

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS E MECANISMOS
RETICULADOS PLANOS COM LIGAÇÕES
VISCOELÁSTICAS PELA FORMULAÇÃO POSICIONAL DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Daniel Boy Vasconcellos

V331a

Vasconcellos, Daniel Boy.

Análise de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas pela formulação posicional do método dos elementos finitos [manuscrito] / Daniel Boy Vasconcellos. – 2018.
xi, 80 f., enc.: il.

Orientador: Marcelo Greco.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndice: f. 79 - 80.

Bibliografia : f.72 - 78

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Viscoelasticidade - Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**“ANÁLISE DE ESTRUTURAS E MECANISMOS RETICULADOS
PLANOS COM LIGAÇÕES VISCOELÁSTICAS PELA FORMULAÇÃO
POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS”**

Daniel Boy Vasconcellos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Greco
DEES – UFMG (orientador)

Prof. Dr. Hermes Carvalho
DEES – UFMG

Prof. Dr. Daniel Nelson Maciel
UFRN

Belo Horizonte, 31 de agosto de 2018

AGRADECIMENTOS

A Deus pela sua grande misericórdia e graça para comigo, pois é Ele quem me sustenta dia após dia.

Aos meus pais e às minhas irmãs pelo incentivo e constante apoio ao longo deste curso.

Ao professor Marcelo Greco pela atenção, dedicação e paciência ao longo deste trabalho.

Aos irmãos da Igreja Presbiteriana da Pampulha (IPP) pela comunhão em Cristo e pelo grande aprendizado.

Aos seguintes professores pelos conhecimentos transmitidos através das disciplinas ministradas no primeiro ano de mestrado: Gabriel de Oliveira Ribeiro, Fernando Amorim de Paula, Armando Cesar Campos Lavall, Samuel Silva Penna e Roque Luiz da Silva Pitangueira.

Aos colegas do PROPEEs pelas conversas e debates técnicos.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

“Se o SENHOR não edificar a casa, em vão trabalham os que a edificam; se o SENHOR não guardar a cidade, em vão vigia a sentinela. Inútil vos será levantar de madrugada, repousar tarde, comer o pão que penosamente granjeastes; aos seus amados Ele o dá enquanto dormem.”

Salmo 127 – 1:2

RESUMO

Este trabalho trata da aplicação da Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF) para análise de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas não lineares. Apresenta-se também uma formulação alternativa para a análise estática de estruturas empregando-se a FPMEF e a abordagem clássica do método incremental-iterativo. Na formulação posicional, as posições nodais são tratadas como as incógnitas do problema, em vez dos deslocamentos nodais normalmente utilizados. As equações de equilíbrio do sistema são escritas considerando o princípio da energia potencial total estacionária e a solução do sistema não linear final de equações é obtida pelo método de Newton-Raphson. O algoritmo de integração temporal implementado é o de Newmark. Considera-se a formulação Lagrangeana total, a cinemática de Bernoulli-Euler e o comportamento linear elástico no material. Na modelagem das ligações, constrói-se uma estratégia que possibilita a consideração de diversos modelos reológicos, embora nesta dissertação apenas a conexão de Kelvin-Voigt é abordada. Ao final, realiza-se exemplos numéricos a fim de se ilustrar a aplicabilidade da formulação para problemas práticos.

Palavras-chave: Ligações Viscoelásticas, Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos, Dinâmica Não Linear, Mecanismos Multicorpos

ABSTRACT

The work deals with the application of the Positional Formulation of the Finite Element Method (PFFEM) for analysis of 2D framed structures and mechanisms with nonlinear viscoelastic connections. An alternative formulation for static analysis of structures is presented using the PFFEM and the classical approach of the incremental-iterative method. In the positional formulation, the nodal positions are chosen as the unknown variables of the problem, rather than nodal displacements normally used. The equilibrium equations of the system are written through the principle of stationary total potential energy and the solution of the final nonlinear system of equations are obtained by the Newton-Raphson procedure. The temporal integration is performed by the Newmark's algorithm. The total lagrangian formulation, the kinematics of Bernoulli-Euler and the elastic linear model in the material is used. In the connections modeling, an strategy that is able to consider many reologic models is created, though only Kelvin-Voigt's connections is addressed in this work. At the end, numerical examples are provided showing the applicability of formulation for practical problems.

Key-words: Viscoelastic Connections, Positional Formulation of Finite Element Method, Nonlinear Dynamic, Multibody Mechanisms

SUMÁRIO

1. Introdução	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Justificativa.....	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Organização do texto	4
2. Fundamentação Teórica	5
2.1. Comportamento viscoelástico	5
2.2. Princípio dos Trabalhos Virtuais para o problema dinâmico.....	9
2.3. Princípio da Energia Potencial Total Estacionária	13
2.4. Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos.....	18
2.5. Metodologias para solução do processo incremental-iterativo	29
3. Metodologia.....	36
3.1. Inclusão das ligações viscoelásticas	36
3.2. Abordagem clássica para o método incremental-iterativo aplicada à FPMEF	43
4. Exemplos Numéricos	47
4.1. Exemplo 1	47
4.2. Exemplo 2	51
4.3. Exemplo 3	53
4.4. Exemplo 4	54
4.5. Exemplo 5	56
4.6. Exemplo 6	59
4.7. Exemplo 7	62
4.8. Exemplo 8	64
5. Conclusões e considerações finais.....	70
6. Referências Bibliográficas	72

7. Apêndice A – Sobre o script desenvolvido	79
--	-----------

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Amortecedores utilizados em uma ponte (extraído de https://www.facebook.com/SiteAEngenharia/photos/pcb.1014279722002872/1014278818669629/?type=3 &theater).	1
Figura 2 – Trem de pouso de um Airbus A350 (extraído de https://br.depositphotos.com/117396764/stock-photo-airbus-a350-undercarriage.html).	2
Figura 3 – Dispositivo com material viscoelástico utilizado em edifício (adaptado de https://www.engenhariacivil.com/amortecimento-viscoelastico-estruturas-betao).	2
Figura 4 - Modelos reológicos básicos (adaptado de Filho <i>et al.</i> (2007)).	6
Figura 5 - Fenômenos comuns em vários materiais viscoelásticos (adaptado de Findley <i>et al.</i> (1989)).	7
Figura 6 - Resposta de alguns tipos de modelos reológicos: (a) elástico; (b) viscoso; (c) Maxwell; (d) Kelvin-Voigt; (e) Zener (adaptado de Bažant e Cedolim (2010)).	8
Figura 7 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade. (b) Diagrama de corpo livre.	10
Figura 8 – Deslocamento virtual δu	12
Figura 9 – Posição inicial (X_0), posição final (X) e deslocamento (u) para um sistema de referência fixo.	16
Figura 10 – Elemento finito deformado.	23
Figura 11 – Algoritmo para análise estática utilizado por Greco (2004) adotando-se controle de força.	30
Figura 12 - Algoritmo para análise estática utilizado por Greco (2004) adotando-se controle de deslocamento.	31
Figura 13 – Algoritmo para abordagem clássica.	33
Figura 14 – Representação do <i>snap-through</i>	34
Figura 15 – Representação do <i>snap-back</i>	35
Figura 16 – Curva multilinear.	36
Figura 17 – Graus de liberdade iniciais e reordenados	38
Figura 18 – Graus de liberdade para o modelo de Kelvin-Voigt	39

Figura 19 – Graus de liberdade para o modelo de Maxwell.	39
Figura 20 – Graus de liberdade para o modelo de Zener.	39
Figura 21 – Modelo generalizado de Maxwell.	40
Figura 22 – Modelo generalizado de Kelvin-Voigt.	40
Figura 23 – Modelo Zener (horizontal), Modelo Maxwell (vertical) e Modelo Kelvin-Voigt (rotacional).	41
Figura 24 – Dados no arquivo de entrada.	42
Figura 25 – Algoritmo proposto para análise estática utilizando a abordagem clássica.	45
Figura 26 – Dados do exemplo 1.	47
Figura 27 – Dados geométricos para solução analítica.	48
Figura 28 – Dados para o equilíbrio de uma das barras do sistema.	48
Figura 29 – Dados para análise numérica.	50
Figura 30 – Trajetória de equilíbrio utilizando a solução analítica, o controle de força e o controle de deslocamento.	50
Figura 31 – Dados do exemplo 2.	51
Figura 32 – Decomposição da rigidez.	51
Figura 33 – Força $P \times$ posição horizontal do nó A.	52
Figura 34 – Aspecto deformado da estrutura em algumas etapas de carga.	52
Figura 35 – Dados do exemplo 3.	53
Figura 36 – Caminhos de equilíbrio para diferentes valores de k	53
Figura 37 – Dados do exemplo 4.	54
Figura 38 – Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força $\times$ tempo.	55
Figura 39 – Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força para diferentes valores de $P(t)$	55
Figura 40 – Dados do exemplo 5.	56
Figura 41 – Deslocamento vertical $\times$ tempo para viga biengastada.	57
Figura 42 – Deslocamento vertical $\times$ tempo para ligação elástica.	57
Figura 43 – Resposta da viga com conexões elásticas para diferentes valores de P	58
Figura 44 – Resposta para ligação elástica e viscoelástica.	58
Figura 45 – Dados do exemplo 6.	59
Figura 46 – Lei da mola da ligação viscoelástica rotacional no nó B.	59
Figura 47 – Leis utilizadas para os amortecedores.	60
Figura 48 – Coordenadas dos pontos das leis utilizadas nos amortecedores.	60
Figura 49 – Posição horizontal do nó C $\times$ tempo para as ligações estudadas.	61

Figura 50 – Mecanismo biela-manivela em alguns instantes de tempo.....	61
Figura 51 – Dados do exemplo 7.....	62
Figura 52 – Posição horizontal do ponto C $\times$ tempo para ligação de Kelvin-Voigt e para rótula livre.	63
Figura 53 – Posição horizontal do ponto C $\times$ tempo para $k = 6 \text{ Nm}/(\text{rad/s})$	63
Figura 54 – Mecanismo em alguns instantes de tempo.	64
Figura 55 – Dados do exemplo 9.....	64
Figura 56 – Carregamento dinâmico aplicado no mecanismo Peaucellier.	65
Figura 57 – Posição vertical do ponto E $\times$ tempo.....	65
Figura 58 – Mecanismo sem ligações em alguns instantes de tempo (parte 1/2).....	66
Figura 59 - Mecanismo sem ligações em alguns instantes de tempo (parte 2/2).	66
Figura 60 – Mecanismo com k_{v1} em alguns instantes de tempo (parte 1/2).	67
Figura 61 – Mecanismo com k_{v1} em alguns instantes de tempo (parte 2/2).	67
Figura 62 – Mecanismo com $(k_{v1}+k_{v2})$ em alguns instantes de tempo (parte 1/2).....	68
Figura 63 – Mecanismo com $(k_{v1}+k_{v2})$ em alguns instantes de tempo (parte 2/2).....	68
Figura 64 – Mecanismo com todas as conexões viscoelásticas em alguns instantes de tempo (parte 1/2).	69
Figura 65 - Mecanismo com todas as conexões viscoelásticas em alguns instantes de tempo (parte 2/2).	69
Figura 66 – Dados de entrada para a animação.	79
Figura 67 – Trecho do <i>script</i>	80

