

**DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO À
FLAMBAGEM LATERAL COM DISTORÇÃO DE VIGAS MISTAS
CONTÍNUAS E SEMICONTÍNUAS**

João Victor Fragoso Dias

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"DETERMINAÇÃO DO MOMENTO CRÍTICO ELÁSTICO À
FLAMBAGEM LATERAL COM DISTORÇÃO DE VIGAS MISTAS
CONTÍNUAS E SEMICONTÍNUAS"**

João Victor Fragoso Dias

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury
DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall
DEES - UFMG

Profa. Dra. Adenilcia Fernanda Grobério Calenzani
UFES

Belo Horizonte, 21 de junho de 2018

D541d

Dias, João Victor Fragoso.

Determinação do momento crítico elástico à flambagem lateral com distorção de vigas mistas contínuas e semicontínuas [manuscrito] / João Victor Fragoso Dias. – 2018.

ix, 117 f., enc.: il.

Orientador: Ricardo Hallal Fakury.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 100-117.

Bibliografia: f. 97-99.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Flambagem (Mecânica) - Teses. 3. Construção mista - Teses. 4. Vigas - Teses. I. Fakury, Ricardo Hallal. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças para realizar este trabalho.

Aos meus pais, Eduardo e Roberta, que me incentivaram desde sempre a estudar e a procurar o conhecimento, com todo o apoio de que sempre precisei.

Ao professor Ricardo Hallal Fakury, orientador deste trabalho, por todos os aconselhamentos e pela confiança investida em mim desde o início do mestrado.

À colega Janaína Pena Soares de Oliveira por todas as valiosas discussões e contribuições no decorrer do trabalho.

A todos os colegas de pós-graduação, especialmente à Gabriela Marinho Fonseca, Larissa Novelli, Luiza Cardoso Ribas e Castro, José Onésimo Gomes Júnior e Lucas Aleksander Faccini Fioresi, por todo o apoio e amizade, tanto na Universidade quanto em Belo Horizonte.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG.

Ao CNPq pelo suporte a esta pesquisa.

RESUMO

Muita atenção tem sido dada ao longo dos últimos anos às vigas mistas de aço e concreto devido aos ganhos de resistência e rigidez obtidos com o pequeno custo de se instalar uma conexão de cisalhamento entre o perfil de aço e a laje de concreto. Nas vigas mistas contínuas e semicontínuas, junto aos apoios internos, desenvolvem-se momentos fletores negativos que comprimem a mesa inferior do perfil de aço e a viga se torna, então, suscetível a uma flambagem conhecida como flambagem lateral com distorção (FLD), caracterizada por um deslocamento lateral e giro da mesa inferior do perfil, acompanhados de distorção da alma. O procedimento de cálculo das normas de projeto brasileira e europeia para essas vigas consiste na redução do momento fletor último da seção transversal com base em um parâmetro adimensional, calculado a partir de seu índice de esbeltez reduzido. O índice de esbeltez reduzido, por sua vez, necessita em seu cálculo de uma determinação do momento crítico elástico à FLD das vigas. Na literatura, diversas formulações são propostas para a determinação desse momento, entre elas, as mais conhecidas são as de Roik *et al.* (1990), adotada pela ABNT NBR 8800:2008, e de Hanswille *et al.* (1998). No presente trabalho, um novo procedimento, desenvolvido com base na teoria de vigas em base elástica, é proposto para a determinação do momento crítico elástico de vigas mistas sujeitas a distribuição de momento fletor negativo uniforme. Para verificar o procedimento, 7.772 modelos numéricos foram desenvolvidos no software comercial de elementos finitos ANSYS e seus resultados foram comparados à nova proposição. O procedimento proposto apresentou excelente concordância com os valores numéricos, com desvios inferiores a 10% em 97,29% dos modelos analisados e erro médio de 2,33%. As formulações de Roik *et al.* (1990) e de Hanswille *et al.* (1998) não conduziram a resultados tão satisfatórios, apresentando erros médios de 12,41% e 16,51% respectivamente.

Palavras-chave: Flambagem Lateral com Distorção, Vigas Mistas Contínuas, Momento Crítico Elástico, Flambagem Distorcional Restrita.

ABSTRACT

Great attention has been given in the last years to steel and concrete composite beams due to the gains in strength and stiffness that can be obtained with the small cost of installing a shear connection between the steel profile and the concrete slab. In continuous and semicontinuous composite beams, close to the internal supports, hogging bending moments are developed and the compressed bottom flange may buckle laterally in an instability known as lateral distortional buckling (LDB), characterized by a horizontal displacement and a twist of the bottom flange with distortion of the web. The calculation procedure in the Brazilian and European design standards is based on the reduction of the cross-section ultimate bending moment with a non-dimensional parameter, which is calculated from the slenderness of the beam. This slenderness, in turn, needs a determination of the critical elastic moment to LDB. In literature, several formulations are proposed to determine this critical moment. Among them, some of the most relevant are presented by Roik *et al.* (1990) and Hanswille *et al.* (1998). Roik's equation has also been adopted by the Brazilian standard ABNT NBR 8800:2008. In the present work, a new procedure based on the elastic foundation beam theory is proposed to determine the critical moment of continuous and semicontinuous composite beams under uniform hogging moment. To assess the proposed procedure, 7,772 numerical models were developed in the general purpose finite element code ANSYS and the results were compared to the ones obtained with the new proposal. The procedure presented excellent agreement with the numerical results, with deviations that were below 10% in 97.29% of the models and average deviation of 2.33%. The formulations of Roik *et al.* (1990) and by Hanswille *et al.* (1998) did not lead to such satisfactory results, presenting average deviations of 12.41% and 16.51% respectively.

Keywords: Lateral Distortional Buckling, Continuous Composite Beams, Elastic Critical Moment, Restrained Distortional Buckling.

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

a	Distância entre eixos de vigas de aço paralelas
b	Largura efetiva da mesa de concreto.
b_f	Largura da mesa do perfil de aço.
d	Altura da seção de aço ou diâmetro de um conector do tipo pino com cabeça.
d_r	Distância das armaduras ao topo do perfil de aço (espessura da laje menos cobrimento).
e	Excentricidade da força normal do perfil de aço.
f_{cd}	Resistência de cálculo à compressão do concreto.
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto.
f_u	Resistência à ruptura do aço.
f_y	Resistência à escoamento do aço.
f_{yd}	Resistência de cálculo ao escoamento do aço.
i_p	Raio de giração polar do perfil de aço.
h_0	Distância entre os centros geométricos das mesas do perfil de aço.
k_1	Rigidez à flexão da laje fissurada
k_2	Rigidez à distorção da alma do perfil.
k_3	Rigidez à deformação da conexão de cisalhamento.
k_r	Rigidez rotacional da viga mista.
m_t	Momento de torção distribuído na barra.
m	Momento de torção distribuído na barra.
n	Número de semiondas na configuração deformada de flambagem.
n_{id}	Número de semiondas teórico que leva ao momento mínimo de flambagem.
n_{lim}	Número de semiondas teórico correspondente à transição entre modos de flambagem.
p_y	Força distribuída na direção y .
p_z	Força distribuída na direção z .
r_0	Raio de giração polar da seção transversal em relação ao seu centro de cisalhamento.
r_d	Raio de giração polar da seção transversal em relação ao ponto D .
r_{my}	Propriedade geométrica associada à inércia e à posição do ponto de Kindem.
t_c	Espessura da laje de concreto.
t_f	Espessura da mesa do perfil de aço.
t_w	Espessura da alma do perfil de aço.
u	Deslocamento lateral da mesa do perfil de aço.
v_d	Deslocamento na direção y do ponto de giro.
w_d	Deslocamento na direção z do ponto de giro.
\bar{y}	Distância do centroide do perfil de aço ao centroide da seção mista.
y_f	Distância do centroide da mesa ao centro de cisalhamento do perfil de aço.
$y_{g,a}$	Distância da base ao centroide do perfil de aço.
y_g	Distância da base do perfil de aço ao centroide da seção mista.
y_{pm}	Posição da força distribuída com relação ao centro de cisalhamento.
y_s	Distância do centroide ao centro de cisalhamento do perfil de aço.

Letras romanas maiúsculas

A_a	Área da seção transversal do perfil de aço.
A_r	Área de armadura negativa da laje na largura efetiva da viga mista.
C_{dist}	Coefficiente para consideração do diagrama de momento fletor no cálculo do momento crítico elástico.
C_w	Constante de empenamento do perfil de aço.
$C_{w,d}$	Constante de empenamento do perfil de aço calculada com o polo no centro da mesa superior do perfil.
E_a	Módulo de elasticidade longitudinal do aço.
E_{cm}	Módulo de elasticidade secante médio do concreto.
$(EI)_2$	Rigidez à flexão da laje de concreto fissurada.
G_a	Módulo de elasticidade transversal do aço.
$I_{af,y}$	Momento de inércia da mesa inferior do perfil de aço em relação ao eixo y .
I_{ax}	Momento de inércia do perfil de aço em relação ao eixo x .
I_{ay}	Momento de inércia do perfil de aço em relação ao eixo y .
I_x	Momento de inércia da seção mista em relação ao eixo x .
J	Constante de torção do perfil de aço.
L	Comprimento da viga entre apoios.
L_b	Comprimento destravado da viga para FLT.
L_y	Comprimento de flambagem por flexão da barra.
L_z	Comprimento de flambagem por torção da barra.
M_a	Momento fletor atuante na seção de aço.
M_{cr}	Momento fletor crítico de FLD da seção mista.
$M_{cr,0}$	Momento fletor crítico de FLD da seção mista sem deslocamento da linha neutra.
$M_{FLD,Rk}$	Momento fletor resistente da viga mista devido à flambagem inelástica.
M_{pl}	Momento fletor de plastificação do perfil de aço.
M_{Rk}	Momento fletor resistente da seção transversal na região de momento negativo.
M_t	Momento de torção atuante na extremidade da barra.
M_y	Momento fletor correspondente ao início do escoamento do perfil de aço ou da seção mista ou momento fletor atuante na direção y .
M_z	Momento fletor atuante na direção z .
N_a	Força normal atuante no perfil de aço.
N_e	Força axial de flambagem por flexão (carga de Euler).
N_{ez}	Força axial de flambagem por torção.
N	Força normal atuante na barra.
P_{Rd}	Força resistente de um conector de cisalhamento do tipo pino com cabeça.
ΣP_{Rd}	Soma das forças resistentes dos conectores de cisalhamento em metade do vão da viga.

Letras gregas minúsculas

α	Coefficiente para consideração da posição da viga no sistema de piso no cálculo da rigidez da laje.
α_g	Coefficiente para consideração da relação entre seção transversal da viga mista e seção transversal do perfil de aço.
β_b	Coefficiente para consideração de relação entre geometria de seção de aço e seção mista e do diagrama de momentos fletores na equação de Hanswille <i>et al.</i> (1998).

ϕ	Rotação do perfil de aço.
γ_v	Coefficiente de ponderação da resistência de conectores de cisalhamento.
κ_g	Coefficiente para consideração da relação entre seção transversal da viga mista e seção transversal do perfil de aço.
$\kappa_{g,0}$	Coefficiente de redução do momento crítico devido ao deslocamento da linha neutra
λ_{FLD}	Parâmetro de esbeltez reduzido para o estado-limite de flambagem lateral com distorção.
ν_a	Coefficiente de Poisson do aço.
ξ	Adimensional correspondente à posição da seção transversal no vão da viga.
χ	Fator de redução da resistência para flambagem lateral com distorção.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
FDR	Flambagem distorcional restrita
FF	Flambagem por flexão
FLD	Flambagem lateral com distorção
FLT	Flambagem lateral com torção
FT	Flambagem por torção

SUMÁRIO

1	Introdução.....	10
1.1	Generalidades.....	10
1.2	Flambagem Lateral com Distorção.....	12
1.3	Objetivos.....	17
1.4	Metodologia.....	17
1.5	Justificativa.....	17
2	Revisão da Literatura.....	19
2.1	Generalidades.....	19
2.2	Considerações Quanto às Vigas Mistas Sujeitas a Momento Negativo.....	19
2.3	Determinação do Momento Crítico Elástico à FLD.....	30
2.3.1	Considerações Iniciais.....	30
2.3.2	Estudo Analítico de Roik <i>et al.</i> (1990).....	31
2.3.3	Outras Propostas de Equação para Determinação do Momento Crítico.....	36
3	Desenvolvimento de Uma Nova Equação.....	46
3.1	Generalidades.....	46
3.2	Hipóteses Simplificadoras.....	46
3.3	Dedução da Equação Diferencial do Problema.....	47
3.4	Solução da Equação Diferencial do Problema.....	52
4	Desenvolvimento dos Modelos Numéricos.....	56
4.1	Generalidades.....	56
4.2	Elementos Utilizados.....	56
4.3	Modelos de Materiais.....	58
4.4	Condições de Contorno e Carregamento.....	58
4.5	Malha de Elementos Finitos.....	60
4.6	Validação do Modelo Numérico.....	62
4.6.1	Considerações Iniciais.....	62
4.6.2	Modelos Sujeitos à FLT.....	63
4.6.3	Modelos Sujeitos à Flambagem por Flexão.....	65
4.6.4	Modelos Sujeitos à Flambagem por Torção.....	67
5	Estudo Paramétrico.....	69
5.1	Generalidades.....	69
5.2	Avaliação da Equação Proposta com Rigidez Infinita da Laje e Sem Deslocamento da Linha Neutra.....	69
5.2.1	Considerações Básicas.....	69
5.2.2	Comparação dos Resultados Obtidos com o Procedimento Proposto.....	71

5.3	Avaliação da Equação Proposta com Consideração de Rigidez da Laje	74
5.4	Avaliação da influência da posição da linha neutra no momento crítico	77
6	Avaliação do Procedimento Proposto e Comparação com Outras Metodologias	83
6.1	Generalidades.....	83
6.2	Equação Proposta.....	83
6.3	Modelos Numéricos para Verificação	84
6.4	Avaliação da Formulação de Roik <i>et al.</i> (1990).....	86
6.5	Avaliação da Formulação de Hanswille <i>et al.</i> (1998).....	89
6.6	Avaliação do Procedimento Proposto Neste Trabalho	90
7	Considerações Finais	95
7.1	Conclusões	95
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	96
8	Referências	97
	Apêndice A.....	100

1 INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Nos últimos anos, muita atenção tem sido dada ao estudo das vigas mistas de aço e concreto. Em estruturas com lajes e vigas de concreto, esses dois elementos formam um corpo único, monolítico, trabalhando em conjunto. Assim, torna-se possível que uma largura substancial da laje também seja aproveitada no dimensionamento da viga para o suporte das cargas. As vigas assim projetadas são chamadas vigas tê (Figura 1-1-a). Em estruturas com vigas de aço, esse trabalho conjunto não é imediato e uma situação um pouco diferente ocorre.

Até meados dos anos 1950, era comum que as vigas de aço suportassem sozinhas as ações atuantes, decorrentes do peso próprio da estrutura, incluindo o da laje, mais a sobrecarga de utilização, já que não havia solidarização entre o aço e o concreto. Com o desenvolvimento nessa década de conectores de cisalhamento, foi possível promover o trabalho conjunto dos dois materiais, formando vigas mistas de aço e concreto, nas quais o perfil de aço, geralmente com seção I, atua juntamente com uma faixa da laje de concreto sobreposta (Figura 1-1-b). Desde então, o uso dessas vigas tornou-se extremamente difundido, já que com o pequeno custo de se instalar os conectores, é possível aproveitar uma grande largura da laje e obter ganhos consideráveis de rigidez e de capacidade resistente. Os conectores de uso mais difundido são os do tipo pino com cabeça (*stud bolts*), instalados por meio de um processo especial de soldagem.

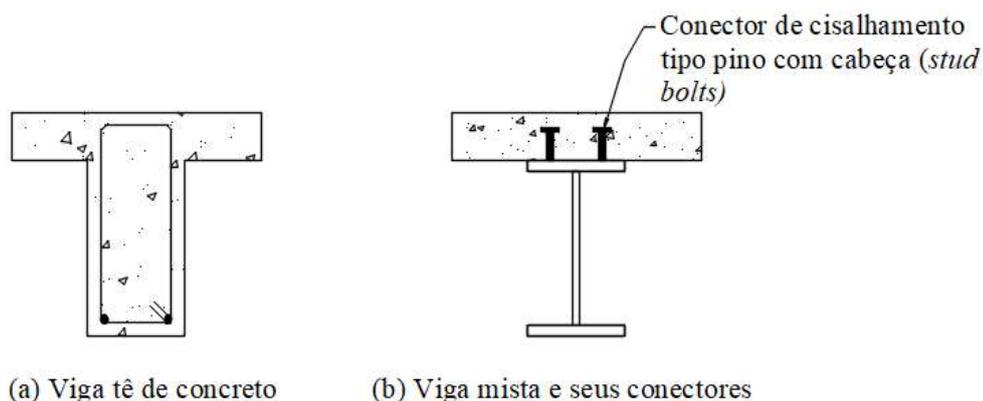


Figura 1-1 - Vigas com lajes sobrepostas.

No caso de vigas mistas simplesmente apoiadas, como o diagrama de momentos fletores é inteiramente positivo, a parte superior da viga, onde se situa a faixa da laje de concreto, fica comprimida. Assim sendo, o concreto trabalha da melhor maneira possível, potencializando seus efeitos benéficos. Além de absorver a compressão, a laje promove contenção lateral contínua para o perfil de aço, impossibilitando a ocorrência da flambagem lateral com torção.

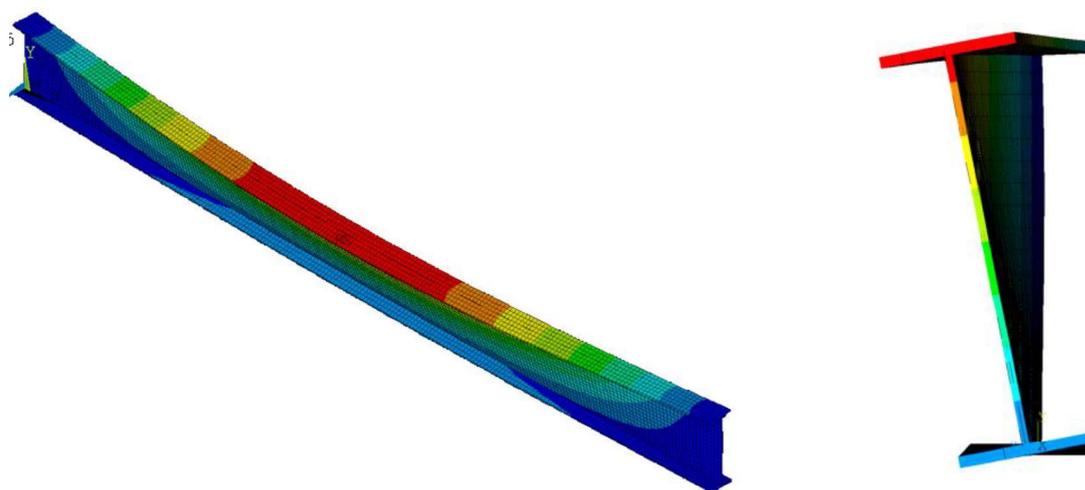
Quando há continuidade ou semicontinuidade da viga, momentos fletores negativos ocorrem na região dos apoios internos e a distribuição das tensões se inverte. A parte superior da viga passa a ser tracionada e a inferior, comprimida. A laje de concreto, trabalhando agora sob tração, fatura, contribuindo apenas com a sua armadura situada na direção longitudinal da viga. A mesa inferior do perfil, comprimida, fica restringida lateralmente apenas pela alma flexível do perfil de aço e pode sofrer flambagem. A essa instabilidade, chama-se flambagem lateral com distorção (FLD), descrita no Item 1.2. Mesmo assim, o aproveitamento da continuidade (ou da semicontinuidade) ainda permite o uso de um perfil de aço mais leve, levando a uma estrutura mais econômica.

Segundo Johnson, a consideração da continuidade possibilita o uso de maiores relações entre vão e altura da viga, reduz a vibração do piso, permite melhor controle das fissuras na superfície das lajes próximas aos pilares internos e faz com que a estrutura seja mais robusta, resistindo melhor aos efeitos do incêndio e da explosão. Por outro lado, seu dimensionamento é mais complexo devido às flambagens que podem ocorrer e devido à variação da rigidez da viga ao longo do vão causada pela fissuração do concreto, que dificulta a análise estrutural.

A determinação da capacidade resistente de vigas mistas contínuas e semicontínuas de aço e concreto é um problema complexo, envolvendo a plastificação dos componentes e aço (seja no perfil, nas armaduras ou nos conectores de cisalhamento), a fissuração da laje de concreto, a interação entre os dois materiais e fenômenos de instabilidade local e global. O procedimento para dimensionamento dessas vigas é baseado na redução do momento fletor último da seção transversal em função de um parâmetro de esbeltez, o qual depende do momento crítico de flambagem elástica da viga.

1.2 Flambagem Lateral com Distorção

Quando uma viga de aço está sujeita a momentos fletores positivos, a compressão de sua mesa superior pode levar à ocorrência de um estado limite último denominado flambagem lateral com torção (FLT) (Figura 1-2). Nesse caso, a ausência de contenção lateral adequada ao longo da viga faz com que sua mesa superior (comprimida) saia de seu plano, deslocando-se lateralmente. A mesa inferior, por outro lado, é tracionada e possui efeito estabilizador. Ao tentar manter-se em seu plano, a mesa inferior causa o giro da seção transversal como um todo, sem mudança de forma.



(a) Vista da viga sofrendo FLT

(b) Seção central da viga

Figura 1-2 – Deformada típica de flambagem lateral com torção. Em cores: deslocamentos.

Esse fenômeno, conforme explicado anteriormente, só ocorre quando a mesa superior do perfil de aço não possui contenção lateral suficientemente resistente. Caso exista tal restrição, o perfil é impedido de flambar lateralmente, como ocorre nas vigas mistas biapoiadas. Nessas vigas, a

mesa superior do perfil é solidarizada à laje de concreto por meio dos conectores de cisalhamento e, portanto, não pode apresentar deslocamento lateral. Assim, os perfis de aço das vigas mistas biapoiadas não apresentam o estado-limite de FLT após a cura do concreto.

Em vigas mistas contínuas e semicontínuas, na região dos apoios internos, desenvolvem-se momentos fletores negativos que comprimem a mesa inferior e parte da alma do perfil de aço. Nesse caso, essa mesa possui restrição lateral pouco significativa, proporcionada apenas pela baixa rigidez à flexão da alma, de forma que a viga pode sofrer instabilidade lateral. Para isso, contudo, é necessário que a seção transversal mude de forma, uma vez que a torção pura ainda é quase totalmente impedida pela laje de concreto. A menor esbeltez da mesa inferior do perfil faz com que ela se desloque praticamente como um corpo rígido, mas a alma é flexível e facilmente se deforma. Ocorre portanto uma instabilidade que é lateral e com distorção da seção transversal, caracterizada pela perda da planicidade da alma do perfil e pelo deslocamento lateral com rotação da mesa inferior (Figura 1-3), daí a denominação de flambagem lateral com distorção. Facilitam o fenômeno a flexão da laje e a deformação da conexão de cisalhamento, que permitem algum giro da seção de aço como corpo rígido.

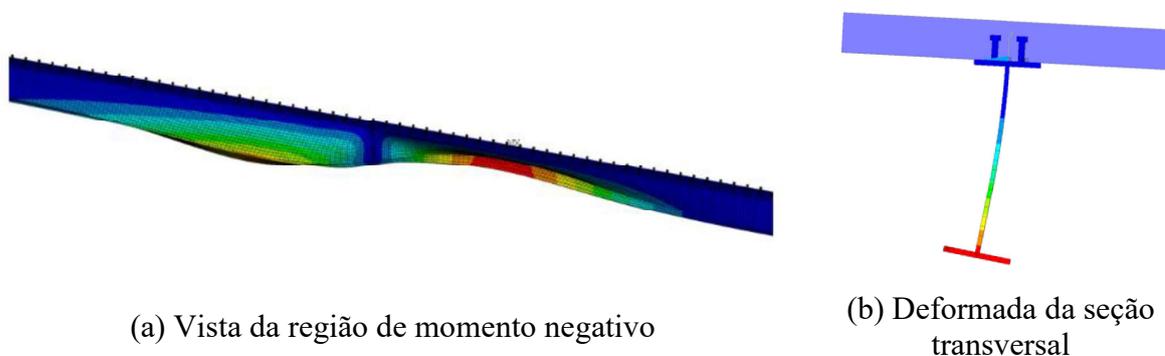


Figura 1-3 - Deformada típica de FLD. Em cores: deslocamentos.

O modo de flambagem nas vigas usuais consiste de duas semiondas, uma em cada lado dos apoios internos, nos quais deve-se prever, obrigatoriamente, em projeto, elementos para contenção do deslocamento lateral. As semiondas se estendem pela maior parte da região de momento negativo, não são senoidais e o máximo deslocamento se apresenta a uma distância de duas a três vezes a altura total do perfil de aço .

Não se deve confundir a flambagem local da mesa inferior na região de momento negativo com a flambagem lateral com distorção, muito embora ambas possam ocorrer simultaneamente nas vigas mistas (Figura 1-4). A primeira é caracterizada pela perda de planicidade da mesa, a qual se desloca fundamentalmente na direção vertical. Na segunda, a mesa desloca-se lateralmente e gira como um corpo rígido, enquanto a alma muda de forma. Cabe ainda ressaltar que a primeira ocorre em casos de grande esbeltez da mesa e a segunda, em vigas de almas mais esbeltas. Há indícios experimentais de que uma flambagem local inicial possa induzir a flambagem lateral com distorção mas, mesmo assim, os dois fenômenos são tratados como dissociados pelas prescrições normativas brasileira e europeia (ABNT NBR 8800:200 e EN 1994-1-1:2004).

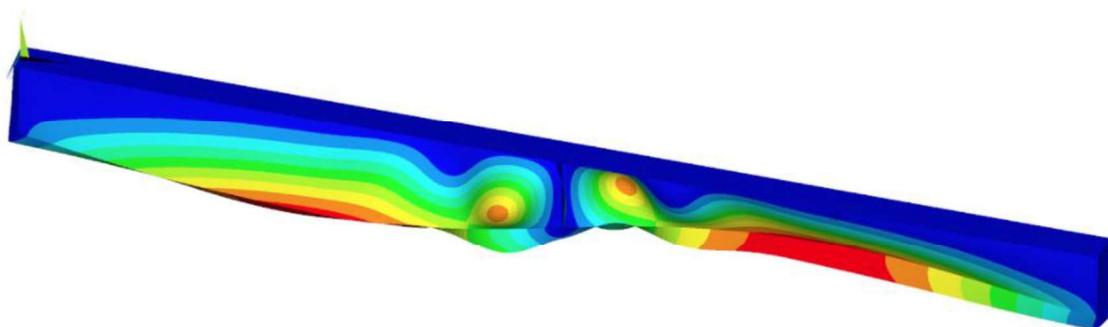


Figura 1-4 - Interação entre os modos de flambagem lateral com distorção, flambagem local da alma e flambagem local da mesa.

A determinação do momento crítico elástico à FLD é feita considerando-se o mecanismo “U” invertido, formado por duas vigas paralelas adjacentes e pela laje à qual os perfis de aço são solidarizados. Em situações práticas, nas quais os sistemas de piso são constituídos de muitas vigas paralelas, a consideração de um mecanismo “U” invertido é mais representativa das restrições impostas ao perfil que a consideração de apenas um “T”. Deve-se salientar que dois tipos de mecanismos “U” são descritos na literatura: o discreto (Figura 1-5-b) e o contínuo (Figura 1-5-a). No primeiro, uma série de enrijecedores é colocada ao longo do trecho de momento negativo da viga, enquanto no segundo há apenas enrijecedores no apoio. Claramente, na primeira situação, o momento crítico é superior, uma vez que a distorção da alma é dificultada pelos enrijecedores. Não obstante, vigas compondo um mecanismo “U” contínuo

são mais frequentemente observadas e, portanto, somente este caso será tratado no presente estudo.

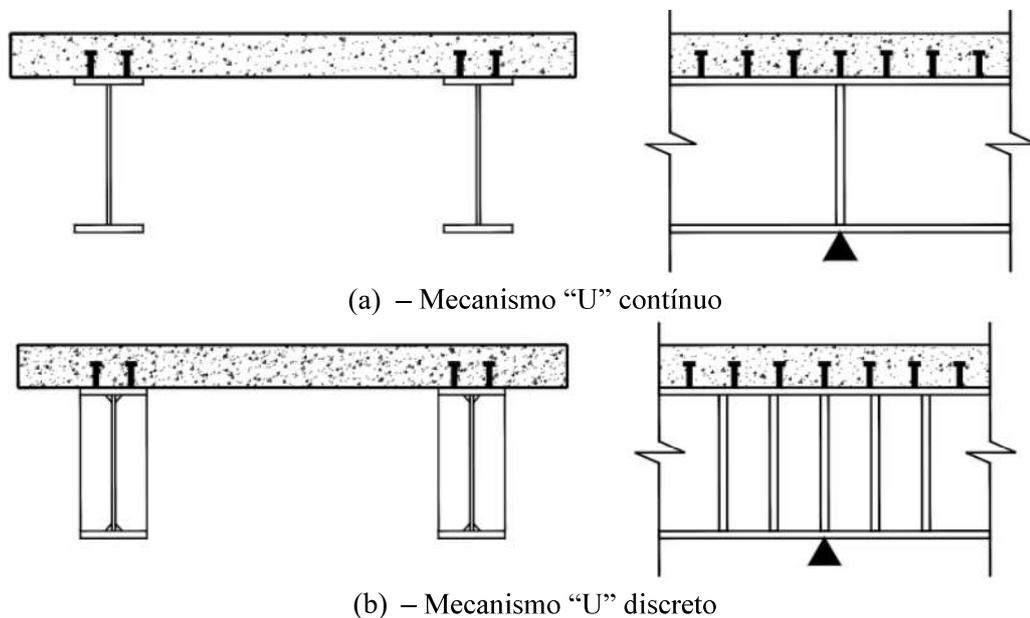


Figura 1-5 – Tipos de mecanismo "U" invertido.

Pode-se pensar que a laje de concreto influencia o comportamento quanto à FLD do perfil de aço de três maneiras principais. Quanto a seus efeitos benéficos, primeiramente, a armadura longitudinal situada na região da laje delimitada pela largura efetiva absorve parte do momento fletor, reduzindo a tensão atuante no perfil. Em segundo lugar, a laje fornece restrição ao deslocamento lateral e à rotação do perfil, dificultando a flambagem. Por outro lado, a presença da armadura desloca a linha neutra do centroide do perfil para uma posição superior, aumentando a região comprimida da alma, o que favorece a flambagem. Essas duas considerações quanto à distribuição de tensões podem ser representadas pela Figura 1-6.

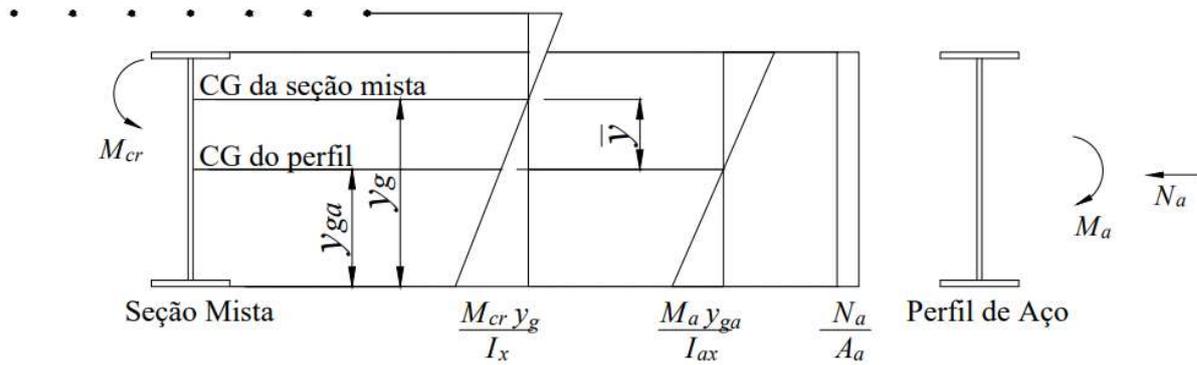


Figura 1-6 - Distribuição de tensões na região de momento negativo.

Utilizando equações básicas da resistência dos materiais, é possível associar a distribuição de tensões causada apenas por um momento fletor na seção mista (M_{cr}) a um par de força normal e momento fletor aplicados à seção de aço (N_a e M_a respectivamente) que causam a mesma distribuição de tensões no perfil. Os esforços N_a e M_a que devem ser aplicados ao perfil de aço podem ser determinados segundo as equações a seguir:

$$N_a = \frac{M_a \bar{y} A_a}{I_{ax}} \quad (1.1)$$

$$M_{cr} = M_a \frac{I_x}{I_{ax}} \quad (1.2)$$

onde

\bar{y} é a distância do centroide do perfil ao centroide da seção mista;

I_{ax} é o momento de inércia do perfil de aço com relação ao seu eixo centroidal x ;

A_a é a área do perfil de aço;

I_x é o momento de inércia da seção mista em relação ao seu eixo centroidal.

Tais considerações permitem uma fácil modelagem do problema da FLD através do método dos elementos finitos, por meio de um modelo que não necessita da representação da laje de concreto.

1.3 Objetivos

A presente pesquisa tem como objetivo analisar a flambagem lateral com distorção de vigas mistas de aço e concreto sujeitas a distribuição uniforme de momentos fletores negativos (Figura 1-7), propondo um novo procedimento para determinação do momento crítico elástico.

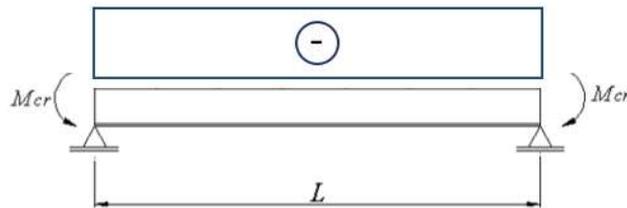


Figura 1-7 - Distribuição uniforme de momentos fletores negativos.

1.4 Metodologia

A metodologia empregada para se atingir o objetivo mencionado no item precedente será composta das seguintes etapas:

- a) estudo das formulações de cálculo apresentadas na literatura para determinação do momento crítico elástico à FLD;
- b) avaliação da adequação e das possíveis fontes de erros dessas formulações;
- c) dedução analítica de uma nova equação para a determinação do momento crítico elástico, para situação de momento fletor uniforme negativo atuando na viga;
- d) verificação e calibração do procedimento proposto por meio de modelos de elementos finitos desenvolvidos com o uso do programa ANSYS v.18.2;
- e) comparação da nova proposição com as formulações presentes na literatura.

1.5 Justificativa

O procedimento normativo de determinação da capacidade resistente de vigas mistas de aço e concreto na região de momento negativo tem como base a redução do momento último da seção devido à flambagem inelástica. Para que se determine essa redução, calcula-se um parâmetro de esbeltez, dependente do momento crítico elástico à FLD da viga e, portanto, tem-se como

etapa fundamental do procedimento o cálculo deste momento crítico. Diversas pesquisas apontam para inconsistências nas metodologias de determinação desse momento crítico (Hanswille, 2002; Oliveira *et al.*, 2016; Amaral, 2016). Observa-se na literatura que os valores obtidos pela equação apresentada por Roik *et al.*, adotada pela norma brasileira de projeto de estruturas de aço (ABNT NBR 8800:2008), podem conduzir a resultados conservadores quando se analisa os vãos internos ou inseguros quando se determina o momento crítico à FLD dos vãos extremos de vigas mistas. Como parte da equação deduzida por Roik *et al.* depende de um coeficiente ajustado numericamente, alguns trabalhos (Oliveira *et al.*, 2016; Amaral, 2016) sugerem novos valores para esse coeficiente, supondo que ele é a única fonte de erro da equação, o que não necessariamente é verdadeiro. Faz-se necessária, portanto, uma reavaliação das equações disponíveis na literatura para determinação do momento crítico elástico à FLD de vigas mistas.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Generalidades

A análise do problema da flambagem lateral com distorção em regime elástico, no que tange à determinação do momento crítico, tem sido feita na literatura, principalmente, por meio de duas metodologias principais. A primeira é a utilização método da energia e a segunda, da teoria de vigas em base elástica. No presente capítulo, serão apresentadas as principais pesquisas que utilizam essas duas metodologias. Antes disso, contudo, é oportuno que uma breve revisão quanto ao comportamento geral de vigas mistas seja realizada para que se possa compreender posteriormente como alguns parâmetros dessas vigas influenciam na flambagem lateral com distorção e como algumas simplificações podem, ou não, ser consideradas na análise.

