

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia de Produção

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Testes de hipóteses para modelos de Reparo Imperfeito

Daysemara Maria Cotta

Belo Horizonte

2018

Daysemara Maria Cotta

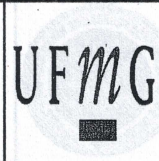
Testes de hipóteses para modelos de Reparo Imperfeito

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientadora: Profa. Dra. Marta Afonso Freitas

Belo Horizonte

2018



ATA DA DEFESA DA DISSERTAÇÃO DA ALUNA DAYSEMARA MARIA COTTA


Realizou-se, no dia 04 de abril de 2018, às 13:00 horas, sala de seminário 1014, Escola de Engenharia, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 330ª defesa de dissertação, intitulada *Testes de Hipóteses para modelos de Reparo Imperfeito*, apresentada por DAYSEMARA MARIA COTTA, número de registro 2016671992, graduada no curso de ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Marta Afonso Freitas - Orientador (DEP/UFMG), Prof(a). Enrico Antonio Colosimo (UFMG), Prof(a). Roberto da Costa Quinino (UFMG).

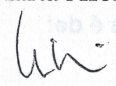
A Comissão considerou a dissertação:

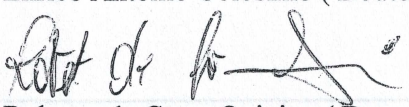
Aprovada

Reprovada

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.
Belo Horizonte, 04 de abril de 2018.


Prof(a). Marta Afonso Freitas (Doutora)


Prof(a). Enrico Antonio Colosimo (Doutor)


Prof(a). Roberto da Costa Quinino (Doutor)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Testes de Hipóteses para modelos de Reparo Imperfeito

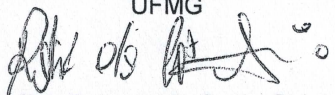
DAYSEMARA MARIA COTTA

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E ENGENHARIA DE MANUFATURA, linha de pesquisa Modelagem Estocástica e Simulação.

Aprovada em 04 de abril de 2018, pela banca constituída pelos membros:


Prof(a). Marta Afonso Freitas - Orientador
DEP/UFMG


Prof(a). Enrico Antonio Colosimo
UFMG


Prof(a). Roberto da Costa Quinino
UFMG

Belo Horizonte, 4 de abril de 2018.

Agradecimentos

A Deus.

À minha orientadora Professora Dra. Marta Afonso Freitas, por acreditar no meu potencial, pela sabedoria e inteligência, bem como por todo conhecimento compartilhado, que foi crucial para o meu desenvolvimento.

Ao amigo Rafael da Silva Fernandes pelo incentivo durante minha trajetória no mestrado, bem como por todos os conhecimentos que juntos compartilhamos.

Ao Enrico e à Maria Luiza, que muito contribuíram no meu exame de qualificação.

À minha mãe, pelo amor incondicional e apoio diário.

Ao Magno, por todo auxílio, por acreditar na minha capacidade e sempre me motivar.

À minha família, por estar sempre presente.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, me incentivando a alcançar meus objetivos, o meu muito obrigado!

Resumo

Uma política de manutenção adequada é essencial para reduzir despesas e riscos relacionados à falhas de equipamentos. Um aspecto fundamental a ser considerado ao especificar tais políticas é poder prever a confiabilidade dos sistemas em estudo, com base em um modelo bem ajustado. Neste trabalho, as classes de modelos de Redução Aritmética da Idade (ARA) e a Redução Aritmética da Intensidade (ARI) são exploradas. Funções de verossimilhança para tais modelos são derivadas. Ao desenvolver métodos que visam determinar a periodicidade ótima das intervenções de manutenção preventiva, deve-se assumir qual modelo melhor se enquadra à realidade dos dados analisados, para que as funções de probabilidade para tais modelos sejam derivadas, e os parâmetros sejam estimados, permitindo calcular indicadores de confiabilidade para prever o comportamento futuro de falha do processo. Portanto, antes de calcular uma política ótima de manutenção, seria interessante desenvolver um procedimento de teste estatístico geral, a fim de permitir aos profissionais responder, em primeiro lugar, se os dados estão sob uma situação de reparo mínimo (efeito ABAO) ou uma situação de reparo imperfeito. Um conjunto de dados reais envolvendo falhas nos rotores de bombas de polpa usados por uma mineração brasileira é analisada considerando modelos com diferentes memórias. Os Testes Binomial Exato e Multinomial foram aplicados nos dados, bem como estimados os parâmetros de forma e escala para PLP e a eficiência do reparo para diferentes memórias, que permitiu aplicar os testes de seleção de modelo baseados na máxima log-verossimilhança, no peso da evidência e no método gráfico de bondade de ajuste. A estimativa dos parâmetros do melhor modelo ajustado permitiu calcular a periodicidade ótima de manutenção preventiva. Estes resultados são uma informação valiosa para a empresa de mineração e pode ser usado para apoiar na tomada de decisão.

Abstract

An appropriate maintenance policy is essential to reduce expenses and risks related to equipment failures. A fundamental aspect to be considered when specifying such policies is to be able to predict the reliability of the systems being studied, based on a well fitted model. In this work, the classes of models Arithmetic Reduction of Age (ARA) and Arithmetic Reduction of Intensity (ARI) are explored. Likelihood functions for such models are derived. In developing methods that aim to determine the optimum periodicity of preventive maintenance interventions, one should assume which model best fits the reality of the analyzed data, so that the probability functions for such models are derived, and the parameters are estimated, allowing to calculate reliability indicators to predict future process failure behavior. Therefore, before calculating an optimal maintenance policy, it would be interesting to develop a general statistical test procedure in order to allow professionals to first answer whether the data are under a minimum repair situation (ABAO effect) or a situation of imperfect repair. A set of real data involving pulp pump rotor failures used by a Brazilian mining industry is analyzed considering models with different memories. The exact binomial and multinomial tests were applied in the data, as well as the estimated form and scale parameters for PLP and the repair efficiency for different memories, which allowed to apply the model selection tests based on the maximum log-likelihood, on the weight of the evidence and in the goodness of fit graphic method. The estimation of the parameters of the best adjusted model allowed us to calculate the optimal periodicity of preventive maintenance. These results are a valuable information for the mining company and can be used to support in decision making.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Literatura	1
1.2	Situação prática motivadora: Falhas em Bombas de Polpa	4
1.3	Objetivos	6
1.4	Estrutura do Texto	6
2	Modelos, o problema de redução do custo de manutenção e testes de hipóteses para Reparo Imperfeito	8
2.1	Modelos baseados na suposição de reparo imperfeito	8
2.1.1	Os modelos de Redução Aritmética da Idade (<i>Aritmetic Reduction Age</i> - ARA) de Doyen & Gaudoin (2004)	10
2.1.2	Os modelos de Redução Aritmética da Intensidade (<i>Aritmetic Reduction Intensity</i> - ARI) segundo Doyen e Gaudoin (2004)	13
2.1.3	Algumas comparações entre os modelos ARA e ARI	15
2.2	Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança segundo Toledo et al. (2016)	18
2.3	O problema da minimização de custo	24
2.4	Critérios de Seleção do Modelo (ARA, ARI e suas ordens de memória)	27
2.5	Testes de bondade de ajuste bootstrap paramétricos para modelos de reparo imperfeito segundo Chauvel et al. (2016)	29
2.5.1	Testes baseados nos Resíduos Martingale	31
2.5.2	Testes baseados na Transformada Integral de Probabilidade	34
2.5.3	Construção dos testes por bootstrap paramétrico	37
2.6	Testes não paramétricos para Reparo Imperfeito segundo Gilardoni et al.(2017)	38
2.6.1	Teste Binomial Exato	39
2.6.2	Teste Multinomial	42
3	Estudos Monte Carlo para Testes de Hipóteses	47
3.1	Estudos Empíricos: Tamanho dos Testes	47
3.2	Estudos Empíricos: Poder dos Testes	48
4	Análise dos dados de falhas dos rotores das bombas de polpa	52
4.1	Análise Preliminar dos Dados	53

4.2	Testes Binomial e Multinomial	57
4.3	Seleção de Modelo	61
4.4	Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva	66
5	Conclusões e Considerações Finais	73
	Referências bibliográficas	75
A	Conjunto de dados dos motores das bombas de polpa: Tempos de censura devido a realização de manutenção preventiva estão indicados por *	79
B	Estimação de parâmetros: a função de verossimilhança no modelo $ARA_m + PLP$	81
C	Estimação de parâmetros: a função de verossimilhança no modelo $ARI_m + PLP$	88
D	Algoritmo proposto por Toledo et al.(2015) e Fernandes (2015) para a geração de $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do $ARA_m + PLP$	95
E	Algoritmo proposto por Fernandes (2015) para a geração de $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do $ARI_m + PLP$	97
F	Algoritmo proposto por Toledo <i>et al.</i> (2015) para a determinação da função média $\hat{\phi}_{C-NPML}(t)$	99
G	Cálculo das estatísticas de função de distribuição empírica	100
	G.1 Preliminares	100
	G.2 Cálculo da estatística de Cramér-von Mises	101
	G.3 Cálculo da estatística Anderson-Darling	106
H	Códigos R	112
	H.1 Código do R para o Teste Binomial Exato de Gilardoni et al.(2017)	112
	H.2 Código do R para o Teste Multinomial de Gilardoni et al.(2017) .	115

Lista de Figuras

1.1	Bomba de polpa.	5
2.1	Função intensidade de falha da idade real (linha pontilhada) e Função intensidade de falha da idade virtual (linha sólida). Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 4)	11
2.2	ARA_∞ com $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 49)	12
2.3	ARI_∞ com $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 47)	14
2.4	Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 3$ e $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)	16
2.5	Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 1.5$ e $\theta = 0.5$ e. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)	17
2.6	Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 3, \theta_{ARA_1} = 0.5$ e $\theta_{ARI_1} = 0.75$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)	18
2.7	Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 1.5, \theta_{ARA_1} = 0.5$ e $\theta_{ARI_1} = 0.29$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)	19
2.8	Funções intensidade de falha para os modelos ARA_1 (a) e ARI_1 (b) com intensidade inicial segundo PLP com $\beta = 3, \eta = 1$ e $\theta = 0.5$ e falhas observadas nos tempos $t_1 = 1.2$ e $t_2 = 1.9$. Fonte: (TOLEDO et al., 2015, p.110)	20
2.9	Representação esquemática dos $k_1 + k_2$ sistemas reparáveis observados. Fonte: (OLIVEIRA, 2016, p.16)	21
2.10	Gráficos de diagnóstico: comparação entre o MCF empírico e o MCF estimado para ARI_1 (a e b) e ARI_∞ (c e d). Fonte (TOLEDO et al., 2015, p. 113)	30
2.11	Gráfico de $N, \Phi(\eta, \beta, \theta)$ e $\Phi(\hat{\eta}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$ ao longo do tempo para 30 tempos de falhas simulados sob o modelo $ARA_\infty - PLP$, com $\eta = 0.05, \beta = 2.5$ e $\theta = 0.1$. Fonte: (CHAUVEL et al., 2016, p. 1345)	32
2.12	Boxplots de 4000 estatísticas de teste simuladas sob o modelo $ARA_\infty - PLP$ para diferentes valores de β e $\theta, \eta = 0.05$ e $n = 30$. (a) $KS_m(\hat{\theta})$, (b) $CvM_m(\hat{\theta})$, (c) $AD_m(\hat{\theta})$, (d) $KS_u(\hat{\theta})$, (e) $CvM_u(\hat{\theta})$ e (f) $AD_u(\hat{\theta})$. Fonte: (CHAUVEL et al., 2016, p. 1347)	37
2.13	Tempos de falha de três sistemas.	40

2.14	EMV cumulativo sem restrições (\hat{p}_k , linha contínua) e restrito (\tilde{p}_k , linha tracejada) para os dados das correias transportadoras. Fonte: (GILARDONI et al., 2017, p. 10)	44
3.1	Poder dos testes binomial(\circ) e multinomial(\bullet) em relação ao n_+ para (a) ARA_1 com $\theta = 0.5$ (b) ARA_1 com $\theta = 0.1$ (c) ARI_1 com $\theta = 0.5$ (d) ARI_1 com $\theta = 0.1$	50
4.1	Tempos de falhas de 5 rotores ($rotores_1$), todas truncadas em $T = 5\ 000$ horas.	54
4.2	Tempos de falhas de 5 rotores ($rotores_2$), todas truncadas em $T = 1\ 432$ horas.	55
4.3	Tempos de falhas de 5 rotores ($rotores_{Geral}$), todas truncadas em $T = 6\ 432$ horas.	56
4.4	Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 5\ 000$ horas para dos dados $rotores_1$	57
4.5	Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 1\ 432$ horas para os dados $rotores_2$	58
4.6	Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 6\ 432$ horas para os dados $rotores_{Geral}$	59
4.7	Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de $rotores_1$: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r	64
4.8	Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de $rotores_2$: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r	65
4.9	Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de $rotores_{Geral}$: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r	66
4.10	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_∞ (a e b) e ARI_∞ (c e d) para os dados de $rotores_1$	67
4.11	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_∞ (a e b) e ARI_∞ (c e d) para os dados de $rotores_2$	68
4.12	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_∞ (a e b) e ARI_∞ (c e d) para os dados de $rotores_{Geral}$	69

4.13	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de $rotores_1$	70
4.14	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de $rotores_2$	71
4.15	Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de $rotores_{Geral}$	72

Lista de Tabelas

3.1	Simulação monte carlo para dados empíricos dos testes binomial e multinomial	47
3.2	Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARA_1(\theta = 0.5)$ do teste binomial e multinomial.	49
3.3	Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARA_1(\theta = 0.1)$ do teste binomial e multinomial.	49
3.4	Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARI_1(\theta = 0.5)$ do teste binomial e multinomial.	49
3.5	Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARI_1(\theta = 0.1)$ do teste binomial e multinomial.	51
4.1	Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β, η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de <i>rotores₁</i>	62
4.2	Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β, η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de <i>rotores₂</i>	63
4.3	Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β, η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de <i>rotores_{Geral}</i>	63

Lista de Siglas

ABAO *As Bad as Old* ou "tão ruim quanto velho"

AD Anderson-Darling

AGAN *As Good as New* ou "tão bom quanto novo"

ARA *Arithmetic Reduction Age* ou Redução Aritmética da Idade

ARI *Arithmetic Reduction Intensity* ou Redução Aritmética da Intensidade

f.d.c. Função de distribuição cumulativa

CM *Corrective Maintenance* ou Manutenção Corretiva

CvM Cramér-von Mises

EMV Estimador de máxima verossimilhança

GCM *Greatest convex minorant* ou Maior minorante convexo

i.i.d Independente e identicamente distribuída

IR *Imperfect Repair* ou Reparo Imperfeito

KS Kolmogorov-Smirnov

MCF *Mean Cumulative Function* ou Função Média Acumulada

MR *Minimal Repair* ou Reparo Mínimo

NHPP *Non-homogeneous Poisson Process* ou Processo de Poisson Não Homogêneo

PIT *Probability integral transform* ou Transformada integral de probabilidade

PLP *Power Law Process* ou Processo de Lei de Potência

PM *Preventive Maintenance* ou Manutenção Preventiva

PR *Perfect Repair* ou Reparo Perfeito

ROCOF *Rate of Occurrence of Failures* ou Taxa de Ocorrência de Falhas

Lista de Símbolos

α Nível de significância

β Parâmetro de forma do PLP

η Parâmetro de escala do PLP

θ Coeficiente de eficiência do reparo

λ_R Função intensidade inicial

Φ_t Função intensidade de falha cumulativa

μ Vetor de parâmetros do modelo

τ Tamanho do intervalo de tempo entre manutenções preventivas

L_μ Verossimilhança

T_i Tempos de falha

N_t Número de falhas até o tempo t

\hat{M}_i Resíduos martingale

1 Introdução

1.1 Literatura

A obtenção de modelos de manutenção para determinação de política ótima de manutenção de sistemas sujeitos a falhas e reparáveis é um problema vigente na literatura, visto que, no cenário industrial, as políticas de manutenção adequadas são essenciais para reduzir os riscos de falhas de equipamentos, que levam a despesas potenciais e condições inseguras. Grandes empresas trabalham com foco na manutenção preventiva de seus sistemas, mas apesar disso, a ocorrência de falhas não planejadas é algo frequente, impactando os custos totais da manutenção. As políticas de manutenção devem se basear principalmente na detecção de possíveis mudanças no padrão de ocorrência das falhas ou, em outras palavras, a existência ou não de uma tendência no padrão de ocorrência das falhas (Freitas e Almeida, 2007). Se for constatado, por meio de testes estatísticos, que o padrão de ocorrência de falhas do sistema é estável, isto é, o tempo entre as ocorrências de falhas se mantém constante ao longo do tempo, então o sistema está estável e, a rigor, manutenções preventivas não são necessárias. Entretanto, se uma tendência for observada e a mesma for do tipo decrescente ao longo tempo, isto indica que o sistema está em deterioração e intervenções são necessárias (Freitas e Almeida, 2007).

Ao considerar modelos para sistemas reparáveis, um ponto crítico é como explicar o efeito das ações de reparo realizadas após as falhas. Neste sentido, os pressupostos mais explorados são Reparo Mínimo, Reparo Perfeito e Reparo Imperfeito. O Reparo Mínimo (*Minimal Repair - MR*), não altera significativamente o sistema, retornando-o ao estado em que se encontrava antes da ocorrência da falha. Na literatura, costuma-se referir a um sistema sujeito a esse tipo de reparo como "tão ruim quanto velho" (*as bad as old - ABAO*). Barlow e Hunter (1960), Morimura (1970), Phelps (1981), Barlow e Proschan (1987), Park et al. (2000) e Wang (2002), Doyen e Gaudoin (2004, 2011), Gilardoni e Colosimo (2007, 2011), Toledo et al. (2015, 2016), Gilardoni et al. (2016), Chauvel et al. (2016) dentre outros autores, tratam desse assunto.

O Reparo Perfeito (*Perfect Repair - PR*), retorna o sistema à mesma condição de um sistema novo. A expressão "tão bom quanto novo" (*as good as new - AGAN*) é usada para caracterizar sistemas que são submetidos a esse tipo de reparo. Modelos com base nesses pressupostos foram discutidos em muitos artigos como Barlow and Hunter (1960),

Phelps (1981), Barlow e Proschan (1987), Zhao e Xie (1996), Park et al. (2000) e Wang (2002), Doyen e Gaudoin (2004, 2011), Toledo et al. (2015, 2016), Gilardoni et al. (2016), Chauvel et al.(2016) entre outros.

No entanto, um pressuposto mais realista para muitos sistemas é o Reparo Imperfeito (*Imperfect Repair - IR*), visto que é o que mais se aproxima da realidade de intervenções de manutenção nos sistemas. Isso porque ele possui um grau de eficiência entre a restauração total do sistema (reparo perfeito) e a restauração mínima do sistema (reparo mínimo). Modelos baseados em tal suposição foram estudados por vários autores, entre eles Kijima et al. (1988), Brown e Proschan (1983), Malik (1979), Shin et al. (1996), Yanez et al. (2002), Doyen e Gaudoin (2004, 2011), Pan e Rigdon (2009), Corset et al. (2012), Toledo (2014), Toledo et al. (2015, 2016), Gilardoni et al. (2016), Chauvel et al.(2016). O primeiro propôs a idéia de Idade virtual. É importante enfatizar que sob as premissas MR ou PR, os parâmetros do modelo são basicamente aqueles relacionados à velocidade de desgaste dos sistemas, enquanto que na abordagem do IR, um parâmetro adicional descreve o efeito de ações de reparo. O efeito das ações de reparo deve ser levado em consideração para definição de políticas ótimas de manutenção, ótimas no sentido de minimizarem o custo total da manutenção (custo com as manutenções corretivas e preventivas).

Gilardoni e Colosimo (2007) apresentaram um estudo assumindo um sistema que opera sob uma estratégia de manutenção que recebe reparo preventivo completo em tempos pré-determinados e reparo mínimo sempre que uma falha ocorre entre as manutenções preventivas. Considerando-se a função intensidade do processo, o objetivo era encontrar o intervalo de tempo ótimo para manutenção preventiva que minimizasse os custos totais de manutenção. Como exemplo numérico os autores fizeram a estimativa de periodicidade ótima por máxima verossimilhança com base no histórico de falhas de transformadores de energia. Enquanto as ações de manutenção preventiva foram tratadas como reparo perfeito, as ações de reparo mínimo foram modeladas por um Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH), cuja função intensidade segue um processo Lei de Potência (PLP). Colosimo et al. (2010) estenderam essa modelagem para o caso em que dois tipos diferentes de falhas, com custos diferentes, pudessem ser observadas de acordo com suas causas.

Segundo Toledo (2014), na literatura relacionada a manutenção estratégica, a suposição de reparo perfeito pode ser razoável para sistemas compostos de uma unidade estrutu-

almente simples. Por outro lado, a suposição de reparo mínimo parece plausível para sistemas consistindo de muitos componentes, cada um tendo seu próprio modo de falha, pois o reparo do componente que falhou não influenciará muito a taxa de falhas do sistema (Kijima, 1989). Porém, na prática, as suposições de reparo mínimo ou reparo perfeito não são razoáveis para vários sistemas.

Segundo Kijima et al. (1988), para sistemas compostos de apenas alguns componentes vulneráveis, é mais adequado imaginar que o reparo traz o estado de um sistema que falhou a um nível intermediário, compreendido entre o completamente novo e o anterior à falha (IR). Os autores desenvolveram "um modelo de idade virtual para descrever o funcionamento ao longo do tempo de um sistema que é reparado pelo IR". Para determinação de periodicidade ótima de manutenção preventiva, os autores utilizaram uma aproximação para $E[N(t)]$ por $H(t)$. Porém, não houve estimação dos parâmetros e a periodicidade ótima foi encontrada por valores arbitrários dos parâmetros.

Enquanto os modelos de idade virtual propostos por Kijima et al. (1988) e Kijima (1989) são definidos pelas distribuições condicionais de tempos entre falhas sucessivas (gaps ou tempos locais), Doyen e Gaudoin (2004) propuseram duas novas classes de modelos para reparo imperfeito. Neste trabalho, a modelagem é definida pela intensidade de falhas (condicional) antes do primeiro reparo, a qual é uma função contínua no tempo. O efeito do reparo é caracterizado pela mudança induzida na intensidade de falhas antes e após a falha. Na primeira classe de modelos, o efeito do reparo é expresso por uma redução na intensidade de falhas (Arithmetic Reduction of Intensity, ARI). Na segunda classe, o efeito do reparo é expresso por uma redução na idade virtual do sistema (Arithmetic Reduction of Age, ARA). Os autores apresentam ainda algumas comparações entre essas duas classes, bem como um estudo estatístico numérico sobre a qualidade dos estimadores dos parâmetros desses modelos. Tais modelos serão abordados com profundidade no Capítulo 2.

Pan e Rigdon (2009) utilizaram os modelos ARI e ARA propostos por Doyen e Gaudoin (2004), e assumindo um Processo Lei de Potência para a função intensidade, forneceram procedimentos de inferência Bayesiana para estimação dos parâmetros da função intensidade de falhas e para o parâmetro que representa o grau de efetividade do reparo.

Toledo (2016) desenvolveu um algoritmo para a determinação da periodicidade ótima de manutenção (como fizeram Gilardoni e Colosimo, 2007), porém sob a suposição de reparo

imperfeito.

Toledo et al. (2015) propuseram procedimentos para seleção de modelos pertencentes às classes ARA e ARI usando diferentes ordens de memória. Tais procedimentos são baseados em um método gráfico, onde o modelo mais adequado é aquele que apresenta maior qualidade ou bondade do ajuste.

Chauvel et al. (2016) propuseram uma metodologia geral para testar a qualidade de ajuste de qualquer tipo de modelo de reparo imperfeito. São apresentadas duas famílias de testes baseadas nos resíduos martingale e transformada integral de probabilidade (*Probability Integral Transform*), onde são aplicadas as estatísticas de teste tipo Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (CvM) e Anderson-Darling (AD). Os quantis das estatísticas de teste são computados com a abordagem bootstrap paramétrica. Esta metodologia será melhor abordada no capítulo 2 deste trabalho.

Segundo Gilardoni et al. (2017), no contexto da seleção do modelo, seria interessante desenvolver um procedimento de teste estatístico geral, a fim de permitir aos profissionais responder, em primeiro lugar, se os dados de tempos de falha são oriundos de uma situação de reparo mínimo (efeito ABAO) ou uma situação de reparo imperfeito. Com base nisso, os autores propuseram os testes Binomial exato e Multinomial para testar as hipóteses Reparo Mínimo versus Reparo Imperfeito. Tais testes serão discutidos com maior profundidade no Capítulo 2 deste trabalho.

1.2 Situação prática motivadora: Falhas em Bombas de Polpa

Desenvolvidos especificamente para o bombeamento de polpa de minério de ferro, as bombas de polpa, também conhecidas como bombas centrífugas, constituem um equipamento imprescindível nas empresas mineradoras. Essas bombas, com capacidade de vazão de 2 029.3 m^3 por hora, são as responsáveis pela transferência da polpa de minério de ferro do peneiramento para a usina de beneficiamento. A Figura 1.1 mostra um exemplo de bomba desse tipo. A falha em uma dessas bombas interrompe 20% da produção de uma usina de beneficiamento de minério de ferro, alcançando um prejuízo de produção de 120 horas anuais, que equivale a uma perda de produção de 435 125 toneladas de minério de ferro. Portanto, existe uma grande preocupação por parte das companhias em se realizar uma manutenção adequada nesses sistemas, visando evitar os gastos e transtornos com a

necessidade de um reparo corretivo, caso uma falha ocorra.



Figura 1.1: Bomba de polpa.

Os principais componentes da bomba de polpa são: conjunto do mancal, carcaça, rotor, revestimento de sucção, base e acionamento (composto de motor elétrico, motor de combustão interna e turbina a vapor).

Nesse trabalho, estamos interessados nos dados de falhas ocorridas no rotor da bomba de polpa, durante o período de junho de 2016 a maio de 2017, em 5 (cinco) bombas, utilizadas por uma mineradora. Cada falha é seguida de um reparo para colocar o motor novamente em funcionamento o mais rápido possível, visto que o prejuízo associado a uma bomba parada é significativo. As falhas são registradas em número de horas de operação até cada falha (tempos globais) e estão apresentadas no Apêndice A.

É de interesse avaliar o melhor modelo de reparo imperfeito que se adequa aos dados, para implementar um plano de manutenções periódicas em equipamentos similares para evitar as paradas frequentes. No entanto, é aconselhável, primeiramente, verificar se estamos diante de uma situação de reparo imperfeito ou mínimo.

1.3 Objetivos

Esse trabalho tem por objetivo responder à questão colocada para a situação prática descrita na Seção 1.2, isto é, os dados de falha do rotor das bombas de polpa são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é mínimo ou imperfeito. A resposta à esta questão é imprescindível para que se possa seguir os próximos passos da análise, a saber: (1) escolha do modelo adequado (reparo mínimo ou uma classe de modelos de IR, se for o caso) (2) determinação da periodicidade ótima de manutenção preventiva com base no mesmo.

1.4 Estrutura do Texto

Esse trabalho é composto por cinco capítulos.

O capítulo 2 apresenta uma discussão da literatura acerca de modelos baseados na suposição de reparo imperfeito além dos testes de seleção de modelos. Na seção 2.1 são apresentadas as classes ARA e ARI com diferentes ordens de memória propostas por Doyen e Gaudoin (2004), bem como o problema de minimização dos custos de manutenção por meio da fixação de um intervalo de tempo entre manutenções preventivas. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros indexadores da função intensidade bem como da eficiência do reparo são discutidas na seção 2.2. Na seção 2.3 é apresentada a estrutura de determinação de uma política ótima de manutenção. Métodos para a seleção do modelo mais adequado ao problema propostos por Toledo et al. (2015) são expostos na seção 2.4. Na seção 2.5 é apresentada uma discussão da literatura acerca dos testes de seleção de modelos de reparo imperfeito para bondade de ajuste propostos por Chauvel (2016) e na seção 2.6 são descritos os testes binomial exato e multinomial propostos por Gilardoni et al.(2017), que testam as hipóteses de Reparo Mínimo versus Reparo Imperfeito.

No capítulo 3 são apresentados os estudos empíricos dos testes binomial e multinomial propostos por Gilardoni et al.(2017).

No capítulo 4 é feita a análise dos dados de falhas dos rotores das bombas de polpa, onde são aplicados os testes binomial e multinomial, seleção do modelo que melhor se adequa aos dados e calculada a periodicidade ótima de manutenção preventiva.

Por fim, o capítulo 5 apresenta as conclusões desse estudo, bem como propostas para trabalhos futuros.

2 Modelos, o problema de redução do custo de manutenção e testes de hipóteses para Reparo Imperfeito

2.1 Modelos baseados na suposição de reparo imperfeito

Supondo que as falhas em um sistema reparável são equivalentemente definidas pelo processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, ou $\{T_i\}_{i \geq 1}$, onde $N(t)$ indica o número de falhas observada até ao tempo t , T_i corresponde ao tempo decorrido até o i -ésimo fracasso, e que uma ação de reparo (com duração desprezível) é tomada depois de cada falha, a distribuição de tais processos é completamente determinada pela intensidade de falha (ou simplesmente intensidade) função definida pela

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \delta t) - N(t) = 1 | \mathfrak{S}_{t-}]}{\delta t}, \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

onde \mathfrak{S}_{t-} representa o conjunto histórico de todos os tempos de falha que ocorreram antes de t , sendo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N(t)} < t$. Pode ser mostrado (Rigdon e Basu, 2000) que a função média acumulada (MCF) do processo de falhas é dado por $\Phi(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[\lambda(u)] du$.

Antes da primeira ação de reparação, a função de intensidade do sistema é a taxa de ocorrência de função de falhas (ROCOF), dada por

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \delta t) - N(t) = 1]}{\delta t}, \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Quanto ao efeito de reparo, alguns pressupostos podem ser definidos, tais como o reparo mínimo, reparo perfeito e o reparo imperfeito.

Sob a hipótese de aplicação do reparo mínimo ao sistema em estudo, presume-se que esse reparo consiste em retornar o sistema a um estado imediatamente anterior àquele encontrado do momento da falha. Nesse sentido, o processo de falhas é um Processo de Poisson não homogêneo (*Non-Homogeneous Poisson Process - NHPP*), já que sua função intensidade $\lambda(t)$ não é constante $\forall t \geq 0$. Sua função intensidade de falhas $\lambda(t)$ é igual à ROCOF e pode ser escrita como:

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \phi(t), t \geq 0 \quad (2.3)$$

Uma forma funcional comum para a função intensidade neste caso é:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}, \quad \eta, \beta, t > 0 \quad (2.4)$$

E sua função média acumulada é dada por:

$$\Phi(t) = \int_0^t \lambda_R(u) du = \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \quad (2.5)$$

Como essa função intensidade é proporcional ao tempo global t elevado a uma potência, esse caso especial do NHPP é usualmente chamado de Processo de Lei de Potência (*Power Law Process - PLP*). O parâmetro β representa o modo como o sistema deteriora ou melhora ao longo do tempo. Se $\beta > 1$, então a função intensidade $\lambda(t)$ é crescente, e as falhas tendem a ocorrer mais frequentemente. Se $\beta < 1$, então $\lambda(t)$ é decrescente, e o sistema está melhorando. Finalmente, se $\beta = 1$, então o PLP se reduz a um Processo de Poisson Homogêneo (*Homogeneous Poisson Process - HPP*) com função intensidade $\frac{1}{\eta}$. O parâmetro η é um parâmetro de escala.

Sob a suposição de reparos perfeitos, ou seja, de que o reparo retorna o sistema à condição de "tão bom quanto novo", os tempos entre as falhas (*gaps*) são independentes e identicamente distribuídos. Nesse caso, o processo de falhas é chamado Processo de Renovação, e de acordo com Doyen e Gaudoin (2004), sua função intensidade é da forma:

$$\lambda(t) = \lambda(t - T_{N(t)}) \quad (2.6)$$

onde $\lambda(t)$ denota a função intensidade do processo antes da primeira falha e $T_{N(t)}$ denota o tempo global decorrido até a ocorrência da $N(t)$ -ésima falha.

Já sob o pressuposto de reparo imperfeito, algumas formas funcionais para $\lambda(t)$ têm sido propostas na literatura. Doyen e Gaudoin (2004) propuseram duas novas classes de modelos para reparo imperfeito. No trabalho, a modelagem é definida pela intensidade

de falhas antes do primeiro reparo, a qual é uma função contínua no tempo. O efeito do reparo é caracterizado pela mudança induzida na intensidade de falhas antes e após a falha. Na primeira classe de modelos, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na intensidade de falhas (*Arithmetic Reduction of Intensity* - ARI). Na segunda classe, o efeito do reparo é expresso por uma redução aritmética na idade virtual do sistema (*Arithmetic Reduction of Age* - ARA). Tais modelos se encontram detalhados nas seções 2.1.1 e 2.1.2 desse trabalho.

2.1.1 Os modelos de Redução Aritmética da Idade (*Aritmetic Reduction Age* - ARA) de Doyen & Gaudoin (2004)

O princípio dos modelos de Redução Aritmética da Idade (*Aritmetic Reduction of Age* - ARA), segundo Doyen e Gaudoin (2004), é considerar que o sistema de reparação rejuvenesce de tal modo que a sua intensidade no tempo t é igual à intensidade inicial no tempo V_t , com $V_t < t$.

A idade real de um sistema é o seu tempo de funcionamento t . Então, os autores definem a idade virtual de um sistema como uma função positiva da sua idade real, possivelmente, dependendo de falhas do passado, isto é, $V_t = V(t; N(t); t_1, t_2, \dots, t_{N(t)})$.

Um modelo de redução de idade tem uma intensidade de falha que é uma função da sua idade virtual $\lambda(t) = \lambda(V_t)$, ou seja, sua função intensidade de falha $\lambda(t)$ é igual àquela observada em uma idade virtual V_t , com $V_t = t$. Portanto, o modelo considera que as ações de reparação reduzem a idade do sistema. A Figura 2.1 apresenta um exemplo para ilustrar esse efeito.

Além disso, cabe salientar que entre duas falhas consecutivas, a intensidade de falhas de um modelo ARA é horizontalmente paralela à intensidade inicial.

Doyen e Gaudoin (2004) generalizaram esse modelo de modo que o efeito do reparo possa se estender além do intervalo de tempo até a falha imediatamente antes do reparo atual. Portanto, a classe de modelos ARA pode utilizar-se de diferentes dimensões de memória (conjunto de tempos de falha anteriores à atual que serão levados em consideração para a construção do modelo baseado na idade virtual). Os autores destacam os modelos ARA_1 , ARA_m e ARA_∞ .

