), \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \vec{f}((k-n), (l-n), i) &= \vec{f}(k, l, i).
 \end{aligned}$$

Portanto, o padrão de recorrência geral que relaciona o valor de \vec{f} em um dado instante e em instantes anteriores é dado por

$$\boxed{\vec{f}((k-n), (l-n), i) = \vec{f}(k, l, i),} \quad (7.8)$$

para

$$1 \leq k \leq k_{m\acute{a}x},$$

$$0 \leq n \leq (k_{m\acute{a}x} - 1),$$

e

$$0 \leq l \leq (k - 1).$$

A estrutura de dados da Tabela 7.3 possui o formato de uma matriz triângulo superior de tamanho $k_{m\acute{a}x} \times k_{m\acute{a}x}$, onde a última coluna possui todos os elementos existentes na matriz uma única vez. Logo, todos os elementos da Tabela 7.3 podem ser calculados uma única vez para uma dada posição i no caso onde $k = k_{m\acute{a}x}$ em vez de se repetir os mesmos cálculos a cada iteração de k . A aplicação desta relação de recorrência permitiria economizar um número de operações

$$op = \sum_{k=1}^{k_{m\acute{a}x}-1} k, \quad (7.9)$$

considerando-se apenas uma dada posição i no cálculo de amplitudes para um único coeficiente (m, n) da expansão em multipolos. Portanto, a função \vec{f} poderia deixar de ser calculada desnecessariamente em um total de

$$op \times (multi - 1) \times L_{el} \quad (7.10)$$

vezes. A variável $multi$ representa o número de coeficientes da expansão. O termo $(multi - 1)$ indica que os valores de \vec{f} só precisam ser calculados para um único coeficiente da expansão em multipolos, pois se repetem para os $(multi - 1)$ coeficientes restantes. A variável L_{el} representa o total de dipolos equivalentes sobre a superfície de Huygens. A mesma propriedade se aplica à função \vec{g} , que será discutida na próxima seção.

No caso da antena dipolo de meia-onda em 10 GHz com $k_{m\acute{a}x} = 1000$, $multi = 143$ e $L_{el} = 51 \times 51 \times 51 = 132.651$ dipolos elétricos equivalentes sobre a superfície de

Huygens, o total de $9,4276 \times 10^{12}$ cálculos de \vec{f} seriam evitados. Apesar de \vec{f} ser apenas uma soma de dois valores e com baixo custo computacional, a eliminação destas operações pode gerar um impacto significativo quando observado o número total de vezes em que deixaria de ser realizada. Além dos casos de recorrência, pode-se evitar realizar as iterações em todas as situações nas quais \vec{f} for nula. Portanto, calculando-se todos os valores de \vec{f} do somatório somente para o maior instante de tempo $k_{máx}$, observa-se que os valores de \vec{f} nas iterações de qualquer k -ésimo instante de tempo anterior pode ser obtido através da relação

$$\vec{f}((k_{máx} - n), (l_{k_{máx}} - n), i) = \vec{f}(k_{máx}, l_{máx}, i), \quad (7.11)$$

onde

$$k = k_{máx} - n,$$

e

$$l = l_{k_{máx}} - n,$$

para

$$0 \leq n \leq k_{máx},$$

e

$$0 \leq l \leq (l_{k_{máx}} - n - 1).$$

Conclui-se, portanto, a partir da Equação 7.11 que:

Observação 1: se $\vec{f}(k_{máx}, l_{k_{máx}}, i)$ é nula para qualquer valor de $l_{k_{máx}}$ tal que $0 \leq l_{k_{máx}} \leq (k_{máx} - 1)$, então $\vec{f}((k_{máx} - n), (l_{k_{máx}} - n), i)$ será nula para qualquer que seja o valor de n . Portanto, a partir da função \vec{f} calculada para as configurações do somatório para $k = k_{máx}$ uma única vez, é possível identificar todas as posições nulas em qualquer instante de tempo $k < k_{máx}$. Além disso, todos os demais valores não-nulos podem ser

obtidos diretamente a partir da relação da Equação 7.11 para qualquer combinação de k e l .