Uma abordagem mais recente consiste no uso de inteligência artificial para determinação deste momento. Essa metodologia, contudo, não será abordada aqui em detalhes por conduzir a equações que, apesar de precisas, não auxiliam muito ao projetista no desenvolvimento de soluções por mascararem os parâmetros envolvidos na formulação.

2.2 Considerações Quanto às Vigas Mistas Sujeitas a Momento Negativo

Como explicado anteriormente, ao se promover a união entre perfil de aço e laje de concreto, forma-se uma viga mista, na qual os dois materiais oferecem, unidos, uma maior capacidade resistente. Para que se realize essa união, são utilizados os chamados conectores de cisalhamento. Na região da conexão, assim como nas regiões de ligações parafusadas e soldadas de estruturas de aço, observa-se distribuições de tensões complexas, decorrentes principalmente do cisalhamento longitudinal, que se mostram um problema desafiador quando se deseja realizar análises precisas. Para compensar essa deficiência, os métodos de conexão foram desenvolvidos empiricamente e verificados por meio de experimentos .

Quando a laje é sobreposta à viga sem qualquer conexão, observa-se um escorregamento entre os dois materiais na interface (Figura 2-1-a). Ao se introduzir um número suficiente de conectores de cisalhamento ao longo do vão, esse deslizamento deixa de ocorrer, formando-se uma viga mista com interação completa entre laje e perfil de aço (Figura 2-1-b). Quando um número menor de conectores é instalado ao longo do vão, esse escorregamento é reduzido, mas não se anula e diz-se que há uma interação parcial na viga mista.

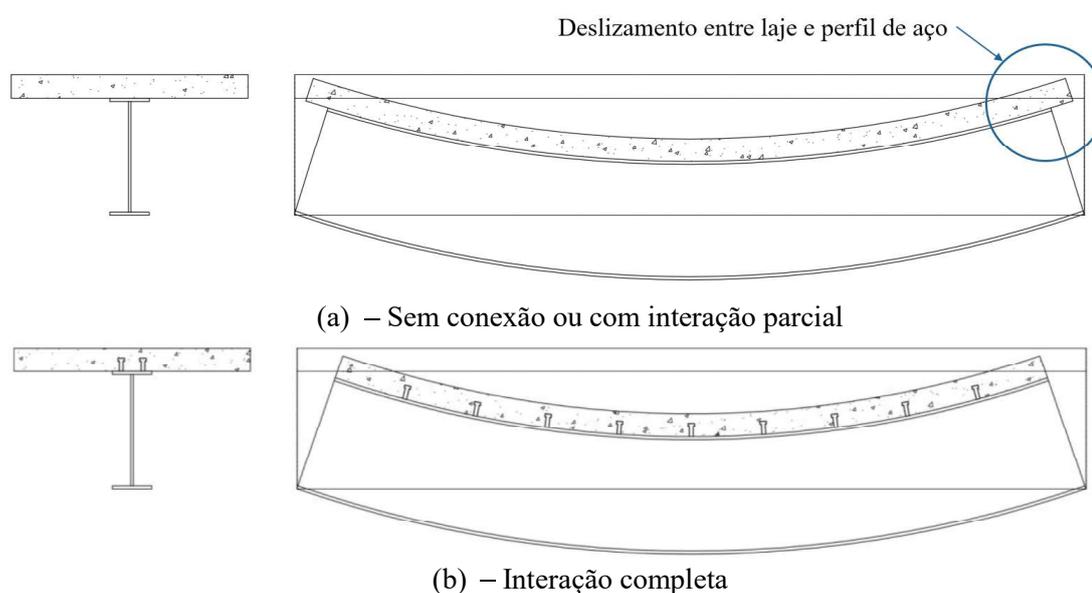


Figura 2-1 – Comportamento da viga mista.

Na realidade, mesmo na situação sem conectores de cisalhamento, alguma interação é observada entre perfil e laje, uma vez que há certa aderência entre o aço e o concreto. Em pequenos níveis de carga, essa aderência é responsável pela transferência de quase todo o cisalhamento entre os dois componentes da viga mista mesmo quando há conectores. No entanto, para níveis mais altos, a aderência se desfaz e não é restaurada quando se descarrega a viga e, portanto, deve ser desconsiderada em projeto, sendo os conectores os únicos responsáveis pela transferência do cisalhamento no cálculo.

Diversas são as formas pelas quais pode-se promover a conexão entre laje e perfil de aço, mas a mais usual é por meio dos conectores do tipo pino com cabeça (*stud bolts*) (Figura 2-2). Esses dispositivos são instalados por meio de um processo de soldagem por eletrofusão, extremamente rápido, e pouco obstruem a passagem de armaduras (ver Queiroz *et al.*, 2012).

Seu diâmetro (d) costuma ser de 13 a 25 mm e seu comprimento (h) varia entre 65 e 150 mm, apesar de comprimentos mais longos serem adotados em alguns casos. O diâmetro dos conectores é influenciado principalmente por dois fatores. Primeiramente, o aumento do diâmetro dificulta o processo de soldagem dos *studs*, o que faz com que na prática, conectores de mais de 20 mm de diâmetro sejam de execução mais onerosa e difícil. Em segundo lugar, a espessura da chapa à qual são soldados não pode ser muito pequena para que o conector possa desenvolver toda a sua capacidade resistente, de maneira que o EN 1994-1-1:2004 exige que a relação entre diâmetro do conector e espessura da chapa à qual ele é soldado seja de, no máximo, 2,5 (a ANBT NBR 8800:2008 não fornece prescrições específicas, redirecionando o usuário às recomendações da American Welding Society). A cabeça do conector é essencial para garantir que não ocorra o fenômeno chamado *uplift*, caracterizado pelo descolamento vertical entre perfil e laje de concreto.

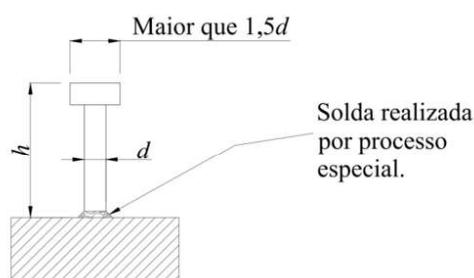


Figura 2-2 - Conector do tipo pino com cabeça ou *stud bolt*.

A resistência que pode ser desenvolvida por um único conector do tipo pino com cabeça é relativamente baixa (da ordem de 130 kN, em valor nominal, para um diâmetro de 25 mm), motivo pelo qual muitas vezes são usados outros tipos de conectores, principalmente em vigas mistas de pontes. Pode-se citar como exemplo os conectores formados por perfis “U” e os conectores feitos por barras curvadas (que podem atingir capacidades resistentes de 1000 kN em valor nominal), apresentados na Figura 2-3.

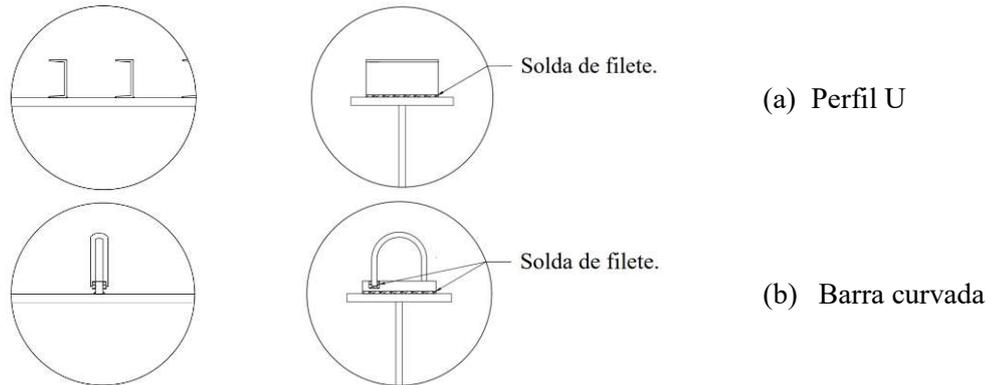


Figura 2-3 - Conectores de cisalhamento.

Das propriedades dos conectores de cisalhamento, a mais relevante para projeto é a relação entre a força cortante e o escorregamento entre o aço e o concreto, a qual pode ser obtida a partir de um ensaio do tipo *push-out*. Para os conectores do tipo *stud bolt*, diversos desses testes já foram conduzidos, com variadas resistências do concreto e essa relação já é bem-definida. Dois tipos diferentes de falhas são observados nos ensaios: quando o concreto não possui f_{ck} muito alto, é comum que o seu esmagamento e fendilhamento no entorno do conector seja dominante, mas quando a resistência do concreto cresce, o colapso do pino por tração governa o dimensionamento. Assim, a resistência de um conector pode ser dada quando a laje é maciça pelo valor mínimo das duas equações a seguir segundo o EN 1994-1-1:2004:

$$P_{Rd} = \frac{0,8 f_u \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)}{\gamma_v} \quad (2.1)$$

$$P_{Rd} = \frac{0,29 d^2 (f_{ck} E_{cm})^{1/2}}{\gamma_v} \quad (2.2)$$

onde

f_u é a resistência à ruptura do aço do conector;

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto;

E_{cm} é o módulo de elasticidade secante médio do concreto;

d é o diâmetro do conector;

γ_v é um coeficiente de ponderação da resistência, com valor de 1,25.

É observado em ensaios que quando a região de concreto é tracionada no ensaio de cisalhamento, a força máxima resistida pelos conectores é praticamente a mesma que aquela obtida do ensaio com concreto comprimido, mas a rigidez da conexão de cisalhamento é significativamente menor, sendo esse um dos motivos pelo qual só se permite interação parcial entre laje e perfil de aço nas regiões de momento positivo, ou seja, deve-se ter interação completa na região de momento negativo. Para que se tenha interação completa na viga mista, deve-se atender a pelo menos uma das seguintes equações:

$$\Sigma P_{Rd} \geq A_a f_{yd} \quad (2.3)$$

$$\Sigma P_{Rd} \geq 0,85 f_{cd} b t_c \quad (2.4)$$

onde:

ΣP_{Rd} é o somatório da resistência dos conectores da viga mista em metade de seu comprimento;

A_a é a área do perfil de aço;

f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço do perfil;

f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto;

b é a largura efetiva da mesa de concreto;

t_c é a espessura da laje de concreto;

Em outras palavras, deve-se garantir que a capacidade dos conectores de resistir ao cisalhamento seja superior à resistência à tração ou à compressão do perfil de aço ou da laje de concreto respectivamente.

Na descrição das variáveis da Equação (2.4), observa-se a introdução de uma largura efetiva da laje. Em uma seção transversal da viga mista, ocorre uma variação das tensões longitudinais na laje de concreto, que se reduzem conforme a posição analisada se afasta do eixo do perfil (Figura 2-4). Apesar dessa variação, é possível ainda obter resultados satisfatórios para a análise da viga se a mesa de concreto tiver sua largura colaborante reduzida de um valor B para uma largura efetiva b , na qual a tensão pode ser tratada como constante. A razão b/B depende de diversos fatores, entre eles as condições de contorno, o tipo de carregamento e o vão da viga. No caso da região de momento negativo, essa para cada lado da viga pode ser dada, simplificada, segundo a ABNT NBR 8800:2008, pelo mínimo entre três valores:

- 1/8 da distância entre os pontos de momento nulo da viga;

- metade da distância entre a linha de centro da viga analisada e a linha de centro da viga adjacente;
- distância da linha de centro da viga à borda de uma laje em balanço.

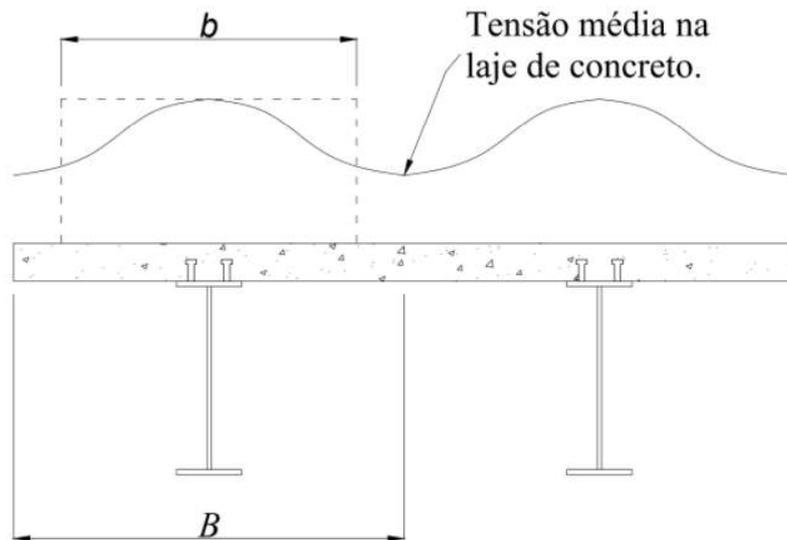


Figura 2-4 - Distribuição de tensões não uniforme na laje na seção mista.

Um procedimento bastante similar é adotado pelo EN 1994-1-1:2004. Apesar de não se considerar a resistência do concreto na região de momento negativo, a determinação dessa largura é essencial, já que apenas a armadura negativa nela contida é contabilizada para a determinação da capacidade resistente da viga. É interessante observar aqui que, uma vez que há fissuração da laje de concreto na região de momento negativo, a rigidez à flexão da viga varia ao longo do seu vão, de maneira que a própria determinação do modelo estrutural a ser adotado e conseqüentemente dos esforços solicitantes da viga é mais complexa que no caso de vigas mistas biapoiadas. Para superar essa dificuldade, procedimentos simplificados podem ser utilizados para a consideração do comprimento da região de momento negativo para que se determine as larguras efetivas de cada região da viga mista, como por exemplo a divisão apresentada na Figura 2-5, baseada nas recomendações do EN 1994-1-1:2004.

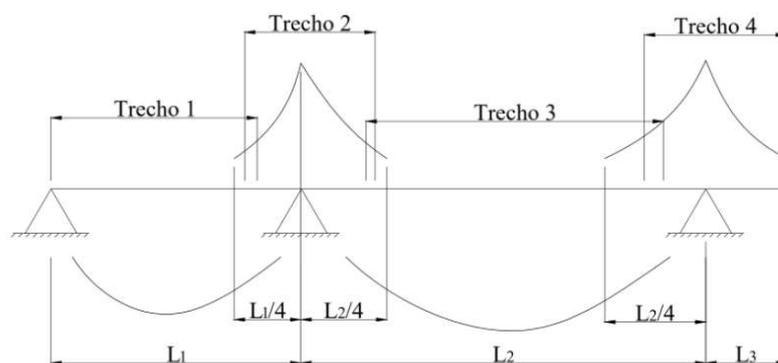


Figura 2-5 – Modelo simplificado para determinação das larguras efetivas.

Sabendo-se a largura efetiva da laje na região de momento negativo, é possível proceder à determinação do momento fletor último da seção transversal, que depende da possibilidade de ocorrer flambagem local nos elementos componentes do perfil de aço. Caso as chapas que compõem a seção não sejam esbeltas e esta possa resistir até sua plastificação total sem que ocorra flambagem local, esse momento último pode ser dado pelo seu momento de plastificação. Caso a flambagem local ocorra antes da plastificação, conservadoramente, o momento último da seção é adotado como o seu momento de início de escoamento. No que tange às prescrições normativas, uma vez que na ABNT NBR 8800:2008 apenas se permite o uso de seções compactas para essas vigas, o momento último da seção será sempre o de plastificação. Na norma europeia (EN 1994-1-1:2004), por outro lado, seções de classe até 3, nas quais a flambagem local pode ocorrer, são permitidas e pode ser, portanto, necessário adotar como momento último o de início de escoamento da seção.

A determinação desses momentos resistentes últimos, seja de plastificação ou de início de escoamento, pode ser feita com base na resistência dos materiais. Na seção de momento negativo, considera-se a contribuição apenas da armadura (além do perfil, obviamente) já que o concreto da laje é considerado como fissurado. A seção pode, assim, ser representada como na Figura 2-6. As linhas neutras, tanto a elástica quanto a plástica, são deslocadas devido à armadura e não se encontram mais no centroide do perfil de aço, mas sim em uma posição acima dele. Teoricamente, seria possível que essas linhas estivessem em uma de três posições: na alma do perfil de aço, em sua mesa superior ou na região “vazia” (de concreto fissurado) entre o perfil de aço e a armadura negativa da laje. Na prática, contudo, considerando os valores

usuais de propriedades geométricas dessas vigas, a linha neutra elástica costuma se situar na alma do perfil .

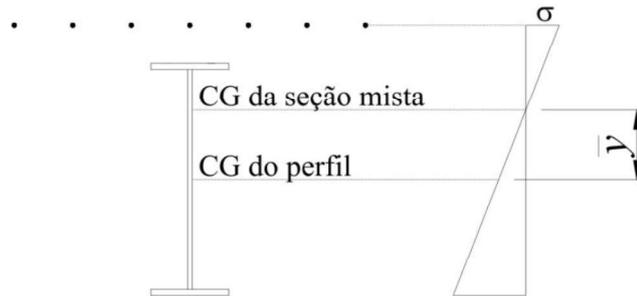


Figura 2-6 - Seção a ser considerada na região de momento negativo.

Quando se considera a possibilidade de ocorrência da FLD, para se obter o momento resistente da viga, de maneira similar ao que se faz no dimensionamento das barras comprimidas, reduz-se o momento último da seção por um fator χ , calculado com base na esbelteza da peça. A esbelteza reduzida da viga pode ser dada por:

$$\lambda_{FLD} = \sqrt{\frac{M_{Rk}}{M_{cr}}} \quad (2.5)$$

onde

M_{Rk} é o momento fletor último da seção, seja ele o de plastificação ou de início de escoamento, determinado com base no procedimento normativo adotado e na esbelteza dos elementos componentes da seção transversal;

M_{cr} é o momento crítico elástico de flambagem lateral com distorção da viga mista.

O fator de redução χ é então calculado a partir de λ_{FLD} com as mesmas curvas “tomadas emprestadas” das barras sujeitas à compressão e dependentes do procedimento normativo adotado para o cálculo. Então, determina-se o momento resistente da viga mista na região de momento negativo a partir da Equação (2.6).

$$M_{FLD,Rk} = \chi M_{Rk} \quad (2.6)$$

Nota-se, portanto, que para uma determinação mais correta do momento resistente à FLD da viga mista, deve-se ter um cálculo preciso do seu momento crítico de flambagem elástica, alvo deste trabalho. Para esse cálculo, a norma brasileira (ABNT NBR 8800:2008) fornece a equação

proposta por Roik *et al.*, a qual será descrita em detalhes no Subitem 2.3.2. Apesar de não haver formulação explícita no EN 1994-1-1:2004, mas apenas algumas indicações para determinação do momento crítico, a versão anterior dessa norma (EN 1994-1-1:1991) fornecia também a equação de Roik *et al.* para tal fim.

Considerando o mecanismo “U” invertido, o EN 1994-1-1:2004 prescreve que a determinação do momento crítico pode ser feita substituindo-se os efeitos de flexão da laje e de distorção da alma por meio de uma mola que impeça o deslocamento lateral e limite a rotação da mesa superior do perfil. A rigidez rotacional dessa mola (k_r) pode ser dada pela associação em série de duas molas, cada uma correspondente a um dos efeitos previamente citados. Primeiramente, tem-se a rigidez à flexão da laje (k_1), calculada levando-se em consideração a resposta da laje fissurada na direção transversal à viga, a qual pode ser dada pela equação a seguir:

$$k_1 = \frac{\alpha(EI)_2}{a} \quad (2.7)$$

onde

α é um coeficiente que leva em consideração a posição relativa da viga no sistema de piso, igual a 2 para uma viga de borda, com ou sem balanço da laje e 3 para uma viga interna. O valor 4 pode ser adotado para vigas internas em pisos com quatro ou mais vigas similares;

$(EI)_2$ é a rigidez à flexão da seção transversal fissurada da laje, por unidade de comprimento, tomada como o menor valor entre a rigidez no meio do vão entre vigas, para momento positivo, ou no perfil de aço, onde a viga está sujeita a momento negativo;

a é a distância entre vigas paralelas.

A segunda rigidez que contribui na determinação de k_r é a da alma do perfil (k_2). Essa, pode ser extraída da teoria de placas e é dada por:

$$k_2 = \frac{E_a t_w^3}{4(1 - \nu_a^2)h_0} \quad (2.8)$$

onde ν_a é o coeficiente de Poisson do aço.

A rigidez rotacional k_r é dada então, pela equação seguinte, como a associação em série das duas rigidezes descritas anteriormente, como já foi explicitado:

$$k_r = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (2.9)$$

Uma terceira rigidez (k_3), a da conexão de cisalhamento, também poderia contribuir no fenômeno, mas é usualmente negligenciada por ser muito superior às outras duas e, conseqüentemente, influir pouco na rigidez total. De fato, a deformação da conexão de cisalhamento é tão reduzida que não há necessidade de sua consideração nas vigas de alma plana em mecanismos “U” contínuos. Sua contribuição na redução da rigidez rotacional corresponde a menos de 1% em vigas de pontes. As três deformações correspondentes a essas parcelas de rigidez são apresentadas na Figura 2-7.

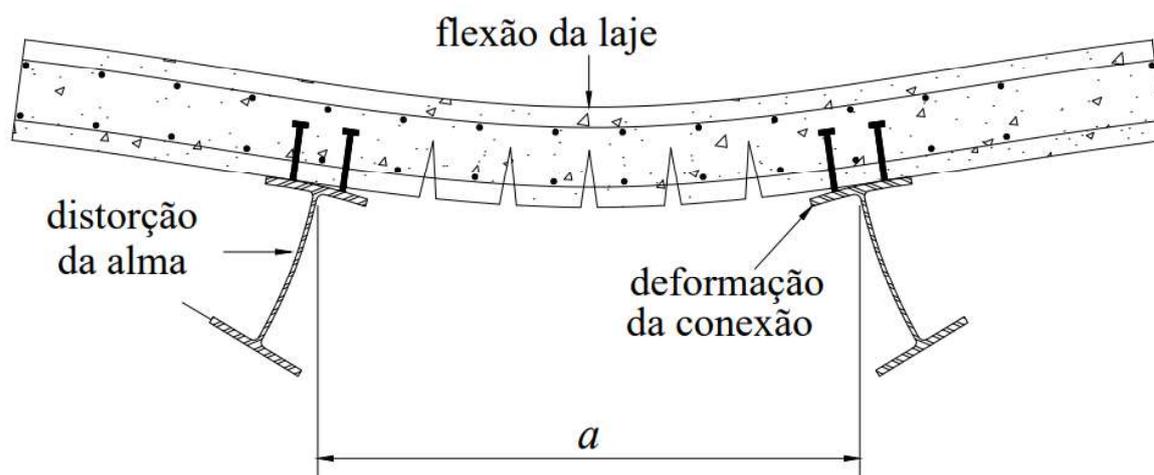


Figura 2-7 - Deformações referentes às rigidezes k_1 , k_2 e k_3 .

Sendo um parâmetro essencial na determinação do momento crítico, a rigidez rotacional foi estudada por alguns pesquisadores na literatura. Estudos experimentais e numéricos para a determinação dessa rigidez em vigas com perfis de alma senoidal foram realizados em Calenzani *et al.*. Foram feitos quatro ensaios, dois com lajes maciças e dois com lajes mistas, que serviram para calibrar modelos numéricos de elementos finitos analisados posteriormente. No estudo, a rigidez rotacional do mecanismo e de cada uma das parcelas que a compõem foi determinada com base nas diversas curvas de momento *versus* rotação obtidas do ensaio ou dos modelos numéricos.

Nas vigas de alma senoidal, observa-se uma maior rigidez à flexão da alma devido à corrugação e como consequência, a deformação da conexão de cisalhamento participa de maneira mais influente na rigidez rotacional do mecanismo, sendo responsável por até 24% da flexibilidade total. Os autores propuseram tabelas com configurações pré-definidas de conectores para determinação dessa rigidez, além de equações para a determinação da rigidez rotacional da alma corrugada. A formulação para cálculo da rigidez à flexão da laje apresentada na Equação (2.7) foi adotada e considerada apropriada.

Dietrich *et al.* e Dietrich (2017) realizaram um estudo puramente numérico similar ao de Calenzani *et al.*, considerando, contudo, apenas vigas de alma plana com lajes também planas de concreto armado. Os autores observaram que, de fato, é pequena a contribuição da conexão de cisalhamento para a flexibilidade do modelo. Quando a conexão era feita com apenas um *stud* por seção, sua contribuição foi de no máximo 4,1%, tornando-se praticamente nula quando dois conectores por seção foram usados. Os valores para rigidez rotacional da alma foram praticamente coincidentes com os propostos pela equação da teoria de placas, o que também era esperado.

Quanto à rigidez da laje, dois comportamentos diferentes foram observados por Dietrich (2017) ao se analisar os modelos numéricos. Em um primeiro caso, observou-se a fissuração da laje e um patamar em sua curva de momento *versus* rotação, correspondente a esse processo de degradação, de maneira que foi possível determinar a sua rigidez de maneira similar ao que se espera representar pela Equação (2.7). Em outros casos, contudo, o escoamento da alma do perfil precedeu a fissuração da laje e, portanto, um procedimento diferente deveria ser adotado. Nos casos em que é adequada a comparação entre a formulação e os modelos numéricos, os valores de rigidez rotacional dos modelos foram sempre superiores aos calculados, com aumentos de 9% a 56%, o que demonstra a necessidade de mais estudos quanto à formulação adotada.

Há que se salientar que, na prática, a determinação da rigidez fissurada da laje não é um problema de solução simples. A consideração do estágio 2 para cálculo dessa rigidez é uma simplificação que pode ser feita em dimensionamentos, mas que não representa com grande precisão o comportamento quanto à deformação do concreto armado. Na realidade, a solução do problema é não linear e envolve fatores como a não linearidade da lei de tensão *versus* deformação do concreto, a colaboração do concreto na região entre fissuras, a taxa de armadura da peça, entre outros. É de se esperar, portanto, que, sendo uma aproximação que simplifica

severamente o problema, o uso da Equação (2.7) conduza, de fato, a valores com um certo desvio dos obtidos usando técnicas de análise mais refinadas.

Não é escopo deste trabalho a determinação da rigidez rotacional das vigas mistas, estando apresentados aqui os procedimentos e o estado da arte dessa determinação apenas para contextualização do assunto e fornecimento de uma base para a análise do problema. Nas análises propostas, parte-se da premissa de que já se conhece de antemão o valor da restrição rotacional imposta, seja ela pela laje somente, ou considerando também a contribuição da conexão de cisalhamento, e ficando essa decisão a juízo do usuário dos procedimentos propostos. Quanto à consideração da flexibilidade da alma por meio de uma mola, mostra-se posteriormente que tal simplificação é de fato apropriada na análise do fenômeno e que pode-se associar as rigidezes desejadas por meio da consideração de uma única mola de rigidez equivalente na determinação analítica do momento crítico, como indicado no EN 1994-1-1:2004.

2.3 Determinação do Momento Crítico Elástico à FLD

2.3.1 Considerações Iniciais

Descreve-se agora alguns dos estudos da literatura que buscaram determinar o momento crítico elástico à FLD de vigas mistas. É interessante que seja fornecido um pequeno histórico do tratamento dado ao problema antes de serem apresentadas as pesquisas mais recentes e relevantes no assunto. Um bom panorama foi apresentado por Bradford . As flambagens locais e a flambagem lateral com torção são estudadas e têm seu comportamento bem definido na literatura desde o início dos anos 1900, mas somente a partir dos anos 1970 foi possível introduzir a complexidade que é imposta pelo fenômeno da distorção na análise das instabilidades devido aos avanços da computação digital. Somente a partir dos anos 1980, estudos sistemáticos foram propostos, sendo um dos primeiros deles apresentado por Bradford & Trahair . Em 1983, as primeiras curvas de projeto foram então propostas por Johnson & Bradford considerando vigas mistas contínuas e a técnica proposta por Bradford & Trahair .

Em 1990, uma nova equação, obtida a partir de um estudo analítico, foi apresentada à comunidade científica por Roik *et al.* e passou a ser adotada pela antiga norma europeia de projeto de estruturas mistas (EN 1994-1-1:1991). Essa equação, posteriormente, foi adotada também pela norma brasileira (ABNT NBR 8800:2008) e, dada a sua relevância, é discutida em detalhes a seguir.

2.3.2 Estudo Analítico de Roik *et al.* (1990)

Roik *et al.* propuseram uma equação analítica para determinação do momento crítico elástico à FLD obtida por meio do método da energia. Considerando um modelo de viga composta por um perfil I, restrita completamente em sua mesa superior ao deslocamento lateral e parcialmente à rotação por uma mola de rigidez rotacional k_r e sujeita a um par de momento fletor e força normal, pode-se escrever sua energia potencial total. Aqui, são apresentadas apenas as deduções considerando-se perfil duplamente simétrico, mas a equação proposta por Roik *et al.* também leva em conta perfis monossimétricos. A Figura 2-8 apresenta o esquema da estrutura em questão e dimensões que porventura sejam usadas na dedução da equação.

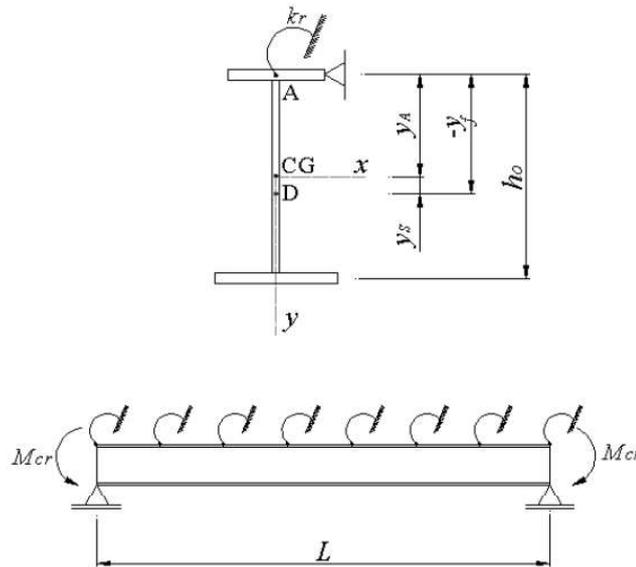


Figura 2-8 - Sistema equivalente utilizado por Roik *et al.* (1990). Fonte: Calenzani (2008).

A energia potencial total, sempre considerando perfil de aço duplamente simétrico, pode ser dada pela equação:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [& (E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w) \phi'' + G_a J \phi'^2 + k_r \phi^2 - 2 M_a y_f \phi \phi'' \\ & + N_a (y_f^2 + r_a^2) \phi'^2] dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde

E_a é o módulo de elasticidade longitudinal do aço;

I_{ay} é o momento de inércia relativo ao eixo paralelo à alma do perfil;

C_w é a constante de empenamento do perfil de aço;

J é a constante de torção do perfil de aço;

ϕ é a rotação da seção transversal;

y_f é a distância do centro de rotação (A) ao centro de torção (D) do perfil de aço;

L é o comprimento da viga entre apoios verticais, nos quais se tem contenção lateral das mesas;

r_d é o raio de giração polar da seção do perfil de aço em relação ao seu centro de cisalhamento.

Parte-se de uma solução senoidal aproximada da forma

$$\phi = \phi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (2.11)$$

cujas derivadas podem ser dadas pelas equações:

$$\phi' = \frac{\phi_0 \pi}{L} \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (2.12)$$

$$\phi'' = -\frac{\phi_0 \pi^2}{L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (2.13)$$

Introduzindo as relações da resistência dos materiais apresentadas nas Equações (1.1) e (1.2), utilizando o processo de Ritz e resolvendo a integral, tem-se:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \left[(E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w) \left(\frac{\pi^4}{L^4}\right) + G_a J \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) + k_r - 2M_{cr} \frac{I_{ax}}{I_x} y_a \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) \right. \\ \left. - M_{cr} (y_a^2 + r_d^2) \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) \right] \phi_0^2 \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Derivando em relação a ϕ_0 e igualando a derivada a zero, vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_0} = 0 \Rightarrow \left[(E_a I_{ay} y_f^2 + E_a C_w) \left(\frac{\pi^4}{L^4}\right) + G_a J \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) + k_r - 2M_{cr} \frac{I_{ax}}{I_x} y_a \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) \right. \\ \left. - M_{cr} (y_a^2 + r_d^2) \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Isolando o momento crítico e dividindo por $\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)$, chega-se a:

$$M_{cr} \left[2y_a \frac{I_{ax}}{I_x} + \frac{\bar{y}A_a}{I_x} (y_a^2 + r_d^2) \right] = E_a (I_{ay}y_f^2 + C_w) \left(\frac{\pi^2}{L^2} \right) + G_a J + k_r \frac{L^2}{\pi^2} \quad (2.16)$$

O termo $(I_{ay}y_f^2 + C_w)$ é a constante de empenamento do perfil com relação ao ponto de giro A e pode ser substituído pela seguinte equação:

$$(I_{ay}y_f^2 + C_w) = C_{w,d} = I_{af,y}h_0^2 \quad (2.17)$$

onde

$I_{af,y}$ é o momento de inércia da mesa inferior do perfil na direção y .

O termo entre colchetes pode ser reescrito:

$$\begin{aligned} \left[2y_a \frac{I_{ax}}{I_x} + \frac{\bar{y}A_a}{I_x} (y_a^2 + r_d^2) \right] &= \frac{h_0 I_{ax}}{I_x} + \frac{I_{ax} \bar{y}A_a}{I_x I_{ax}} (y_a^2 + r_d^2) \\ &= \frac{h_0 I_{ax}}{I_x} + \frac{I_{ax}}{I_x} \frac{1}{e} (y_a^2 + r_d^2) = \frac{h_0 I_{ax}}{I_x} \left(1 + \frac{y_a^2 + r_d^2}{e} \right) \\ &= \frac{I_{ax}}{I_x} \left(h_0 + \frac{\left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{I_{ax} + I_{ay}}{A_a} \right)}{e} \right) = \beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

Define-se então:

$$\alpha_g = \frac{h_0}{\beta} = \frac{\left(\frac{h_0 I_{ax}}{I_x} \right)}{h_0 + \frac{\left(\frac{h_0^2}{4} + \frac{I_{ax} + I_{ay}}{A_a} \right)}{e}} \quad (2.19)$$

Substituindo em (2.16), vem:

$$M_{cr} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{\alpha_g}{h_0} \left\{ E_a I_{af,y} h_0^2 + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \left[G_a J + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 k_r \right] \right\} \quad (2.20)$$

Definindo agora:

$$\gamma = \frac{E_a I_{af,y} h_0^2}{\left(G_a J + \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 k_r \right) L^2} \quad (2.21)$$

Substituindo em (2.20), obtém-se:

$$\begin{aligned}
M_{cr} &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\alpha_g}{h_0} \left\{ E_a I_{af,y} h_0^2 + \left(\frac{1}{\pi^2}\right) \frac{E_a I_{af,y} h_0^2}{\gamma} \right\} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\alpha_g}{h_0} E_a I_{af,y} h_0^2 \left(1 + \frac{1}{\gamma \pi^2}\right) \\
&= \frac{\alpha_g}{L^2} E_a I_{af,y} h_0 \left(\pi^2 + \frac{1}{\gamma}\right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Separando parte dos termos em duas raízes quadradas, vem:

$$M_{cr} = \frac{\alpha_g}{L^2} \sqrt{E_a I_{af,y}} \sqrt{E_a I_{af,y} h_0^2} \left(\pi^2 + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{2.23}$$

Efetuada uma nova substituição da Equação (2.21):

$$\begin{aligned}
M_{cr} &= \frac{\alpha_g}{L^2} \sqrt{E_a I_{af,y}} \sqrt{\gamma \left(G_{aJ} + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) L^2 \left(\pi^2 + \frac{1}{\gamma}\right)} \\
&= \frac{\alpha_g}{L} \sqrt{\left(G_{aJ} + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) E_a I_{af,y} \left(\pi^2 \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

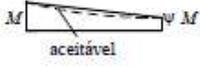
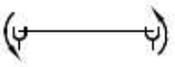
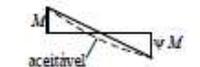
Por fim, definindo

$$C_{dist} = \pi^2 \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tag{2.25}$$

obtem-se a equação do momento crítico como sugerida por Roik *et al.*, apresentada a seguir:

$$M_{cr} = \frac{\alpha_g C_{dist}}{L} \sqrt{\left(G_{aJ} + \frac{k_r L^2}{\pi^2}\right) E_a I_{af,y}} \tag{2.26}$$

Segundo Roik *et al.*, o coeficiente C_{dist} não varia muito para as vigas mistas usuais e pode ser adotado como 6,2 para vigas sujeitas a momento fletor negativo uniforme ao longo do vão. Para outros tipos de distribuição de momentos, valores podem ser extraídos de tabelas fornecidas pelo autor (por exemplo, Figura 2-9). Esses valores foram definidos com base em modelos numéricos de elementos finitos.

