

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Especialização em Estatística

Poliana Lemos da Silva

**ANÁLISE DA SÉRIE HISTÓRICA DOS BENEFÍCIOS CONCEDIDOS  
DA PREVIDÊNCIA SOCIAL DO BRASIL**

Belo Horizonte  
2017

Poliana Lemos da Silva

**ANÁLISE DA SÉRIE HISTÓRICA DOS BENEFÍCIOS CONCEDIDOS  
DA PREVIDÊNCIA SOCIAL DO BRASIL**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado na disciplina Metodologia de  
Pesquisa em Estatística do Curso  
Especialização em Estatística da  
Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Ela Mercedes M.  
de Toscano

**Belo Horizonte**

**2017**

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1** – Etapas da construção do modelo de previsão via metodologia Box-Jenkins
- Figura 2** – Gráfico da série de benefícios concedidos Previdência Social
- Figura 3** – Blox plot mensal dos benefícios concedidos pela Previdência Social
- Figura 4** – Blox Plot anual dos benefícios concedidos pela Previdência Social
- Figura 5** – Gráfico FAC: Benefícios Concedidos pela Previdência Social
- Figura 6** – Gráfico FACP: Benefícios Concedidos pela Previdência Social
- Figura 7** – Gráfico da série diferenciada dos Benefícios Concedidos pela Previdência Social
- Figura 8** – Gráfico FAC da série diferenciada de Benefícios Concedidos pela Previdência Social
- Figura 9** – Gráfico FACP da série diferenciada de Benefícios Concedidos pela Previdência Social
- Figura 10** – Modelo M1: SARIMA  $(0,1,1)(0,1,1)_{12}$
- Figura 11** – Gráfico da variabilidade da série de Benefícios Concedidos no período amostral
- Figura 12** – Gráfico FAC da série Benefícios Concedidos Modelo 1
- Figura 13** – Análise dos resíduos do modelo M1: SARIMA  $(0,1,1)(0,1,1)_{12}$
- Figura 14** – Gráfico do Modelo 1: Período de Previsão x Período de Validação
- Figura 15** – Modelo M2: SARIMA  $(0,1,1)(1,0,0)_{12}$
- Figura 16** – Gráfico da variabilidade da série de Benefícios Concedidos no período amostral
- Figura 17** – Gráfico FAC da série Benefícios Concedidos Modelo 2
- Figura 18** – Análise dos resíduos: modelo 2
- Figura 19** – Gráfico do Modelo 2: Período de Previsão x Período de Validação
- Figura 20** – Modelo Identificado utilizando o método de Alisamento Exponencial
- Figura 21** – Gráfico FAC dos resíduos da série de Benefícios Concedidos Modelo 3
- Figura 22** – Análise dos resíduos - Modelo Alisamento Exponencial
- Figura 23** – Gráfico do Modelo 3: Período de Previsão x Período de Validação
- Figura 24** – Fórmula MAD
- Figura 25** – Fórmula MAPE

**Figura 26** – Fórmula MSD

**Figura 27** – Gráfico: Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

**Figura 28** – Média das Previsões dos modelos x valores reais Benefícios Concedidos

## LISTA DE TABELAS

**Tabela 1** – Estatísticas dos modelos

**Tabela 2** – Estatísticas dos Resíduos

**Tabela 3** – Resumo das Estatísticas dos Erros de Previsão na Série

**Tabela 4** – Estatísticas dos Erros de Previsão no período de Validação

**Tabela 5** – Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

**Tabela 6** – Média das Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO .....	7
1.1	O assunto e sua importância .....	7
1.2	Problemática.....	9
1.3	Justificativa .....	10
1.4	Objetivo .....	10
1.4.1	Objetivo Geral.....	10
2.	METODOLOGIA .....	11
2.1	Métodos de Previsão .....	11
2.2	Análise Exploratória de dados .....	12
2.3	Modelos SARIMA .....	12
2.3.1	Metodologia Box e Jenkins.....	14
2.4	Modelos de Alisamento Exponencial de Winter.....	15
2.5	Medidas de Acurácia .....	18
3.	RESULTADOS .....	20
3.1	Descrição dos Dados.....	20
3.2	Modelagem da Série através do Modelo SARIMA.....	25
3.3	Modelação da Série através do Método Alisamento Exponencial .....	32
4.	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	40
5.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	42

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 O assunto e sua importância

Um dos maiores desafios, em termos governamentais, colocados atualmente diante dos administradores públicos é a questão previdenciária, foco de intenso debate nos últimos anos.

De acordo com o MPS - Ministério da Previdência Social (2013), a Previdência Social é o seguro social para a pessoa que contribui. É uma instituição pública que tem como objetivo reconhecer e conceder direitos aos seus segurados.

Segundo Pinheiro (2007), no Brasil, a previdência social está organizada a mais de 80 anos, mas, somente nos últimos anos, têm-se evidenciado os efeitos das mudanças na estrutura populacional sobre a previdência social, principalmente a partir da reforma constitucional de 1998, que instituiu o chamado “fator previdenciário” e incorporou conceitos demográficos, como a expectativa de sobrevida, no cálculo dos benefícios de aposentadoria.

Conforme MPS (2013), a renda transferida pela Previdência Social é utilizada para substituir a renda do trabalhador contribuinte, quando ele perde a capacidade de trabalho, seja pela doença, invalidez, idade avançada, morte e desemprego involuntário, ou mesmo a maternidade e a reclusão.

Quanto o regime geral da Previdência Social, temos:

O regime geral de previdência social é compulsório e baseado no regime financeiro de repartição simples, seu gerenciamento dá-se pelo INSS (Instituto Nacional de Seguro Social), que cobre todos os trabalhadores do setor privado. Empregadores, empregados assalariados, domésticos, autônomos e trabalhadores rurais são contribuintes do sistema. A aposentadoria por idade é concedida aos homens aos 65 anos e às mulheres aos 60 anos na área urbana e aos homens com 60 anos e mulheres com 55 anos na área rural. A aposentadoria por tempo de contribuição requer, para os homens, 35 anos de contribuição e, para as mulheres, 30 anos. A administração desse regime é pública. (PINHEIRO, 2007).

Para MPS (2013), a missão da Previdência Social é conceder benefício a fim de garantir proteção ao trabalhador e sua família, por meio de sistema público de política previdenciária solidária, inclusiva e sustentável, com o objetivo de promover o bem-estar social e tem como visão ser reconhecida como patrimônio do trabalhador e sua família, pela sustentabilidade dos regimes previdenciários e pela excelência na gestão, cobertura e atendimento.

É importante ressaltar que muitos fatores têm grandes impactos na concessão de benefícios da Previdência Social. Como exemplo, podemos citar o envelhecimento da população, e o crescimento da economia informal, que quanto maiores mais a previdência gastará com benefícios.

O objetivo desta monografia visa identificar um modelo de previsão mais adequado para a série de benefícios concedidos pela Previdência Social no Brasil, com o objetivo de minimizar os efeitos que os erros de previsão podem gerar.

O estudo poderá fornecer subsídios de maneira antecipada para que a tomada de decisão seja precisa e esteja baseada em um modelo estatístico de série temporal.

O período de análise que será utilizado para esta monografia será de janeiro de 2003 a dezembro de 2013, restando assim janeiro de 2014 a dezembro de 2014 para realizar a validação do modelo ajustado. Serão utilizados estes períodos, uma vez que é a base mais atualizada que se encontra no sítio da Previdência Social no Brasil.

A estrutura dessa monografia está em cinco partes, sendo a primeira seção composta pela introdução do trabalho, o problema da pesquisa, o objetivo geral e a metodologia.

A segunda seção, aborda a fundamentação teórica, na qual a análise está embasada através da menção de publicações já existentes, desde a definição de métodos de previsão, até a fundamentação bibliográfica dos métodos a serem utilizados na pesquisa.

A seção 3, contém a análise exploratória dos dados, o ajuste dos modelos estatísticos e, em seguida na quarta seção serão realizadas as comparações entre os modelos, onde se procurará apontar um melhor modelo geral para a série estudada.

Na quinta e última seção, serão apresentadas às considerações finais.

## **1.2 Problemática**

A população brasileira está envelhecendo rapidamente, quanto mais a população envelhece, mais a previdência gastará com benefícios. Sabe-se que esta forte tendência vem ocorrendo e, com certeza irá se perpetuar, dado os avanços e descobertas na medicina e saúde de forma geral.

Outro fator que onera o sistema público de Previdência é o aumento da economia informal já que trabalhadores informais geralmente não contribuem para o sistema, mas terão acesso ao benefício mínimo garantido a todo cidadão. A informalidade é fruto do desemprego e dos movimentos de terceirização que faz com que o empregado rompa as relações trabalhistas com sua empresa embora, às vezes, continue trabalhando para ela.

A previdência social se constitui num dos temas mais polêmicos dos dias de hoje. O discurso dominante descreve uma situação de falência e de incapacidade futura da previdência pública, frequentemente relacionada a um dramático problema demográfico de envelhecimento da população em função do aumento da expectativa de vida e da baixa taxa de natalidade.

Este estudo permitirá que valores futuros de uma série sejam previstos tomando por base apenas seus valores presentes e passados, e que para tal, questiona-se como problema central de pesquisa:

*Qual o melhor modelo que representa a série, para fazer previsões doze meses à frente para a série de benefícios concedidos pela Previdência Social no Brasil?*

### **1.3 Justificativa**

O presente trabalho visa conhecer a futura demanda dos benefícios a serem concedidos pela Previdência Social, a fim de atuar para fortalecer seus resultados futuros, aumentando o seu grau de cobertura entre trabalhadores em idade ativa, coordenando melhor os regimes existentes, aprofundando a qualidade da gestão e preocupando-nos com a sustentabilidade do sistema no longo prazo, para que ele possa continuar prestando a proteção social também às gerações futuras.

Nesse sentido o desenvolvimento desse trabalho torna-se importante como monografia para o curso de Especialização em Estatística com Ênfase em Indústria e Mercado. A atuação de estatísticos e atuários é de extrema relevância para a gestão do Regime Próprio de Previdência Social (RPPS) uma vez que eles fornecem aos gestores dados de grande importância, que subsidiam as tomadas de decisões, principalmente no que se refere à busca do equilíbrio financeiro e atuarial do Regime.

### **1.4 Objetivo**

#### ***1.4.1 Objetivo Geral***

O objetivo da presente monografia é identificar o método de previsão mais adequado para realizar previsões mensais da série de benefícios concedidos pela Previdência Social no Brasil, a fim de minimizar os efeitos que os erros de previsão podem gerar.

## **2. METODOLOGIA**

Série temporal é qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo, segundo Morettin e Toloí (2006). A classe de fenômenos cujo processo observacional e consequente observação numérica geram uma sequência de dados distribuídos no tempo é denominada série temporal (Souza, 1989).

De acordo com Morettin e Toloí (2006) os modelos utilizados para descrever séries temporais são processos estocásticos, isto é, processos controlados por leis probabilísticas. Qualquer que seja a classificação que façamos para os modelos de séries temporais pode-se considerar um número muito grande de modelos diferentes para descrever o comportamento de uma série particular.

Ainda segundo Morettin e Toloí (2006), a construção destes modelos depende de vários fatores, tais como o comportamento do fenômeno ou do conhecimento a priori que temos de sua natureza e do objetivo da análise. Na prática depende, também, da existência de métodos apropriados de estimação e da disponibilidade de softwares estatísticos adequados.

Nesta seção faremos uma abordagem de dois métodos de análise de séries temporais utilizados no estudo da série de observações que é foco dessa monografia. Começamos pelo método SARIMA e finalizamos com o alisamento exponencial Winters.

### **2.1 Métodos de Previsão**

Os métodos de previsão podem ser classificados em dois grupos: os qualitativos e os quantitativos (Hillier e Lieberman, 1995). Os qualitativos baseiam-se em juízos subjetivos, especulações e intuição de especialistas. Dispensam dados quantitativos e estabelecem cenários ou paralelismos com situações semelhantes. Quanto aos quantitativos servem-se da análise estatística de dados históricos (quantificados) para projetar no futuro padrões de comportamento que foram identificados nos dados históricos (Oliveira, 1995).