7.1.2 Análise de $\vec{g}(k, l, i)$

Através das Tabelas 7.1 e 7.2, observa-se a existência de um padrão de evolução também para a função $\vec{g}(k, l, i)$ a cada incremento de k para um dado i -ésimo dipolo equivalente sobre a superfície de Huygens. Isso significa que, assim como ocorreu com a função \vec{f} , não seria necessário repetir o cálculo de \vec{g} para os instantes anteriores, mas bastaria somente calcular \vec{g} para o maior instante de k . Portanto, os valores assumidos pela função $\vec{f}(k)$ e $\vec{g}(k)$ para instantes de $k < k_{máx}$ poderiam ser obtidos a partir de uma combinação linear de $\vec{f}(k_{máx})$ e $\vec{g}(k_{máx})$. Esta propriedade possui dupla vantagem: a eliminação de cálculos repetitivos e uma maior facilidade em se aplicar técnicas para redução de dados de entrada, uma vez que a função \vec{f} e \vec{g} avaliadas para $k_{máx}$ possuem informações referentes a todos os instantes anteriores de forma compacta.

A seguir, o comportamento da função \vec{g} é apresentado de diversas maneiras a fim de se caracterizar melhor os padrões existentes entre cada instante k com base na observação das Tabelas 7.1 e 7.2. A Tabela 7.4 exhibe todos valores assumidos pela função \vec{g} no somatório da Equação 7.2 em cada instante de tempo para $k_{máx} = 4$.

Tabela 7.4: Argumentos possíveis da função $\vec{g}(k, l, i)$ para o somatório com $k_{máx} = 4$.

k = 1	k=2	k=3	k=4
$\vec{g}(1, 0, i)$	$\vec{g}(2, 1, i)$	$\vec{g}(3, 2, i)$	$\vec{g}(4, 3, i)$
	$\vec{g}(2, 0, i)$	$\vec{g}(3, 1, i)$	$\vec{g}(4, 2, i)$
		$\vec{g}(3, 0, i)$	$\vec{g}(4, 1, i)$
			$\vec{g}(4, 0, i)$

Na tentativa de se relacionar o valor de \vec{g} em um determinado instante e instantes anteriores, a Tabela 7.5 apresenta os valores assumidos por \vec{g} em função de \vec{f} a cada instante do somatório da Equação 7.2 a partir de observações das Tabelas 7.1 e 7.2.

Tabela 7.5: Comportamento da função $\vec{g}(k, l, i)$ para somatório com $k_{máx} = 4$.

k = 1	k=2	k=3	k=4
$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 0\vec{f}(1, 0, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 1\vec{f}(2, 1, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 2\vec{f}(3, 2, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 3\vec{f}(4, 3, i)$
	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 0\vec{f}(2, 0, i)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 1\vec{f}(3, 1, i)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 2\vec{f}(4, 2, i)$
		$\vec{c}_{el}^{(3),[i]} + 0\vec{f}(3, 0, i)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[i]} + 1\vec{f}(4, 1, i)$
			$\vec{c}_{el}^{(4),[i]} + 0\vec{f}(4, 0, i)$

É conhecido da Tabela 7.3 que $\vec{f}(1, 0, i) = \vec{f}(2, 1, i) = \vec{f}(3, 2, i) = \vec{f}(4, 3, i)$, $\vec{f}(2, 0, i) = \vec{f}(3, 1, i) = \vec{f}(4, 2, i)$ e $\vec{f}(3, 0, i) = \vec{f}(4, 1, i)$. Substituindo-se estas relações nos dados da Tabela 7.5, obtém-se uma forma mais genérica para a função \vec{g} apresentada na Tabela 7.6.

Tabela 7.6: Comportamento da função $\vec{g}(k, l, i)$ para somatório com $k_{máx} = 4$.

k = 1	k=2	k=3	k=4
$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 0\vec{f}(4, 3, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 1\vec{f}(4, 3, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 2\vec{f}(4, 3, i)$	$\vec{c}_{el}^{(1),[i]} + 3\vec{f}(4, 3, i)$
	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 0\vec{f}(4, 2, i)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 1\vec{f}(4, 2, i)$	$\vec{c}_{el}^{(2),[i]} + 2\vec{f}(4, 2, i)$
		$\vec{c}_{el}^{(3),[i]} + 0\vec{f}(4, 1, i)$	$\vec{c}_{el}^{(3),[i]} + 1\vec{f}(4, 1, i)$
			$\vec{c}_{el}^{(4),[i]} + 0\vec{f}(4, 0, i)$