Condições de carregamento e apoio	Diagrama de momento fletor ^a	ψ				
		0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
		11,1	9,5	8,2	7,1	6,2
		11,1	12,8	14,6	16,3	18,1

^a M é o maior momento negativo solicitante de cálculo, em módulo, no trecho analisado, sendo que valores de ψ maiores que 1,00 devem ser tomados iguais a 1,00.

Figura 2-9 - Exemplo de tabela com valores de C_{dist} para utilização da equação de Roik *et al.* (1990). Extraído da ABNT NBR 8800:2008.

Algumas pesquisas propuseram novos valores para o coeficiente C_{dist} , partindo da premissa de que os desvios que podem ser observados entre resultados numéricos de elementos finitos e da Equação (2.26) são devidos a imprecisões desse coeficiente. Amaral apontou que a própria metodologia utilizada para determinação do coeficiente e do momento crítico é falha. Uma vez que vãos adjacentes possuem grande influência no momento crítico elástico, não basta considerar apenas um trecho biapoiado na análise. Além disso, a autora observou grandes divergências entre os resultados numéricos e os obtidos segundo a equação de Roik *et al.*, motivo pelo qual propôs novas tabelas para C_{dist} . Da Equação (2.22) observa-se que o coeficiente é dependente de uma série de propriedades geométricas da viga e tabelado por Roik *et al.* apenas para vigas de alma plana. Assim, Oliveira *et al.* propuseram tabelas para o coeficiente considerando vigas de alma senoidal.

Algumas deficiências podem ser observadas no desenvolvimento da equação de Roik *et al.*, motivo pelo qual outros estudos surgiram posteriormente, propondo novas metodologias de cálculo para o momento crítico. Alguns desses estudos são apresentados a seguir. Também são apresentados estudos predecessores ao de Roik *et al.* para que se compreenda o desenvolvimento no curso da história da metodologia que será desenvolvida e proposta neste trabalho.

2.3.3 Outras Propostas de Equação para Determinação do Momento Crítico

Duas metodologias teóricas principais são propostas na literatura para determinação do momento crítico elástico. A primeira, já apresentada, é a utilização do método da energia para determinação do valor crítico. A segunda é a utilização da teoria de barras em base elástica.

Uma das primeiras utilizações dessa segunda metodologia na análise do problema da FLD foi proposta por Svensson . O autor considerou a mesa inferior como uma barra sujeita apenas à compressão axial apoiada em uma base elástica, que impede parcialmente sua rotação e seu deslocamento. Molas foram introduzidas para considerar essas restrições e então, aplicando-se a teoria de vigas apoiadas em base elástica, foi possível determinar a tensão crítica de flambagem. Com essa tensão, determina-se o momento crítico de FLD. É interessante observar que o autor considerou como força normal uma função $N(x)$, de maneira que a tensão é variável no comprimento, o que representaria uma condição de diagrama de momento fletor variável.

Uma adição foi feita ao método proposto anteriormente, quando Golterman & Svensson incluíram, além da mesa comprimida, uma pequena região da alma (correspondente a 15% de sua altura) na análise, resultando em um tê (Figura 2-10). Um procedimento similar ao descrito no parágrafo anterior foi adotado para determinação da tensão crítica e conseqüentemente do momento crítico.

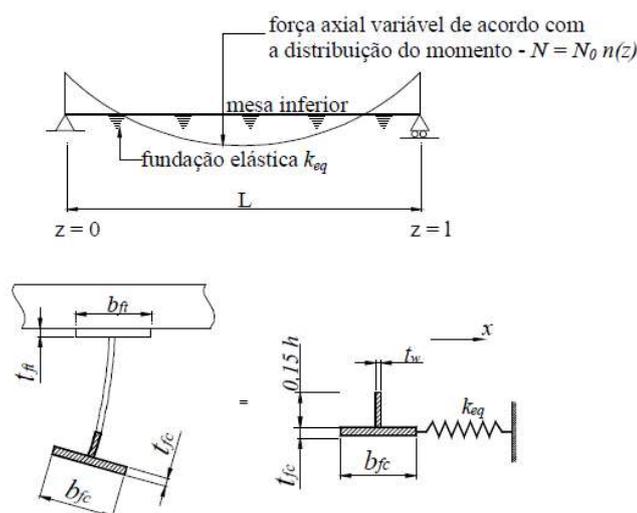


Figura 2-10 - Esquema estrutural adotado por Golterman & Svensson (1988). Fonte: Calenzani (2008).

Dentre os estudos utilizando essa teoria de vigas em base elástica, destaca-se o proposto por Hanswille *et al.* . Utilizando um modelo similar ao proposto por Roik *et al.* e considerando a teoria de vigas em base elástica, obteve-se a seguinte equação diferencial de equilíbrio para o problema:

$$EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + \{[M_a(2y_d - r_{my}) + N_a((y_d + y_m)^2 + i_p^2)]\phi'\}' + [p_z(y_{pm} + y_d) + k_r]\phi = m_t \quad (2.27)$$

onde

y_d é a distância do centro geométrico ao centro da mesa superior do perfil de aço;

y_m é a distância do centro geométrico ao centro de torção do perfil de aço, negativa quando o centro de cisalhamento e a mesa comprimida estão do mesmo lado do centro geométrico;

y_{pm} é a distância do centro geométrico do perfil ao ponto de aplicação da força distribuída p_y ;

i_p é o raio de giração polar do perfil de aço;

m_t é o momento de torção externo distribuído aplicado à viga.

No caso da viga duplamente simétrica, sem momento de torção externo distribuído e sem força distribuída (caso de momento uniforme), tem-se:

$$\begin{cases} y_d = \frac{h_0}{2} \\ r_{my} = 0 \\ y_m = 0 \\ p_z = 0 \\ m_t = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

E substituindo, obtém-se uma equação diferencial um pouco mais simples:

$$EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + \left\{ \left[M_a h_0 + N_a \left(\frac{h_0^2}{4} + i_p^2 \right) \right] \phi' \right\}' + k_r \phi = 0 \quad (2.29)$$

Substituindo agora os seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} M_a = \frac{M_{cr} I_{ax}}{I_x} \\ N_a = -M_{cr} \frac{\bar{y} A_a}{I_x} \\ e = \frac{M_a}{N_a} = -\frac{I_x}{\bar{y} A_a} \\ \bar{y} = \frac{A_r y_r}{A_a + A_r} \end{cases} \quad (2.30)$$

Fazendo

$$k_z = \frac{I_{ax}}{I_x} \left[2z_d - \frac{1}{e} (z_d^2 + i_p^2) \right] \quad (2.31)$$

A equação diferencial passa a assumir a seguinte forma:

$$EC_{w,d} \phi^{IV} + (k_z M_{cr} - GJ) \phi'' + k_r \phi = 0 \quad (2.32)$$

Fazendo agora

$$\begin{cases} \varepsilon_b = L \left[\frac{k_z M_{cr} - GJ}{EC_{w,d}} \right]^{0.5} \\ \eta_b = \sqrt{\frac{k_r L^4}{EC_{w,d}}} \end{cases} \quad (2.33)$$

escreve-se finalmente a equação diferencial como:

$$\phi^{IV} + \left(\frac{\varepsilon_b}{L} \right)^2 \phi'' + \left(\frac{\eta_b}{L^2} \right)^2 \phi = 0 \quad (2.34)$$

Partindo de uma solução da forma:

$$\phi = \phi_0 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.35)$$

correspondente a uma deformada senoidal com n semiondas, onde n é um inteiro para que sejam atendidas as condições de contorno essenciais e substituindo a função e suas derivadas em (2.34), obtém-se o momento crítico, dado por:

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left\{ GJ + \frac{EC_{w,d}}{L^2} \left[(n\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n\pi} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.36)$$

Fazendo

$$\beta_b = \sqrt{\frac{1}{n^2 + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{\eta_b}{\pi}\right)^2}} \quad (2.37)$$

escreve-se, finalmente, a equação proposta por Hanswille *et al.* :

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left(\frac{\pi^2 E C_{w,d}}{(\beta_b L)^2} + G J_{ef} \right) \quad (2.38)$$

É possível notar que essa equação, da maneira como apresentada, é dependente do número de semiondas na configuração deformada imposta, desconhecido *a priori*. Para resolver esse problema, os autores propuseram diversos ábacos de β_b versus (η_b/π) para uso no processo de dimensionamento. Foram propostos, inclusive, valores para diagramas de momento fletor não uniforme, permitindo o uso do procedimento em uma maior gama de aplicações. No caso de momento uniforme, pode-se determinar o valor de β_b , de maneira alternativa ao ábaco, pela equação a seguir:

$$\beta_b = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1,48\sqrt{\eta_b}}{\pi}\right)^{9,10}} \right)^{\frac{1}{9,30}} \quad (2.39)$$

Uma equação similar é apresentada para diversos outros casos de diagramas de momento fletor. Nos casos de diagrama de momento fletor não uniforme, segundo Hanswille *et al.* , há que se fazer também uma redução da rigidez à torção uniforme do perfil (GJ), transformando-a em um valor efetivo (GJ_{ef}) que é calculado, de maneira similar ao coeficiente β_b a partir de diversas formulações obtidas por meio de análises numéricas.

A estratégia adotada pelos autores não é fácil de ser aplicada quando o diagrama de momentos fletores não é uniforme, motivo pelo qual os ábacos propostos para determinação do coeficiente β_b nessas situações foram obtidos por meio de simulações numéricas. A estratégia de considerar-se apenas a mesa inferior ou um pequeno tê incluindo parte da alma adotada por Svensson e por Golterman & Svensson , por outro lado, permite uma fácil inclusão da consideração dessa distribuição variável de momentos fletores na análise do problema, de maneira que essa metodologia permaneceu sendo usada em estudos posteriores até esta década.

Antes de serem apresentados alguns trabalhos mais recentes, cabe fazer uma observação quanto à nomenclatura utilizada para a descrição do fenômeno estudado neste trabalho. No estudo

clássico da flambagem lateral com torção de vigas de aço, considera-se a hipótese de Vlasov de manutenção da forma da seção transversal. Em outras palavras, não se considera que ocorra distorção da seção transversal. Em perfis formados por chapas mais compactas, de fato, pode-se negligenciar a distorção por ser muito pequena, mas, na realidade, ela sempre existe. À medida que o comprimento destravado da viga diminui e a esbeltez da alma aumenta, esta influência cresce, reduzindo em até 32% o momento crítico quando comparado à equação clássica para cálculo deste momento, na qual não se considera a distorção. Em perfis formados a frio, essa influência é ainda maior e não pode ser negligenciada. Na realidade, a distorção é tão relevante nesse caso, que o equivalente à flambagem lateral com torção em perfis formados a frio é, muitas vezes, chamada também de flambagem lateral com distorção. Para que não se confunda por nomenclatura a flambagem lateral com torção com distorção de perfis formados a frio com a flambagem lateral com distorção das vigas mistas contínuas, alguns autores optam por chamar este segundo fenômeno de flambagem distorcional restrita (em inglês, *restrained distortional buckling*). Neste trabalho, mesmo os estudos que utilizam esta segunda terminologia, serão descritos considerando-se o termo “flambagem lateral com distorção”. É importante entender que o fenômeno descrito, independente da nomenclatura, é o mesmo.

Uma proposta de metodologia mais recente, utilizando o método da energia, foi apresentada por Chen & Ye. Uma nova equação para representação da energia potencial de deformação foi derivada com a finalidade de incluir melhor os efeitos de forças transversais distribuídas na viga e, de maneira diferente dos estudos anteriormente apresentados, nos quais pressupõe-se que o deslocamento lateral da mesa inferior pode ser calculado diretamente a partir da rotação da viga, foram utilizadas duas funções de deslocamentos diferentes e independentes, uma para a rotação do perfil e outra para seu deslocamento lateral. Invocando-se o processo de Ritz, então, foi possível determinar o momento crítico por meio da solução de uma equação quadrática. Seus resultados foram considerados adequados quando comparados a modelos de elementos finitos analisados no software comercial ANSYS. Deve-se salientar que a solução de Chen & Ye é na verdade uma estimativa conservadora do momento crítico elástico das vigas mistas na região de momento negativo, uma vez que considera a influência da laje apenas quanto a seus efeitos na restrição lateral e rotacional do perfil de aço, mas não no que tange à sua contribuição para a redução das tensões atuantes no perfil de aço.

Também mais recentemente, foi proposta uma nova equação baseada na teoria de vigas apoiadas em base elástica, considerando-se apenas o tê inferior do perfil de aço. Impondo

restrições à rotação e ao deslocamento lateral a essa seção por meio de molas cujas rigidezes são calculadas de acordo com as propriedades da viga mista e uma força normal variável, dada por um polinômio quadrático, determinou-se sua energia de deformação e a equação diferencial de equilíbrio do problema. No uso do método da energia, adotou-se o procedimento de Ritz, usando como deformadas funções independentes para o deslocamento lateral (u) e para a rotação (ϕ) da seção transversal, dadas, respectivamente, por:

$$u = \sum_{i=0}^n C_i \text{sen}(i\pi\xi) \quad (2.40)$$

$$\phi = \sum_{i=0}^n D_i \text{sen}(i\pi\xi) \quad (2.41)$$

onde

ξ é um adimensional correspondente à posição da seção transversal em questão na viga (z), de maneira que $z = L\xi$;

n é o número de termos que compõem a série representando a deformada.

A determinação da tensão crítica de flambagem elástica é então possível com a solução de um problema de autovalor de ordem $2n \times 2n$ e dela, chegando-se assim ao momento crítico.

Utilizando a equação diferencial de equilíbrio, também é possível determinar a tensão crítica. Nesse caso, os autores utilizaram a mesma função da Equação (2.40) para a deformada e consideraram que a deformação da alma pode ser descrita como a de uma barra em balanço e, portanto, a rotação da mesa inferior pode ser dada por:

$$\phi = \frac{3}{2h_0} u \quad (2.42)$$

Aplicando-se a deformada na equação diferencial do problema, pelo método de Galerkin, foi possível obter a tensão crítica a partir de um problema de autovalor de ordem $n \times n$ e, com a tensão, determinou-se o momento crítico de flambagem da viga. Modelos de elementos finitos analisados no software ANSYS permitiram uma análise das equações propostas.

Os autores concluíram que as metodologias utilizadas são apropriadas para a análise do fenômeno em situações de diagramas de momentos uniformes e triangulares (neste caso, há uma faixa aplicável devido à interação entre flambagens que pode ocorrer), mas são inválidas para momentos não lineares. Além disso, observou-se que o procedimento utilizando a equação

diferencial de equilíbrio levou a resultados mais precisos quando comparado ao que utilizou o método da energia e que o primeiro também foi mais simples de ser aplicado (a solução do problema de autovalor é de ordem $n \times n$, contra $2n \times 2n$ no segundo caso). Claramente, no uso do método da energia também seria possível realizar a simplificação apresentada pela Equação (2.42), resultando em um problema de autovalor também de ordem $n \times n$ e igualmente simples, quando comparado à solução do problema pela equação diferencial. Os autores, contudo, não apresentaram essa possibilidade.

Zhou *et al.* introduziram mais uma observação para aumentar a complexidade do fenômeno. Segundo os autores, a rigidez à flexão da alma do perfil é dependente do nível de compressão à qual ela está submetida e, portanto, deve-se fazer essa consideração na introdução da mola. Assim, o método baseado em vigas apoiadas em base elástica foi aprimorado, considerando o acoplamento entre cargas externas e restrição imposta pelas fundações. Com essa rigidez variável restringindo o deslocamento da mesa inferior, a sua equação diferencial de equilíbrio foi determinada e então, usando o método de Galerkin com as funções (2.40) e (2.41), foi possível determinar a tensão crítica de flambagem da mesa inferior a partir da solução de um problema de autovalor de ordem $2n \times 2n$.

Os resultados obtidos segundo as formulações do autor foram comparados aos de modelos de elementos finitos elaborados no software ANSYS e as previsões analíticas apresentaram desvios de no máximo 4%. Para barras submetidas a momento uniforme ou parabólico, os erros foram inferiores a 2% e os maiores desvios ocorreram nos casos de momento triangular.

Posto que a solução de um problema de autovalor de ordem $2n \times 2n$ requer a programação de algum software e é de difícil uso no cotidiano do projetista, Zhou, Li & Yan propuseram novas equações, dessa vez de aplicação mais simples, para utilização do procedimento descrito por Zhou *et al.*. Parâmetros levando em consideração a esbeltez relativa da viga e o gradiente da distribuição de momentos fletores foram introduzidos, de maneira que se determina um coeficiente para corrigir o momento fletor quando comparado a um diagrama de momentos fletores uniforme.

Uma vez que a flambagem lateral com distorção tem uma maior tendência a ocorrer em vigas com almas esbeltas, Zhou *et al.* incluíram na equação da energia uma parcela associada à distorção causada pelo cisalhamento na alma. O mesmo procedimento dos estudos anteriores foi adotado, utilizando-se as funções (2.40) e (2.41) para os deslocamentos e o método de

Galerkin, e a determinação da tensão crítica ficou novamente a cargo da solução de um problema de autovalor de ordem $2n \times 2n$. Uma análise dos resultados obtidos segundo essa nova solução do problema levou à conclusão que o método proposto conduz a resultados bastante próximos de valores obtidos por análises utilizando o método dos elementos finitos e melhores que os calculados segundo diversos procedimentos da literatura. É curioso observar que os autores não realizaram comparação com os resultados obtidos, por exemplo, por Zhou *et al.*, que utiliza uma teoria extremamente similar porém sem a adição da parcela de energia relativa ao cisalhamento. Por essa razão, é difícil determinar se essa energia de deformação realmente possui papel relevante no fenômeno.

Técnicas com fundamentações teóricas ainda mais complexas podem ser usadas na análise. Lei & Li por exemplo, determinaram o momento crítico a partir do método da energia, mas considerando um modelo estrutural um pouco mais refinado. A energia potencial total do sistema foi determinada em um modelo no qual a alma era considerada por meio de uma placa e as duas mesas, como duas barras independentes, ligadas à placa. Assim, foi possível observar a interação entre os modos de flambagem lateral com torção e flambagem lateral com distorção que ocorrem nas vigas mistas quando o nível de restrição é intermediário. Os autores observaram que as restrições impostas influenciam, de fato, significativamente no momento crítico da peça, particularmente para vãos longos. Além de aumentar a carga crítica, essa restrição pode ser responsável pela mudança de modo de flambagem, que passa de um modo fundamentalmente correspondente à FLT quando a restrição é baixa para um modo de FLD para altas restrições. Ao ter uma influência significativa no fenômeno, a distorção introduz um comportamento diferente na curva de flambagem da peça (Figura 2-11), que passa a apresentar um ponto de mínimo, isto é, em vez de ocorrer sempre redução da tensão de flambagem com um aumento da esbeltez, o aumento do comprimento da peça pode levar a um aumento do momento crítico. Além disso, a influência da restrição rotacional se torna menor quanto maior forem as mesas do perfil.

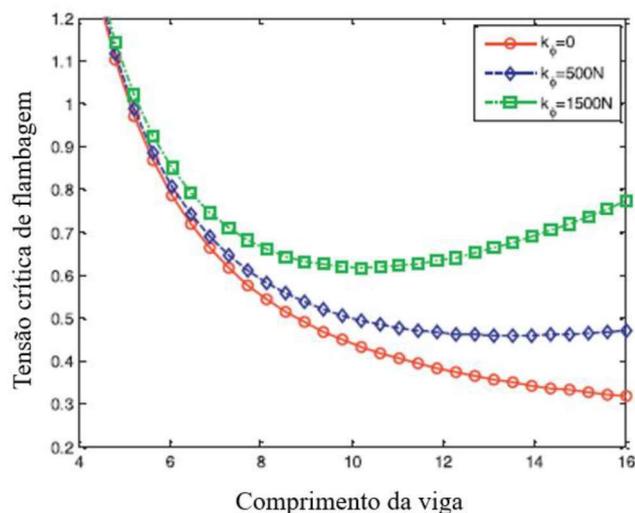


Figura 2-11 - Curvas de flambagem para variados níveis de restrição, obtidas por Lei & Li (2017).

Chen & Wang realizaram análises numéricas pelo método dos elementos finitos com elementos de casca (Figura 2-12), utilizando o software ANSYS para determinar o momento crítico elástico e o momento resistente de flambagem inelástica de diversas vigas mistas. É curioso notar que os autores observaram em seus resultados numéricos, valores de momento crítico pouco distantes dos obtidos segundo a equação de Roik *et al.*, o que diverge de diversos outros estudos da literatura (Hanswille, 2002; Amaral, 2016). Observou-se que, na faixa usual de valores de rigidez da laje (5 a 15 vezes a rigidez da alma), a sua influência no momento crítico do modelo é da ordem de apenas 10%, quando comparada à consideração de uma laje com rigidez infinita. Os modelos desenvolvidos pelo autor não levaram em consideração o deslocamento que ocorre da linha neutra do perfil quando há a presença da laje, o que pode ser responsável pelas diferenças entre suas observações e a de outros pesquisadores. Foram estudados também modelos de mecanismos “U” discretos.

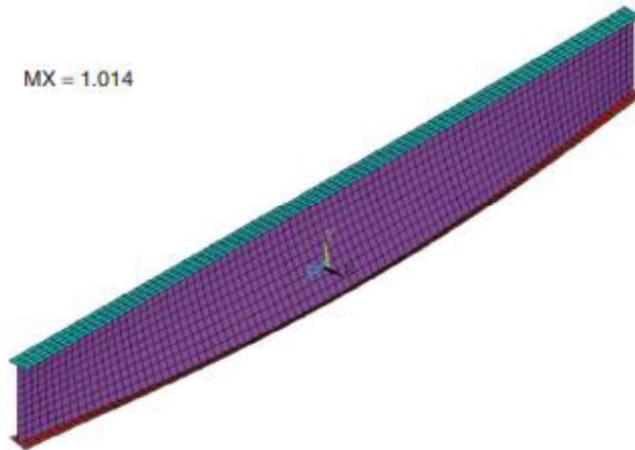


Figura 2-12 - Configuração deformada de um dos modelos analisados por Chen & Wang (2012).

Devido à alta complexidade do fenômeno e à sua difícil análise, uma metodologia mais recente, com uso de algoritmos de inteligência artificial baseada em redes neurais tem sido utilizada em alguns trabalhos para a determinação do momento crítico. Nessas situações, valendo-se de diversos resultados de modelos de elementos finitos, treina-se uma inteligência artificial para determinar, com base em uma série de parâmetros de entrada (*inputs*), o valor correspondente ao momento crítico elástico de flambagem ou até mesmo, ao momento resistente das vigas. Alguns exemplos de pesquisas com essa nova técnica incluem Tohidi & Sharifi e Tohidi & Sharifi . Com o uso dessa ferramenta, é possível obter previsões rápidas que não desviem em mais de 5% dos valores obtidos numericamente, desde que a rede neural seja treinada de maneira apropriada e com um número suficiente de modelos. Por mais que seja eficiente, o uso de inteligência artificial para a determinação do momento crítico conduz a equações que não possuem um forte apelo teórico, mascarando, por exemplo propriedades geométricas, que poderiam ser de grande relevância para um usuário da equação ao propor soluções de projeto que ajudem a contornar problemas relacionados à flambagem. Em outras palavras, as equações obtidas fornecem respostas práticas e precisas em casos discretos, mas pouca informação quanto ao comportamento das vigas em relação ao fenômeno.

3 DESENVOLVIMENTO DE UMA NOVA EQUAÇÃO

3.1 Generalidades

Na presente seção, deduz-se uma equação analítica para determinação do momento crítico elástico à FLD somente do perfil de aço, quando não há deslocamento da linha neutra, de maneira bastante similar à proposta por Hanswille *et al.* .

A Figura 3-1 ilustra o modelo estrutural e a seção transversal com as dimensões que porventura sejam usadas durante a dedução, servindo também como orientação para a nomenclatura empregada.

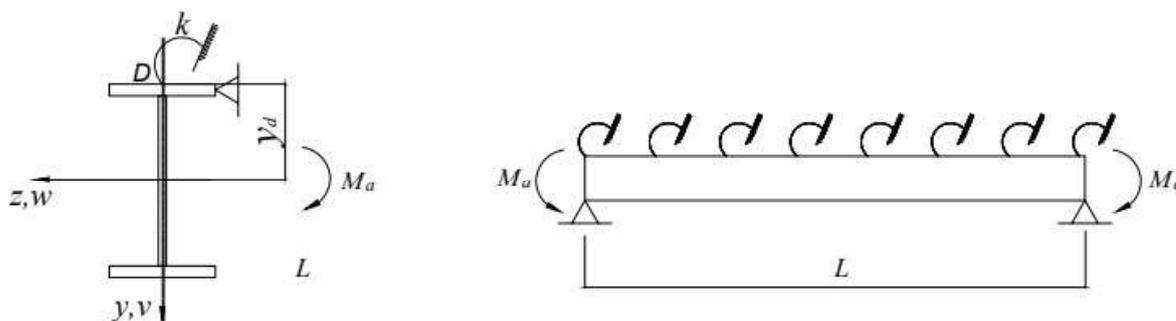


Figura 3-1 - Modelo estrutural considerado para desenvolvimento da equação.

3.2 Hipóteses Simplificadoras

A determinação do momento crítico de FLD deve ser feita considerando-se a laje de concreto fissurada, isto é, levando-se em conta apenas a contribuição da armadura longitudinal na região de momento negativo. Essa armadura absorve parte do momento fletor atuante e desloca a linha neutra do centroide do perfil de aço para uma posição entre esse centroide e a laje de concreto. Ambos esses efeitos podem ser tratados no perfil de aço sem que se realize uma consideração explícita da armadura de aço, incluindo-se uma força normal no modelo numérico calculada segundo a Equação (1.1). Para que essa equação e também a Equação (1.2) possam ser utilizadas, é necessário que a distribuição de tensões seja linear e contínua ao longo da seção

transversal, o que só ocorre quando a interação entre laje e perfil é completa, ou seja, quando os critérios apresentados nas equações (2.3) e (2.4) são atendidos. Considera-se neste estudo, portanto, que não há deslizamento entre a laje de concreto e o perfil de aço (e conseqüentemente, não há descontinuidades na linha neutra da seção mista), o que sempre ocorre na prática prática, uma vez que as normas de projeto exigem que haja interação completa nas regiões de momento negativo da viga mista.

Quanto ao fenômeno da distorção, supõe-se inicialmente que ele possa ser representado por meio de uma mola que restringe a rotação do perfil, colocada em sua mesa superior. Posteriormente, mostra-se que essa simplificação é apropriada e conduz a bons resultados. Além disso, considera-se que a restrição ao deslocamento lateral imposta pela laje à mesa superior do perfil é total e que as rigidezes da laje e da conexão de cisalhamento também podem ser simuladas por meio de molas colocada no centro da mesa superior da viga. Deve-se salientar que a rigidez da conexão é muito alta, de maneira que a rigidez da mola é geralmente igual ou muito próxima à da laje e, portanto, a partir deste ponto, o estudo a descreverá apenas como rigidez da laje. É importante comentar que caso a rigidez da conexão seja baixa, sua flexibilidade pode ser incluída na mola aqui simulada, não havendo qualquer prejuízo ao modelo proposto.

3.3 Dedução da Equação Diferencial do Problema

Partindo das equações básicas da resistência dos materiais e da flexo-torção, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} EI_z v_d'' = -M_z \\ EI_y w_d'' = -M_y \\ EC_{w,d} \phi''' - GJ \phi' = M_t \end{cases} \quad (3.1)$$

onde:

I_z é o momento de inércia em relação ao eixo z ;

I_y é o momento de inércia em relação ao eixo y ;

v_d é o deslocamento do ponto D na direção y ;

ϕ é a rotação da seção transversal em torno do ponto D;

w_d é o deslocamento do ponto D na direção z;

M_y é o momento fletor atuante na direção y;

M_z é o momento fletor atuante na direção z;

M_t é o momento de torção atuando na extremidade da barra;

$C_{w,d}$ é a constante de empenamento calculada com relação ao ponto D;

J é a constante de torção do perfil.

Derivando o sistema uma ou duas vezes a depender da equação, obtém-se:

$$\begin{cases} EI_z v_d^{IV} = p_y \\ EI_y w_d^{IV} = p_z \\ EC_{w,d} \phi^{IV} - GJ \phi'' = -m \end{cases} \quad (3.2)$$

onde:

p_y é a força distribuída na direção y;

p_z é a força distribuída na direção z;

m é o momento de torção distribuído atuante na barra.

Uma vez que existe uma mola de rigidez k no centro da face superior da mesa superior, o único momento de torção distribuído será o imposto por esta mola. Assim, vem:

$$\begin{cases} EI_z v_d^{IV} = p_y \\ EI_y w_d^{IV} = p_z \\ EC_{w,d} \phi^{IV} - GJ \phi'' + k\phi = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Introduzindo os acréscimos de forças gerados pelos efeitos de segunda ordem, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI_z v_d^{IV} = p_y + \int_S \sigma v'' dS \\ EI_y w_d^{IV} = p_z + \int_S \sigma w'' dS \\ EC_{w,d} \phi^{IV} - GJ \phi'' + k\phi = \int_S \sigma v'' [(z - z_d) - (y - y_d) \phi] dS \\ \quad - \int_S \sigma w'' [(y - y_d) + (z - z_d) \phi] dS \end{array} \right. \quad (3.4)$$

onde:

σ é a tensão normal longitudinal à viga atuando no perfil.

Tomando-se a terceira equação e a desenvolvendo, obtém-se:

$$\begin{aligned} EC_{w,d} \phi^{IV} - GJ \phi'' + k\phi &= \int_S \sigma v'' (z - z_d) dS - \int_S \sigma v'' (y - y_d) \phi dS \\ &\quad - \int_S \sigma w'' (y - y_d) dS - \int_S \sigma w'' (z - z_d) \phi dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

Associando os deslocamentos do centroide aos do ponto de giro D , vem:

$$\begin{cases} v = v_d + (z - z_d) \phi \\ w = w_d + (y - y_d) \phi \end{cases} \quad (3.6)$$

Substituindo as relações na equação diferencial, chega-se a:

$$\begin{aligned} EC_{w,d} \phi^{IV} - GJ \phi'' + k\phi &= \int_S \sigma [v_d'' + (z - z_d) \phi''] (z - z_d) dS \\ &\quad - \int_S \sigma [v_d'' + (z - z_d) \phi''] (y - y_d) \phi dS \\ &\quad - \int_S \sigma [w_d'' - (y - y_d) \phi''] (y - y_d) dS \\ &\quad - \int_S \sigma [w_d'' - (y - y_d) \phi''] (z - z_d) \phi dS \end{aligned} \quad (3.7)$$

Removendo os termos de ordem mais alta (segunda e quarta integrais do lado direito da igualdade), tem-se:

$$\begin{aligned}
 EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + k\phi &= \int_S \sigma[v_d'' + (z - z_d)\phi''](z - z_d)dS \\
 &- \int_S \sigma[w_d'' - (y - y_d)\phi''](y - y_d)dS
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A tensão normal, desprezando a parcela do bimomento, pode ser dada pela equação:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_z}{I_z}y \tag{3.9}$$

onde

N é a força normal atuando na barra;

S é a área da seção transversal da barra.

Substituindo-se a Equação (3.9) na Equação (3.8), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + k\phi &= \int_S \left(\frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_z}{I_z}y \right) [v_d'' + (z - z_d)\phi''](z - z_d)dS \\
 &- \int_S \left(\frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_z}{I_z}y \right) [w_d'' - (y - y_d)\phi''](y - y_d)dS
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Desenvolvendo essa equação, vem:

$$\begin{aligned}
 EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + k\phi &= (M_y - Nz_d)v_d'' - (M_z - Ny_d)w_d'' \\
 &+ \left(\frac{N}{S}(I_y + I_z) + N(y_d^2 + z_d^2) \right) \phi'' - 2M_yz_d\phi'' + 2M_z y_d\phi'' \\
 &+ \frac{M_y}{I_y} \phi'' \int_S z(z^2 + y^2)dS + \frac{M_z}{I_z} \phi'' \int_S y(y^2 + z^2)dS
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Fazendo agora

$$i_d^2 = \frac{I_y + I_z}{S} + y_d^2 + z_d^2 \quad (3.12)$$

$$k_y = \frac{1}{2I_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS \quad (3.13)$$

$$k_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS \quad (3.14)$$

obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + k\phi \\ = [Ni_d^2 + 2M_y(k_z - z_d) + 2M_z(k_y - y_d)]\phi'' + (M_y - Nz_d)v_d'' \\ - (M_z - Ny_d)w_d'' \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sendo o perfil, restrito em seu topo, sujeito apenas à flexão em relação ao eixo z , de maior inércia, e como ele é simétrico com relação a este eixo, as seguintes simplificações podem ser feitas:

$$w_d = 0 \Rightarrow w_d'' = 0 \quad (3.16)$$

$$k_z = 0 \quad (3.17)$$

$$z_d = 0 \quad (3.18)$$

$$M_y = 0 \quad (3.19)$$

$$N = 0 \quad (3.20)$$

Assim, chega-se à equação diferencial:

$$EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + 2M_z(y_d - k_y)\phi'' + k\phi = 0 \quad (3.21)$$

Considerando agora que o perfil é duplamente simétrico e está sujeito a um momento fletor negativo M_a , tem-se:

$$k_y = 0 \quad (3.22)$$

$$y_d = -\frac{h_0}{2} \quad (3.23)$$

Finalmente, a equação diferencial a ser resolvida se torna:

$$EC_{w,d}\phi^{IV} - GJ\phi'' + h_0M_a\phi'' + k\phi = 0 \quad (3.24)$$

Essa equação mostra que a torção torna-se desacoplada das duas flexões no caso em estudo. Além disso, fica evidente que as duas primeiras equações diferenciais do sistema de equações (3.4) levam a equilíbrios estáveis.