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Força
k, k_1, k_2	Rigidez
x, u	Deslocamento
$\dot{x}, \dot{u}$	Velocidade relativa de um amortecedor
c	Coeficiente de amortecimento
F_R	Limite de resistência de um modelo plástico
τ	Tensão de cisalhamento
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação de cisalhamento
t	Tempo
σ, σ_0	Tensão normal
$\varepsilon, \varepsilon_0$	Deformação normal
$\ddot{u}$	Aceleração
F_e	Força externa resultante aplicada sobre um nó
F_i	Força interna resultante aplicada sobre um nó
F_e^c	Força conservativa externa
F_i^c	Força conservativa interna
F_e^{nc}	Força não conservativa externa
F_i^{nc}	Força não conservativa interna
F_c	$= F_e^c$
F_{nc}	$= F_e^{nc} - F_i^{nc}$
F_{int}	$= F_i^c$
F_I	$= m\ddot{u}$
δu	Deslocamento virtual
W_{int}	Trabalho real das forças conservativas internas
ΔU	Variação real da energia de deformação
W_c	Trabalho real das forças externas conservativas
ΔV	Variação real da energia potencial do sistema

K	Energia cinética
Π	Energia Potencial Total
X_0	Posição inicial
X	Posição
s	Instante de tempo
$\mathbf{M}$	Matriz de massa (lumped)
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
i	Grau de liberdade
k	Iteração
j	Passo

1

INTRODUÇÃO

1.1. Generalidades

Em estruturas sujeitas a ações dinâmicas é comum o emprego de dispositivos que amortecem a resposta estrutural, isto é, que dissipam energia. Esses dispositivos podem ser encontrados em edificações resistentes a sismos e, como mostra a Figura 1, também em pontes.



Figura 1 – Amortecedores utilizados em uma ponte (extraído de <https://www.facebook.com/SiteAEngenharia/photos/pcb.1014279722002872/1014278818669629/?type=3&theater>).

Nos setores automobilístico e aeronáutico os elementos dissipadores de energia, usualmente associados a molas, podem também ser encontrados em mecanismos. Segundo Norton (2010), mecanismo é um sistema de elementos (rígidos ou deformáveis) unidos e organizados para transmitir movimento de uma maneira predeterminada. Um mecanismo pode ser entendido como uma estrutura hipostática que realiza um movimento de acordo com um padrão desejado. A Figura 2 mostra o mecanismo do trem de pouso de um avião.



Figura 2 – Trem de pouso de um Airbus A350 (extraído de <https://br.depositphotos.com/117396764/stock-photo-airbus-a350-undercarriage.html>).

Nos dispositivos de amortecimento podem ainda ser utilizados materiais com comportamento viscoelástico, como mostra a Figura 3. O uso dessa tecnologia em estruturas de concreto armado, segundo pesquisadores, é mais atrativo do que o emprego de amortecedores de massa sincronizada, tendo em vista que estes ocupam vários pisos no topo de arranha-céus. Dessa forma, os projetistas podem distribuir os elementos viscoelásticos ao longo da altura da estrutura. De acordo com a Figura 3, esses dispositivos entram em serviço quando há movimento relativo de paredes e/ou pilares.

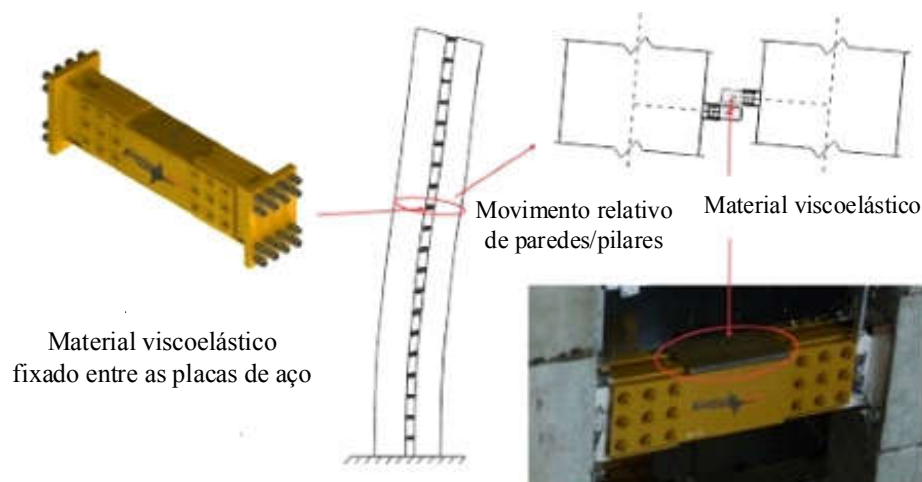


Figura 3 – Dispositivo com material viscoelástico utilizado em edifício (adaptado de <https://www.engenhariacivil.com/amortecimento-viscoelastico-estruturas-betao>).

Dentro desse contexto, constata-se que uma análise de estruturas/mecanismos considerando a presença de ligações viscoelásticas se faz necessária. Destaca-se que os componentes estruturais envolvidos nessa análise podem ser leves e flexíveis, o que pode resultar em grandes deslocamentos e rotações do corpo em questão. Diante disso, uma análise não linear do problema é mais indicada.

A literatura apresenta vários trabalhos relacionados à estruturas/mecanismos com ligações semirrígidas e com conexões viscoelásticas, tais como: Silva *et al.* (2018), Valipour e Bradford (2012), Attarnejad e Pirmoz (2014), Ambrósio e Veríssimo (2009), Flores (2004), John e George (2016) e Huang *et al.* (2015).

Diante da dificuldade de se obter soluções analíticas para esses casos, especialmente em corpos submetidos a forças dinâmicas, opta-se por utilizar métodos numéricos para encontrar respostas aproximadas para tais problemas. Dentre os métodos numéricos empregados atualmente, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) que será utilizado neste trabalho com algumas modificações.

1.2. Justificativa

A formulação a ser empregada considera, em vez dos deslocamentos nodais, as posições dos nós como incógnitas, sendo referida como Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF). A consideração de conexões viscoelásticas em mecanismos utilizando a FPMEF é de caráter inovador e, como visto anteriormente, é necessária para uma melhor descrição do comportamento do sistema.

1.3. Objetivos

Este trabalho propõe:

- aplicar a FPMEF para a análise de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas não lineares;
- implementar um código computacional para a análise estática de estruturas usando a FPMEF, empregando-se a metodologia consagrada na literatura inicialmente concebida nos trabalhos de Argyris (1965), Pian e Tong (1971) e Zienkiewicz (1971).

Além disso, para melhor visualização do comportamento de um mecanismo/estrutura, propôs-se a construção de um *script* que mostra o movimento descrito pelo corpo ao longo do tempo (animação). Detalhes desse *script* encontram-se no Apêndice A. Todos os códigos computacionais foram desenvolvidos no *software* MATLAB[®] aproveitando-se as rotinas em Fortran elaboradas por Greco (2004).

1.4. Organização do texto

O presente texto é composto por cinco capítulos principais, além do capítulo inicial (**Introdução**). No capítulo dois (**Fundamentação Teórica**) é apresentado os conceitos básicos para a construção das formulações a serem utilizadas posteriormente. No capítulo três (**Metodologia**) descreve-se os procedimentos e passos algébricos utilizados para se alcançar os objetivos referidos no item 1.3. No capítulo quatro (**Exemplos Numéricos**) são apresentados os resultados obtidos empregando-se a metodologia proposta e as comparações com resultados encontrados na literatura. Por fim, no capítulo cinco (**Conclusões e considerações finais**) é feita uma análise global do trabalho e dos resultados, bem como a sugestão de temas futuros de pesquisas na área tratada.

2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Comportamento viscoelástico

A evolução das variáveis tensão e deformação ao longo do tempo e a validade da Lei de Hooke são hipóteses adotadas pela teoria da elasticidade linear e amplamente empregadas na engenharia. Contudo, um projeto de estruturas de alto desempenho geralmente leva em conta um comportamento mecânico complexo dos materiais e/ou das ligações. Nesse caso, as soluções baseadas nas premissas clássicas citadas anteriormente não condizem com os resultados obtidos na prática.

Diante disso, busca-se adotar modelos reológicos¹ conjugados capazes de representar com maior fidelidade o comportamento real das estruturas. Esses modelos conjugados são obtidos através da associação em série e/ou em paralelo de dois ou mais modelos reológicos básicos. A Figura 4 mostra os modelos básicos.

Ressalta-se que, para um mesmo material, diferentes modelos conjugados podem ser construídos, a fim de se representar fenômenos distintos em determinadas circunstâncias.

¹ Segundo Filho *et al.* (2007), reologia é o ramo da Física que estuda as relações entre as tensões, deformações e o tempo.

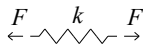
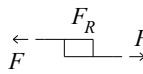
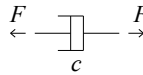
Modelo	Comportamento	Simbologia	Tipo de deformação	Comentário
Elástico	$F = k x$		Reversível e Imediata	Recupera instantaneamente a energia de deformação quando descarregado
Plástico	$F < F_R \Rightarrow x = 0$ $F = F_R \Rightarrow x = \text{livre}$		Irreversível e Imediata	Não recupera energia de deformação quando descarregado
Viscoso	$F = c \dot{x}$		Reversível e Não-imediate	Recupera lentamente a energia de deformação quando descarregado

Figura 4 - Modelos reológicos básicos (adaptado de Filho *et al.* (2007)).

O modelo elástico se refere ao surgimento de deslocamentos reversíveis e imediatos quando submetido por uma força. Entende-se por deslocamentos reversíveis aqueles que deixam de existir após um descarregamento estático. Os deslocamentos imediatos são os que surgem simultaneamente com as forças correspondentes e que permanecem constantes ao longo do tempo, se as forças a elas associadas também se mantiverem inalteradas.