## 2.2 Análise Exploratória de dados

Uma análise exploratória de dados é importante, pois nos dá inúmeras informações essenciais ao entendimento do fenômeno. A construção do gráfico da série de dados nos fornece informações sobre as componentes de uma série:

- A série apresenta uma tendência ao longo do tempo?
- A série apresenta variações sazonais?
- A série é estacionária?
- A distribuição dos dados é simétrica?

O estudo dos processos estacionários pode ser feito no domínio da frequência ou no domínio do tempo. O estudo no domínio da frequência dá relevância aos conceitos de periodograma e de densidade espectral, o domínio no tempo atribui papel predominante às funções autocovariância e autocorrelação. A função de autocorrelação é uma medida da dependência entre observações da mesma série defasada no tempo, o gráfico desta função de autocorrelação é chamado de correlograma, que permite identificar modelos que se ajustem aos dados.

## 2.3 Modelos SARIMA

Para séries estacionárias,  $Y_t$ , podem ser identificados diversos modelos para acompanhar a variabilidade em torno a seu valor médio, entre eles estão os modelos onde  $Y_t$  é uma combinação do processo defasado no tempo,  $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, Y_{t-p}$  chamados de modelos autorregressivos de ordem  $p$ , denotado por  $AR(p)$ , os modelos para  $Y_t$  em função de uma combinação do vetor de resíduos defasados no tempo  $a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, \dots, a_{t-q}$ , chamados de modelos de médias móveis de ordem  $q$ , denotado por  $MA(q)$ . Também se tem modelos com as duas componentes, autorregressivo e de médias móveis de ordem  $p$  e  $q$ , denotado por  $ARMA(p, q)$ .

Para séries não estacionárias, com as duas componentes, autorregressivo e de médias móveis de ordem  $p$  e  $q$ , chamados de modelos autorregressivos integrados e de médias móveis denotado por  $ARIMA(p, d, q)$ , onde  $d$  indica o grau de diferenciação para tornar a série estacionária.

Para séries não estacionárias com variabilidade sazonal, se tem os modelos SARIMA que levam em consideração a sazonalidade estocástica dos dados, que contem uma parte não sazonal, com as duas componentes, autorregressivo integrado e de médias móveis de ordem  $p$  e  $q$ , e uma parte sazonal com componentes autorregressivos sazonais integrados e de médias móveis sazonais de ordem  $P$  e  $Q$ , denotado SARIMA( $p,d,q$ )( $P,D,Q$ ) onde  $d$  indica o grau de diferenciação não sazonal e  $D$  o grau de diferenciação sazonal de ordem  $D$ , a fim de tornar a série estacionária.

O modelo geral SARIMA pode ser definido conforme a seguinte equação:

$$\Phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B^S)^D(1-B)^d Y_t = \Theta(B)\Theta(B^S)a_t \quad (1)$$

Onde:

$\Phi_p(B^S) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$  é o polinômio autorregressivo não sazonal de ordem  $p$ ;

$\Phi_P(B^S) = (1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS})$  é o polinômio autorregressivo sazonal de ordem  $P$  com período sazonal  $S$ ;

$(1 - B^S)^D (1 - B)^d$  é o operador indicando o a diferenciação sazonal de ordem  $D$  e uma diferenciação não sazonal de ordem  $d$ ;

$\Theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$  é o polinômio de médias móveis não sazonal de ordem  $q$ ,

$\Theta_Q(B^S) = (1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_Q B^{QS})$  é o polinômio de médias móveis sazonal de ordem  $Q$  com período sazonal  $S$ ;

$a_t$  é um processo ruído branco gaussiano.

A seguir apresentamos alguns modelos SARIMA com período de sazonalidade mensal  $s=12$ .

Modelo SARIMA (0,1,0)(0,1,1)<sub>12</sub>

$$(1 - B)(1 - B^{12}) Y_t = \Theta_0 + (1 - \Theta B^{12}) a_t \quad (2)$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + \Theta_0 + a_t - \Theta a_{t-12}$$

Modelo SARIMA (0,1,0)(1,1,0)<sub>12</sub>

$$(1 - \Phi B^{12})(1 - B)(1 - B^{12}) Y_t = \theta_0 + a_t \quad (3)$$

$$Y_t = Y_{t-1} + (1 + \Phi)Y_{t-12} + (1 + \Phi)Y_{t-13} - \Phi Y_{t-24} + \Phi Y_{t-25} + \theta_0 + a_t$$

Modelo SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub>

$$(1 - B)(1 - B^{12}) Y_t = \theta_0 + (1 - \theta B)(1 - \theta B^{12})a_t \quad (4)$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + \theta_0 + a_t - \theta a_{t-12} - \theta a_{t-1} + \theta \theta a_{t-13}$$

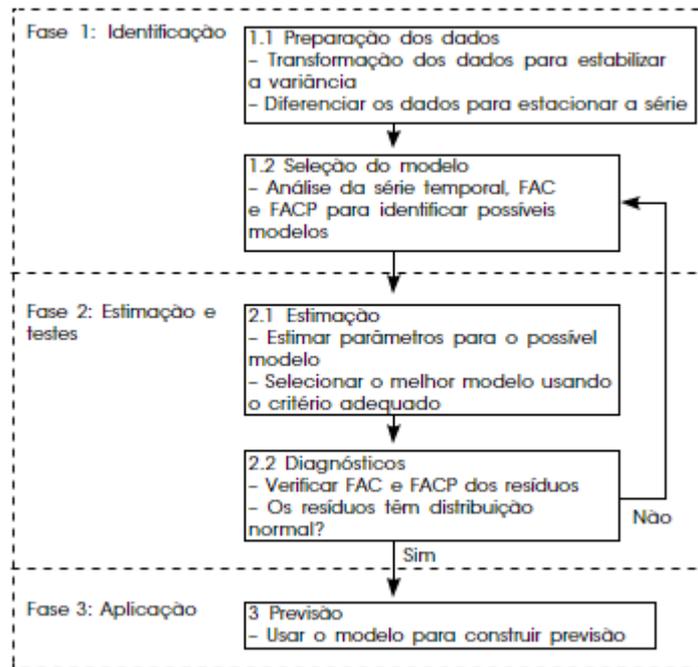
Modelo SARIMA (0,1,0)(1,1,1)<sub>12</sub>

$$(1 - \Phi B^{12})(1 - B)(1 - B^{12}) Z_t = \theta_0 + (1 - \theta B^{12})a_t \quad (5)$$

$$Y_t = Y_{t-1} + (1 + \Phi)Y_{t-12} + (1 + \Phi)Y_{t-13} - \Phi Y_{t-24} + \Phi Y_{t-25} + \theta_0 + a_t - \theta a_{t-12}$$

### **2.3.1 Metodologia Box e Jenkins**

Para a modelagem de séries temporais usando os modelos SARIMA segue-se um procedimento iterativo sugerido por Box e Jenkins (1970), até chegar a um bom modelo, que seja parcimonioso e que represente bem a variabilidade da série. O procedimento está composto de três etapas iterativas: identificação, estimação e diagnósticos, representadas na Figura 1.



**Figura 1** – Etapas da construção do modelo de previsão via metodologia Box-Jenkins

## 2.4 Modelos de Alisamento Exponencial de Winter

O método alisamento exponencial pondera os valores utilizados na previsão de acordo com o tempo. Em outras palavras, o alisamento exponencial permite atribuir um maior peso em valores mais recentes, assumindo que estes são mais importantes na determinação do valor previsto (Wanke et al., 2006).

O método de alisamento exponencial é conhecido com esta denominação em virtude deste método aplicar um conjunto de pesos desiguais aos valores passados da série temporal, sendo que tais pesos decaem de forma exponencial da mais recente a mais distante observação (Makridakis; Wheelwright; Hyndman, 1998; Morettin; Tolo, 2006).

Estes modelos são originários da década de 40, com os estudos realizados por Goodbell Brown. Na década seguinte, Charles Carter Holt, independentemente de Brown, desenvolveu métodos diferentes de alisamento exponencial, publicando seu trabalho em 1957. No início da década de 1960, Peter Winters testou os modelos de Holt utilizando dados empíricos, fazendo com que tal modelo passasse a ser conhecido como Holt-Winters (Feliciano, 2009). Segundo Allemão (2004), as séries

com características dos modelos Holt-Winters são séries frequentemente observadas no dia a dia.

Os modelos obtidos pelo método de Holt-Winters, ou como também conhecidos simplesmente por modelos de Winters, são modelos adequados para séries temporais que apresentam tendência e sazonalidade. Tais modelos dividem-se em aditivo e multiplicativo. Ambos os modelos e suas utilizações são baseados em quatro equações com constantes de ajustamento diferentes associadas às componentes de nível, tendência, sazonalidade e a equação de previsão.

No modelo aditivo, parte-se do pressuposto que a amplitude da variação sazonal permanece constante ao longo do tempo, já no modelo multiplicativo, que a amplitude da variação sazonal varia ao longo do tempo (Pellegrini, 2000; Allemão, 2004).

As equações do modelo multiplicativo são apresentadas a seguir:

$$L_t = \alpha \left( \frac{Y_t}{S_{t-s}} \right) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (6)$$

$$T_t = \beta (L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) T_{t-1} \quad (7)$$

$$S_t = \gamma \left( \frac{Y_t}{L_t} \right) + (1 + \gamma) S_{t-s} \quad (8)$$

$$\hat{Y}_t = (L_{t-1} + T_{t-1}) S_{t-s} \quad (9)$$

Onde:  $L_t$  = é a componente de nível;

$S_t$  = efeito sazonal;

$T_t$  = é a tendência;

s é o período sazonal;

$\alpha$  com valores no intervalo  $0 < \alpha < 1$ , é a constante de suavização da componente de nível  $L_t$ ;

$\beta$  com valores no intervalo  $0 < \beta < 1$ , é a constante de suavização da componente tendência  $T_t$ ;

$\gamma$  com valores no intervalo  $0 < \gamma < 1$ , é a constante de suavização da componente de sazonalidade  $S_t$ ;

$Y_t$  valor do dado no tempo  $t$ ;

$\hat{Y}_t$  valor ajustado, ou previsão para um período à frente, no tempo  $t$ .

As equações do modelo aditivo são apresentadas a seguir:

$$L_t = \alpha (Y_t - S_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (10)$$

$$T_t = \beta (L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) T_{t-1} \quad (11)$$

$$S_t = \gamma (Y_t - S_{t-s}) + (1 + \gamma) S_{t-s} \quad (12)$$

$$\hat{Y}_t = L_{t-1} + T_{t-1} + S_{t-s} \quad (13)$$

Onde:  $L_t$  = é a componente de nível;

$S_t$  = efeito sazonal;

$T_t$  = é a tendência;

$s$  é o período sazonal;

$\alpha$  com valores no intervalo  $0 < \alpha < 1$ , é a constante de suavização da componente de nível  $L_t$ ;

$\beta$  com valores no intervalo  $0 < \beta < 1$ , é a constante de suavização da componente tendência  $T_t$ ;

$\gamma$  com valores no intervalo  $0 < \gamma < 1$ , é a constante de suavização da componente de sazonalidade  $S_t$ ;

$Y_t$  valor do dado no tempo  $t$ ;

$\hat{Y}_t$  valor ajustado, ou previsão para um período à frente, no tempo  $t$ .

As constantes utilizadas nos modelos de Holt-Winters, da mesma forma que as demais utilizadas nos modelos de suavização exponencial, são determinadas através da minimização da soma dos quadrados dos erros de ajustamento e, a determinação dos valores apropriados, trata-se da principal dificuldade da utilização destes modelos (Allemão, 2004; Morettin; Toloi, 2006). Além desta, Morettin e Toloi (2006) citam como outra dificuldade dos modelos de Holt-Winters, o estudo das propriedades estatísticas, tais como: média e variância de previsão; e, conseqüentemente, a construção de um intervalo de confiança.