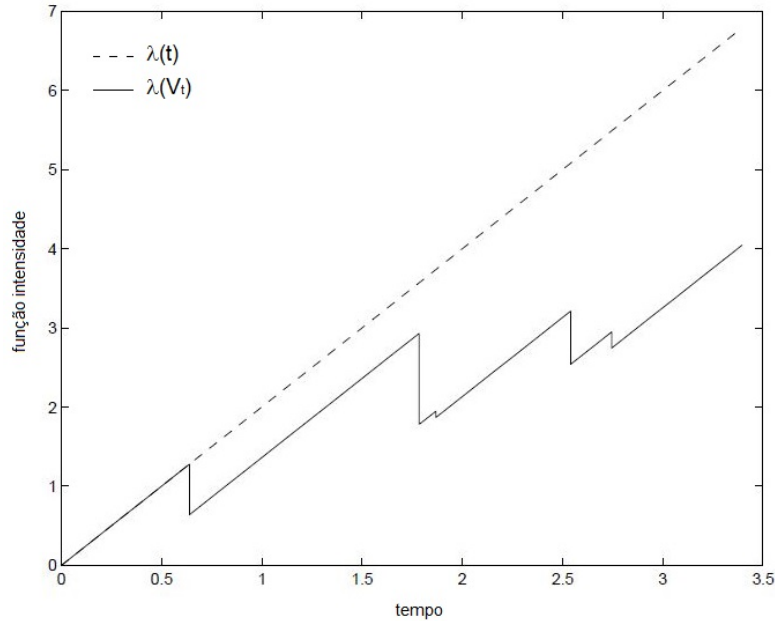


Figura 2.1: Função intensidade de falha da idade real (linha pontilhada) e Função intensidade de falha da idade virtual (linha sólida). Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 4)

O modelo ARA_∞ possui memória infinita (todo o histórico de falhas), ou seja, contempla todas as falhas registradas em um sistema. A suposição é que o reparo ARA_∞ reduz a idade virtual do sistema de um montante proporcional à sua idade antes da reparação, resultando na intensidade de falha dada por:

$$\lambda_{ARA_\infty}(t) = \lambda_R \left(t - (1 - \theta) \sum_{j=0}^{N(t)-1} \theta^j T_{N(t)-j} \right) \quad (2.7)$$

em que λ_R é a função intensidade de falhas determinística inicial do sistema.

A intensidade mínima de desgaste é igual a zero.

A Figura 2.2 apresenta um exemplo do modelo ARA_∞ com efeito de reparo $\theta = 0.5$. Percebe-se, pela figura, que o efeito do reparo faz com que a variável tempo (do eixo horizontal) se comporte como se seu valor fosse metade de seu valor real (isto é, sua idade virtual se torna a metade da idade real nos instantes do reparo). Toma-se por exemplo a altura da curva no instante $t = 2.03$. A altura da curva para esse valor de tempo é igual à encontrada no instante $t = 1.015$.

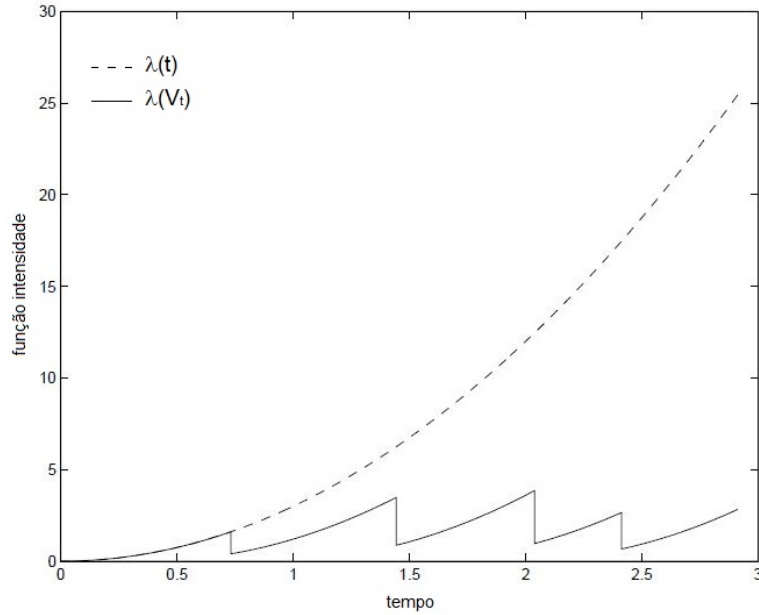


Figura 2.2: ARA_∞ com $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 49)

Malik (apud Doyen e Gaudoin, 2004) introduziu um modelo que pode ser entendido como um modelo ARA onde a reparação reduz a idade do sistema desde a última falha. Na classificação de Doyen e Gaudoin este modelo foi chamado de modelo de Redução Aritmética de Idade com uma memória 1 (ARA_1). Sua intensidade falha é dada por:

$$\lambda_{ARA_1}(t) = \lambda_R(t - (1 - \theta)T_{N(t)-1}) \quad (2.8)$$

novamente, com λ_R representando a função intensidade de falha determinística inicial do sistema.

Segundo Doyen e Gaudoin(2004), este modelo parece ser o mesmo modelo de Kijima et al. (1988) e foi utilizado por Shin et al. (1996) para desenvolver uma política de manutenção preventiva ideal.

Finalmente, o ARA_m considera uma ordem de memória m , sendo m um número natural. Sua função intensidade de falha pode ser expressa por:

$$\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda_R \left(t - (1 - \theta) \sum_{j=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^j T_{N(t)-j} \right) \quad (2.9)$$

Conforme discorrem Doyen & Gaudoin (2004), independentemente da ordem de memória considerada em um modelo, o efeito do reparo θ pode gerar diferentes classificações. Denomina-se reparo eficiente aquele cujo efeito de reparo θ é tal que $0 < \theta < 1$; o reparo ideal seria aquele com $\theta = 0$, uma vez que a intensidade de falha voltaria à condição observada em um sistema novo (AGAN); o reparo é considerado inútil quando $\theta = 1$, em que não há mudanças na função intensidade, deixando, pois, o sistema tão ruim quanto velho (ABAO); por fim, o reparo é prejudicial quando $\theta > 1$, provocando a piora do sistema. Evidentemente, o parâmetro θ é desconhecido, tão logo usaremos seu valor estimado $\hat{\theta}$ para fundamentar nossas análises.

2.1.2 Os modelos de Redução Aritmética da Intensidade (*Aritmetic Reduction Intensity - ARI*) segundo Doyen e Gaudoin (2004)

Os modelos de Redução Aritmética da Intensidade (*Aritmetic Reduction of Intensity - ARI*) é outra classe de modelos proposto por Doyen e Gaudoin (2004), onde cada ação de reparo não reduz a idade virtual, mas a função de intensidade de falha do sistema.

O modelo ARI considera que cada ação de reparo reduz a intensidade de falha de um montante dependendo do passado do processo de falha e que depois da falha, a velocidade de desgaste é a mesma de antes da falha. Assim, entre duas falhas, a intensidade de falha é verticalmente paralela à intensidade inicial (λ_R).

De forma similar à classe de modelos ARA, os modelos ARI podem utilizar-se de diferentes dimensões de memória. Os autores destacam três possibilidades de modelagem para esta classe de modelos, sendo elas ARI_1 , ARI_m e ARI_∞ .

No modelo ARI_∞ , a memória é de tamanho infinito e consiste em assumir que o reparo reduz a intensidade de falha de um montante proporcional à intensidade da falha atual e sua função intensidade de falha é dada por:

$$\lambda_{ARI_\infty}(t) = \lambda_R(t) - (1 - \theta) \left(\sum_{j=0}^{N(t)-1} \theta^j \lambda_R(T_{N(t)-j}) \right) \quad (2.10)$$

sendo λ_R a função intensidade de falhas determinística inicial do sistema.

A Figura 2.3 exibe um exemplo de aplicação do modelo ARI_∞ com efeito de reparo $\theta = 0.5$. Nesse caso, percebe-se que a altura da curva da função intensidade de falha cai obedecendo a proporção dada pelo efeito de reparo θ . Se tomarmos como exemplo o instante $t = 0.79$ em que ocorre um reparo imperfeito com $\theta = 0.5$, observamos que a altura do gráfico cai de 1.88 para 0.94, isto é, cai pela metade. Essa queda não interfere na inclinação da curva, corroborando com a suposição de que a velocidade de desgaste do sistema não foi alterada.

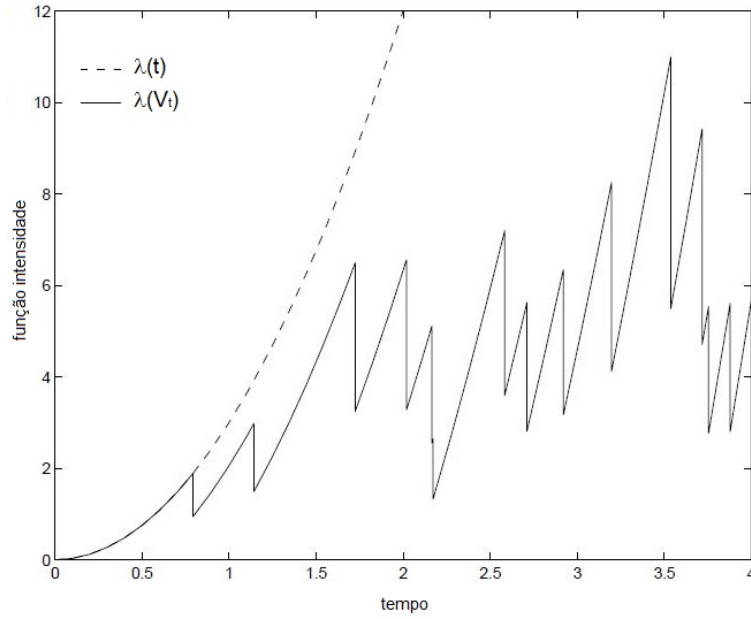


Figura 2.3: ARI_∞ com $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 47)

No modelo ARI_1 , a memória é de tamanho 1 e presume-se que o reparo reduz o incremento na intensidade de falha desde a última falha e sua função intensidade de falha é dada por:

$$\lambda_{ARI_1}(t) = \lambda_R - (1 - \theta)\lambda_R(T_{N(t)}) \quad (2.11)$$

No modelo ARI_m , presume-se que o reparo reduz o incremento na intensidade de falha desde as últimas m falhas e sua função intensidade de falha é dada por:

$$\lambda_{ARI_m}(t) = \lambda_R(t) - (1 - \theta) \left(\sum_{j=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^j \lambda_R(T_{N(t)-j}) \right) \quad (2.12)$$

Doyen e Gaudoin (2004) destacam que independente da ordem de memória, o efeito do reparo θ no modelo ARI pode gerar as mesmas classificações do modelo ARA. Isto é, o reparo será eficiente (AGAN) se $0 < \theta < 1$; o reparo será ideal se $\theta = 0$; o reparo será inútil (ABAO) se $\theta = 1$; e finalmente, o reparo será prejudicial quanto $\theta > 1$.

Assim como na classe de modelos ARA, o parâmetro θ utilizado na modelagem ARI é desconhecido, e, portanto, deve-se encontrar seu valor estimado $\hat{\theta}$ para alicerçar qualquer análise quanto ao ajuste do modelo.

2.1.3 Algumas comparações entre os modelos ARA e ARI

Os modelos ARI_1 e ARA_1 são construídos com base em hipóteses bastante semelhantes: ações de reparo reduzem intensidade de falha ou idade virtual. Além disso, em ambos os modelos, a eficiência do reparo é caracterizada pelo parâmetro θ . Por isso, é interessante comparar estes modelos para o mesmo θ . Isto acontece em dependência da convexidade intensidade inicial (DOYEN e GAUDOIN, 2004).

Se λ é convexa (ou ao contrário, côncava), para o mesmo parâmetro θ em $[0,1]$, a intensidade de desgaste mínimo do modelo ARI_1 é maior (ao contrário, inferior) do que a do modelo ARA_1 (ver Figura 2.4 e Figura 2.5).

Quando a intensidade inicial é a de um processo de Lei de Potência (PLP), existem dois parâmetros θ_{ARA_1} e θ_{ARI_1} de tal modo que o modelo ARI_1 com parâmetros $(\beta, \eta, \theta_{ARI_1})$ e o modelo ARA_1 com parâmetros $(\beta, \eta, \theta_{ARA_1})$ tenham a mesma intensidade mínima de desgaste. Neste caso, se λ é convexa (ao contrário, côncava) o modelo de ARI (ao contrário, ARA) tende a ter um desgaste maior do que a velocidade do modelo de ARA (ao contrário, ARI) (Figura 2.6 e Figura 2.7). Isto pode ser explicado pelo fato de que, no modelo de ARI, a intensidade de falha é verticalmente paralela à intensidade inicial λ , enquanto que no modelo de ARA, ambas as intensidades são horizontalmente paralelas.

Uma consequência óbvia é que, para a mesma intensidade inicial e coeficiente θ em $[0,1]$, quanto maior é a memória, menor é a intensidade de desgaste de mínimo do modelo ARI (ao contrário, ARA).

Para ilustrar as principais diferenças entre as classes de modelos ARA e ARI, se encontra a seguir um exemplo numérico apresentado por Toledo et al. (2016).

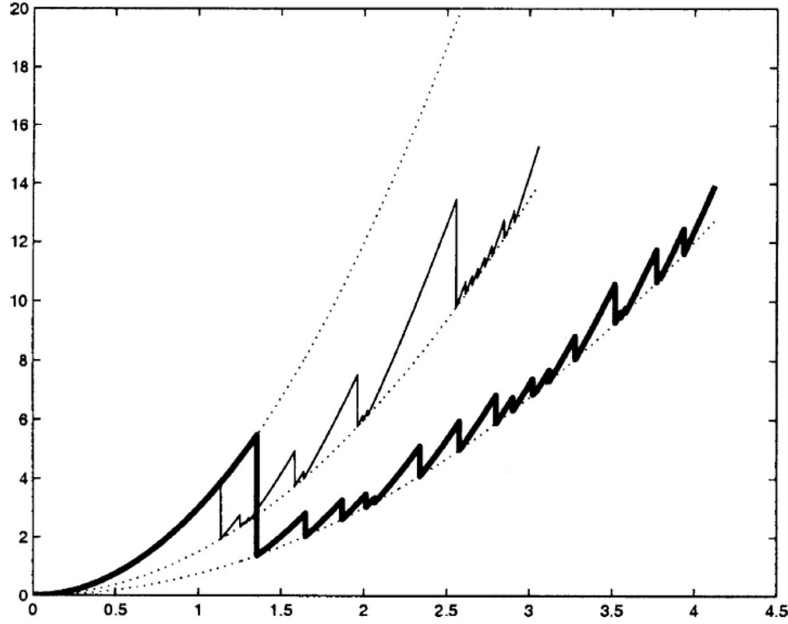


Figura 2.4: Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 3$ e $\theta = 0.5$. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)

Suponha que um sistema reparável possua um processo de falha cuja função intensidade inicial $\lambda_R(t)$ é um PLP, cuja fórmula é dada por (2.4) com parâmetros $\beta = 3$ e $\eta = 1$. Considere que o efeito do reparo $\theta = 0.5$. Sejam os tempos de falha $t_1 = 1.2$ e $t_2 = 1.9$, determinam-se as funções intensidade de falha para os modelos ARA e ARI, ambos com ordens de memória $m = 1$ e $m = 2$.

Como

$$\lambda_R(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \tag{2.13}$$

então $\lambda_R(t) = 3t^2$.

Aplicando as equações referentes aos modelos ARA_1 , ARA_m , ARI_1 e ARI_m , com $m = 2$, temos:

$$\lambda_{ARA_1}(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1.2, \\ \lambda(t - 0.5 \cdot 1.2) = 3(t - 0.6)^2, & \text{se } 1.2 \leq t < 1.9 \\ \lambda(t - 0.5 \cdot 1.9) = 3(t - 0.95)^2, & \text{se } 1.9 \leq t < \dots \end{cases}$$

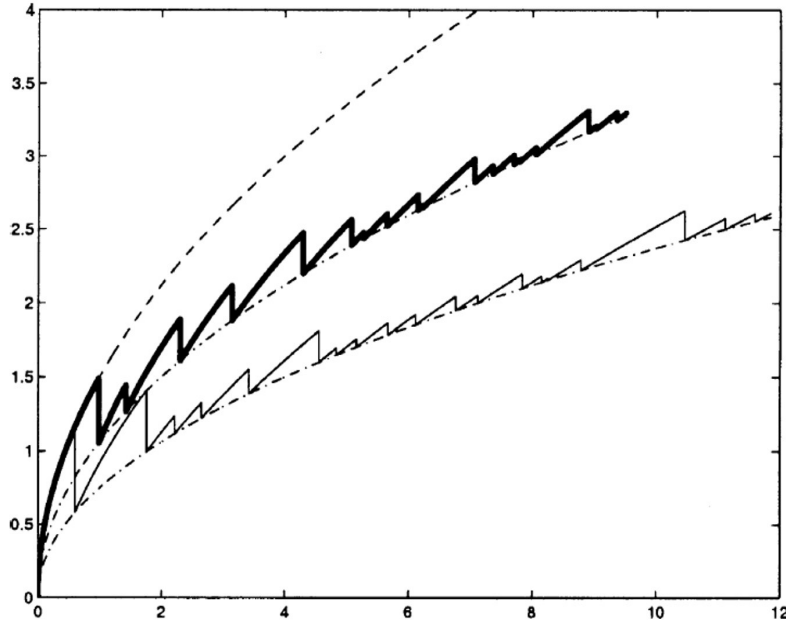


Figura 2.5: Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 1.5$ e $\theta = 0.5$ e. Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)

$$\lambda_{ARA_2}(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1.2, \\ \lambda(t - 0.5 \cdot 1.2) = 3(t - 0.6)^2, & \text{se } 1.2 \leq t < 1.9 \\ \lambda(t - 0.5 \cdot 1.9 - 0.5^2 \cdot 1.2) = 3(t - 1.25)^2, & \text{se } 1.9 \leq t < \dots \end{cases}$$

$$\lambda_{ARI_1}(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1.2, \\ \lambda(t) - 0.5 \cdot \lambda(1,2) = 3t^2 - 2.16, & \text{se } 1.2 \leq t < 1.9 \\ \lambda(t) - 0.5 \cdot \lambda(1.9) = 3t^2 - 2.16 = 3t^2 - 5.415, & \text{se } 1.9 \leq t < \dots \end{cases}$$

$$\lambda_{ARI_2}(t) = \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1.2, \\ \lambda(t) - 0.5 \cdot \lambda(1,2) = 3t^2 - 2.16, & \text{se } 1.2 \leq t < 1.9 \\ 3t^2 - 2.16 = 3t^2 - 6.495, & \text{se } 1.9 \leq t < \dots \end{cases}$$

A Figura 2.8 mostra as funções intensidade de falha geradas a partir dos cálculos supracitados sob os modelos ARA e ARI.

Se tomarmos o ponto $t_1 = 1.2$, por exemplo, percebemos que sob o ARA_1 , sua idade virtual cai 50%, isto é, a altura da curva no eixo vertical (que representa a função intensidade) referente ao ponto $t_1 = 1.2$ é igual à observada no ponto $t = 0.6$. Se observarmos o mesmo ponto $t_1 = 1.2$, agora sob a suposição de ARI_1 , a função intensidade cai pela metade, ou seja, a altura da curva no eixo vertical (que representa a função intensidade) torna-se

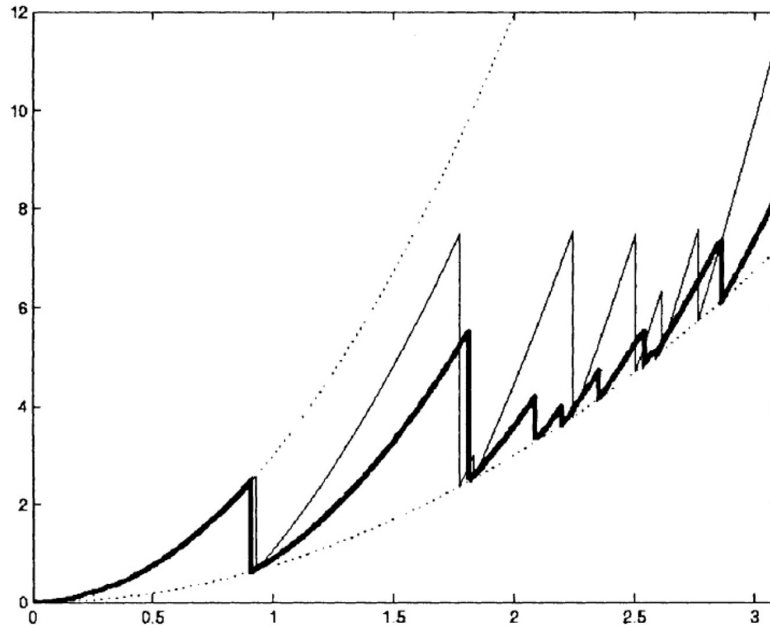


Figura 2.6: Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 3, \theta_{ARA_1} = 0.5$ e $\theta_{AR_1} = 0.75$.
 Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)

metade da observada antes do reparo (a saber, antes do reparo $\lambda_R(1.2) = 4.32$; depois do reparo $\lambda(1.2) = 2.16$).

Vale salientar que essas reduções de 50% observadas anteriormente devem-se ao coeficiente de reparo $\theta = 0.5$.

2.2 Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança segundo Toledo et al. (2016)

Nesta seção, serão derivadas as funções de verossimilhança para os modelos ARA_m e ARI_m dadas pelas expressões 2.9 e 2.12, respectivamente. Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) são obtidos a partir destas funções.

Considere k sistemas reparáveis idênticos sob estudo, $k = 1, 2, \dots$, nos quais falhas ocorrem de forma independente. Há, basicamente, duas maneiras de se observar dados em um sistema reparável. Quando a coleta de dados termina após um número determinado de falhas, os dados são ditos truncados por falha. Por outro lado, quando a coleta de dados termina em um tempo determinado t , os dados são ditos truncados por tempo. A

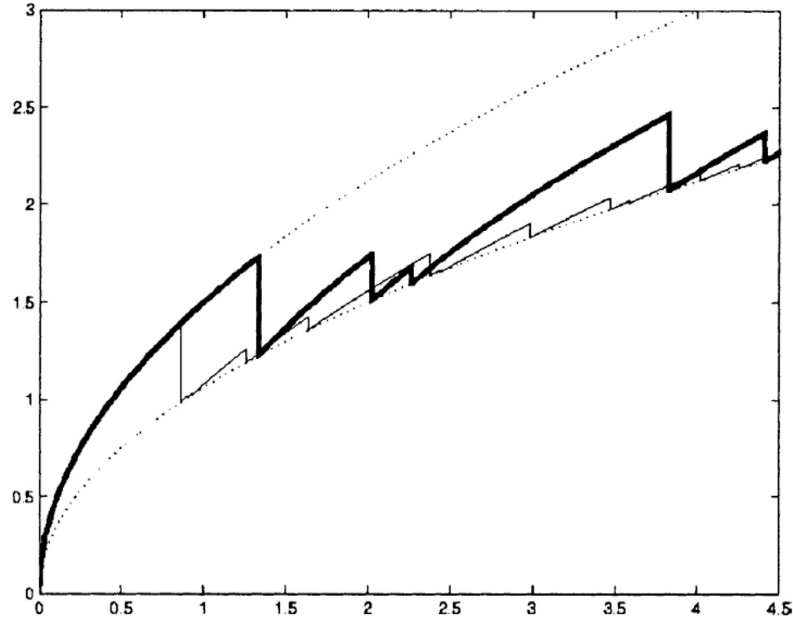


Figura 2.7: Linha Fina: ARI_1 . Linha Grossa: ARA_1 com $\beta = 1.5$, $\theta_{ARA_1} = 0.5$ e $\theta_{AR_1} = 0.29$.
 Fonte: (DOYEN e GAUDOIN, 2004, p. 51)

função de verossimilhança é construída aqui assumindo que entre os k sistemas reparáveis observados, k_1 são truncados por tempo, e k_2 são truncados por falha, $k_1, k_2 = 1, 2, \dots, k$ e $k_1 + k_2 = k$.

Assuma as seguintes condições:

- A cada falha, uma ação de reparo de grau θ é executada.
- n_i falhas são observadas no i -ésimo sistema truncado por tempo, $i = 1, 2, \dots, k_1$, e n_j^* falhas são observadas no j -ésimo sistema truncado por falha, $j = 1, 2, \dots, k_2$.
- $N = \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^*$ é o número total de falhas observadas nos sistemas.
- O i -ésimo sistema truncado por tempo é observado até o tempo determinado t_i^* , e o j -ésimo sistema truncado por falha é observado até ocorrer o número determinado n_j^* de falhas.
- Sejam $T_{i,l}$ ($i = 1, 2, \dots, k_1$, $l = 1, 2, \dots, n_i$) as variáveis aleatórias representando tempos de falha para o i -ésimo sistema truncado por tempo, registrados como o tempo desde que o sistema foi colocado em funcionamento, ($T_{i,1} < T_{i,2} < \dots < T_{i,n_i}$). Para sistemas truncados por falha, é um número aleatório de variáveis. Além disso,

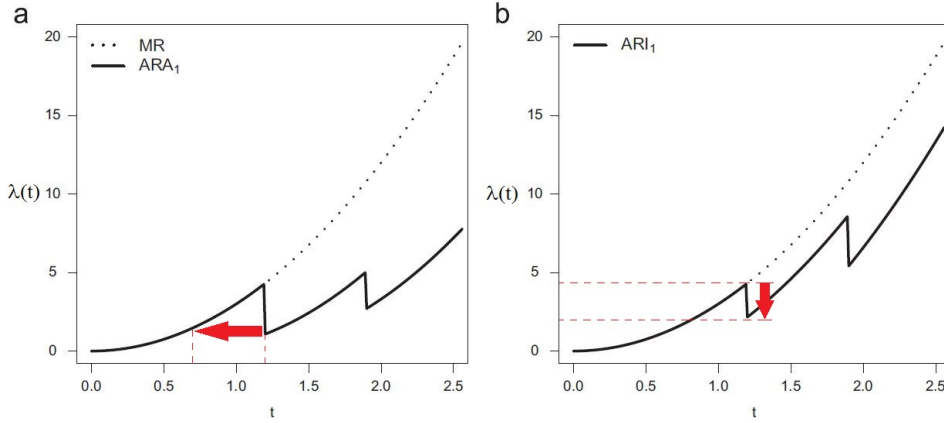


Figura 2.8: Funções intensidade de falha para os modelos ARA_1 (a) e ARI_1 (b) com intensidade inicial segundo PLP com $\beta = 3$, $\eta = 1$ e $\theta = 0.5$ e falhas observadas nos tempos $t_1 = 1.2$ e $t_2 = 1.9$. Fonte: (TOLEDO et al., 2015, p.110)

seja $t_{i,l}$ seus valores observados (dados), e $T_i = (T_{i,1}; T_{i,2}; \dots; T_{i,n_i})^t$ o vetor aleatório ($n_i \times 1$) de tempos de falha para o i -ésimo sistema truncado por tempo.

- Sejam $T_{j,m}$ ($j = 1, 2, \dots, k_2$, $m = 1, 2, \dots, n_j^*$) as variáveis aleatórias representando tempos de falha para o j -ésimo sistema truncado por falha, sendo portanto um número fixo de variáveis aleatórias ($T_{j,1} < T_{j,2} < \dots < T_{j,n_j^*}$). Sejam $t_{j,m}$ seus valores observados. Além disso, seja $T_j = (T_{j,1}; T_{j,2}; \dots; T_{j,n_j^*})^t$ o vetor aleatório ($n_j^* \times 1$) de tempos de falha para o j -ésimo sistema truncado por falha.
- Seja $N(t)$ a variável aleatória representando o número de falhas no intervalo $(0, t]$.
- Seja μ o vetor de parâmetros do modelo. Ele inclui os parâmetros que indexam a função intensidade do processo e o parâmetro de eficiência do reparo θ . Para o PLP, a função intensidade e sua função média correspondente são dadas, respectivamente, por

$$\lambda_R(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}, \quad \eta, \beta, t > 0, \quad (2.14)$$

e

$$\Phi_R(t) = \int_0^t \lambda_R(u) du = \left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta \quad (2.15)$$

Neste caso μ é um vetor (3×1) de parâmetros, dados por $\mu = (\beta; \eta; \theta)^t$. O β é o parâmetro de forma e representa a evolução do sistema, ou seja, como ele deteriora ou melhora ao longo do tempo (caso o $\beta > 1$, o sistema estará deteriorando, já que sua função intensidade de falha aumentará no tempo t), enquanto o η é chamado parâmetro de escala.

A Figura 2.9 apresenta um esquema simplificado com os k_1 sistemas truncados por tempo e os k_2 sistemas truncados por falha e seus respectivos indexadores de tempos de falha (que foram descritos anteriormente).

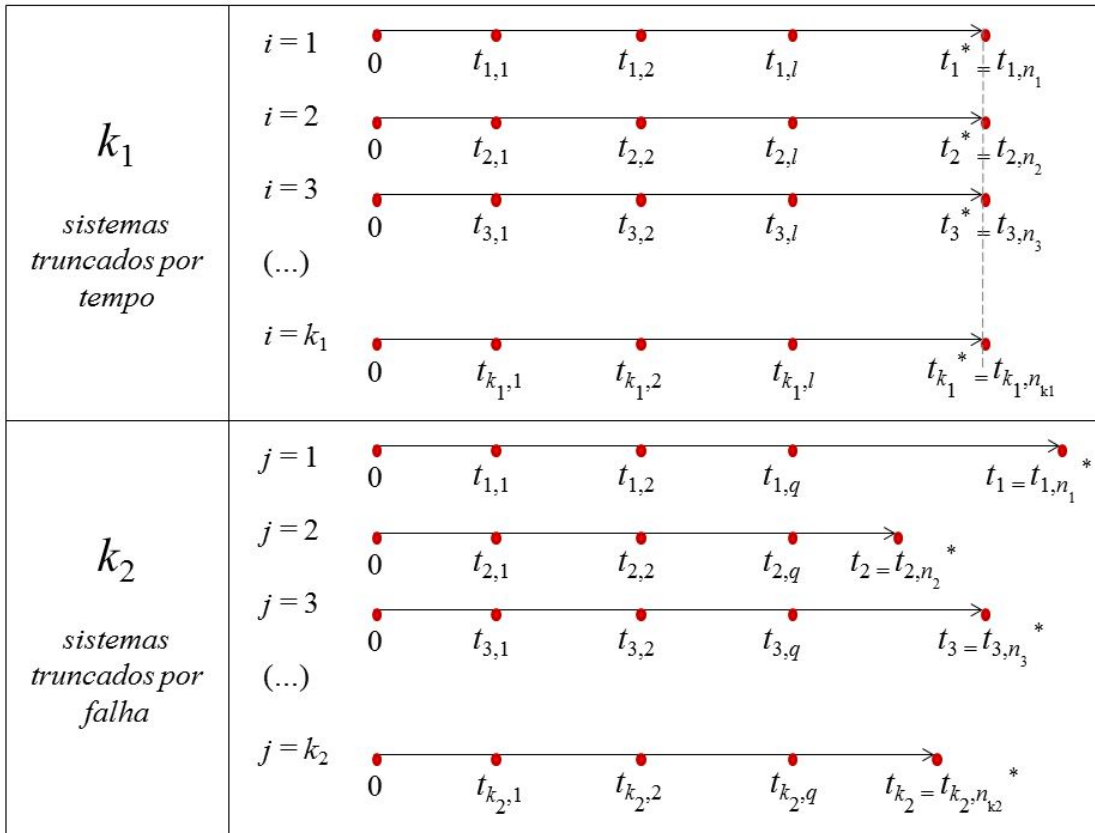


Figura 2.9: Representação esquemática dos $k_1 + k_2$ sistemas reparáveis observados. Fonte: (OLIVEIRA, 2016, p.16)

Uma função de verossimilhança apropriada para modelar esse processo deve combinar a função densidade acumulada conjunta dos k tempos de falha:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{k_1} f_{T_{i,1}, \dots, T_{i,N(t_i^*)}, N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}, n_i) \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_{j,1}, \dots, T_{j,n_j^*}}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \quad (2.15)$$

Que pode ser reescrita da seguinte forma

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{k_1} [f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i)] \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*})$$

se $k \geq 1$ e $k = k_1 + k_2$.

As contribuições dos k_1 sistemas truncados por tempo e dos k_2 sistemas truncados por falha para a verossimilhança são representadas pelo primeiro e segundo produtórios da Equação 2.15, respectivamente.

Assim, no PLP, a função de log-verossimilhança do modelo ARA_m é dada por:

$$\begin{aligned} l_{PLP+ARA_m}(\mu) &= \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\ &+ (\beta - 1) \left[\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left(t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) \right] + \\ &+ \left[\sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \log \left(t_{j,q} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p} \right) \right] (\beta - 1) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[- \left(\frac{t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[\left(\frac{t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_1} - \left(\frac{t_i^* - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \\ &+ \sum_{i=1}^{k_1} \left(\frac{t_{i, n_i} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} - \left(\frac{t_{j,q} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \left(\frac{t_{j, q-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p}}{\eta} \right)^\beta \end{aligned}$$

com $\mu = (\beta, \eta, \theta)^T$. A prova está no Apêndice B.

Assim como no modelo ARA_m , é possível expressar a função de log-verossimilhança para o PLP referente ao modelo genérico ARI_m , em que m representa a ordem de memória:

$$\begin{aligned}
l_{PLP+ARI_m}(\mu) &= \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left(t_{i,l}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \log \left(t_{q,j}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1,q-2)} \theta^p t_{j,q-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
&+ \eta^{-\beta} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left(-t_{i,l}^{\beta-1} + t_{i,l-1}^{\beta-1} \right) - \\
&+ \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} [t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} + \\
&+ \eta^{-\beta} \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \left(-t_{q,j}^{\beta-1} + t_{q,j-1}^{\beta-1} \right) - \\
&+ \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} [t_{q,m} - t_{j,q-1}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,q-2)} \theta^p t_{j,q-1-p}^{\beta-1} + \\
&+ \eta^{-\beta} \sum_{i=1}^{k_1} \left(-t_i^{*\beta-1} + t_{i,n_i}^{*\beta-1} \right) - \\
&+ \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{i=1}^{k_1} [t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}^{\beta-1}
\end{aligned}$$

novamente, com $\mu = (\beta, \eta, \theta)^T$. A prova está no Apêndice C.

Ao maximizar qualquer uma dessas funções frente a cada um dos parâmetros, podem-se encontrar as estimativas pontuais dos mesmos com base na amostra de dados de falha. Porém, além das estimativas pontuais desses parâmetros, é interessante avaliar seus respectivos intervalos de confiança sob certo nível de significância α pré-definido.