O modelo plástico representa a ocorrência de deslocamentos imediatos não reversíveis, isto é, de deslocamentos imediatos que não se anulam totalmente no descarregamento. Na Figura 4, F_R equivale a um limite acima do qual os deslocamentos são livres e abaixo do qual não há deslocamento.

O modelo viscoso busca representar um fenômeno característico de líquidos. Sabe-se da Mecânica dos Fluidos que os líquidos reais são capazes de transmitir tensões de cisalhamento apenas em movimento e que, para fluidos Newtonianos, a tensão tangencial τ é proporcional à taxa de deformação de cisalhamento $\dot{\gamma}$:

$$\tau \propto \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

No caso de sólidos, segundo Filho *et al.* (2007), a viscosidade é entendida como o fenômeno do surgimento de deformações não imediatas. No modelo viscoso, os deslocamentos podem variar ao longo do tempo mesmo que as forças a elas associadas se mantêm constantes. Assim, a Eq. (2.1) é estendida para forças/tensões e deslocamentos/deformações normais ($F = c \dot{x}$), conforme mostra a Figura 4.

Neste trabalho será considerado nas ligações apenas o modelo conjugado viscoelástico de Kelvin-Voigt, formado pela associação em paralelo de uma mola com um amortecedor. De acordo com Findley *et al.* (1989), dentre os materiais com comportamento viscoelástico estão plásticos, madeira, fibras naturais e sintéticas, concreto e metais em altas temperaturas.

A Figura 5 mostra alguns fenômenos que podem ocorrer em modelos viscoelásticos. Em (a) observar-se uma deformação instantânea devido a uma tensão aplicada subitamente. Em (b) é evidenciado o fenômeno da fluência, isto é, o aumento lento e contínuo da deformação do material, de forma assintótica, quando sujeito a uma tensão constante. Em (c) tem-se a relaxação, ou seja, as tensões diminuem gradualmente quando há uma deformação constante. Os casos (d), (e) e (f) podem ser observados quando uma tensão é constante em um intervalo de tempo. O caso (d) representa uma deformação instantânea recuperada, o (e) uma deformação recuperada ao longo de um período e o (f) uma deformação permanente.

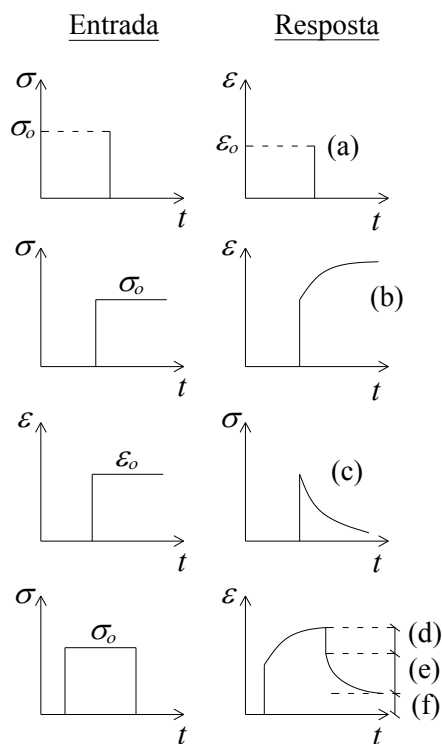


Figura 5 - Fenômenos comuns em vários materiais viscoelásticos (adaptado de Findley *et al.* (1989)).

A Figura 6 apresenta as respostas de alguns modelos viscoelásticos quando submetidos a uma força constante, a um deslocamento constante e a um aumento linear de deslocamento com o

tempo. O modelo reológico viscoelástico de Kelvin-Voigt que será abordado neste trabalho está indicado no item (d) da Figura 6

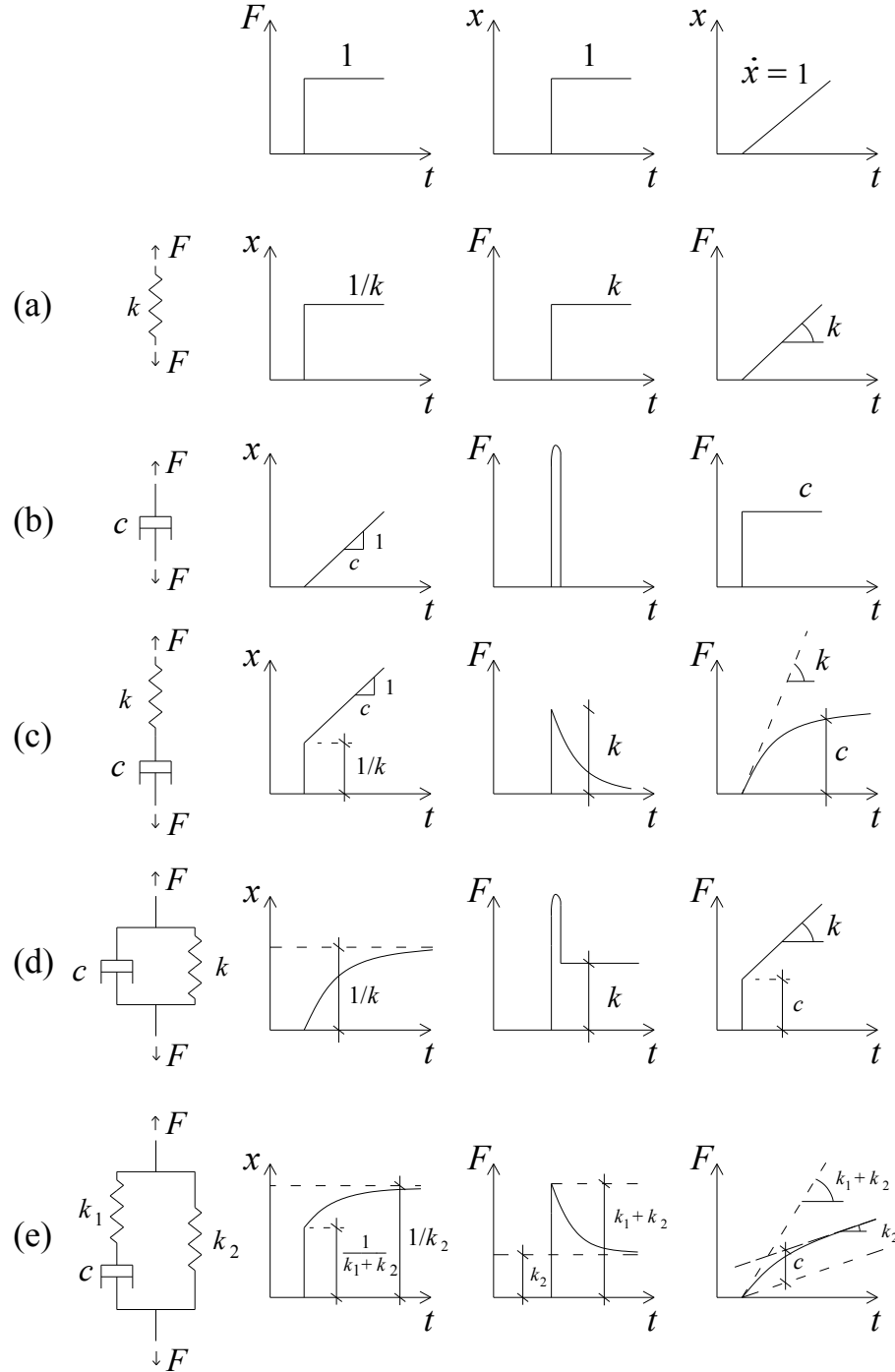


Figura 6 - Resposta de alguns tipos de modelos reológicos: (a) elástico; (b) viscoso; (c) Maxwell; (d) Kelvin-Voigt; (e) Zener (adaptado de Bažant e Cedolim (2010)).

Nota-se que nos casos (b) e (d), quando se submete o modelo a um deslocamento constante, a força tende ao infinito no instante que o deslocamento é aplicado. Além disso, observa-se que no modelo de Kelvin-Voigt o amortecedor não permite deslocamento no instante em que uma força súbita é aplicada. No modelo de Zener, também chamado de modelo padrão de sólido, o comportamento elástico instantâneo depende dos parâmetros k_1 e k_2 , sendo que a soma deles representa a rigidez do material. Nesse modelo, conforme mostra a Figura 6, k_1 determina o deslocamento final após um intervalo de tempo suficientemente grande.

2.2. Princípio dos Trabalhos Virtuais para o problema dinâmico

Em um sistema discreto, a equação de equilíbrio estático referente a um Grau de Liberdade (GL) de um nó, supondo um corpo deformável, pode ser expressa como:

$$F_e = F_i \quad (2.2)$$

em que F_e é a força externa resultante aplicada sobre o nó e F_i é a força interna que o corpo atua no nó. No problema dinâmico, a equação de equilíbrio pode ser escrita de acordo com o Princípio de d'Alembert:

$$F_e = F_i + m\ddot{u} \quad (2.3)$$

em que m é a massa pontual relativa ao GL em questão e $\ddot{u}$ é a aceleração dessa massa. Vale ressaltar que, quando $F_i = 0$ na Eq. (2.3), obtém-se a conhecida expressão da 2ª Lei de Newton para corpos rígidos. Na Eq. (2.2), a força externa resultante F_e pode ser decomposta em uma parcela de força conservativa externa F_e^c e em uma parcela de força não conservativa externa F_e^{nc} . Analogamente, a força interna resultante F_i pode ser decomposta em uma parcela conservativa F_i^c e em uma parcela não conservativa F_i^{nc} , ambas exercidas pelo próprio corpo. Assim, tem-se pela Eq. (2.3):

$$F_e = F_i + m\ddot{u} \Rightarrow (F_e^c + F_e^{nc}) = (F_i^c + F_i^{nc}) + m\ddot{u} \Rightarrow F_e^c + (F_e^{nc} - F_i^{nc}) - F_i^c - m\ddot{u} = 0 \Rightarrow$$

$F_c + F_{nc} - F_{int} - F_I = 0$

(2.4)

em que definiu-se $F_c = F_e^c$, $F_{nc} = F_e^{nc} - F_i^{nc}$, $F_{int} = F_i^c$ e $F_I = m\ddot{u}$. Nota-se que, por construção, F_{int} é definido como a parcela conservativa da força interna e, portanto, deve ser obtida utilizando-se as deformações elásticas do material (podendo este ser linear ou não linear). As forças dissipativas decorrentes de eventuais deformações inelásticas ou devidas ao amortecimento intrínseco da estrutura devem ser incluídas na parcela F_i^{nc} .