Observando-se a Tabela 7.6, a função \vec{g} pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\vec{g}(k, l, i) = \vec{c}_{el}^{(k-l),[i]} + l \vec{f}(k_{máx}, l_{k_{máx}}, i), \quad (7.12)$$

onde

$$k = k_{máx} - n,$$

e

$$l = l_{k_{máx}} - n,$$

para

$$1 \leq k \leq k_{máx},$$

$$0 \leq n \leq (k_{máx} - 1),$$

e

$$0 \leq l \leq (k_{m\acute{a}x} - n - 1).$$

Para o cálculo geral de \vec{g} em $k = k_{m\acute{a}x}$, a Equação 7.12 pode ser reescrita como:

$$\boxed{\vec{g}(k_{m\acute{a}x}, l_{m\acute{a}x}, i) = \vec{c}_{el}^{(k_{m\acute{a}x} - l_{k_{m\acute{a}x}}), [i]} + l_{k_{m\acute{a}x}} \vec{f}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i),} \quad (7.13)$$

para

$$0 \leq l_{k_{m\acute{a}x}} \leq (k_{m\acute{a}x} - 1).$$

Conclui-se, portanto, a partir da Equação 7.13 que:

Observação 2: para uma grande quantidade de valores nulos de uma dada corrente \vec{c}_{el} , espera-se que: quando \vec{f} for nula, \vec{g} seja igualmente nula na maioria dos casos. No entanto, para os casos em que \vec{c}_{el} não seja nula e \vec{f} seja nula, a função \vec{g} não é necessariamente nula. Portanto, não se pode inferir que \vec{f} e \vec{g} sejam simultaneamente nulas em todos os casos, embora seja esperado que ambas sejam simultaneamente nulas na maioria dos casos.

A Equação 7.13 seria muito útil no cálculo de $\vec{g}(k_{m\acute{a}x})$. No entanto, ela não seria tão interessante nas relações de recorrência para os demais valores de k por depender da corrente \vec{c}_{el} . É mais viável que as relações de recorrência sejam funções somente de \vec{f} e \vec{g} avaliadas unicamente em $k_{m\acute{a}x}$. Desta forma, a Tabela 7.7 a seguir apresenta uma nova observação de recorrência entre diferentes instantes de k com base nas Tabelas 7.1 e 7.2.

Tabela 7.7: Relação entre instantes diferentes da função $\vec{g}(k, l, i)$.

k = 1	k=2	k=3	k=4
$\vec{g}(1, 0, i) + 3\vec{f}(1, 0, i) =$	$\vec{g}(2, 1, i) + 2\vec{f}(2, 1, i) =$	$\vec{g}(3, 2, i) + \vec{f}(3, 2, i) =$	$\vec{g}(4, 3, i)$
	$\vec{g}(2, 0, i) + 2\vec{f}(2, 0, i) =$	$\vec{g}(3, 1, i) + \vec{f}(3, 1, i) =$	$\vec{g}(4, 2, i)$
		$\vec{g}(3, 0, i) + \vec{f}(3, 0, i) =$	$\vec{g}(4, 1, i)$
			$\vec{g}(4, 0, i)$

Portanto, a partir da Tabela 7.7, a relação entre a função \vec{g} em um dado instante $k_{m\acute{a}x}$ e em instantes anteriores é tal que

$$\vec{g}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i) = \vec{g}((k_{m\acute{a}x} - n), (l_{k_{m\acute{a}x}} - n), i) + n \vec{f}((k_{m\acute{a}x} - n), (l_{k_{m\acute{a}x}} - n), i), \quad (7.14)$$

onde

$$k = k_{máx} - n,$$

e

$$l = l_{k_{máx}} - n,$$

para

$$1 \leq k \leq k_{máx},$$

$$0 \leq n \leq (k_{máx} - 1),$$

e

$$0 \leq l \leq (k_{máx} - n - 1).$$

Manipulando-se a Equação 7.14, obtém-se que

$$\vec{g}((k_{máx} - n), (l_{k_{máx}} - n), i) = \vec{g}(k_{máx}, l_{k_{máx}}, i) - n \vec{f}((k_{máx} - n), (l_{k_{máx}} - n), i). \quad (7.15)$$