Os intervalos de confiança podem ser modelados utilizando métodos mais clássicos da literatura como a teoria assintótica, por exemplo, explorada por Toledo et al. (2016), assim como métodos que ganharam bastante destaque na literatura após a informatização

das análises estatísticas, como o *bootstrap* que foi utilizado por Oliveira(2016).

Toledo et al. (2016)e Oliveira(2016) destacam, em linhas gerais, a definição e os passos para a execução desse método a fim de se fazerem inferências intervalares dos parâmetros de interesse. Segundo os autores, o *bootstrap* é uma técnica não paramétrica que consiste na geração de B amostras aleatórias de tamanho n com reposição (pseudodados) geradas a partir da amostra inicial, também de tamanho n . Calculam-se, portanto, as estatísticas de interesse com base nessas B amostras e constrói-se um histograma para avaliar a dispersão referente a esta estatística. Utilizando-se do desvio-padrão dessa estatística frente às B amostras, podem ser construídos intervalos de confiança ao nível de $100(1 - \alpha)\%$.

A principal finalidade para o uso dos intervalos de confiança e, sobretudo, das estimativas pontuais dos parâmetros reside no objetivo de conceber uma política de manutenção preventiva que minimiza os custos totais esperados de manutenção. Essa minimização de custos deve passar obrigatoriamente pela determinação de um intervalo τ entre as manutenções preventivas cujo efeito de reparo é θ (com $0 \leq \theta \leq 1$) de modo que o custo de manutenção seja mínimo. A discussão da literatura sobre a política ótima de manutenção será apresentada na seção 2.3.

2.3 O problema da minimização de custo

Ao conceber uma política de manutenção para determinado sistema de uma companhia, o fator custo deve ser considerado. Isso porque, em geral, manutenções preventivas podem reduzir as chances de falha nesse sistema, como também aumentar os custos de manutenção caso o intervalo entre as manutenções não seja bem estabelecido.

Suponha que um sistema reparável e sujeito a falhas seja colocado em funcionamento no instante $t = 0$ sob o qual são colocadas algumas condições:

- A manutenção preventiva é efetuada em intervalos de τ unidades de tempo;
- Incide um custo esperado C_{PM} a cada manutenção preventiva;
- O sistema retorna ao estado tão bom quanto novo (AGAN) após cada ação de manutenção preventiva;

- Entre as manutenções preventivas, um reparo (com $\theta \in [0,1]$) é executado;
- O custo estimado do reparo imperfeito é denominado C_{IR} ;
- Os custos de reparo e tempos de falha são independentes;
- O tempo de reparo é desprezível;
- Os custos de indisponibilidade são absorvidos pelos C_{PM} e C_{IR} .

Garantidas as pressuposições supracitadas e conforme discutido por Gilardoni e Colosimo (2007) apud Toledo et al.(2015), o custo de manutenção esperado por unidade de tempo $C(\tau)$ para o sistema pode ser expresso por:

$$C(\tau) = \frac{C_{PM} + C_{IR} \cdot E[N(\tau)]}{\tau}, \tau > 0 \quad (2.17)$$

Deseja-se minimizar o valor numérico da expressão anterior, reduzindo assim, ao máximo, o custo inerente às atividades de manutenção da companhia. Toledo et al.(2015) aplicam derivada para executar essa otimização e apresentam o resultado desse cálculo sob a notação $D(\tau)$ que pode ser observado a seguir:

$$D(\tau) = \tau\phi(\tau) - \Phi(\tau) = \frac{C_{PM}}{C_{IR}} \quad (2.18)$$

Onde $\Phi(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[\lambda(u)]du$, conforme definido na seção 2.1.

Porém, os autores destacam que não há uma solução fechada para essa otimização (mais precisamente para $\hat{\Phi}(\tau)$) sob a suposição de reparo imperfeito, levando o problema à solução numérica cujo roteiro se encontra adiante. Outro ponto importante destacado pelos autores consiste na não obrigatoriedade de se definirem individualmente os valores de C_{PM} e C_{IR} , mas somente sua razão, o que já consiste em uma simplificação do problema por meio da aplicação dessa metodologia.

O roteiro definido por Toledo et al.(2015) para que se determine a periodicidade ótima de manutenção preventiva passa pela determinação dos parâmetros do modelo de falhas por meio das estimativas $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ e pela estimação da função média acumulada $\hat{\Phi}(t)$. Tal roteiro é apresentado a seguir:

Passo 1 - Geram-se as estimativas de máxima verossimilhança do modelo escolhido (escolha feita pelo método gráfico apresentado na seção anterior). Logo, nesse passo, determinam-se $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ por meio das funções de máxima verossimilhanças já apresentadas nesse trabalho;

Passo 2 - Estima-se a função média acumulada $\hat{\Phi}(t)$. Pode-se fazer uso da simulação de Monte Carlo segundo a qual, usam-se as estimativas $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar possíveis históricos de falha e conseqüente cálculo do MCF:

Passo 2.1 - Executa-se a simulação de Monte Carlo. Para mais detalhes, ver Apêndices D e E.

Passo 2.2 - Calcula-se o MCF ($\hat{\Phi}(t)$). As etapas do cálculo podem ser vistas no Apêndice F.

Passo 3 - Estima-se a periodicidade ótima de manutenção preventiva τ , isto é, aplica-se a fórmula $D(\tau) = \tau\phi(\tau) - \Phi(\tau) = \frac{C_{PM}}{C_{IR}}$. Porém, o uso desta fórmula exige que as funções intensidade $\phi(t)$ e média acumulada $\Phi(t)$ sejam determinadas previamente. A função $\Phi(t)$ será encontrada no **Passo 2.2** (ela é o MCF). Para encontrarmos $\phi(t)$ precisaríamos derivar $\Phi(t)$ em relação a t . Mas, como $\Phi(t)$ será provavelmente uma função degrau, sua derivada será igual a zero. O mecanismo que pode ser utilizado é o de aproximação dessa função degrau por uma função convexa. Esse princípio é denominado Maior Minorant Convexo (*Greatest Convex Minorant* - GCM). Boswell (1966) apud Toledo et al. (2015), define que a GCM de $\hat{\Phi}(t)$, que poderemos chamar de $\hat{\Phi}_{SG}(t)$ ou $\hat{\Phi}_{C-NPMLLE}(t)$, será dada por:

$$\hat{\Phi}_{SG}(t) = \sup \left\{ g(t) : g(t) \text{ é convexa e } g(u) \leq \hat{\Phi}(u) \forall u \right\}$$

Logo, a derivada direita da maior função convexa menor ou igual a $\hat{\Phi}(t)$ será usada para se determinar $\hat{\phi}(t)$, isto é, $\hat{\phi}_{SG}(t) = \hat{\Phi}'_{SG}(t^+)$

Pode-se definir um intervalo de confiança para a periodicidade ótima de manutenção preventiva τ utilizando a reamostragem de *bootstrap* a um nível de significância α pré-definido. Toledo et al. (2016) determinaram a periodicidade ótima de manutenção sob suposição de reparo imperfeito para motores de fora de estrada seguindo os passos descritos acima. Oliveira (2016), seguindo os mesmos passos, concebeu uma política de manutenção que minimiza os custos inerentes à prática da manutenção preventiva em correias transportadoras de uma empresa mineradora. Porém, para se determinar o período ideal entre

manutenções preventivas (ideal no sentido de minimizar os custos inerentes), faz-se necessário identificar o modelo a ser utilizado no problema. Definir o modelo significa escolher entre as classes *ARA* e *ARI* e ainda entre as diferentes ordem de memória m possíveis. Essa escolha, obviamente, irá interferir nas estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros que estão envolvidos na construção da função intensidade de falha. A discussão sobre o método de escolha do modelo com base em análises gráficas e testes de hipóteses é apresentada nas seções 2.4 e 2.5 respectivamente.

2.4 Critérios de Seleção do Modelo (*ARA*, *ARI* e suas ordens de memória)

Conforme já apresentado no presente trabalho, diferentes modelos podem ser desenvolvidos a partir de um mesmo problema sob o pressuposto de reparo imperfeito, uma vez que as classes de modelos *ARA* e *ARI* podem assumir diferentes ordens de memória, conforme discutido por Doyen e Gaudoin (2004). Deve-se, pois, utilizar algum método para a seleção do modelo mais adequado ao problema em estudo baseando-se na qualidade do ajuste. Toledo et al.(2015) apresentam alguns critérios de seleção clássicos da literatura e propõem uma solução inédita baseada em um método gráfico que será apresentado nesta seção.

Segundo Toledo et al.(2015), o modelo mais adequado é aquele que apresenta maior qualidade ou bondade do ajuste. Eles classificam os critérios para a seleção desse modelo em (1) critérios de informação e (2) técnicas gráficas de seleção.

Sob o arcabouço dos critérios de informação se encontra a seleção de modelos baseada na maximização da log-verossimilhança \hat{l} . Burnham e Anderson apud Toledo et al.(2015) desenvolveram um procedimento que consiste no escalonamento dos valores da função de log-verossimilhança, cuja fórmula é dada por:

$$\Delta_r = \hat{l}_{maxima} - \hat{l}_r, (r = 1, 2, \dots, R) \quad (2.19)$$

sendo \hat{l}_r cada uma das R log-verossimilhanças ajustadas. A maior log-verossimilhança observada nesses R modelos designaremos por \hat{l}_{maxima} . O objetivo é claramente tornar o $\Delta_r = 0$, fato que ocorrerá apenas se a log-verossimilhança do r -ésimo modelo \hat{l}_r for igual

à máxima encontrada \hat{l}_{maxima} .

Os autores ainda determinam uma grandeza denominada Peso da Evidência. Se submetermos todos os R modelos à equação seguinte, teremos um panorama do nível de qualidade do ajuste observado em cada modelo frente aos demais, facilitando o ranqueamento dos mesmos.

$$W_r = \frac{e\left(\frac{-\Delta_r}{2}\right)}{\sum_{r=1}^R e\left(\frac{-\Delta_r}{2}\right)} \quad (2.20)$$

Essa equação fornece um valor de W_r dentro do intervalo $[0,1]$, podendo o r assumir qualquer valor no intervalo $r = 1,2,\dots,R$. Pelo fato de que cada W_r é uma partição do espaço que contém todos os possíveis valores de bondade do ajuste, $\sum_{r=1}^R W_r = 1$.

Se analisarmos conjuntamente os valores de Δ_r e W_r cujos cálculos procedem conforme supracitado, o melhor modelo ajustado ao problema será aquele que obtiver menor Δ_r e, conseqüentemente, maior W_r (entenda como mais próximo de 1).

Como uma nova proposta à teoria voltada à seleção de modelos, Toledo et al (2015) apresentam um método gráfico de seleção que propõe estimar a função média acumulada (MCF) a partir de cada modelo (ARA_m ou ARI_m , com diferentes ordens de memória m , calculando a média global da área sob a função intensidade $\hat{\lambda}$ de cada modelo) e comparar esse valor ao encontrado por meio do MCF empírico ou procedimento de Nelson-Aalen (AALEN, 1978). Os passos para a determinação do MCF baseado nos modelos se encontram a seguir:

Passo 1 - Estimam-se os parâmetros do modelo (PLP sob o ARA_m ou ARI_m) a partir dos dados de falha provenientes dos $k_1 + k_2$ sistemas, maximizando as respectivas log-verossimilhanças apresentadas na seção 2.2.

Passo 2 - Em seguida, utilizam-se os tempos de falha coletados para o i -ésimo sistema truncado por tempo (isto é, $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n_i}^*$) e o j -ésimo sistema truncado por falha ($t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,n_j}$), bem como as estimativas dos parâmetros β , η e θ nas funções intensidade de falha estimada $\hat{\lambda}_i(t)$ e $\hat{\lambda}_j(t)$ referentes a cada um sistema (como já

apresentadas na seção 2.1).

Passo 3 - Pode-se integrar cada uma das funções $\hat{\lambda}_i(t)$ (referentes a cada sistema truncado por tempo) e $\hat{\lambda}_j(t)$ (referentes a cada sistema truncado por falha), todas no intervalo $[0, t]$ com $t \in [0, t_{i, n_j}]$, se truncado por falha ou $t \in [0, t_i^*]$, se truncado por tempo. Por meio dessa integral será possível determinar as funções média acumulada estimada $\hat{\Phi}_i(t)$ (para o i -ésimo sistema truncado por tempo) e $\hat{\Phi}_j(t)$ (para o i -ésimo sistema truncado por falha).

Passo 4 - Os passos 2 e 3 são feitos para cada um dos $k_1 + k_2$ sistemas.

Passo 5 - Estima-se o MCF baseado nos modelos no tempo t como

$$\frac{\sum_{i=1}^{k_1} \hat{\Phi}_i(t) + \sum_{j=1}^{k_2} \hat{\Phi}_j(t)}{k_1 + k_2} \quad (2.21)$$

Logo, segundo Toledo et al. (2015), ao encontrarmos um modelo cujos valores estimados de MCF (pelo ARA_m ou ARI_m) estiverem mais próximos do MCF empírico, esse será então o modelo com maior qualidade de ajuste.

Os gráficos obtidas por Toledo et al. (2015) estão apresentados na Figura 2.10. O objetivo aqui é de exemplificar a aplicação do método gráfico para a seleção de modelos utilizando o roteiro anterior.

Percebe-se que para o modelo ARI_∞ apresentado nas Figuras 2.10-c e 2.10-d, há uma maior aderência dos valores estimados pelo ajuste em relação ao MCF empírico. Essa constatação foi suficiente para Toledo et al. (2015) concluírem que esse é o melhor modelo.

Em contrapartida, Chauvel et al. (2016) propõem um teste de bondade de ajuste bootstrap paramétrico para modelos de reparo imperfeito, que será discutido na seção 2.5.

2.5 Testes de bondade de ajuste bootstrap paramétricos para modelos de reparo imperfeito segundo Chauvel et al. (2016)

Chauvel et al. (2016) propuseram duas famílias de testes de bondade de ajuste para modelos de reparo imperfeitos que são baseados em resíduos martingale ou transformada

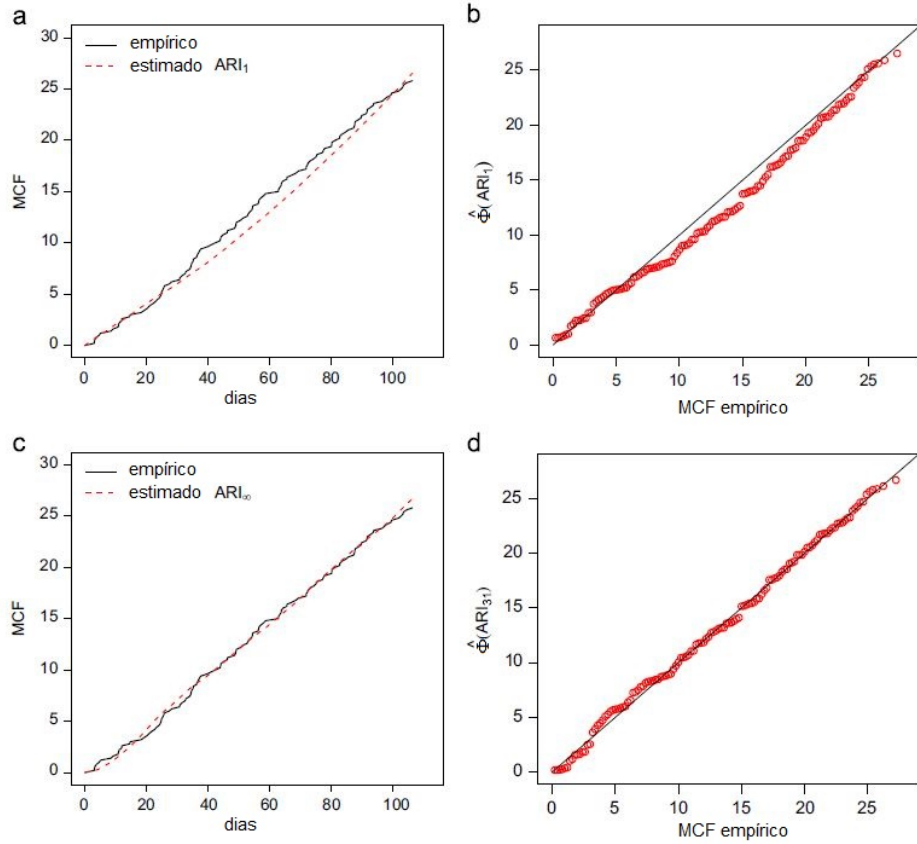


Figura 2.10: Gráficos de diagnóstico: comparação entre o MCF empírico e o MCF estimado para ARI_1 (a e b) e ARI_∞ (c e d). Fonte (TOLEDO et al., 2015, p. 113)

integral de probabilidade. Os quantis das estatísticas de teste são computados com uma abordagem *bootstrap* paramétrica. Segundo os autores, a metodologia é geral e pode ser aplicada a uma ampla gama de modelos de reparo imperfeito, como o modelo Brown-Proschan (Brown e Proschan, 1983), modelo de quase-renovação (Wang e Pham, 1996), Processo Geométrico Estendido (Bordes e Mercier, 2013) e modelos ARA_∞ e ARA_1 , já descritos neste trabalho. O modelo ARA_∞ com a intensidade inicial PLP ($ARA_\infty - PLP$) foi utilizado para exemplificação dos testes propostos.

Dado que um modelo de processo pontual é caracterizado por sua intensidade, um modelo de reparo imperfeito pode ser denotado $\mathcal{C} = \{\lambda(\theta), \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$, onde θ é o parâmetro do modelo. É intuito determinar se \mathcal{C} é um modelo relevante para os dados observados T_1, \dots, T_n . O teste de bondade de ajuste é o teste estatístico de

$$H_0 : \lambda \in \mathcal{C} \quad \text{versus} \quad H_1 : \lambda \notin \mathcal{C}$$

Geralmente, o procedimento de teste consiste em rejeitar a hipótese nula de um bom ajuste se alguma quantidade, a estatística de teste, é maior do que um valor crítico. Este valor crítico é o quantil ou a distribuição assintótica da estatística sob H_0 . Então, o problema é primeiro encontrar estatísticas de teste que expressam a lacuna entre os dados e o modelo, e em segundo lugar determinar a distribuição da estatística sob H_0 e por fim comparar a estatística observada com um quantil dessa distribuição.

Chauvel et al.(2016) propuseram duas famílias de testes de bondade de ajuste, baseadas respectivamente em resíduos martingale e transformada integral de probabilidade(que serão abordados nas seções 2.5.1 e 2.5.2, respectivamente), associados a três estatísticas função de distribuição empírica, sendo elas, Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (CvM) e Anderson-Darling (AD). Para cada teste, os quantis da distribuição estatística de teste em H_0 são calculados com método *bootstrap* paramétrico que será descrito na seção 2.5.3.

2.5.1 Testes baseados nos Resíduos Martingale

Seja $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ a intensidade cumulativa do processo N , de tal modo que $\Phi_t = \int_0^t \lambda_s ds$, para $t \geq 0$.

O processo $M = (M_t)_{t \geq 0}$ definido por $M = N - \Phi$ é um zero significativo martingale. Então N está perto de Φ no sentido que a expectativa de sua diferença é nula (Andersen et al., 1993 apud Chauvel et al., 2016).

Na configuração de Chauvel et al.(2016), a intensidade tem uma forma paramétrica e é denotada $\lambda(\theta) = (\lambda_t(\theta))_{t \geq 0}$, para $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$. A intensidade cumulativa é $\Phi(\theta)$, onde o martingale correspondente é $M(\theta) = N - \Phi(\theta)$.

Na prática, o parâmetro θ é desconhecido e a intensidade cumulativa é estimada a partir dos n primeiros tempos de falha T_1, \dots, T_n . Sendo $\hat{\theta}$ estimador de máxima verossimilhança de θ . As variáveis aleatórias $\widehat{M}_1, \dots, \widehat{M}_n$ definidas por

$$\widehat{M}_i = N_{T_i} - \Phi_{T_i}(\hat{\theta}) = i - \Phi_{T_i}(\hat{\theta}), i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.22)$$

são chamadas resíduos de martingale (Cook and Lawless, 2007 apud Chauvel, 2016). Ao

estimar θ , a propriedade martingale é perdida, mas N ainda está previsto estar perto de $\Phi(\hat{\theta})$.

Uma ilustração desse fenômeno é dada por Chauvel et al. (2016) e pode ser observada na Figura 2.11, onde o processo de contagem N , a intensidade cumulativa real $\Phi(\theta)$ (linha azul) e a intensidade cumulativa estimada $\Phi(\hat{\theta})$ (linha vermelha) são plotados ao longo do tempo para um conjunto de dados simulados sob o modelo de reparo imperfeito ARA_∞ com intensidade inicial $PLP(ARA_\infty - PLP)$. Aqui, $\mu = (\beta, \eta, \theta)$.

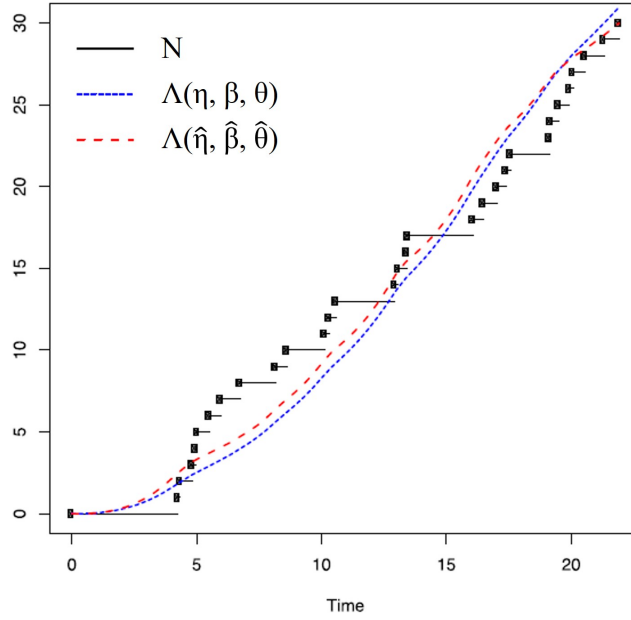


Figura 2.11: Gráfico de $N, \Phi(\eta, \beta, \theta)$ e $\Phi(\hat{\eta}, \hat{\beta}, \hat{\theta})$ ao longo do tempo para 30 tempos de falhas simulados sob o modelo $ARA_\infty - PLP$, com $\eta = 0.05$, $\beta = 2.5$ e $\theta = 0.1$. Fonte: (CHAUVEL et al., 2016, p. 1345)

A intensidade inicial do modelo é dada pela equação 2.7 e a intensidade cumulativa é calculada através da fórmula dada em 2.15, onde tem-se que:

$$\Phi_t(\mu) = a \sum_{i=1}^{N_t+1} \left\{ \left(T_i - \theta \sum_{j=0}^{i-2} (1-\theta)^j T_{i-j-1} \right)^b - \left(T_{i-1} - \theta \sum_{j=0}^{i-2} (1-\theta)^j T_{i-j-1} \right)^b \right\}$$

onde $t \geq 0$ e $T_{N_t+1} = t$.

Os dados foram gerados com $n = 30$ falhas, $\eta = 0.05$, $\beta = 2.5$ e $\theta = 0.1$. Os estimadores

de máxima verossimilhança dos parâmetros são $\hat{\eta} = 0.053$, $\hat{\beta} = 2.67$ e $\hat{\theta} = 0.15$. A intensidade cumulativa estimada $\Phi(\hat{\theta})$ é tão próximo ao processo de contagem como a intensidade cumulativa real $\Phi(\theta)$.

A primeira família de testes de bondade de ajuste é construída com medidas de discrepâncias entre N e $\Phi(\hat{\theta})$. Os testes rejeitam a hipótese de que o modelo é válido se os dois processos estiverem muito distantes. Conforme já mencionado, os autores consideraram três estatísticas de teste usuais com base nos resíduos martingale.

A primeira é a estatística tipo Kolmogorov-Smirnov(KS):

$$KS_m(\hat{\theta}) = \sup_{i=1,\dots,n} |\widehat{M}_i| = \sup_{i=1,\dots,n} |i - \Phi_{T_i}(\hat{\theta})| \quad (2.23)$$

A segunda estatística é do tipo Cramér-von Mises(CvM):

$$CvM_m(\hat{\theta}) = \int_0^{T_n} (N_t - \Phi_t(\hat{\theta}))^2 d\Phi_t(\hat{\theta}) \quad (2.24)$$

Usando uma discretização do intervalo de tempo $[0, T_n]$, pode-se mostrar que:

$$CvM_m(\hat{\theta}) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \{(i-1 - \Phi_{T_i}(\hat{\theta}))^3 - (i-1 - \Phi_{T_{i-1}}(\hat{\theta}))^3\}$$

Os autores também propuseram uma estatística do tipo Anderson-Darling(AD):

$$AD_m(\hat{\theta}) = \int_0^{T_n} \frac{(N_t - \Phi_t(\hat{\theta}))^2}{\Phi_t(\hat{\theta})(n+1 - \Phi_t(\hat{\theta}))} d\Phi_t(\hat{\theta}) \quad (2.25)$$

Mais peso é colocado em valores grandes e baixos da intensidade cumulativa estimada. Uma escolha usual para estatísticas AD seria com o peso do quadrado discrepância entre N e $\Phi(\hat{\theta})$ pelo inverso do $\Phi_t(\hat{\theta})(n - \Phi_t(\hat{\theta}))$ para $t \in [0, T_n]$. No entanto, porque $\Phi_{T_n}(\hat{\theta}) = n$, o integral correspondente não é definida. Portanto, é feita a discretização de $[0, T_n]$. Por definição, a equação 2.25 pode ser expressa como:

$$AD_m(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \int_{T_{i-1}}^{T_i} \frac{(i-1 - \Phi_t(\hat{\theta}))^2}{\Phi_t(\hat{\theta})(n+1 - \Phi_t(\hat{\theta}))} d\Phi_t(\hat{\theta})$$

Fazendo a mudança de variáveis, onde $x = \Phi_t(\hat{\theta})$, temos que

$$AD_m(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \int_{T_{i-1}(\hat{\theta})}^{T_i(\hat{\theta})} \frac{(i-1-x)^2}{x(n+1-x)} dx$$

Para $x \in]0, n[$

$$\frac{(i-1-x)^2}{x(n+1-x)} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{(i-1)^2}{(n+1)} \log(x) - \frac{(n+2-i)^2}{(n+1)} \log(n+1-x) - x \right\}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} AD_m(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^n \left\{ (i-1)^2 \log \left(\frac{\Phi_{T_i}(\hat{\theta})}{\Phi_{T_{i-1}}(\hat{\theta})} \right) - (n+2-i)^2 \log \left(\frac{n+1 - \Phi_{T_i}(\hat{\theta})}{n+1 - \Phi_{T_{i-1}}(\hat{\theta})} \right) \right\} \\ &+ (n+1) \log \left(1 - \frac{\Phi_{T_1}(\hat{\theta})}{n+1} \right) - n \end{aligned}$$

As distribuições das estatísticas de teste sob a hipótese nula não são distribuições padrão e, além disso, elas podem depender dos parâmetros. Portanto, os quantis foram avaliados por bootstrap paramétrico.

2.5.2 Testes baseados na Transformada Integral de Probabilidade

A segunda classe de testes baseia-se nas variáveis aleatórias $\Phi_{T_{i+1}}(\theta) - \Phi_{T_i}(\theta)$, para $i = 0, \dots, n-1$. Sob H_0 , essas variáveis são i.i.d. com distribuição exponencial padrão ($Exp(1)$) (Cook and Lawless, 2007 apud Chauvel, 2016). Essas variáveis são transformadas em uniformes.

Para $i = 0, \dots, n - 1$, deixe $S(\cdot|T_i; \theta)$ denotar a função de confiabilidade do tempo entre falhas $T_{i+1} - T_i$ condicionado a $T_i = (T_1, T_2, \dots, T_i)$:

$$S(s|T_i; \theta) := P(T_{i+1} - T_i > s|T_i; \theta) = \exp(-\Phi_{T_i+s}(\theta) + \Phi_{T_i}(\theta)), \text{ para } s \geq 0 \quad (2.26)$$

Defini-se as variáveis

$$U_i(\theta) = S(T_{i+1} - T_i|T_i; \theta)$$

para $i = 0, \dots, n - 1$. Sob a hipótese nula, $H_0 : \Phi \in \mathcal{C}$, os U_i 's são i.i.d. com distribuição uniforme padrão $\mathcal{U}[0,1]$. Tal transformação dos tempos entre falhas geralmente são chamados de Transformada Integral de Probabilidade (TIP) e consiste em aplicar uma função de distribuição cumulativa (f.d.c.) para uma variável aleatória (D'Agostino e Stephens, 1986, página 239 apud Chauvel et al., 2016). No caso exposto pelos autores, a função de distribuição cumulativa é condicional ao passado.

A segunda classe de testes de bondade de ajuste proposta por Chauvel et al. (2016) é então baseada na transformada integral de probabilidade condicional dos tempos entre falhas. Pode-se esperar que a uniformidade não se mantenha no caso do modelo especificado ser incorreto. Portanto, segundo os autores, pode-se testar a bondade do ajuste de um modelo de reparo imperfeito testando que os tempos entre falhas transformados têm uma distribuição uniforme. Em aplicações, θ é estimado e considera-se as estatísticas de teste KS, CVM e AD para testar a uniformidade de $U_0(\hat{\theta}), \dots, U_{n-1}(\hat{\theta})$ (D'Agostino E Stephens, 1986 apud Chauvel et al., 2016).

As estatísticas função de distribuição empírica que serão empregadas, conforme já mencionado, são as estatísticas de Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramér-von Mises (CvM) e a estatística de Anderson-Darling.

Definimos D^+ (respectivamente D^-) como a maior diferença vertical entre $F_{n,S}(t)$ (representa a função de distribuição acumulada empírica dos dados) e $F(t) = x$ (representa a função de distribuição acumulada assumida para os dados), quando $F_{n,S}(x)$ é maior (respectivamente menor) que x , formalmente, $D^+ = \sup_x \{F_{n,S}(x) - x\}$ e $D^- = \sup_x \{x - F_{n,S}(x)\}$

As estatísticas de teste são respectivamente:

$$\begin{aligned}
KS_u(\hat{\theta}) &= \sqrt{n} \sup_{x \in [0,1]} |F_{n,S}(x) - x| = \sqrt{n} \max(|D^+, D^-|) = \\
&= \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i-1)}(\hat{\theta}), \max_{i=1, \dots, n} \left(U_{(i-1)}(\hat{\theta}) - \frac{i-1}{n} \right) \right),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$CvM_u(\hat{\theta}) = n \int_0^1 (F_{n,S}(x) - x)^2 dx = \sum_{i=1}^n \left(U_{(i-1)}(\hat{\theta}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \tag{2.28}$$

e

$$AD_u(\hat{\theta}) = n \int_0^1 \frac{(F_{n,S}(x) - x)^2}{x(1-x)} dx = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \log(U_{(i-1)}(\hat{\theta})) + \log(1 - U_{(n-i)}(\hat{\theta})) \} \tag{2.29}$$

onde $F_{n,S}$ é a função de distribuição cumulativa empírica das variáveis aleatórias $U_i(\hat{\theta})$ e $U_{(0)}(\hat{\theta}) \leq U_{(1)}(\hat{\theta}) \leq \dots \leq U_{(n-1)}(\hat{\theta})$ são os $U_i(\hat{\theta})$ ordenados, onde $i = 0, 1, \dots, n-1$. As fórmulas para obtenção das Equações 2.28 e 2.29 podem ser encontradas no Apêndice G.

Levando em consideração a estimativa de θ , sob H_0 , os $U_i(\hat{\theta})$'s não são independentes nem uniformemente distribuídos e as distribuições estatísticas não são conhecidas. Portanto, é pertinente a realização de uma análise numérica para avaliar se essas distribuições dependem dos parâmetros.

São gerados 4000 conjuntos de dados sob o modelo $ARA_\infty - PLP$ para $\beta \in \{1.5, 3\}$, $\theta = \{0.2, 0.8\}$, $\eta = 0.05$ e $n = 30$. Para cada amostra, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e os 6 testes estatísticos $KS_m(\hat{\theta})$, $CvM_m(\hat{\theta})$, $AD_m(\hat{\theta})$, $KS_u(\hat{\theta})$, $CvM_u(\hat{\theta})$ e $AD_u(\hat{\theta})$ são computados. Na Figura 2.12, são apresentados os boxplots das 4000 estatísticas de teste simuladas. Para cada estatística de teste, não está claro se β tem influência ou não, mas os boxplots são claramente diferentes quando o valor de θ muda. Então isso parece indicar que as distribuições das estatísticas dependem dos parâmetros

do modelo. Assim, as tabelas usuais não podem ser usadas para realizar as análises KS, CvM e AD e é necessário usar a abordagem bootstrap paramétrica.

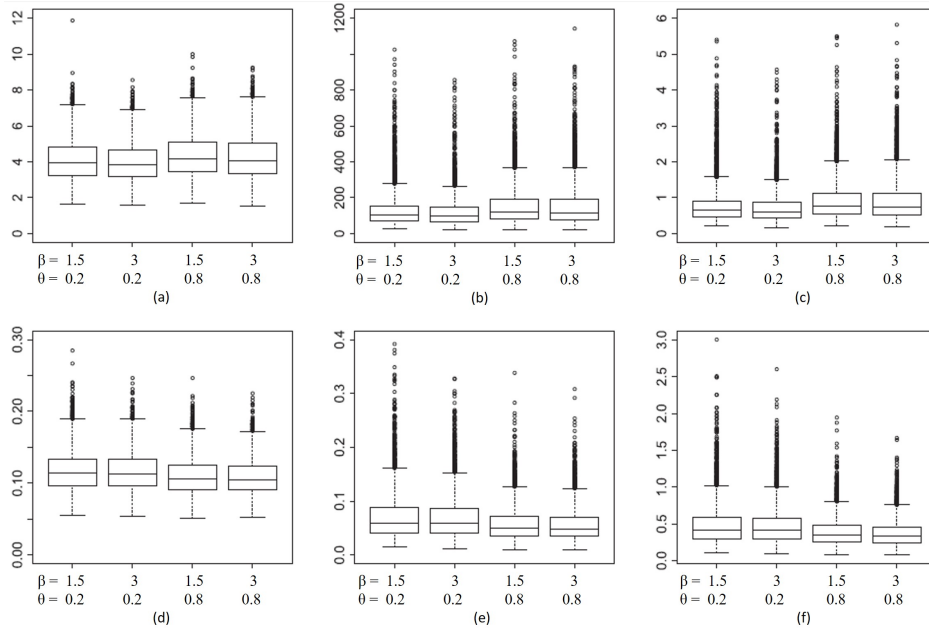


Figura 2.12: Boxplots de 4000 estatísticas de teste simuladas sob o modelo $ARA_\infty - PLP$ para diferentes valores de β e θ , $\eta = 0.05$ e $n = 30$. (a) $KS_m(\hat{\theta})$, (b) $CvM_m(\hat{\theta})$, (c) $AD_m(\hat{\theta})$, (d) $KS_u(\hat{\theta})$, (e) $CvM_u(\hat{\theta})$ e (f) $AD_u(\hat{\theta})$. Fonte: (CHAUVEL et al., 2016, p. 1347)

2.5.3 Construção dos testes por bootstrap paramétrico

Para realizar os testes, Chauvel et al. (2016) comparam as estatísticas de testes para quantis de sua distribuição sob H_0 . Como essas distribuições dependem dos parâmetros do modelo, o cálculo desses quantis não podem ser feitos diretamente. Então, os autores utilizaram um método bootstrap paramétrico.