A Eq. (2.4) pode ser usada para encontrar a equação de movimento do sistema mostrado na Figura 7a.

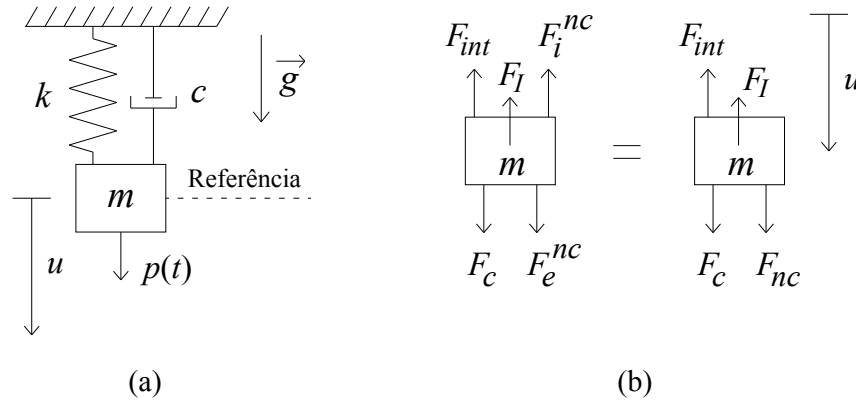


Figura 7 – (a) Sistema massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade. (b) Diagrama de corpo livre.

Assim, pelo diagrama de corpo livre da Figura 7b, tem-se:

$$F_c + (F_{nc}) - F_{int} - F_I = 0 \Rightarrow mg + [p(t) - c\dot{u}] - ku - m\ddot{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + F} \quad (2.5)$$

em que $F = mg$ é a força peso. Caso se desconsiderasse a gravidade, F seria entendida como uma força externa diretamente aplicada sobre o nó na direção do grau de liberdade em questão.

A partir da Eq. (2.4) pode-se chegar a uma forma alternativa de se expressar o equilíbrio. Seja a grandeza δu um deslocamento arbitrário, isto é, que pode assumir qualquer valor. Considera-se que essa grandeza é imaginária, ou seja, virtual. Isso posto, a condição de

equilíbrio alternativa é obtida multiplicando-se os membros da Eq. (2.4) por um deslocamento virtual δu :

$$\begin{aligned} (F_c + F_{nc} - F_{int} - F_I)\delta u = 0 \quad \delta u \Rightarrow F_c \delta u + F_{nc} \delta u - F_{int} \delta u - F_I \delta u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\delta W_c + \delta W_{nc} - \delta W_{int} - \delta W_I = 0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que δW_c é chamado de trabalho virtual de F_c na direção de δu e assim, de maneira análoga, defini-se δW_{nc} , δW_{int} e δW_I . Como a Eq. (2.4) é válida para qualquer tempo, o desenvolvimento na Eq. (2.6) pode ser interpretado como a imposição de um deslocamento virtual na direção do grau de liberdade em um instante de tempo fixo qualquer. Ressalte-se, então, que o deslocamento virtual não é uma função do tempo (Craig e Kurdila, 2006). Além disso, como o deslocamento virtual é imposto em um tempo fixo, as forças são constantes ao longo de δu .

A igualdade em destaque na Eq. (2.6) é a expressão matemática do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) para o problema dinâmico. Como nesse caso forneceu-se um deslocamento virtual, esse princípio também é chamado de Princípio dos Deslocamentos Virtuais.

Observa-se que o deslocamento virtual não precisa ser infinitesimal. Ele pode ser finito desde que as forças permaneçam constantes em módulo, direção e sentido durante δu . Assim, o PTV é aplicável tanto para deslocamentos virtuais finitos ou virtuais infinitesimais. Outra ponderação importante é que os deslocamentos virtuais não necessitam obrigatoriamente de ser cinematicamente compatíveis com as restrições do sistema. Não obstante, é conveniente que eles o sejam, pois, assim, apenas as forças que realizam trabalho virtual não nulo são incluídas na expressão do PTV (Chen e Lui, 1987).

É fundamental notar que, como mostrado anteriormente, a condição de equilíbrio dada pela Eq. (2.4) implica no PTV. Além disso, assumindo-se que o PTV é válido, conclui-se que o sistema está em equilíbrio. De fato, da Eq. (2.6) tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_c + \delta W_{nc} - \delta W_{int} - \delta W_I = 0 \Rightarrow \delta(F_c u) + \delta(F_{nc} u) - \delta(F_{int} u) - \delta(F_I u) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{(\delta F_c u + F_c \delta u)}_{=0} + \underbrace{(\delta F_{nc} u + F_{nc} \delta u)}_{=0} - \underbrace{(\delta F_{int} u + F_{int} \delta u)}_{=0} - \underbrace{(\delta F_I u + F_I \delta u)}_{=0} = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_c \delta u + F_{nc} \delta u - F_{int} \delta u - F_I \delta u = 0 \Rightarrow (F_c + F_{nc} - F_{int} - F_I) \delta u = 0 \quad (2.7)$$

Como δu é arbitrário, a Eq. (2.7) é genericamente satisfeita se:

$$F_c + F_{nc} - F_{int} - F_I = 0 \quad (2.8)$$

que é a mesma igualdade dada na Eq. (2.4). No desenvolvimento da Eq. (2.7) utilizou-se o fato de que as forças são constantes ao longo do deslocamento virtual, ou seja, os incrementos virtuais de força são iguais a zero. Adicionalmente, como o deslocamento u é suposto sempre na direção do grau de liberdade, o ângulo entre a força e o deslocamento será zero e o trabalho será simplesmente o produto da força pelo deslocamento.

A seguir, propõe-se determinar a equação de movimento do problema dado na Figura 7a utilizando-se o PTV, e tendo como base a Figura 8. Nesse caso, tem-se:

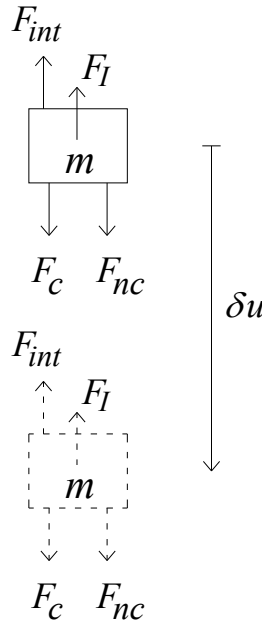


Figura 8 – Deslocamento virtual δu .

$$\begin{aligned} \delta W_c + \delta W_{nc} - \delta W_{int} - \delta W_I &= 0 \Rightarrow F_c \delta u + F_{nc} \delta u - F_{int} \delta u - F_I \delta u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow mg \delta u + [p(t) - c\dot{u}] \delta u - ku \delta u - m\ddot{u} \delta u &= 0 \Rightarrow \{mg + [p(t) - c\dot{u}] - ku - m\ddot{u}\} \delta u = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow mg + [p(t) - c\dot{u}] - ku - m\ddot{u} &= 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + F} \end{aligned} \quad (2.9)$$

que é a mesma igualdade encontrada na Eq. (2.5).

2.3. Princípio da Energia Potencial Total Estacionária

Além do PTV, existe outra maneira de se exprimir a condição de equilíbrio de um sistema. Da Resistência dos Materiais, sabe-se que o trabalho real das forças internas conservativas W_{int} é a própria variação real da energia de deformação ΔU do corpo:

$$W_{int} = \Delta U \quad (2.10)$$

Neste ponto, um comentário oportuno se faz necessário. Segundo Wylen *et al.* (1995), o trabalho, diferentemente da energia de deformação, é uma forma de energia em trânsito², isto é, ele se define apenas durante um estado inicial 1 e um estado final 2 de um sistema. Diante disso, pode-se utilizar notações alternativas que remetem a essa ideia de uma maneira mais direta. Sendo assim, as notações $W_{int,12}$, utilizada por Wylen *et al.* (1995), e ΔW_{int} , utilizada por Bažant e Cedolim (2010), por exemplo, enfatizam que o trabalho da força foi realizado durante a mudança entre dois estados. Ressalta-se, portanto, que ΔW_{int} não significa $W_{int,2} - W_{int,1}$. Isso posto, a Eq. (2.10) pode ser reescrita semelhantemente da seguinte forma:

$$\Delta W_{int} = \Delta U \quad (2.11)$$

Logo, em se tratando de grandezas virtuais, da Eq. (2.11) pode-se escrever:

$$\delta W_{int} = \delta U \quad (2.12)$$

em que δW_{int} é o trabalho virtual (e não variação do trabalho) das forças internas conservativas e δU é a variação (de fato) virtual da energia de deformação.

Adicionalmente, recorda-se da Física que o trabalho das forças externas conservativas W_c sobre um corpo se relaciona com a variação real da energia potencial do sistema ΔV de acordo com a Eq. (2.13).

² Outra energia em trânsito também muito comum na engenharia é o calor.

$$W_c = -\Delta V \quad (2.13)$$

Analogamente ao raciocínio feito para W_{int} anteriormente, pode-se afirmar que:

$$\delta W_c = -\delta V \quad (2.14)$$

em que δW_c é o trabalho virtual das forças externas conservativas e δV é a variação virtual da energia potencial do sistema.

A energia cinética K , por sua vez, é escrita do seguinte modo para um grau de liberdade:

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 \quad (2.15)$$

em que $\dot{u}$ é a velocidade da massa m . Determinando-se, agora, o incremento virtual da energia cinética δK devido a um deslocamento virtual δu , tem-se:

$$\delta K = \frac{1}{2} m 2 \dot{u} \frac{d\dot{u}}{du} \delta u = m \frac{du}{dt} \frac{d\dot{u}}{du} \delta u = m \ddot{u} \delta u = F_I \delta u = \delta W_I \quad (2.16)$$

Por fim, substituindo-se as Eqs. (2.12), (2.14) e (2.16) na Eq. (2.6) tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_c + \delta W_{nc} - \delta W_{int} - \delta W_I &= 0 \Rightarrow -\delta V + \delta W_{nc} - \delta U - \delta K = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta U + \delta V + \delta K - \delta W_{nc} &= 0 \Rightarrow \delta(U + V + K - W_{nc}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\delta \Pi = 0} & \end{aligned} \quad (2.17)$$

em que definiu-se $\Pi = U + V + K - W_{nc}$. A grandeza Π é chamada de energia potencial total ou funcional, pois transforma um campo vetorial (descrito por deslocamento, força, velocidade e aceleração) em um campo escalar (energia). A Eq. (2.17) é a forma alternativa procurada de se expressar a condição de equilíbrio. Ela é a expressão matemática do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE).