Substituindo-se a Equação 7.11 na Equação 7.15, conclui-se que a função \vec{g} em qualquer instante de tempo pode ser calculada como uma combinação linear das funções \vec{f} e \vec{g} avaliadas uma única vez para $k = k_{máx}$ como

$$\boxed{\vec{g}((k_{máx} - n), (l_{k_{máx}} - n), i) = \vec{g}(k_{máx}, l_{k_{máx}}, i) - n \vec{f}(k_{máx}, l_{k_{máx}}, i),} \quad (7.16)$$

para qualquer valor de n tal que

$$0 \leq n \leq (k_{m\acute{a}x} - 1).$$

Conclui-se, portanto, a partir da Equação 7.16 que:

Observação 3: se $\vec{g}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i)$ e $\vec{f}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i)$ são nulas para qualquer valor de $l_{k_{m\acute{a}x}}$ tal que $0 \leq l_{k_{m\acute{a}x}} \leq (k_{m\acute{a}x} - 1)$, então $\vec{g}((k_{m\acute{a}x} - n), (l_{k_{m\acute{a}x}} - n), i)$ será nula para qualquer que seja o valor de n . Portanto, a partir das funções \vec{f} e \vec{g} calculadas para as configurações do somatório com $k = k_{m\acute{a}x}$ uma única vez, é possível identificar todas as posições nulas em qualquer instante de tempo $k < k_{m\acute{a}x}$. Além disso, todos os demais valores não-nulos em qualquer instante de tempo k podem ser encontrados como uma combinação linear de $\vec{f}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i)$ e $\vec{g}(k_{m\acute{a}x}, l_{k_{m\acute{a}x}}, i)$.

7.1.3 Equações das Amplitudes em Função de \vec{f} e \vec{g}

Propõe-se que as Equações 4.39 e 4.40 das amplitudes dos multipolos sejam reescritas em função de \vec{f} e \vec{g} como:

$$a_{n,m}^k = \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \left\{ Z \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\vec{g}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} - \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right] + \sum_{i=1}^{L_{mag}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\vec{g}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} - \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \right\}, \quad (7.17)$$

e

$$b_{n,m}^k = \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \left\{ \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{L_{mag}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\vec{g}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} - \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right] - \sum_{i=1}^{L_{el}} \sum_{l=0}^{k-1} \left[\vec{g}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} - \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right] \right\}, \quad (7.18)$$

onde os índices el e mag indicam a natureza dos momentos de corrente elétrica e magnética respectivamente.

Considerando-se que \vec{f}_{el} , \vec{g}_{el} , \vec{f}_{mag} e \vec{g}_{mag} podem ser nulas em condições distintas e considerando que o número de dipolos elétricos equivalentes L_{el} é igual ao número de dipolos magnéticos equivalentes L_{mag} , poderia ser interessante reescrever os somatórios da Equação 7.17 e 7.18 de forma independente da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
a_{n,m}^k = & \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \sum_{i=1}^{L_{el}} \left\{ Z \sum_{l=0}^{k-1} \vec{g}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} - Z \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right. \\
& \left. + \sum_{l=0}^{k-1} \vec{g}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right\}, \quad (7.19)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_{n,m}^k = & \frac{(-1)^m}{r n(n+1)} \times \sum_{i=1}^{L_{mag}} \left\{ \frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{k-1} \vec{g}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\zeta}_{n,m}^{l,[i]} - \frac{1}{Z} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{mag}(k, l, i) \cdot \vec{\xi}_{n,m}^{l,[i]} \right. \\
& \left. - \sum_{l=0}^{k-1} \vec{g}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\chi}_{n,m}^{l,[i]} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\Delta t} \vec{f}_{el}(k, l, i) \cdot \vec{\psi}_{n,m}^{l,[i]} \right\}. \quad (7.20)
\end{aligned}$$

Para tal, espera-se que o número de iterações eliminadas a partir de alguma técnica de redução de dados em cada somatório seja tal que compense o desmembramento dos somatórios nas Equações 7.19 e 7.20.