Ressalta-se que para a estimativa do componente sazonal (S) necessita-se, no mínimo, um período completo de observações (por exemplo, s é igual a 12 quando se tem dados mensais e sazonalidade anual) (Makridakis; Wheelright; Hyndman, 1998; Pellegrini, 2000).

## 2.5 Medidas de Acurácia

Dependendo do comportamento da série temporal, vários modelos podem ser empregados na previsão de seus valores futuros. A escolha do modelo mais apropriado é feita, geralmente, a partir do somatório dos erros gerados por cada modelo (PELLEGRINI, 2000).

Dentre os tipos de medidas de erros mais utilizada para avaliar a precisão de um método quantitativo de previsão estão listados a seguir:

- ✓ MAD – Desvio Absoluto Médio

$$MAD = \frac{\sum_{T=1}^n |Y_t - \hat{Y}_t|}{n}$$

- ✓ MAPE – Erro Porcentual Absoluta Médio

$$MAPE = \frac{\sum_{T=1}^n |(Y_t - \hat{Y}_t) / Y_t|}{n} \times 100, Y_t \neq 0$$

- ✓ MSD – Desvio Quadrado Médio

$$MSD = \frac{\sum_{T=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t)^2}{n}$$

- ✓ MPE - Média percentual dos erros

$$MPE = \frac{\sum_{T=1}^n (Y_t - \hat{Y}_t) / Y_t}{n} \times 100, Y_t \neq 0$$

Onde:  $Y_t$  é valor real no tempo t

$\hat{Y}_t$  é o valor ajustado

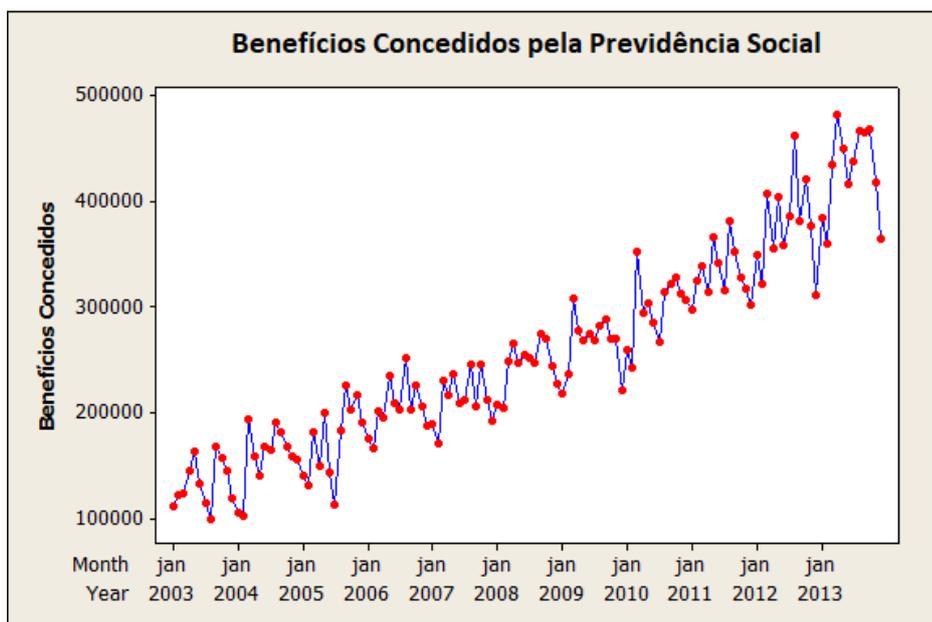
n o número de observações.

O MAD é empregado para avaliar o nível de erro na mesma unidade de medida da série de benefícios concedidos. Para avaliar a magnitude do erro com relação a série histórica calculam-se o MAPE. Com MSD, os grandes erros se destacam, quando comparados aos erros de menor magnitude. O MPE, para avaliar se o método possui algum viés, ou seja, se os valores previstos estão sistematicamente acima ou abaixo dos benefícios concedidos reais. Para previsões não enviesadas, espera-se um valor do MPE próximo de zero.

### 3. RESULTADOS

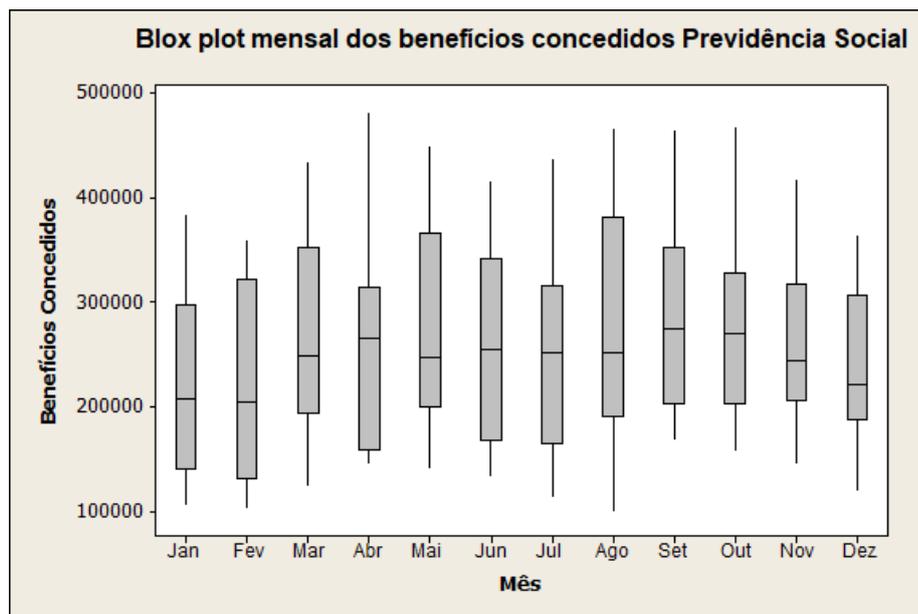
#### 3.1 Descrição dos Dados

Nesta seção será apresentada uma descrição da série Benefícios Concedidos pela Previdência Social. Conforme Figura 2, a série em estudo apresenta tendência crescente, e indícios da presença da componente sazonal.



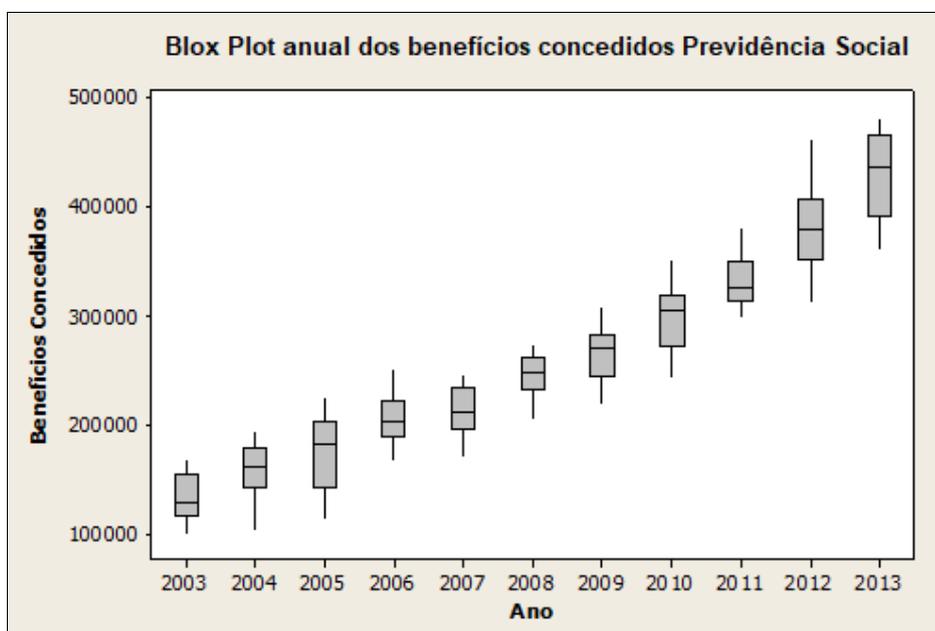
**Figura 2** – Gráfico da série de benefícios concedidos Previdência Social

Podemos verificar a presença de sazonalidade ao analisar o gráfico da série além do blox plot mensal dos benefícios concedidos Previdência Social (Figura 3). É possível verificar que o total de benefícios concedidos nos meses de fevereiro apresenta uma mediana menor em relação à mediana dos outros meses, bem como em abril apresenta mediana maior que os outros meses do ano.



**Figura 3** – Blox plot mensal dos benefícios concedidos pela Previdência Social

A Figura 4 apresenta o box plot dos benefícios concedidos pela Previdência Social por ano. Verifica-se que a Previdência Social está concedendo mais benefícios ao longo dos anos, o que pode ser explicado pelo envelhecimento da população.



**Figura 4** – Blox Plot anual dos benefícios concedidos pela Previdência Social

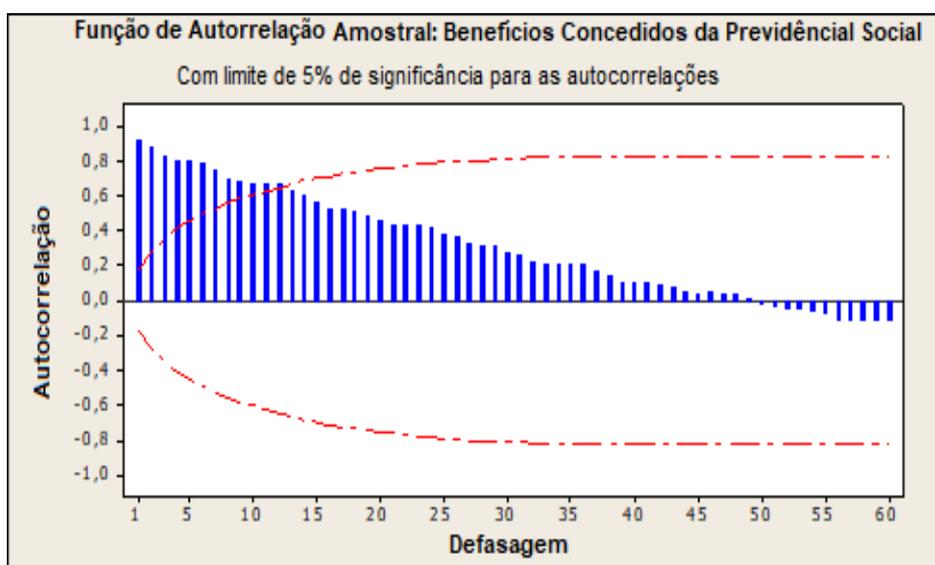
As medianas dos dados nos anos de 2004 e 2008 são equidistantes dos extremos, dessa forma pode-se dizer que os dados apresentam uma tendência simétrica. Nos

demais anos apresentam tendência assimétrica. Não foram identificados valores discrepantes (*outlier's*), bem como pontos atípicos na série anual analisada.