É indispensável destacar que a Eq. (2.4), o PTV e o PEPTE são equivalentes. Em outras palavras, se um dos três for válido os outros dois também o serão.

Agora, propõe-se novamente a determinação da equação de movimento do problema da Figura 7a utilizando-se, dessa vez, o PEPTE. Primeiramente calcula-se as parcelas energéticas do sistema separadamente:

$$U = \frac{1}{2}ku^2 \quad (2.18)$$

$$\Delta V = -W_c \Rightarrow V = -\int_0^u mg du = -mgu \quad (2.19)$$

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{u})^2 \quad (2.20)$$

$$\delta W_{nc} = F_{nc} \delta u \Rightarrow W_{nc} = \int_0^{u^*} [p(t) - c\dot{u}] du \quad (2.21)$$

em que na Eq. (2.19) a energia potencial inicial (igual a zero) é relativa à linha de referência adotada para o problema conforme mostra a Figura 7a e u^* é a distância total acumulada ao longo da qual agem as forças $p(t)$ e $c\dot{u}$. Assim, Π é escrito como:

$$\Pi = U + V + K - W_{nc} = \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \frac{1}{2}m(\dot{u})^2 - \int_0^{u^*} [p(t) - c\dot{u}] du \quad (2.22)$$

Aplicando-se o PEPTE tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = 0 &\Rightarrow \frac{d\Pi}{du} \delta u = 0 \Rightarrow \left\{ ku - mg + m\dot{u} \frac{d\dot{u}}{du} - \frac{d}{du} \left\{ \int_0^{u^*} [p(t) - c\dot{u}] du \right\} \right\} \delta u \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ ku - mg + m\dot{u} \frac{d\dot{u}}{du} - [p(t) - c\dot{u}] \right\} \delta u = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

O cálculo das derivadas na Eq. (2.23) merece uma observação relevante. Nota-se que não se utilizou a regra da cadeia na parcela referente ao amortecimento viscoso ($c\dot{u}$). Além disso, mesmo se a força externa fosse dependente do tempo e da posição explicitamente, ou seja, $p = p(t, u)$, ainda assim não se utilizaria a regra da cadeia nesse termo. Isso se justifica pelo fato de que as forças atuantes na direção do grau de liberdade são constantes ao longo de uma perturbação δu , como mencionado no item 2.2.

Assim, como δu é arbitrário, a Eq. (2.23) é genericamente satisfeita se:

$$\begin{aligned} ku - mg + m\ddot{u} \frac{du}{du} - [p(t) - c\dot{u}] &= 0 \Rightarrow ku - mg + m \frac{du}{dt} \frac{d\dot{u}}{du} - [p(t) - c\dot{u}] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ku - mg + m\ddot{u} - [p(t) - c\dot{u}] &= 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) + F} \end{aligned} \quad (2.24)$$

que é a mesma equação de movimento encontrada na Eq. (2.5).

Até aqui se considerou o deslocamento u como incógnita do problema. A fim de apresentar a Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos (FPMEF) posteriormente, desenvolve-se agora a expressão da energia potencial total para o problema da Figura 7a tomando-se como incógnita a posição do nó. A Figura 9 mostra a relação entre posição e deslocamento: $u = X - X_0$.

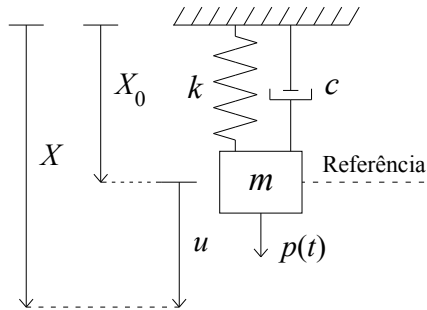


Figura 9 – Posição inicial (X_0), posição final (X) e deslocamento (u) para um sistema de referência fixo.

Como X_0 não varia no tempo, pode-se afirmar que $\dot{X} = \dot{u}$ e $\ddot{X} = \ddot{u}$. Utilizando-se essas relações e o fato de que $u = X - X_0 \Rightarrow du = dX$, tem-se pela Eq. (2.22):

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2}ku^2 - mgu + \frac{1}{2}m(\dot{u})^2 - \int_0^{u^*} [p(t) - c\dot{u}] du = \\
&= \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 - mg(X - X_0) + \frac{1}{2}m(\dot{X})^2 - \int_{X_0}^{X_0+u^*} [p(t) - c\dot{X}] dX
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Aplicando-se o PEPTE na Eq. (2.25) para se obter a equação de movimento e, ressaltando-se que as forças $c\dot{X}$ e $p(t)$ são constantes ao longo de δX , tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = 0 &\Rightarrow \frac{d\Pi}{dX} \delta X = 0 \Rightarrow \left\{ k(X - X_0) - mg + m\dot{X} \frac{d\dot{X}}{dX} - [p(t) - c\dot{X}] \right\} \delta X = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\{ k(X - X_0) - mg + m \frac{dX}{dt} \frac{d\dot{X}}{dX} - [p(t) - c\dot{X}] \right\} \delta X = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \boxed{m\ddot{X} + c\dot{X} + k(X - X_0) = p(t) + F}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

É interessante notar que a expressão de Π da Eq. (2.25) pode ser reescrita de forma mais sintética e, mesmo assim, conduzir à mesma equação diferencial de (2.26). Para isso, negligencia-se o termo $+mgX_0$ da Eq. (2.25) que não depende de X :

$$\Pi_* = \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 - mgX + \frac{1}{2}m(\dot{X})^2 - \int_{X_0}^{X_0+u^*} [p(t) - c\dot{X}] dX \tag{2.27}$$

Pode-se verificar, então, que a equação de movimento oriunda de Π_* será idêntica à Eq. (2.26). Finalmente, a Eq. (2.27) apresenta-se de uma forma mais geral como:

$$\boxed{\Pi_* = U(X) - mgX + \frac{1}{2}m(\dot{X})^2 - \int_{X_0}^{X_0+u^*} [p(t) - c\dot{X}] dX} \tag{2.28}$$

em que $U(X)$ é a energia de deformação do sistema escrita em função da posição X . Portanto, a equação de equilíbrio dinâmico (ou equação de movimento) que será utilizada na FPMEF é, de acordo com a Eq. (2.28):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_* = 0 &\Rightarrow \left\{ \frac{dU(X)}{dX} - mg + m\ddot{X} - [p(t) - c\dot{X}] \right\} \delta X = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{dU(X)}{dX} + m\ddot{X} + c\dot{X} - [p(t) + F] = 0} \end{aligned} \quad (2.29)$$

É fundamental destacar que caso se queira calcular a energia potencial total do sistema a Eq. (2.25) deve ser utilizada, e não a Eq. (2.27).

2.4. Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos

A FPMEF foi inicialmente concebida nos trabalhos de Coda (2003) e de Coda e Greco (2004). Nessa formulação, as equações de equilíbrio são construídas a partir do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária (PEPTE), considerando, em vez dos graus de liberdade de translação dos nós, as posições nodais como incógnitas.

Coda (2003) e Coda e Greco (2004) desenvolveram a formulação para análise estática de estruturas reticuladas considerando cinemática de Bernoulli-Euler nos elementos finitos, comportamento elástico linear do material e o referencial Lagrangeano total. Nos exemplos realizados nesses trabalhos, a formulação posicional mostrou-se precisa e apresentou satisfatória convergência quando comparada com resultados de soluções analíticas e numéricas presentes na literatura. Destaca-se que a FPMEF é intrinsecamente não linear geométrica.

Greco (2004) e Greco e Coda (2006) estenderam a formulação para o problema dinâmico com amortecimento viscoso em estruturas reticuladas e mecanismos multicorpos, utilizando equações de integração temporal de Newmark. Em Greco (2004) são considerados problemas de contato/impacto entre estruturas e entre estruturas e anteparos rígidos. Nessa tese também são considerados efeitos elastoplásticos no material.

Em relação ao tipo de referencial adotado, vale ressaltar que, na análise dinâmica, técnicas que utilizam de sistemas de coordenadas intermediários que giram, como a corrotacional, dependem de referenciais não inerciais. Portanto, surgem pseudo-forças referentes a não uniformidade da velocidade de rotação do referencial, à aceleração centrífuga e à aceleração de Coriolis. Desse modo, os termos da matriz de massa acabam se tornando não lineares o que

dificulta a análise, em especial no que diz respeito à integração temporal (Ibrahimbegović *et al.*, 2003; Mäkinen, 2007). Isso não ocorre na formulação lagrangeana total, pois suas variáveis são todas descritas em relação a um único referencial, que é, portanto, inercial (Siqueira, 2016).

Marques (2006) ampliou o estudo de contato/impacto empregando elementos finitos bidimensionais. Nessa dissertação, o autor utiliza o algoritmo de Newmark com algumas modificações a fim de garantir sua estabilização.

Greco e Venturini (2006) aplicaram a FPMEF na análise de estabilidade de treliças tridimensionais. A identificação de pontos críticos é realizada de forma indireta através da análise de singularidade da matriz Hessiana. Segundo os autores, a formulação pode ser usada para analisar problemas com severo comportamento não linear geométrico, além de possibilitar estudos de pós-flambagem. Em Greco *et al.* (2006) o estudo de estabilidade de treliças é aprimorado devido à consideração de efeitos elastoplásticos no material.

Coda e Paccola (2007) utilizaram a formulação posicional na análise estática de placas com espessura constante, empregando elementos finitos isoparamétricos triangulares curvos. Em Coda e Paccola (2008) há a inclusão da variação da espessura na formulação e adota-se a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff.

Maciel (2008) e Maciel e Coda (2010) estenderam a formulação para a análise dinâmica de sólidos tridimensionais. Em Maciel (2008) há a abordagem de análises de pórticos planos com cinemática de Reissner e problemas de impacto de estruturas tridimensionais em anteparos rígidos. Nessa tese, o comportamento do material é considerado elástico.

Carrazedo (2009) e Carrazedo e Coda (2010) consideraram efeitos térmicos em impactos entre estruturas adotando a formulação posicional. Segundo os autores, a consideração desses efeitos é muito importante, pois além de se avaliar a transformação da energia mecânica em calor, pode-se considerar as mudanças das propriedades mecânicas do material ao longo da análise. Para previsão do impacto, foi utilizado a técnica do multiplicador de Lagrange associada à teoria potencial. Os resultados encontrados para a formulação proposta mostraram boa correlação com os fornecidos pela literatura.