7.2 Conclusões Parciais

O volume de dados de entrada iria dobrar ao se adotar as equação das amplitudes em função de \vec{f} e \vec{g} , como foi proposto neste capítulo. Isto ocorre pelo fato de que, quando antes se tinha um único momento de corrente, desta vez suas combinações são sintetizadas em dois outros valores: um de \vec{f} e outro de \vec{g} . No entanto, quando se considera técnicas para redução dos dados de entrada, como a análise estatística apresentada no Capítulo 6, as Equações 7.19 e 7.20 podem se tornar bastante interessantes. Primeiramente, devido ao fato de que uma redução de dados a partir dos valores de \vec{f} e \vec{g} seria mais eficiente, pois são seus valores que de fato influenciam diretamente os produtos da equação das amplitudes. Deste modo, tomar estas funções como referência em um processo de seleção de dados poderia ser mais efetivo do que quando se elimina momentos de corrente. Há uma outra opção de se utilizar \vec{f} e \vec{g} apenas no processo de redução de dados e continuar utilizando-se as equações originais das amplitudes dos múltiplos com os dados selecionados a partir da análise baseada nestas funções auxiliares. De qualquer forma, a utilização destas funções pode ser interessante devido à capacidade de se obter os valores de \vec{f} e \vec{g} em todos os instantes de tempo apenas a partir dos valores calculados para o instante $k_{máx}$.

Capítulo 8

Conclusão

Nunca antes os meios de comunicação fizeram tanto parte do dia-a-dia das pessoas em geral como nestes tempos. Este fenômeno social em massa tem motivado o desenvolvimento de meios de comunicação cada vez mais rápidos e com maior capacidade de transferência de dados. Para tal fim, o aperfeiçoamento dos dispositivos de telecomunicações com banda larga tem sido de grande importância. Consequentemente, os métodos de simulação eletromagnética no domínio do tempo passam a apresentar vantagens significativas sobre os métodos no domínio da frequência, que em geral possuem formulações mais simples e custo computacional mais baixo.

Dentre as técnicas no domínio do tempo, a transformada de campo próximo para campo distante baseada em multipolos esféricos oferece inúmeros diferenciais. Primeiramente, sua formulação constitui um método analítico. Uma outra vantagem está no fato de que esta transformada não necessita de novas integrações quando os pontos de observação são alterados. Por fim, este método permite a geração de diagramas de radiação em qualquer frequência dentro da faixa em análise sem nenhum cálculo adicional das amplitudes dos multipolos [10]. Entretanto, assim como outras técnicas no domínio do tempo, esta transformada apresenta um elevado custo computacional.

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver e propor meios que favoreçam a redução do custo computacional e a aceleração na execução da transformada NFF por expansão em multipolos esféricos aplicada à simulação de antenas impressas UWB. Inicialmente, as simulações do dipolo de meia-onda na Seção 5.3.1 permitiram a validação do algoritmo em 10 GHz, além de terem proporcionado várias análises. Embora não seja uma antena UWB, o dipolo de meia-onda foi importante em todos os experimentos iniciais devido à sua construção simples e sua solução analítica. Por fim, a Seção 5.4.1 apresentou os experimentos iniciais da antena de dupla banda *quasi-yagi*, que promoveu uma série de questionamentos interessantes sobre itens primários como

a fonte de alimentação e a condição de camada absorvente do FDTD. Concluiu-se que o pulso gaussiano é uma boa opção para as faixas de frequência em análise; porém, a condição de contorno absorvente WP-PML não parece ser a mais apropriada.

As Seções 5.3.2 e 5.4.2 permitiram perceber que a transformada NFF por multipolos esféricos pode convergir com um número de coeficientes na expansão bastante inferior ao que a literatura sugere. Além disso, a implementação de programação paralela MPI em adição ao *OpenMP* exibida na Seção 5.3.3 produziu um ganho significativo em termos de tempo de simulação, além da possibilidade da execução do programa em *cluster* de computadores. Ao se simular a antena *quasi-yagi*, deparou-se com problemas novos e que motivaram inúmeras reflexões contidas na Seção 5.4. Neste caso, a transformada convergiu na frequência de 0,9 GHz e não convergiu em 1,9 GHz e 2,4 GHz. Foi constatado que o número de coeficientes da expansão, o número de instantes de tempo de simulação e a fonte de excitação da antena não são o problema fundamental para as divergências. A solução se encontrou na condição de camada absorvente do FDTD, sendo que a condição CPML mostrou-se mais adequada do que a WP-PML. Observou-se também que esta transformada parece demandar que a superfície de Huygens possua dimensões o mais uniformes que possível.