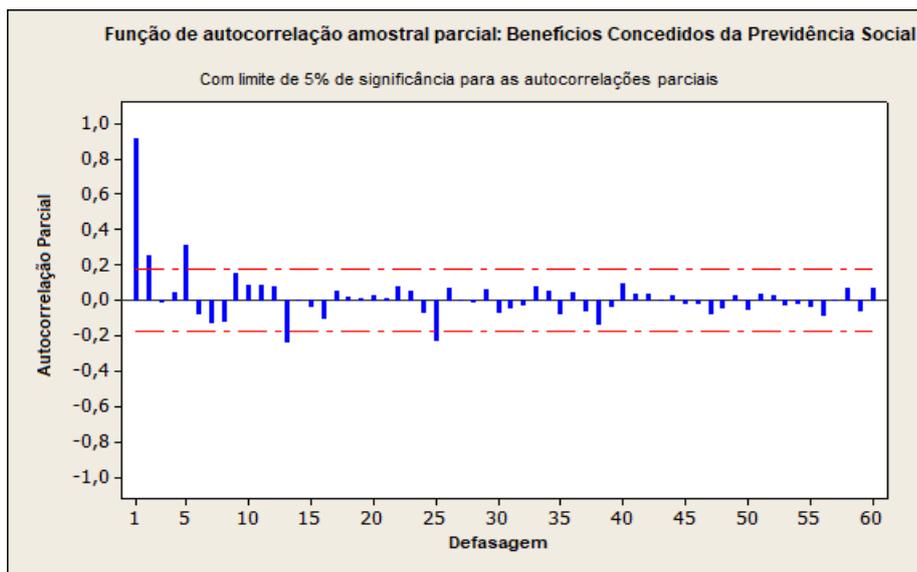
Conforme Ministério da Previdência Social (2016), a Previdência Social inicia em outubro de 2005, o Censo Previdenciário para atualizar os dados cadastrais de aposentados e pensionistas do INSS. Tal acontecimento afetou os benefícios concedidos, conforme pode ser observado através do boxplot da Figura 4 que evidenciou maior dispersão no ano de 2005.

No ano de 2013, ocorreu um acréscimo de benefícios concedidos a partir de abril, em virtude de pagamentos precatórios e sentenças judiciais. Além disso, há impacto da Compensação Previdenciária (Comprev) entre o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS) e os regimes próprios de Previdência Social (RPPS) de estados e municípios.

As Figuras 5 e 6 contêm os gráficos da Função de Autocorrelação Amostral (FAC) e Função de autocorrelação parcial amostral (FACP), respectivamente, para os benefícios concedidos. Analisando-se o correlograma da FAC, observamos um decaimento exponencial lento, característica de processos não estacionários. O correlograma da FACP é possível identificar correlações significativamente diferentes de zero nas defasagens 1, 5, 12 e 24.



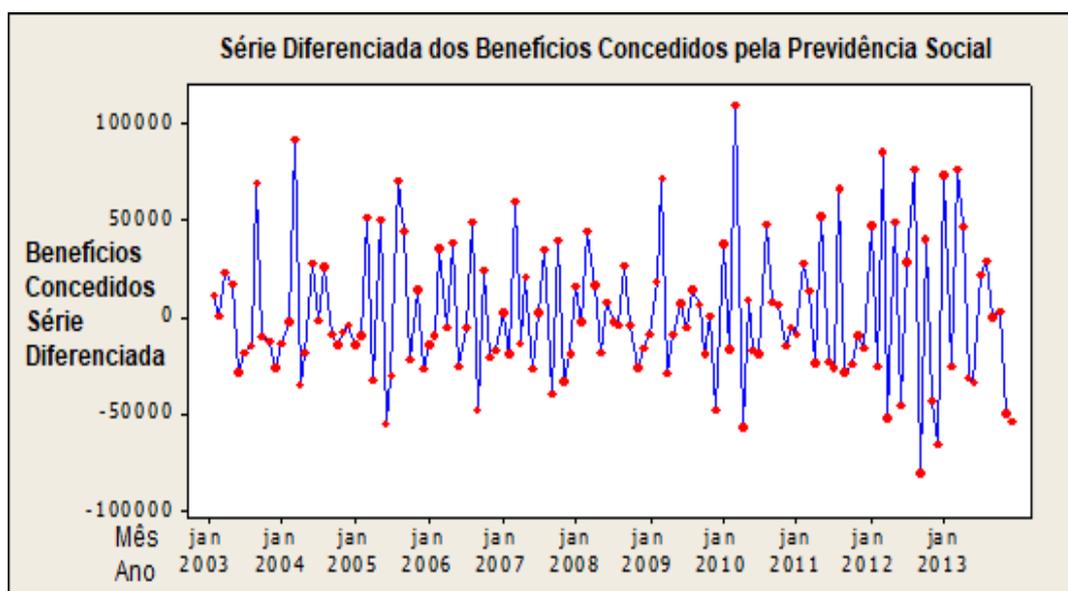
**Figura 5** – Gráfico FAC: Benefícios Concedidos pela Previdência Social



**Figura 6** – Gráfico FACP: Benefícios Concedidos pela Previdência Social

Analisando-se o FACP não é possível definir um único modelo para série, somente que inicialmente o modelo possui características de um auto regressivo.

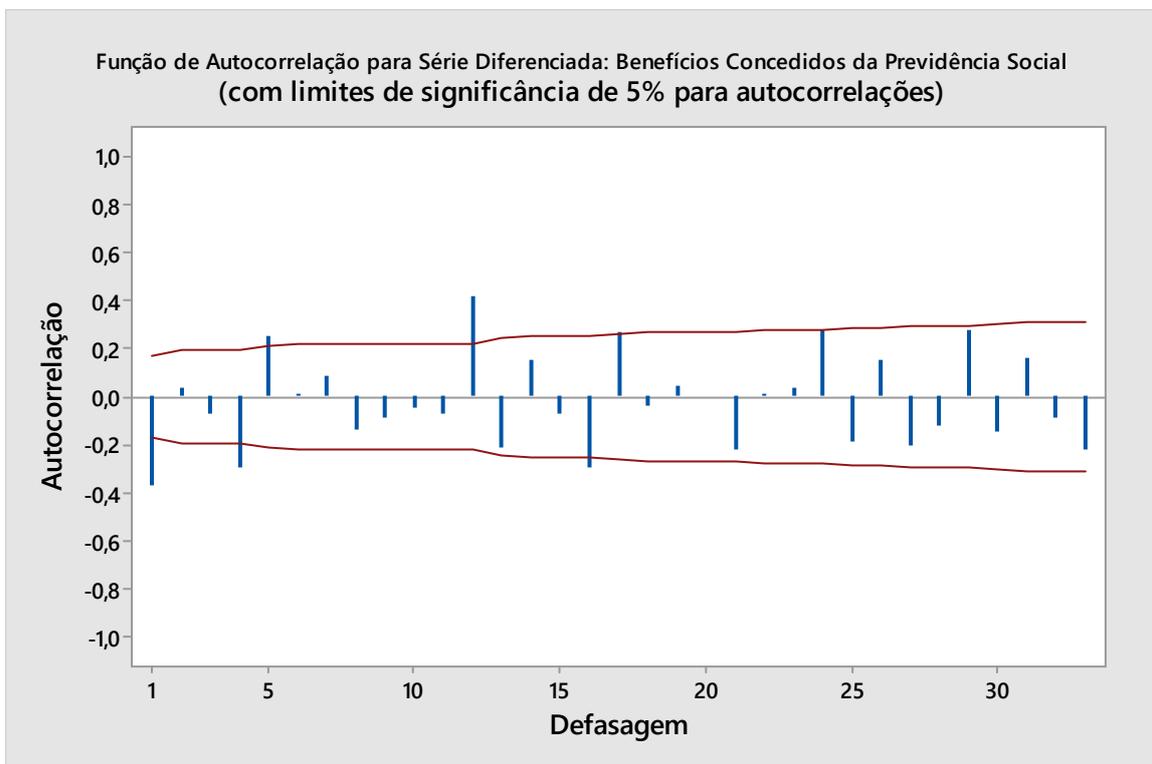
Conforme verificado na Figura 2 a série possui tendência de crescimento, dessa forma, a fim de eliminar a tendência, foi realizada uma diferença na série de dados para retirar o efeito da tendência. No gráfico da Figura 7 da série diferenciada verifica-se que a série já se torna estacionária.



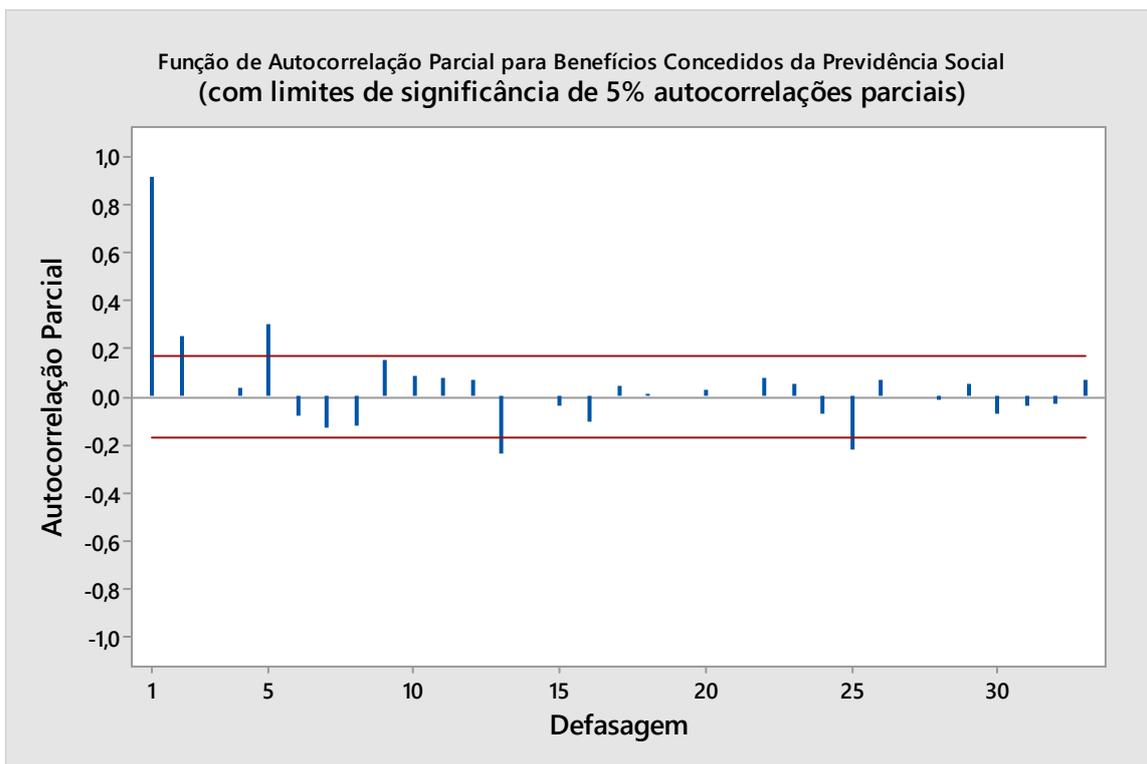
**Figura 7** – Gráfico da série diferenciada dos Benefícios Concedidos pela Previdência Social

Com a realização da análise exploratória dos dados, verificou-se a estrutura comportamental da série. Baseado nesta análise e na busca de atender ao objetivo desta pesquisa será utilizado à análise de séries temporais, tendo como base os métodos SARIMA e Alisamento Exponencial.

As Figuras 8 e 9 contêm os gráficos da Função de Autocorrelação Amostral (FAC) e Função de autocorrelação amostral parcial (FACP), respectivamente, para a série diferenciada dos benefícios concedidos pela Previdência Social. Pela análise do FAC da série diferenciada é possível verificar que as autocorrelações alternam entre correlações positivas e negativas típico do processo auto regressivo. Analisando-se o FACP da série diferenciada confirma que não é possível definir um único modelo para série, somente que inicialmente o modelo possui características de um auto regressivo.



**Figura 8** – Gráfico FAC da série diferenciada de Benefícios Concedidos pela Previdência Social



**Figura 9** – Gráfico FACP da série diferenciada de Benefícios Concedidos pela Previdência Social

### 3.2 Modelagem da Série através do Modelo SARIMA

A série em estudo apresenta nível não estacionário conforme verificado, ou seja, a série dos dados é crescente ao longo do tempo e isso se deve, tanto a componente de nível quanto a componente de tendência.