O procedimento de teste usado pelos autores é adaptado do artigo de Stute et al. (1993) em que os testes de bondade de ajuste bootstrap paramétrico são criados para variáveis aleatórias i.i.d.. Seja $Z(\hat{\theta})$ a estatística de teste genérica. No artigo, $Z(\hat{\theta})$ é uma das estatísticas $KS_m(\hat{\theta})$, $CvM_m(\hat{\theta})$, $AD_m(\hat{\theta})$, $KS_u(\hat{\theta})$, $CvM_u(\hat{\theta})$ ou $AD_u(\hat{\theta})$. Sob H_0 , $Z(\hat{\theta})$ é calculado a partir do conjunto de dados T_1, \dots, T_n gerado a partir de um processo pontual com intensidade $\Phi(\theta)$. O intuito é obter replicações i.i.d. de $Z(\hat{\theta})$ para calcular os quantis empíricos da distribuição estatística. No entanto, θ é desconhecido. Então, θ é estimado por $\hat{\theta}$ e foram simuladas replicações i.i.d. T^*_1, \dots, T^*_n a partir de um processo pontual com

intensidade $\Phi(\hat{\theta})$. Para cada replicação, o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}^*$ e o teste estatístico $Z^*(\hat{\theta}^*)$ pode ser calculado. Pela proximidade de θ e $\hat{\theta}$ é de se esperar uma diferença muito pequena entre os quantis empíricos das distribuições de $Z(\hat{\theta})$ e $Z^*(\hat{\theta}^*)$. O procedimento geral para a aplicação do teste é descrito no seguinte algoritmo (Chauvel et.al, 2016, p. 1348):

Passo 1 - Calcule o EMV $\hat{\theta}$ de θ na classe dos modelos \mathcal{C} e calcule a estatística $Z(\hat{\theta})$ no conjunto de dados T_1, \dots, T_n .

Passo 2 - Para $i = 1$ até L ,

- a) Gerar $T^*_{1,i}, T^*_{2,i}, \dots, T^*_{n,i}$ sob o modelo de intensidade $\Phi(\hat{\theta}) \in \mathcal{C}$.
- b) Calcule o EMV ($\hat{\theta}_i^*$) de $\hat{\theta}$ a partir de $T^*_{1,i}, \dots, T^*_{n,i}$ no modelo \mathcal{C} .
- c) Calcule a estatística $Z_i^* = Z_i^*(\hat{\theta}_i^*)$ a partir de $T^*_{1,i}, \dots, T^*_{n,i}$ e ($\hat{\theta}_i^*$).

Passo 3 - A hipótese H_0 é rejeitada no nível de significância α se $Z(\hat{\theta})$ é maior do que o quantil empírico de ordem $1 - \alpha$ de Z_1^*, \dots, Z_L^* .

As simulações e os cálculos do Passo 2 são a parte de bootstrap paramétrica do algoritmo.

Os autores realizaram algumas simulações e concluíram que os testes AD_m e AD_u são melhores em relação aos outros estudados.

2.6 Testes não paramétricos para Reparo Imperfeito segundo Gi-lardonni et al.(2017)

No contexto da seleção de modelos, antes de passar para a seleção de um melhor modelo dentre os modelos de reparo imperfeito, seria interessante desenvolver um procedimento de teste estatístico geral para permitir responder, em primeiro lugar, se é realmente uma situação de reparo imperfeito ou simplesmente se trata de uma situação de reparo mínimo (Efeito ABAO).

O principal objetivo aqui é testar as seguintes hipóteses nulas e alternativas:

$$H_0: \text{Reparo Mínimo(NHPP)} \text{ versus } H_1: \text{Reparo Não-Prejudicial}$$

Hipótese alternativa significa que reparo melhora o sistema e depende apenas do tempo de falha anterior. Então, a função de intensidade de falha (Equação 2.1) pode ser reescrita como:

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t + \delta t) - N(t) = 1 | t_{N(t)})}{\delta t}, \forall t \geq 0 \quad (2.30)$$

E as hipóteses podem ser redefinidas como:

$$H_0 : \lambda(t) = \phi(t) \text{ versus } H_1 : \lambda(t) < \phi(t) \text{ para algum } t \in (0, T].$$

Onde $\lambda(t)$ é a intensidade de falha do sistema imediatamente antes da ocorrência de falha e $\phi(t)$ é a ROCOF.

Nesta seção, testes não paramétricos desenvolvidos por Gilardoni et al. (2017), são demonstrados para as hipóteses acima. Primeiro, uma estatística de teste é proposta e será mostrado na seção 2.6.1 que a hipótese nula tem distribuição binomial. Em seguida, na seção 2.6.1 é demonstrado o teste multinomial, que é uma extensão do caso binomial.

2.6.1 Teste Binomial Exato

Para dar uma idéia intuitiva do teste, consideremos uma situação envolvendo o acompanhamento de três sistemas. A Figura 2.13 mostra um gráfico de pontos no tempo, onde cada linha corresponde a um sistema e cada símbolo "o" representa um tempo de falha.

Sob a suposição de RM, cada sistema segue um NHPP e todos eles começam ao mesmo tempo, como novo com um aumento $\phi(t)$ em t . Consequentemente, devido a hipótese dos incrementos independentes, após a ocorrência de uma falha, cada sistema tem a mesma probabilidade de ser o próximo a falhar.

Para deixar este ponto claro, vamos observar a Figura 2.13, em particular a Linha vertical em $t = 4$ unidades de tempo. Sob a hipótese nula (RM), é justo dizer que após a ocorrência dessa falha, a próxima terá a mesma probabilidade de ocorrência nos sistemas 1, 2 ou 3.

No entanto, sob a hipótese alternativa (Reparo não prejudicial), se uma falha ocorrer em um dado sistema, o tempo de espera para a próxima falha será maior para este sistema

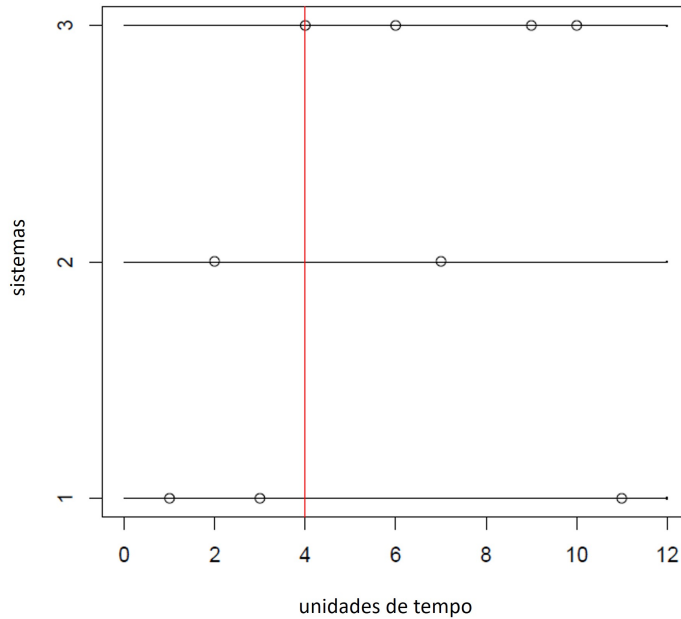


Figura 2.13: Tempos de falha de três sistemas.

do que para os outros. No exemplo, sob H_1 , uma vez que a falha ocorreu no sistema 3, espera-se que a próxima falha terá maior probabilidade de ocorrer nos sistemas 1 ou 2.

Suponha que um tenha dados de $K \geq 2$ sistemas independentes e idênticos que são observados ao longo de um intervalo de tempo comum (ou seja, eles são truncados por tempo no mesmo tempo T). A ideia principal é bastante simples se assumirmos que o último sistema a falhar é o mais confiável. Denotemos os dados sob a forma $\{(t_1, \delta_1), (t_2, \delta_2), \dots, (t_{n_+}, \delta_{n_+})\}$, onde n_+ representa o número total de falhas para todos os sistemas, os t_i 's são os tempos de falha ordenados, também para todos os sistemas e os δ_j 's são indicadores do sistema, de modo que $\delta_j = i$ se a j -ésima falha ocorreu no sistema i ($i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, n_+$), e define-se a estatística

$$B = \sum_{j=1}^{n_+-1} I(\delta_j = \delta_{j+1}) \quad (2.31)$$

Onde,

$$I(\delta_j = \delta_{j+1}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \delta_j = \delta_{j+1} \\ 0, & \text{se } \delta_j \neq \delta_{j+1} \end{cases}$$

Ou seja, se duas falhas consecutivas ocorreram no mesmo sistema, $I(\delta_j = \delta_{j+1}) = 1$ e se

duas falhas consecutivas ocorreram em sistemas diferentes, $I(\delta_j = \delta_{j+1}) = 0$.

No exemplo (Figura 2.13) se observa $n_+ = 9$ falhas para $K = 3$ sistemas e os indicadores de sistemas são $(\delta_1, \dots, \delta_9) = (1, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 3, 1)$. Portanto, $I(\delta_1 = \delta_2) = I(\delta_2 = \delta_3) = I(\delta_3 = \delta_4) = I(\delta_5 = \delta_6) = I(\delta_6 = \delta_7) = I(\delta_8 = \delta_9) = 0$ e $I(\delta_4 = \delta_5) = I(\delta_7 = \delta_8) = 1$. Então, $B = 2$.

Se os sistemas estão sujeitos ao reparo imperfeito, que melhora a confiabilidade, observando dois períodos consecutivos, as falhas no mesmo sistema seriam menos frequentes e, portanto, B tenderia a ser menor nesse caso do que na hipótese de reparo mínimo.

Para determinar os pontos críticos ou p -valores, Gilardoni et al.(2017) mostraram que, sob a hipótese nula de RM e condicionado ao número total de falhas $n_+ \geq 2$, a estatística de teste B , dado que $N_+(t) = n_+$ segue uma distribuição binomial com parâmetros $(n_+ - 1)$ e $p = 1/K$, em que K é o número de sistemas.

Sendo $N_i(T)$, o número total de falhas do sistema i até o tempo T , temos que $N_i(T)$ são variáveis aleatórias i.i.d. de Poisson com a mesma média $\mathbb{E}N_i(T) = \int_0^T \lambda(t)dt$. Segundo Gilardoni et al.(2017) a distribuição condicional de $(N_1(T), \dots, N_K(T))$, dado que $N_+(T) = \sum_{i=1}^K N_i(T) = n_+$ é Multinomial com parâmetros n_+ e vetor de probabilidades $(1/K, \dots, 1/K)$.

Daí, decorre de (Rigdon e Basu , 2000) que, dado que $N_+(T) = n_+$, os tempos de falha para o K sistemas pode ser obtido como se segue:(i) em primeiro lugar, gerar (n_1, \dots, n_K) a partir da distribuição multinomial que foi mencionada acima e (ii) para o i -ésimo sistema, gerar os tempos de falha como as estatísticas de ordem de uma amostra de tamanho n_i da função de distribuição cumulativa $\frac{\Phi(t)}{\Phi(T)} (0 < t < T)$. Agora, o algoritmo é o mesmo que gerar as estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n_+ a partir da mesma f.d.c e, em seguida, alocar cada tempo de falha aleatoriamente em qualquer um dos sistemas. Este argumento, conforme os autores, mostra que, condicionado a $N_+(t) = n_+$, as variáveis aleatórias $\delta_1, \dots, \delta_{n_+}$ são i.i.d. e uniformemente distribuídas no conjunto $1, \dots, K$.

Por isso, também condicionado a $N_+(T) = n_+$, e sabendo que $I(\delta_j = \delta_{j+1})$ é uma variável aleatória que assume 1(sucesso) com probabilidade $p = 1/K$ e 0 (fracasso) com probabilidade $1 - p$, determinamos, segundo Casella e Berger (2002), que essa variável

tem distribuição de Bernoulli com parâmetro $1/K$. Como $B = \sum_{j=1}^{n_+-1} I(\delta_j = \delta_{j+1})$, então temos que B é a soma de variáveis aleatórias de Bernoulli. Como a soma de $n_+ - 1$ variáveis aleatórias de Bernoulli i.i.d com parâmetro $1/K$ possui distribuição Binomial (Casella e Berger, 2002) podemos concluir que $B|N_+(t) = n_+$ segue uma distribuição Binomial($n_+ - 1, 1/K$).

Uma vez que, sob os modelos RI não prejudiciais, esperamos que B seja menor que sob RM , definimos o p -valor do teste como a probabilidade da cauda esquerda da distribuição Binomial($n_+ - 1, 1/K$).

Assim, o teste de hipóteses pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$H_0 : p = 1/K \quad \text{versus} \quad H_1 : p < 1/K$$

No capítulo 3 serão abordados experimentos Monte Carlo para obter uma visão do tamanho e poder do teste binomial contra algumas alternativas na classe de modelos ARA e ARI .

A estatística de teste B ignora o fato de que a confiabilidade dos sistemas que falharam antes do atual também são ordenados de acordo com seu último fracasso. O teste multinomial abordado a seguir leva em consideração esse fator.

2.6.2 Teste Multinomial

Seguindo o exemplo dado anteriormente, pode-se ilustrar a idéia do teste multinomial. No teste Binomial Exato, conforme já discutido, foram observados $n_+ = 9$ falhas para $K = 3$ sistemas e os indicadores de sistemas são $(\delta_1, \dots, \delta_9) = (1, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 3, 1)$, de modo que $B = 2$.

Para o teste binomial, nota-se, por exemplo, que as contribuições da quarta e oitava falhas para B são nulas, pois $I(\delta_4 = \delta_3) = I(\delta_6 = \delta_7) = 0$. No entanto, levando em consideração que o último sistema a falhar se torna o mais confiável, a situação é um pouco diferente porque, após a terceira falha, o sistema 3 era menos confiável dos três, enquanto que, após a sexta falha, o sistema 3 era apenas o segundo menos confiável (isto é, após a sexta falha,

o sistema 3 era menos confiável do que o sistema 2, mas mais confiável que o sistema 1). Consequentemente, podemos calcular uma estatística vetorial $M = (m_0, m_1, m_2)$, onde as m_i 's contam, respectivamente, quantas vezes os sistemas mais confiável, o segundo mais confiável e menos confiável falharam.

Para definir a estatística multinomial $M = (m_0, \dots, m_{K-1})$, é mais fácil usar as falhas do sistema ordenadas $\{t_{ij} : 1 \leq i, 1 \leq j \leq n_i\}$. Seja n_- o menor índice, de modo que exatamente $K - 1$ sistemas tenham falhado até t_{n_-} . Para cada falha $t_{ij} > t_{n_-}$, seja r_{ij} o número de sistemas que tenham pelo menos uma falha entre $t_{i,j-1}$, onde define-se $t_{i,0} = 0$. Note que são contados sistemas e não falhas. Agora, para $k = 0, \dots, K - 1$, define-se $m_k = \sum_{(i,j):t_{i,j}>t_{n_-}} I(r_{ij} = k)$.

No exemplo, a terceira falha contribui para uma unidade m_1 , a quarta falha contribui para uma unidade m_2 , a quinta falha para uma unidade de m_0 , a sexta para uma unidade de m_2 , a sétima para uma unidade de m_1 , a oitava para uma unidade de m_0 e a nona para uma unidade de m_2 , onde $M = (2,2,3)$. Note que, para calcular M , é preciso esperar até que todos os sistemas tenham sido ordenados, ou seja, até que $K - 1$ sistemas já tenham falhado. No exemplo, isso significa que começamos a contar a partir da terceira falha ($n_- = 2$).

Sob reparo mínimo, a distribuição condicional de M dado n_- e n_+ é simples a partir da discussão da seção anterior, uma vez que $(\delta_{n_-} + 1, \dots, \delta_{n_+})$ são condicionalmente distribuídos com uma amostra de tamanho $m_+ = n_+ - n_-$ da distribuição uniforme nos inteiros $1, \dots, K$. Portanto, para (i, j) tal que $t_{ij} > T_{n_+}$, os vetores $U_{ij} = (I(r_{ij} = 0), \dots, I(r_{ij} = K - 1))$ são multinomiais i.i.d. com $n = 1$ e probabilidades $(p_0, \dots, p_{K-1}) = (1/K, \dots, 1/K)$. A distribuição desejada para M segue agora, pois $M = \sum_{(i,j):t_{i,j}>t_{n_-}} U_{ij}$. Note que estes argumentos dá a distribuição condicional de M dados n_- e n_+ , mas desde que essa distribuição dependa apenas de $m_+ = \sum_{k=0}^{K-1} m_k = n_+ - n_-$, esta deve ser também a distribuição condicional dado m_+ .

Para determinar a região crítica, observa-se que, sob a suposição do reparo imperfeito, espera-se que as contagens m_0, \dots, m_{K-1} estejam aumentando. Ou seja, como o reparo irá melhorar o sistema de acordo com um coeficiente de reparo θ , temos que quanto mais recente determinado sistema tiver falhado, melhor ele estará em relação aos que falharam há mais tempo e menor será a probabilidade do mesmo falhar.

Chacko (1963 , 1966) considera testes multinominais das hipóteses $H_0 : p_0 = \dots = p_{K-1} = 1/K$ contra hipóteses alternativas $H_1 : p_0 \leq \dots \leq p_{K-1}$ com pelo menos uma desigualdade estrita. O teste baseia-se numa estatística χ^2 modificada na forma:

$$\bar{\chi}^2 = Km_+ \sum_{k=0}^{K-1} \left(\tilde{p}_k - \frac{1}{K} \right)^2 \quad (2.32)$$

onde, para $k = 0, \dots, (K - 1)$, \tilde{p}_k é o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de p_k sob H_1 . Mais precisamente, os \tilde{p}_k 's são as encostas do GCM do poligonal formado pelos pontos $(k, \sum_{i=0}^k \hat{p}_i)$ ($k = 0, \dots, K - 1$) e $\hat{p}_k = m_k/m_+$'s são os EMVs sem restrições da probabilidades das classes.

Para exemplificar melhor o teste proposto consideremos um exemplo dado por Gilardoni et al.(2017) para correias transportadoras. No exemplo $n_+ = 157$ falhas, $n_- = 8$, então $m_+ = 157 - 8 = 149$. O M observado é $m_{obs} = (11,13,28,27,22,21,27)$. Os EMV's sem restrições são $(\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_6) = m_{obs}/149$. O poligonal e do GCM são mostrados na Figura 2.14) , do qual obtêm-se os EMV's restritos como $\tilde{p}_0 = 11/149$, $\tilde{p}_1 = 13/149$, $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_3 = \tilde{p}_4 = \tilde{p}_5 = 24.5/149$ e $\tilde{p}_6 = 27/149$.

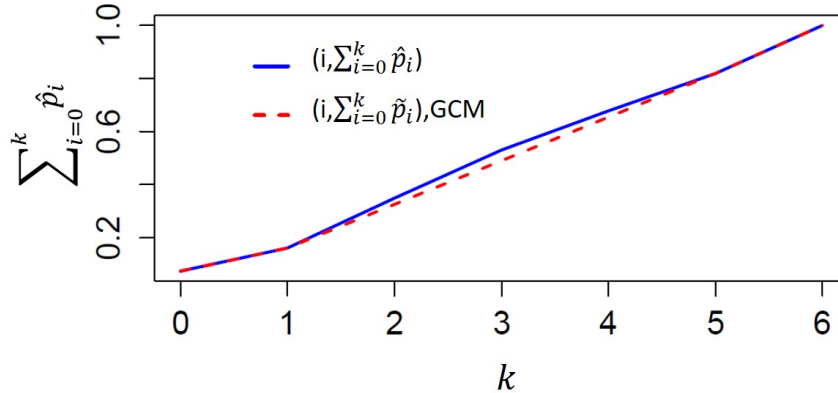


Figura 2.14: EMV cumulativo sem restrições (\hat{p}_k , linha contínua) e restrito (\tilde{p}_k , linha tracejada) para os dados das correias transportadoras. Fonte: (GILARDONI et al., 2017, p. 10)

A ideia do EMVs restritos, segundo Chacko(1966) é que as frequências observadas m_{obs} sejam ordenadas de modo que $m_k < m_{k+1}$. Portanto, se $m_k > m_{k+1}$, calcula-se a média $(m_k + m_{k+1})/2$. A série de valores k agora é reduzido a $k - 1$ valores dos quais $k - 2$ são inalterados, mas um é a média de duas frequências originais. O procedimento

acima é continuado até um conjunto ordenado de quantidades monótonas não decrescentes (frequências originais ou média obtida de frequências). No exemplo, temos que $m_2 > m_3$ e $m_4 > m_5$, fazendo a média de m_4 e m_5 , obtém-se 21.5 e reduz-se a série de valores para (11,13,28,27,21.5,27). Nota-se que o quarto valor é maior que o quinto. Assim, forma-se a média desses dois valores, dando peso 2 ao valor 21.5. Assim, reduz-se a série de valores agora para (11,13,28,23.33,27). Ainda observa-se que o terceiro valor é maior que o quarto valor. Portanto, calcula-se a média desses dois valores, dando peso 3 ao valor 23.33 (pois representa a média de 3 frequências originais). Por fim, a série de frequências se torna (11,13,24.5,27), com 3 frequências originais e 24.5 representando a média de 4 frequências originais.

Essas estimativas restritas podem ser conectadas na equação 2.32 para obtenção de:

$$\bar{\chi}^2 = 7 \times 149 \times \left[\left(\frac{11}{149} - \frac{1}{7} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{13}{149} - \frac{1}{7} \right)^2 \right] + 4 \times \left[\left(\frac{24.5}{149} - \frac{1}{7} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{27}{149} - \frac{1}{7} \right)^2 \right] = 11.671$$

Para calcular os p -valores, Chacko (1963) mostra que, sob H_0 (isto é, RM), os testes estatísticos $\bar{\chi}^2$ são assintoticamente distribuídos como uma mescla de χ_{n-1}^2 central com pesos $w_{n,K}$. Os pesos $w_{n,K}$ representam a probabilidade do GCM mencionado acima, dado exatamente n inclinações diferentes ($n = 2, \dots, K$). Chacko (1963) explica que $w_{n,K}$ indica a probabilidade de que o processo de ordenação que faz com $m_k < m_{k+1}$ renda exatamente n distintos m_k 's.

Por exemplo, suponhamos ter um peso $w_{6,3}$, ou seja, houveram 6 ocorrências de falhas em 3 sistemas no total. Porém, de modo a garantir que $m_k < m_{k+1}$, foram tiradas as médias de algumas frequências, K agora é reduzido a 3 valores dos quais alguns são inalterados, mas alguns é a média de duas frequências originais. O $w_{6,3}$ vai mensurar as possibilidades de frequências e médias que podem ser feitas.

Para calcular $w_{6,3}$ Chacko (1963) ilustra um método para listar todas as partições de K em n partes. Comece com uma partição inicial com unidade para cada um dos primeiros $n - 1$ elementos e $K - n - 1$ como o último elemento. Para obter uma nova partição, passe os elementos do último da direita para a esquerda, parando no primeiro elemento h , que é menor em pelo menos duas unidades do que o último elemento. Sem alterar qualquer elemento à esquerda de h , escreva $h - 1$ no lugar de h e cada elemento à direita

de h , exceto que o último elemento é tomado de modo a dar a soma K . Continue esse procedimento até chegar a uma partição na qual nenhuma parte difere do último elemento por mais de uma unidade.

Por exemplo, se $K = 6$ e $n = 3$, então as classes possíveis são

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Portanto,

$$w_{6,3} = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3!} \times \frac{1}{8} = \frac{225}{6!}$$

As provas e teoremas nos quais se baseiam o cálculo do método expresso acima é encontrado com detalhes em Chacko(1963).

Uma vez que os pesos são obtidos, o p -valor é calculado como

$$\sum_{n=2} K w_{n,K} \mathbb{P} [\chi_{n-1}^2 \geq \bar{\chi}_{obs}^2] \quad (2.33)$$

Onde χ_{n-1}^2 é uma variável aleatória com a distribuição qui-quadrada com $n - 1$ graus de liberdade e $\mathbb{P} [\chi_{n-1}^2 \geq \bar{\chi}_{obs}^2]$ é a probabilidade de que exceda $\bar{\chi}_{obs}^2$, para n grande, aproximadamente, num nível de significância α do teste sob H_0 (Chacko, 1966).

No capítulo 3 serão investigados, através de estudos de simulação Monte Carlo, o tamanho e poder dos testes propostos Binomial e Multinomial propostos, bem como discutidos novas abordagens e estruturas para tais testes.

3 Estudos Monte Carlo para Testes de Hipóteses

Neste capítulo serão abordados os estudos empíricos dos testes Binomial e Multinomial, utilizando a simulação Monte Carlo.

3.1 Estudos Empíricos: Tamanho dos Testes

Esta seção mostra os resultados das simulações de Monte Carlo implementadas usando como hipótese nula um NHPP indexado por uma função de intensidade da forma PLP, ou seja:

$$H_0: \text{Reparo Mínimo(NHPP), PLP versus } H_1: \text{Reparo Não-Prejudicial}$$

Foram executadas simulações de Monte Carlo para alguns cenários, até que fossem encontradas 10 000 ocorrências do número global de falhas esperado (N_+). Os cenários incluem $\eta = 1$; $\beta = 1.5$ e $\beta = 2$; T (tempo de truncamento) = 5 e 10; K (número de sistemas) = 5. Os resultados são apresentados na Tabela 1, para testes binomial e multinomial, respectivamente.

Tabela 3.1: Simulação monte carlo para dados empíricos dos testes binomial e multinomial

Cenários			N+	Nível significância			
k	T	β		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.1$	
				Binomial	Multinomial	Binomial	Multinomial
5	5	1.5	56	0.0245	0.0561	0.0548	0.1117
5	5	2.0	125	0.0497	0.0532	0.0770	0.1033
5	10	1.5	158	0.0355	0.0541	0.0827	0.1063
5	10	2.0	500	0.0423	0.0547	0.0798	0.1083
5	15	1.5	290	0.0456	0.0520	0.0817	0.1043
5	15	2.0	1125	0.0450	0.0492	0.1003	0.1024

Para os três cenários do teste multinomial, os tamanhos descritivos estão bem próximos dos valores nominais, sendo que os tamanhos descritivos são, na maior parte dos casos, maiores que os nominais.

Para o teste binomial, os tamanhos descritivos estão muito próximos dos valores nominais, com exceção do primeiro cenário. Os tamanhos descritivos são menores que os nominais em todos os cenários.

Na próxima seção serão investigados, através de estudos de simulação Monte Carlo, o poder dos testes propostos.

3.2 Estudos Empíricos: Poder dos Testes

O poder desses testes são avaliados sob a hipótese alternativa usando as classes de modelos $ARA_1 - PLP$ e $ARI_1 - PLP$, para $\theta = 0.5$ e $\theta = 0.1$. Foram realizadas simulações monte carlo até que fossem obtidos 10.000 ocorrências do número global de falhas esperado dos testes Binomial e Multinomial. Os cenários incluem $\eta = 1, \beta = 1.5$ e $\beta = 2$; T (tempo de truncamento) = 5, 10 e 15 e K (número de sistemas) = 5.

Apesar do teste ser condicionado ao número total de falhas n_+ , foram investigados os valores do teste para n_+ próximos ao n_+ esperado. Os gráficos da Figura 3.1 mostram o comportamento do poder dos testes em relação à variação do n_+ para os modelos citados acima, em um cenário específico, onde $\eta = 1, \beta = 1.5$, $T = 10$, $K = 5$ e o nível de significância $\alpha = 0.1$.

Os gráficos mostram que, para todos os casos, o poder do teste multinomial é maior que o poder do teste binomial.

As Tabelas 3.2 a 3.5 mostram os resultados da simulação na íntegra.

Os resultados mostram que (bem como já foi evidenciado na Figura 3.1, o poder do teste multinomial é maior que o poder teste binomial para todos os cenários. Além disso, temos que o poder do teste é maior para $\theta = 0.1$ em relação à $\theta = 0.5$ e para todos os cenários, o poder do teste é maior quando $\beta = 2.0$, em comparação à $\beta = 1.5$. O poder dos testes é maior ao nível de significância $\alpha = 0.1$ em relação à $\alpha = 0.05$. De fato, quanto maior o nível de significância, maior o poder do teste. Se aumentamos o nível de significância, reduzimos a região de aceitação. Como resultado, temos maior chance de rejeitar a hipótese nula. Isto significa que temos menos chance de aceitar a hipótese nula quando ela é falsa, isto é, menor chance de cometer um erro do tipo II (aceitar a hipótese

Tabela 3.2: Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARA_1(\theta = 0.5)$ do teste binomial e multinomial.

Cenários			N+	Nível significância			
k	T	β		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.1$	
				Binomial	Multinomial	Binomial	Multinomial
5	5	1.5	44	0.0245	0.0892	0.0703	0.1715
5	5	2.0	71	0.0878	0.1256	0.1551	0.2236
5	10	1.5	117	0.0432	0.0887	0.1191	0.1588
5	10	2.0	262	0.0776	0.1091	0.1394	0.1957
5	15	1.5	212	0.0589	0.0853	0.1185	0.1556
5	15	2.0	576	0.0617	0.0852	0.1363	0.1600

Tabela 3.3: Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARA_1(\theta = 0.1)$ do teste binomial e multinomial.

Cenários			N+	Nível significância			
k	T	β		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.1$	
				Binomial	Multinomial	Binomial	Multinomial
5	5	1.5	31	0.1690	0.2572	0.1690	0.4063
5	5	2.0	34	0.2948	0.6167	0.5242	0.7607
5	10	1.5	72	0.1885	0.3394	0.2962	0.4867
5	10	2.0	88	0.3529	0.7507	0.6135	0.8583
5	15	1.5	120	0.2052	0.3660	0.2878	0.5168
5	15	2.0	164	0.3917	0.7701	0.5682	0.8749

Tabela 3.4: Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARI_1(\theta = 0.5)$ do teste binomial e multinomial.

Cenários			N+	Nível significância			
k	T	β		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.1$	
				Binomial	Multinomial	Binomial	Multinomial
5	5	1.5	33	0.0631	0.1108	0.1650	0.2007
5	5	2.0	71	0.0853	0.1206	0.1499	0.2189
5	10	1.5	86	0.0571	0.0989	0.1066	0.1814
5	10	2.0	262	0.0765	0.0986	0.1362	0.1829
5	15	1.5	153	0.0540	0.0929	0.1195	0.1719
5	15	2.0	577	0.0758	0.0872	0.1272	0.1640

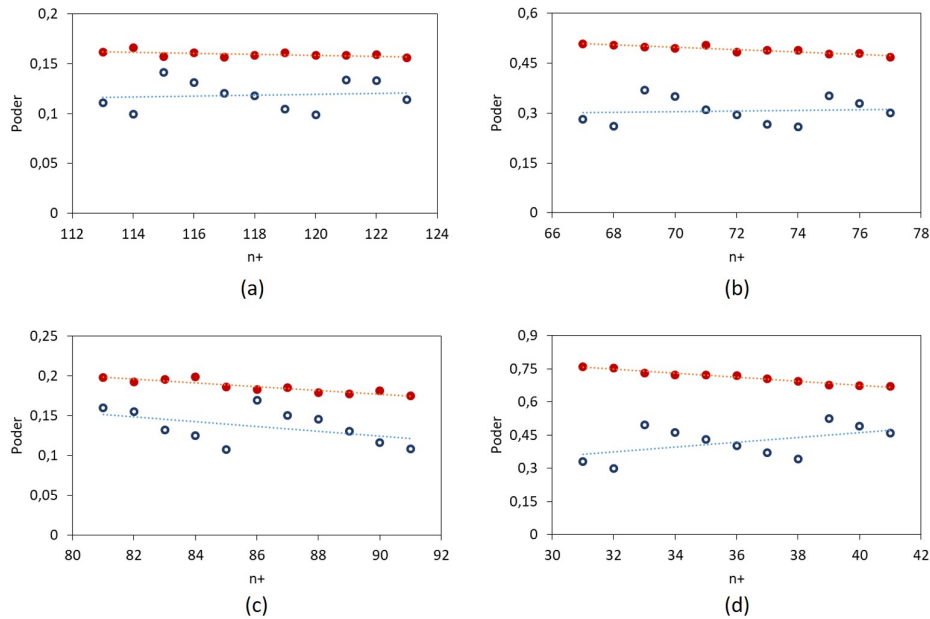


Figura 3.1: Poder dos testes binomial(\circ) e multinomial(\bullet) em relação ao n_+ para (a) ARA_1 com $\theta = 0.5$ (b) ARA_1 com $\theta = 0.1$ (c) ARI_1 com $\theta = 0.5$ (d) ARI_1 com $\theta = 0.1$

nula, no caso desta hipótese ser falsa). Então, o poder do teste aumenta.

A função poder do teste é a probabilidade de rejeitarmos H_0 , sendo H_0 falsa. De forma ideal, nós gostaríamos de rejeitar a hipótese H_0 para todo valor de $\lambda(t)$ em H_1 com probabilidade 1, e da mesma forma, nós gostaríamos de não rejeitar (aceitar) a hipótese H_0 para todo valor de $\lambda(t)$ em H_0 com probabilidade 1.

Como as simulações monte carlo foram geradas para os modelos de Reparo Imperfeito($ARA_1 - PLP$ e $ARI_1 - PLP$), então temos que a hipótese alternativa H_1 é a verdadeira. Portanto, os testes devem resultar em um poder superior ao nível de significância α .

Observando as Tabelas 3.2 a 3.5, temos que dos 96 cenários simulados, apenas 3 não obtiveram poder superior ao nível de significância α correspondente, sendo os três para teste Binomial no $ARA_1 - PLP$, $\theta = 0.5$ cenários $k = 5, T = 5, \beta = 1.5$ e $\alpha = 0.05$; $k = 5, T = 5, \beta = 1.5$ e $\alpha = 0.1$; $k = 5, T = 10, \beta = 1.5$ e $\alpha = 0.05$. Portanto, podemos validar os testes Binomial e Multinomial. Porém, o teste multinomial é mais confiável (para todos os cenários o poder foi maior que o α) e tem maior poder em relação ao teste binomial.