3.4 Solução da Equação Diferencial do Problema

Procede-se agora à resolução da Equação (3.24) pelo método de Ritz. Partindo de uma solução aproximada senoidal com n semiondas, onde n é um número inteiro, dada pela equação a seguir:

$$\phi = \phi_0 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.25)$$

As derivadas segunda e quarta da rotação ϕ podem ser dadas por:

$$\phi'' = - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \phi_0 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.26)$$

$$\phi^{IV} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \phi_0 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.27)$$

Substituindo essas funções na equação diferencial, obtém-se:

$$\left[EC_{w,d} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + GJ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - h_0 M_a \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k \right] \phi_0 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Considerando que se deseja o modo de flambagem no qual a rotação não é nula, deve-se ter:

$$EC_{w,d} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 + GJ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - h_0 M_a \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k = 0 \quad (3.29)$$

Isolando o momento M_a obtém-se a seguinte equação para o momento crítico do perfil de aço:

$$M_a = \frac{1}{h_0} \left\{ GJ + EC_{w,d} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + k \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \right\} \quad (3.30)$$

Definindo agora o parâmetro adimensional

$$\eta_b = \sqrt{\frac{kL^4}{EC_{w,d}}} \quad (3.31)$$

o momento crítico é reescrito como:

$$M_a = \frac{1}{h_0} \left\{ GJ + \frac{EC_{w,d}}{L^2} \left[(n\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n\pi} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.32)$$

A dificuldade para utilização da Equação (3.32) reside na determinação do número de semiondas, n , a ser adotado como configuração deformada para o modelo em análise. Tal problema é resolvido observando-se o comportamento da função apresentada conforme se varia o número de semiondas e o comprimento da barra (Figura 3-2).

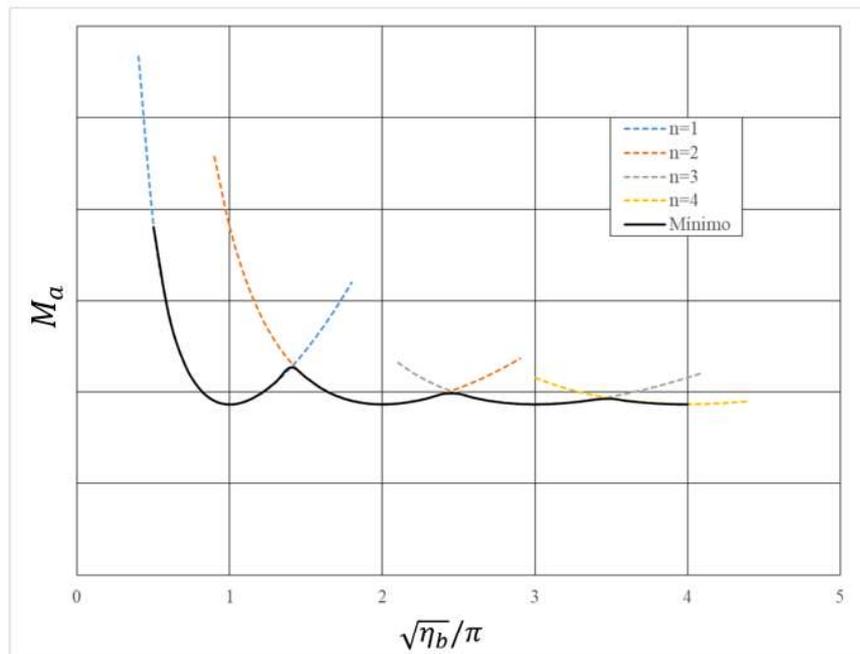


Figura 3-2 – Ilustração do comportamento do momento crítico com a mudança do número de semiondas.

Diante da figura, é possível observar que conforme varia-se η_b , também ocorre alteração no número de semiondas da configuração deformada. Analiticamente, é possível determinar o número de semiondas que será formado. Para isso, inicialmente, deriva-se o momento crítico com respeito a n para obter-se o valor de n para o qual o momento crítico é mínimo, como segue:

$$\frac{dM_a}{dn} = 0 \Rightarrow 2n_{id}\pi^2 - 2\frac{\eta_b^2}{\pi^2}n_{id}^{-3} = 0 \Rightarrow n_{id} = \frac{\sqrt{\eta_b}}{\pi} \quad (3.33)$$

Em tal condição, obtém-se o valor de n que leva ao momento mínimo, mas, devido às condições de contorno impostas, n deverá ser um número inteiro. É possível determinar também o momento crítico correspondente à passagem de uma deformada com uma semionda para um número superior. Sejam dois inteiros n_1 e n_2 , tais que $n_2 = n_1 + 1$. Igualando os momentos com os dois números de semiondas, tem-se:

$$M_a|_{n_1} = M_a|_{n_2} \Leftrightarrow (n_1\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n_1\pi}\right)^2 = (n_2\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n_2\pi}\right)^2 \quad (3.34)$$

Desenvolvendo essa equação, obtém-se, na mudança do número de semiondas, a seguinte condição:

$$\left(\frac{\sqrt{\eta_b}}{\pi}\right)_{lim} = n_{lim} = \sqrt{n_1 n_2} \quad (3.35)$$

Dessa forma, caso se deseje determinar o número de semiondas, calcula-se o valor de n_{id} segundo a Equação (3.33) e determina-se os dois números inteiros mais próximos a ele (n_1 e n_2). Determina-se também a média geométrica desses dois valores (Equação (3.35)). O valor de n é, então, obtido como:

$$n = \begin{cases} n_1 & \text{se } n_{id} \leq n_{lim} \\ n_2 & \text{se } n_{id} > n_{lim} \end{cases} \quad (3.36)$$

Em síntese, avalia-se se o valor que leva ao momento mínimo passou ou não do valor limite para transição entre deformadas e determina-se um n inteiro apropriado para ser aplicado na Equação (3.32). Outra maneira de se resolver o problema seria calcular o valor de momento crítico para n_1 e para n_2 e utilizar o menor dos dois valores obtidos.

De maneira conservadora, é possível que se trate o valor de momento crítico como o valor obtido com o número de semiondas dado pela Equação (3.33). Substituindo-se o valor de n obtido segundo essa Equação na Equação (3.32), vem:

$$M_a = \frac{1}{h_0} \{GJ + 2\sqrt{kEC_{w,d}}\} \quad (3.37)$$

que se torna independente do vão da viga e dependente apenas das propriedades da seção transversal. Este valor corresponderia ao momento crítico obtido nos pontos dos vales das curvas apresentadas na Figura 3-2 e pode-se observar que é uma boa estimativa do valor de momento crítico quando a viga em questão possui um vão longo, apesar de poder ser excessivamente conservadora nos casos de pequenos comprimentos da viga.

4 DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS NUMÉRICOS

4.1 Generalidades

Na presente seção, discute-se o desenvolvimento dos modelos numéricos de elementos finitos utilizados no estudo. Descrições da geometria, dos elementos utilizados, das condições de contorno e carregamento adotadas, da malha de elementos finitos, e uma avaliação da adequabilidade do modelo proposto são apresentadas. Todos os modelos foram confeccionados no software comercial de elementos finitos ANSYS v.18.2 (Ansys Inc., 2017). Os modelos são compostos por três partes principais: as chapas representando a alma e as mesas dos perfis, chapas perpendiculares às mesas e à alma, representando os enrijecedores de alma colocados nos extremos da viga e elementos de mola, utilizados para simular a restrição rotacional imposta pela laje e pela conexão de cisalhamento ao perfil de aço da viga mista.

As considerações do Item 3.2 são todas repetidas nesses modelos, exceto pela simplificação da rigidez à distorção do perfil de aço. Nos modelos numéricos, ela não é introduzida por meio de uma mola, mas representada diretamente pela deformação dos elementos que compõem a alma do perfil. Assim, as molas introduzidas referem-se apenas à rigidez da laje e da conexão.

4.2 Elementos Utilizados

Todo o perfil de aço e os enrijecedores são representados utilizando-se elementos de casca. Dessa maneira, a representação do fenômeno da distorção da alma do perfil se dá de maneira mais fiel que por meio da simples consideração de uma mola de rigidez k_2 . O elemento escolhido foi o SHELL181 da biblioteca do ANSYS, um elemento com quatro nós e seis graus de liberdade por nó (deslocamentos e rotações nos três eixos), baseado na teoria de Reissner-Mindlin.

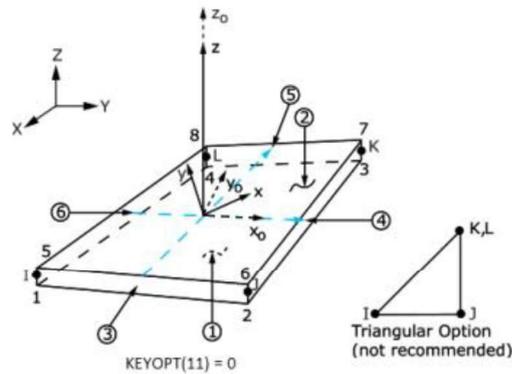


Figura 4-1 - Elemento SHELL181. Fonte: Ansys Inc.

A restrição à torção do perfil que é imposta pela laje e pela conexão foi simulada por meio de elementos de mola. Cada um dos nós do centro da mesa superior do perfil teve um elemento de mola adicionado que impedisse parcialmente a torção. O elemento adotado para tal finalidade foi o COMBIN14. Cabe ressaltar que, por mais que na prática a restrição seja imposta ao centro da face superior da mesa, aqui ela é introduzida em seu centro geométrico. Uma vez que no elemento de placa a espessura é degenerada, confundem-se as posições geométricas das faces e de seu centro, o que não permite a consideração precisa da disposição da restrição, resultando em uma pequena simplificação.

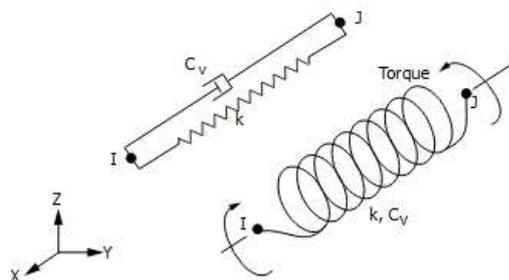


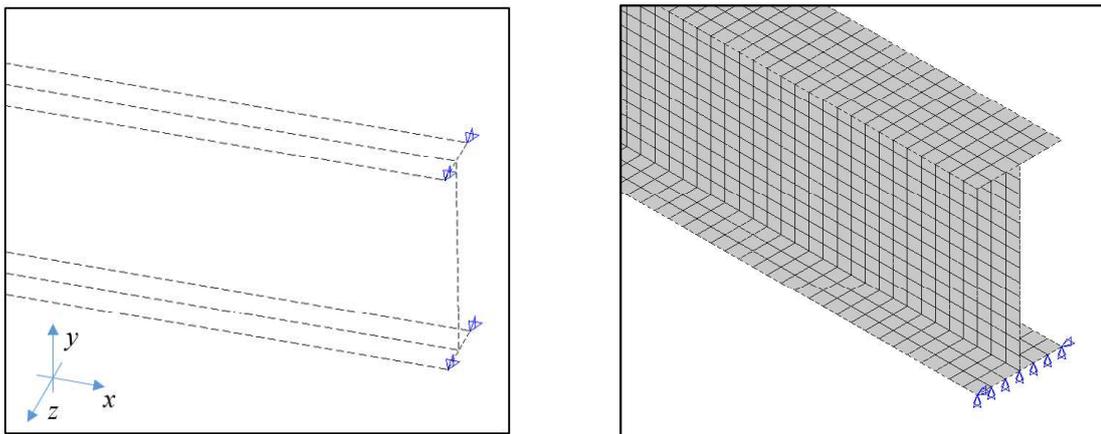
Figura 4-2 - Elemento COMBIN14. Fonte: Ansys Inc.

4.3 Modelos de Materiais

Uma vez que na análise de flambagem são utilizadas apenas as propriedades em regime elástico do material, define-se apenas o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do aço. Os valores adotados em todos os modelos foram de 200 GPa para o módulo de elasticidade e 0,3 para o coeficiente de Poisson.

4.4 Condições de Contorno e Carregamento

Nas extremidades da viga, para impedir a torção, os deslocamentos na direção z foram restringidos nas quatro extremidades das mesas do perfil (Figura 4-3-a). Quanto aos deslocamentos relativos à flexão, a mesa inferior teve seus nós restritos na direção y (Figura 4-3-b).



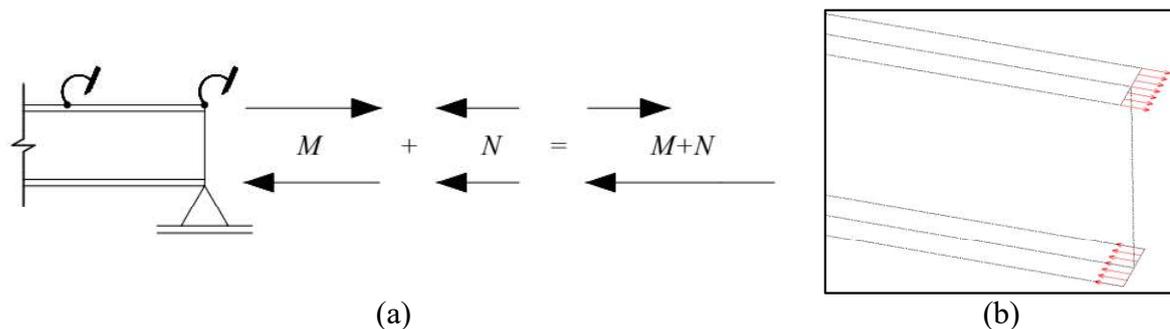
(a) Restrição aos deslocamentos de torção

(b) Restrição aos deslocamentos de flexão

Figura 4-3 - Condição de contorno para impedir deslocamentos de torção e flexão do perfil.

Em azul, nós com deslocamento restrito.

Nas duas extremidades, binários foram aplicados por meio de duas forças, resultando em um momento fletor uniforme de 1 kN.m que comprime a mesa inferior. Ao se deslocar a linha neutra, a proporção entre essas duas forças é alterada e a força de compressão na mesa inferior passa a ser maior que a de tração da mesa superior, de maneira que se mantém o momento de 1 kN.m, mas uma compressão é introduzida ao modelo. Essa situação é apresentada esquematicamente na Figura 4-4-a. A Figura 4-4-b apresenta esse binário aplicado em uma das extremidades do modelo numérico. Com essa alteração, tem-se a distribuição de tensões exemplificada na Figura 4-5 para um caso em que a linha neutra se encontra a um quarto da altura do perfil da mesa superior.



(a)
 (b)
 Figura 4-4 - Aplicação de binário em uma das extremidades da viga.

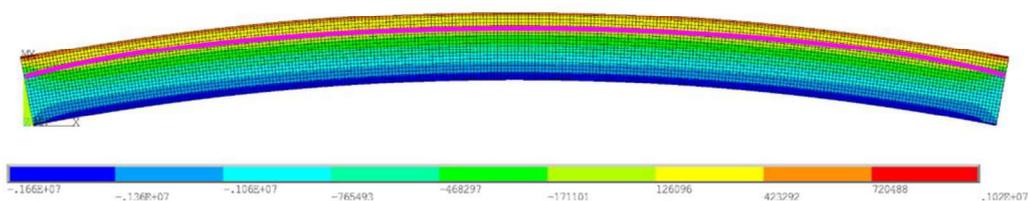
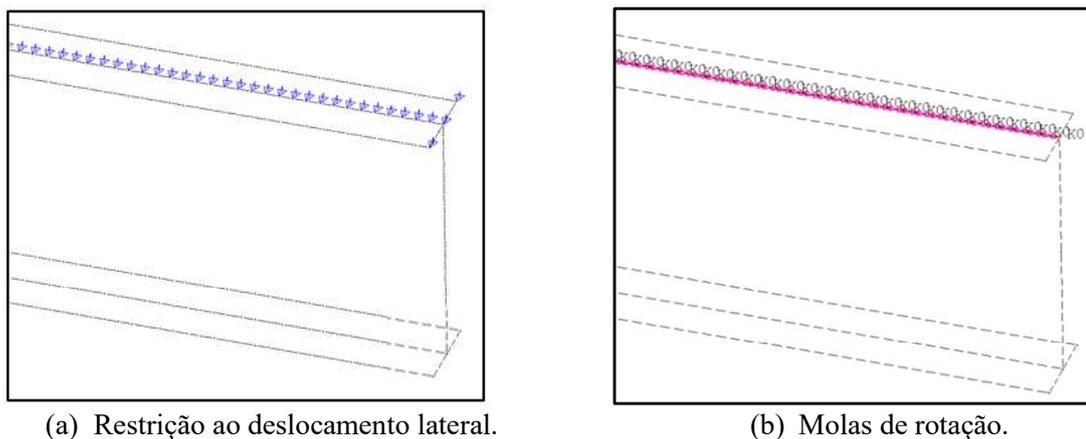


Figura 4-5 - Distribuição de tensão nos modelos com deslocamento da linha neutra (em cores, tensões na direção longitudinal em Pa. – em magenta, posição da linha neutra elástica).

A simulação da laje, realizada por meio de impedimento do deslocamento lateral e introdução de molas de rotação, é apresentada na Figura 4-6.



(a) Restrição ao deslocamento lateral.
 (b) Molas de rotação.
 Figura 4-6 - Condições de contorno impostas para consideração das restrições causadas pela laje.

4.5 Malha de Elementos Finitos

Sendo o método dos elementos finitos um método matemático aproximado, é necessário que se verifique a adequabilidade da discretização adotada nos modelos. Se, por um lado, malhas muito densas oferecem resultados mais precisos, por outro, a performance computacional fica prejudicada. A fim de determinar-se a densidade ideal para a malha a ser utilizada no presente estudo, uma série de modelos numéricos com perfil de alma de 600 mm de altura e 12,5 mm de espessura e mesas de 200 mm de largura e 16 mm de espessura, vão de 7 metros, restrição da laje de 1180 kN.m/m e linha neutra deslocada de 120 mm do centroide do perfil foi analisada.

Para esses modelos, variou-se o tamanho dos elementos de metade até um vigésimo da largura da mesa, num total de dez dimensões, e os momentos críticos e número de elementos foram anotados para cada um dos casos. Os desvios do momento crítico com relação ao resultado da malha seguinte foram calculados. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.1 e graficamente na Figura 4-7.

Tabela 4.1 - Resultados da análise de densidade da malha.

Número de divisões na mesa	Número de elementos	Momento crítico (kN.m)	Desvio com relação à malha seguinte (%)
2	795	848,9	15,2
4	3.037	978,2	2,5
6	6.727	1.002,3	0,9
8	11.865	1.011,0	0,4
10	18.451	1.015,1	0,2
12	26.485	1.017,4	0,1
14	35.967	1.018,7	0,1
16	46.897	1.019,7	0,1
18	59.275	1.020,3	0,0
20	73.101	1.020,8	-

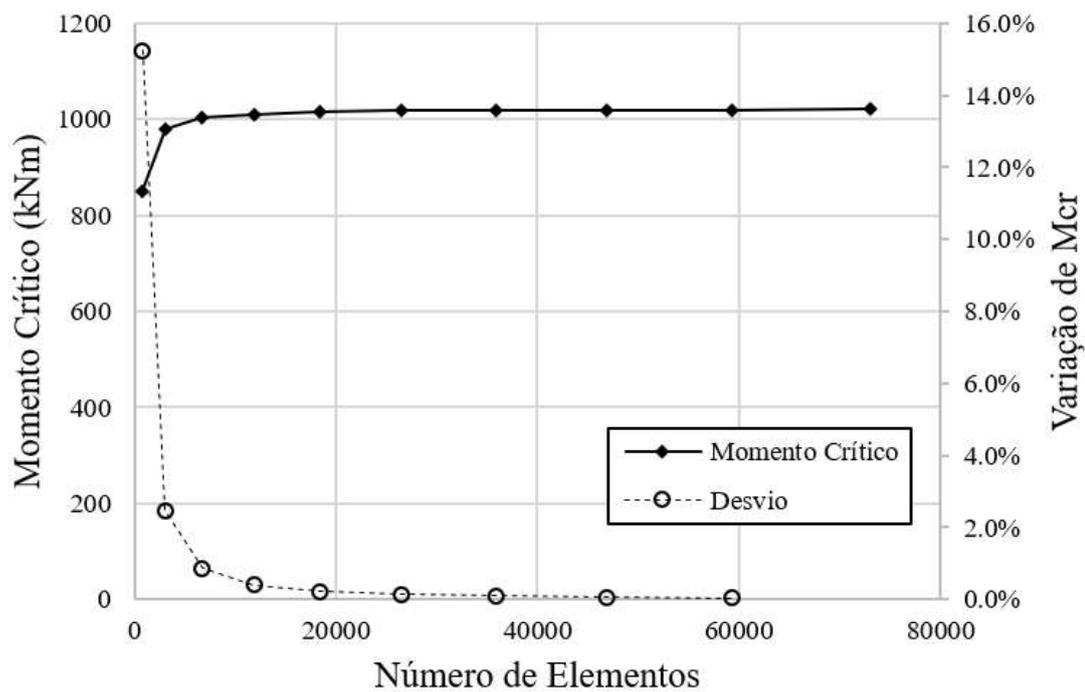
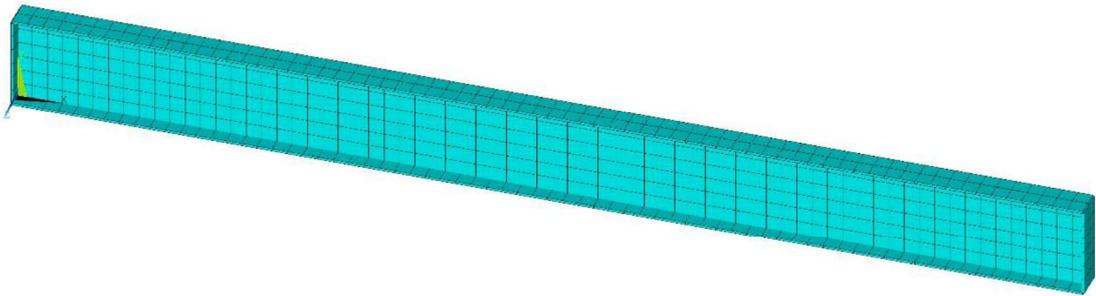


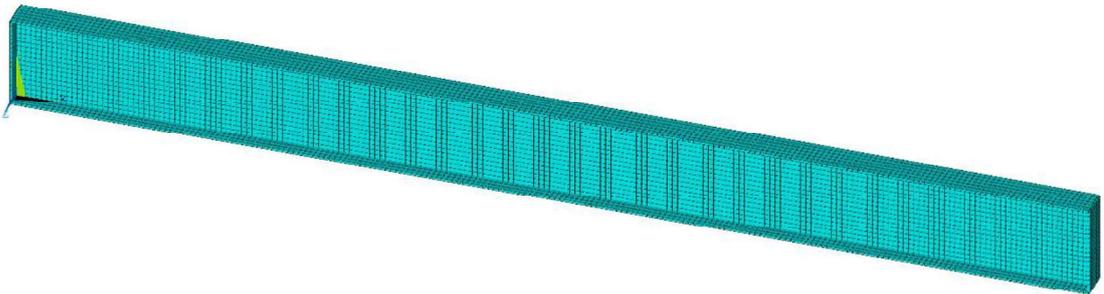
Figura 4-7 - Estudo de densidade da malha.

É possível observar que a partir de 6 divisões na mesa, o erro numérico obtido já se torna negligenciável (menor que 1%), de maneira que esse nível de refino de malha foi adotado em todos os modelos do estudo.

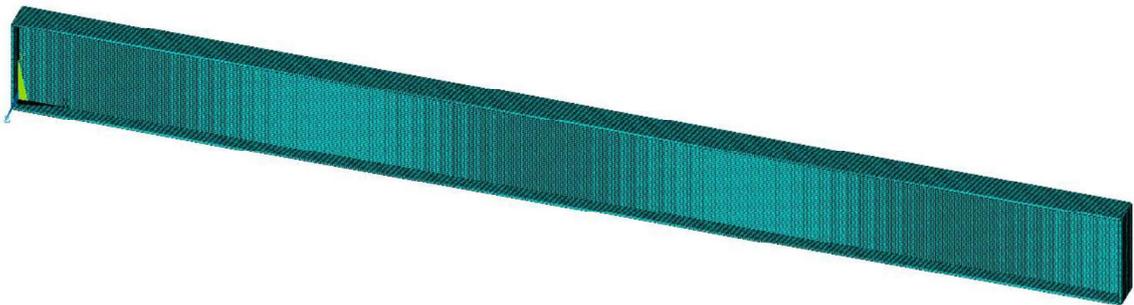
A Figura 4-8 apresenta três modelos com diferentes divisões de malha, para efeito de comparação visual das densidades analisadas. A densidade adotada para os modelos corresponde à representada na Figura 4-8-b.



(a) Duas divisões na mesa.



(b) Seis divisões na mesa (malha adotada).



(c) Dezoito divisões na mesa.

Figura 4-8 - Algumas densidades de malha analisadas.

4.6 Validação do Modelo Numérico

4.6.1 Considerações Iniciais

Uma vez que se parte da premissa no presente estudo de que as equações presentes na literatura para determinação do momento crítico à FLD não são apropriadas, é inadequada a realização da aferição da modelagem numérica a partir de um modelo que simule especificamente essa flambagem. É possível, contudo, verificar se o modelo paramétrico proposto é capaz de representar algumas instabilidades globais já bastante estudadas na literatura, para as quais se possui formulações analíticas precisas, capazes de determinar forças ou momentos críticos. A

flambagem lateral com torção, por exemplo, pode ser analisada a partir do modelo proposto, excluindo-se apenas as considerações que são feitas para simulação da laje (deslocamento da linha neutra, restrição aos deslocamentos laterais no centro da mesa superior e introdução de molas de rotação). Com um modelo similar a este apresentado da FLT, removendo o binário e introduzindo apenas uma força de compressão, é possível verificar a força crítica de flambagem por flexão e a de flambagem por torção. Nos modelos apresentados aqui, removem-se os enrijecedores de alma para que não sejam parcialmente restritos alguns deslocamentos. A seguir, são apresentadas as análises de alguns desses casos.

4.6.2 Modelos Sujeitos à FLT

É possível determinar analiticamente o momento crítico de flambagem lateral com torção a partir da seguinte equação:

$$M_{cr} = \frac{\pi^2 E I_y}{L_b^2} \sqrt{\frac{C_w}{I_y} \left(1 + 0,039 \frac{J L_b^2}{C_w} \right)} \quad (4.1)$$

onde

I_y é o momento de inércia do perfil em relação ao eixo y ;

C_w é constante de empenamento do perfil;

L_b é o comprimento destravado de flambagem lateral com torção;

J é a constante de torção do perfil;

Para que se avalie a adequabilidade do modelo na análise deste fenômeno, são propostas quatro vigas, apresentadas com seus momentos críticos numéricos e analíticos na Tabela 4.2. A Figura 4-9 apresenta o modo de flambagem do modelo FLT-03, típico de todos os outros analisados neste item.

Tabela 4.2 – Modelos sujeitos à Flambagem Lateral com Torção para validação e seus resultados.

Modelo	d (mm)	b_f (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	L_b (mm)	$M_{cr,an}$ (kN.m)	$M_{cr,num}$ (kN.m)	$\frac{M_{cr,num}}{M_{cr,an}}$
FLT-01	150	100	4,3	4,9	3000	18,55	17,79	0,96
FLT-02	260	100	6,4	10	6000	27,80	26,34	0,95
FLT-03	360	170	6,9	9,8	6.500	93,73	89,42	0,95
FLT-04	530	210	10,9	17,4	10.000	243,60	230,43	0,95

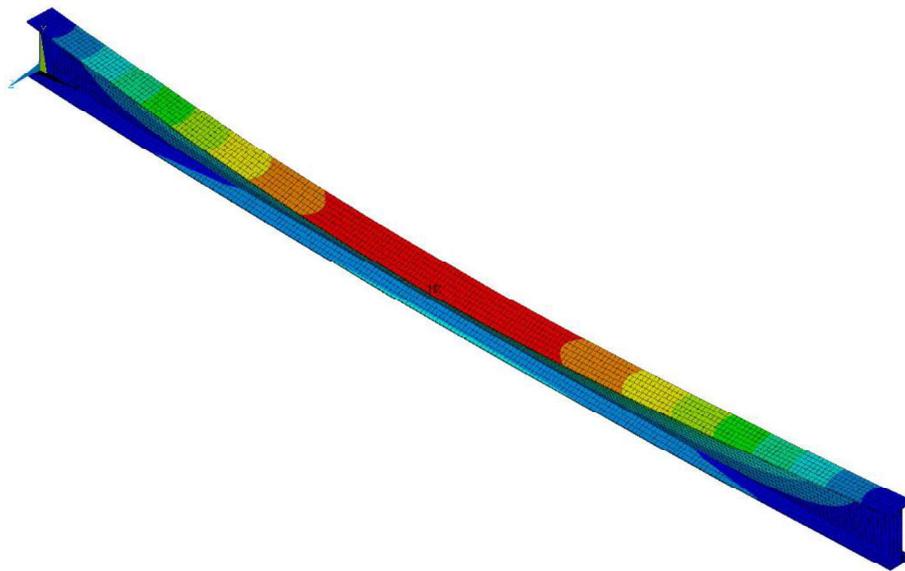


Figura 4-9 – Modo de flambagem por FLT do modelo FLT-03, típico de todos os modelos sujeitos a essa flambagem. Em cores, deslocamentos.

A princípio, pode parecer que os desvios da ordem de 5% para menos nos modelos numéricos são altos quando se realiza uma análise de flambagem elástica por elementos finitos de um problema de solução analítica precisa e conhecida. Há que se observar que a formulação da Equação (4.1) foi desenvolvida considerando-se a teoria de barras, levando em conta a hipótese de Vlasov de manutenção da forma da seção transversal, enquanto o modelo aqui representado adota elementos de placas. Uma análise mais detalhada do modo de flambagem evidencia que entra em cena o fenômeno da distorção nos modelos apresentados. Essa distorção promove uma redução do momento crítico elástico à FLT, que pode explicar os desvios dos resultados obtidos. A Figura 4-10 apresenta a seção transversal distorcida em azul e seu contorno indeformado em vermelho no apoio do modelo FLT-03. Uma configuração deformada semelhante pode ser observada em todos os modelos.

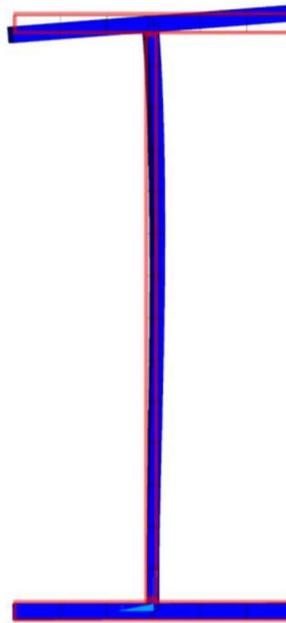


Figura 4-10 - Seção transversal distorcida no apoio do modelo FLT-03.

Silva (2016) também observou em suas análises desvios dos momentos críticos numéricos da ordem de 5% causados pela distorção quando comparados aos resultados analíticos em modelos de vigas sujeitas a momento uniforme com aproximadamente a mesma esbeltez da alma dos apresentados nesta Subseção.

4.6.3 Modelos Sujeitos à Flambagem por Flexão

De maneira similar ao que foi feito na Subseção anterior, comprimindo axialmente as barras, é possível analisar a adequabilidade do modelo ao se verificar a força crítica de flambagem por flexão, dada analiticamente pela equação:

$$N_e = \frac{(\pi^2 E I_y)}{L_y^2} \quad (4.2)$$

Onde L_y é o comprimento de flambagem por flexão em torno do eixo y .

Modelos com as mesmas quatro geometrias descritas anteriormente são gerados para essa análise e seus resultados são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Modelos sujeitos à flambagem por flexão para validação e seus resultados.

Modelo	d (mm)	b_f (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	L_b (mm)	$N_{e,an}$ (kN)	$N_{e,num}$ (kN)	$\frac{N_{e,num}}{N_{e,an}}$
FF-01	150	100	4,3	4,9	3000	179,33	171,83	0,96
FF-02	260	100	6,4	10	6000	91,7	88,83	0,97
FF-03	360	170	6,9	9,8	6.500	375,37	357,61	0,95
FF-04	530	210	10,9	17,4	10.000	531,26	511,29	0,96

A Figura 4-11 apresenta o modo de flambagem do modelo FF-03, típico de todos os outros analisados neste item.

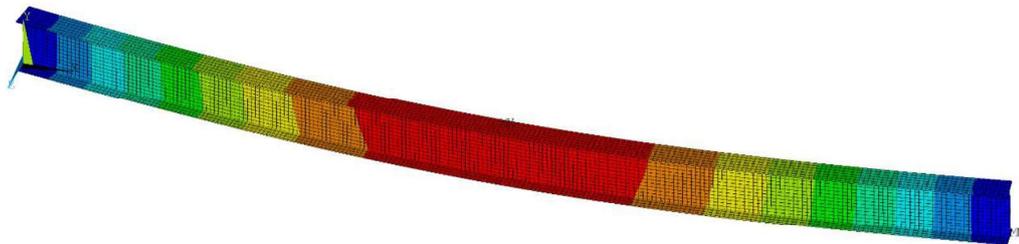


Figura 4-11 - Modo de flambagem por flexão do modelo FF-03, típico de todos os modelos sujeitos a essa flambagem (em cores, deslocamentos).

A mesma ordem de grandeza dos desvios quando se analisa o momento crítico de FLT é observada para a flambagem por flexão. Novamente, o motivo reside na distorção da alma, evidenciada na Figura 4-12 para o modelo FF-03.

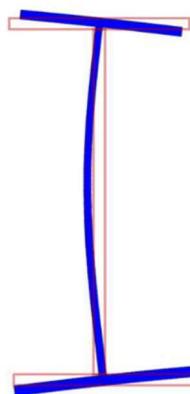


Figura 4-12 - Seção transversal distorcida no meio do vão do modelo FF-03

4.6.4 Modelos Sujeitos à Flambagem por Torção

Outra análise possível, comprimindo axialmente as barras, consiste em analisar a adequabilidade do modelo ao se verificar a força crítica de flambagem por torção, dada analiticamente pela equação:

$$N_{e,z} = \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{L_z^2} + GJ \right] \quad (4.3)$$

onde

L_z é o comprimento de flambagem por torção;

r_0 é o raio de giração polar da seção em relação ao seu centro de cisalhamento.

Os mesmos modelos gerados anteriormente podem ser utilizados nesta análise, alterando somente o modo de flambagem escolhido. Nos casos analisados, os modos correspondentes à torção foram o segundo ou o terceiro, seguindo sempre a flambagem por flexão em relação ao eixo de menor inércia, apresentada no Subitem 4.6.4. Os modelos e resultados obtidos para estes casos são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Modelos sujeitos à flambagem por torção para validação e seus resultados.

Modelo	d (mm)	b_f (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	L_b (mm)	$N_{ez,an}$ (kN)	$N_{ez,num}$ (kN)	$\frac{N_{e,num}}{N_{e,an}}$
FT01	150	100	4,3	4,9	3000	413,25	397,48	0,96
FT02	260	100	6,4	10	6000	688,12	638,20	0,93
FT03	360	170	6,9	9,8	6.500	952,72	900,72	0,95
FT04	530	210	10,9	17,4	10.000	2165,45	2005,49	0,93

A Figura 4-13 apresenta o modo de flambagem do modelo FT-04, típico de todos os outros analisados neste item.

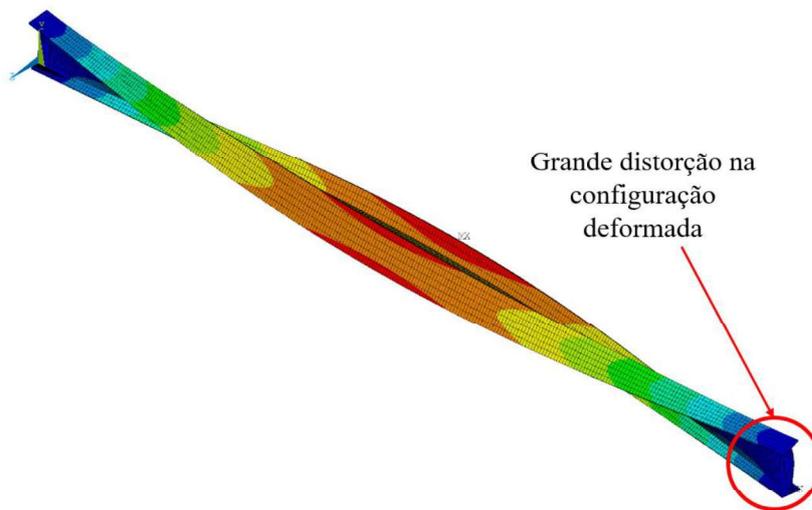


Figura 4-13 - Modo de flambagem por torção do modelo FT-04, típico de todos os modelos sujeitos a essa flambagem. Em cores, deslocamentos.