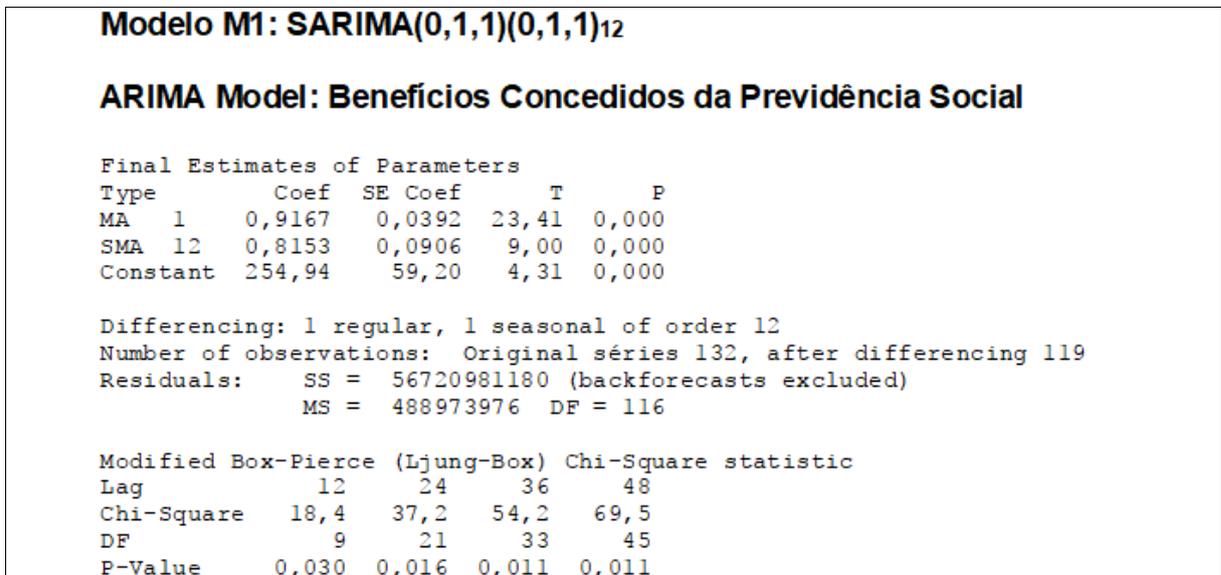
Existe também a forte presença da componente sazonal na série, visto que picos com intervalos anuais regulares são registrados ao longo do fenômeno, como foi observado através dos gráficos da função de autocorrelação.

A modelagem será feita partindo-se de um modelo mais simples até um mais complexo, à medida que seja necessário. O software estatístico utilizado para a modelagem foi o Minitab para Windows, versão 18.1.

Dado que a série de benefícios concedidos, é uma série não estacionária, após aplicar uma diferença para eliminar a tendência e uma diferenciação sazonal para dessazonalizar a série, esta se torna estacionária e é possível ajustar os modelos

SARIMA, que serão apresentados a seguir, com uma componente média móvel não sazonal e uma componente média móvel sazonal.

**Modelo M1: SARIMA(0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub>**

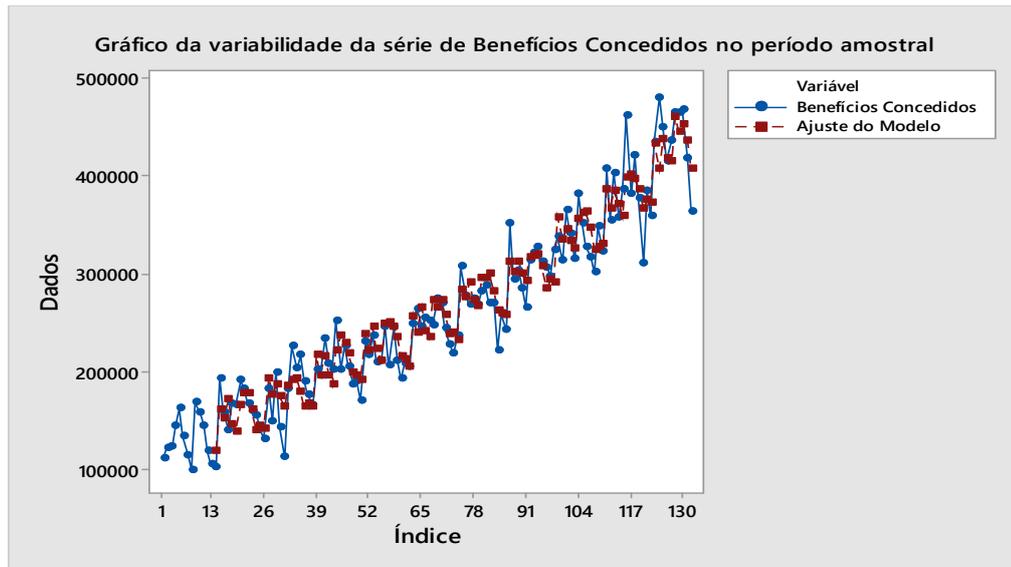


**Figura 10** – Modelo M1: SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub>

A equação do modelo SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub> ajustado é como segue, onde os coeficientes do modelo são significativamente diferentes de zero e seguem a condição de invertibilidade do modelo.

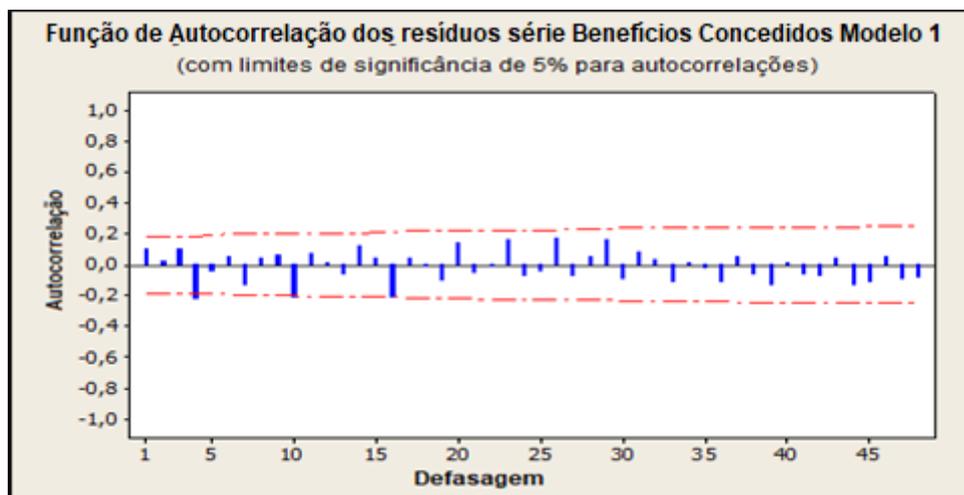
$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + 254,94 a_t - 0,9167a_{t-1} - 0,8153a_{t-12} + 0,7474 a_{t-13} \quad (14)$$

Na Figura 11 observamos que o modelo ajustado acompanha a variabilidade da série no período amostral.



**Figura 11** – Gráfico da variabilidade da série de Benefícios Concedidos no período amostral

Na Figura 12 observamos que ao nível de 5% de significância que as autocorrelações dos resíduos são não significativas, exceto nas defasagens quatro, e o teste de Box-Pierce (Figura 10) nos mostra que para um nível de 1% as correlações não são significativas, pelo que podemos afirmar que os resíduos é um ruído branco.



**Figura 12** – Gráfico FAC dos resíduos série Benefícios Concedidos Modelo 1

A Figura 13 demonstra que a distribuição dos resíduos do ajuste do modelo M1 se distribui em torno do zero, de forma simétrica que se aproxima a uma distribuição normal (p-valor 0,405), com alguns pontos mais afastados da média zero, no final do período amostral. Tais pontos se referem ao acordo estabelecido entre o INSS, o

Ministério Público Federal e o Sindicato Nacional dos Aposentados e Pensionistas da Força Sindical, que realizou o reprocessamento de benefícios pagos pela Previdência Social. Os pagamentos das correções dos benefícios foram realizados em agosto de 2012 e abril de 2013.

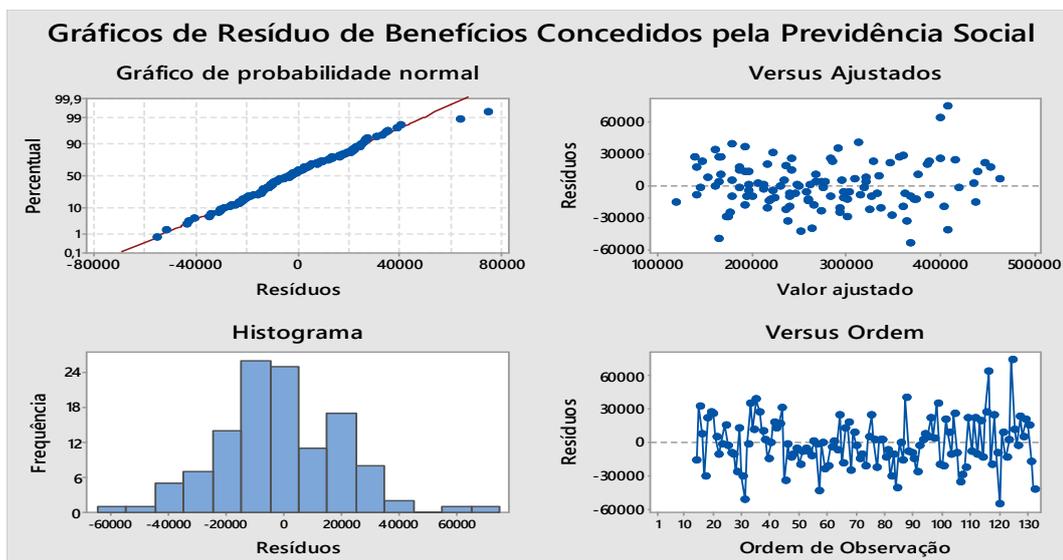


Figura 13 – Análise dos resíduos do modelo M1: SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub>

Na Figura 14 se mostra as previsões dos doze meses à frente para a série de benefícios concedidos pela Previdência Social, onde observamos que os dados no período de validação (Janeiro a Dezembro de 2014), não seguem a variabilidade sazonal modelada no período amostral. Os dados reais nos meses de janeiro, março, junho, novembro e dezembro estão fora da estimativa intervalar.

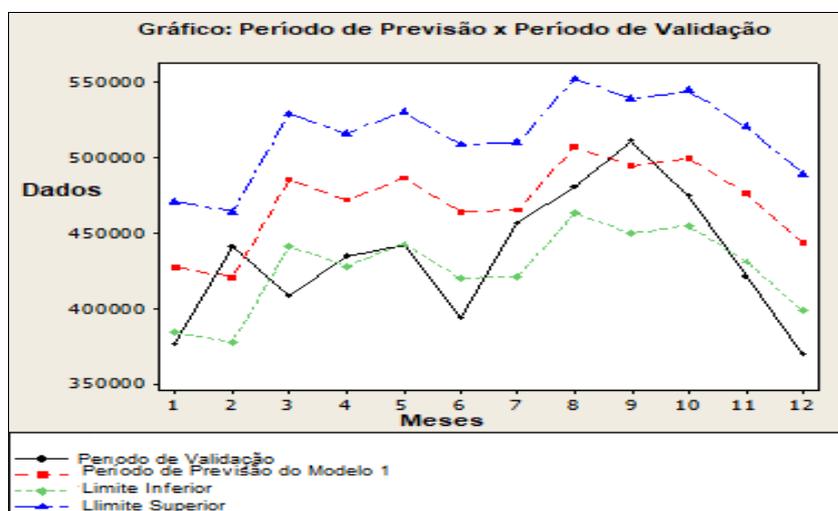


Figura 14 – Gráfico do Modelo 1: Período de Previsão x Período de Validação

## Modelo M2: SARIMA(0,1,1)(1,0,0)<sub>12</sub>

Para a série de benefícios concedidos após aplicar só uma diferença para tirar a tendência foi ajustado outro modelo SARIMA, com uma componente média móvel não sazonal e uma componente autoregressiva sazonal. A equação do modelo SARIMA (0,1,1)(1,0,0)<sub>12</sub> ajustado é como segue:

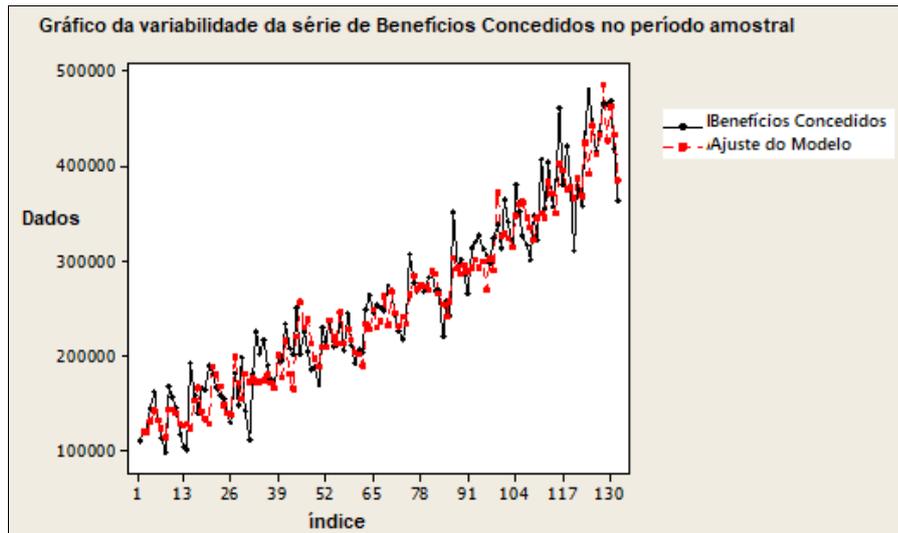
$$Y_t = Y_{t-1} + 0,6828Y_{t-12} - 0,6828Y_{t-13} + a_t - 0,7919a_{t-1} \quad (14)$$

Na Figura 15 apresenta-se os resultados do ajuste: onde se observa que os coeficientes de modelo são significativamente diferentes de zero e seguem a condição de estacionaridade e invertibilidade do modelo.

Modelo M2: SARIMA(0,1,1)(1,0,0) <sub>12</sub>				
Final Estimates of Parameters				
Type	Coef	SE Coef	T	P
SAR 12	0,6828	0,0786	8,68	0,000
MA 1	0,7919	0,0544	14,57	0,000
Differencing: 1 regular difference				
Number of observations: Original séries 132, after differencing 131				
Residuals: SS = 88304369962 (backforecasts excluded)				
MS = 684530000 DF = 129				
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	17,9	35,2	45,7	53,0
DF	10	22	34	46
P-Value	0,057	0,037	0,086	0,221

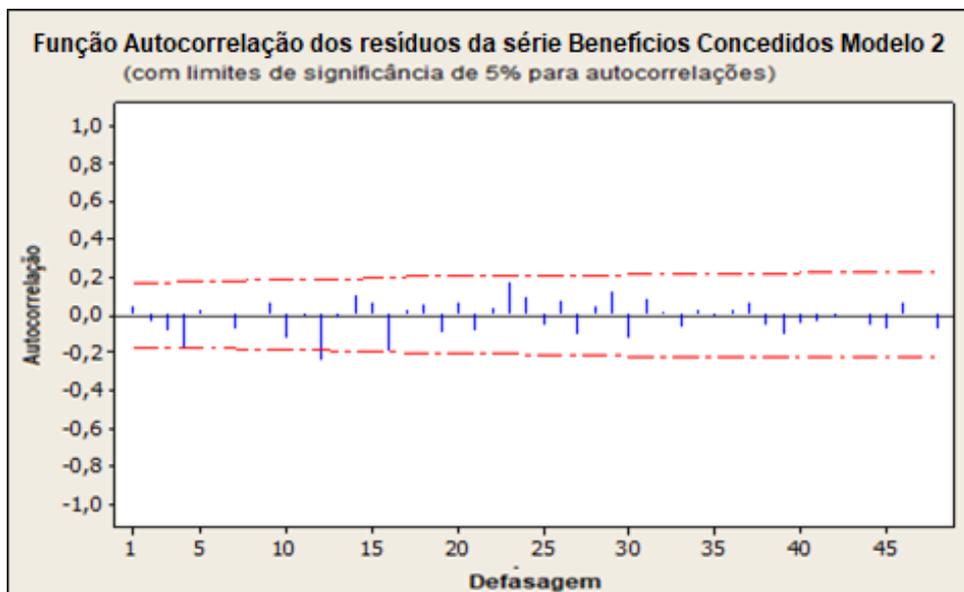
Figura 15 – Modelo M2: SARIMA (0,1,1)(1,0,0)<sub>12</sub>

Na Figura 16 observamos que o modelo acompanha a variabilidade da série no período amostral.



**Figura 16** – Gráfico da variabilidade da série de Benefícios Concedidos no período amostral

No gráfico da FAC dos resíduos (Figura 17), observamos que ao nível do 5% de significância que as autocorrelações são não significativas, exceto nas defasagens doze, e o teste de Box-Pierce (Figura 15), nos mostra que para um nível de 4% as correlações são não significativas, pelo que podemos afirmar que os resíduos é um ruído branco.



**Figura 17** – Gráfico FAC dos resíduos da série Benefícios Concedidos Modelo 2

De acordo com a Figura 18, os resíduos do ajuste do modelo 2, se distribuem em torno do zero, apresenta uma distribuição simétrica que se aproxima a uma distribuição normal (p-valor 0,057).

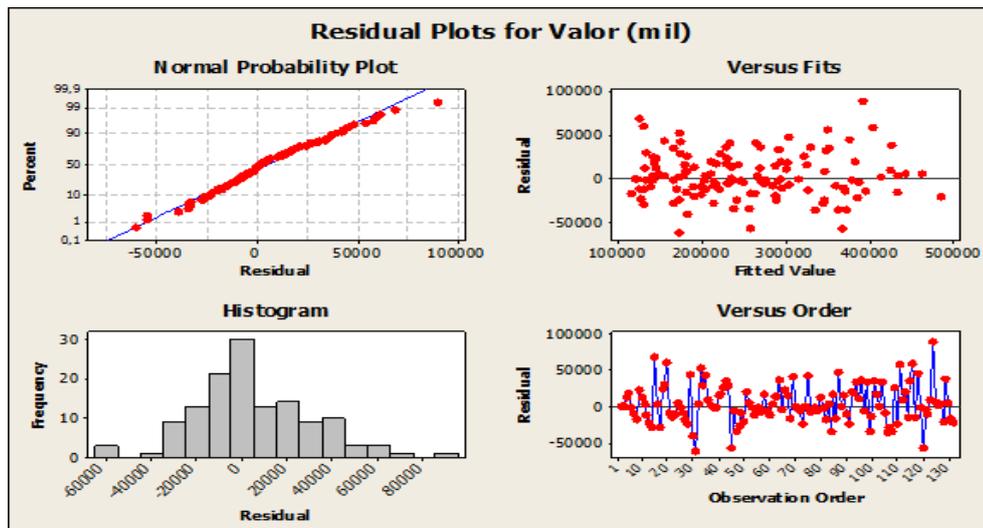


Figura 18 – Análise dos resíduos: modelo 2

Na Figura 19 vemos que valores reais do período de validação, estão dentro da estimação intervalar, observando que os valores nos meses de janeiro, março e junho estão perto ao limite inferior da estimativa intervalar.

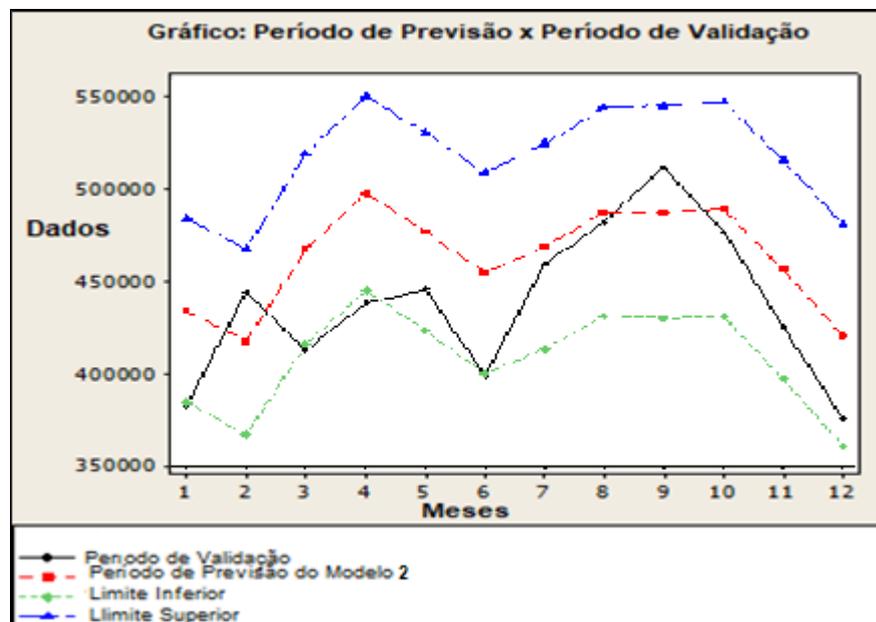


Figura 19 – Gráfico do Modelo 2: Período de Previsão x Período de Validação

### 3.3 Modelação da Série através do Método Alisamento Exponencial

O método de Winters, conforme tratado no item 2.4 dessa monografia, usa uma componente de nível, uma componente de tendência e uma componente sazonal em cada período. Ele usa três pesos, ou parâmetros de suavização, para atualizar os componentes em cada período.

Para realizar as previsões pela técnica de alisamento exponencial, foi necessário primeiramente construir o gráfico da série de benefícios concedidos, Figura 19, e comparar as medidas de precisão para determinar qual o padrão sazonal que ajusta melhor a série de benefícios concedidos, sendo que o método aditivo apresentou o melhor resultado.

Posteriormente para definir os parâmetros de suavização - *alfa* ( $\alpha$ ), *Beta* ( $\beta$ ) e *Gama* ( $\gamma$ ) foi realizada a análise com os pesos padrão ( $\alpha = 0,2$ ;  $\beta = 0,2$  e  $\gamma = 0,2$ ), e posteriormente foram utilizadas diversas combinações de parâmetros onde os que melhor ajustaram à série foram: alfa 0,05, Beta 0,05 e Gama 0,005, por acompanharem melhor os dados da série de benefícios concedidos, sendo que o padrão sazonal e a tendência estão estáveis no final da série conforme Figura 20.