Tabela 3.5: Resultados da simulação de Monte Carlo para o poder no $ARI_1(\theta = 0.1)$ do teste binomial e multinomial.

Cenários			N+	Nível significância			
k	T	β		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.1$	
				Binomial	Multinomial	Binomial	Multinomial
5	5	1.5	18	0.1693	0.3995	0.1693	0.5939
5	5	2.0	34	0.2840	0.6098	0.5103	0.7545
5	10	1.5	36	0.1998	0.5588	0.4013	0.7234
5	10	2.0	88	0.3552	0.7551	0.6139	0.8649
5	15	1.5	54	0.2933	0.6103	0.4551	0.7532
5	15	2.0	164	0.3918	0.7645	0.5750	0.8718

O próximo passo será aplicar o teste de hipóteses à um banco de dados real, que contém falhas do rotor de bombas de polpa.

4 Análise dos dados de falhas dos rotores das bombas de polpa

Este capítulo apresenta uma análise da situação prática descrita no Capítulo 1. Trata-se portanto de falhas dos rotores das bombas de polpa de uma empresa mineradora. O objetivo da empresa de mineração é projetar um plano de manutenção eficiente que inclua ações de manutenção preventiva para minimizar paradas e custos inesperados. Para esse fim, é essencial a identificação de um modelo que incorpore os efeitos do envelhecimento e reparação e que permita a obtenção de informações sobre a confiabilidade dos rotores.

Para construir as análises adequadas à concepção da política ótima de manutenção preventiva ao problema em estudo, foram utilizados os pacotes desenvolvidos em linguagem R por Madureira (2015) e Fernandes (2015).

O presente capítulo apresenta as etapas para o atendimento da finalidade desse trabalho e está dividido em quatro seções.

A primeira seção 4.1, corresponde à análise preliminar dos dados. Nessa seção serão apresentados os gráficos de Eventos e de Média Acumulada. Por meio desses gráficos é possível fazer uma caracterização dos momentos em que houve falhas no processo em estudo e ainda, verificar se há ou não indícios de que o sistema estaria se degenerando com o passar do tempo.

Na seção 4.2 são aplicados os testes de hipóteses propostos por Gilardoni et al. (2018), denominados teste binomial e teste multinomial.

Em seguida, as estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros dos modelos são apresentadas na seção 4.3. Nesta seção são aplicadas metodologias de seleção do modelo com melhor qualidade de ajuste baseadas na verossimilhança e no peso da evidência e aplicado o método de bondade de ajuste proposto do Toledo et al. (2015).

Por fim, na seção 4.4 é feita a determinação da periodicidade ótima de manutenção preventiva para o problema dos rotores.

4.1 Análise Preliminar dos Dados

O conjunto de dados consiste em registros de falhas em uma amostra de cinco bombas de polpa da empresa de mineração. Essas falhas estavam ligadas diretamente ao rotor. Cada bomba aqui será considerada como um sistema. Esses sistemas são considerados reparáveis, uma vez que após uma falha, não é necessária sua substituição completa para o reestabelecimento de suas funções.

Os dados foram coletados de junho de 2016 a maio de 2017 ($T = 6\ 432$ horas), quando 175 falhas no total foram observadas, cada uma seguida por um reparo (corretivo). Para cada sistema, houve uma manutenção preventiva no tempo $T = 5\ 000$ horas, que tem um efeito de reparo perfeito. Ou seja, a cada $T = 5\ 000$ horas, cada sistema passa por uma manutenção preventiva, que torna o sistema "tão bom quanto novo". Portanto, após a manutenção preventiva, é como se os cinco sistemas parassem de operar e cinco novos sistemas entrassem em operação. Portanto, iremos primeiramente analisar estes dados como se fossem dois conjuntos de dados diferentes, onde: (1) Conjunto de dados truncado no tempo $T = 5\ 000$ horas, onde é realizada a manutenção preventiva (Será referido no texto como *rotores₁*) (2) Análise dos cinco sistemas como novos (visto que a manutenção preventiva dos rotores tem efeito de reparo perfeito), iniciando no tempo $T = 0$ horas até $T = 1\ 432$ horas (que é o tempo decorrido de $T = 5\ 000$ a $T = 6\ 432$ horas). Então teremos o conjunto de dados 2, que será citado ao longo do texto como *rotores₂*. Esses dados serão analisados separadamente para analisarmos o comportamento dos mesmos isoladamente. Como a equipe de Engenharia informou que a cada $T = 5\ 000$ horas é realizada uma manutenção preventiva com efeito AGAN, espera-se que os resultados encontrados para os dois conjuntos de dados sejam próximos. Por fim, os dados serão analisados juntos (será citado ao longo do texto como *rotores_{Geral}*), como se houvessem 10 sistemas iniciando no mesmo tempo 0 (5 operando até $T = 5\ 000$ horas e 5 operando até $T = 1\ 432$ horas). Mais uma vez, espera-se que os resultados encontrados para *rotores₁*, *rotores₂* e *rotores_{Geral}* sejam similares.

Além das manutenções preventivas a cada $T = 5\ 000$ horas, os sistemas tiveram algumas manutenções, que foram oriundas de paradas programadas totais de toda a usina de beneficiamento. Assim, como os sistemas estavam parados, foram feitas verificações de alinhamento e lubrificação de acoplamento, que se caracterizam por reparo corretivo.

A Figura 4.1 mostra eventos (falhas) versus o tempo de operação (em horas), onde cada linha corresponde a uma unidade de rotor, e cada símbolo "▲" representa um tempo de falha. Os dados para as cinco bombas foram truncados por tempo ($T = 5\,000$ horas), onde ocorreu uma manutenção preventiva. Como a manutenção preventiva neste caso tem efeito de reparo perfeito, os cinco sistemas iniciam como novos, como ilustra a Figura 4.2 e são truncados no tempo $T = 1\,432$ horas, visto que os dados foram coletados até $T = 6\,432$ horas. A Figura 4.3 mostra o mesmo gráfico para o conjunto de geral. Visualmente, nenhuma tendência em falhas ao longo do tempo pode ser observada a partir destes gráficos.

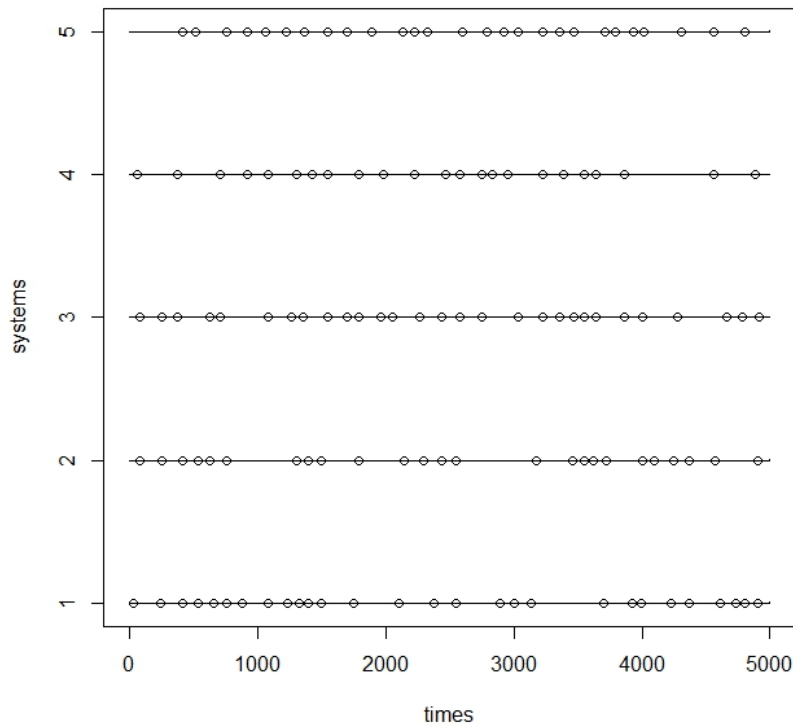


Figura 4.1: Tempos de falhas de 5 rotores ($rotors_1$), todas truncadas em $T = 5\,000$ horas.

As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 exibem a função média acumulada do número de falhas (MCF). A MCF é um estimador não paramétrico da função $\Phi(t) = E[N(t)]$ do processo pontual. Por meio desse gráfico é possível verificar qual o valor esperado de falhas até certo instante de tempo.

Globalmente, estas curvas não são nem côncavas nem convexas, de modo que não há ne-

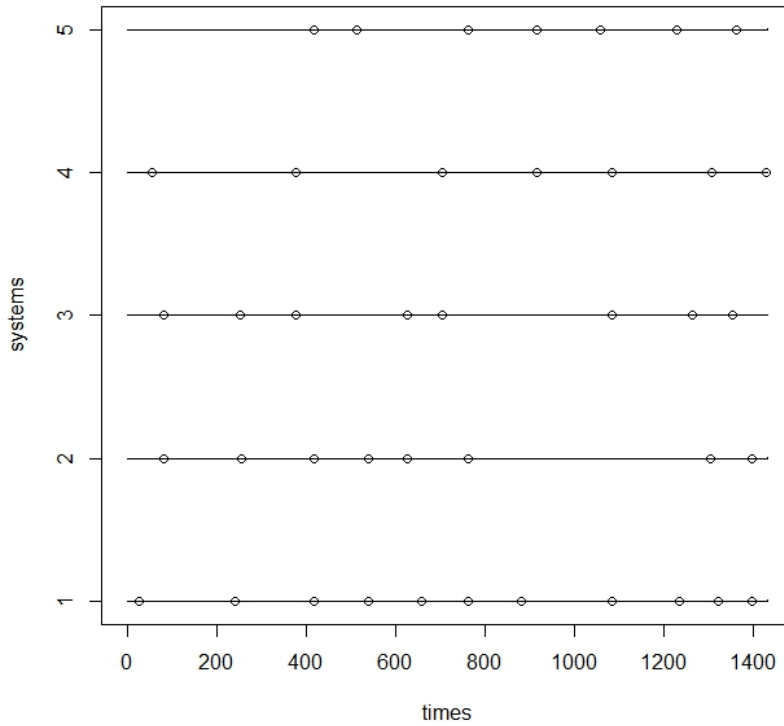


Figura 4.2: Tempos de falhas de 5 rotores (*rotor₂*), todas truncadas em $T = 1\ 432$ horas.

nhuma indicação de melhoria nem de degradação do equipamento. Como parece bastante linear, um HPP poderia ser um modelo conveniente para estes sistemas, caso a presente pesquisa estivesse interessada em conceber uma política de manutenção com a suposição de reparo mínimo. Isso significaria dizer que, ao longo do tempo, os intervalos entre as falhas não aumentariam, tampouco diminuiriam. Se $\lambda(t)$ fosse modelada como uma Lei de Potência (equação 2.9), matematicamente poderíamos expressar $\lambda(t)$ como uma constante e, como consequência, o parâmetro de forma $\beta = 1$. Porém, nesse trabalho, submete-se o processo de falhas a manutenções com a suposição de reparo imperfeito. Na literatura referente a reparos imperfeitos, não há correlação entre a concavidade da curva da função média acumulada e a classificação do sistema em degenerativo ou não. Já que iremos utilizar a forma funcional PLP, isso será verificado quando estivermos discutindo o valor estimado do parâmetro β .

Se combinarmos as 133 falhas das cinco bombas ocorridas até $T = 5000$ horas (*rotor₁*), as 42 falhas ocorridas após $T = 1\ 432$ horas (*rotor₂*) e as 175 falhas ocorridas após T

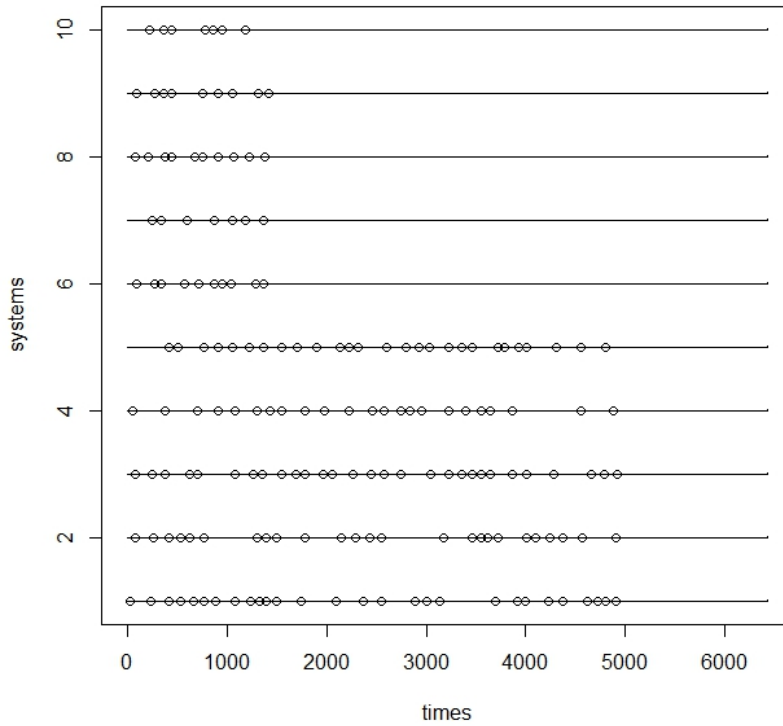


Figura 4.3: Tempos de falhas de 5 rotores ($rotores_{Geral}$), todas truncadas em $T = 6432$ horas.

$= 6432$ horas ($rotores_{Geral}$) e calcularmos os tempos entre falhas para este processo, o teste de Cramér-von-Mises (modelagem NHPP com função intensidade PLP dos dados ou rejeição desta hipótese)(Madureira, 2014) dá um p -valor de 0.9815 para $rotores_1$, um p -valor de 0.8751 para $rotores_2$ e um p -valor de 0.8547 para $rotores_{Geral}$. Ou seja, para os três conjuntos de dados, há evidências fortes que o histórico de falhas é oriundo de um NHPP com função intensidade PLP.

Através dos dois testes apresentados já podemos averiguar divergências nas análises. Levando isso em consideração, se torna relevante o estudo e aplicação dos testes Binomial e Multinomial para averiguar se os dados se tratam de Reparo Mínimo ou Reparo Imperfeito.

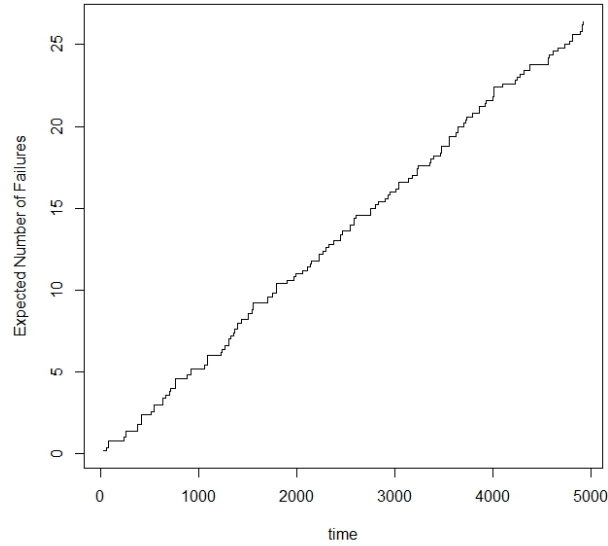


Figura 4.4: Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 5\,000$ horas para dos dados *rotores₁*.

4.2 Testes Binomial e Multinomial

Verifica-se primeiro um processo com PLP com intensidade $\lambda(t) = \beta(t/\eta)^{\beta-1}/\eta$ e função média $\Phi(t) = \mathbb{E}N(t) = (t/\eta)^\beta$. De fato, a estimativa de Nelson-Aalen mostrado nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 sugerem que uma HPP (ou seja, o caso especial $\beta = 1$) pode ser um bom ajuste. Os EMV's para os dados de *rotores₁*, *rotores₂* e *rotores_{Geral}* são mostrados nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente, onde observamos um $\hat{\beta} = 1.012$ para PLP com $IC(\alpha = 0.05) : [0.854, 1.201]$ (para *rotores₁*), $\hat{\beta} = 1.159$ para PLP $IC(\alpha = 0.05) : [0.854, 1.574]$ (para *rotores₂*) e $\hat{\beta} = 1.010$ para PLP $IC(\alpha = 0.05) : [0.854, 1.201]$ (para *rotores_{Geral}*). Apesar do $\hat{\beta} = 1$ estar dentro do intervalo de confiança, o que sugere que pode se tratar de um HPP, vamos averiguar com os testes binomial e multinomial que essa análise não é suficiente.

Aplicando o Teste Binomial aos dados de bomba de polpa (*rotores₁*) truncados em $T = 5000$ horas, $K = 5$ sistemas e $N_+ = 133$ falhas temos que:

$$B = 4, p\text{-valor} = 1.05 \times 10^{-8}$$

A estatística $B = 4$ nos informa que, do total de 133 falhas globais ordenadas, apenas 4

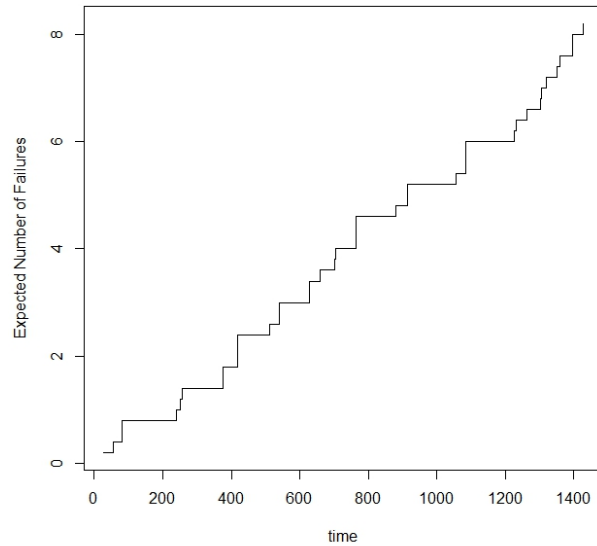


Figura 4.5: Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 1\,432$ horas para os dados *rotores₂*.

ocorreram consecutivamente no mesmo sistema. Isso sugere que, após dado sistema ser reparado, ele se torna mais confiável que os outros. Tal fato nos induz a entender que esse reparo melhora o sistema (Reparo Imperfeito). Como o p -valor $= 1.05 \times 10^{-8}$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Além disso, quanto menor for o p -valor, mais "distante" estamos da hipótese nula H_0 . Como o p -valor encontrado é muito pequeno, temos fortes evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito.

Aplicando o Teste Multinomial de bomba de polpa (*rotores₁*) truncados em $T = 5000$ horas, $K = 5$ sistemas e $N_+ = 133$ falhas temos que:

$$n_+ = 128, n_- = 4, M = (4, 12, 37, 35, 40), \bar{\chi}^2 = 42, p\text{-valor} = 7.726597 \times 10^{-10}, (\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_4) = (0.03125, 0.09375, 0.28125, 0.28125, 0.31250).$$

O $n_- = 4$ significa que, após ordenados os tempos de falha globais, foram necessárias que 4 falhas ocorressem para que $K - 1$ sistemas falhassem e fosse possível classificar os sistemas de menos confiável a mais confiável.

O $M = (4, 12, 37, 35, 40)$ indica que o sistema mais confiável falhou 4 vezes, o segundo mais confiável falhou 12 vezes, o terceiro mais confiável falhou 37 vezes, o quarto mais

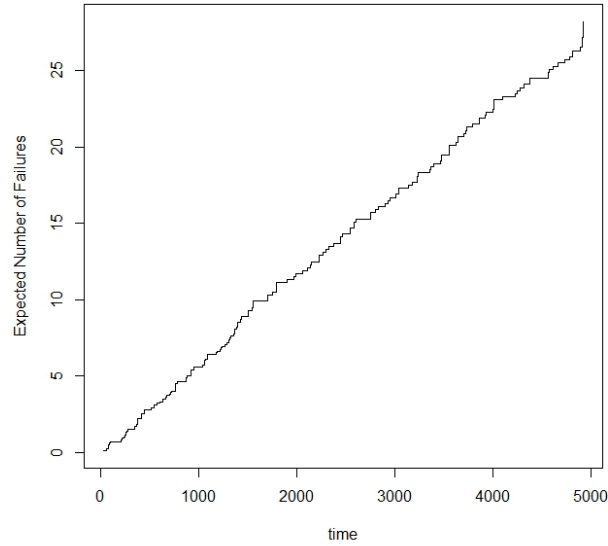


Figura 4.6: Estimativa Nelson-Aalen do número esperado de falhas contra o tempo, com tempo de truncamento $T = 6\,432$ horas para os dados $rotores_{Geral}$.

confiável falhou 35 vezes e o menos confiável falhou 40 vezes. Como discutimos na seção 2.6.2, quando temos um reparo imperfeito, esperamos que o sistema menos confiável falhe mais vezes. Além disso, temos que o ideal é que $m_k < m_{k+1}$ e quando isso não ocorre, são calculados os EMVs restritos. No caso dos $rotores_1$, temos que $m_2 > m_3$ e a correção dessa diferença foi feita obtendo os $(\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_4) = (0.03125, 0.09375, 0.28125, 0.28125, 0.31250)$. Observemos que \tilde{p}_2 e \tilde{p}_3 tem o mesmo valor, visto que foi tirada a média entre eles. De qualquer forma, o M indica uma tendência do sistema menos confiável falhar, o que nos sugere que o reparo seja imperfeito. De fato, o p -valor $= 7.726597 \times 10^{-10}$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Como já mencionado, quanto menor for o p -valor, mais "distante" estamos da hipótese nula H_0 . Como o p -valor encontrado é muito pequeno (e ainda menor que o observado no teste binomial), temos ainda mais evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito.

Aplicando o Teste Binomial aos dados de bomba de polpa ($rotores_2$) truncados em $T = 1432$ horas, $K = 5$ e $N_+ = 42$ temos que:

$$B = 3, p\text{-valor} = 0.02846$$

A estatística $B = 3$ nos informa que, do total de 42 falhas globais ordenadas, apenas 3 ocorreram consecutivamente no mesmo sistema. Isso sugere que, após dada sistema ser reparado, ele se torna mais confiável que os outros. Tal fato nos induz a entender que esse reparo melhora o sistema (Reparo imperfeito). Como o $p - valor = 0.02846$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Portanto, temos fortes evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito, assim como o primeiro conjunto de dados.

Aplicando o teste multinomial de bomba de polpa ($rotores_2$) truncados em $T = 1432$ horas, $K = 5$ e $N_+ = 42$ temos que:

$$n_+ = 37, n_- = 4, M = (3, 3, 9, 12, 10), \bar{\chi}^2 = 9.0811, p\text{-valor} = 0.007214945, (\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_4) = (0.08108, 0.08108, 0.24324, 0.29729, 0.29729)$$

Como o $p - valor = 0.007214945$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Como já mencionado, quanto menor for o $p - valor$, mais "distante" estamos da hipótese nula H_0 . Como o $p - valor$ encontrado é muito pequeno (e ainda menor que o observado no teste binomial), temos ainda mais evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito.

Aplicando o Teste Binomial aos dados de bomba de polpa ($rotores_{Geral}$) truncados em $T = 6432$ horas, $K = 10$ e $N_+ = 175$ temos que:

$$B = 2, p - valor = 2.251 \times 10^{-6}$$

A estatística $B = 2$ nos informa que, do total de 175 falhas globais ordenadas, apenas 2 ocorreram consecutivamente no mesmo sistema. Isso sugere que, após dada sistema ser reparado, ele se torna mais confiável que os outros. Tal fato nos induz a entender que esse reparo melhora o sistema (Reparo imperfeito). Como o $p - valor = 2.251 \times 10^{-6}$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Portanto, temos fortes evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito, assim como o primeiro conjunto de dados.

Aplicando o teste multinomial de bomba de polpa ($rotores_{Geral}$) truncados em $T = 6432$ horas, $K = 10$ e $N_+ = 175$ temos que:

$$n_+ = 164, \quad n_- = 10, \quad M = (2, 11, 29, 27, 31, 11, 14, 13, 14, 12),$$

$$\bar{\chi}^2 = 17.41006, \quad p - \text{valor} = 5.038347 \times 10^{-9}, \quad (\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_4) = (0.01219, 0.06707, 0.11509, 0.11509, 0.11509, 0.11509, 0.11509, 0.11509, 0.11509, 0.11509)$$

Como o $p - \text{valor} = 5.038347 \times 10^{-9}$ é menor que o nível de significância proposto ($\alpha = 0.05$), rejeitamos a hipótese nula de reparo mínimo. Como já mencionado, quanto menor for o $p - \text{valor}$, mais "distante" estamos da hipótese nula H_0 . Como o $p - \text{valor}$ encontrado é muito pequeno (e ainda menor que o observado no teste binomial), temos ainda mais evidências de que os dados são oriundos de uma situação onde o efeito de reparo é imperfeito.

Como certificamos que os reparos realizados após as falhas dos rotores são imperfeitos, tanto para as falhas registradas até a manutenção preventiva ($T = 5000$ horas), como para as falhas registradas após esse tempo, iremos identificar uma classe de modelos de RI que melhor se adequa aos dados e partir disso, determinar a periodicidade ótima de manutenção preventiva com base no mesmo.

4.3 Seleção de Modelo

Nessa etapa da pesquisa, após a análise preliminar dos dados, se procuram as estimativas pontuais e intervalares do modelo. Porém, na literatura, há vários modelos à disposição. Deve-se, pois, selecionar aquele que melhor se ajusta aos dados, isto é, o modelo que apresenta melhor qualidade de ajuste.

Foram aplicados os modelos ARA_m e ARI_m ao conjunto de dados de rotores descritos no Seção 1.2. Os estimadores de máxima verossimilhança para PLP (β e η) e os parâmetros para o efeito de reparo (θ) são obtidos através da maximização numérica das funções de log-verossimilhança derivadas na Seção 2.2, utilizando o pacote computacional em linguagem R desenvolvido por Fernandes(2015).

Foram testados 29 modelos ARA e outros 29 modelos ARI para a base de dados rotores até o tempo $T = 5\ 000$ horas ($rotores_1$), testados 11 modelos ARA e outros 11 modelos ARI para a base de dados $rotores_2$ e testados 29 modelos ARA e outros 29 modelos ARI para a base de dados $rotores_{Geral}$. Para cada modelo usou-se uma ordem de memória diferente (de 1 a ∞ , sendo $\infty = 29$ para $rotores_1$ e $rotores_{Geral}$ e $\infty = 11$ $rotores_2$). É válido lembrar que a ordem de memória m corresponde ao maior número de falhas

observado entre os sistemas. Analisando os dados de $rotores_1$ e $rotores_{Geral}$, temos que os sistemas 1 e 3 apresentaram 29 falhas cada um, superando todos os outros no número de falhas. Nesse sentido, a variável m , quando assumir o valor 29 (maior valor possível para esse processo de falha), será chamado de $m = \infty$. A mesma análise é feita para os dados de $rotores_2$, onde $m = 11$ corresponde ao $m = \infty$, pois o número máximo de falhas observado foi 11. Os estimadores também são obtidos considerando o modelo RM-PLP.

As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 exibem os resultados para $RM(\theta = 1)$, ARA_m e ARI_m com $m = 1, 2, 4, 5, \infty$ para os dados de $rotores_1$, $rotores_2$ e $rotores_{Geral}$, respectivamente. Apesar de outros valores de memória no intervalo terem sido considerados, os resultados foram omitidos para simplificar, já que eles não adicionam valiosas informações para as conclusões.

Tabela 4.1: Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β , η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de $rotores_1$

Parâmetro	Modelo		
	RM	ARA_1	ARA_2
$\hat{\beta}$	1.012(0.854,1.201)	1.897804(1.75,2.05)	1.898105(1.75,2.05)
$\hat{\eta}$	192.59(108.19,342.87)	176.92(128.38,243.81)	177.04(128.48,243.97)
$\hat{\theta}$		0.022(0.012,0.035)	0.033(0.018,0.057)
\hat{l}		-787.6139	-787.6144
	ARA_4	ARA_5	ARA_∞
$\hat{\beta}$	1.897911(1.75,2.05)	1.898372(1.75,2.05)	1.898372(1.75,2.05)
$\hat{\eta}$	176.99(128.45,243.89)	177.16(128.57,244.11)	177.16(128.57,244.11)
$\hat{\theta}$	0.030(0.017,0.047)	0.036(0.021,0.060)	0.036(0.021,0.060)
\hat{l}	-787.6139	-787.6139	-787.6139
	ARI_1	ARI_2	
$\hat{\beta}$		1.822293(1.61,2.05)	1.822297(1.62,2.05)
$\hat{\eta}$		209.61(189.78,231.53)	209.65(189.82,231.57)
$\hat{\theta}$		0.01126(0.0051,0.038)	0.01205(0.0053,0.040)
\hat{l}		-788.0334	-788.0334
	ARI_4	ARI_5	ARI_∞
$\hat{\beta}$	1.822245(1.62,2.05)	1.822668(1.62,2.05)	1.822668(1.62,2.05)
$\hat{\eta}$	209.64(189.79,231.55)	209.66(189.82,231.57)	209.66(189.82,231.57)
$\hat{\theta}$	0.01195(0.0051,0.039)	0.013(0.0062,0.043)	0.013(0.0062,0.043)
\hat{l}	-788.0333	-788.0333	-788.0333

Como se pode observar nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, os modelos ARA de ordem $m \leq 4$ estimaram valores diferentes uns dos outros. A partir da memória $m = 5$, todos os estimadores se mantêm iguais. Ambos os parâmetros estimados e o valor estimado para o máximo da função de log-verossimilhança são muito similares em modelos dentro de cada classe.

Tabela 4.2: Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β , η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de *rotores₂*

Parâmetro	Modelo		
	RM	ARA_1	ARA_2
$\hat{\beta}$	1.159(0.854,1.574)	1.980256(1.69,2.31)	1.979985(1.69,2.31)
$\hat{\eta}$	225.760(122.04,417.64)	193.22(129.64,287.99)	193.15(129.58,287.91)
$\hat{\theta}$		0.036(0.021,0.06)	0.034(0.018,0.056)
\hat{l}		-241.7278	-241.7276
	ARA_4	ARA_5	ARA_∞
$\hat{\beta}$	1.980145(1.69,2.31)	1.980496(1.69,2.31)	1.980496(1.69,2.31)
$\hat{\eta}$	193.20(129.62,287.96)	193.29(129.69,288.07)	193.29(129.69,288.07)
$\hat{\theta}$	0.035(0.019,0.057)	0.044(0.028,0.066)	0.044(0.028,0.066)
\hat{l}	-241.7276	-241.7276	-241.7276
	ARI_1	ARI_2	
$\hat{\beta}$		1.787838(1.43,2.23)	1.787420(1.43,2.23)
$\hat{\eta}$		191.49(159.67,229.65)	191.39(159.58,229.54)
$\hat{\theta}$		0.017(0.002,0.041)	0.0087(0.0001,0.0111)
\hat{l}		-242.2600	-242.2601
	ARI_4	ARI_5	ARI_∞
$\hat{\beta}$	1.787460(1.43,2.23)	1.787398(1.43,2.23)	1.787398(1.43,2.23)
$\hat{\eta}$	191.42(159.60,229.57)	191.39(159.58,229.54)	191.39(159.58,229.54)
$\hat{\theta}$	0.015(0.0009,0.039)	0.021(0.005,0.045)	0.021(0.005,0.045)
\hat{l}	-242.2601	-242.2600	-242.2600

Tabela 4.3: Estimativas pontuais e intervalares (95% de nível de confiança) para os parâmetros PLP (β , η) e efeito de reparo (θ) e os valores do máximo da função log-verossimilhança (\hat{l}) sob cada modelo ajustado para os dados de *rotores_{Geral}*

Parâmetro	Modelo		
	RM	ARA_1	ARA_2
$\hat{\beta}$	1.010(0.854,1.201)	1.872041(1.69,2.08)	1.871918(1.69,2.08)
$\hat{\eta}$	183.47 (120.62,279.08)	201.71(185.45,219.39)	201.73(185.47,219.41)
$\hat{\theta}$		0.0198 (0.016,0.039)	0.0308(0.018,0.06)
\hat{l}		-1032.452	-1032.452
	ARA_4	ARA_5	ARA_∞
$\hat{\beta}$	1.871888(1.69,2.08)	1.872336(1.69,2.08)	1.872336(1.69,2.08)
$\hat{\eta}$	201.73(185.47,219.42)	201.74(185.48,219.42)	201.74(185.48,219.42)
$\hat{\theta}$	0.0278(0.016,0.054)	0.0338(0.020,0.066)	0.0338(0.020,0.066)
\hat{l}	-1032.452	-1032.452	-1032.452
	ARI_1	ARI_2	
$\hat{\beta}$		1.868308(1.76,1.99)	1.868238(1.76,1.99)
$\hat{\eta}$		161.16(126.75,204.92)	161.14(126.73,204.88)
$\hat{\theta}$		0.00905(0.0001,0.018)	0.00984(0.0006,0.019)
\hat{l}		-1033.940	-1033.941
	ARI_4	ARI_5	ARI_∞
$\hat{\beta}$	1.868280(1.76,1.99)	1.868015(1.76,1.99)	1.867965(1.76,1.99)
$\hat{\eta}$	161.17(126.76,204.92)	161.05(126.66,204.78)	161.08(126.69,204.80)
$\hat{\theta}$	0.00974(0.0001,0.019)	0.011(0.001,0.021)	0.0109(0.001,0.021)
\hat{l}	-1033.940	-1033.940	-1033.940

Usando o critério de seleção de modelos baseada na Verossimilhança e no Peso da Evidência como critério para a seleção do modelo, pode ser observado da Tabela 4.1, 4.2 e 4.3 que para as classes *ARA* e *ARI*, em geral, os valores \hat{l} oscilam muito pouco com aumento na valor da memória m e com diferenças muito pequenas (terceira casa decimal). Porém, podemos observar uma superioridade do modelo *ARA*, conforme exposto nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 que mostram maiores \hat{l} e w_r para esta classe para os três conjuntos de dados. O valor de \hat{l} é superior para o modelo *ARA* para qualquer m observado. O valor w_r para *ARA* oscila entre os modelos até $m = 4$, mas se mantém constante a partir de $m = 5$ para *rotores₁*, *rotores₂* e *rotores_{Geral}*.