Rigobello (2011) e Rigobello *et al.* (2014) aplicaram a FPMEF na análise estática termomecânica de estruturas de aço aporticadas. Os autores adotaram um modelo constitutivo tridimensional, de modo que o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes na verificação do critério 3D de plasticidade é considerado.

Reis (2012) implementou computacionalmente uma técnica a fim de incluir ligações semirrígidas elasto-plásticas na análise estática geometricamente não linear de pórticos planos. O autor considerou cinemática de Reissner e comportamento elasto-plástico multilinear para a ligação. O acoplamento numérico foi realizado através de uma formulação algébrica em que a matriz de rigidez e as forças internas das ligações semirrígidas são incorporadas na matriz e no vetor de forças internas da estrutura, respectivamente, em cada iteração do método de Newton-Raphson. O autor adicionou uma parcela devida à energia interna da mola na expressão da energia potencial total. Reis e Coda (2014) expandiram o trabalho de Reis (2012) incluindo efeitos elasto-plásticos nas barras. Conexões semirrígidas também foram consideradas no trabalho de Coda e Paccola (2014), em que o colapso progressivo e a análise dinâmica de pórticos planos foram abordados.

Em Lacerda (2014) diferentes medidas de deformação são adotadas para avaliar a resposta de treliças planas e tridimensionais usando a formulação posicional. Segundo esse trabalho, a formulação mostrou praticidade na implementação computacional e os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com os da literatura.

Oliveira (2012) e Oliveira e Greco (2015) empregaram a FPMEF na análise de problemas envolvendo massas móveis em cabos e vigas. Oliveira (2012) verifica as influências dos valores da massa e de sua velocidade no comportamento de cabos, bem como as influências da velocidade da massa, das condições de apoio e dos efeitos elasto-plásticos no comportamento de vigas sujeitas a massas móveis. Em Oliveira e Greco (2015), vigas laminadas são consideradas na análise. Essa configuração laminada permite considerar barras constituídas de materiais diferentes e com seções de geometria complexa, por exemplo.

Rabelo (2015) foi um dos pioneiros na inclusão de modelos reológicos em análises que utilizam a formulação posicional. Em sua dissertação, o autor trata do estudo do comportamento viscoelástico de fluência de materiais compósitos em treliças. Adotou-se o modelo reológico de Zener que é capaz de retratar o fenômeno da fluência através de uma

taxa de deformação temporal. Os resultados do código desenvolvido foram satisfatórios e condizentes com a teoria.

Becho *et al.* (2015) e Becho (2016) adotaram modelos reológicos para descrever o comportamento de fluência em pórticos planos. Segundo os autores, a formulação é capaz de representar a evolução dos deslocamentos ao longo do tempo, sob carregamento estático, de acordo com o esperado pela teoria da viscoelasticidade.

Siqueira (2016) e Siqueira e Coda (2016) analisaram estruturas e mecanismos planos contendo ligações deslizantes. Essas ligações foram introduzidas no sistema mecânico através do método dos multiplicadores de Lagrange. A formulação demonstrou versatilidade e precisão nas aplicações e, além disso, grandes deslocamentos e rotações foram corretamente modelados tanto em análises estáticas quanto dinâmicas.

Madeira e Coda (2016) realizaram um estudo de controle de vibrações utilizando um modelo reológico de Kelvin-Voigt. A introdução das massas dos dispositivos é feita por meio de multiplicadores de Lagrange que impõem o movimento da massa ao longo do elemento finito. Os autores ressaltam que a principal vantagem dessa formulação, quando comparada com as existentes na literatura, é a possibilidade de considerar modelos reológicos mais complexos sem a necessidade de resolver as equações diferenciais analiticamente.

Em Kzam (2016) um estudo aprofundado da instabilidade local e global de estruturas tridimensionais é realizado. O autor afirma que o uso do método do Newton-Raphson em conjunto com o algoritmo de Lanczos pode determinar com precisão significativa os valores das cargas limites das estruturas.

Cavalcante (2016) apresenta uma formulação termodinamicamente consistente para analisar problemas dinâmicos em treliças com comportamento elástico e/ou plástico. O trabalho também abrange problemas de impacto considerando efeitos térmicos, empregando algoritmos de integração temporal alternativos ao clássico Método de Newmark.

Silva (2017) estende o estudo de Cavalcante (2016) para o caso de pórticos planos com cinemática de Reissner. Nesse trabalho, a autora conclui que o acoplamento termomecânico

tem grande influência na flexibilidade das estruturas analisadas, sendo intensificada em proporção com a temperatura de referência.

Sanches e Coda (2017) apresentam uma metodologia de análise dinâmica de mecanismos multicorpos planos que inclui colapso progressivo. Os autores adotam a cinemática de Timoshenko e, a fim de permitir a ruptura das barras durante a análise, empregam os multiplicadores de Lagrange na montagem dos elementos finitos.

Avancini (2018) aplica a FPMEF e o Método de Partículas em problemas de interação fluido-estrutura bidimensionais. Nesse trabalho a metodologia proposta foi estudar o escoamento incompressível do fluido em descrição Lagrangiana, utilizando as posições e pressões como variáveis principais, em vez de velocidades e pressões tradicionalmente empregadas. Segundo o autor, a viabilidade da análise Lagrangeana na Mecânica dos Fluidos depende da preservação da qualidade da malha de elementos finitos, e isso foi obtido através da utilização do Método dos Elementos Finitos de Partículas, combinado à técnica de triangulação de Delaunay e o método *alpha shape* para o reconhecimento do contorno.

A seguir, apresenta-se a formulação posicional para os problemas estático e dinâmico. Os detalhes matemáticos podem ser encontrados em Greco (2004).

▪ Problema Estático

A equação de equilíbrio para o problema estático, de acordo com a Eq. (2.29), pode ser escrita como:

$$\frac{dU(X)}{dX} - F = 0 \quad (2.30)$$

em que F neste trabalho denota força externa diretamente aplicada sobre o nó. Nota-se, então, que é necessário calcular a energia de deformação em função da posição. Para isso é adotado o Elemento Finito (EF) de barra de 2 nós conforme mostra a Figura 10.

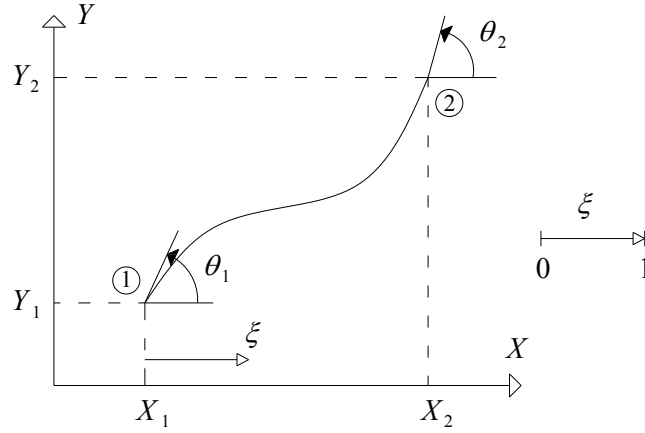


Figura 10 – Elemento finito deformado.

As incógnitas do nó 1 são posição no eixo horizontal (X_1), posição no eixo vertical (Y_1) e giro (θ_1). De maneira análoga, define-se as incógnitas para o nó 2. A energia de deformação é dada por:

$$U = \int_{\mathcal{V}} \int_{\varepsilon} \sigma d\varepsilon d\Psi = \int_{\mathcal{V}} \int_{\varepsilon} E \varepsilon d\varepsilon d\Psi = \frac{E}{2} \int_{\mathcal{V}} \varepsilon^2 d\Psi \quad (2.31)$$

em que considerou-se o material Hookeano. Como o referencial é Lagrangeano total, a integral da Eq. (2.31) é realizada no volume inicial $\mathcal{V}$ do EF. A deformação é escrita com base na cinemática de Bernoulli-Euler e com base na seguinte medida objetiva³:

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (2.32)$$

em que ds é o comprimento de uma fibra do eixo médio do EF após a deformação e ds_0 representa o comprimento dessa fibra na configuração original. Considera-se que na posição de referência todos os elementos finitos são retos.

Utilizando-se a variável adimensional ξ da Figura 10, escreve-se $X = f(\xi)$ e $Y = f(\xi)$ para a configuração deformada, adotando-se um polinômio cúbico entre ξ e Y :

³ Medida de deformação objetiva é aquela que fornece valor nulo para movimentos de corpo rígido.

$$X = X_1 + l_X \xi \quad (2.33)$$

$$Y = c\xi^3 + d\xi^2 + e\xi + f \quad (2.34)$$

em que definiu-se:

$$l_X = X_2 - X_1 \quad (2.35)$$

$$l_Y = Y_2 - Y_1 \quad (2.36)$$

$$c = (\tan\theta_1 + \tan\theta_2)l_X - 2l_Y \quad (2.37)$$

$$d = 3l_Y - (2\tan\theta_1 + \tan\theta_2)l_X \quad (2.38)$$

$$e = l_X \tan\theta_1 \quad (2.39)$$

$$f = Y_1 \quad (2.40)$$

Para a configuração indeformada tem-se:

$$X^0 = X_1^0 + l_X^0 \xi \quad (2.41)$$

$$Y^0 = Y_1^0 + l_Y^0 \xi \quad (2.42)$$

tendo em vista que o EF inicialmente é reto. Nota-se que:

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\xi}\right)^2} \quad (2.43)$$

e de maneira análoga defini-se para ds_0 , dX^0 e dY^0 . Assim, pode-se substituir ds e ds_0 na Eq. (2.32) e obter a deformação do eixo médio em função das incógnitas dos nós e da variável adimensional ξ :

$$\varepsilon_{\text{méd}} = \frac{1}{l_0} \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - 1 \quad (2.44)$$

em que l é o comprimento do EF na configuração deformada e l_0 na configuração indeformada. A fim de se ter a deformação em qualquer fibra localizada a uma distância y perpendicular ao eixo neutro, tem-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{méd}} - \chi y \quad (2.45)$$

em que χ é a curvatura de um comprimento ds . A curvatura exata é dada por:

$$\chi = \frac{\frac{dX}{d\xi} \frac{d^2Y}{d\xi^2} - \frac{d^2X}{d\xi^2} \frac{dY}{d\xi}}{\left[\sqrt{\left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\xi}\right)^2} \right]^3} \quad (2.46)$$