Desvios um pouco maiores (até 7%) são observados nos casos apresentados para flambagem por torção. É perceptível da Figura 4-13 que a distorção da alma exerce um papel importante na flambagem da barra, sendo mais presente nesses casos que nos analisados anteriormente, o que aumenta a diferença entre os modelos numéricos e a formulação analítica. A seção transversal distorcida é apresentada na Figura 4-14.

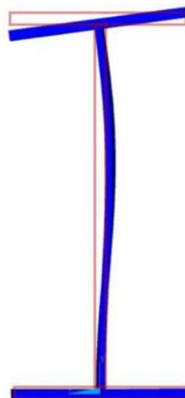


Figura 4-14 - Seção transversal distorcida do modelo FT-03.

Diante dos resultados apresentados, considera-se que a modelagem numérica é capaz de prever com precisão adequada os valores de força ou de momento crítico e, portanto, pode ser considerada validada.

5 ESTUDO PARAMÉTRICO

5.1 Generalidades

Na presente seção, é apresentado o estudo paramétrico realizado para verificação e calibração do procedimento sugerido de determinação do momento crítico elástico. Inicialmente, são propostos modelos que consideram a rigidez rotacional imposta pela laje como infinita e que não deslocam a linha neutra elástica do centroide do perfil de aço. Tais modelos permitem aferir a adequabilidade da consideração da rigidez da alma do perfil por meio de uma mola. Em seguida, define-se uma rigidez para as molas para avaliar a influência do parâmetro k_1 e a adequabilidade da associação em série das rigidezes k_1 e k_2 . Posteriormente, inclui-se o efeito do deslocamento da posição da linha neutra e mostra-se que este efeito pode ser tratado como desacoplado dos outros no perfil de aço e as modificações necessárias ao procedimento de cálculo são propostas.

5.2 Avaliação da Equação Proposta com Rigidez Infinita da Laje e Sem Deslocamento da Linha Neutra

5.2.1 Considerações Básicas

Uma vez que a equação deve ser capaz de prever com acurácia adequada o momento crítico das vigas com seções e comprimentos usuais, são propostos e analisados 1.800 modelos de vigas. O estudo paramétrico é feito considerando quatro alturas entre centroides das mesas de perfis de aço (300, 600, 900 e 1200 mm). Para cada uma dessas alturas, três razões entre largura da mesa e altura entre mesas são propostas, iguais a um quarto, um terço e metade. É escopo da norma ABNT NBR 5884:2013, que prescreve os requisitos para a fabricação de perfis soldados, razões entre largura da mesa e altura do perfil de até dois terços. Quando essa razão supera a metade, observa-se que, com o ganho de inércia da mesa inferior do perfil de aço, a flambagem lateral com distorção não ocorre, sendo a instabilidade dominante a flambagem local da mesa comprimida. Por este motivo, razões superiores a um meio não são incluídas no estudo paramétrico aqui proposto.

A espessura da alma é determinada com base em sua altura. As razões analisadas de altura da alma (tomada simplificada como h_0) por espessura (h_0/t_w) são de 60, 70, 80, 90 e 100. Valores superiores a este último podem conduzir a almas esbeltas segundo a ABNT NBR 8800:2008 ou a perfis de classe 4 segundo o EN 1994-1-1:2004, estando fora do escopo dessas normas para o dimensionamento de vigas mistas sob momento negativo. Valores inferiores a 60 são pouco usuais e produzem almas muito compactas e conseqüentemente bastante rígidas à flexão, nas quais a flambagem lateral com distorção não é um problema.

A espessura das mesas também é determinada de maneira que se evitem problemas de flambagem local. As razões entre metade da largura e a espessura ($b_f/2t_f$) são adotadas como 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Esses valores são, novamente, escolhidos para que se tenha mesas não esbeltas segundo a norma brasileira ou de classe 3 no máximo segundo a norma europeia. Valores inferiores a 5 não são usuais.

Por fim, o comprimento da viga é determinado com base em sua altura e vale 10, 15, 20, 25 ou 30 vezes h_0 , lembrando que h_0 é a distância entre centroides das duas mesas. A princípio, pode parecer que uma razão de vão por altura de dez seja pequena para uma viga mista de aço quando comparada a valores usuais de projeto. Deve-se lembrar, contudo, que a região de momento negativo das vigas mistas não costuma compreender todo o vão e pode assumir comprimentos relativamente pequenos, de maneira que razões até menores que dez podem ocorrer.

Dadas as relações para determinação dos perfis, todas as combinações possíveis são analisadas, conforme ilustrado na Figura 5-1. A tarefa de preencher o código parametrizado do modelo com os valores das dimensões foi realizada com auxílio da aplicação computacional comercial *MATLAB*, produzindo um total de 1.800 arquivos de entrada para os modelos numéricos. Um outro código foi desenvolvido para que todos os modelos fossem processados sequencialmente e seus resultados registrados em arquivo de texto, acelerando o processamento. Com esse processo de automatização, a obtenção de resultados para milhares de geometrias diferentes de modelos se torna bastante rápida.

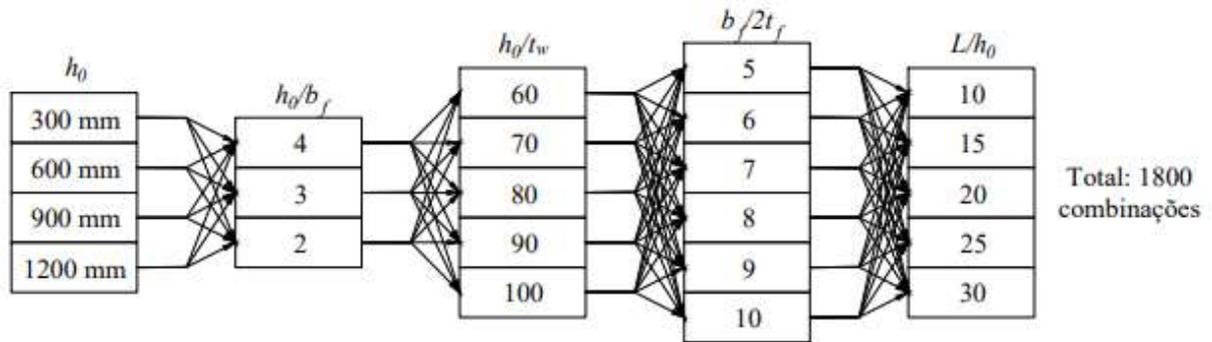


Figura 5-1 - Modelos analisados no estudo paramétrico.

As geometrias e resultados obtidos para cada um dos modelos não são apresentadas individualmente, uma vez que o conjunto de 1.800 resultados formaria um apêndice excessivamente grande e pouco útil para as análises realizadas.

Tal parametrização permite uma verificação da adequabilidade da consideração da rigidez à distorção da alma por meio de uma simples mola de rotação.

5.2.2 Comparação dos Resultados Obtidos com o Procedimento Proposto

Na Figura 5-2 é apresentada uma comparação entre os resultados propostos e numéricos, normalizados pelo momento de início de plastificação da seção transversal (M_y), considerando um aço com resistência ao escoamento de 350 MPa. A região entre as duas retas representa uma situação na qual o desvio entre os resultados numéricos e obtidos segundo o procedimento proposto são inferiores a 10%, de maneira que é perceptível que a proposição se mostra adequada.

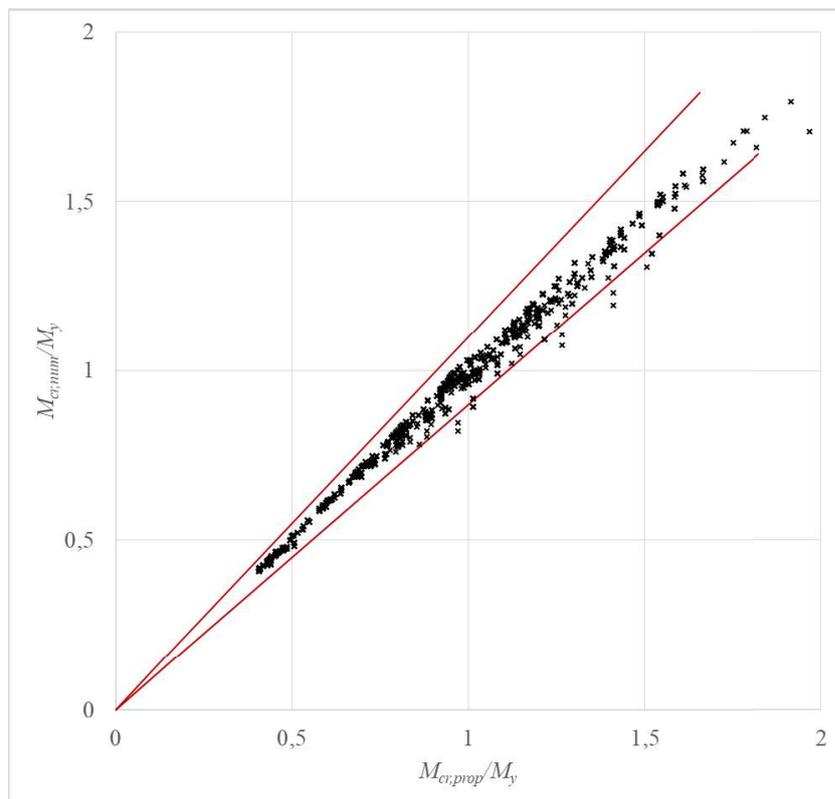


Figura 5-2 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos pelo procedimento proposto.

Analisando os desvios entre resultados propostos e numéricos, constrói-se a Tabela 5.1.

Desses dados, explicando em palavras, observa-se que os erros obtidos são inferiores a 5% em 93,56% dos modelos analisados e inferiores a 10% em 98,2% dos modelos analisados. É constatada, portanto, uma excelente representação do comportamento dos modelos numéricos pelo procedimento de cálculo de momento crítico proposto, baseado na teoria de vigas apoiadas em base elástica, e a adequabilidade da simplificação feita ao considerar-se a rigidez da alma do perfil por meio de uma mola.

Tabela 5.1- Frequência de erros do procedimento proposto.

Erro limite	Frequência acumulada
0%	0,00%
1%	26,06%
2%	54,44%
3%	79,56%
4%	88,89%
5%	93,56%
6%	94,89%
7%	96,44%
8%	97,33%
9%	97,33%
10%	98,22%
11%	98,67%
12%	98,89%
13%	99,11%
14%	99,33%
15%	99,56%
16%	99,78%
17%	99,78%
18%	100,00%

A Tabela 5.1 pode ser também representada graficamente pela Figura 5-3.

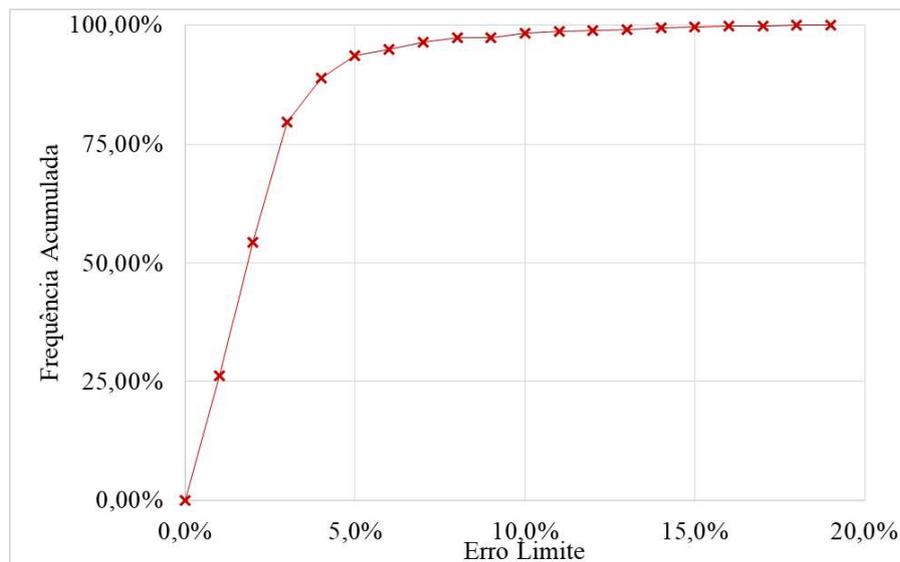


Figura 5-3 - Representação gráfica da distribuição de erros.

5.3 Avaliação da Equação Proposta com Consideração de Rigidez da Laje

No presente item, é determinada uma rigidez finita para as molas que restringem a rotação da mesa superior do perfil. É importante observar que a equação desenvolvida leva em consideração uma mola, sem se referir à rigidez da alma ou à associação entre rigidezes da alma e da laje, de maneira que o procedimento deve permanecer válido, considerando-se apenas a associação em série das rigidezes k_1 e k_2 .

São propostos valores para essa rigidez que variam de 5 a 35 vezes a rigidez da alma. Valores inferiores resultam em uma situação que não é usual e na qual a flambagem se aproxima mais da flambagem lateral com torção (já com acentuada distorção) que da flambagem lateral com distorção aqui estudada. Relações entre as rigidezes com valores similares são apresentados por Dietrich (2017). No total, 2.880 modelos foram analisados, com as combinações de propriedades apresentadas na Figura 5-4.

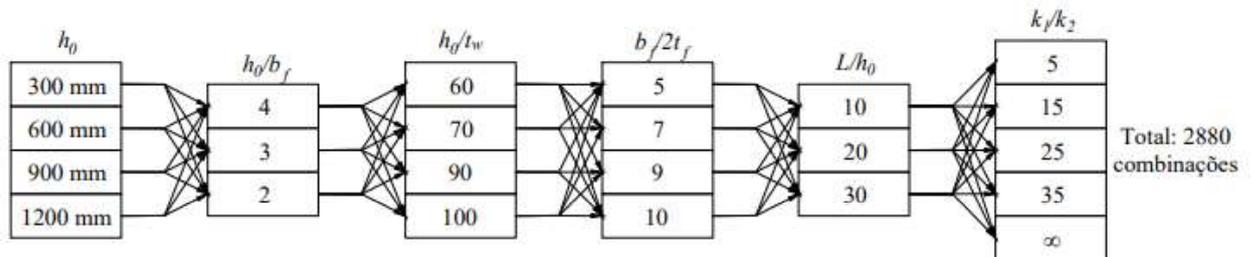


Figura 5-4 - Modelos da análise paramétrica para avaliação do parâmetro k_1 .

Uma comparação dos resultados numéricos e obtidos segundo a equação proposta pode ser visualizada na Figura 5-5. Novamente, observa-se que os valores obtidos segundo a equação proposta diferem dos obtidos numericamente em mais de 10% em pouquíssimos casos.

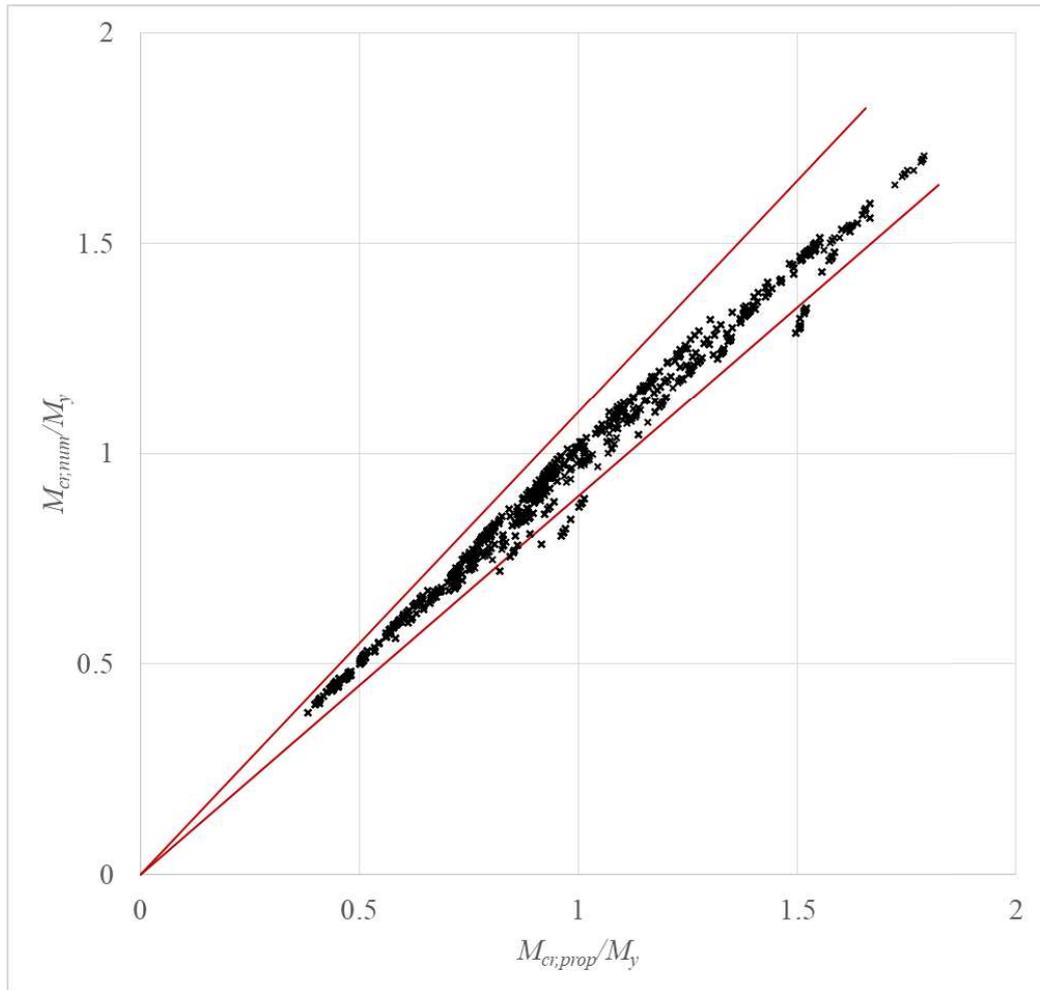


Figura 5-5 - Comparação entre resultados numéricos e segundo o procedimento proposto para modelos considerando a rigidez finita da laje.

Os erros obtidos são apresentados na Tabela 5.2 e na Figura 5-6.

Novamente, observa-se uma boa concordância entre resultados obtidos e propostos, comprovando a validade do procedimento apresentado para determinação do momento crítico elástico, quando há rigidez parcial da laje.

Tabela 5.2 - Erros da equação proposta para modelos com consideração da rigidez da laje.

Erro Limite	Frequência Acumulada
0,00%	0,00%
1,00%	28,06%
2,00%	53,06%
3,00%	73,75%
4,00%	85,28%
5,00%	90,28%
6,00%	92,92%
7,00%	94,58%
8,00%	96,11%
9,00%	96,39%
10,00%	96,53%
11,00%	96,81%
12,00%	97,08%
13,00%	97,22%
14,00%	98,06%
15,00%	98,47%
16,00%	99,03%
17,00%	99,44%
18,00%	99,58%
19,00%	99,86%
20,00%	100,00%

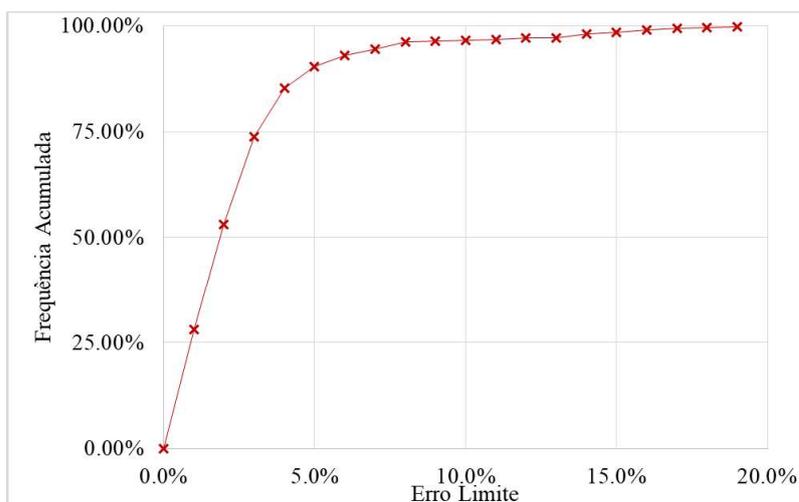


Figura 5-6 - Avaliação dos erros obtidos com consideração da rigidez da laje.

5.4 Avaliação da influência da posição da linha neutra no momento crítico

Conforme discutido anteriormente, dentre as influências da laje no momento crítico do perfil, pode-se ressaltar o deslocamento da linha neutra elástica do centroide do perfil para uma posição superior. A consequência direta disso é que uma maior região da alma está comprimida e, conseqüentemente, a flambagem é facilitada quando comparada à situação com a linha neutra no centroide.

Com a finalidade de se avaliar essa influência, 2.592 modelos são propostos e analisados, com as combinações de seus parâmetros geradas conforme a Figura 5-7.

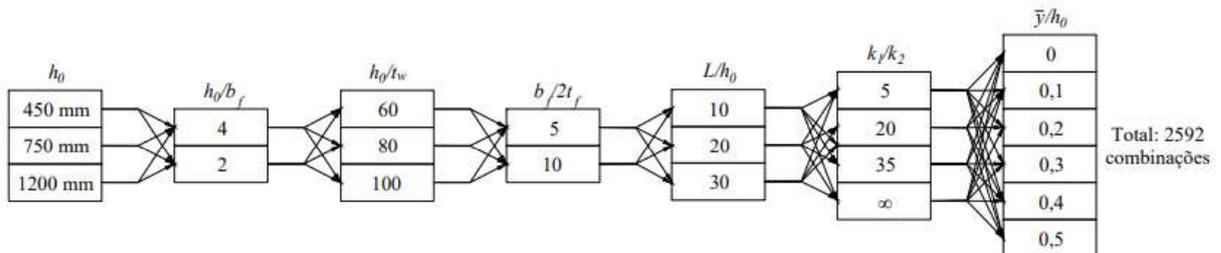


Figura 5-7 - Modelos da análise paramétrica com deslocamento da linha neutra.

Com o aumento da altura comprimida da alma do perfil, além de ser facilitada a flambagem lateral com distorção, torna-se mais fácil a ocorrência da flambagem local da alma. Por esse motivo, 551 resultados tiveram de ser descartados já que os modelos correspondentes apresentaram a flambagem local, resultando em um conjunto restante de 2.041 resultados para esta análise.

Uma forte tendência é observada para a redução do momento crítico com o aumento da altura comprimida da alma, conforme evidenciado pela Figura 5-8, isto é, a razão $M_{cr}/M_{cr,0}$, onde M_{cr} é o momento crítico do modelo analisado e $M_{cr,0}$ é o momento crítico de um modelo idêntico porém sem deslocamento da linha neutra, depende quase somente da razão \bar{y}/h_0 .

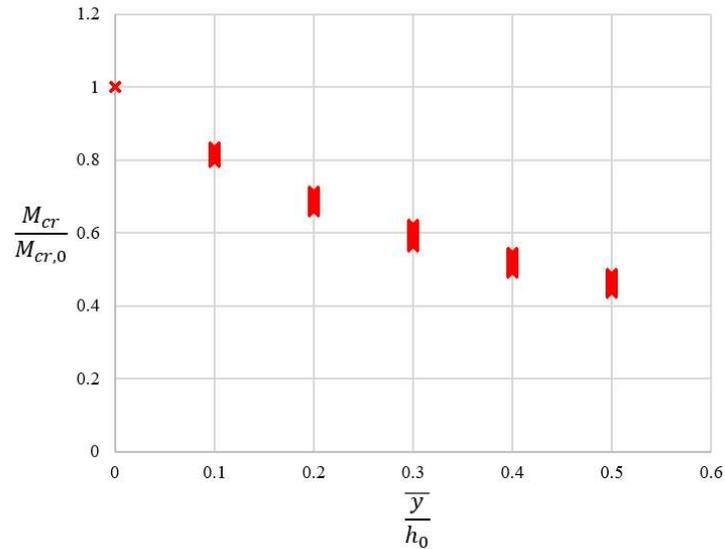


Figura 5-8 - Redução do momento crítico com a variação da posição da linha neutra.

Propõe-se, portanto, um único coeficiente adimensional para o ajuste relativo a este parâmetro, denominado aqui $\kappa_{g,0}$, dado por:

$$\kappa_{g,0} = \frac{M_{cr}}{M_{cr,0}} = \left[0,31 + 0,69 \times 0,05^{\bar{y}/h_0} \right] \quad (5.1)$$

Uma breve análise dos erros obtidos utilizando este coeficiente proposto pode ser feita a partir da Figura 5-9, Tabela 5.3 e Figura 5-10. Na Figura 5-9, as linhas vermelhas indicam um desvio de 10% entre resultados numéricos e propostos.

Tabela 5.3 - Erros obtidos com o uso da equação proposta para $\kappa_{g,0}$

Erro Limite	Frequência Acumulada
0,00%	20,53%
1,00%	44,93%
2,00%	64,87%
3,00%	80,89%
4,00%	92,06%
5,00%	97,50%
6,00%	99,71%
7,00%	100,00%

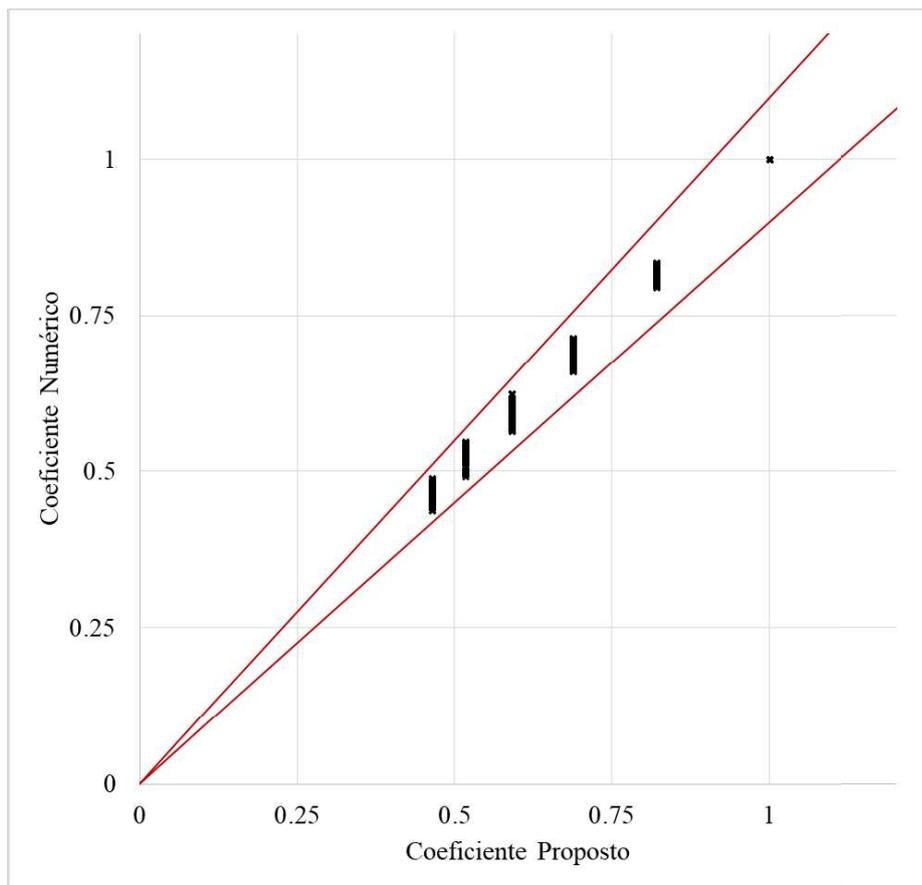


Figura 5-9 - Comparação dos coeficientes $\kappa_{g,0}$ propostos e obtidos numericamente.

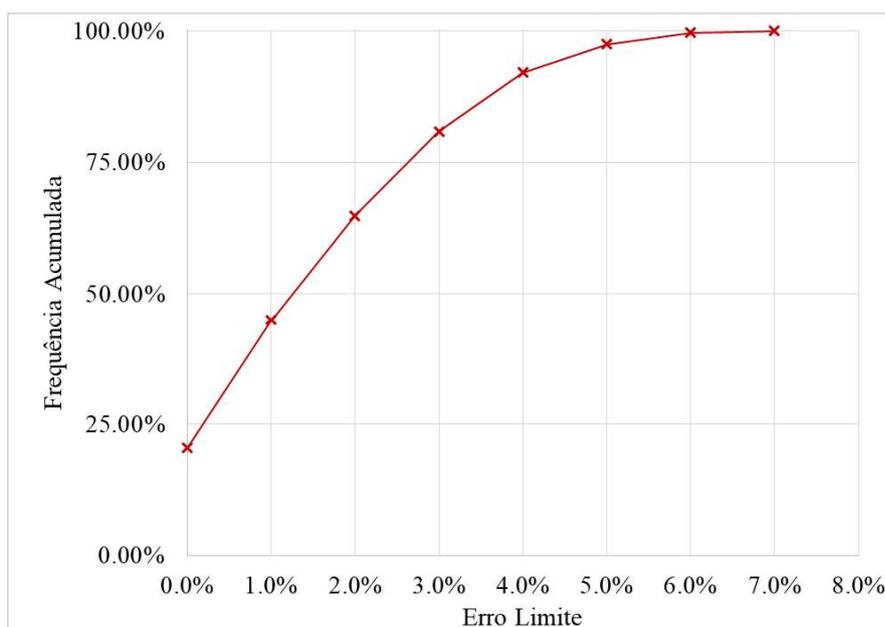


Figura 5-10 - Análise dos erros obtidos com o uso da equação proposta para $\kappa_{g,0}$

Os aproximadamente 20% de resultados com erro nulo são referentes aos modelos sem deslocamento da linha neutra que, por servirem de referência, obviamente, não podem apresentar erro já que o coeficiente para eles sempre será unitário. Todos os resultados obtidos apresentam desvios menores que 7% e 97,5% deles apresentam erros inferiores a 5%, o que pode ser considerado satisfatório. O coeficiente de determinação (R^2) para comparação da distribuição dos valores foi de 0,995, o que indica que, de fato, a equação proposta representa muito bem os dados obtidos.

É interessante notar que para grandes deslocamentos da linha neutra ($\bar{y}/h_0 \approx 0,5$), a redução do momento crítico é de mais de 50%, motivo pelo qual esse coeficiente não pode, de maneira alguma, ser negligenciado na análise do fenômeno. Mesmo para pequenos deslocamentos ($\bar{y}/h_0 \approx 0,1$), a redução obtida já é da ordem de 20%.

É possível também incluir este coeficiente no procedimento proposto anteriormente e verificar se sua adequabilidade se mantém. Uma comparação dos resultados de momento crítico utilizando a proposição com os resultados obtidos pelos modelos de elementos finitos calculados neste item pode ser observada na Figura 5-11.

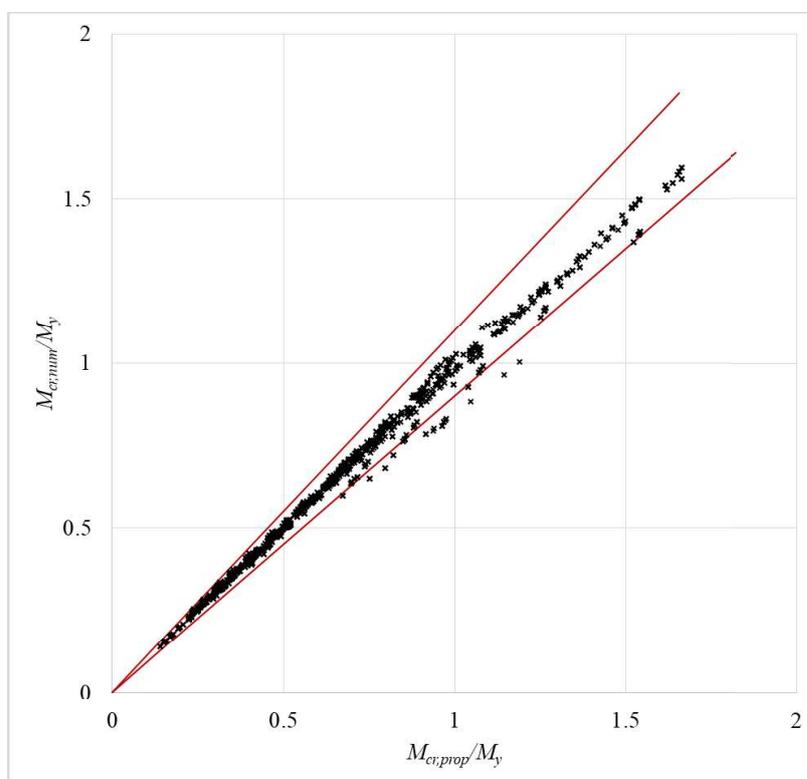


Figura 5-11 - Comparação dos momentos críticos com o procedimento proposto e obtidos através dos modelos de elementos finitos.

Os erros avaliados podem ser analisados pela Tabela 5.4 ou pela Figura 5-12.

É perceptível que a equação proposta permanece válida para os modelos com a linha neutra deslocada ao se incluir o coeficiente $\kappa_{g,0}$, mantendo os mesmos níveis de desvios com relação aos modelos numéricos que quando não se considerava esse fator. Mais de 97% dos valores de momento crítico calculados segundo a equação apresentaram desvios dos modelos inferiores a 10%, o que constitui um resultado bastante satisfatório.

Tabela 5.4 - Erros obtidos com o uso do procedimento proposto para o momento crítico para modelos com deslocamento da linha neutra.

Erro Limite	Frequência Acumulada
0,00%	0,00%
1,00%	33,22%
2,00%	60,26%
3,00%	79,52%
4,00%	88,34%
5,00%	91,57%
6,00%	94,51%
7,00%	95,10%
8,00%	95,25%
9,00%	96,08%
10,00%	97,26%
11,00%	97,94%
12,00%	98,38%
13,00%	98,68%
14,00%	98,82%
15,00%	98,82%
16,00%	99,97%
17,00%	99,27%
18,00%	99,71%
19,00%	99,85%
20,00%	100,00%

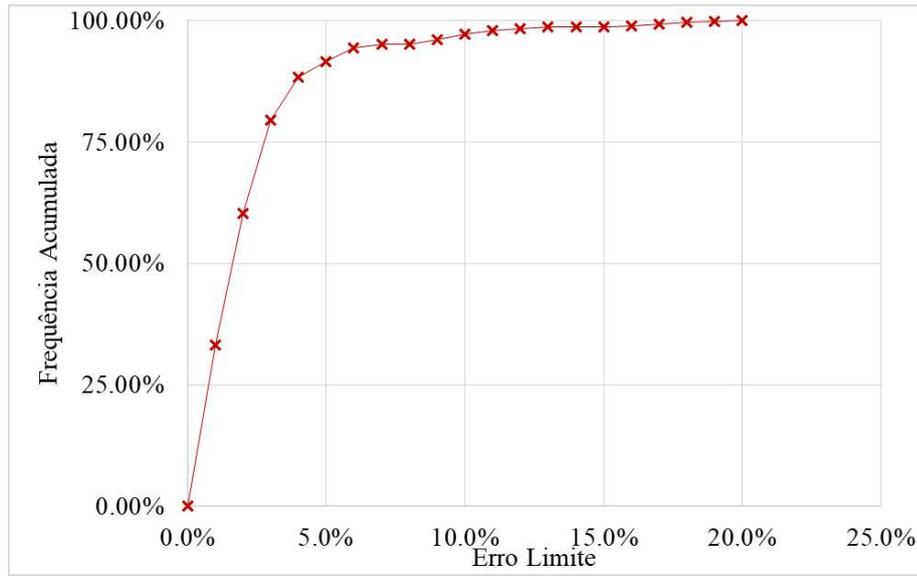


Figura 5-12 - Análise do erro do momento crítico com o procedimento proposto para modelos com deslocamento da linha neutra.