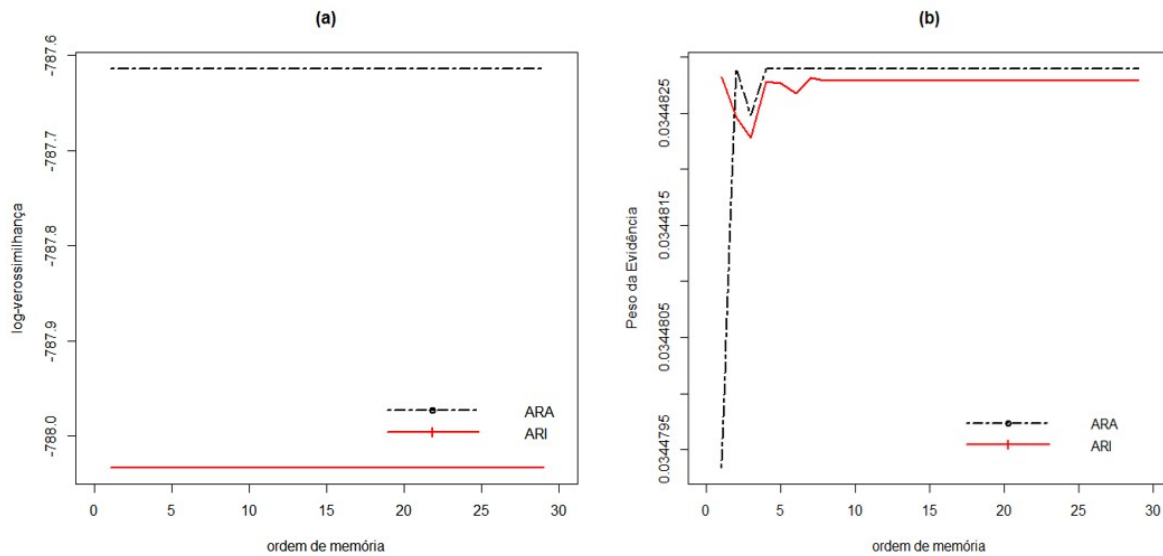


Figura 4.7: Critérios de seleção de modelos *ARA* e *ARI* com diferentes ordens de memória para os dados de *rotores₁*: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r .

Utilizando o método gráfico de seleção de modelos proposto por Toledo et al.(2015), descrito na seção 2.4 deste trabalho, foram plotados os gráficos de bondade de ajuste para os modelos ARA_m e ARI_m para diferentes ordens de memória. Para ilustrar, as Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam uma comparação entre os modelos ARA_∞ e ARI_∞ para *rotores₁*, *rotores₂* e *rotores_{Geral}*, respectivamente. Apesar do MCF estimado sob o modelo ARI_∞ estar seguindo bem o empírica (Figura 4.10 (c) e (d), Figura 4.11 (c) e (d) e 4.12 (c) e (d)), o MCF estimado sob ARA_∞ é ainda mais próximo do empírico (Figura 4.10 (a) e (b), Figura 4.11 (a) e (b) e 4.12 (a) e (b)), se comparado ao *ARI*. Portanto, temos mais uma evidência de que o modelo *ARA* tem melhor ajuste se comparado ao *ARI*

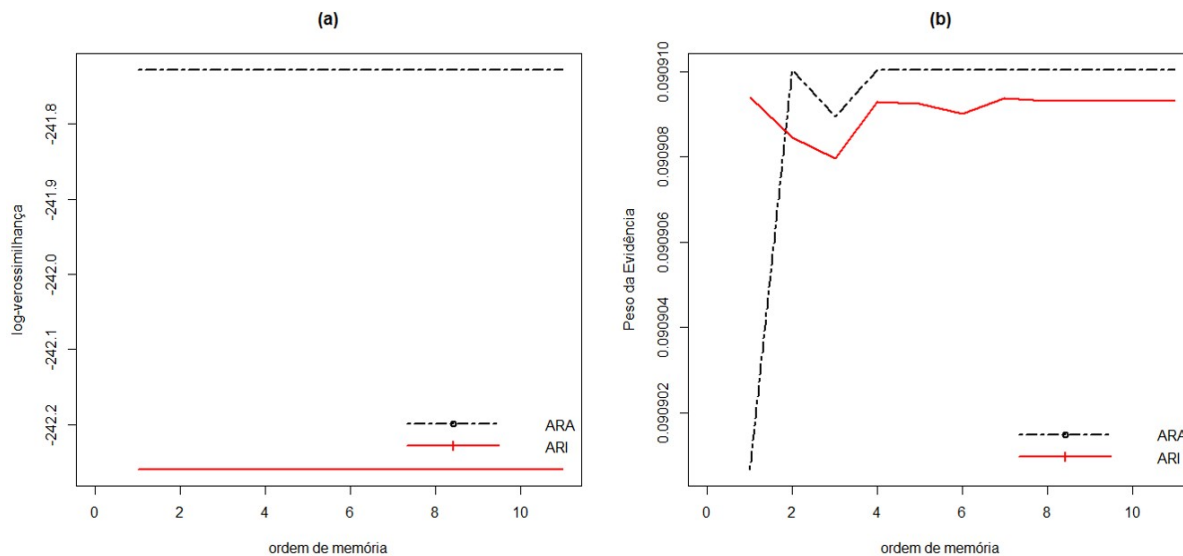


Figura 4.8: Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de $rotores_2$: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_p .

para os dois casos. Considerando as análises dos dados de rotores para os três critérios de seleção analisados, a nossa classe de modelos escolhida é o *ARA*.

Definida a classe de modelos a ser utilizada, vamos analisar qual a melhor ordem de memória a ser utilizada para cálculo da periodicidade ótima. Nos gráficos de peso da evidência, expostos nas Figuras 4.7 (b), 4.8 (b) e 4.9 (b), podemos observar que o maior peso de evidência foi em $m = 5$ e se manteve constante para $m \geq 5$. Nas Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 verificamos também que os estimadores se mantêm os mesmos em $m = 5$ e $m = \infty$. Nas Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 são exibidos os gráficos de bondade de ajuste para os modelos ARA_1 e ARA_5 dos dados de $rotores_1$, $rotores_2$ e $rotores_{Geral}$, respectivamente.

Para os três conjuntos de dados, podemos observar que a MCF estimada sob o modelo ARA_1 não está seguindo bem a empírica (Figura 4.13 (a) e (b), Figura 4.14 (a) e (b) e Figura 4.15 (a) e (b)). Já o MCF estimado sob ARA_5 está muito próximo do empírico (Figura 4.13 (c) e (d), Figura 4.14 (c) e (d) e Figura 4.15 (c) e (d)). Além disso, comparando a MCF estimada sob o modelo ARA_∞ (Figura 4.10 (a) e (b), Figura 4.11 (a) e (b) e 4.12 (a) e (b)), temos que o ajuste para o modelo ARA_5 é igual ao ajuste para o modelo ARA_∞ . Portanto, temos que o melhor modelo para descrever os dados de rotores é o ARA_5 . O ARA_∞ também pode ser utilizado, mas como o mesmo possui as mesmas

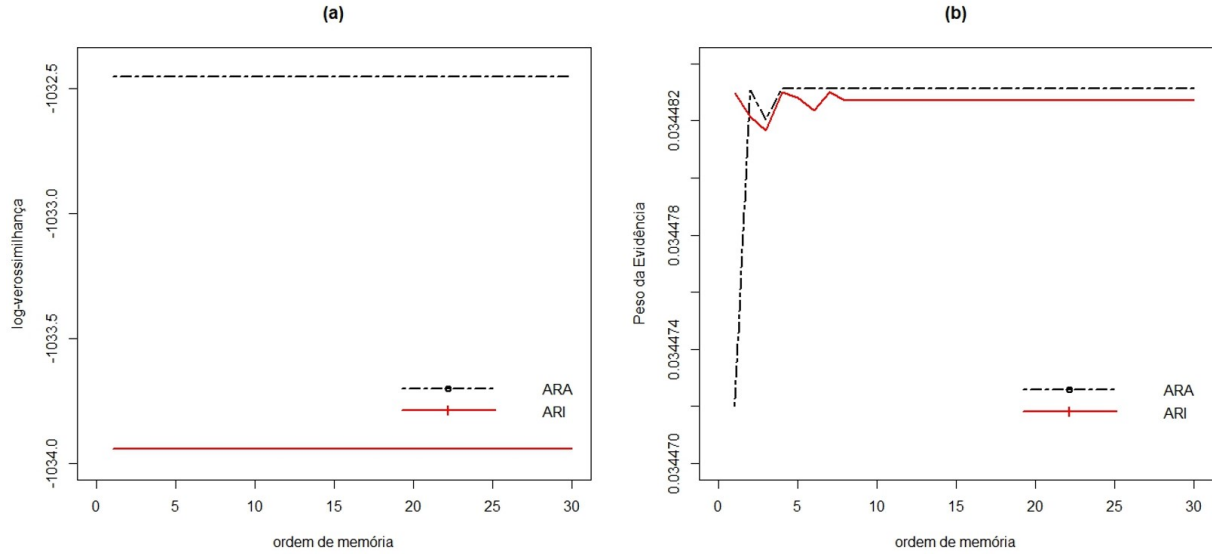


Figura 4.9: Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de $rotores_{Geral}$: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r .

características do ARA_5 , ele não é indicado por exigir maior tempo de processamento computacional.

4.4 Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva

Para ARA_5 , $\hat{\beta} = 1.90$ (intervalo de confiança de 95% [1,75; 2.05]) para os dados de $rotores_1$, $\hat{\beta} = 1.98$ (intervalo de confiança de 95% [1,69; 2.31]) para os dados de $rotores_2$ e $\hat{\beta} = 1.87$ (intervalo de confiança de 95% [1.69,2.08]) para os dados de $rotores_{Geral}$, indicando que a função de intensidade de falha do equipamento aumenta com tempo. Isso significa que os sistemas estão envelhecendo. Portanto, os rotores tendem a falhar com mais frequência ao longo do tempo, justificando a necessidade de Manutenção Preventiva.

Para o primeiro conjunto de dados ($rotores_1$), as estimativas pontuais e intervalares para o parâmetro de efeito de reparo $\hat{\theta}$ são 0.036 e (0.021,0.060) respectivamente, indicando que os reparos após falhas, tendem a deixar o equipamento em um estado entre $AGAN$ e $ABAO$. Para o segundo conjunto de dados ($rotores_2$), o $\hat{\theta} = 0.044$ com intervalo de confiança (0.028,0.066), indica também que os reparos após falhas, tendem a deixar o

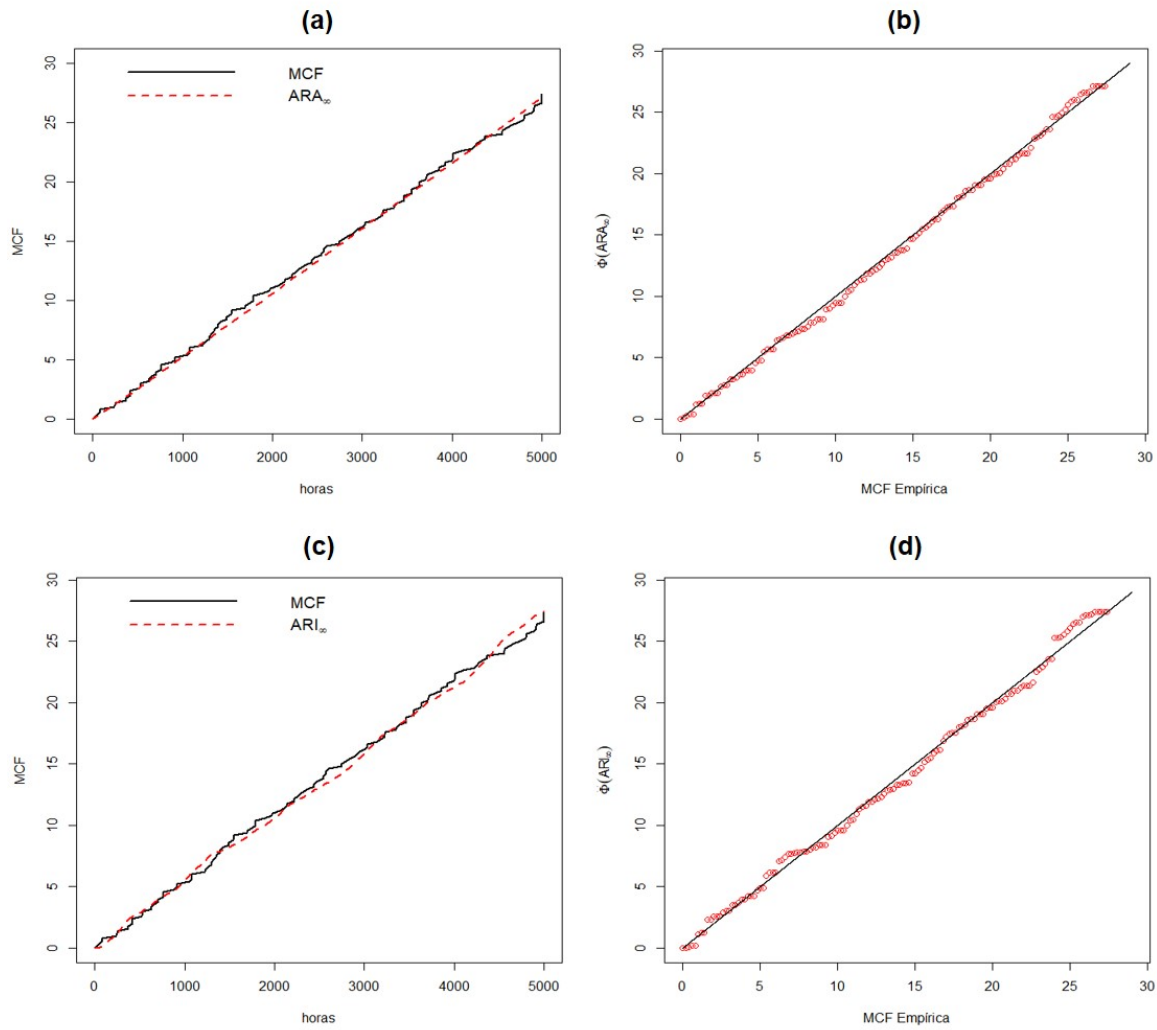


Figura 4.10: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_{∞} (a e b) e ARI_{∞} (c e d) para os dados de *rotores*₁.

equipamento em um estado entre *AGAN* e *ABAO*. Para o conjunto de dados completo (*rotores*_{Geral}), o $\hat{\theta} = 0.034$ com intervalo de confiança (0.028,0.066), indica também que os reparos após falhas, tendem a deixar o equipamento em um estado entre *AGAN* e *ABAO*. Como estes intervalos de confiança não abrangem nem o valor 0 ou 1, podemos concluir que o reparo não é nem um RP (ou seja, ele não leva a uma condição *AGAN*) nem uma RM(condição *ABAO*), respectivamente.

Em termos práticos, o valor $\hat{\theta} = 0.034$ para um modelo ARA_5 dos dados de *rotores*_{Geral}, por exemplo, indica que, de acordo com a Equação 2.9, o valor da função intensidade no tempo t (λ_{ARA_m}) é obtido subtraindo a seguinte quantidade do tempo t : $(1 - 0.034) \times$

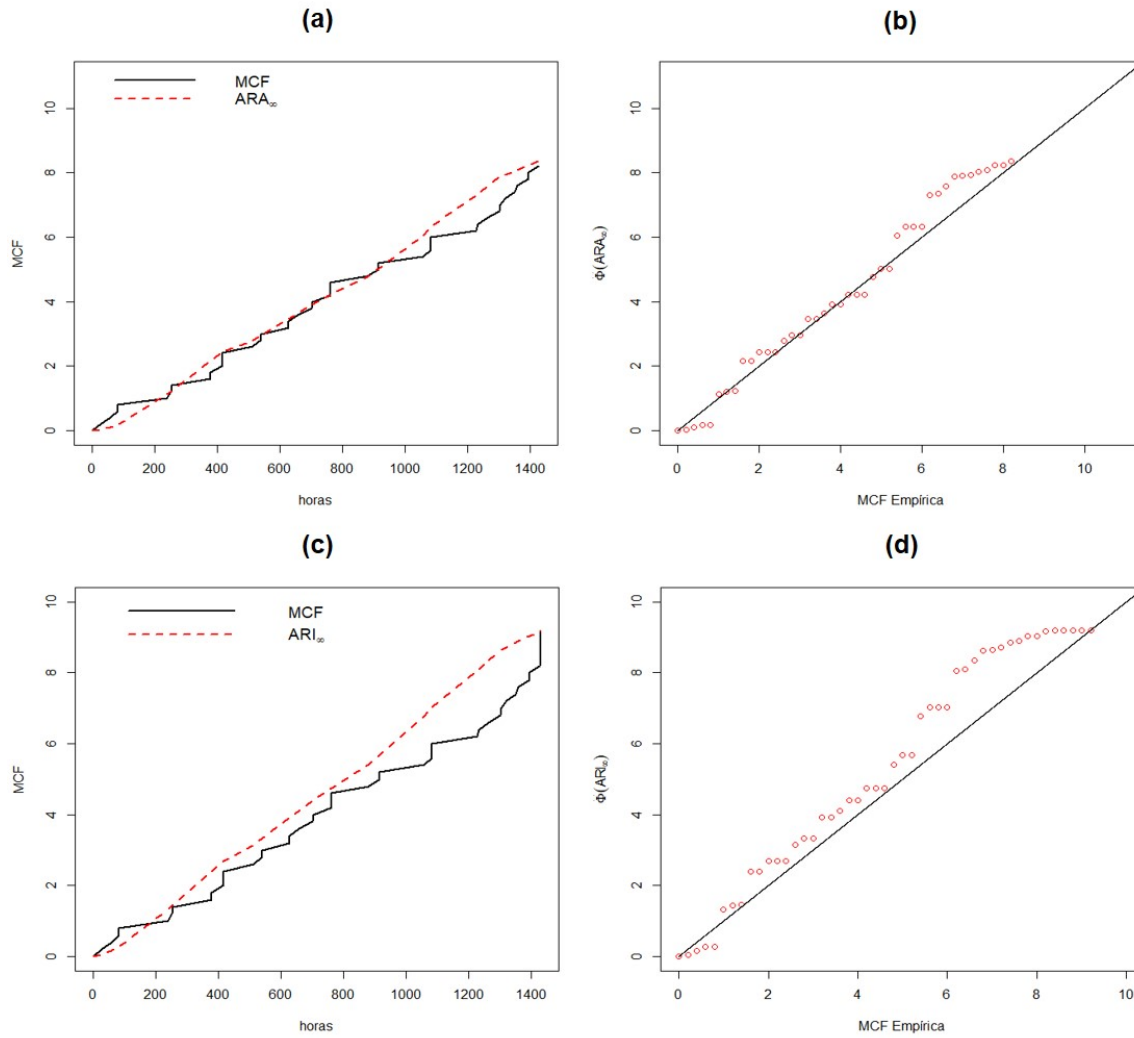


Figura 4.11: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_∞ (a e b) e ARI_∞ (c e d) para os dados de *rotores₂*.

0.034^0 (ou 96.6%) no último tempo de falha, mais $(1 - 0.034) \times 0.034^1$ (ou 3.28%) no segundo do último tempo de falha, mais $(1 - 0.034) \times 0.034^2$ (ou 0.11%) no terceiro do último tempo de falha, e assim por diante. Portanto, quanto maior a história de tempos de falha até o tempo t menor é o efeito do mesmo na redução do tempo t , o que justifica os valores dos parâmetros serem iguais para $m \geq 5$. Qualquer tentativa de estabelecer uma política de MP para os rotores deve levar esses valores em consideração.

Para o cálculo da periodicidade ótima de manutenção, bem como seu intervalo de confiança, foi utilizado o pacote computacional proposto por Fernandes(2015) que incorpora os cálculos apresentados na seção 2.3 desse trabalho.

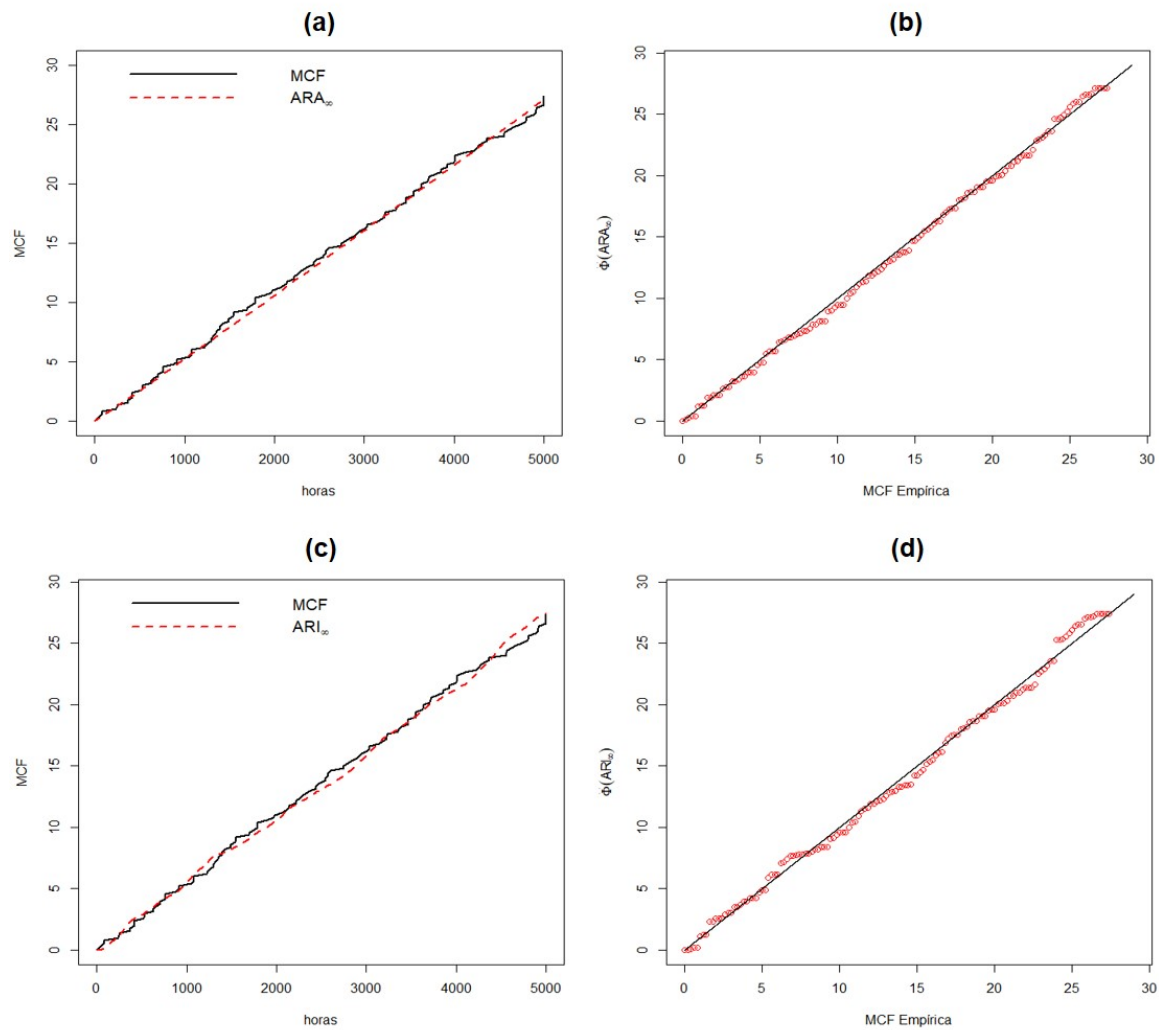


Figura 4.12: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_∞ (a e b) e ARI_∞ (c e d) para os dados de $rotores_{Geral}$.

Conforme explicitado na seção 2.3, para cálculo de periodicidade ótima, é necessário conhecer a relação de custo entre manutenção preventiva e manutenção corretiva. Conforme informado pela equipe de engenharia, a relação desses custos é de $1/1.5$ para o caso dos rotores.

Enfim, por meio do roteiro apresentado na seção 2.3 para o cálculo da periodicidade ótima de manutenção τ e dos valores estimados por máxima verossimilhança a partir do modelo escolhido, conclui-se que a política ideal de manutenção consiste em realizar reparos perfeitos durante as paradas para manutenções preventivas em intervalos de $\hat{\tau} = 4352.889$ horas ($IC(\tau, \alpha = 0.05) = [3870.986, 4906.317]$ horas) entre os quais poderiam

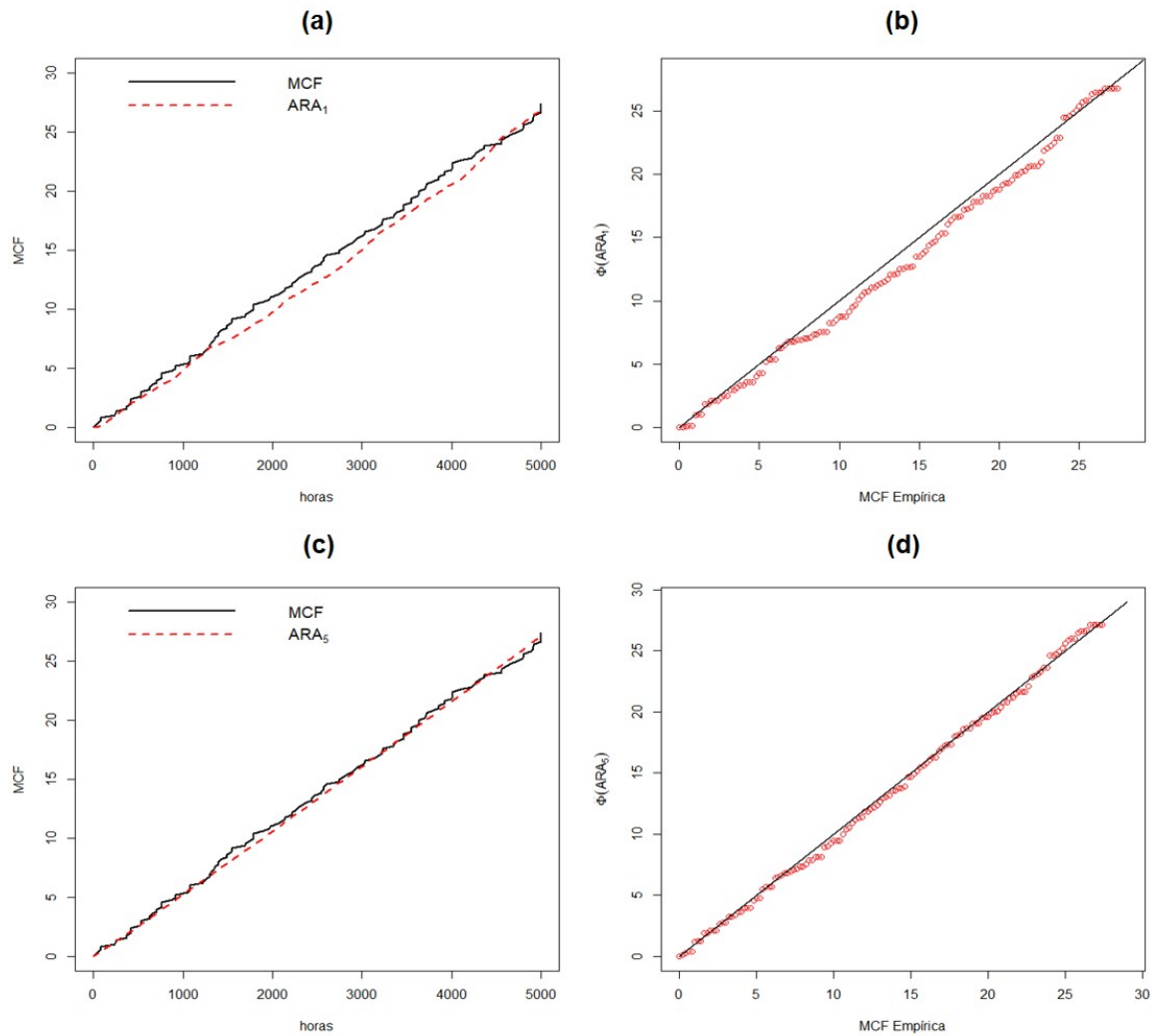


Figura 4.13: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de *rotores*₁.

ser realizados reparos imperfeitos nas paradas para manutenções corretivas com efeito do reparo $\hat{\theta} = 0.036$ ($IC(\theta, \alpha = 0.05) = [0.021, 0.060]$). Vale destacar que o valor do intervalo τ entre os reparos perfeitos foi definido com base na razão de custo de $\frac{C_{PM}}{C_{IR}} = \frac{1}{1.5}$, isto é, o custo das manutenções corretivas (efeito de reparo imperfeito para os rotores) são 50% maiores que os custos das manutenções preventivas (efeito de reparo perfeito para os rotores).

Como podemos observar nos dados de rotores (Apêndice A), atualmente as manutenções preventivas dos rotores são executadas em intervalos de $\tau = 5\,000$ horas. Como o intervalo de confiança $[3\,870.986, 4\,906.317]$ termina em 4 906.317, a política ótima não engloba

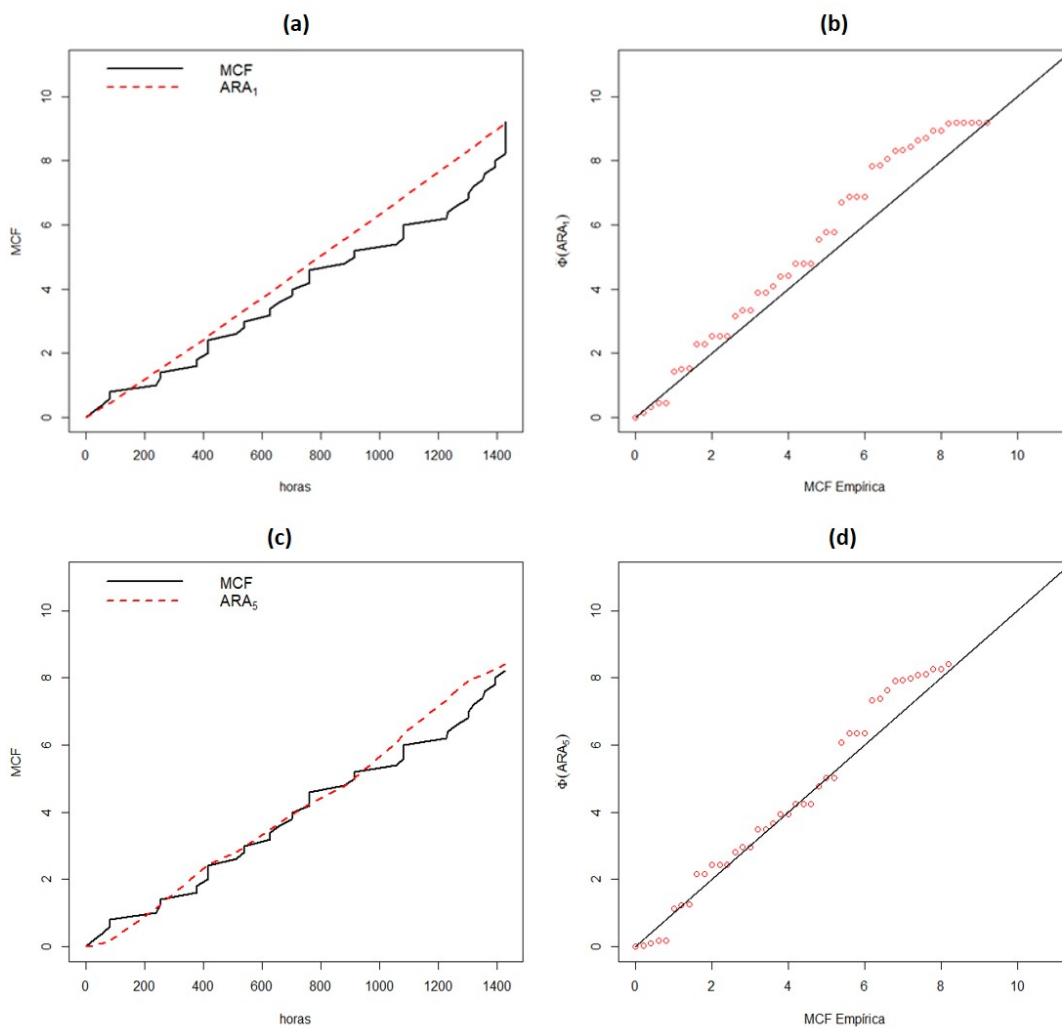


Figura 4.14: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de *rotores₂*.

o intervalo executado atualmente. Então, aconselha-se a equipe de Engenharia reduzir o intervalo das manutenções preventivas dos rotores para $\tau = 4\,352.889$ horas.

Vale ressaltar que, caso haja alteração no processo de manutenção preventiva ou manutenção corretiva, os dados devem ser avaliados novamente para averiguar o efeito de reparo e o custo de cada um deles, visto que a razão dos custos C_{PM}/C_{IR} são utilizados para o cálculo de periodicidade ótima de manutenção. Portanto, alterações nos custos também podem alterar a periodicidade ótima de manutenção.

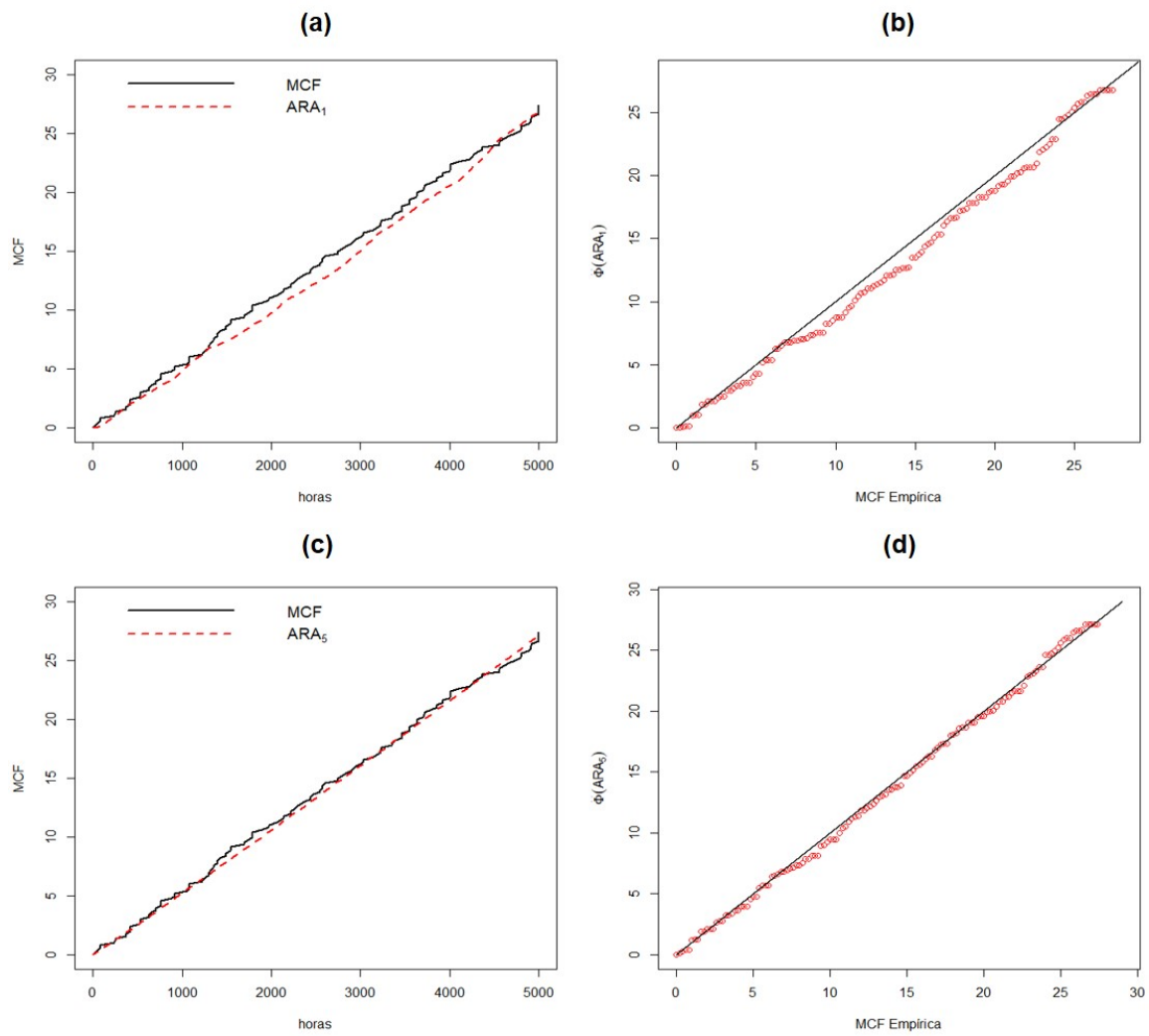


Figura 4.15: Comparação entre MCF empírica e estimada para ARA_1 (a e b) e ARA_5 (c e d) para os dados de *rotores_{Geral}*.