Calculando-se as derivadas da Eq. (2.40) utilizando-se as Eqs. (2.33) e (2.34) e substituindo-se χ na Eq. (2.45) tem-se:

$$\varepsilon = \frac{1}{l_0} \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - 1 - \frac{l_x(6c\xi + 2d)}{\left[(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2 \right]^{3/2}} y \quad (2.47)$$

Assim, é possível realizar a integral da Eq. (2.31) utilizando a expressão da Eq. (2.47). Neste trabalho fez-se essa integral através da quadratura de Gauss-Legendre utilizando-se dois pontos de Gauss. Após o cálculo da energia de deformação em função das incógnitas do problema (para um EF serão 6 variáveis), realiza-se a derivação em relação a um grau de liberdade e obtêm-se a equação de equilíbrio dada pela Eq. (2.30). Essa equação pode, então, ser escrita para um grau de liberdade i da seguinte forma:

$$l_0 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial X_i} d\xi - F_i = g(X_i) = 0 \quad (2.48)$$

em que u é a densidade de energia de deformação e definiu-se:

$$g(X_i) = l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi - F_i \quad (2.49)$$

Nota-se que a solução do problema é a raiz da função resíduo g e, como g é não linear, utilizou-se o Método de Newton-Raphson para solucioná-lo. Assim, expandindo-se g em polinômio de Taylor até o termo de primeira ordem e empregando-se a notação vetorial tem-se, para um EF:

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \cong \mathbf{0} \quad (2.50)$$

Em que $\mathbf{X}_0$ é o vetor da posição inicial dos nós do EF, $\Delta \mathbf{X}$ é o termo incógnito da equação e $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)$, chamada de Matriz Hessiana, é expressa por:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{g}_{,k}(\mathbf{X}_0) = l_0 \int_0^1 u_{,ik} d\xi \Big|_{\mathbf{X}_0} \quad (2.51)$$

As derivadas $u_{,i}$ e $u_{,ik}$ podem ser encontradas em Greco (2004). Através do Método da Rigidez Direta monta-se o vetor resíduo (função g) e a matriz Hessiana para todo o modelo. O critério de parada considerado para o processo incremental-iterativo foi:

$$\|\Delta \mathbf{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N [(\Delta \mathbf{X})_i]^2} \leq \text{Tol} \quad (2.52)$$

em que N é o número total de graus de liberdade do modelo. O vetor $\Delta \mathbf{X}$ é obtido por:

$$\Delta \mathbf{X} = -[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \quad (2.53)$$

A atualização da posição é dada por:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X} \quad (2.54)$$

▪ Problema Dinâmico

De acordo com a Eq. (2.29), a equação de equilíbrio dinâmico para um grau de liberdade i é dada por:

$$\frac{\partial U(X_i)}{\partial X_i} + m_i \ddot{X}_i + c_i \dot{X}_i - [p_i(t) + F_i] = 0 \quad (2.55)$$

Para o problema dinâmico, considerou-se neste trabalho apenas a aplicação de forças variáveis com o tempo sobre os nós, e negligenciou-se a presença da gravidade. Então, da Eq. (2.55) tem-se:

$$\frac{\partial U(X_i)}{\partial X_i} + m_i \ddot{X}_i + c_i \dot{X}_i - p_i(t) = g(X_i) = 0 \quad (2.56)$$

em que, de maneira análoga ao problema estático, definiu-se:

$$g(X_i) = l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi + m_i \ddot{X}_i + c_i \dot{X}_i - p_i(t) \quad (2.57)$$

tendo em vista que o cálculo da energia de deformação segue o mesmo procedimento do problema estático.

Para integrar a Eq. (2.56) no tempo utiliza-se o Método implícito de Newmark cuja ideia básica é supor a variação da aceleração conhecida durante um intervalo de tempo Δt . Dessa forma, as seguintes equações são obtidas, de acordo com Greco (2004):

$$X_i|_{s+1} = X_i|_s + \Delta t \dot{X}_i|_s + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_i|_s + \beta \ddot{X}_i|_{s+1} \right] \quad (2.58)$$

$$\dot{X}_i|_{s+1} = \dot{X}_i|_s + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_i|_s + \gamma\Delta t\ddot{X}_i|_{s+1} \quad (2.59)$$

em que s é um instante de tempo atual e, considerando-se $\ddot{X}_i$ constante tem-se $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$ e para $\ddot{X}_i$ linear tem-se $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$. Escrevendo-se a Eq. (2.57) em um instante posterior $s + 1$ e utilizando-se as Eqs. (2.58) e (2.59) tem-se:

$$\begin{aligned} g(X_i|_{s+1}) &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi \Big|_{s+1} + m_i \ddot{X}_i|_{s+1} + c_i \dot{X}_i|_{s+1} - p_i|_{s+1} \\ &= l_0 \int_0^1 u_{,i} d\xi \Big|_{s+1} + m_i \left[\frac{X_i|_{s+1}}{\beta(\Delta t)^2} - T_i|_s \right] + c_i \left[R_i|_s + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} X_i|_{s+1} - \gamma\Delta t T_i|_s \right] - p_i|_{s+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

em que:

$$T_i|_s = \frac{X_i|_s}{\beta(\Delta t)^2} + \frac{\dot{X}_i|_s}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_i|_s \quad (2.61)$$

$$R_i|_s = \dot{X}_i|_s + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_i|_s \quad (2.62)$$

Da mesma forma do problema estático, utiliza-se o Método de Newton-Raphson para encontrar a raiz da função g . Empregando-se a notação vetorial para um EF, tem-se da Eq. (2.60):

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}|_{s+1}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) \Delta \mathbf{X} \cong \mathbf{0} \quad (2.63)$$

em que $\mathbf{X}_0|_{s+1}$ é o vetor da posição inicial dos nós do EF no instante posterior $s + 1$, $\Delta \mathbf{X}$ é a incógnita da equação e $\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1})$ é a matriz Hessiana para o problema dinâmico, dada por:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) = \mathbf{g}_{,k}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) = \int_0^1 u_{,ik} d\xi \Big|_{\mathbf{X}_0|_{s+1}} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{C} \quad (2.64)$$

em que:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho A l_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

sendo ρ a massa específica do material e A a área da seção transversal. Além disso, supôs-se o amortecimento proporcional à massa:

$$\mathbf{C} = 2 c_m \mathbf{M} \quad (2.66)$$

em que c_m é o coeficiente de amortecimento adotado. Uma vez calculados o vetor resíduo e a matriz Hessiana para cada EF, monta-se o vetor resíduo e matriz Hessiana para todo o sistema. O critério de parada considerado aqui é o mesmo do problema estático. O termo incógnito é dado por:

$$\Delta \mathbf{X} = -[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) \quad (2.67)$$

A posição é atualizada como:

$$\mathbf{X}_1|_{s+1} = \mathbf{X}_0|_{s+1} + \Delta \mathbf{X} \quad (2.68)$$

2.5. Metodologias para solução do processo incremental-iterativo

▪ Abordagens utilizadas em Greco (2004)

Para a análise estática, Greco (2004) concebeu duas formas de solução. A primeira é admitir as posições como incógnitas e incrementar-se as forças externas, conforme mostra o procedimento da Figura 11. O índice j indica o passo e o índice k indica a iteração. Na prática, o contador de iterações é zerado a cada passo por conveniência. Destaca-se que o vetor $\Delta \mathbf{F}$ é constante ao longo de toda a análise.

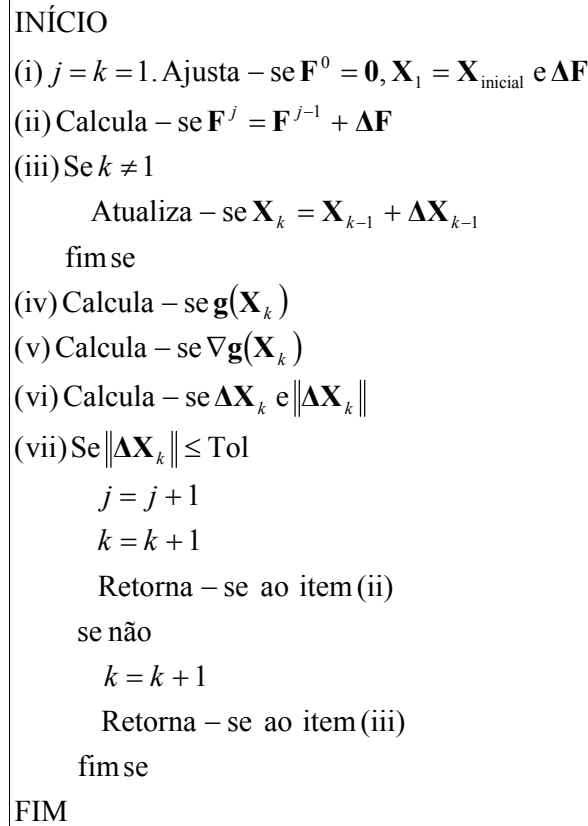


Figura 11 – Algoritmo para análise estática utilizado por Greco (2004) adotando-se controle de força.

A segunda forma de solução é admitir as forças como incógnitas e incrementar-se as posições, como mostra a Figura 12. O vetor $\Delta \mathbf{X}$ é definido pelo usuário e o vetor de forças externas ($\mathbf{F}$), referente a todo o modelo, é obtido através do vetor de forças internas ($\mathbf{F}_{\text{int}}$):

$$\mathbf{F} = \frac{dU}{d\mathbf{X}} = \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (2.69)$$

Depois desse procedimento, o vetor de forças externas é zerado para a continuidade da análise em um novo passo j .

Nota-se que dada uma posição deslocada da estrutura, existirá apenas um único vetor de forças externas nodais que satisfaz o equilíbrio. No entanto, a unicidade do carregamento nodal externo não garante unicidade das ações sobre o domínio dos elementos finitos.

É interessante notar que o vetor $\Delta \mathbf{X}$ a ser fornecido pelo usuário deve ser compatível com a estrutura e com o carregamento externo, o que requer uma análise qualitativa prévia do problema mais aprofundada.