Inspirada por outros trabalhos que buscavam a redução dos dados processados pela transformada NFF, uma análise estatística foi proposta no Capítulo 6. No caso do dipolo de meia-onda, uma redução de quase 90% foi capaz de produzir diagramas de radiação extremamente precisos. A vantagem desta técnica de redução de dados é a sua baixa complexidade e baixo custo computacional. Já a antena impressa *quasi-yagi* teve melhores resultados com taxas de redução de dados em torno de no máximo 60% para 0,9 GHz. Embora a taxa de redução ideal da *quasi-yagi* tenha sido menor que a do dipolo de meia-onda, ela ainda corresponde a um grande volume de dados. Portanto, estas duas antenas permitiram a validação nas frequências analisadas da técnica da redução de dados por análise estatística, que constitui uma das maiores novidades geradas por este trabalho.

Até então, a análise estatística foi aplicada diretamente aos valores dos momentos de corrente elétrica e magnética. Contudo, as contribuições destes momentos de corrente acontecem por meio de combinações e não diretamente nas equações das amplitudes dos multipolos. Diante disso, uma análise destas equações foi realizada no Capítulo 7 com o objetivo de se entender melhor, de fato, como a eliminação de valores dos momentos de corrente influenciam o algoritmo. Algumas observações importantes foram feitas a respeito das equações das amplitudes dos multipolos, que correspondem à maior parcela do custo computacional da transformada. Assim, foi sugerida uma nova forma de se escrever estas equações bem como a recomendação de se aplicar as

técnicas de redução de dados sobre as duas funções auxiliares \vec{f} e \vec{g} em vez de aplicá-las diretamente aos valores dos momentos de corrente.

Como sugestão para trabalhos futuros, destaca-se a substituição da condição de camada absorvente WP-PML pela CPML no algoritmo FDTD. Será necessário compreender o comportamento da transformada NFF para esta condição. Seria interessante também analisar como as dimensões da superfície de Huygens afetam os resultados de campo distante quando ela é variada do formato de um paralelepípedo a um formato cúbico. Por fim, sugere-se reescrever os códigos com base na equação das amplitude dos multipolos em termos das funções auxiliares \vec{f} e \vec{g} . Recomenda-se a redução de dados sobre estas funções e não diretamente sobre os momentos de corrente, além de se procurar usufruir dos padrões de recorrência relatados.

Em resumo, considera-se que este trabalho alcançou os objetivos propostos. A reunião e discussão da vasta teoria da expansão do campo eletromagnético em multipolos esféricos contribuiu para o maior domínio do método. Por sua vez, as simulações e análises realizadas proporcionaram melhor compreensão prática desta transformada NFF. Por fim, a aplicação e implementação de técnicas de programação e de redução de dados poderão favorecer a aceleração da execução computacional da mesma, podendo torná-la mais acessível e mais viável em termos de processamento computacional. A contribuição deixada por este trabalho certamente irá favorecer avanços futuros na utilização desta transformada de campo próximo para campo distante.

Referências Bibliográficas

- [1] “Harmônicos esféricos,” https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_harmonics_lobes.jpg, Acessado em: 22-09-2017.
- [2] M. H. Ullah, W. N. L. Mahadi, T. A. Latef, M. T. Islam, M. J. Uddin, and M. R. Ahsan, “Dual band printed *quasi*-yagi antenna for RFID and WLAN applications,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 57, no. 11, pp. 2655–2657, 2015.
- [3] A. Clebsch, “Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 61, pp. 195–262, 1863.
- [4] J. C. Maxwell, “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field,” *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, vol. 155, pp. 459–512, 1865.
- [5] L. Klinkenbusch, “Brief review of spherical-multipole analysis in radio science,” *URSI Radio Science Bulletin*, vol. 81, no. 1, pp. 5–16, 2008.
- [6] H. Hertz, “Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell’schen theorie,” *Annalen der Physik*, vol. 272, no. 1, pp. 1–22, 1889.
- [7] T. Bromwich, “X. Electromagnetic waves,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 38, no. 223, pp. 143–164, 1919.
- [8] W. Hansen, “A new type of expansion in radiation problems,” *Physical review*, vol. 47, no. 2, p. 139, 1935.
- [9] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. John Wiley & Sons, 1941.
- [10] C.-C. Oetting and L. Klinkenbusch, “Near-to-far-field transformation by a time-domain spherical-multipole analysis,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 6, pp. 2054–2063, 2005.