5 Conclusões e Considerações Finais

O presente trabalho apresenta e discute metodologias estatísticas/probabilísticas recentes da literatura para a modelagem e análise de dados de falhas de sistemas reparáveis. O foco é em testes formais para a caracterização do efeito de reparo (reparo mínimo versus reparo não prejudicial) que consiste na primeira etapa para a análise de dados oriundos de uma situação real. O trabalho fornece uma revisão bibliográfica sobre testes paramétricos (Seção 2.5) e não paramétricos (Seção 2.6) para o alcance dessa finalidade ao mesmo tempo em que exemplifica suas aplicações.

Discorreu-se sobre as classes de modelos de Redução Aritmética da Idade e da Intensidade (*ARA* e *ARI*, respectivamente) propostas por Doyen & Gaudoin (2004) e as funções de máxima verossimilhança foram derivadas. Após o cálculo dessas funções, foram encontrados, para o conjunto de dados de registros de falhas em rotores de bombas de polpa usados por um companhia de mineração, os estimadores pontuais e intervalares dos parâmetros do PLP (que modela a função intensidade de falhas) e o parâmetro de efeito de reparo (θ), pressupondo a execução de reparo imperfeito na ocorrência de falhas. Porém, há muitos modelos que podem ser utilizados para a solução do problema da política de manutenção preventiva. Nesse sentido, foram utilizados critérios de seleção clássicos na literatura baseados na máxima log-verossimilhança e no peso da evidência, além do método gráfico de bondade de ajuste proposto por Toledo et al.(2015) para determinação do melhor modelo para descrever os dados.

No cenário dos rotores de bombas de polpa, foram aplicados os testes binomial e multinomial (testes de hipóteses paramétricos para seleção entre modelos de reparo imperfeito, que testa as hipóteses de Reparo Mínimo versus Reparo Imperfeito), que indicam que os dados se tratam de reparo imperfeito (p -valor ≤ 0.05 para ambos os testes). Após serem utilizados os métodos para escolher o modelo mais adequado dentre os modelos de reparo imperfeito, o ARA_5 foi considerado o modelo mais adequado. Valores de parâmetros estimados indicam que os rotores tendem a falhar mais frequentemente ao longo do tempo ($\hat{\beta} = 1.87$, IC = [1.69,2.08] e que os reparos após as falhas tendem a deixar o equipamento em um estado entre AGAN e ABAO ($\hat{\theta} = 0.034$, IC = [0.020,0.066]). Isso significa que os sistemas estão envelhecendo. Portanto, os rotores tendem a falhar com mais frequência ao longo do tempo, justificando a necessidade de Manutenção Preventiva.

Por meio do roteiro apresentado na seção 2.3, conclui-se que a política ideal de manutenção consiste em realizar reparos perfeitos durante as paradas para manutenções preventivas em intervalos de $\hat{\tau} = 4\,352.889$ horas ($IC(\tau, \alpha = 0.05) = [3\,870.986, 4\,906.317]$ horas) entre os quais poderiam ser realizados reparos imperfeitos nas paradas para manutenções corretivas com efeito do reparo $\hat{\theta} = 0.034$ ($IC(\theta, \alpha = 0.05) = [0.020, 0.066]$). O valor do intervalo τ entre os reparos perfeitos foi definido com base na informação de que custo dos reparos imperfeitos nos rotores são 50% maiores que os custos das manutenções preventivas.

Apesar das bombas de polpa estudados neste artigo terem sido projetados para operar em condições severas do processo de beneficiamento de minerais, existem algumas especificidades da operação de beneficiamento de minério de ferro da unidade onde foram coletados os dados (impurezas do material, por exemplo), que o tornam ainda mais severos. Assim sendo, a política de manutenção sugerida pelo fabricante das bombas não é útil. É necessário que a empresa de mineração defina uma política de MP baseada sob as reais condições de trabalho. As estimativas derivadas neste artigo, como a velocidade de envelhecimento e o efeito do reparo, foram obtidos considerando uma história de tempos de falha para os sistemas nas condições de operação na usina. Atualmente, a empresa realiza manutenções preventivas a cada $\hat{\tau} = 5\,000$ horas. Calculando a periodicidade ótima de acordo com os parâmetros que representam o comportamento real desse processo de falha, averiguamos que as manutenções preventivas devem ser realizadas a cada $\hat{\tau} = 4\,352.889$ horas. Portanto, todas as análises realizadas neste trabalho fornecem informações importantes para o processo de tomada de decisão relacionado às políticas de MP na empresa de mineração.

Entre as possibilidades futuras de continuação deste trabalho, temos a análise de dados onde o reparo da manutenção preventiva também seja imperfeito, exploração dos testes de hipóteses para modelos de reparo imperfeito, mais especificamente, ampliação dos testes de bondade de ajuste paramétricos (Seção 2.5) para mais de um sistema e o estudo de testes paramétricos que apresentem maior poder.

Referências bibliográficas

- AALEN, O. **Nonparametric inference for a family of counting processes**. The Annals of Statistics, v. 6, p. 701-726, 1978.
- BARLOW, R. E.; HUNTER, L. C. **Optimum preventive maintenance policies**. Operations Research, v. 8, n. 1, p. 90-100, 1960.
- BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. **Mathematical Theory of Reliability**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- BROWN, M.; PROSCHAN, F. **Imperfect repair**. Journal of Applied Probability, v.20, p. 851-859, 1983.
- CASELLA, G. and BERGER, R. L. **Statistical Inference**. 2nd Edition. New York: Duxbury,2002.
- CHACKO, V. J. **Testing homogeneity against ordered alternatives**. The Annals of Mathematical Statistics, v.34, p. 945-956, 1963.
- CHACKO, V. J. **Modified chi-square test for ordered alternatives**. Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B v. 28, p. 185-190, 1966.
- CHAUVEL, C.; DAUXOIS, J. Y.; DOYEN, L.; GAUDOIN, O. **Parametric bootstrap goodness-of-fit tests for imperfect maintenance models**. IEEE Transactions on reliability, v.65, n. 3, p. 1343-1359, 2016.
- COOK, R. J.; LAWLESS, J. F. **The Statistical Analysis of Recurrent Events**. 1a. ed. [S.l.]: Springer, 2007.
- CORSET, F., DOYEN, L.; GAUDOIN, O. **Bayesian analysis of ARA imperfect repair models**. Communications in Statistics - Theory and Methods, v. 41, P. 3915-3941, 2012.
- DOYEN, L.; GAUDOIN, O. **Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age**. Reliability Engineering & System Safety, v. 84, n. 1, p. 45-56, 2004.

DOYEN, L.; GAUDOIN, O. **Modeling and Assessment of Aging and Efficiency of Corrective and Planned Preventive Maintenance**. IEEE Transactions on reliability, v. 60, n. 4, p. 759-769, 2011.

EFRON, B.; STEIN, C. **The Jackknife Estimate of Variance**. Annals of Statistics, v. 9, n. 3, p. 586-596, 1981.

FERNANDES, R. S. **Modelos de Reparo Imperfeito no R** [Dissertação de Mestrado]. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2015.

FREITAS, M. A. ; ALMEIDA, N. F. . Estudo da Tendência na Intensidade de Falhas em Sistemas Reparáveis. In: XXXIX SBPO, 2007, Fortaleza. Anais do XXXIX SBPO - 28 a 31/08/2007, 2007. p. 1-12;

FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. **Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados**. Escola de Engenharia da UFMG/Fundação Christiano Ottoni. Belo Horizonte, 1997.

GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. **Optimal maintenance time for repairable systems**. Journal of Quality Technology, v. 39, n. 1, p. 48-53, 2007.

GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A. **On the superposition of overlapping poisson processes and nonparametric estimation of their intensity function**. Journal of Statistical Planning and Inference, v. 171, p. 3075-3083, 2011.

GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, E. A.; TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A. **Non-Parametric Significance Tests for Imperfect Repair**. 2018. No prelo.

GILARDONI, G. L.; OLIVEIRA, M. D.; COLOSIMO, E. A. **Nonparametric estimation and bootstrap confidence intervals for the optimal maintenance time of a repairable system**. Computational Statistics and Data Analysis, v. 63, p. 113-124, 2013.

GILARDONI, G. L.; TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. **Dynamics of an optimal maintenance policy for imperfect repair models**. European Journal of Operational Research, v. 248, p. 1104-1112, 2016.

KIJIMA, M. **Some results for repairable systems with general repair**. Journal of

Applied Probability, v. 26, p. 89-102, 1989.

KIJIMA, M., MORIMURA, H., and Suzuki, Y. (1988). **Periodical replacement problem without assuming minimal repair**. European Journal of Operational Research, 37:194-203.

MADUREIRA, I. F. **Um pacote computacional para a análise estatística de processos de Lei de Potência** [Dissertação de Mestrado]. Universidade de Brasília. Brasília, 2014.

MALIK, M. A. K. **Reliable preventive maintenance scheduling**. AIIR Transactions, v. 11, p. 221-228, 1979.

MORIMURA, H. **On some preventive maintenance policies for IFR**. Journal of Operations Research Society of Japan, v. 12, n. 3, p. 94-125, 1970.

OLIVEIRA, C. H. X. **Política ótima de manutenção preventiva de transportadores de correia de uma empresa mineradora brasileira sob a suposição de reparo imperfeito** [Dissertação de Mestrado]. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2016.

OLIVEIRA, M. D. d., COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. **Bayesian inference for power law processes with applications in repairable systems**. Journal of Statistical Planning and Inference, v. 141, p. 1151-1160, 2012.

PAN, R.; RIGDON, S. E. **Bayes inference for general repairable systems**. Journal of Quality Technology, v. 41(1), p. 82-94, 2009

PARK, D. H.; JUNG, G. M.; YUM, J. K. **Cost minimizations for periodic maintenance policy of a system subject to slow degradation**. Reliability Engineering and System Safety, v. 68, p. 105-112, 2000.

PHELPS, R. I. **Replacement policies under minimal repair**. The Journal of Operational Research Society, v. 32, p. 549-554, 1981.

RIGDON, S. E.; BASU, A. P. **Statistical methods for the reliability of repairable systems**. New York: Wiley, 2000.

SEN, A.; KHATTREE, R. **On estimating the current intensity of failure for the power-law process**. Journal of Statistical Planning and Inference, v. 74(2), p. 253-272, 1998.

SHIN, I.; LIM, T. J.; LIE, C. H. **Estimating parameters of intensity function and maintenance effect for repairable unit**. Reliability Engineering and System Safety, v.56, p. 1-10, 1996.

TOLEDO, M. L. G. **Determinação da Periodicidade Ótima de Manutenção sob a Suposição de Reparo Imperfeito**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2014.

TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. **ARA and ARI imperfect repair models: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction**. Reliability Engineering & System Safety, v. 140, p. 107-115, 2015.

TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. **Optimal Periodic Maintenance Policy under Imperfect Repair: A Case Study of Off-Road Engines**. IIE Transactions, v.45, p.747-758, 2016.

WANG, H. **A survey of maintenance policies of deteriorating systems**. European Journal of Operational Research, v. 139, p. 469-489, 2002.

WU, S.; ZUO, M. **Linear and nonlinear preventive maintenance models**. IEEE Transactions on Reliability, v. 59, p. 242-249, 2010.

YANEZ, M.; JOGLAR, F.; MODARRES, M. **Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience**. Reliability Engineering and System Safety, v.77, p. 167-180, 2002.

ZHAO, M.; XIE, M. **On maximum likelihood estimation for a general non-homogeneous Poisson process**. Scandinavian Journal of Statistics, v.23, p. 597-607, 1996.

A Conjunto de dados dos motores das bombas de polpa: Tempos de censura devido a realização de manutenção preventiva estão indicados por *

Sistema	Tempos de falha e MP (horas)	Sistema	Tempos de falha e MP (horas)
1	27	2	1 302
1	239	2	1 396
1	417	2	1 497
1	539	2	1 788
1	658	2	2 145
1	763	2	2 291
1	880	2	2 439
1	1 084	2	2 544
1	1 233	2	2 787"
1	1 321	2	3 177
1	1 396	2	3 461
1	1 497	2	3 547
1	1 748	2	3 623
1	2 101	2	3 725
1	2 372	2	4 009
1	2 544	2	4 097
1	2 894	2	4 247
1	3 004	2	4 370
1	3 138	2	4 571
1	3 700	2	4 909
1	3 921	2	5 000*
1	3 994	2	5 246
1	4 226	2	5 340
1	4 370	2	5 600
1	4 518"	2	5 872
1	4 612	2	6 057
1	4 728	2	6 179
1	4 803	2	6 367
1	4 909	3	81
1	5 000*	3	252
1	5 097	3	377
1	5 267	3	627
1	5 340	3	703
1	5 568	3	1 084
1	5 648"	3	1 264
1	5 721	3	1 352
1	5 872	3	1 548
1	5 947	3	1 696
1	6 039	3	1 788
1	6 285	3	1 964
1	6 367	3	2 056
2	81	3	2 261
2	256	3	2 441
2	417	3	2 577
2	539	3	2 751
2	627	3	3 038
2	763	3	3 224

Continuação da tabela de dados:

Sistema	Tempos de falha e MP (horas)	Sistema	Tempos de falha e MP (horas)
3	3 362	4	5 000*
3	3 467	4	5 088
3	3 547	4	5 273
3	3 637	4	5 369
3	3 861	4	5 447
3	4 009	4	5 760
3	4 274	4	5 914
3	4 660	4	6 057
3	4 782	4	6 313
3	4 920	4	6 422
3	5 000*	5	216"
3	5 072	5	417
3	5 203	5	512
3	5 372	5	763
3	5 447	5	916
3	5 675	5	1 057
3	5 760	5	1 227
3	5 914	5	1 361
3	6 068	5	1 543
3	6 218	5	1 703
3	6 383	5	1 893
4	56	5	2 135
4	216"	5	2 223
4	377	5	2 322
4	705	5	2 600
4	916	5	2 794
4	1 084	5	2 924
4	1 305	5	3 034
4	1 429	5	3 231
4	1 548	5	3 353
4	1 788	5	3 467
4	1 982	5	3 716
4	2 223	5	3 789
4	2 465	5	3 929
4	2 578	5	4 010
4	2 751	5	4 312
4	2 831	5	4 556
4	2 949	5	4 803
4	3 226	5	5 000*
4	3 392	5	5 219
4	3 550	5	5 361
4	3 637	5	5 447
4	3 861	5	5 782
4	4 088"	5	5 865
4	4 275"	5	5 947
4	4 556	5	6 188
4	4 884		

B Estimação de parâmetros: a função de verossimilhança no modelo $ARA_m + PLP$

Uma função de verossimilhança apropriada para modelar o processo $ARA_m + PLP$ é dada por

$$\begin{aligned}
 L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} f_{T_{i,1}, \dots, T_{i,N(t_i^*)}, N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}, n_i) \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_{j,1}, \dots, T_{j,n_j^*}}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} [f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i)] \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
 &\quad \text{se } k \geq 1, k = k_1 + k_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

a. Encontrando o primeiro produtório da Equação 1:

$$\begin{aligned}
 &\prod_{i=1}^{k_1} f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i) = \\
 &= \prod_{i=1}^k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_{i,1} - h < T_{i,1} \leq t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} - h < T_{i,n_i} \leq t_{i,n_i} | N(t_i^*) = n_i) P(N(t_i^*) = n_i)}{h^{n_i}} \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_{i,1} - h < T_{i,1} \leq t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} - h < T_{i,n_i} \leq t_{i,n_i}, N(t_i^*) = n_i)}{P(N(t_i^*) = n_i) h^{n_i}} P(N(t_i^*) = n_i) \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} P(N(0, t_{i,1} - h] = 0) P(N(t_{i,1} - h, t_{i,1}] = 1) P(N(t_{i,1}, t_{i,2} - h] = 0) \times \\
 &\quad \times P(N(t_{i,2} - h, t_{i,2}] = 1) \dots \times P(N(t_{i,n_i} - h, t_{i,n_i}] = 1) P(N(t_{i,n_i}, t_i^*] = 0) / h^{n_i} \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \prod_{l=1}^{n_i} P(N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h] = 0) P(N(t_{i,l} - h, t_{i,l}] = 1) \right\} \times \\
 &\quad \times P(N(t_{i,n_i}, t_i^*] = 0) / h^{n_i}
 \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
E[N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h)] &= \int_{t_{i,l-1}}^{t_{i,l}-h} \lambda_R \left(u - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) du \\
&= \Lambda_R \left(t_{i,l} - h - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) - \Lambda_R \left(t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E[N(t_{i,l} - h, t_{i,l}]] &= \int_{t_{i,l}-h}^{t_{i,l}} \lambda_R \left(u - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) du \\
&= \Lambda_R \left(t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) - \Lambda_R \left(t_{i,l} - h - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P(N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h] = 0) &= \\
&= e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-h-(1-\theta)\sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p})}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(N(t_{i,l} - h, t_{i,l}] = 1) &= \\
&= e^{-\Lambda_R(t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i,l} - h - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p})} \times \\
&\times \left[\Lambda_R \left(t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) - \Lambda_R \left(t_{i,l} - h - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas equaçõess no produtório acima, temos:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{k_1} f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i) = \\
& = \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \prod_{l=1}^{n_i} [e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-h-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i,l-1}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p})} \times \right. \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i,l}-h-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p})} \times \\
& \times \left. \left[\Lambda_R \left(t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p} \right) - \Lambda_R \left(t_{i,l} - h - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p} \right) \right] \right\} \times \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_i^*-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}) + \Lambda_R(t_{i,n_i}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p})} / h^{n_i} \} \\
& = \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left\{ \lambda_R(t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}) \times \right. \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i,l-1}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p})} \} \times \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_i^*-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}) + \Lambda_R(t_{i,n_i}-(1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p})}
\end{aligned}$$

b. Encontrando o segundo termo da Equação 1:

Nos sistemas truncados por falha, a contribuição para a verossimilhança é a fdp conjunta dos tempos globais $Y_{j,1}, Y_{j,2}, \dots, Y_{j,n_j^*}$.

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) = \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} f(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1}) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \frac{d}{dt_{j,m}} F(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1}) \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \frac{d}{dt_{j,m}} (1 - R(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1})) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} R(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1})
\end{aligned}$$

$$0 < t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,n_j^*}$$

Devido à propriedade de incrementos independentes, a função de confiabilidade condicional de $T_{j,m}$ dado $T_{j,1} = t_{j,1}$, $T_{j,2} = t_{j,2}, \dots, T_{j,m-1} = t_{j,m-1}$ é independente de $t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-2}$. Assim, a Equação anterior fica como:

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) = \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} R(t_{j,m}|t_{j,m-1}) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} P(T_{j,m} > t_{j,m}|t_{j,m-1}) \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} P(N(t_{j,m-1}, t_{j,m}] = 0) \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} e^{-\Lambda_R(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) + \Lambda_R(t_{j, m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p})} \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \lambda_R(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) \times \\
& \quad \times e^{-\Lambda_R(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) + \Lambda_R(t_{j, m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p})}
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
E[N(t_{j, m-1}, t_{j, m})] &= \int_{t_{j, m-1}}^{t_{j, m}} \lambda_R(u - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) du \\
&= \Lambda_R(t_{j, m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) - \Lambda_R(t_{j, m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p})
\end{aligned}$$

A função de verossimilhança em 1 é então dada por:

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} [f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}|n_i)P(N(t_i^*) = n_i)] \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
&= \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left\{ \lambda_R(t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}) \times \right. \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}) + \Lambda_R(t_{i, l-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p})} \left. \right\} \times \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_i^* - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}) + \Lambda_R(t_{i, n_i} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p})} \times \\
&\times \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \left\{ \lambda_R(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) \times \right. \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}) + \Lambda_R(t_{j, m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p})} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Assim, no PLP, a função de verossimilhança do modelo ARA_m é dada por:

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} \left\{ \prod_{l=1}^{n_i} \left[\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right. \right. \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,l-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_i^* - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,n_i} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}}{\eta} \right)^\beta \right\} \\
&\times \prod_{m=1}^{n_j^*} \left[\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right. \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{j,m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \\
&= \beta^{\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^*} \eta^{-\beta(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^*)} \left[\prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left(t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p} \right)^{\beta-1} \right] \times \\
&\times \left[\prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \left(t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p} \right)^{\beta-1} \right] \times \\
&\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[- \left(\frac{t_{i,l} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,l-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \right. \\
&\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^{k_1} \left[- \left(\frac{t_i^* - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,n_i} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \right. \\
&\times \exp \left\{ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left[- \left(\frac{t_{j,m} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{j,m-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right. \right.
\end{aligned}$$

Para encontrar estimativas de máxima verossimilhanca para os parâmetros, $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, a seguinte função de log-verossimilhança deve ser maximizada numericamente:

$$\begin{aligned}
l(\mu) &= \log L(\mu) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\
&+ (\beta - 1) \left(\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log(t_{i,l} - (1 - \theta)) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) + \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \log(t_{j,m} - (1 - \theta)) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p} \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[- \left(\frac{t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \left[- \left(\frac{t_i^* - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i, n_i} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta \right] + \\
&+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left[- \left(\frac{t_{j,m} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{j, m-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p t_{j, m-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right]
\end{aligned}$$

Pode-se assumir que $\hat{\mu} = \arg \max L(\mu)$ segue aproximadamente uma distribuição normal multivariada, com média μ e matriz de covariância Σ dada por menos a inversa da matriz Hessiana de $l(\mu)$ avaliada em $\hat{\mu}$. A matriz Hessiana é dada portanto

$$H = - \left(\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu \partial \mu^t} \right).$$

Assim, teoria assintótica pode ser usada para se construir intervalos de confiança para os parâmetros.

C Estimação de parâmetros: a função de verossimilhança no modelo $ARI_m + PLP$

Uma função de verossimilhança apropriada para modelar o processo $ARI_m + PLP$ é dada por

$$\begin{aligned}
 L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} f_{T_{i,1}, \dots, T_{i,N(t_i^*)}, N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}, n_i) \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_{j,1}, \dots, T_{j,n_j^*}}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} [f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i)] \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
 &\quad \text{se } k \geq 1, k = k_1 + k_2.
 \end{aligned}$$

a. Encontrando o primeiro produtório da Equação 2:

$$\begin{aligned}
 &\prod_{i=1}^{k_1} f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i) = \\
 &= \prod_{i=1}^k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_{i,1} - h < T_{i,1} \leq t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} - h < T_{i,n_i} \leq t_{i,n_i} | N(t_i^*) = n_i) P(N(t_i^*) = n_i)}{h^{n_i}} \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_{i,1} - h < T_{i,1} \leq t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} - h < T_{i,n_i} \leq t_{i,n_i}, N(t_i^*) = n_i)}{P(N(t_i^*) = n_i) h^{n_i}} P(N(t_i^*) = n_i) \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} P(N(0, t_{i,1} - h] = 0) P(N(t_{i,1} - h, t_{i,1}] = 1) P(N(t_{i,1}, t_{i,2} - h] = 0) \times \\
 &\quad \times P(N(t_{i,2} - h, t_{i,2}] = 1) \dots \times P(N(t_{i,n_i} - h, t_{i,n_i}] = 1) P(N(t_{i,n_i}, t_i^*] = 0) / h^{n_i} \\
 &= \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \prod_{l=1}^{n_i} P(N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h] = 0) P(N(t_{i,l} - h, t_{i,l}] = 1) \right\} \times \\
 &\quad \times P(N(t_{i,n_i}, t_i^*] = 0) / h^{n_i}
 \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned}
E[N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h)] &= \int_{t_{i,l-1}}^{t_{i,l}-h} \lambda_R(u) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p}) du \\
&= \Lambda_R(t_{i,l} - h) - \Lambda_R(t_{i,l-1}) - (1-\theta)[t_{i,l} - h - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E[N(t_{i,l} - h, t_{i,l})] &= \int_{t_{i,l}-h}^{t_{i,l}} \lambda_R(u) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p}) du \\
&= \Lambda_R(t_{i,l}) - \Lambda_R(t_{i,l} - h) - (1-\theta)[t_{i,l} - t_{i,l} - h] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P(N(t_{i,l-1}, t_{i,l} - h) = 0) &= \\
&= e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-h) + \Lambda_R(t_{i,l-1}) + (1-\theta)[t_{i,l}-h-t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(N(t_{i,l} - h, t_{i,l}) = 1) &= \\
&= e^{-\Lambda_R(t_{i,l}) + \Lambda_R(t_{i,l}-h) + (1-\theta)[t_{i,l}-t_{i,l}-h] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})} \times \\
&\times \left[\Lambda_R(t_{i,l}) - \Lambda_R(t_{i,l} - h) - (1-\theta)[t_{i,l} - t_{i,l} - h] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p}) \right]
\end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas equações no produto acima, temos:

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{k_1} f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i) = \\
& = \prod_{i=1}^{k_1} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \prod_{l=1}^{n_i} e^{-\Lambda_R(t_{i,l}-h) + \Lambda_R(t_{i,l-1}) + (1-\theta)[t_{i,l}-h-t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})} \times \right. \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_{i,l}) + \Lambda_R(t_{i,l}-h) + (1-\theta)[t_{i,l}-t_{i,l}-h] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})} \times \\
& \times \left[\Lambda_R(t_{i,l}) - \Lambda_R(t_{i,l}-h) - (1-\theta)[t_{i,l}-t_{i,l}-h] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p}) \right] \left. \right\} \times \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_i^*) + \Lambda_R(t_{i,n_i}) + (1-\theta)[t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p \lambda_R(t_{i,n_i-p})} / h^{n_i} \\
& = \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left\{ [\lambda_R(t_{i,l}) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})] \times \right. \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_{i,l}) + \Lambda_R(t_{i,l-1}) + (1-\theta)[t_{i,l}-t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i,l-1-p})} \left. \right\} \times \\
& \times e^{-\Lambda_R(t_i^*) + \Lambda_R(t_{i,n_i}) + (1-\theta)[t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p \lambda_R(t_{i,n_i-p})}
\end{aligned}$$

b. Encontrando o segundo termo da Equação 2:

Nos sistemas truncados por falha, a contribuição para a verossimilhança é a fdp conjunta dos tempos globais $Y_{j,1}, Y_{j,2}, \dots, Y_{j,n_j^*}$.

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) = \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} f(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1}) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \frac{d}{dt_{j,m}} F(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1}) \\
& = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \frac{d}{dt_{j,m}} (1 - R(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1})) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} R(t_{j,m} | t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-1})
\end{aligned}$$

$$0 < t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,n_j^*}.$$

Devido à propriedade de incrementos independentes, a função de confiabilidade condicional de $T_{j,m}$ dado $T_{j,1} = t_{j,1}$, $T_{j,2} = t_{j,2}, \dots, T_{j,m-1} = t_{j,m-1}$ é independente de $t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,m-2}$. Assim, a Equação anterior fica como:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) &= \\
&= \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} R(t_{j,m}|t_{j,m-1}) = \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} P(T_{j,m} > t_{j,m}|t_{j,m-1}) \\
&= \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} P(N(t_{j,m-1}, t_{j,m}] = 0) \\
&= \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} -\frac{d}{dt_{j,m}} e^{-\Lambda_R(t_{j,m}) + \Lambda_R(t_{j,m-1}) + (1-\theta)[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j,m-1-p})} \\
&= \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} [\lambda_R(t_{j,m}) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j,m-1-p})] \times \\
&\quad \times e^{-\Lambda_R(t_{j,m}) + \Lambda_R(t_{j,m-1}) + (1-\theta)[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j,m-1-p})}
\end{aligned}$$

$$0 < t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,n_j^*-1} < t_{j,n_j^*}.$$

pois

$$\begin{aligned}
E[N(t_{j,m-1}, t_{j,m})] &= \int_{t_{j,m-1}}^{t_{j,m}} \lambda_R(u) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j,m-1-p}) du \\
&= \Lambda_R(t_{j,m}) - \Lambda_R(t_{j,m-1}) - (1-\theta)[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j,m-1-p})
\end{aligned}$$

A função de verossimilhança em 2 é então dada por:

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} [f_{T_i|N(t_i^*)}(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | n_i) P(N(t_i^*) = n_i)] \times \prod_{j=1}^{k_2} f_{T_j}(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j^*}) \\
&= \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left\{ [\lambda_R(t_{i,l}) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i, l-1-p})] \times \right. \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_{i,l}) + \Lambda_R(t_{i, l-1}) + (1-\theta)[t_{i,l} - t_{i, l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, l-2)} \theta^p \lambda_R(t_{i, l-1-p})} \left. \right\} \times \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_i^*) + \Lambda_R(t_{i, n_i}) + (1-\theta)[t_i^* - t_{i, n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, n_i-1)} \theta^p \lambda_R(t_{i, n_i-p})} \times \\
&\times \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \left\{ [\lambda_R(t_{j,m}) - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j, m-1-p})] \times \right. \\
&\times e^{-\Lambda_R(t_{j,m}) + \Lambda_R(t_{j, m-1}) + (1-\theta)[t_{j,m} - t_{j, m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1, m-2)} \theta^p \lambda_R(t_{j, m-1-p})} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Assim, no PLP, a função de verossimilhança do modelo ARI_m é dada por:

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left[\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i,l}}{\eta} \right)^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right] \times \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i,l}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,l-1}}{\eta} \right)^\beta + (1-\theta)[t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i,l-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right\} \times \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_i^*}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{i,n_i}}{\eta} \right)^\beta + (1-\theta)[t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{i,n_i-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right\} \times \\
&\times \prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \left[\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{j,m}}{\eta} \right)^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right] \times \\
&\times \exp \left\{ - \left(\frac{t_{j,m}}{\eta} \right)^\beta + \left(\frac{t_{j,m-1}}{\eta} \right)^\beta + (1-\theta)[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_{j,m-1-p}}{\eta} \right)^{\beta-1} \right\} \\
&= \beta^{\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^*} \eta^{-\beta(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^*)} \times \\
&\times \left[\prod_{i=1}^{k_1} \prod_{l=1}^{n_i} \left(t_{i,l}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) \right] \times \\
&\times \left[\prod_{j=1}^{k_2} \prod_{m=1}^{n_j^*} \left(t_{j,m}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) \right] \times \\
&\times \exp \left\{ \eta^{-\beta} \left[\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left(-t_{i,l}^\beta + t_{i,l-1}^\beta + (1-\theta)\beta[t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) + \right. \right. \\
&+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left(-t_{j,m}^\beta + t_{j,m-1}^\beta + (1-\theta)\beta[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
&\left. \left. \sum_{i=1}^{k_1} \left(-t_i^{*\beta} + t_{i,n_i}^\beta + (1-\theta)\beta[t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}^{\beta-1} \right) \right] \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

Para encontrar estimativas de máxima verossimilhanca para os parâmetros, $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, a seguinte função de log-verossimilhanca deve ser maximizada numericamente:

$$\begin{aligned}
l(\mu) &= \log L(\mu) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\
&+ \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left(t_{i,l}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
&+ \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \log \left(t_{j,m}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
&+ \eta^{-\beta} \left[\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left(-t_{i,l}^{\beta} + t_{i,l-1}^{\beta} + (1-\theta)\beta[t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) \right] + \\
&+ \eta^{-\beta} \left[\sum_{j=1}^{k_2} \sum_{m=1}^{n_j^*} \left(-t_{j,m}^{\beta} + t_{j,m-1}^{\beta} + (1-\theta)\beta[t_{j,m} - t_{j,m-1}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,m-2)} \theta^p t_{j,m-1-p}^{\beta-1} \right) \right] + \\
&+ \eta^{-\beta} \left[\sum_{i=1}^{k_1} \left(-t_i^{*\beta} + t_{i,n_i}^{\beta} + (1-\theta)\beta[t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(M-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}^{\beta-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

Pode-se assumir que $\hat{\mu} = \arg \max L(\mu)$ segue aproximadamente uma distribuição normal multivariada, com média μ e matriz de covariância Σ dada por menos a inversa da matriz Hessiana de $l(\mu)$ avaliada em $\hat{\mu}$. A matriz Hessiana é dada portanto

$$H = - \left(\frac{\partial^2 l(\mu)}{\partial \mu \partial \mu^t} \right).$$

Assim, teoria assintótica pode ser usada para se construir intervalos de confiança para os parâmetros.

D Algoritmo proposto por Toledo et al.(2015) e Fernandes (2015) para a geração de $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do $ARA_m + PLP$

Utilize os valores estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar pseudodados dos tempos de falha para os K sistemas (os autores usaram um valor de K muito grande, 10000) por meio da execução do seguinte procedimento:

- a. Suponha que a q -ésima falha no sistema tenha ocorrido no tempo t_q .
- b. Seja $x = t_{q+1} - t_q$ o tempo entre as falhas q e $q + 1$ (duas falhas consecutivas).
- c. Seja m a ordem de memória do modelo ARA_m . Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) &= P(X \leq x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P(X > x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P[N(x + t_q) - N(t_q) = 0 | t_{q-m}, \dots, t_q] \\
 &= 1 - \exp \left[-\Lambda_R \left(x + t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p} \right) \right] \\
 &\quad \times \exp \left[\Lambda_R \left(t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p} \right) \right]
 \end{aligned}$$

A primeira linha do raciocínio acima descrito corresponde à probabilidade de haver um intervalo de tempo X entre duas falhas consecutivas, dado o histórico de falhas considerado no modelo. A probabilidade de que esse intervalo X seja menor ou igual a um valor específico x é complementar à probabilidade de que o $X > x$, ou ainda, igual à probabilidade de que entre os intervalos de tempo t_q e $t_q + x$ (tempo da próxima falha) pode haver falhas, dado o histórico de falhas observadas.