6 AVALIAÇÃO DO PROCEDIMENTO PROPOSTO E COMPARAÇÃO COM OUTRAS METODOLOGIAS

6.1 Generalidades

No presente capítulo, é apresentado o procedimento final completo proposto para determinação do momento crítico elástico à FLD em casos de diagrama de momento fletor uniforme, resultante de todas as análises feitas até aqui. Sua adequabilidade é então verificada com base em uma série de novos modelos de elementos finitos. Por fim, é feita uma comparação com algumas das metodologias mais relevantes apresentadas na literatura.

6.2 Equação Proposta

No Capítulo 3, foi apresentado o desenvolvimento teórico de uma equação que não incluía todos os efeitos resultantes da presença da laje, agora repetida:

$$M_a = \frac{1}{h_0} \left\{ GJ + \frac{E C_{w,d}}{L^2} \left[(n\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n\pi} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.1)$$

A essa equação, faltam ser introduzidas considerações que permitam que se leve em conta o deslocamento da linha neutra e a parcela de momento absorvida pela armadura negativa.

O efeito do deslocamento da linha neutra pode ser incorporado por meio do coeficiente $\kappa_{g,0}$, proposto no Item 5.4. Para se levar em conta a parcela de momento absorvida pela armadura negativa, deve-se lembrar que, conforme evidenciado pela Equação (1.2), a relação entre momento atuante no perfil de aço e na viga mista pode ser dada pela razão entre as inércias da seção mista e de aço. Assim, o coeficiente $\kappa_{g,0}$ considerando apenas o perfil de aço pode ser reescrito para que considere toda a seção mista, resultando em um coeficiente κ_g dado por:

$$\kappa_g = \kappa_{g,0} \frac{I_x}{I_{ax}} = \frac{I_x}{I_{ax}} \left[0,31 + 0,69 \times 0,05^{\bar{y}/h_0} \right] \quad (6.2)$$

Dessa forma, a equação para o momento crítico pode ser dada, finalmente, para a seção mista, por:

$$M_{cr} = \frac{\kappa_g}{h_0} \left\{ GJ + \frac{EC_{w,d}}{L^2} \left[(n\pi)^2 + \left(\frac{\eta_b}{n\pi} \right)^2 \right] \right\} \quad (6.3)$$

6.3 Modelos Numéricos para Verificação

Para avaliar de maneira definitiva a adequabilidade do procedimento proposto, foi desenvolvido um algoritmo capaz de gerar modelos com propriedades geométricas *quasi*-aleatórias. A geração não pode ser completamente aleatória, uma vez que na prática há limitações e faixas usuais de dimensões das vigas, além de restrições normativas de esbeltez local. O esquema adotado para a geração pode ser visualizado no fluxograma apresentado na Figura 6-1.

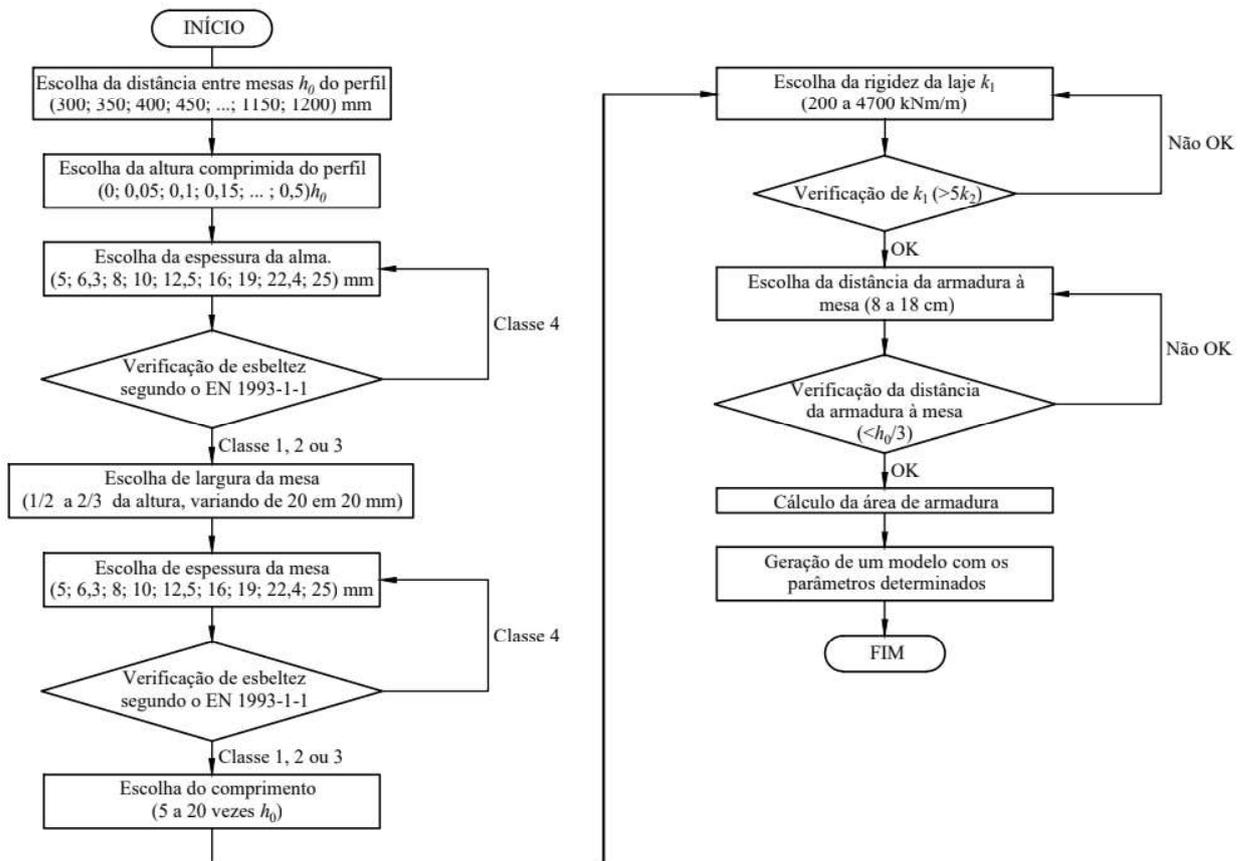


Figura 6-1 - Esquema utilizado para a geração de vigas.

Quinhentos modelos foram propostos. Desses, apesar das verificações de esbeltez local realizadas, 20 tiveram como primeiro modo a flambagem local da alma ou da mesa ou uma interação entre flambagem local e flambagem lateral com distorção (Figura 6-2), motivo pelo qual foram descartados, de maneira que 480 resultados foram analisados. A geometria e os resultados obtidos dessa análise são apresentados no Apêndice A.

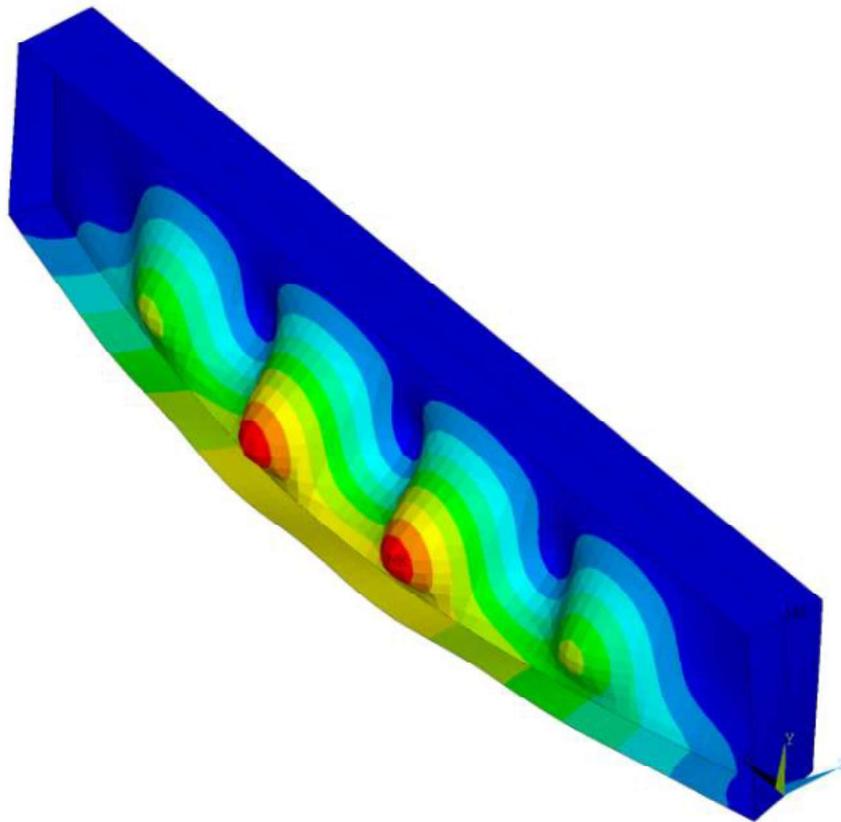


Figura 6-2 - Modelo com interação entre FLD e flambagem local da alma (em cores: deslocamentos).

Todos estes modelos tiveram seus resultados então comparados com as formulações propostas por Roik *et al.* , Hanswille *et al.* e com o procedimento proposto neste trabalho. Os resultados são apresentados a seguir.

6.4 Avaliação da Formulação de Roik *et al.* (1990)

Fazendo apenas uma breve recapitulação do que foi apresentado no Subitem 2.3.2, segundo Roik *et al.* (1990), o momento crítico à FLD pode ser dado por:

$$M_{cr} = \frac{\alpha_g C_{dist}}{L} \sqrt{\left(G_a J + \frac{k_r L^2}{\pi^2} \right) E_a I_{af,y}} \quad (6.4)$$

O coeficiente C_{dist} , que possui uma equação para seu cálculo, não varia muito nas vigas usuais e pode ser adotado como 6,2 no caso de diagramas de momento fletor uniforme, segundo os autores. Na realidade, como se mostrará a seguir, esse coeficiente é altamente variável, mesmo nas vigas usuais, motivo pelo qual aqui é apresentada uma comparação dos resultados numéricos com os obtidos segundo Roik *et al.* para dois casos, primeiramente com valor “simplificado” de C_{dist} (adotado sempre como 6,2) e depois com este valor calculado para cada uma das vigas. Para o primeiro caso, o momento crítico será denominado por $M_{cr,R,S}$ e para o segundo, $M_{cr,R,C}$ (os subíndices S e C referem-se a “simplificado” e “completo” respectivamente).

Ao analisar os resultados obtidos pela equação com o valor constante para o coeficiente, obtém-se a comparação entre valores calculados e numéricos mostrada na Figura 6-3.

O desvio médio observado dos resultados foi de 12,41% e somente 50% dos resultados obtidos possuem desvio menor que 10%.

Quando a comparação é feita com o procedimento realizado em sua completude, isto é, com os valores de C_{dist} calculados caso a caso, os desvios são ainda maiores. A Figura 6-4 apresenta uma comparação dos resultados numéricos com os obtidos pela equação. É possível notar uma pior concordância entre resultados numéricos e analíticos e nessa comparação, o desvio médio entre os dois valores foi de 50,52% e apenas 26,88% dos resultados apresentaram desvios inferiores a 10%. O maior erro observado foi de 535%. Os valores obtidos para o coeficiente foram de até 40,00, isto é, 6,45 vezes maiores que o valor de 6,2 proposto simplifadamente. O menor valor obtido para o coeficiente com o uso da equação foi de 6,28, próximo ao valor proposto. Nos 480 modelos analisados, o valor de 6,2 proposto simplifadamente foi sempre inferior ao calculado, de maneira que ele poderia ser tomado assim de maneira conservadora.

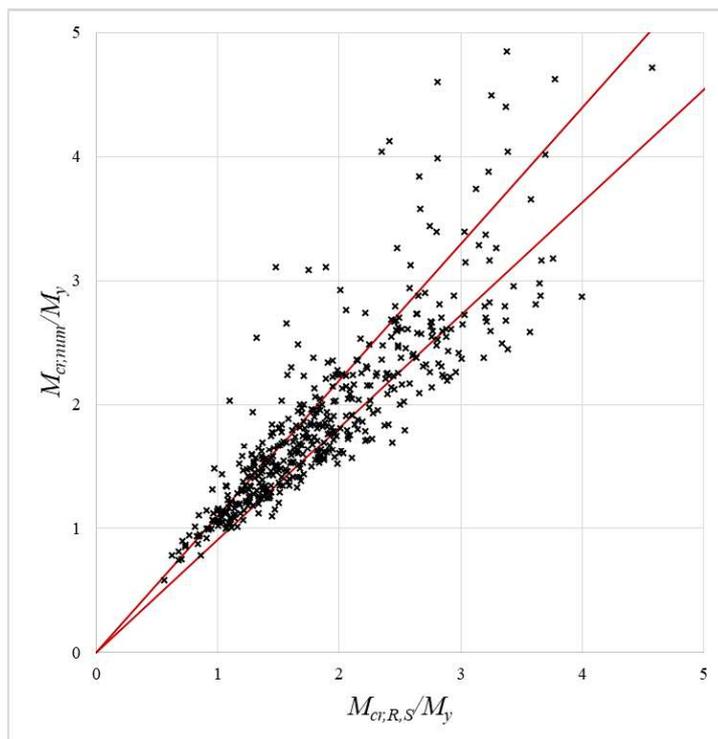


Figura 6-3 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo a equação de Roik *et al.* (1990) com o coeficiente C_{dist} com valor “simplificada” (igual a 6,2).

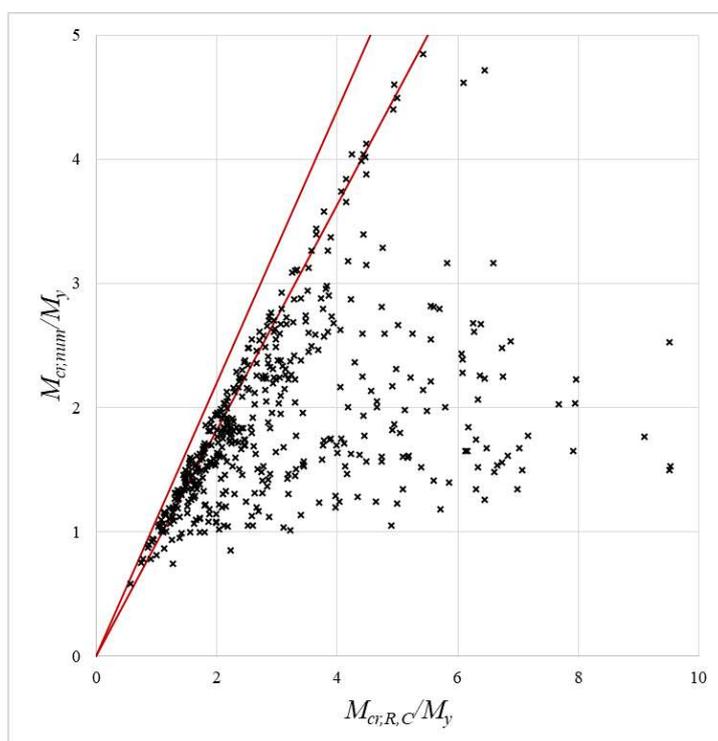


Figura 6-4 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo a equação de Roik *et al.* (1990) com o coeficiente C_{dist} de maneira completa.

A princípio, pode parecer estranho que uma simplificação na análise leve a resultados mais precisos que o uso rigoroso da equação obtida para determinação do momento crítico. Esse erro pode ser entendido ao se observar melhor a metodologia adotada por Roik *et al.* no desenvolvimento da equação. Convém aqui lembrar que a equação é deduzida utilizando-se o processo de Ritz e considerando-se uma única semionda para a deformada, motivo pelo qual é de se esperar que a equação se torne imprecisa quando comparada a modelos cujas deformadas não são iguais às assumidas. Relembrando que já foi proposta neste trabalho uma metodologia para calcular o número de semiondas formado na flambagem e analisando somente o coeficiente C_{dist} calculado e o número de semiondas “ideal” obtido segundo a Equação (3.33), obtém-se o seguinte gráfico:

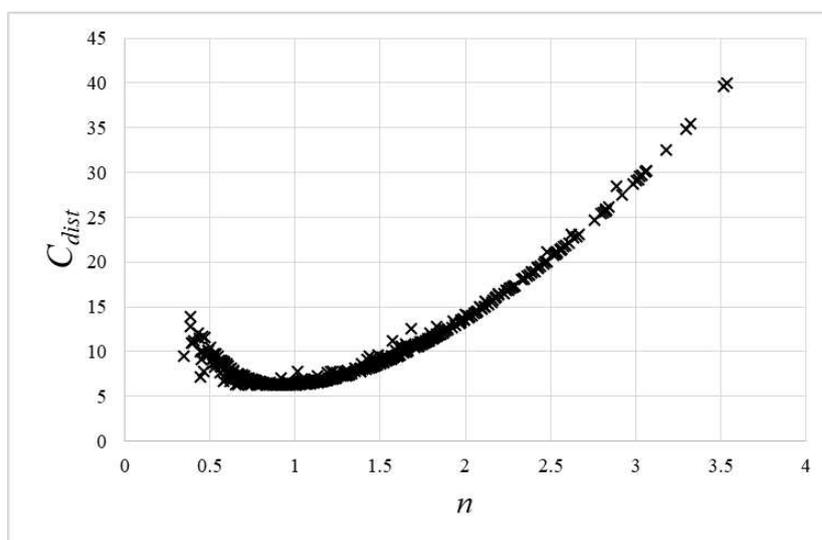


Figura 6-5 - Valores calculados para o coeficiente C_{dist} em função do número de semiondas.

É possível perceber que para um número de semiondas formado igual a 1, retratado pelas considerações feitas pelos autores, o coeficiente C_{dist} assume um valor muito próximo a 6,2 e assim, a formulação simplificada é adequada. Para casos em que o comprimento crítico (L/n_{id}) é distante do da viga, a equação adotada para o coeficiente se torna inapropriada justamente por não levar em consideração a variação do número de semiondas. A consequência direta disso é que, por se prever uma deformada inapropriada, o momento crítico obtido utilizando-se a equação é sempre maior que o “real”. A consideração de um valor único para esse coeficiente acaba fazendo com que os resultados obtidos sejam na realidade mais próximos dos numéricos,

uma vez que, como observado na Figura 3-2, a partir de um certo comprimento, com o aumento do comprimento da barra, pouco varia o momento crítico e o coeficiente deveria tender a seu valor mínimo.

6.5 Avaliação da Formulação de Hanswille *et al.* (1998)

Como feito no item anterior, agora os resultados numéricos são comparados aos obtidos segundo a formulação proposta por Hanswille *et al.* (1998), que conduz à seguinte equação para determinação do momento crítico (ver Subitem 2.3.3):

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left(\frac{\pi^2 E C_{w,d}}{(\beta_b L)^2} + G J_{ef} \right) \quad (6.5)$$

Aqui, para melhor identificação, o momento crítico obtido segundo esta equação é denominado $M_{cr,H}$, com o subíndice H representando Hanswille.

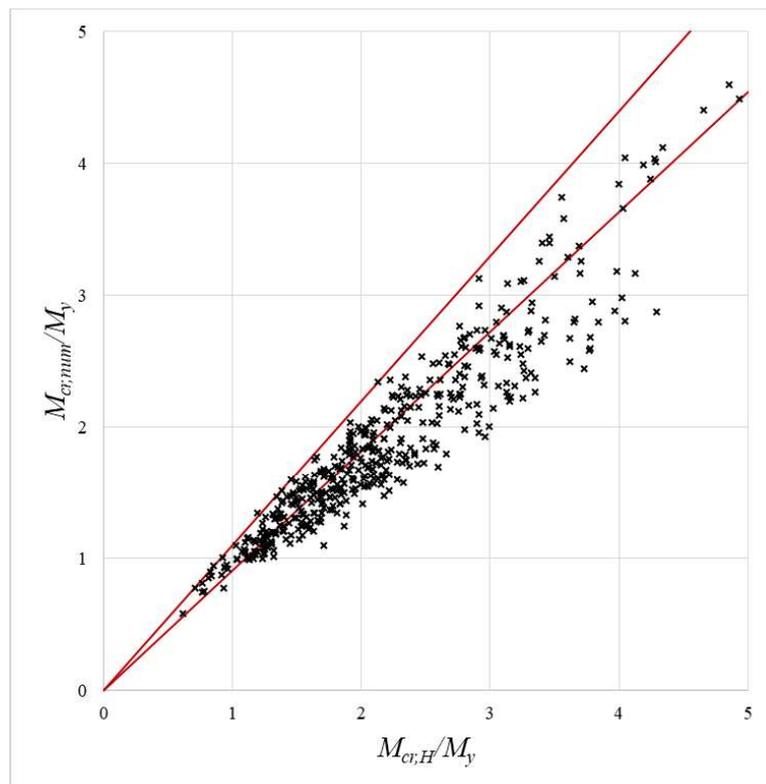


Figura 6-6 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo a formulação de Hanswille *et al.* .

Para esta comparação, apenas 41,04% dos valores obtidos segundo a equação apresentaram desvio do valor numérico inferior a 10% e o desvio médio obtido foi de 16,51%. Em geral, os

resultados obtidos segundo a equação de Roik *et al.* foram mais próximos dos numéricos que os obtidos por Hanswille *et al.* . Também é interessante observar que a equação fornecida neste caso tende a superestimar o valor do momento crítico, o que pode conduzir a uma leve insegurança da proposição. Os pontos parecem, contudo, menos dispersos, o que parece indicar que a formulação de Hanswille *et al.* pode ser bem representativa do fenômeno, mas carece de algum ajuste. Uma vez que a teoria utilizada neste caso é mais precisa quanto à previsão do número de semiondas formado, é de se esperar que seus resultados sejam de fato mais consistentes.

É possível que boa parte da perda de acurácia da equação de Hanswille *et al.* esteja associada ao fator β_b , determinado pelos autores. Como é evidenciado pela Figura 3-2, a solução obtida leva a curvas de flambagem que são formadas na verdade por diversas curvas menores, uma para cada número de semiondas. Em outras palavras, a solução do problema não pode ser representada por uma única função, de maneira que a utilização de uma equação única para o fator β_b certamente resulta em uma perda de precisão.

6.6 Avaliação do Procedimento Proposto Neste Trabalho

Por fim, avalia-se a adequabilidade da proposição deste trabalho. Para os 480 modelos analisados neste item, obteve-se um desvio médio do procedimento proposto de 2,33% e 97,29% dos resultados apresentaram desvio inferior a 10%, o que indica uma excelente adequação da proposta, especialmente quando comparada às outras metodologias já apresentadas. O momento crítico obtido segundo o procedimento proposto será denominado aqui $M_{cr,P}$ e a comparação de seus valores com os resultados numéricos pode ser observada na Figura 6-7.

Também é possível analisar os erros dos três procedimentos por meio da Figura 6-8, na qual estes são comparados aos resultados numéricos, e da Figura 6-9, na qual são representadas as frequências acumuladas dos resultados para um erro limite. Nos gráficos desta última figura, uma posição mais à esquerda representa uma melhor adequação entre os resultados dos procedimentos e os numéricos. Evidencia-se, assim, que o procedimento proposto é bastante melhor que as duas outras formulações extraídas da literatura e que a equação proposta por Roik *et al.* é ligeiramente melhor que a de Hanswille *et al.* . Apesar da grande semelhança da formulação proposta com a de Hanswille *et al.* , algumas diferenças podem ser apontadas para explicar os melhores resultados da proposição deste trabalho. Primeiramente, o coeficiente β_b

definido por Hanswille *et al.* é determinado por uma função contínua, ao passo que o comportamento real da curva de flambagem é simbolizado pela união de diversas curvas (Figura 3-2), de maneira que essa simplificação leva a um erro considerável nos resultados. Além disso, enquanto a formulação de Hanswille *et al.* inclui o efeito do deslocamento da linha neutra desde seu desenvolvimento analítico, o procedimento proposto o considera por meio de um coeficiente separado, determinado numericamente. Segundo Zhou *et al.*, a rigidez à distorção da alma do perfil não pode ser representada por uma mola linear e depende do nível de solicitação da alma. Assim, é possível que as considerações adotadas por Hanswille *et al.* conduzam a algum erro, problema que é resolvido a partir de uma metodologia numérica e não analítica no presente trabalho. Como consequência dessa simplificação, a metodologia de Hanswille *et al.* superestima a rigidez da alma conforme aumenta desvio da linha neutra do centroide do perfil.

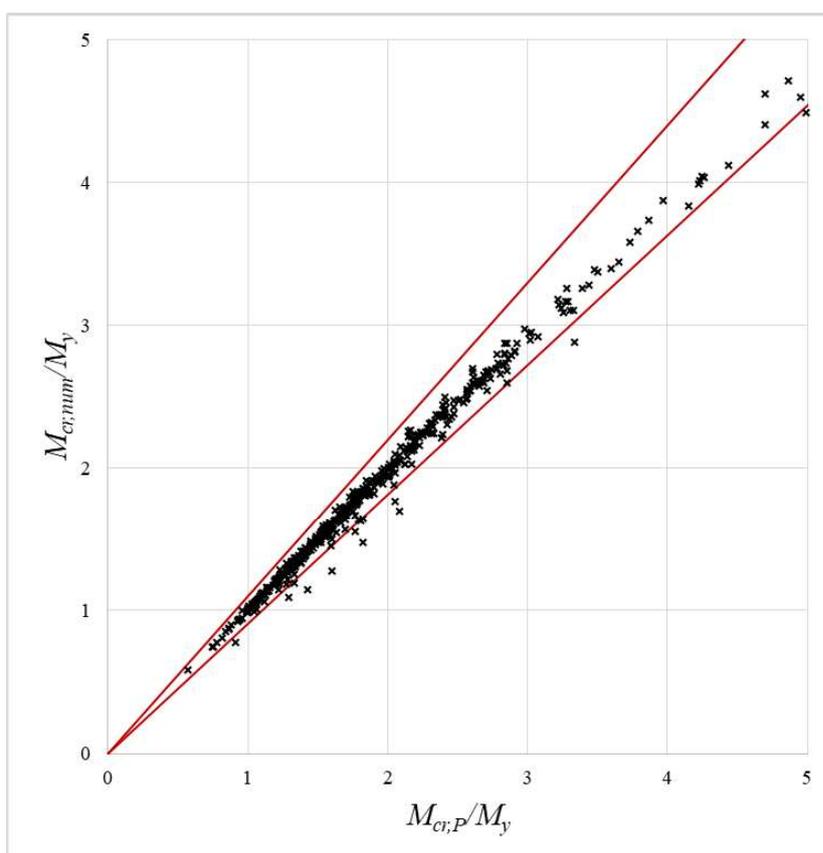


Figura 6-7 – Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo a formulação proposta neste trabalho.

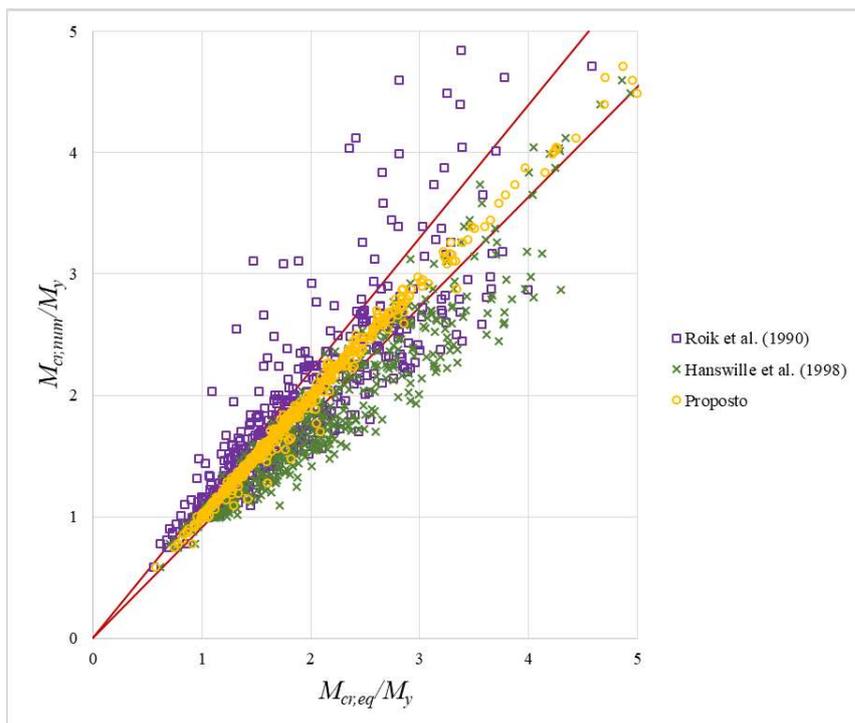


Figura 6-8 - Comparação dos resultados numéricos com os das três formulações analíticas.

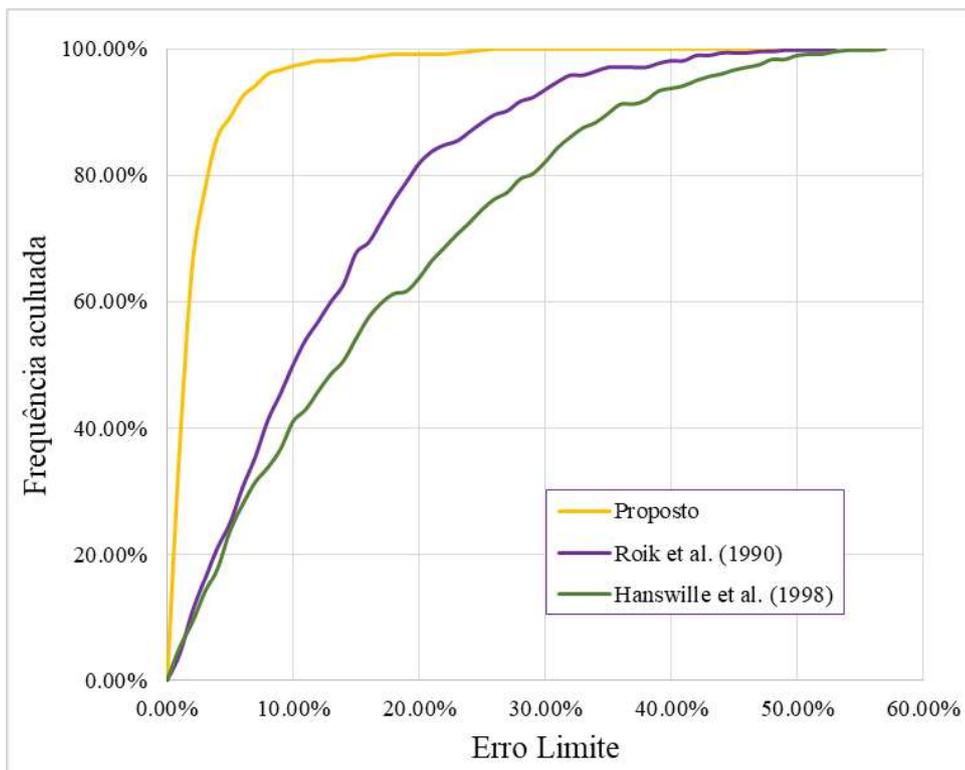


Figura 6-9 – Análise dos erros das formulações apresentadas.

Outra observação relevante refere-se ao nível de complexidade da teoria utilizada no presente estudo. Alguns estudos recentes (Zhou *et al.*, 2014; Zhou *et al.*, 2016; Lei & Li, 2017) são

desenvolvidos com base em teorias que introduzem complexidade ao problema. Devido a esse refinamento, a solução do problema se torna mais complexa, envolvendo o cômputo de autovalores de diversas matrizes de rigidez e uma análise de convergência da solução. Para este fim, uma aplicação computacional específica deve ser desenvolvida, o que faz com que essas formulações sejam de difícil uso na prática e de difícil avaliação no presente trabalho. Apesar da ausência de comparação, é bastante interessante observar que, mesmo sem um grande refinamento da teoria adotada para o desenvolvimento do procedimento proposto neste trabalho, os resultados são bastante satisfatórios e as formulações de uso simples, o que pode indicar não haver necessidade de um refino tão grande na teoria utilizada para a análise do fenômeno.

O momento crítico também foi calculado pelo valor simplificado dado pela Equação (3.37) e os resultados obtidos são comparados aos numéricos na Figura 6-10 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo o procedimento proposto simplificado. Figura 6-10. É possível observar que, exceto em alguns poucos resultados, os valores de momento crítico obtidos pela formulação foram, de fato, conservadores. O erro médio dos resultados calculados segundo essa equação foi de 10,52% e somente 67,08% dos resultados apresentaram desvios inferiores a 10% quando comparados aos modelos numéricos. É possível perceber que houve, como esperado, uma queda na acurácia da formulação analítica, mas os desvios observados permanecem, na média, inferiores aos obtidos segundo as equações apresentadas por outros autores e estudadas neste trabalho. Para cálculos expeditos, essa simplificação se mostrou eficaz.

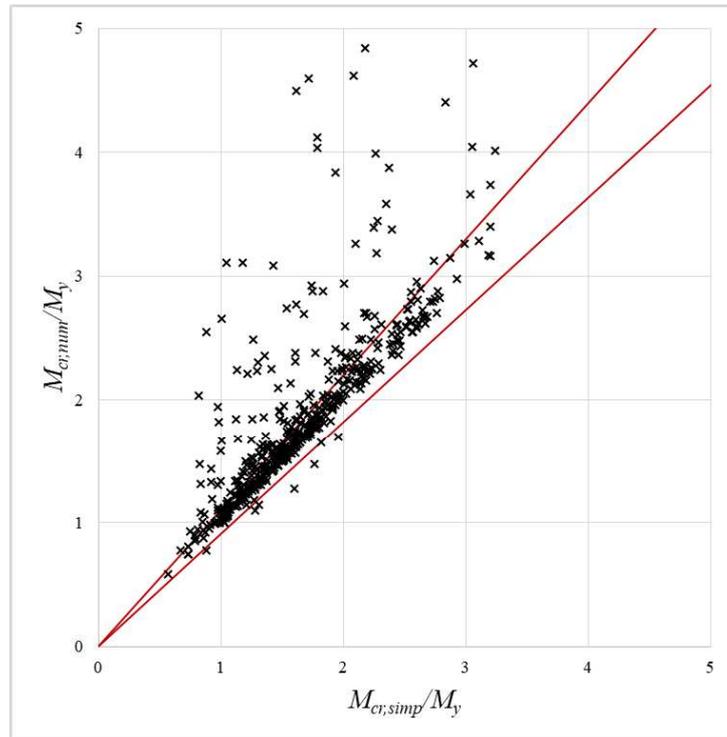


Figura 6-10 - Comparação entre resultados numéricos e obtidos segundo o procedimento proposto simplificado.

Conforme esperado, o erro da simplificação diminuiu quando se aumenta o comprimento da viga, o que é evidenciado pela Figura 6-11.