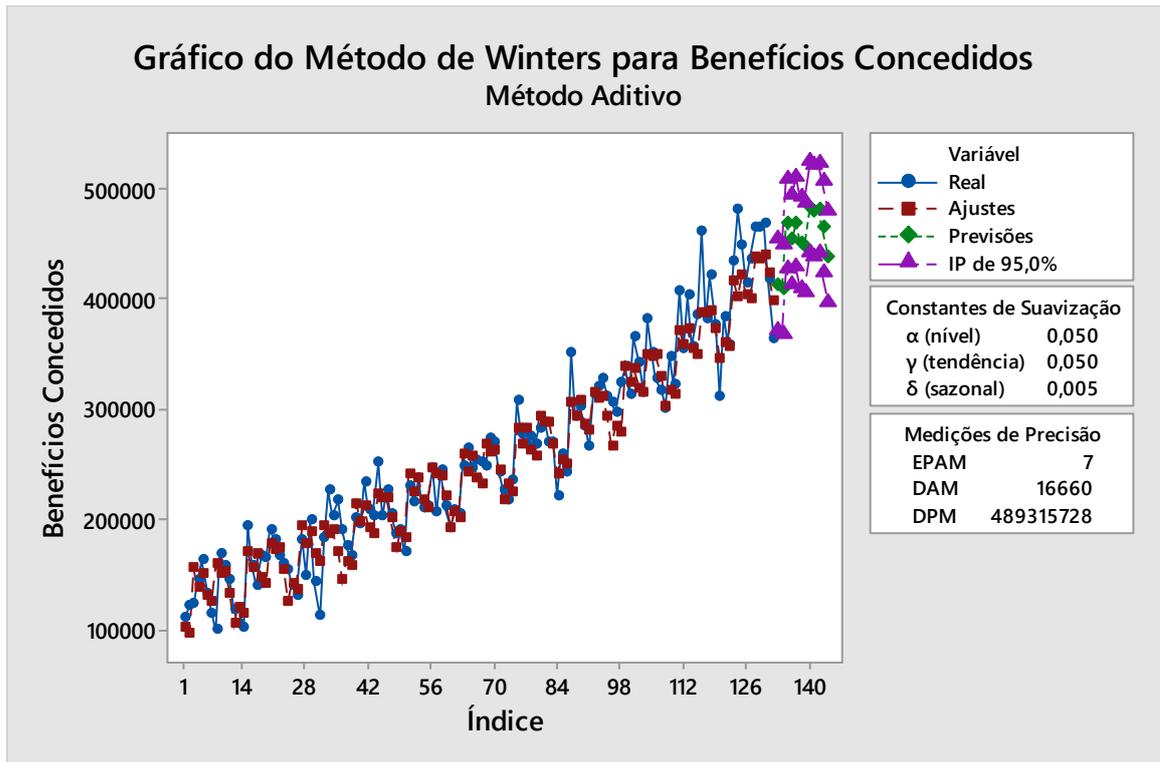
As equações do modelo são apresentadas a seguir:

$$L_t = 0,05 (Y_t - S_{t-12}) + (1 - 0,05) (L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (16)$$

$$T_t = 0,05 (L_t - L_{t-1}) + (1 - 0,05) T_{t-1} \quad (17)$$

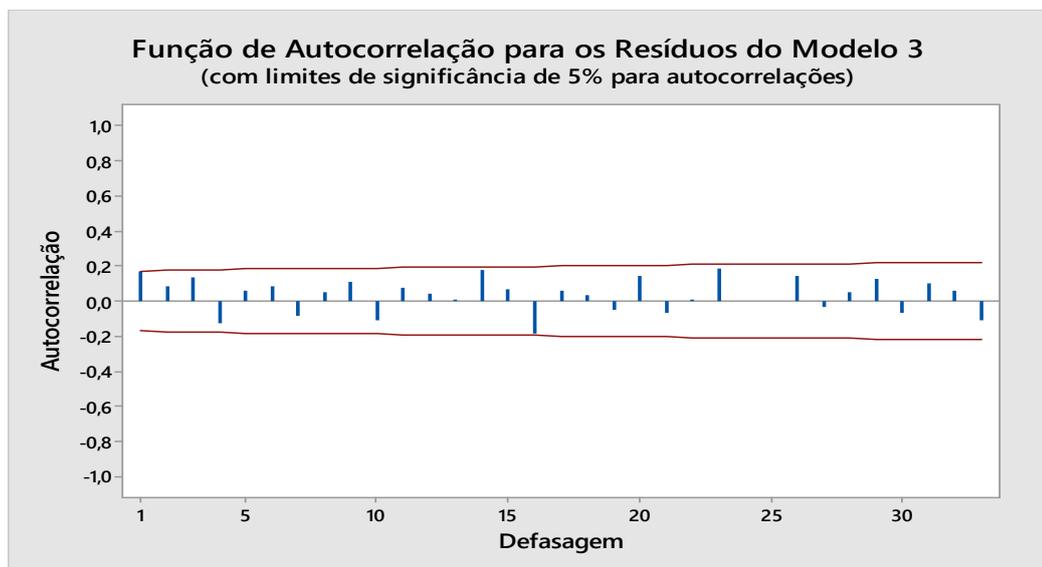
$$S_t = 0,005 (Y_t - S_{t-12}) + (1 + 0,005) S_{t-12} \quad (18)$$

$$\hat{Y}_t = L_{t-1} + T_{t-1} + S_{t-12} \quad (19)$$



**Figura 20** – Modelo Identificado utilizando o método de Alisamento Exponencial

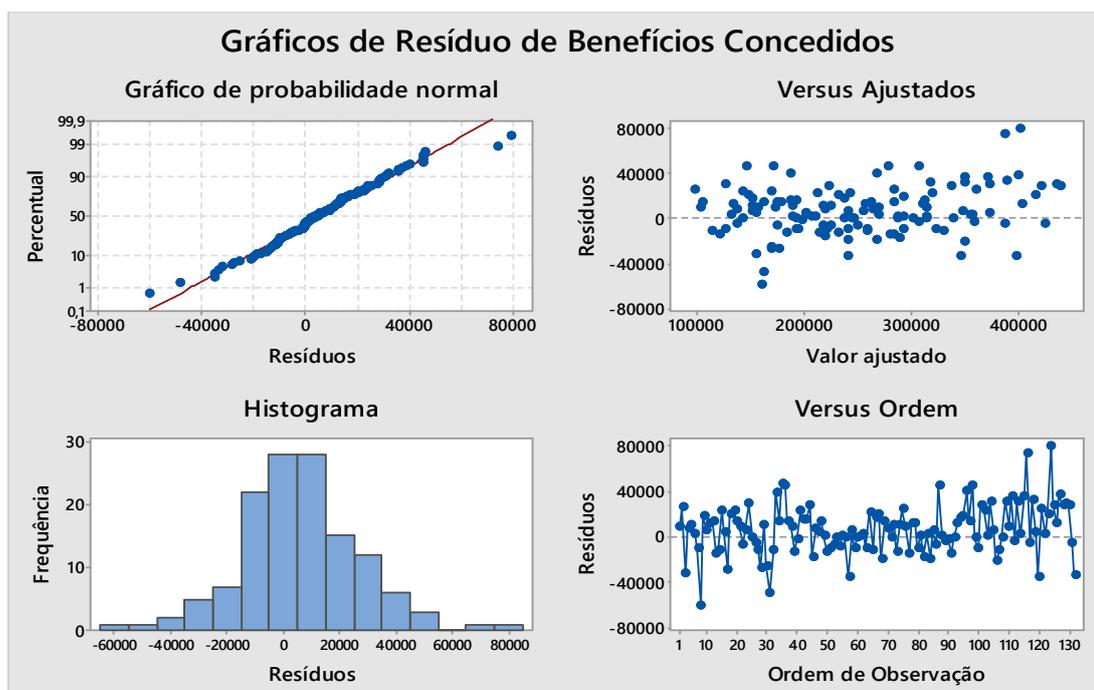
Na Figura 21 observamos que ao nível de 5% de significância as autocorrelações são não significativas.



**Figura 21** – Gráfico FAC dos resíduos da série de Benefícios Concedidos Modelo 3

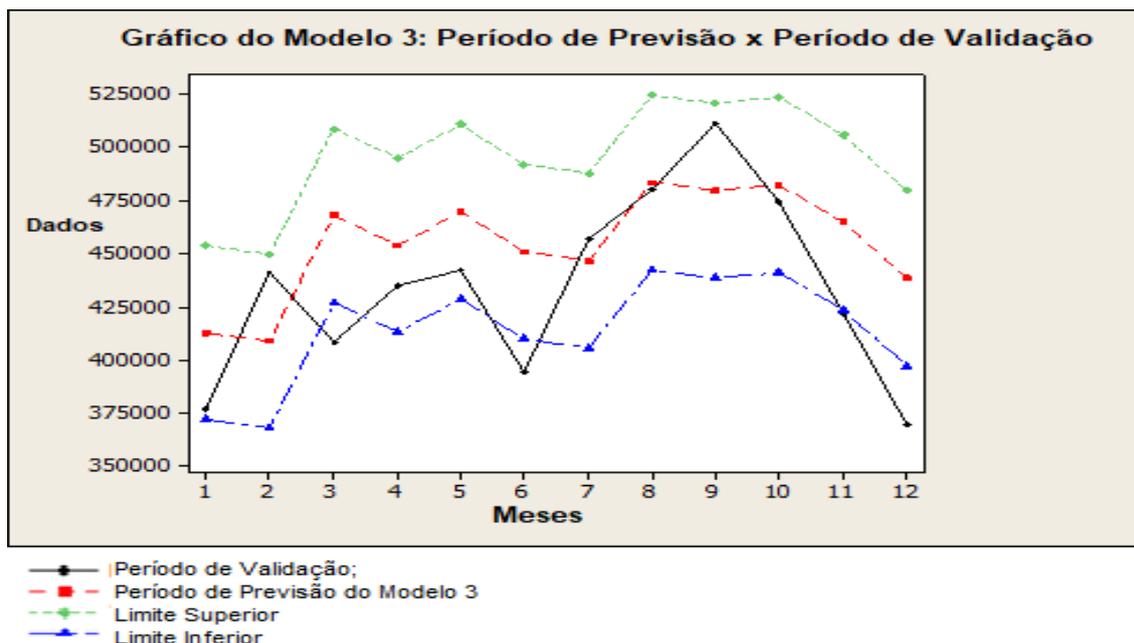
De acordo com a Figura 22, os resíduos do ajuste do modelo 3, se distribuem em torno do zero, apresenta uma distribuição simétrica que se aproxima a uma

distribuição normal (p-valor 0,199), com alguns pontos mais afastados da média no início e final do período amostral. Tais pontos se referem ao acordo estabelecido entre o INSS, o Ministério Público Federal e o Sindicato Nacional dos Aposentados e Pensionistas da Força Sindical.



**Figura 22** – Análise dos resíduos - Modelo Alisamento Exponencial

Considerando os resultados do ajuste de um modelo usando a metodologia de alisamento exponencial de Winter Aditivo na série benefícios concedidos, na Figura 23 verifica-se que os valores reais no período de validação, não seguem a variabilidade sazonal das previsões, observa-se que os dados reais nos meses de março, junho e dezembro estão fora da estimativa intervalar.



**Figura 23** – Gráfico do Modelo 3: Período de Previsão x Período de Validação

Dessa forma, a avaliação e a comparação entre os modelos de previsão serão realizadas através de estatísticas que medem o “grau de ajustamento” do modelo aos dados. Dentre estas estatísticas, frequentemente utilizadas estão as estatísticas dos modelos, conforme Tabela 1 a seguir:

**Tabela 1** – Estatísticas dos modelos

Estatísticas dos Modelos		
Estatísticas	<b><i>Modelo 1</i></b> SARIMA (0,1,1)(0,1,1) <sub>12</sub>	<b><i>Modelo 2</i></b> SARIMA (0,1,1)(1,0,0) <sub>12</sub>
Soma dos quadrados do resíduo (SSR)	56.720.981.180	88.304.369.962
Critério de Informação de Akaike (AIC)	19,9241	20,3516
Critério Bayesiano de Schwarz (BIC)	19,9896	20,3952

As três estatísticas apresentadas na tabela 1, apresentam menores valores no modelo SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub>, que indica que é o melhor o modelo que se ajusta aos dados da série. Para o método de alisamento exponencial não se tem estatísticas de ajuste de modelos. Adicionalmente pela análise das estatísticas dos resíduos, conforme Tabela 2, não rejeitamos a hipótese de normalidade dos modelos, os valores\_p nos modelos são maiores do que o nível de significância de 1%.

**Tabela 2 – Estatísticas dos Resíduos**

Estatísticas dos Resíduos			
Estatísticas	<u>Modelo 1</u> SARIMA (0,1,1)(0,1,1) <sub>12</sub>	<u>Modelo 2</u> SARIMA (0,1,1)(1,0,0) <sub>12</sub>	<u>Modelo 3</u> Alisamento Exponencial
Média	-1.407,50	4.573,40	6.068,90
Desvio padrão	21.878,90	25.655,20	21.352,70
Assimetria	0,3389	0,3618	0,1989
Curtose	0,8303	0,5771	1,3903
Teste Normalidade (Valor_P)	0,405	0,057	0,199

A Tabela 3 apresenta as estatísticas dos erros de previsão no período amostral. Os valores menores para estas estatísticas indicam um ajuste melhor aos dados da série. Se um único modelo não tem os valores mais baixos para todas as quatro medidas de precisão, em geral, o MAPE é a melhor referência.