- [11] A. Z. Elsherbeni and V. Demir, *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with MATLAB simulations*. The Institution of Engineering and Technology, 2016.
- [12] G. L. Ramos, “Caracterização banda larga de antenas impressas sobre substratos com pequenas perdas: uma abordagem via FDTD/WP-PML e expansão em multipolos esféricos no domínio do tempo,” Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2013.
- [13] F. M. E. Camilo, C. G. do Rego, and G. L. Ramos, “Near-to-far-field transform sample reduction through statistical analysis,” in *Antennas and Propagation, 2018. EuCAP 2018. 12th European Conference on*. IEEE, 2018.
- [14] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica*, 3rd ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.
- [15] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, 1st ed. John Wiley & Sons, 2001.
- [16] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed. Academic Press, 2005.
- [17] W. Hansen, “Directional characteristics of any antenna over a plane earth,” *Physics*, vol. 7, no. 12, pp. 460–465, 1936.
- [18] W. W. Hansen, “Transformations useful in certain antenna calculations,” *Journal of Applied Physics*, vol. 8, no. 4, pp. 282–286, 1937.
- [19] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 1997.
- [20] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [21] L. Klinkenbusch and C.-C. Oetting, “Correction to “Near-to-far-field transformation by a time-domain spherical-multipole analysis”,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 11, pp. 3367–3367, 2007.
- [22] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method*. Artech House, 2005.
- [23] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Tables of Integral, Series and Products, vol. VI*. Academic Press, New York, 2000.

- [24] L. Klinkenbusch, “Scattering of an arbitrary plane electromagnetic wave by a finite elliptic cone,” *Archiv für Elektrotechnik*, vol. 76, no. 3, pp. 181–193, 1993.
- [25] T. Chai and R. R. Draxler, “Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)?—Arguments against avoiding RMSE in the literature,” *Geoscientific Model Development*, vol. 7, no. 3, pp. 1247–1250, 2014.
- [26] G. L. Ramos, C. G. Rego, and A. R. Fonseca, “Parallel implementation of a combined moment expansion and spherical-multipole time-domain near-field to far-field transformation,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 50, no. 2, pp. 609–612, 2014.
- [27] M. J. Quinn, *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*. McGraw-Hill, 2004.
- [28] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1999.
- [29] R. B. V. Teperino, “Utilização de equações integrais no domínio do tempo na predição da propagação sobre terrenos irregulares,” Dissertação de Mestrado, PPGEE-UFMG, Março, 2003.
- [30] G. L. Ramos, G. F. Rodrigues, and C. G. Rego, “FDTD near field data reduction using principal component analysis,” in *Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), 2015 SBMO/IEEE MTT-S International*. IEEE, 2015, pp. 1–4.

Apêndice A

Expansão Binomial

A expansão de binômios do tipo

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \tag{A.1}$$

é feita da seguinte maneira:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \tag{A.2}$$

$$= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2}{2!} + \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{3} x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \tag{A.3}$$

De forma similar, para binômios do tipo

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \tag{A.4}$$

a expansão é feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(1-x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n \\ &= 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} (-x) + \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{2} \binom{-\frac{3}{2}}{2}}{2!} (-x)^2 + \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{3} \binom{-\frac{3}{2}}{3} \binom{-\frac{5}{2}}{3}}{3!} (-x)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots\end{aligned}\tag{A.5}$$

Apêndice B

Polinômios Associados de Legendre

Tabela B.1: Polinômios associados de Legendre de grau n , ordem $m = 0$ e argumento x .

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6\,435x^8 - 12\,012x^6 + 6\,930x^4 - 1\,260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12\,155x^9 - 25\,740x^7 + 18\,018x^5 - 4\,620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46\,189x^{10} - 10\,9395x^8 + 90\,090x^6 - 30\,030x^4 + 3\,465x^2 - 63)$

Embora a equação abaixo normalmente não seja usada para calcular os polinômios associados de Legendre da forma $P_n^m(x)$, que neste caso tem grau $n = 0, 1, 2, \dots$, ordem

$m = 0$ e argumento x , é interessante apresentá-la como segue:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{B.1})$$