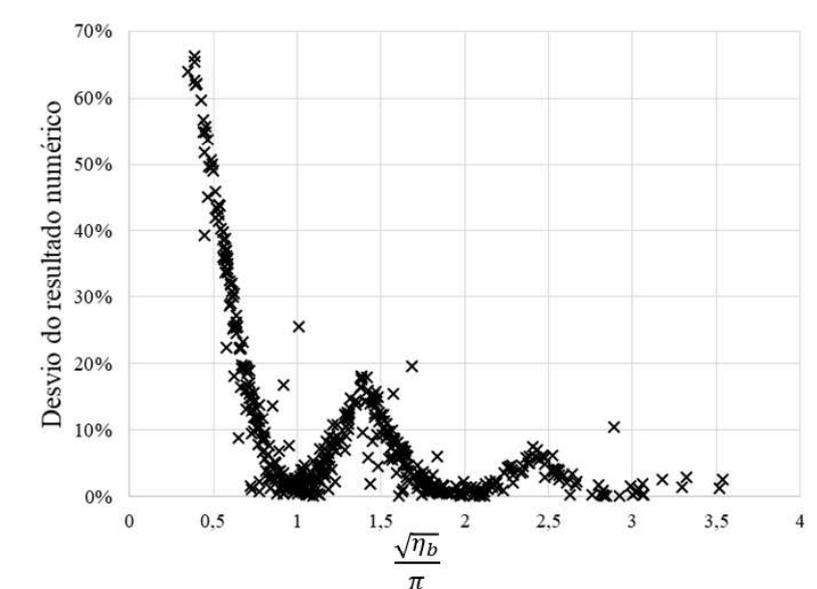


Figura 6-11 - Desvio absoluto dos resultados simplificados com o aumento do vão.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Conclusões

No presente estudo, foi desenvolvido um novo procedimento para determinação do momento crítico elástico à flambagem lateral com distorção de vigas mistas contínuas e semicontínuas sujeitas a distribuição de momentos fletores uniformes. O novo procedimento, baseado na teoria de vigas apoiadas em base elástica, foi capaz de prever com precisão adequada o valor de momento crítico quando comparado a resultados obtidos em modelos numéricos de elementos finitos desenvolvidos no código comercial ANSYS v.18.2 (Ansys Inc., 2017). Sete mil setecentos e setenta e dois modelos foram analisados para o desenvolvimento e verificação da proposta, abrangendo praticamente toda a gama de vigas utilizáveis na prática.

Foi observado que o modo de flambagem das vigas depende de seu comprimento, apresentando um aumento do número de semiondas ao crescer o vão da viga. Assim, a curva de flambagem real é formada, a rigor, por uma composição de diversas curvas, cada uma para um número de semiondas e não pode ser descrita por uma única função, como é feito nas formulações apresentadas na literatura. Um procedimento foi então definido para determinar o número de semiondas na configuração deformada.

Percebeu-se, também, que o deslocamento da linha neutra do centroide do perfil de aço ao seu topo conduz a reduções de aproximadamente 54% no momento crítico e que mesmo pequenos desvios já causam uma grande redução deste momento, de maneira que tais desvios não podem ser desconsiderados na análise do fenômeno. Essa questão não é bem representada analiticamente já que a consideração de uma rigidez k_2 constante passa a ser inapropriada e, por isso, sua influência na flambagem foi incorporada por meio de um coeficiente de redução ajustado numericamente.

Ao fim do desenvolvimento do procedimento, um algoritmo para geração de modelos de vigas aleatórios foi desenvolvido e 500 modelos foram elaborados para a verificação da proposição, 20 dos quais foram descartados por apresentarem outros modos de flambagem que não são objeto de estudo neste trabalho. Os resultados obtidos segundo o procedimento desenvolvido apresentaram desvios inferiores a 10% dos valores obtidos numericamente em 97,29% dos casos, com um desvio médio de 2,33%, indicando uma excelente concordância entre a

proposição e os resultados numéricos. Quanto à adequabilidade das formulações mais representativas presentes na literatura, que inclusive servem como base para normas de projeto de estruturas mistas de aço e concreto e produzidas na década de 1990 (Roik *et al.*, 1990 ; Hanswille *et al.*, 1998), observou-se que seus resultados divergem um pouco do modelo numérico.

Não foi possível realizar uma comparação com os resultados de estudos mais recentes (Zhou *et al.*, 2014; Zhou *et al.*, 2016; Lei & Li, 2017) uma vez que os procedimentos fornecidos por estes requerem o cômputo de autovalores de uma série de matrizes e exigem a criação de uma aplicação computacional para seu uso. Mesmo sem apresentar o nível de refino da teoria desses estudos, o procedimento desenvolvido no presente trabalho conduziu a resultados bastante satisfatórios para cálculo do momento crítico.

Um procedimento simplificado no qual não se considera o número de semiondas da configuração deformada também foi proposto, o qual levou a desvios médios de 10,52% dos resultados numéricos. Este desvio foi inferior ao obtido segundo as outras formulações da literatura estudadas, além de fornecer resultados geralmente conservadores o que o torna uma boa solução para cálculos expeditos.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

No presente estudo, uma abrangente gama de vigas foi analisada para os casos de momento uniforme, pouco usuais na prática, mas que sempre servem como base para a análise do fenômeno para outras situações de diagramas de momentos fletores. Sugere-se, portanto, que seja feita uma ampliação do estudo apresentado para a inclusão de um coeficiente relativo à distribuição de momentos fletores.

Além disso, neste trabalho, considerou-se apenas perfil I duplamente simétrico, de maneira que é interessante que os perfis monossimétricos também sejam estudados, uma vez que eles são em algumas situações empregados nas vigas mistas contínuas.

Adicionalmente, este estudo foi realizado exclusivamente para comportamento em temperatura ambiente e seria interessante que fosse estendido para comportamento em temperatura elevada, como ocorre em situação de incêndio.

8 REFERÊNCIAS

AMARAL, T. V. *Avaliação da Influência da Distribuição de Momentos Fletores no Momento Crítico Elástico à Flambagem Lateral com Distorção de Vigas Mistas Contínuas*. 2016. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

ANSYS INC. *Release 18.2 – Documentation for ANSYS*. Canonsburg, Estados Unidos, 2017.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. NBR 8800. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Rio de Janeiro, 2008.

BRADFORD, M. A. Lateral-Distortional Buckling of Steel I-Section Members. *Journal of Constructional Steel Research*, 23, pp. 97-116, 1992.

BRADFORD, M. A., & TRAHAIR, N. S. Distortional Buckling of I-Beams. *Journal of the Structural Division*, 107, pp. 355-370, 1992.

CALENZANI, A. F. G. *Proposição de Procedimento para a Determinação da Rigidez Rotacional de Vigas Mistas Contínuas e Semicontínuas com Perfis de Alma Senoidal*. 2008. Tese de Doutorado – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

CALENZANI, A. F., FAKURY, R. H., DE PAULA, F. A., RODRIGUES, F. C., QUEIROZ, G., & PIMENTA, R. J. Rotational Stiffness of Continuous Composite Beams with Sinusoidal-Web Profiles for Lateral-Torsional Buckling. *Journal of Constructional Steel Research*, 79, pp. 22-33, 2012.

CHEN, S., & WANG, X. Finite Element Analysis of Distortional Lateral Buckling of Continuous Composite Beams with Transverse Web Stiffeners. *Advances in Structural Engineering*, 15, pp. 1619-1628, 2012.

CHEN, W., & YE, J. Elastic Lateral and Restrained Distortional Buckling of Doubly Symmetric I-Beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10, pp. 983-1016, 2010.

DIETRICH, M. Z. *Estudo da Rigidez Rotacional de Vigas Mistas de Aço e Concreto com Lajes Maçãs de Concreto Armado*. 2017. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

DIETRICH, M. Z., CALENZANI, A. F., OLIVEIRA, J. P., & FAKURY, R. H. Estudo da Rigidez Rotacional de Vigas Mistas de Aço e Concreto Contínuas com Lajes de Concreto Armado. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, v. 14, pp. 31-55, 2017.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION - EN 1994-1-1:2004. *Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings*. Brussels, 1991.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION - EN 1994-1-1:2004. *Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures. Part 1-1: general rules and rules for buildings*. Brussels, 2004.

FAN, C. K. *Buckling in Continuous Composite Beams*. 1990. Tese de Doutorado. University of Warwick, Coventry, Reino Unido.

GOLTERMANN, P., & SVENSSON, S. E. Lateral Distortional Buckling: Predicting Elastic Critical Stress. *Journal of Structural Engineering*, v. 114, pp. 1606-1625, 1988.

HANSWILLE, G. Lateral Torsional Buckling of Composite Beams: Comparison of Mode Accurate Methods with Eurocode 4. *Composite Construction in Steel and Concrete IV*, pp. 105-115, 2002.

HANSWILLE, G., LINDNER, J., & MÜNICH, D. Lateral Torsional Buckling of Composite Beams (em alemão). *Stahlbau*, v. 67, pp. 525-535, 1998.

JOHNSON, R. P. *Composite Structures of Steel and Concrete - Beams, Slabs, Columns, and Frames for Buildings*. 3^a ed. Hoboken, NJ, EUA: John Wiley & Sons Inc, 2004.

JOHNSON, R. P., & BRADFORD, M. A. Distortional Lateral Buckling of Unstiffened Composite Bridge Girders. *Proceedings of the International Conference on Instability and Plastic Collapse of Steel Structures*, pp. 569-580, 1983.

JOHNSON, R. P., & MOLENSTRA, N. Strength and Stiffness of Shear Connections for Discrete U-Frame Action in Composite Plate Girders. *The Structural Engineer*, v. 68. 1990.

LEI, J.-S., & LI, L.-Y. Combined web distortional and lateral-torsional buckling of partially restrained I-section beams. *International Journal of Mechanical Sciences* 131-132, pp. 107-122, 2017.

OLIVEIRA, J. P., CALENZANI, A. F., FAKURY, R. H., & FERREIRA, W. G. Elastic Critical Moment of Continuous Composite Beams with a Sinusoidal-Web Steel Profile for Lateral Torsional Buckling. *Engineering Structures*, v. 113, 2016.

QUEIROZ, G., PIMENTA, R. J., GALVÃO, A. *Estruturas Mistas – Volume 1*. 2^a ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Instituto Aço Brasil / CBCA, 2012.

ROIK, K., HANSWILLE, G., & KINA, J. Solution for the Lateral Torsional Buckling Problem of Composite Beams (em alemão). *Stahlbau*, v. 59, pp. 327-332, 1990.

SILVA, C. C. *Estudo da Influência da Distorção da Alma no Momento Crítico Elástico de Flambagem Lateral com Torção de Vigas de Aço de Alma Não Esbelta com Seção I*. 2016. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

SILVA, C. C., FAKURY, R. H., & CASTRO E SILVA, A. L. Análise Numérica da Influência da Distorção da Alma na Flambagem Lateral com Torção de Perfis I. *Revista da Estrutura de Aço - REA*, 6, pp. 66-85, 2017.

SVENSSON, S. E. Lateral Buckling of Beams Analysed as Elastically Supported Columns Subject to a Varying Axial Force. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 5, pp. 179-193, 1985.

TOHIDI, S., & SHARIFI, Y. Neural Networks for Inelastic Distortional Buckling Capacity Assessment of Steel I-beams. *Thin-Walled Structures*, v. 94, pp. 359-371, 2015.

TOHIDI, S., & SHARIFI, Y. A New Predictive Model for Restrained Distortional Buckling Strength of Half-through Bridge Girders using Artificial Neural Network. *KSCE Journal of Civil Engineering*, pp. 1392-1403, 2016.

YE, J.-H., & CHEN, W. Elastic Restrained Distortional Buckling of Steel-Concrete Beams Based on Elastically Supported Column Method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 13. 2013.

ZHOU, W., JIANG, L.-Z., KANG, J., & BAO, M. Distortional Buckling Analysis of Steel-Concrete Composite Girdes in Negative Moment Area. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.

ZHOU, W.-B., JIANG, L.-Z., LI, S.-J., & KONG, F. Elastic Distortional Buckling Analysis of I-Steel Concrete Composite Beam Considering Shear Deformation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 16, 2016.

ZHOU, W.-B., LI, S.-J., & YAN, W.-J. Practical Formulas Towards Distortional Buckling Failure Analysis for Steel-Concrete Composite Beams. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, v. 25, pp. 1055-1072, 2016.

APÊNDICE A

Tabela A.1 - Resultados e geometria dos modelos de verificação dos resultados.

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
1	850	400	25	19	4300	85,0	10,2	8830	80	8738,3	8819,6	8950,1	8076,0	9117,2
2	550	340	22,4	8	3100	0,0	5,0	0	180	3594,7	3847,7	3676,9	2749,2	3847,7
3	300	100	25	6,3	800	60,0	5,1	4218	80	673,7	829,8	992,6	619,9	1251,2
5	500	220	22,4	16	3100	75,0	4,5	7012	160	4741,9	4706,0	5525,7	4955,4	5342,3
6	400	240	19	10	800	0,0	2,8	0	100	2520,7	2674,1	2534,7	2008,2	2674,1
7	300	160	25	8	4700	90,0	3,0	13371	100	2355,1	2385,7	3432,0	3251,7	3321,0
8	450	180	22,4	12,5	4700	157,5	4,5	27120	120	3720,8	3530,8	5144,2	4510,8	5171,0
9	350	220	19	5	1100	0,0	4,2	0	80	896,2	983,3	941,5	911,4	983,3
10	350	100	6,3	6,3	4700	0,0	3,5	0	110	163,9	163,0	145,5	130,7	177,7
11	1000	300	25	25	4300	150,0	19,0	16438	150	8720,7	8810,5	9848,6	8630,8	41304,5
12	1050	320	22,4	16	2700	52,5	5,3	3353	150	5994,3	6122,0	5802,9	4320,9	6138,5
13	800	380	25	19	4700	240,0	11,2	46373	170	13258,6	13366,2	16050,2	14346,4	19653,7
14	700	220	25	16	2700	35,0	6,3	2347	160	3335,9	3288,3	3306,7	2931,8	3316,6
15	650	200	22,4	12,5	2300	162,5	3,3	15730	140	3762,1	3700,0	4431,7	3750,8	4668,7
16	600	200	19	10	500	120,0	3,0	8242	180	3229,8	3270,6	3779,2	2672,7	3960,2
17	300	140	12,5	8	4300	105,0	2,1	11472	90	1271,4	1227,4	1841,8	1700,1	1820,2
18	700	200	25	22,4	4700	70,0	7,0	6177	110	4777,4	4793,4	5119,7	4361,9	8384,8
19	400	200	12,5	8	3100	0,0	2,4	0	130	1241,4	1305,9	1238,2	853,2	1305,9
20	650	360	25	10	1500	97,5	7,2	10016	110	4296,4	4376,7	4734,4	4408,2	4820,1
21	1150	360	22,4	22,4	3900	230,0	5,8	26688	160	11178,5	11341,6	12689,3	10958,8	13082,9
22	400	180	12,5	12,5	1500	80,0	5,6	5758	120	2035,3	2068,7	2586,7	2298,7	4438,8
23	400	260	19	12,5	4700	60,0	7,6	6032	80	3440,2	3578,1	4021,8	3522,3	6332,8

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
24	550	220	22,4	12,5	1100	27,5	2,8	1746	160	3911,8	4043,8	3901,8	2905,6	4100,0
25	650	260	25	10	1900	97,5	13,0	7938	120	2523,0	2560,6	2802,4	2331,8	3923,6
26	600	240	19	12,5	3500	120,0	10,8	10552	90	2607,7	2595,5	3132,8	2747,9	5907,9
27	1200	320	22,4	22,4	3500	300,0	18,0	39504	130	7797,4	7799,9	9445,0	8368,3	23406,6
28	300	160	12,5	8	1900	15,0	2,4	667	90	793,7	813,9	844,4	778,8	825,2
29	850	300	22,4	19	4300	42,5	13,6	3204	100	4929,4	4939,3	5116,4	4532,8	10836,9
30	300	180	19	5	3900	0,0	1,8	0	90	1733,1	1927,1	1903,0	1254,4	1927,1
31	700	180	16	16	4700	175,0	11,9	16043	100	2425,9	2419,7	3040,5	2657,4	12443,8
33	350	140	19	10	4700	35,0	6,3	2072	90	1191,4	1194,0	1289,2	1048,1	2775,9
34	450	160	16	12,5	4700	22,5	6,8	1127	120	1384,0	1378,8	1428,6	1239,7	3146,2
35	900	400	25	12,5	3900	0,0	4,5	0	130	11620,9	12367,7	12119,9	5526,4	12367,7
36	650	240	25	16	2300	32,5	12,4	2375	140	3656,0	3673,6	3678,3	3132,4	9148,3
37	1000	400	25	10	2300	0,0	20,0	0	170	3178,8	3179,4	2891,1	2541,9	3179,4
38	400	220	22,4	6,3	800	40,0	6,8	2878	120	1310,4	1355,3	1521,5	1332,9	1443,7
39	500	180	25	10	1100	125,0	5,0	13060	90	1903,7	1847,2	2441,0	2189,0	2298,8
40	300	140	16	6,3	2300	30,0	5,1	1470	100	705,2	734,9	715,8	589,6	853,2
41	750	380	25	16	2300	187,5	12,0	29580	90	8312,6	8445,4	9029,3	8025,1	10786,4
42	350	180	19	8	4700	70,0	2,8	5972	80	1685,1	1681,9	1933,2	1825,7	1992,2
43	400	160	10	8	1100	40,0	7,2	1515	90	603,3	608,3	666,3	596,1	1330,5
44	1050	280	25	19	4700	315,0	16,8	46905	180	6847,3	6730,8	8932,7	7820,6	21791,0
45	1000	300	25	25	4300	300,0	5,0	55046	180	12167,0	12140,3	16537,0	15223,8	16111,3
46	450	300	19	12,5	3900	112,5	9,0	15635	100	4664,4	4803,5	6051,9	5347,7	9172,0
47	650	400	25	12,5	3900	0,0	11,7	0	120	4998,4	5173,3	4925,8	4370,1	5173,3
48	600	340	22,4	16	4700	120,0	7,2	15683	100	6900,6	6940,9	8256,8	7458,7	8065,8
49	450	260	25	12,5	4300	112,5	8,6	17105	100	4739,7	4793,6	6018,9	5059,7	8738,8
50	500	180	22,4	10	3900	125,0	3,5	12007	110	2190,7	2123,0	2667,8	2542,3	2679,7
51	300	160	22,4	8	2300	105,0	3,3	18604	90	2095,9	2048,3	3193,6	2903,9	3017,7

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
52	600	180	19	16	3100	90,0	11,4	6576	150	2791,7	2797,8	3202,7	2762,2	13408,8
53	650	380	25	16	1900	195,0	5,9	39000	170	11172,1	11192,6	15440,7	14151,9	15219,5
54	450	140	22,4	10	1100	45,0	2,7	2525	120	1353,4	1353,9	1424,5	1377,0	1436,2
55	350	160	19	8	2700	52,5	2,1	3545	90	1767,3	1798,4	1920,0	1628,7	2018,3
56	600	260	25	12,5	2700	180,0	10,2	27132	160	5006,1	4966,7	6631,4	5649,4	9119,6
57	700	320	25	19	3100	175,0	4,9	27274	130	9198,4	9153,1	11691,6	10743,6	11396,3
58	700	180	12,5	10	4300	35,0	12,6	1227	130	847,4	834,0	813,0	725,9	2222,5
59	750	280	25	22,4	4300	75,0	10,5	7476	90	6739,4	6807,2	7324,3	6396,8	14413,6
60	400	120	22,4	8	4300	120,0	3,6	11066	130	1262,3	1214,8	1790,6	1567,5	1699,6
61	650	220	19	19	3500	227,5	9,8	41149	170	6847,5	6807,0	9794,1	8560,5	25924,1
62	550	160	22,4	16	4300	165,0	11,0	21956	100	3079,4	3042,7	4045,7	3371,6	19282,8
63	1150	360	22,4	19	4300	57,5	11,5	4124	120	6068,1	6017,4	5872,9	5308,3	6011,5
64	850	220	25	22,4	4700	0,0	14,5	0	110	3910,6	3840,6	3925,7	3349,3	16336,3
65	800	220	22,4	12,5	1100	80,0	9,6	4799	110	2297,7	2335,0	2114,6	1845,3	2460,3
66	1050	280	25	25	4300	262,5	9,5	38916	90	8785,5	8929,5	9961,1	8752,2	12791,4
67	650	240	19	16	4300	195,0	9,1	27189	100	4132,0	4095,7	5547,2	4903,5	9612,6
68	300	160	22,4	6,3	500	105,0	5,1	17293	100	1716,3	1719,4	2559,3	2034,4	2561,9
69	450	160	12,5	12,5	3100	112,5	7,7	8912	90	1656,7	1666,5	2073,1	1832,9	6461,5
70	550	260	25	16	3100	82,5	2,8	8626	160	9210,5	9426,4	10089,2	7661,8	10638,5
71	850	240	25	16	3900	85,0	16,2	6253	80	3334,1	3356,8	3403,0	2922,9	9981,5
72	650	380	25	19	4300	195,0	12,4	43980	90	10372,0	10495,8	14048,0	12453,3	24744,5
73	350	140	22,4	8	3900	0,0	4,9	0	110	898,3	938,7	847,3	674,0	938,7
74	350	220	19	10	800	105,0	5,3	15763	90	2887,2	2870,4	3773,0	3303,5	3885,8
75	700	200	25	22,4	4700	210,0	7,7	35018	140	6697,3	6666,6	9273,4	7867,0	17738,2
77	300	200	12,5	8	800	45,0	3,0	2947	80	1204,2	1250,8	1455,7	1340,5	1399,9
78	700	360	22,4	16	3100	0,0	10,5	0	160	5702,4	5930,0	5179,4	4633,6	6141,9
79	350	160	16	6,3	1500	0,0	5,6	0	100	568,5	570,1	538,0	459,1	570,1

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
80	600	340	22,4	12,5	4700	60,0	5,4	5307	170	5402,0	5561,5	5837,4	5292,0	5901,0
81	500	180	22,4	10	3100	100,0	3,0	8165	100	2318,9	2293,0	2580,6	2349,0	2702,1
82	400	120	19	8	800	120,0	5,2	10347	100	958,0	968,3	1241,8	1005,0	1542,1
83	400	180	22,4	8	1500	100,0	6,4	10057	120	2038,2	1981,3	2355,9	1930,9	2558,5
84	800	360	22,4	16	3500	40,0	4,8	3144	80	7425,1	7699,9	7301,6	5566,5	7722,6
85	750	340	22,4	19	4700	75,0	3,8	6953	180	11611,2	12074,2	12028,4	8818,9	12725,4
86	500	200	25	16	3500	75,0	4,0	7337	90	3730,4	3664,9	4287,6	3862,9	4044,8
87	550	300	19	16	3500	192,5	8,3	39477	160	8730,1	8823,0	12587,1	11251,3	17397,0
88	800	320	22,4	16	4300	120,0	14,4	11076	140	5253,4	5274,2	6052,4	5366,4	11431,1
89	800	220	25	16	1900	200,0	9,6	22037	160	4175,6	4169,5	5157,5	4438,9	7288,6
90	500	280	22,4	16	3900	0,0	3,0	0	130	5382,7	5657,8	5384,9	4513,9	5657,8
91	650	320	22,4	16	3900	130,0	5,9	15610	110	6028,7	6016,7	7523,7	6907,1	7007,7
92	300	100	16	8	500	90,0	3,0	7200	100	893,4	862,1	1156,4	978,9	1210,6
93	850	220	25	22,4	4300	170,0	9,4	19271	100	5397,7	5398,4	6425,6	5504,4	11976,7
94	900	280	22,4	22,4	3900	180,0	16,2	20655	150	7331,6	7415,5	8799,2	7738,6	31821,0
95	500	280	19	8	4700	50,0	5,0	3421	140	2345,5	2414,8	2471,4	2229,9	2563,5
97	1100	360	25	25	4700	0,0	8,8	0	160	8242,9	8163,2	8398,9	7597,4	8163,2
98	600	200	22,4	12,5	3500	150,0	9,0	14873	160	3006,3	2964,5	3897,9	3313,1	6248,8
99	400	140	16	10	1900	120,0	3,6	11182	110	1494,5	1430,8	2003,0	1781,9	1970,0
100	550	280	22,4	8	4700	0,0	3,3	0	90	4193,8	4493,5	4398,9	2549,0	4493,5
102	300	120	8	6,3	1900	90,0	2,1	4899	100	535,2	524,1	760,7	693,6	736,5
103	500	160	25	8	4300	75,0	8,5	4712	160	1353,2	1424,7	1585,9	1209,7	2069,4
104	350	140	12,5	5	800	17,5	1,8	555	80	763,8	805,2	797,2	450,0	815,4
105	500	280	22,4	12,5	4700	75,0	4,0	7419	150	5196,7	5277,0	5852,4	5342,2	5958,0
106	500	320	25	16	3900	50,0	7,5	5687	110	7738,0	8007,9	7351,4	6473,9	8418,6
107	850	280	22,4	12,5	3100	85,0	5,1	5643	90	3757,8	3792,9	3728,3	3038,9	3932,5
108	750	220	22,4	22,4	4300	187,5	12,8	25306	100	5705,9	5745,7	7183,4	6176,1	29421,1

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
109	1150	300	22,4	22,4	3900	172,5	21,9	16196	150	6586,1	6625,0	7367,3	6518,2	30752,8
110	1200	360	25	25	4300	360,0	9,6	67765	150	12467,5	12341,5	16186,3	14617,3	15935,2
111	500	240	19	16	2300	25,0	6,0	1798	130	3874,0	4016,9	3615,6	3207,8	4371,1
112	1000	320	25	19	2700	150,0	14,0	14463	130	6246,2	6290,1	6958,1	6148,3	10917,3
113	400	160	10	6,3	1900	80,0	2,4	3493	110	882,1	888,3	1009,8	731,2	1067,8
114	450	180	12,5	8	3900	90,0	8,1	5098	80	861,5	858,2	1032,8	914,3	1720,1
115	400	160	10	8	3900	40,0	2,8	1506	100	694,5	700,2	757,4	686,9	739,1
116	1100	320	25	22,4	3500	220,0	13,2	26219	110	7865,0	7927,4	9118,8	8061,0	14056,8
117	950	360	22,4	12,5	4300	47,5	18,1	2999	160	3579,7	3627,6	3605,9	3198,9	5199,2
118	500	180	22,4	12,5	1500	150,0	4,5	19519	100	2625,6	2522,1	3526,5	3148,2	3366,6
119	750	380	25	12,5	2700	187,5	10,5	27075	90	5173,4	5085,5	6533,6	5915,0	6167,7
120	650	260	19	16	3900	65,0	5,9	4900	90	3647,7	3645,5	3934,1	3562,9	3786,5
121	900	360	22,4	16	1500	90,0	11,7	7346	140	5822,9	5843,3	5687,4	5113,2	6092,9
122	400	200	19	10	800	80,0	5,6	7138	100	2191,7	2174,7	2432,2	2117,4	2591,5
123	300	140	10	6,3	1100	60,0	3,3	2871	80	506,5	500,1	636,0	577,4	599,0
124	450	160	19	8	3500	112,5	5,4	8609	140	1387,0	1326,6	1731,1	1505,4	1723,7
125	750	380	25	19	3500	75,0	7,5	8044	100	8067,1	8204,1	9147,4	8341,5	8527,8
126	550	180	19	12,5	3900	55,0	10,5	3224	140	1907,4	1923,9	1991,4	1707,5	5774,7
127	600	180	22,4	16	3900	60,0	8,4	4173	140	2776,3	2760,5	2975,0	2522,8	6502,8
128	450	120	16	6,3	2300	0,0	5,4	0	90	338,4	330,5	313,6	266,8	330,5
129	450	120	25	12,5	3500	135,0	2,3	15090	140	2517,6	2400,3	3423,5	3291,7	3352,2
130	600	180	19	19	4300	60,0	4,8	4343	120	3637,4	3691,2	3431,9	3003,1	4106,4
131	750	220	19	16	4300	112,5	6,0	8284	140	3319,2	3264,4	3640,1	3274,9	3601,0
132	900	240	22,4	19	3900	0,0	17,1	0	140	3174,6	3124,0	3200,4	2793,3	12934,8
133	700	200	22,4	19	3900	210,0	9,1	30958	110	4570,7	4521,4	6065,7	5201,9	13483,3
134	650	300	22,4	19	4300	130,0	11,1	16119	130	7345,4	7404,2	9032,9	7986,3	18654,0
135	500	200	16	6,3	2300	0,0	5,5	0	90	599,5	605,0	629,1	590,2	605,0

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
136	300	120	22,4	6,3	2700	30,0	4,8	1690	90	745,0	862,1	838,9	610,3	939,5
137	300	80	10	8	1500	90,0	4,5	5217	90	462,6	459,7	641,0	544,3	1999,4
138	650	320	22,4	16	4300	195,0	10,4	33731	130	7429,1	7439,8	9733,1	8630,3	13902,7
139	750	200	25	19	3100	187,5	4,5	22678	130	4586,0	4462,8	5947,1	5428,5	5546,2
140	300	160	19	8	3500	0,0	1,5	0	80	1844,5	1977,2	1916,6	1340,6	1977,2
141	850	260	22,4	16	1500	212,5	5,1	23480	160	4988,7	4933,3	6188,5	5657,5	6164,3
142	600	360	25	12,5	1500	180,0	7,2	34773	120	6263,1	6212,0	8739,2	8095,9	8224,7
143	550	160	25	12,5	4300	137,5	6,6	13681	120	2436,4	2424,8	2992,6	2466,3	4048,4
144	800	260	25	19	3900	0,0	8,8	0	140	4431,2	4454,0	4147,1	3641,2	5305,8
145	700	200	16	16	2700	140,0	13,3	10951	150	2879,6	2889,9	3495,1	3081,4	14998,7
146	350	220	16	10	1900	105,0	6,7	14009	90	2538,0	2575,4	3488,8	3050,3	5170,6
147	500	160	19	8	2700	75,0	4,5	4109	90	896,6	874,5	1029,4	953,0	967,2
148	400	160	12,5	8	800	140,0	5,6	14000	120	1335,9	1327,0	1777,1	1571,3	2175,4
149	400	160	22,4	6,3	2700	20,0	4,0	1014	110	818,1	868,9	892,8	871,5	883,2
150	550	360	25	8	4700	27,5	7,2	2320	180	3415,3	3616,5	3581,4	3411,5	3677,5
151	750	280	22,4	16	4300	112,5	6,0	10208	80	4210,4	4166,6	4860,2	4458,2	4518,0
152	550	320	25	16	2300	82,5	8,8	9956	130	7492,2	7786,9	7973,4	6985,9	9980,1
153	300	120	19	8	3100	60,0	3,0	4261	80	966,2	937,2	1165,9	1011,3	1123,9
154	800	220	25	12,5	2300	80,0	4,8	5000	160	2787,5	2770,4	2840,5	2622,5	2909,7
155	600	380	25	19	4300	180,0	3,6	41455	120	18657,4	19255,5	24119,8	18110,9	25509,5
156	750	320	25	10	800	75,0	6,8	5704	90	3344,8	3409,8	3410,2	3078,8	3554,9
157	900	260	25	22,4	4700	135,0	9,9	13565	150	6792,8	6828,6	7638,0	6662,9	12093,5
158	700	220	16	16	1900	70,0	11,2	4388	110	2636,4	2642,7	2690,0	2379,7	7138,9
159	350	200	12,5	8	2700	87,5	5,3	7073	90	1472,5	1466,2	1733,8	1552,7	1865,1
160	500	220	16	8	1500	75,0	6,5	4525	80	1148,8	1136,8	1317,8	1190,1	1250,5
161	800	340	22,4	22,4	4700	240,0	5,6	44952	170	12237,8	12184,7	17557,7	16098,7	16363,1
162	550	180	22,4	10	2700	137,5	8,3	12311	140	2018,3	2010,0	2503,8	2080,1	3384,9

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
163	500	320	25	10	1900	75,0	7,5	8333	140	3995,4	4065,5	4877,0	4431,7	4565,6
164	900	380	25	19	2300	90,0	5,4	8595	180	10769,7	11069,8	11048,7	9062,8	11610,5
165	300	180	16	5	4300	60,0	4,2	4400	90	786,1	796,2	997,7	945,0	957,7
166	600	340	22,4	16	3900	30,0	4,8	2632	130	6099,3	6340,8	6471,3	5884,3	6399,2
167	1050	400	25	19	3100	0,0	17,9	0	110	6377,5	6423,5	6626,9	5919,2	11239,2
168	350	160	25	6,3	1900	52,5	3,5	4013	110	1284,9	1423,2	1602,4	1592,8	1614,8
170	600	400	25	19	4300	150,0	11,4	29255	110	11887,5	12294,2	15494,6	13758,2	24725,3
171	550	300	22,4	12,5	3900	137,5	8,3	18684	120	5330,5	5261,5	6196,6	5486,8	6608,7
172	450	140	25	8	1100	0,0	8,1	0	90	738,3	790,7	808,4	585,3	1213,9
173	450	160	22,4	10	1100	90,0	2,7	7193	110	2050,6	2034,0	2337,9	2207,4	2426,7
174	950	300	25	25	4700	285,0	15,2	53610	160	11473,9	11631,8	15030,2	13157,3	44407,1
175	650	180	16	10	1100	65,0	8,5	2930	120	1101,7	1108,6	1106,7	972,1	1477,7
176	450	120	16	12,5	2300	157,5	9,0	18518	130	1797,1	1798,7	2653,8	2233,3	14411,0
177	550	160	12,5	12,5	2300	137,5	8,8	9616	180	1979,6	1992,7	2576,4	2273,4	7833,6
178	650	380	25	12,5	4300	32,5	7,2	2886	130	5034,0	5205,8	5437,4	5047,3	5259,3
179	650	280	19	16	2700	195,0	3,9	28101	160	7246,1	7226,2	9598,7	8417,1	9831,9
180	900	380	25	19	2700	225,0	4,5	33564	170	17131,5	17450,6	20665,0	13857,6	21769,4
181	350	220	22,4	5	3500	35,0	4,6	2708	100	1271,9	1441,9	1480,8	1492,9	1532,0
182	450	200	12,5	10	800	67,5	8,6	3761	130	1399,9	1419,2	1665,6	1486,1	3365,0
183	500	160	19	12,5	3100	100,0	10,0	7706	100	1796,1	1793,0	2152,9	1821,5	7617,0
184	1150	360	25	22,4	3500	345,0	10,4	62128	130	10329,1	10365,5	13260,6	11963,3	13298,6
185	650	400	25	19	3100	65,0	3,9	7702	130	15235,9	16252,9	16114,4	11657,4	17034,4
186	950	260	22,4	22,4	4300	0,0	14,3	0	120	4577,5	4532,0	4430,6	3867,6	12979,0
187	450	280	25	10	2300	157,5	4,5	36651	120	5510,4	5444,4	7760,5	7397,8	7889,3
188	750	360	22,4	12,5	4300	150,0	8,3	16348	90	4392,4	4360,3	5352,3	4923,6	5007,4
189	500	220	25	10	1900	175,0	3,5	30769	160	5148,2	5033,3	7150,4	6516,3	7503,5
190	550	340	22,4	8	500	27,5	6,1	2033	180	3189,1	3374,9	3265,3	2887,9	3432,2