- d. Em seguida, o tempo de falha t_{q+1} é obtido a partir dos passos (a), (b) e (c):
 - (a) gere um valor u de uma variável aleatória com distribuição Contínua Uniforme $(0,1)$;

(b) resolva a equação $F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) = u$, encontrando o valor de x ;

(c) calcule $t_{q+1} = t_q + x$ usando a expressão abaixo:

$$t_{q+1} = \eta \left[\left(\frac{t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p}^{\beta}}{\eta} \right) - \log(1 - u) \right]^{\frac{1}{\beta}} + (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p}$$

Particularmente, se o PLP for usado, tendo encontradas anteriormente as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, usaremos

$$\hat{\Lambda}_R(t) = \left(\frac{t}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}}$$

e

$$\hat{\Lambda}_R^{-1}(t) = \hat{\eta} t^{1/\hat{\beta}}$$

e. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado no tempo t , utilizando recursivamente os passos (a) a (c). Os tempos de falha t_1, t_2, \dots, t_q são gerados até $t_{q+1} > T$.

E Algoritmo proposto por Fernandes (2015) para a geração de $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do $ARI_m + PLP$

Utilize os valores estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar pseudodados dos tempos de falha para os K sistemas (pode-se usar um valor de K muito grande, como 10000, por exemplo) por meio da execução do seguinte procedimento:

- a. Suponha que a q -ésima falha no sistema tenha ocorrido no tempo t_q .
- b. Seja $x = t_{q+1} - t_q$ o tempo entre as falhas q e $q + 1$ (duas falhas consecutivas).
- c. Seja m a ordem de memória do modelo ARI_m . Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) &= P(X \leq x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P(X > x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P[N(x + t_q) - N(t_q) = 0 | t_{q-m}, \dots, t_q] \\
 &= 1 - \exp \left[-\Lambda_R(t_q + x) + \Lambda_R(t_q) + x(1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p \lambda_R(t_{q-p}) \right] \\
 &= \log(1 - u)
 \end{aligned}$$

Novamente, é válido destacar que a primeira linha do raciocínio acima se refere à probabilidade de haver um intervalo de tempo X entre duas falhas consecutivas, dado o histórico de falhas considerado no modelo. Sabemos que a probabilidade de que esse intervalo X seja menor ou igual a um valor específico x é complementar à probabilidade de que $X > x$, (também igual à probabilidade de que entre os intervalos de tempo t_q e $t_q + x$ pode haver falhas, dado o histórico de falhas observadas).

- d. Em seguida, o tempo de falha t_{q+1} é obtido a partir dos passos (a), (b) e (c):
 - (a) gere um valor u de uma variável aleatória com distribuição Contínua Uniforme $(0,1)$;

(b) resolva a equação $F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) = u$, encontrando o valor de x ;

(c) calcule $t_{q+1} = t_q + x$ usando a equação abaixo:

$$(t_q + x)^\beta - t_q^\beta - x\beta(1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p (t_{q-p})^\beta + \eta^\beta \log(1 - u) = 0$$

Particularmente, se o PLP for usado, tendo encontradas anteriormente as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, usaremos

$$\hat{\Lambda}_R(t) = \left(\frac{t}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}}$$

e

$$\hat{\Lambda}_R^{-1}(t) = \hat{\eta} t^{1/\hat{\beta}}$$

e. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado no tempo t , utilizando recursivamente os passos (a) a (c). Os tempos de falha t_1, t_2, \dots, t_q são gerados até $t_{q+1} > T$.

F Algoritmo proposto por Toledo *et al.* (2015) para a determinação da função média $\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t)$

Suponha que um sistema seja observado e que $N(t) = \sum_{j=1}^n I(t \geq t_j)$ seja o número de falhas observadas nesse sistema até o tempo t (com tempos de falhas $0 < t_1 < \dots < t_n < T$). Para um sistema truncado no tempo, o risco será $Y(t) = I(0 \leq t \leq T)$.

A partir dessas considerações, o algoritmo seguinte será útil para calcular a função média $\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t)$:

- a. Faça $i_0 = 0$;
- b. repita até $i_{E+1} = m + 1$. Faça i_{h+1} como o índice que minimiza a inclinação entre $(i_h, i_h - 1)$ e $(t_i, i - 1)$ com $i = (i_h + 1), \dots, (n + 1)$;
- c. a constante de NPMLE é então dada por

$$\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t) = \frac{i_{j+1} - i_j}{t_{i_{j+1}} - t_j}$$

com $t_{i_j} < t \leq t_{i_{j+1}}$.

G Cálculo das estatísticas de função de distribuição empírica

Antes do cálculo das estatísticas função de distribuição empírica alguns conceitos que serão utilizados.

G.1 Preliminares

Inicialmente, faremos as seguintes considerações:

- Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória que tem função de distribuição F .
- $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ são as estatísticas de ordem da amostra X_1, X_2, \dots, X_n .
- A função de distribuição empírica pode ser escrita em termos das estatísticas de ordem de modo que, se $x \in [X_{(i)}, X_{(i+1)}]$ então, $F_{n,S}(x) = \frac{i}{n}$, onde $S(s|T_i; \theta) := P(T_{i+1} - T_i > s | T_i; \theta) = \exp(-\Phi_{T_i+s}(\theta) + \Phi_{T_i}(\theta))$, para $s \geq 0$, conforme equação 2.26.
- Do fato de F ser não decrescente segue que, $I(X_i \leq x) = 0 \iff X_i \geq x \iff F(X_i) \geq F(x) \iff I(F(X_i) \leq F(x)) = 0$. Analogamente provamos que $I(X_i \leq x) = 1 \iff I(F(X_i) \leq F(x)) = 1$. Portanto,

$$I(X_i \leq x) = I(F(X_i) \leq F(x))$$

- Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F . A transformação de X tal que $Y = F(X)$ é denominada transformação integral de probabilidade.
- **Teorema G.1 (Teorema da transformação de probabilidade)** Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição F . Então, $U = F(X)$ terá distribuição Uniforme Contínua em $[0, 1]$. Vale a recíproca, sendo $U \sim U_c[0, 1]$, então $X = F^{-1}(U)$ terá função de distribuição F .
- Da definição de função de distribuição empírica e de G.1 segue que,

$$F_{n,S}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(F(X_i) \leq F(x))$$

Do teorema da transformação de probabilidade e da equação anterior temos,

$$F_{n,S}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(U_i \leq F(x))$$

em que os U_i 's são variáveis aleatórias uniformes contínuas no intervalo $(0, 1)$ e $0 \leq F(x) \leq 1$. Então, $F_{n,S}(x) = U_n(F(x))$ em que $U_n(x)$ é a função de distribuição empírica de uma amostra de variáveis aleatórias $U(0,1)$.

- Redefinindo $F(x) = t$ temos que $F_{n,S}(x) = U_n(x)$. Assim no lugar de trabalhar com a versão original podemos trabalhar com a versão modificada usando transformação integral de probabilidade. Assim tomamos, $F(X_i; \hat{\theta}) = U_i$, $F(x; \hat{\theta}) = t$ e $F_{n,S}(x; \hat{\theta}) = U_n(t)$.

G.2 Cálculo da estatística de Cramér-von Mises

A estatística de Cramér-von Mises foi dada em 2.28 por:

$$CvM = n \int_{-\infty}^{\infty} /F_{n,S}(x) - x/{}^2 dx$$

Como x é a distribuição referência especificada na hipótese nula podemos usar a versão modificada proposta acima e assim,

$$CvM = n \int_0^1 (U_n(t) - t)^2 dt$$

onde, $t = F(x; \hat{\theta})$, $0 \leq t \leq 1$ e $U_n(t)$ é a função de distribuição empírica de uma amostra de variáveis aleatórias $\mathcal{U}[0,1]$.

Escrevendo em função das estatísticas de ordem e usando a função de distribuição empírica em sua forma escada temos,

$$CvM = \sum_{i=0}^n \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(\frac{i}{n} - t \right)^2 dt \quad (G.1)$$

em que $u_i = U_{(i)}$. Ou seja, $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+1} = 1$ são estatísticas de ordem de uma variável aleatória $\mathcal{U}[0,1]$.

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(\frac{i}{n} - t \right)^2 dt &= \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{2it}{n} + t^2 \right) dt \\ &= \frac{i^2}{n^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{i}{n}(u_{i+1}^2 - u_i^2) + \frac{1}{3}(u_{i+1}^3 - u_i^3) \end{aligned}$$

Logo, substituindo o resultado anterior em G.1,

$$\begin{aligned} CvM &= n \sum_{i=0}^n \left[\frac{i^2}{n^2}(u_{i+1} - u_i) - \frac{i}{n}(u_{i+1}^2 - u_i^2) + \frac{1}{3}(u_{i+1}^3 - u_i^3) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2(u_{i+1} - u_i) - \sum_{i=0}^n i(u_{i+1}^2 - u_i^2) + \frac{n}{3} \sum_{i=0}^n i(u_{i+1}^3 - u_i^3) \end{aligned} \quad (G.2)$$

a. Encontrando o primeiro somatório da Equação $G.2$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2(u_{i+1} - u_i) &= \frac{1}{n} \{0(u_1 - u_0) + 1(u_2 - u_1) + 2^2(u_3 - u_2) + \cdots + (n-1)^2(u_n - u_{n-1}) + \\
&+ n^2(u_{n+1} - u_n)\} \\
&= \frac{1}{n} \{-0u_0 + (0-1)u_1 + (1-2^2)u_2 + (2^2-3^2)u_3 + \cdots + ((n-1)^2 - n^2)u_n + \\
&+ n^2u_{n+1}\} \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n ((i-1)^2 - i^2)u_i + n^2u_{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1 - i^2)u_i + n^2 \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (-2i + 1)u_i + n^2 \right] \\
&= -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i - 1)u_i \right] + n
\end{aligned}
\tag{G.3}$$

c. Encontrando o segundo somatório da Equação $G.2$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n i(u_{i+1}^2 - u_i^2) &= 0(u_1^2 - u_0^2) + 1(u_2^2 - u_1^2) + 2(u_3^2 - u_2^2) + 3(u_4^2 - u_3^2) + \cdots + \\
&+ (n-1)(u_n^2 - u_{n-1}^2) + n(u_{n+1}^2 - u_n^2) \\
&= -u_1^2 + (1-2)u_2^2 + (2-3)u_3^2 + (3-4)u_4^2 + \cdots + (n-1-n)u_n^2 + nu_{n+1}^2 \\
&= -\sum_{i=1}^n u_i^2 + n
\end{aligned}
\tag{G.4}$$

e. Encontrando o terceiro somatório da Equação da Equação $G.2$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{n}{3} \sum_{i=0}^n i(u_{i+1}^3 - u_i^3) &= \frac{n}{3}(u_1^3 - u_0^3 + u_2^3 - u_1^3 + u_3^3 - u_2^3 + u_4^3 - u_3^3 + \cdots + u_n^3 - u_{n-1}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^3) \\
&= \frac{n}{3}(-u_0^3 + u_{n+1}^3) \\
&= \frac{n}{3}(-0 + 1) \\
&= \frac{n}{3}
\end{aligned}$$

(G.5)

Portanto, substituindo $G.3$, $G.4$ e $G.5$ em $G.2$, segue que:

$$\begin{aligned}
CvM &= -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1)u_i \right] + n - \left(-\sum_{i=1}^n u_i^2 + n \right) + \frac{n}{3} \\
&= -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1)u_i \right] + n + \sum_{i=1}^n u_i^2 - n + \frac{n}{3} \\
&= -\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1)u_i \right] + \sum_{i=1}^n u_i^2 + \frac{n}{3} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{2i-1}{n}u_i + u_i^2 + \frac{n}{3} \right\}
\end{aligned}$$

(G.6)

Note da equação anterior que:

$$-\frac{(2i-1)}{n}u_i + u_i^2 = u_i^2 - 2\frac{(i-1/2)}{n}u_i$$

Completando quadrados:

$$\begin{aligned}
u_i^2 - 2\frac{(i-1/2)}{n}u_i &= \left(u_i^2 - 2\frac{(i-1/2)}{n}u_i + \frac{(i-1/2)^2}{n^2} \right) - \frac{(i-1/2)^2}{n^2} \\
&= \left(\frac{i-1/2}{n}u_i \right)^2 - \frac{(i-1/2)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

(G.7)

Substituindo G.7 em G.6

$$\begin{aligned}
 CvM &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{i-1/2}{n} u_i \right)^2 - \frac{(i-1/2)^2}{n^2} \right] + \frac{n}{3} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1/2}{n} u_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1/2)^2}{n} \right)^2 + \frac{n}{3}
 \end{aligned}$$

(G.8)

Tomando os dois últimos termos da equação anterior, temos que:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1/2)^2}{n} \right)^2 + \frac{n}{3} &= \frac{n}{3} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \\
 &= \frac{n}{3} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} + \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{4n^2 - 2(n+1)(2n+1)2 + 6(n+1) - 3}{12n} \\
 &= \frac{1}{12n}
 \end{aligned}$$

(G.9)

Portanto, usando a Equação G.9, pode-se reescrever a Equação G.8 como:

$$CvM = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1/2}{n} u_i \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

Como $F(X_i; \hat{\theta}) = U_i$, $F(x; \hat{\theta}) = t$ e $F_{n,S}(x; \hat{\theta}) = U_n(t)$, temos que a equação anterior pode ser reescrita como:

$$CvM_u(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n (U_{(i-1)}(\hat{\theta}) - \frac{2i-1}{2n})^2 + \frac{1}{12n}$$

G.3 Cálculo da estatística Anderson-Darling

A estatística de Anderson-Darling foi definida em 2.29 por,

$$AD_u(\hat{\theta}) = n \int_0^1 \frac{(F_{n,S}(x) - x)^2}{x(1-x)} dx$$

Analogamente ao que foi feito na estatística de Cramér-von-Mises vamos considerar $F(x, \theta) = x = t$, e $F_{n,S}(x) = U_n(t)$ e usar a definição de função de distribuição empírica em sua forma escada. De forma que,

$$AD = n \int_0^1 \frac{\{U_n(t) - t\}^2}{\{t(1-t)\}} dt = n \sum_{i=0}^{u_{i+1}} n \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i/n - t^2}{t(1-t)} dt \quad (G.10)$$

Da equação anterior, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i/n - t^2}{t(1-t)} dt &= \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{(i^2/n^2) - 2(i/n)t + t^2}{t(1-t)} dt \\ &= \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i^2}{n^2 t(1-t)} dt - \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{2i}{n(1-t)} dt + \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{t}{1-t} dt \end{aligned} \quad (G.11)$$

Resolvendo a primeira integral da Equação $G.11$, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i^2}{n^2 t(1-t)} dt &= \frac{i^2}{n^2} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{1}{t(1-t)} dt = \frac{i^2}{n^2} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{(1-t)} \right] dt \\
&= \frac{i^2}{n^2} (\log u_{i+1} - \log(1 - u_{i+1}) - \log u_i + \log(1 - u_i))
\end{aligned}
\tag{G.12}$$

Resolvendo a segunda integral da Equação $G.11$, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{2i}{n(1-t)} dt &= \frac{2i}{n} \log(1 - u_{i+1}) - \frac{2i}{n} \log(1 - u_i) \\
&= \frac{2i}{n} (\log(1 - u_{i+1}) - \log(1 - u_i))
\end{aligned}
\tag{G.13}$$

Resolvendo a terceira integral da Equação $G.11$, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{t}{1-t} dt &= -u_{i+1} - \log(1 - u_{i+1}) + u_i + \log(1 - u_i) \\
&= (u_i - u_{i+1}) + (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1}))
\end{aligned}
\tag{G.14}$$

Substituindo $G.12$, $G.13$ e $G.14$ em $G.11$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i/n - t^2}{t(1-t)} dt &= \frac{i^2}{n^2} (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1})) + \frac{i^2}{n^2} (\log(u_{i+1}) - \log u_i) + \\
&+ \frac{2i}{n} (\log(1 - u_{i+1}) - \log(1 - u_i)) + (u_i - u_{i+1}) + (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1}))
\end{aligned}$$

De modo que, substituindo o resultado acima em $G.10$, temos:

$$\begin{aligned}
AD &= n \sum_{i=0}^n \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{i/n - t^2}{t(1-t)} dt \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2 (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1})) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2 (\log(u_{i+1}) - \log u_i) + \\
&+ \sum_{i=0}^n 2i (\log(1 - u_{i+1}) - \log(1 - u_i)) + n \sum_{i=0}^n (u_i - u_{i+1}) + \\
&+ n \sum_{i=0}^n (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1}))
\end{aligned} \tag{G.15}$$

Resolvendo o primeiro somatório da Equação $G.15$ (S_1), tem-se :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2 (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1})) \\
&= \frac{1}{n} \{ 0(\log(1 - u_0) - \log(1 - u_1)) + 1(\log(1 - u_1) - \log(1 - u_2)) + \\
&+ 2^2(\log(1 - u_2) - \log(1 - u_3)) + 3^2(\log(1 - u_3) - \log(1 - u_4)) + \dots + \\
&+ (n-1)^2(\log(1 - u_{n-1}) - \log(1 - u_n)) + n^2(\log(1 - u_n) - \log(1 - u_{n+1})) \} \\
&= \frac{1}{n} \log(1 - u_1) + (2^2 - 1)\log(1 - u_2) + (3^2 - 2^2)\log(1 - u_3) + \dots + \\
&+ (n^2 - (n-1)^2)\log(1 - u_n) - n^2\log(1 - u_{n+1}) \} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (i^2 - (i-1)^2) \log(1 - u_i) \right] - n^2 \log(1 - u_{n+1}) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n (2i-1) \log(1 - u_i) \right] - n^2 \log(1 - u_{n+1}) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log(1 - u_i) - n \log(1 - u_{n+1})
\end{aligned} \tag{G.16}$$

Resolvendo o segundo somatório da Equação G.15(S₂), tem-se :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n i^2 (\log(u_{i+1}) - \log u_i) \\
&= \frac{1}{n} \{0 \log u_1 - 0 \log u_0 + 1(\log u_2 - \log u_1) + 2^2(\log u_3 - \log u_2) + \dots + \\
&+ (n-1)^2(\log u_n - \log u_{n-1}) + n^2(\log u_{n+1} - \log u_n)\} \\
&= \frac{1}{n} \{-\log u_1 + (1-2^2)\log u_2 + (2^2-3^2)\log u_3 + \dots + ((n-1)^2 - n^2)\log u_n \\
&+ n^2 \log u_{n+1}\} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((i-1)^2 - i^2) \log u_i + n \log u_{n+1} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log u_i + n \log u_{n+1}
\end{aligned}
\tag{G.17}$$

Resolvendo o terceiro somatório da Equação G.15(S₃), tem-se :

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{i=0}^n 2i (\log(1-u_{i+1}) - \log(1-u_i)) \\
&= 2[1(\log(1-u_2) - \log(1-u_1)) + 2(\log(1-u_3) - \log(1-u_2)) \\
&+ 3(\log(1-u_4) - \log(1-u_3)) + \dots + (n-1)(\log(1-u_n) - \log(1-u_{n-1})) \\
&+ n(\log(1-u_{n+1}) - \log(1-u_n))] \\
&= -2 \sum_{i=1}^n \log(1-u_i) + 2n \log(1-u_{n+1})
\end{aligned}
\tag{G.18}$$

Resolvendo o quarto somatório da Equação $G.15(S_4)$, tem-se :

$$\begin{aligned}
 S_4 &= n \sum_{i=0}^n (u_i - u_{i+1}) \\
 &= n[(u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{n-1} - u_n) \\
 &\quad + (u_n - u_{n+1})] \\
 &= n(u_0 - u_{n+1})
 \end{aligned}
 \tag{G.19}$$

Resolvendo o quinto somatório da Equação $G.15(S_5)$, tem-se :

$$\begin{aligned}
 S_5 &= n \sum_{i=0}^n (\log(1 - u_i) - \log(1 - u_{i+1})) \\
 &= n\{[\log(1 - u_0) - \log(1 - u_1)] + [\log(1 - u_1) - \log(1 - u_2)] + \\
 &\quad + [\log(1 - u_2) - \log(1 - u_3)] + \cdots + [\log(1 - u_{n-1}) - \log(1 - u_n)] + \\
 &\quad + [\log(1 - u_n) - \log(1 - u_{n+1})]\} \\
 &= n\log(1 - u_0) - n\log(1 - u_{n+1})
 \end{aligned}
 \tag{G.20}$$

Portanto, substituindo $G.16$, $G.17$, $G.18$, $G.19$ e $G.20$ em $G.15$, pode-se reescrever a

estatística Anderson-Darling como:

$$\begin{aligned}
AD &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log(1-u_i) \right] - n \log(1-u_{n+1}) - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log u_i \right] + \\
&+ n \log u_{n+1} - 2 \sum_{i=1}^n \log(1-u_i) + 2n \log(1-u_{n+1}) + n(u_0 - u_{n+1}) + \\
&= n \log(1-u_0) - n \log(1-u_{n+1}) \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (2i-1) \log(1-u_i) - (2i-1) \log(u_i) - 2n \log(1-u_i) \right] + n(u_0 - u_{n+1}) \\
&= -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i-1) \log(u_i) + (2n+1-2i) \log(1-u_i)]
\end{aligned}$$

Como $F(X_i; \hat{\theta}) = U_i$, $F(x; \hat{\theta}) = t$ e $F_{n,S}(x; \hat{\theta}) = U_n(t)$, temos que a equação anterior pode ser reescrita como:

$$AD_u(\hat{\theta}) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \log(U_{(i-1)}(\hat{\theta})) + \log(1 - U_{(n-i)}(\hat{\theta})) \}$$

H Códigos R

H.1 Código do R para o Teste Binomial Exato de Gilardoni et al.(2017)

```
#
# Teste Não-paramétrico Binomial para Reparo Imperfeito
#

#####
##### Método Gerador de PLP - ARA #####
#####

library("ImperfectRepair")

#####
##### Obtendo as Frequências #####
#####
frequencias <- function(dados){
  frequencias <- abs(diff(dados[, 1]))
  frequencias[which(frequencias != 0)] <- -1
  frequencias[which(frequencias == 0)] <- 1
  frequencias[which(frequencias == -1)] <- 0
  return(frequencias)
}

#####
##### Tratamento dos Dados #####
#####
trat.dados <- function(dados, systems){
  dados <- cbind(dados[, 3], dados[, 1])
  dados[, 1] <- dados[order(dados[, 2])]
  dados[, 2] <- sort(dados[, 2])
  n.dados <- length(dados[, 1]) - systems
  dados <- dados[1:n.dados, ]
  return(dados)
}

#####
##
##### Teste Exato Binomial
#####
#####
##
test.binomial.plp <- function(x, systems, n.esperado){
  rejeitab10 <- 0
  rejeitab5 <- 0
  resultado <- c(0,0)
  for(i in 1:length(x)){
    a <- binom.test(x[i], n.esperado, p = 1 / systems, alternative = c("less"))
    if(a$p.value < 0.05) rejeitab5 <- rejeitab5 + 1
    if(a$p.value < 0.10) rejeitab10 <- rejeitab10 + 1
  }
}
```

```

}
resultado[1] <- rejeitab5 / n.iteracoes
resultado[2] <- rejeitab10 / n.iteracoes
return(resultado)
}

#####
##
##### Gerando a Matriz de Uns (n.iteracoes x n.esperado)
#####
#####
##
vetor.de.somas <- function(parameters, mod, trunc, systems, M = m, n.iteracoes,
n.esperado){
  vetor <- c(0)
  i <- 1                      ## i-esima iteracao
  j <- 0                      ## numero de geracoes

  while(i <= n.iteracoes){
    j <- j + 1
    gera <- PLPIR.sim(parameters, mod, trunc, systems, M = m)
    k <- length(gera[ , 1]) - systems
    if(k == n.esperado){
      dados <- trat.dados(gera, systems)          ## transforma os dados
      gerados na forma para o teste binomial
      freqs <- frequencias(dados)              ## transforma os dados em
      frequencias
      vetor <- cbind(vetor, sum(freqs))         ## armazena as somas das
      frequencias em um vetor
      i <- i + 1
    }
  }

  print(j)
  return(c(vetor[2:i], j))
}

recorte <- function(parameters, mod, trunc, systems, m, n.iteracoes, intervalo){
  media <- rep(0, n.iteracoes)
  for(i in 1:n.iteracoes){
    gera <- PLPIR.sim(parameters, mod, trunc, systems, M = m)
    dados <- trat.dados(gera, systems)
    media[i] <- length(dados[ , 1])
  }
  n.esperado <- round(mean(media))

  recortes <- seq(n.esperado - intervalo, n.esperado + intervalo, 1)
  result <- matrix(NA, length(recortes), 4)

  for(i in 1:length(recortes)){
    x <- vetor.de.somas(parameters, mod, trunc, systems, m, n.iteracoes,
recortes[i])
    teste <- test.binomial.plp(x[1:n.iteracoes], systems, recortes[i])
    result[i, 1] <- recortes[i]
    result[i, 2] <- teste[1]
    result[i, 3] <- teste[2]
  }
}

```



```

    result[i, 4] <- x[n.iteracoes + 1]
  }
  return(result)
}

beta      <- c(1.5, 2)
eta       <- 1.0
theta     <- 0.1
mod       <- "ARI"
m         <- 1
a         <- 1
intervalo <- 10
systems   <- c(5, 10)      # systems number0
trunc     <- c(5, 10, 15) # truncation time
n.iteracoes <- 10 ^ 4
qtdade    <- length(beta)*length(systems)*length(trunc)
name.row  <- seq(1, qtdade, 1)
resultado <- array(NA, dim = c(2 * intervalo + 1, 4, length(name.row)))

colnames(resultado) <- c("n+", "alpha.05", "alpha.10", "n.geracoes")

ptm <- proc.time()

for(i in 1:length(systems)){
  for(j in 1:length(trunc)){
    for(l in 1:length(beta)){
      print(c(systems[i], trunc[j], beta[l]))
      print(c(i, j, l))
      print(a)
      parameters <- c(beta[l], eta, theta)
      time.total <- trunc[j]
      n.systems <- systems[i]
      result <- recorte(parameters, mod, time.total, n.systems, m,
n.iteracoes, intervalo)
      for(p in 1:length(result[, 1])){
        resultado[p, , a] <- result[p, ]
      }
      print(resultado[, , a])
      a <- a + 1
    }
  }
}

proc.time() - ptm

```

H.2 Código do R para o Teste Multinomial de Gilardoni et al.(2017)

```
#
# Teste Não-paramétrico Multinomial para Reparo Imperfeito
#

#####
##### Método Gerador de PLP - ARA #####
#####

library("ImperfectRepair")
library("varComp",

lib.loc="/Library/Frameworks/R.framework/Versions/3.0/Resources/Library")
require(varComp)

#####
##### Tratamento dos Dados #####
#####
trat.dados <- function(dados){
  ## Elimina os tempos de censura apenas para essa simulacao
  n.sistemas <- max(dados[, 3])
  ## Ordena os tempos de falhas em ordem crescente (numero do sistema
acompanha)
  dados <- cbind(dados[, 3], dados[, 1])
  dados[, 1] <- dados[order(dados[, 2])]
  dados[, 2] <- sort(dados[, 2])
  n.dados <- length(dados[, 1]) - n.sistemas
  dados <- dados[1:n.dados, ]
  return(dados)
  ## retorna os dados no formato do teste
}

#####
##### Definindo o tamanho n.menos- #####
#####
definindo.n.menos <- function(dados, n.sistemas){
  ## n.menos representa o menor indice ao qual a penultima falha
tenha ocorrido
  vetor.n.menos <- rep(0, 1, n.sistemas)
  i <- 1
  while(sum(vetor.n.menos) < n.sistemas - 1){
    vetor.n.menos[dados[i, 1]] <- 1
    i <- i + 1
  }
  n.menos <- i - 1
  return(n.menos)
}

#####
##### Matriz Rank #####
#####
matriz.rank <- function(dados, n.sistemas){
  matriz.rank <- matrix(NA, length(dados[, 1]), n.sistemas)
```

```

vetor.rank <- rep(1, 1, n.sistemas)
rank.vetor <- rep(0, 1, length(dados[, 1]))
for(i in 1:length(dados[, 1])){
  vetor.rank[dados[i, 1]] <- 0
  vetor.rank <- vetor.rank + 1
  matriz.rank[i, ] <- rank(vetor.rank, ties.method = "min")
}
return(matriz.rank)
}
#####
##### Obtendo as Frequencias #####
#####
obtendo.frequencias <- function(dados, n.sistemas){
  matrix.rank <- matriz.rank(dados, n.sistemas)
  n.menos <- definindo.n.menos(dados, n.sistemas)
  frequencia <- matrix(0, length(dados[, 1]), n.sistemas)
  for(i in n.menos:(length(dados[, 1])) - 1){
    vetor.frequencia <- rep(0, 1, n.sistemas)
    vetor.frequencia[matrix.rank[i, dados[i + 1, 1]]] <- 1
    frequencia[i, ] <- vetor.frequencia
  }
  return(colSums(frequencia))
}
## n.mais e o numero total de falhas
#####
##### Calculando os p's #####
#####
calculando.novafreqs <- function(freqs){

  probs <- freqs / sum(freqs)
  K <- length(freqs)
  probs.ac <- cumsum(probs)
  ord <- 0
  absc <- 0
  k1 <- 0

  while(k1 < K){
    k2 <- which.min((probs.ac[(k1 + 1) : K] - ord) / (((k1 + 1) : K) - absc))
    probs[(k1 + 1) : (k1 + k2)] <- (probs.ac[k1 + k2] - ord) / k2
    ord <- probs.ac[k1 + k2]
    absc <- k1 + k2
    k1 <- k1 + k2
  }

  freqs <- probs * sum(freqs)
  return(freqs)
}
#####
##### Teste Exato Multinomial #####
#####
##
test.multinomial.plp <- function(x){

  rejtab10 <- 0
  rejtab5 <- 0

```

```

resul tado  <- c(0,0)
n. execucoes <- length(x[ , 1])

for(i in 1:n. execucoes){
  nova. freqs <- calculando.novafreqs(x[i, ])
  obs      <- n. sistemas * sum(nova. freqs) * sum((nova. freqs /
sum(nova. freqs) - 1 / n. sistemas) ^ 2)
  vi      <- matrix(0.5, nrow = (n. sistemas - 1), ncol = (n. sistemas - 1))

  for(i in 1:(n. sistemas - 1)) vi[i, i] <- 1

  chi. pv   <- sum(wchibarsq(V = vi)[(n. sistemas - 1):1] * (1 - pchisq(obs,
df = 1:(n. sistemas - 1))))

  if(chi. pv < 0.05) rej e i tab5  <- rej e i tab5  + 1
  if(chi. pv < 0.10) rej e i tab10 <- rej e i tab10 + 1
}

resul tado[1] <- rej e i tab5  / n. execucoes
resul tado[2] <- rej e i tab10 / n. execucoes
return(resul tado)
}
#####
##
##### Gerando a Matriz de Uns (n.n. execucoes x n. esperado)
#####
#####
##
matriz. frequencias <- function(parametros, modelo, tempo. trunc, n. sistemas, M =
m, n. execucoes, recortes){
  matriz. recortes  <- array(NA, dim = c(length(recortes), n. execucoes,
(n. sistemas + 1)))          ## calcular 21 matrizes de tamanho
10 ^ 4 x n. sistemas

                                ## cada matriz para um valor de variacao do n. esperado
for(r in 1:length(recortes)){
  q <- 1
  cont <- 1
  while(q <= n. execucoes){
    gera      <- PLPIR.sim(parametros, modelo, tempo. trunc, n. sistemas, M =
m)
    dados     <- trat.dados(gera)
    if(length(dados[, 1]) == recortes[r]){
      matriz. recortes[r, q, 1:n. sistemas ] <- c(obtendo. frequencias(dados,
n. sistemas))
      q <- q + 1
    }
    cont <- cont + 1
  }
  matriz. recortes[r, , n. sistemas + 1] <- cont
}
return(matriz. recortes)
}
#####
##
##### calculando o n. esperado

```

```

#####
#####
##
n.esperado <- function(parametros, modelo, tempo.trunc, n.sistemas, M = m,
n.execucoes){
  media <- rep(0, n.execucoes)
  for(i in 1:n.execucoes){
    gera <- PLPIR.sim(parametros, modelo, tempo.trunc, n.sistemas, M = m)
    dados <- trat.dados(gera)
    media[i] <- length(dados[, 1])
  }
  n.esperado <- round(mean(media))
  return(n.esperado)
}

#####
##
##### Parametros
#####
#####
##
beta <- c(1.5, 2)
eta <- 1.0
theta <- 1.0
modelo <- "ARA"
m <- 1
intervalo <- 10
sistemas <- c(5, 10) # systems number0
trunc <- c(5, 10) # truncation time
n.execucoes <- 10 ^ 4
qtdade <- length(beta)*length(sistemas)*length(trunc)
resultados <- array(NA,dim = c(2 * intervalo + 1, 4, qtdade))
colnames(resultados) <- c("n+", "alpha.05", "alpha.10", "n.execucoes")

p <- 1
ptm <- proc.time()
for(i in 1:length(sistemas)){
  for(j in 1:length(trunc)){
    for(l in 1:length(beta)){
      print(c(sistemas[i], trunc[j], beta[l]))
      print(c(i, j, l))
      print(p)
      parametros <- c(beta[l], eta, theta)
      tempo.trunc <- trunc[j]
      n.sistemas <- sistemas[i]
      media <- n.esperado(parametros, modelo, tempo.trunc, n.sistemas,
M = m, n.execucoes)
      print(paste("o n.esperado é:", media))
      recortes <- seq(media - intervalo, media + intervalo, 1)
      print(recortes)
      matriz.exec <- matriz.frequencias(parametros, modelo, tempo.trunc,
n.sistemas, M = m, n.execucoes, recortes)
      print("matrix.exec calculada")
      result <- matrix(NA, length(recortes), 4)
      for(a in 1:length(recortes)){
        print(a)

```

```
x <- matriz.exec[a, , 1:n.sistemas]
result[a, 1] <- recortes[a]
result[a, 2:3] <- test.multinomial.plp(x)
result[a, 4] <- matriz.exec[a, , n.sistemas + 1][1]
}
print(result)
resultados[ , , p] <- result
p <- p + 1
}
}
}
proc.time() - ptm
```