Dessa forma na identificação do melhor modelo para o período amostral conclui-se que o modelo SARIMA (0,1,1)(0,1,1)<sub>12</sub> representa melhor a série.

**Tabela 3 – Resumo das Estatísticas dos Erros de Previsão na Série**

Estatísticas dos Erros de Previsão no período Amostral			
Estatísticas	<u>Modelo 1</u> SARIMA (0,1,1)(0,1,1) <sub>12</sub>	<u>Modelo 2</u> SARIMA (0,1,1)(1,0,0) <sub>12</sub>	<u>Modelo 3</u> Alisamento Exponencial
<b>MPE</b>	-1,3748	0,7760	1,1818
<b>MAPE</b>	6,9840	8,3432	7,2917
<b>MAD</b>	17.123	19.534	16.660
<b>MSD</b>	476.646.901	674.079.160	489.315.728

A Tabela 4 apresenta as estatísticas dos erros de previsão no período validação, e seguindo o mesmo critério que os valores menores para estas estatísticas indicam um ajuste melhor aos dados da série, conclui-se que o modelo obtido através do

método de alisamento exponencial (alfa 0,05, Beta 0,05 e Delta 0,005) é o melhor modelo no período de validação.

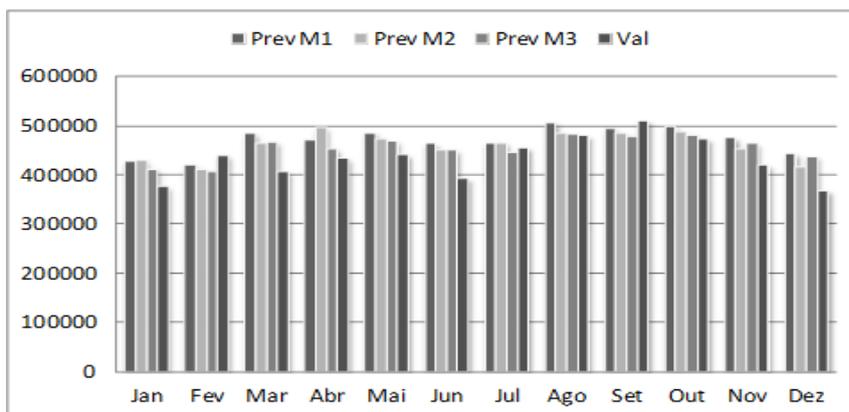
**Tabela 4** – Estatísticas dos Erros de Previsão no período de Validação

Estatísticas dos Erros de Previsão no período de Validação			
Estatísticas	<u>Modelo 1</u>	<u>Modelo 2</u>	<u>Modelo 3</u>
	SARIMA (0,1,1)(0,1,1) <sub>12</sub>	SARIMA (0,1,1)(1,0,0) <sub>12</sub>	Alisamento Exponencial
<b>MPE</b>	-8,9043	-6,6203	-5,3874
<b>MAPE</b>	10,2182	8,5037	8,0023
<b>MAD</b>	42.247	35.287	32.987
<b>MSD</b>	2.287.438.761	1.603.498.464	1.501.200.092

Então, temos as previsões obtidas com os três modelos, na Tabela 5 e Figura 27. Observamos que as previsões estão acima dos valores reais no período de validação, com exceção de fevereiro e setembro.

**Tabela 5** – Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

Meses	Prev M1	Prev M2	Prev M3	Valor Real
Jan	427661,5	430517,6	412813,8	377155,0
Fev	420889,6	413198,2	408851,2	440939,0
Mar	485250,5	465107,3	467969,0	408337,0
Abr	472164,4	496458,4	453961,4	434681,0
Mai	486643,4	474874,1	469494,9	442238,0
Jun	464236,6	451712,0	450902,2	394120,0
Jul	465428,6	466453,0	446666,5	456746,0
Ago	507567,9	486086,9	483410,7	480295,0
Set	494286,8	485733,9	479618,5	511348,0
Out	499684,0	487649,6	482249,0	474305,0
Nov	475997,7	453511,5	464692,0	421465,0
Dez	443961,9	416461,3	438456,1	369401,0



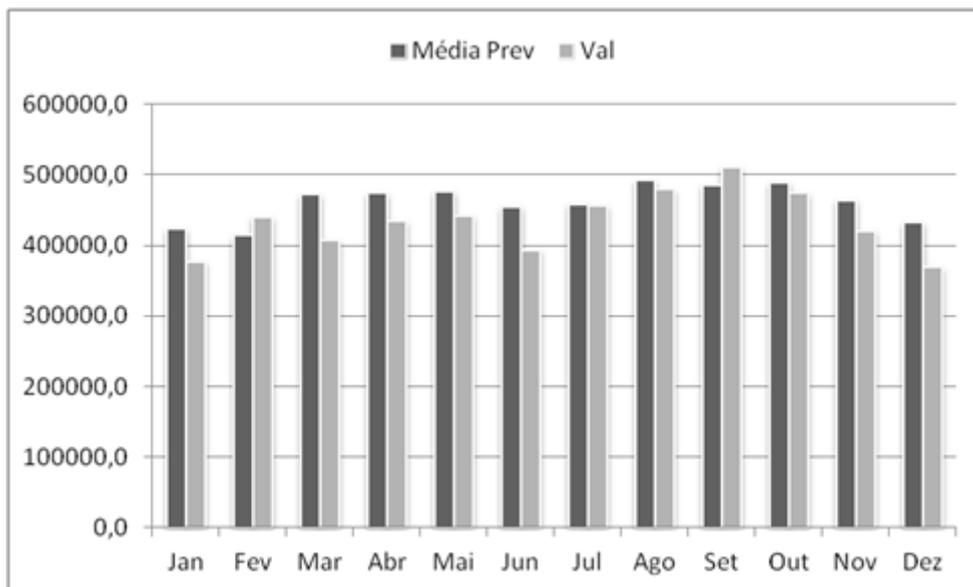
**Figura 27** – Gráfico: Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

Para acompanhar a série de benefícios concedidos, pode-se combinar as previsões da forma mais simples, obtendo-se a média aritmética das previsões obtidas pelos três modelos. A seguir a Tabela 6 com a estimativa da média das previsões:

**Tabela 6** – Média das Previsões dos modelos x valor real do período de validação da série de benefícios concedidos pela Previdência Social

Meses	Prev M1	Prev M2	Prev M3	Média Prev	Val
Jan	427661,5	430517,6	412813,8	423664,3	377155,0
Fev	420889,6	413198,2	408851,2	414313,0	440939,0
Mar	485250,5	465107,3	467969,0	472775,6	408337,0
Abr	472164,4	496458,4	453961,4	474194,8	434681,0
Mai	486643,4	474874,1	469494,9	477004,1	442238,0
Jun	464236,6	451712,0	450902,2	455616,9	394120,0
Jul	465428,6	466453,0	446666,5	459516,0	456746,0
Ago	507567,9	486086,9	483410,7	492355,2	480295,0
Set	494286,8	485733,9	479618,5	486546,4	511348,0
Out	499684,0	487649,6	482249,0	489860,9	474305,0
Nov	475997,7	453511,5	464692,0	464733,7	421465,0
Dez	443961,9	416461,3	438456,1	432959,8	369401,0

Na Figura 28, observamos que a previsão via média aritmética das previsões dos três modelos, está acima dos valores reais dos benefícios concedidos em todos os meses, com exceção de fevereiro e setembro.



**Figura 28** – Média das Previsões dos modelos x valores reais Benefícios Concedidos

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente monografia teve como objetivo principal determinar o melhor modelo quantitativo para a previsão dos benefícios a serem concedidos, para os próximos 12 meses, da Previdência Social. Para atingir tal meta, foi necessário um levantamento bibliográfico a fim de estudar quais métodos, dentro de inúmeros existentes, se adequaria melhor a série história apresentada, gerando resultados mais precisos e satisfatórios.

O estudo da previsão dos benefícios a serem concedidos pela Previdência se torna muito útil na tomada de decisão de políticas técnicas estatísticas / atuariais em relação ao mercado previdenciário. Através desses dados podem ser definidas as premissas atuariais para a composição dos benefícios que a Previdência Social irá conceder.

No primeiro momento foi identificado que a série apresentava uma tendência de crescimento, a qual se conseguiu trata-la com a aplicação de apenas uma diferenciação simples.

Na identificação do melhor modelo para o período amostral, foram apresentados três modelos, porém através da análise das estatísticas de erros conclui-se que o modelo SARIMA  $(0,1,1)(0,1,1)_{12}$  representa melhor a série.

Posteriormente foram realizadas três previsões a fim de identificar o melhor modelo no período de validação, onde identificou através das estatísticas de erro de previsão que o modelo obtido através do Alisamento Exponencial (alfa 0,05, Beta 0,05 e Delta 0,005) é o melhor modelo no período de validação.

Não foi possível escolher um melhor modelo geral para a previsão da série de benefícios concedidos da Previdência Social, pois os modelos SARIMA  $(0,1,1)(0,1,1)_{12}$  e o modelo obtido através do Alisamento Exponencial (alfa 0,05, Beta 0,05 e Delta 0,005) estão bem ajustados à série.

Por fim, o objetivo dessa monografia foi alcançado, conseguindo chegar no melhor resultado através dos modelos acima, que melhor se adequaram as particularidades da série estudada e, portanto, conclui-se que, para o estudo proposto, estes modelos obtiveram o melhor desempenho.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOX, E.; JENKINS, M.; REINSEL, C. **Análise de séries temporais: previsão e controle**. 3. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.

CERVO, L; BERVIAN, P. **Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002. 242p.

HILLIER, F., LIEBERMAN, G. (1995). **Introdução à Pesquisa Operacional** (6ª ed.). Lisboa: McGraw-Hill.

MAKRIDAKIS, S.; WHEELWRIGHT, S.; HYNDMAN, R. **Previsão: Métodos e Aplicações**. 3. ed., New York: John Wiley & Sons, 1998.

MORETTIN, P. A., TOLOI, C. M. **Análise de séries temporais**. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. 1 Ed. São Paulo. Editora Edgar Blücher LTDA, 535 p, 2004.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL. **História da Previdência**. Disponível em < <http://www.previdencia.gov.br/a-previdencia/historico/>> Acesso em Novembro, 2013.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL. **Histórico: Período 2003 a 2012**. Disponível em < <http://www.previdencia.gov.br/a-previdencia/historico/>> Acesso em setembro, 2015.

OLIVEIRA, R. (Agosto de 1995). **Modelos de Previsão: apontamentos da cadeira A118**. Lisboa: Academia Militar.

PELLEGRINI, R.; FOGLIATTO, S. **Estudo comparativo entre os modelos de Winters e de Box-Jenkins para previsão de demanda sazonal**. Produto & Produção, Porto Alegre, v. 4, n. especial, p. 72-85, abr. 2000.

PINHEIRO, R. P. **Riscos Demográficos e Atuariais nos Planos de Benefício Definido e de Contribuição Definida num Fundo de Pensão**. Belo Horizonte, 2005.

ROCHA, F. G. **Contribuição de Modelos de Séries Temporais para a Previsão da Arrecadação de ISS**. Dissertação de Mestrado em Economia – Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

SOUZA, R. C. **Modelos Estruturais para Previsão de Séries Temporais : Abordagens Clássica e Bayesiana.** 17º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, 1989.

VERGARA, S. C. **Projeto e relatórios de pesquisa em administração.** São Paulo: Atlas Editora, 2003.

WANKE, P.; JULIANELLI, L., 2006, **Previsão de Vendas.** 1 ed., Sao Paulo: Atlas.