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
191	450	160	25	8	1500	90,0	3,6	6960	150	1730,2	1760,4	2136,7	2106,5	2146,7
192	650	360	22,4	19	4700	195,0	11,1	38036	160	11589,3	11727,7	16324,8	14579,4	27006,9
193	500	180	19	10	2700	0,0	5,5	0	90	1115,8	1101,0	1096,7	968,7	1101,0
194	950	360	22,4	16	4300	95,0	6,7	7497	170	6324,8	6392,5	6616,7	5874,6	6686,1
195	500	260	25	12,5	2700	125,0	2,5	17066	160	11342,8	11533,7	14469,2	9265,0	14968,6
196	1000	260	22,4	22,4	4700	250,0	15,0	32000	160	7139,0	7216,3	8798,7	7681,6	26621,5
197	800	360	22,4	16	1500	40,0	15,2	3061	180	5093,1	5213,6	5435,0	4832,4	9272,2
198	950	400	25	10	2700	0,0	16,2	0	140	2884,7	2897,2	3001,0	2690,3	2897,2
199	350	140	25	8	800	105,0	5,3	12704	110	1794,4	1950,7	2438,1	1841,1	2728,6
200	650	260	25	16	2300	32,5	9,8	2457	170	4114,4	4185,8	4271,5	3691,1	6475,2
201	750	380	25	16	2700	75,0	3,8	7524	90	14302,9	15099,2	15154,6	8324,7	15687,7
202	300	100	8	5	500	45,0	3,3	1235	80	199,5	195,8	217,9	195,4	220,1
203	850	240	22,4	22,4	4700	255,0	16,2	42680	80	6055,4	6062,3	7737,1	6725,0	37728,2
204	500	220	16	16	3100	75,0	6,5	6000	130	3587,0	3654,5	4185,6	3714,9	6744,0
205	1000	380	25	22,4	4700	50,0	6,0	4461	140	9829,3	10005,8	10027,1	8996,1	10026,2
206	600	220	22,4	16	3500	0,0	11,4	0	160	2747,5	2773,0	2718,3	2338,5	7932,8
207	350	180	22,4	6,3	2700	70,0	4,6	6361	80	1199,7	1233,8	1531,7	1415,4	1461,4
209	450	220	25	10	1100	90,0	5,4	9300	150	3020,6	2990,0	3864,3	3469,9	3637,1
210	700	180	22,4	12,5	3500	105,0	9,1	6790	150	1982,9	1971,9	2228,2	1891,1	3438,7
211	300	100	19	6,3	2700	60,0	4,5	3484	80	552,5	588,9	688,2	511,0	875,5
212	550	260	19	12,5	3900	27,5	9,4	1735	180	2815,9	2881,9	2937,5	2590,5	4430,7
213	350	120	19	6,3	3100	122,5	6,0	13051	110	891,4	910,3	1338,8	1018,3	1781,8
214	400	140	16	12,5	3500	80,0	3,6	5745	120	2129,5	2080,1	2229,9	1955,8	2519,1
215	450	300	22,4	10	4700	90,0	9,0	11291	80	3938,5	4062,2	4124,1	3553,5	4724,1
216	1100	340	25	19	3500	165,0	18,7	15752	120	6337,5	6325,9	7086,1	6280,0	15145,1
217	300	140	10	6,3	500	75,0	6,0	4138	100	586,2	585,3	794,5	697,6	1433,2
218	800	340	22,4	12,5	2700	120,0	12,0	10264	150	4570,4	4532,5	4694,7	4191,9	5013,1

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
219	650	380	25	16	2700	65,0	3,9	7078	100	12227,0	12933,9	12838,8	8618,9	13491,6
220	1150	400	25	19	3100	172,5	11,5	17209	170	8249,5	8197,8	9405,6	8544,1	8970,6
221	800	360	25	22,4	3900	40,0	7,2	3883	100	8595,0	8712,8	9202,9	8354,7	8732,5
222	350	160	25	8	2700	35,0	4,6	2520	100	1440,7	1467,7	1604,8	1337,7	1562,2
223	700	280	25	12,5	800	140,0	10,5	14347	120	4122,9	4065,6	4240,1	3685,5	4748,5
224	1100	400	25	25	4700	0,0	14,3	0	150	9458,4	9507,5	9580,8	8563,7	14715,6
225	600	360	25	19	3500	180,0	6,6	41344	80	9923,9	9927,2	13404,9	12143,2	12772,2
226	1150	360	22,4	22,4	3100	230,0	20,7	26911	130	8912,9	9078,1	10022,5	8958,8	28887,3
227	600	320	22,4	12,5	1100	90,0	7,2	8773	140	4206,6	4248,9	5090,7	4652,3	4738,0
228	800	280	19	10	1900	0,0	12,0	0	170	1754,0	1739,0	1593,5	1419,7	1739,0
229	800	340	22,4	12,5	3100	80,0	15,2	6080	120	3799,5	3862,4	3968,9	3502,1	5671,7
230	900	260	25	16	2300	135,0	13,5	11209	150	3974,6	3968,9	4526,4	3924,9	7950,2
231	1050	400	25	19	4300	262,5	13,7	38768	80	9938,1	10026,1	10271,6	9225,6	11982,9
232	550	220	22,4	8	500	55,0	4,4	3439	80	1718,1	1767,1	1763,7	1617,8	1849,4
233	800	320	22,4	22,4	4300	200,0	7,2	29867	160	11057,4	10998,7	13550,9	12204,0	13788,3
234	900	300	25	22,4	3500	135,0	9,9	14384	150	8496,5	8640,9	9036,1	7979,5	12063,5
235	700	240	16	16	4700	210,0	11,2	26257	110	3891,1	3853,8	5078,8	4532,2	12540,5
237	1150	380	25	25	4700	345,0	21,9	68928	90	11771,6	11889,2	15007,5	13391,5	49446,1
238	300	120	25	6,3	4700	15,0	5,4	816	100	707,5	868,4	858,2	568,2	1025,2
239	350	160	25	10	800	87,5	2,1	10216	110	3256,2	3295,3	4078,6	3847,1	4273,7
240	350	180	16	10	2700	87,5	7,0	8396	90	1809,8	1803,5	2376,5	2045,2	4911,8
241	700	220	25	19	4700	105,0	9,1	9776	160	5022,7	5009,6	5805,2	4981,2	10960,9
242	650	280	22,4	10	4300	65,0	3,9	4469	170	4950,5	5107,8	5197,0	3471,5	5415,8
243	400	260	25	10	1500	0,0	5,6	0	130	2371,9	2468,6	2623,1	2356,6	2468,6
244	950	240	22,4	19	2700	190,0	11,4	18364	130	4371,3	4376,8	5233,7	4567,0	9202,2
245	550	260	25	16	3900	27,5	4,4	2310	120	4398,2	4438,5	4768,9	4413,6	4482,1
246	600	160	22,4	19	4300	60,0	3,6	4474	90	2913,3	2857,0	3051,4	2714,0	2964,1

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
247	900	240	22,4	12,5	2700	90,0	5,4	5337	110	2595,4	2583,2	2610,1	2346,0	2680,3
248	900	260	22,4	16	3900	45,0	16,2	2784	160	3390,5	3357,9	3317,7	2909,0	8660,0
249	850	300	22,4	22,4	3900	0,0	14,5	0	170	5801,0	5830,7	5638,7	4982,0	16140,4
250	1200	360	25	25	4700	0,0	16,8	0	100	7697,3	7603,9	7895,0	7003,6	16254,3
251	1050	380	25	25	4700	262,5	11,6	43589	100	13524,5	13771,6	15061,3	13470,0	18842,3
252	500	280	25	10	800	175,0	6,0	36538	160	5006,7	4905,5	7648,6	7181,7	7281,4
253	500	140	22,4	8	4700	0,0	6,0	0	110	732,2	720,7	683,1	563,4	720,7
254	450	220	16	8	800	135,0	8,1	14082	120	1913,1	1917,5	2325,1	2032,5	2774,4
255	500	280	22,4	12,5	4700	100,0	10,0	11601	120	4385,1	4447,9	5395,3	4654,1	8599,3
256	450	140	22,4	10	4300	67,5	7,7	4315	110	1301,2	1299,3	1496,4	1174,8	2964,8
257	500	180	25	8	4700	25,0	6,0	1395	80	1133,8	1141,4	1213,7	1062,0	1153,5
258	450	300	25	10	2700	112,5	7,2	18056	90	4012,2	4006,9	5216,4	4631,2	4976,4
259	900	340	25	22,4	4700	270,0	9,9	52530	110	11875,5	12003,7	13662,5	12190,1	16407,5
260	500	160	19	8	3900	0,0	4,5	0	160	676,6	669,5	712,8	659,6	669,5
261	500	300	25	16	3100	150,0	2,5	31081	110	15546,8	15953,2	20460,7	13103,0	21323,8
262	550	240	16	16	4700	82,5	6,6	6747	90	3710,1	3789,1	3997,5	3574,4	5477,6
263	400	180	22,4	10	4300	120,0	8,0	15736	120	2558,1	2522,8	3612,8	2895,3	6601,1
264	300	140	19	5	4700	0,0	3,3	0	80	445,7	487,6	491,7	480,9	487,6
265	550	160	19	16	3100	0,0	3,3	0	90	1613,5	1579,3	1687,3	1532,6	1579,3
266	550	280	19	16	2300	82,5	7,7	7843	120	5149,8	5314,8	5574,2	4967,5	7366,4
267	950	260	25	25	4700	190,0	19,0	23590	110	7669,7	7792,3	8813,9	7630,5	48707,6
268	650	340	22,4	10	3100	65,0	11,1	5193	120	3165,0	3190,8	3367,7	2997,6	3349,6
269	600	380	25	19	3900	30,0	9,6	3200	150	9523,9	10091,7	9552,9	8492,1	12440,2
270	450	160	25	5	4300	0,0	5,9	0	140	536,8	627,1	646,4	591,5	627,1
271	1100	320	25	22,4	4700	275,0	22,0	39077	110	8088,4	8103,8	9998,3	8847,5	39267,8
272	350	120	25	8	3100	0,0	3,9	0	90	770,9	792,1	796,5	638,8	792,1
273	450	160	25	8	1900	45,0	5,0	2705	130	1230,4	1243,6	1397,8	1228,0	1324,8

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
274	350	120	22,4	10	1100	122,5	4,9	17123	110	1785,2	1802,0	2741,1	2107,7	4105,1
275	450	260	22,4	12,5	2300	157,5	8,1	33380	140	6064,0	6077,9	8811,7	7571,6	12237,4
276	500	280	22,4	6,3	200	25,0	8,0	1628	160	1411,0	1492,8	1576,3	1499,2	1519,3
277	1000	280	2,5	19	2700	300,0	6,0	47368	90	5876,7	5756,5	7612,2	7028,3	7299,7
278	450	280	22,4	12,5	2700	157,5	4,1	34686	150	7417,4	7328,1	11085,5	10319,4	10931,3
279	400	160	10	8	1500	140,0	8,0	12620	110	1031,3	1013,5	1508,4	1351,1	3667,7
280	450	260	22,4	12,5	3900	45,0	8,6	4007	140	3804,0	3934,0	4236,8	3631,8	6464,2
281	450	180	19	10	3900	112,5	7,2	10500	90	1735,6	1718,5	2163,1	1836,7	3208,9
282	1050	340	2,5	12,5	4700	0,0	17,9	0	170	3181,9	3209,3	3015,3	2650,1	3918,0
283	300	80	22,4	8	2300	45,0	6,0	2362	90	593,3	655,8	755,2	480,4	2208,7
284	800	280	22,4	12,5	800	80,0	4,0	5352	170	5629,1	5812,7	5864,1	3732,4	6116,8
285	1000	300	22,4	12,5	3900	50,0	18,0	2826	90	2509,1	2508,4	2587,7	2275,5	4310,6
286	850	220	22,4	12,5	4300	42,5	11,1	2184	160	2010,9	2012,8	1949,8	1692,9	2630,6
287	650	400	2,5	16	4300	195,0	9,1	40054	180	12170,2	12129,9	16704,4	15039,7	16571,1
288	500	300	22,4	16	2700	75,0	3,5	8787	80	6690,6	6922,7	7379,4	6548,4	7587,5
289	700	400	2,5	19	3900	175,0	14,0	30352	170	12360,2	12559,7	16566,1	14727,8	30787,8
290	850	320	2,5	19	2300	170,0	5,1	20318	140	8541,0	8569,2	9791,6	8745,2	9978,9
291	300	120	12,5	8	3900	75,0	3,0	4765	100	909,0	876,5	1124,0	996,7	1146,8
292	600	260	2,5	12,5	3100	60,0	10,2	4862	130	3460,4	3528,0	3634,4	3096,7	5012,8
293	400	160	10	8	3100	100,0	4,0	5714	120	935,2	916,4	1232,5	1118,8	1188,3
295	300	80	22,4	5	1100	75,0	2,7	4594	80	393,5	463,0	615,3	518,9	593,8
296	750	340	2,5	12,5	2300	75,0	10,5	6381	100	4085,8	4085,1	4353,2	3896,1	4259,6
297	1150	340	22,4	19	4700	230,0	11,5	23957	110	6989,7	6881,2	7354,8	6626,0	7824,7
298	800	220	19	16	3900	120,0	13,6	8549	170	3266,1	3284,2	3589,7	3153,2	10851,8
299	800	340	22,4	22,4	3900	160,0	14,4	21133	110	9618,1	9707,7	11061,1	9854,7	28805,0
300	1100	400	2,5	19	3900	330,0	13,2	58177	120	10301,4	10061,5	11895,8	10712,9	12873,8
301	850	260	2,5	22,4	3900	42,5	15,3	3487	80	5306,4	5331,3	5429,6	4708,0	19839,8

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
302	900	400	25	19	3900	270,0	5,4	53000	90	13214,3	13227,5	15954,5	12731,9	16820,2
303	300	80	16	6,3	1100	0,0	2,4	0	90	220,1	218,2	229,6	201,1	218,2
304	500	260	19	12,5	1900	50,0	3,5	3769	140	3857,0	3970,4	4064,1	3553,9	4210,5
305	500	160	12,5	10	3500	0,0	3,0	0	120	723,0	720,0	740,6	677,8	720,0
306	1000	360	22,4	16	3100	200,0	11,0	20529	130	5862,1	5776,1	6815,7	6174,7	6654,2
307	650	280	19	16	2300	97,5	5,9	8356	180	4887,2	4904,4	5888,1	5360,9	5519,6
308	350	160	25	8	4300	87,5	6,0	9692	100	1888,3	2021,3	2408,1	1827,4	2820,3
309	800	340	22,4	12,5	2300	40,0	8,0	2720	110	3409,0	3443,6	3665,3	3378,5	3466,0
310	1100	400	25	22,4	3900	55,0	17,6	4795	170	8862,9	8936,7	9336,5	8348,3	17780,2
311	1150	320	25	25	3900	345,0	6,9	64061	110	9691,3	9632,6	13172,2	12084,0	12246,2
312	400	120	25	8	800	120,0	2,4	12404	90	1325,5	1360,1	1776,3	1782,3	1833,8
313	1200	380	25	19	3500	60,0	19,2	4511	160	6304,2	6322,6	6561,6	5854,8	11442,1
314	650	400	25	12,5	4700	195,0	9,1	37309	170	7926,0	7848,0	11429,4	10434,1	10644,7
315	350	120	19	5	3500	35,0	3,9	1492	80	394,3	414,9	459,9	420,9	439,3
316	900	340	22,4	22,4	3900	135,0	17,1	14656	110	8512,5	8686,8	9296,3	8292,3	28575,8
317	300	140	10	8	4700	15,0	1,5	542	90	832,6	866,9	829,8	620,1	877,8
319	500	300	25	16	3100	100,0	6,5	14375	100	7282,0	7333,0	8284,1	7343,5	8598,4
320	350	160	16	8	1500	70,0	3,2	4906	80	1052,5	1032,4	1291,4	1204,9	1224,3
321	400	240	19	6,3	500	40,0	7,6	2707	120	1250,4	1280,3	1412,2	1235,6	1362,2
322	750	220	25	12,5	4300	187,5	6,8	19541	80	2553,1	2441,2	3143,8	2841,3	2954,7
323	750	360	22,4	19	3500	225,0	5,3	41677	140	10869,2	10865,1	14542,1	13121,7	14392,5
324	350	120	19	6,3	200	0,0	1,8	0	90	718,4	773,4	748,8	612,8	773,4
325	600	360	22,4	16	4300	60,0	7,2	6126	120	6583,4	6770,9	7436,0	6743,1	7099,9
326	600	340	25	10	2300	150,0	6,6	20909	150	5143,2	5127,4	6446,0	6059,5	6499,1
327	450	220	19	8	2300	22,5	9,0	1249	130	1361,4	1410,4	1360,8	1150,3	1763,0
328	1200	380	25	25	4700	60,0	24,0	5365	80	9003,6	9047,7	9192,8	8210,9	34218,7
329	850	240	25	22,4	4700	42,5	7,7	3327	140	5695,3	5736,2	5307,8	4640,2	6695,1

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
330	1200	340	22,4	22,4	3500	240,0	14,4	26952	150	8193,4	8279,8	9631,5	8577,9	15064,8
331	300	140	10	8	3100	90,0	4,5	6882	80	870,0	866,0	1201,5	1068,3	1872,5
332	700	280	19	12,5	1500	105,0	3,5	7984	100	5401,7	5561,1	5816,5	3609,6	6085,6
333	1150	340	22,4	22,4	4300	172,5	11,5	16816	180	9520,6	9710,4	9361,2	8380,8	11228,1
334	350	140	25	5	500	35,0	3,9	2028	110	707,6	877,6	936,2	906,2	938,6
335	450	180	19	10	4700	0,0	3,2	0	100	1251,4	1259,0	1260,7	1179,9	1259,0
336	750	400	25	19	2700	225,0	7,5	47278	130	11146,8	11103,1	15723,2	14382,5	14588,9
337	350	200	12,5	6,3	1500	0,0	4,2	0	90	566,5	585,4	620,9	573,8	585,4
338	350	220	16	8	1900	70,0	4,9	6096	80	1531,8	1540,2	1924,9	1737,5	1818,7
339	650	300	19	19	4300	162,5	13,0	22117	120	7306,9	7440,7	9083,6	8135,0	27508,5
340	1000	320	22,4	16	3900	150,0	5,0	12711	80	6765,8	6862,9	6984,4	5155,1	7387,9
341	850	380	25	19	4300	255,0	14,5	48980	130	10015,5	9989,5	13401,7	11929,2	22258,4
342	300	120	16	6,3	2700	75,0	4,5	5116	90	739,1	751,9	880,8	719,6	1036,7
344	750	400	25	22,4	4300	150,0	13,5	23291	120	12544,5	12817,2	15491,6	13823,2	30071,4
345	350	220	22,4	10	2700	70,0	7,0	8130	100	2994,4	3091,6	3652,9	3002,3	5047,2
346	600	320	25	12,5	1100	120,0	4,2	14388	160	8221,5	8372,7	9495,3	7415,9	10012,8
347	800	360	25	16	1500	40,0	5,6	3303	130	6837,5	7043,1	6798,8	5828,5	7091,8
348	1000	300	25	19	4300	100,0	16,0	8232	130	5426,0	5409,4	5777,7	5080,5	12540,2
349	650	380	25	10	3900	65,0	9,8	6116	110	3736,8	3813,2	4276,9	3936,0	3994,7
350	350	120	8	8	2300	105,0	5,3	6119	110	675,8	668,0	962,4	859,2	2145,0
351	350	100	16	6,3	3900	0,0	2,1	0	100	321,5	325,0	317,4	307,3	325,0
352	400	240	22,4	5	3900	20,0	6,0	1328	120	1103,2	1232,4	1240,6	1235,0	1253,5
353	500	160	16	16	3500	0,0	8,0	0	110	1519,2	1505,1	1532,4	1324,1	5429,0
354	500	240	25	10	800	125,0	6,0	15511	120	2959,4	2909,1	3930,3	3582,8	3685,2
355	600	320	25	12,5	4700	150,0	8,4	20982	180	6413,4	6291,0	8310,0	7416,1	8113,3
356	350	220	25	8	3100	17,5	5,6	1442	100	1901,0	1975,8	2085,7	1786,5	2006,2
357	600	240	25	12,5	1500	120,0	6,0	12062	140	3485,7	3409,7	4333,5	3939,3	4052,9

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
358	450	280	25	12,5	2300	67,5	5,0	7862	110	4550,7	4617,2	5495,4	5081,9	5151,7
359	500	280	25	16	3100	100,0	7,5	13924	80	6290,0	6453,3	6995,5	6080,4	8947,2
360	450	200	12,5	8	3500	0,0	2,3	0	80	1507,8	1589,9	1530,8	852,8	1589,9
361	500	140	25	10	1100	75,0	4,0	4891	90	1239,4	1222,6	1435,8	1295,6	1352,2
362	650	360	22,4	19	4300	65,0	5,9	6907	80	7407,4	7616,1	8512,5	7793,0	7897,8
363	750	360	25	19	3100	37,5	11,3	3441	140	7674,6	7920,4	7660,4	6804,5	10423,1
364	450	240	19	8	2300	67,5	4,1	5036	130	2269,2	2305,1	2495,8	2261,7	2599,1
365	700	340	22,4	19	2700	140,0	14,0	18075	110	7767,7	7867,5	9267,1	8241,0	21915,0
366	300	80	19	8	500	45,0	5,1	2147	90	503,3	544,3	601,2	422,5	1442,5
367	400	180	16	10	800	100,0	6,0	8954	90	1677,0	1689,8	2038,4	1772,7	2712,2
368	400	140	12,5	10	1500	40,0	6,8	1734	130	932,9	931,6	982,2	858,9	2518,1
369	1150	320	22,4	19	2300	172,5	13,8	15059	120	5700,3	5769,6	6000,7	5348,3	8221,9
370	350	100	22,4	6,3	800	0,0	3,2	0	90	379,0	408,7	428,7	375,6	408,7
371	550	240	19	12,5	3900	137,5	5,0	14422	150	3580,8	3497,0	4830,2	4426,2	4488,5
372	300	100	25	5	3500	15,0	3,6	682	80	424,3	532,5	560,3	431,3	541,7
373	600	180	22,4	19	4300	120,0	5,4	12358	90	4029,3	4051,7	4466,2	3851,4	5867,0
374	950	240	25	19	2300	0,0	7,6	0	80	3476,4	3398,0	3362,5	2994,9	3398,0
375	1050	360	25	25	4300	315,0	13,7	63647	90	11267,8	11338,7	14782,5	13122,8	24997,1
376	500	260	25	10	3500	0,0	2,5	0	100	5905,2	6360,0	6233,5	3606,9	6360,0
377	850	320	22,4	12,5	3500	85,0	5,1	6010	130	5418,7	5531,5	5471,6	3961,6	5776,1
378	400	240	19	8	3500	100,0	3,6	11000	120	2948,1	2960,6	3638,6	3265,2	3807,7
379	1150	360	25	16	3900	0,0	11,5	0	180	4246,3	4195,9	4457,5	4052,7	4195,9
380	650	380	25	16	3900	195,0	7,8	40091	130	9343,3	9263,3	13078,8	11885,8	12284,8
381	300	140	22,4	6,3	2700	45,0	3,9	3250	80	928,1	965,3	1136,6	964,5	1085,8
383	600	400	25	16	3500	150,0	5,4	27073	140	11561,3	11837,2	14844,6	13451,4	14890,1
384	600	320	25	19	4700	180,0	4,8	37938	100	9458,9	9363,7	13040,7	12016,6	12265,9
385	1200	380	25	25	4300	180,0	18,0	20137	180	11274,3	11349,2	12807,5	11398,5	27644,8

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
386	400	260	19	8	4300	0,0	2,8	0	110	2944,2	3182,1	3066,7	2035,1	3182,1
387	350	100	16	6,3	3100	105,0	4,6	7006	110	599,3	603,7	784,2	633,6	955,9
388	900	340	22,4	19	4700	225,0	18,0	31088	90	7431,0	7409,6	8613,5	7698,3	24004,7
389	400	120	10	8	500	40,0	6,0	1318	100	413,5	414,2	453,6	398,6	920,2
390	450	180	16	8	2700	45,0	3,6	2205	110	1050,1	1049,2	1115,5	1038,0	1109,6
391	950	260	25	25	4700	47,5	13,3	3963	130	6552,7	6591,5	6346,1	5478,3	17657,5
392	700	220	25	16	3500	105,0	7,7	9141	100	3951,5	3986,5	3962,7	3438,0	4852,2
393	500	220	16	16	3100	125,0	9,5	13723	120	4117,3	4180,3	5285,3	4691,1	16739,4
394	550	220	22,4	12,5	4700	55,0	10,5	3984	110	2519,2	2525,6	2743,9	2327,1	5598,7
395	600	200	22,4	10	2300	90,0	10,2	5905	180	1951,6	1959,7	2240,4	1867,9	3343,7
396	300	160	22,4	6,3	1900	30,0	2,4	2090	100	1438,6	1581,7	1619,8	1578,8	1691,4
397	900	260	19	16	4700	180,0	11,7	15721	80	3389,2	3381,3	3918,7	3485,3	6317,7
398	700	200	16	10	4300	0,0	3,5	0	110	1406,5	1425,6	1348,3	1020,9	1425,6
399	750	340	22,4	16	3100	75,0	6,8	6610	90	5149,1	5202,5	5789,9	5313,4	5399,9
400	1000	360	22,4	12,5	3100	0,0	6,0	0	150	5246,9	5411,5	5142,2	3439,8	5411,5
402	500	160	12,5	12,5	3100	75,0	9,0	4111	120	1431,9	1438,3	1637,9	1449,0	6008,8
403	450	180	19	10	2700	90,0	5,4	7039	100	1840,5	1789,2	2018,9	1765,0	2120,1
404	650	200	25	19	3900	97,5	4,6	8949	160	4820,5	4728,8	5504,1	4928,0	5291,1
405	450	220	25	8	3100	45,0	4,5	3495	80	1877,6	1947,1	2029,2	1988,2	2046,1
406	350	180	22,4	10	2300	0,0	3,9	0	110	1442,6	1460,4	1542,3	1372,3	1460,4
407	550	140	25	16	3900	165,0	2,8	20856	150	3523,7	3353,6	4895,8	4565,5	4626,7
408	300	160	16	8	1500	60,0	4,8	4604	80	1274,5	1301,9	1419,7	1208,5	1727,4
409	450	240	16	8	1500	67,5	4,1	4466	130	1920,4	1952,8	2132,0	1900,8	2201,5
410	600	400	25	10	4700	90,0	9,6	10685	90	4278,6	4384,8	5138,4	4723,5	4797,5
411	500	260	25	12,5	1100	175,0	10,0	37851	140	5422,1	5419,6	8093,9	6764,4	12570,8
412	750	200	16	8	2700	0,0	7,5	0	100	643,0	631,1	677,9	618,9	631,1
413	750	200	25	22,4	4300	112,5	9,8	10944	130	5430,7	5423,5	5784,4	4880,1	15274,6

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
414	700	180	22,4	16	2300	210,0	9,8	26970	100	2967,0	2926,6	3863,2	3272,4	8881,8
415	350	200	16	6,3	800	87,5	5,6	7722	100	1150,8	1134,7	1522,5	1354,6	1454,1
416	550	220	22,4	16	2700	192,5	5,0	36460	160	6331,2	6117,2	9268,8	8292,5	9067,4
417	500	320	25	16	2700	75,0	8,5	9730	100	7212,3	7545,6	7912,3	6904,6	10419,1
418	500	300	19	10	800	25,0	3,0	1745	100	5307,3	5709,6	5590,2	3104,7	5766,4
419	500	300	19	12,5	1500	100,0	9,0	11101	90	4087,4	4224,0	4645,3	4116,6	6107,9
420	550	160	19	16	3500	82,5	3,3	5945	140	2568,1	2518,5	3013,4	2735,9	2821,9
421	500	140	22,4	16	3100	0,0	6,0	0	80	1565,8	1545,2	1589,7	1309,2	3274,4
422	1050	320	22,4	22,4	3500	315,0	10,5	52301	180	10846,4	11032,2	13031,2	11626,1	15873,0
423	750	360	25	16	3100	37,5	6,0	3237	100	6232,9	6384,3	6452,4	5875,5	6420,5
425	600	400	25	10	2700	150,0	10,2	24684	80	4498,7	4519,5	5862,7	5333,3	5479,8
426	300	140	16	8	1900	105,0	3,3	13135	100	1465,2	1396,3	2162,7	1912,9	2093,2
428	1050	360	25	16	4700	0,0	11,6	0	160	4572,9	4529,1	4661,1	4213,9	4529,1
429	350	200	22,4	8	2300	17,5	4,6	1221	110	1494,3	1535,5	1658,7	1496,7	1561,3
430	450	260	25	8	3900	112,5	9,0	14647	150	3479,8	3429,5	4245,4	3519,7	4452,4
431	750	240	25	16	3900	75,0	6,8	5769	120	3808,2	3741,9	3986,8	3565,0	3903,7
432	1000	360	25	12,5	3900	50,0	5,0	3280	150	8790,5	9180,5	8981,7	4744,0	9246,7
433	1000	380	25	16	1500	200,0	10,0	22082	170	6568,3	6508,6	8182,5	7491,6	7595,4
434	400	140	22,4	10	3500	100,0	6,4	9338	100	1583,2	1575,1	2076,6	1631,6	3532,4
435	450	220	16	8	4700	90,0	3,2	6384	150	2554,3	2572,9	2965,1	2301,6	3131,1
436	950	300	22,4	19	3900	237,5	11,4	30340	90	6146,1	6164,2	7183,0	6386,8	9970,2
437	1050	300	25	25	4300	315,0	17,9	57241	170	10584,6	10699,2	14285,4	12501,4	49663,2
438	850	400	25	10	1900	0,0	5,1	0	150	8643,4	9197,9	9015,8	4471,8	9197,9
439	350	180	25	10	2700	70,0	6,0	7675	90	2496,9	2595,7	2990,8	2358,0	3849,7
440	600	280	25	16	4700	30,0	4,2	2529	100	5046,0	5127,9	5196,6	4794,0	5165,0
441	650	360	22,4	12,5	1100	0,0	5,9	0	90	4211,0	4400,6	4278,3	3800,0	4400,6
442	600	280	19	16	2700	150,0	9,6	18289	160	5851,0	5895,4	7793,8	6933,0	13219,8

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
443	300	160	16	5	4700	45,0	4,5	2636	80	583,7	588,0	701,0	629,5	660,4
444	300	180	25	8	2300	30,0	4,8	2631	100	1947,7	2009,6	2127,2	1716,5	2146,3
445	550	280	19	8	800	27,5	10,5	1558	180	1775,2	1800,5	1733,2	1519,9	1831,2
446	350	120	10	8	500	52,5	3,2	2076	90	513,5	509,5	576,8	518,6	571,4
447	700	280	22,4	16	2300	175,0	12,6	22340	110	4917,9	4895,6	6262,5	5490,5	12800,6
448	350	220	19	8	2700	35,0	2,1	2639	80	3441,4	3657,0	3740,9	2402,1	3855,0
450	450	120	22,4	10	1500	90,0	8,6	6216	80	1016,8	1045,8	1222,5	925,0	3444,7
451	500	180	25	16	3500	150,0	2,5	23182	100	4815,1	4653,6	6109,0	5716,9	6214,8
452	550	240	25	16	2300	55,0	2,8	4952	110	6234,7	6388,4	6356,0	5141,8	6708,4
453	500	160	16	16	2700	75,0	7,0	5377	80	2191,0	2202,7	2332,3	2011,9	6318,8
454	850	220	25	16	3900	212,5	9,4	22877	160	4304,0	4279,6	5082,6	4405,3	6678,0
455	500	180	22,4	10	3900	100,0	2,5	7918	150	3425,6	3432,0	3961,0	3125,6	4153,2
456	500	320	22,4	16	3500	50,0	3,5	5268	120	7768,6	8190,3	8293,5	7155,9	8628,3
457	950	240	25	16	1500	237,5	4,8	26207	90	4370,2	4324,8	5012,9	4449,1	5202,7
458	300	180	22,4	5	1100	15,0	2,4	989	100	1525,7	1769,3	1756,3	1559,7	1802,0
459	800	380	25	19	3900	80,0	6,4	8341	80	8088,9	8235,6	8916,3	8175,0	8520,6
461	450	220	16	6,3	4300	0,0	7,7	0	130	716,9	724,2	737,9	653,4	724,2
462	900	260	25	22,4	4700	0,0	12,6	0	120	4915,4	4834,5	4874,8	4231,8	11631,5
464	450	180	16	6,3	1900	45,0	3,6	2025	110	894,3	907,0	916,8	821,3	960,4
465	550	200	12,5	12,5	4700	137,5	9,9	10568	170	2629,2	2648,8	3320,1	2979,8	9502,4
466	350	140	16	10	1900	35,0	6,7	1887	80	1042,5	1044,4	1077,7	907,6	2775,6
467	550	220	19	16	3500	165,0	4,4	22651	150	5049,2	4928,9	7163,3	6491,8	6782,3
468	850	380	25	16	4700	170,0	16,2	20602	140	7264,3	7294,6	8710,0	7714,4	14264,5
469	700	200	25	16	3900	0,0	6,3	0	80	2685,3	2620,9	2453,7	2147,5	2620,9
470	850	360	22,4	22,4	3900	42,5	15,3	3828	80	7938,6	8035,6	8050,1	7196,9	20062,5
471	350	100	12,5	6,3	500	52,5	6,3	1878	90	318,4	316,2	362,2	299,5	789,1
472	600	160	22,4	12,5	1100	90,0	9,0	5920	130	1697,0	1698,2	1952,4	1609,4	3885,0

Mod.	h_0 (mm)	b_f (mm)	t_f (mm)	t_w (mm)	k_1 (kN)	\bar{y} (mm)	L (m)	A_r (mm ²)	d_r (mm)	$M_{cr,num}$ (kN,m)	$M_{cr,P}$ (kN,m)	$M_{cr,H}$ (kN,m)	$M_{cr,R,S}$ (kN,m)	$M_{cr,R,C}$ (kN,m)
473	1000	400	25	19	2700	300,0	13,0	55714	100	10656,0	10463,3	11746,6	10548,4	13317,6
475	350	180	16	8	4700	0,0	3,2	0	110	872,0	889,7	914,5	857,0	889,7
476	350	100	19	6,3	3500	105,0	4,6	7981	90	623,7	655,5	813,5	628,8	933,4
477	650	240	19	16	4300	162,5	13,0	18604	80	3745,2	3753,2	4585,1	4053,5	15125,8
478	650	280	22,4	19	4700	0,0	12,4	0	110	4802,7	4871,1	4687,3	4128,5	13040,2
479	750	300	25	22,4	4700	150,0	11,3	19875	150	9448,8	9502,1	11600,1	10182,9	23749,0
480	800	240	22,4	19	3100	200,0	5,6	24030	160	5602,9	5498,2	7343,2	6664,8	6902,1
481	800	400	25	19	4300	160,0	4,8	22173	140	14915,9	15267,1	16849,4	13069,7	17808,2
482	600	180	25	12,5	1900	60,0	6,6	3992	80	2216,7	2175,1	2024,2	1721,4	2264,8
483	650	240	16	12,5	3500	162,5	8,5	14469	150	3203,4	3210,5	3747,1	3354,4	4765,2
484	350	100	16	8	1100	122,5	4,2	11951	90	764,1	756,0	1087,0	891,6	1487,5
485	400	260	22,4	10	1900	60,0	3,2	6301	90	4129,2	4283,0	4519,4	3919,1	4758,2
487	750	220	22,4	16	3500	225,0	12,0	30544	110	3855,2	3781,4	4972,1	4297,0	11863,9
488	950	380	25	22,4	4700	95,0	14,3	9688	150	9769,9	9918,4	10670,3	9518,4	18285,7
489	550	180	12,5	10	3900	55,0	6,1	2350	140	1264,9	1249,7	1163,0	1043,8	1319,2
490	950	240	25	25	4700	0,0	16,2	0	120	4910,4	4810,0	4885,7	4182,2	21895,5
491	800	280	19	12,5	2700	0,0	15,2	0	80	2061,4	2058,5	2144,1	1902,7	4150,4
492	300	80	12,5	5	4300	45,0	4,2	1370	100	215,5	218,4	246,0	197,6	337,4
493	650	280	25	19	4700	162,5	7,8	23854	170	9690,8	9772,6	11429,1	10067,2	14241,1
494	1000	340	25	19	3900	100,0	5,0	8696	140	9381,8	9567,6	9407,1	7359,8	9940,3
495	750	380	25	12,5	800	0,0	5,3	0	110	6693,5	7048,7	6716,1	4661,1	7048,7
496	600	400	25	16	2300	30,0	12,0	3183	90	7189,5	7644,0	7512,8	6626,3	10545,3
497	450	220	22,4	12,5	4300	22,5	8,1	1616	130	2607,0	2664,2	2793,2	2362,3	4744,7
498	450	160	16	12,5	3100	22,5	8,1	1122	130	1410,9	1424,3	1425,2	1234,4	4331,3
499	500	300	22,4	10	1900	75,0	7,0	7279	150	3451,7	3490,3	4214,1	3835,3	3937,8
500	300	140	19	6,3	1100	105,0	3,0	14284	80	1077,7	1061,2	1594,1	1524,2	1545,4