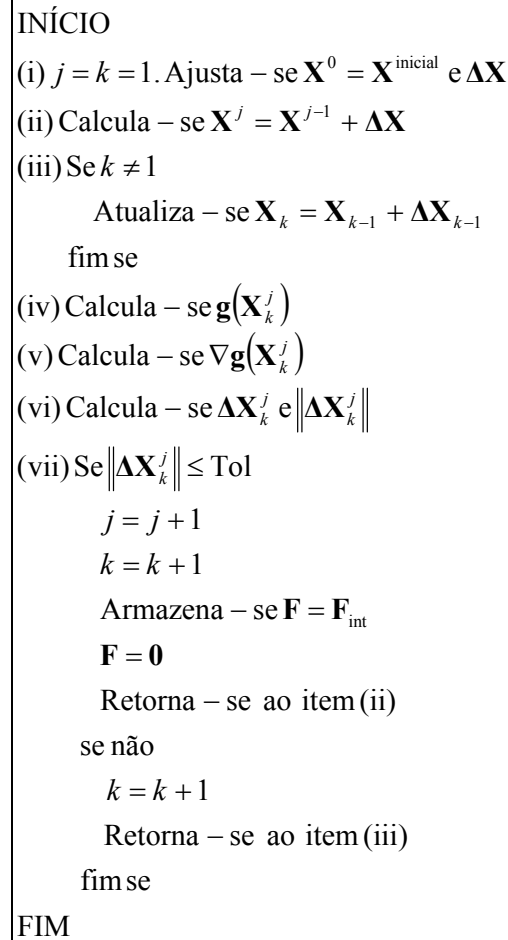


Figura 12 - Algoritmo para análise estática utilizado por Greco (2004) adotando-se controle de deslocamento.

▪ Abordagem clássica

Como aponta Yang e Shieh (1990), a metodologia a seguir foi inicialmente idealizada nos trabalhos de Argyris (1965), Pian e Tong (1971) e Zienkiewicz (1971). Essa metodologia se apresenta na seguinte equação de equilíbrio incremental, no âmbito do MEF formulado em deslocamentos (Fuina, 2014):

$$\mathbf{K}_{k-1}^j \delta \mathbf{U}_k^j = \delta \lambda_k^j \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{k-1}^j \quad (2.70)$$

em que

$\mathbf{K}_{k-1}^j$ é a matriz de rigidez tangente da iteração $k-1$ do passo j , função do campo de deslocamentos $\mathbf{U}_{k-1}^j$;

$\delta\mathbf{U}_k^j$ é o vetor incremental de deslocamentos da iteração k do passo j ;

$\delta\lambda_k^j$ é o incremento do fator de carga λ da iteração k do passo j ;

$\mathbf{P}$ é vetor de forças externas (constante durante a análise);

$\mathbf{Q}_{k-1}^j$ é o vetor de forças residuais da iteração $k-1$ do passo j .

Como $\delta\mathbf{U}_k^j$ é a incógnita da equação, pode-se reescrever a Eq. (2.70) na seguinte forma:

$$\delta\mathbf{U}_k^j = (\mathbf{K}_{k-1}^j)^{-1} (\delta\lambda_k^j \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{k-1}^j) = \delta\lambda_k^j (\mathbf{K}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{P} + (\mathbf{K}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^j = \delta\lambda_k^j \delta\mathbf{U}_k^{j,P} + \delta\mathbf{U}_k^{j,Q} \quad (2.71)$$

em que definiu-se:

$$\delta\mathbf{U}_k^{j,P} = (\mathbf{K}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{P} \quad (2.72)$$

$$\delta\mathbf{U}_k^{j,Q} = (\mathbf{K}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^j \quad (2.73)$$

A convergência é verificada da seguinte forma:

$$\frac{\|\mathbf{Q}_k\|}{\|\lambda_k \mathbf{P}\|} \leq \text{Tol} \quad \text{e/ou} \quad \frac{\|\delta\mathbf{U}_k\|}{\|\mathbf{U}_k\|} \leq \text{Tol} \quad (2.74)$$

em que o vetor de forças residuais é calculado como:

$$\mathbf{Q}_k = \lambda_k \mathbf{P} - (\mathbf{F}_{\text{int}})_k \quad (2.75)$$

sendo que no início de cada passo o vetor $\mathbf{Q}$ é zerado e $(\mathbf{F}_{\text{int}})_k$ é calculado com base no vetor $\mathbf{U}_k^j$. A atualização das variáveis é feita através de forma incremental:

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \delta\lambda_k \quad (2.76)$$

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_{k-1} + \delta\mathbf{U}_k \quad (2.77)$$

sendo que $\delta\mathbf{U}_k$ é obtido pela Eq. (2.71). A Figura 13 mostra o algoritmo genérico para esse método incremental-iterativo.

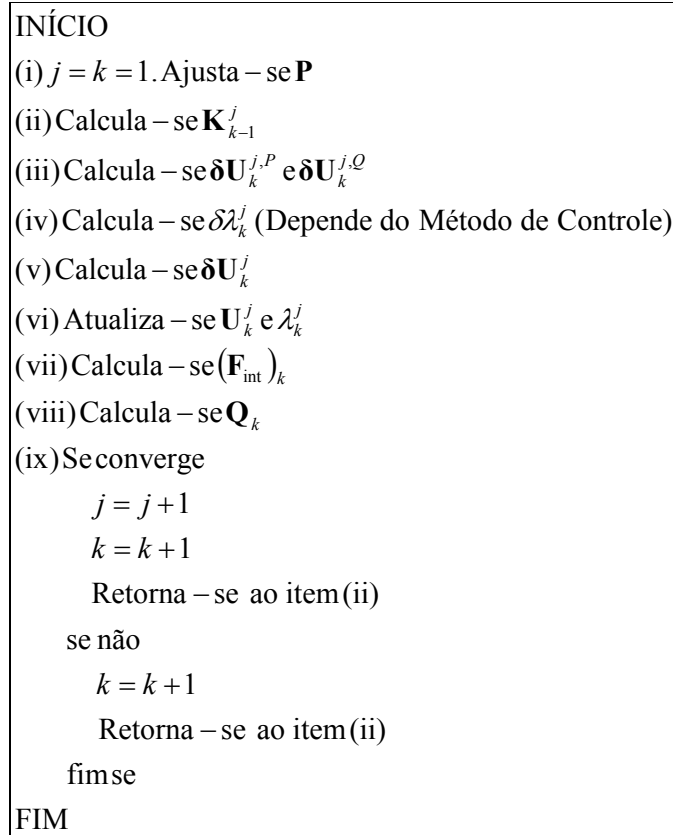


Figura 13 – Algoritmo para abordagem clássica.

Na etapa (iv) do algoritmo da Figura 13, o incremento do fator de carga $\delta\lambda_k$ é calculado de acordo com o Método de Controle escolhido. Os Métodos de Controle usuais são: controle de força, controle direto de deslocamento, controle de comprimento de arco, controle de deslocamento generalizado, controle por trabalho e controle de resíduo ortogonal. Neste trabalho será dado um foco apenas no controle de força e no controle direto de deslocamento.

O controle de força tem por ideia básica incrementar a força externa somente na primeira iteração de cada passo. Para as iterações seguintes o incremento do fator de carga é zerado, como mostra a Eq. (2.78):

$$\delta\lambda_k = \begin{cases} \text{Constante, para } k = 1 \\ 0 & \text{para } k > 1 \end{cases} \quad (2.78)$$

Como nesse Método supõe-se que a força é a variável independente e o deslocamento é a variável dependente, isto é, o deslocamento é função da força, ocorre falha no traçado da trajetória de equilíbrio em regiões que, na verdade, há um decréscimo de força e um acréscimo de deslocamento. Desse modo, o fenômeno *snap-through* acontece, como mostra a Figura 14.

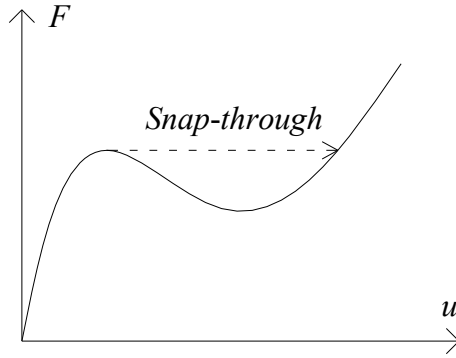


Figura 14 – Representação do *snap-through*.

O controle direto de deslocamento, por sua vez, adota a força como a variável dependente e o deslocamento como a variável independente. Assim, incrementa-se o deslocamento/rotação de um grau de liberdade i apenas na primeira iteração de cada passo, e nas iterações seguintes o incremento zerado, como indica a Eq. (2.79):

$$(\delta U_k)^i = \begin{cases} \text{Constante, para } k = 1 \\ 0 & \text{para } k > 1 \end{cases} \quad (2.79)$$

O incremento do fator de carga é obtido pela Eq. (2.71), escrita para um grau de liberdade i :

$$\delta\lambda_k^j = \frac{(\delta U_k)^i - (\delta U_k^{j,Q})^i}{(\delta U_k^{j,P})^i} \quad (2.80)$$

Como o vetor de forças residuais é nulo na primeira iteração, e nas demais iterações o incremento de deslocamento é nulo, então tem-se:

$$\delta\lambda_k^j = \begin{cases} \frac{(\delta U_k)^i}{(\delta U_k^{j,P})^i}, & \text{para } k = 1 \\ -\frac{(\delta U_k^{j,Q})^i}{(\delta U_k^{j,P})^i}, & \text{para } k > 1 \end{cases} \quad (2.81)$$

Nesse Método, em contraste ao controle de força, ocorre falha no traçado da trajetória de equilíbrio em regiões que, na verdade, há um acréscimo de força e um decréscimo de deslocamento. Diante disso, o fenômeno *snap-back* acontece, como mostra a Figura 15.

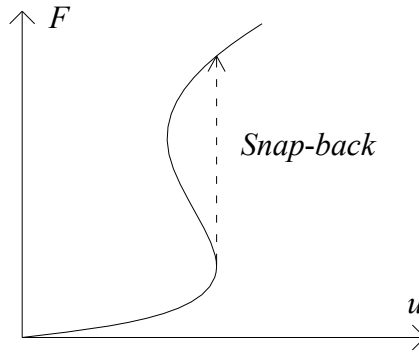


Figura 15 – Representação do *snap-back*.

Destaca-se que o método de controle direto de deslocamento requer como dado de entrada apenas o incremento de deslocamento de um grau de liberdade, em contrapartida à abordagem mostrada na Figura 12, que necessita de um vetor incremental de deslocamentos. Assim, a análise qualitativa prévia do comportamento da estrutura utilizando o método de controle de deslocamento torna-se mais simples.

3

METODOLOGIA

3.1. Inclusão das ligações viscoelásticas

O comportamento não linear de uma mola ou de um amortecedor foi modelado utilizando-se uma curva multilinear, como mostra a Figura 16.

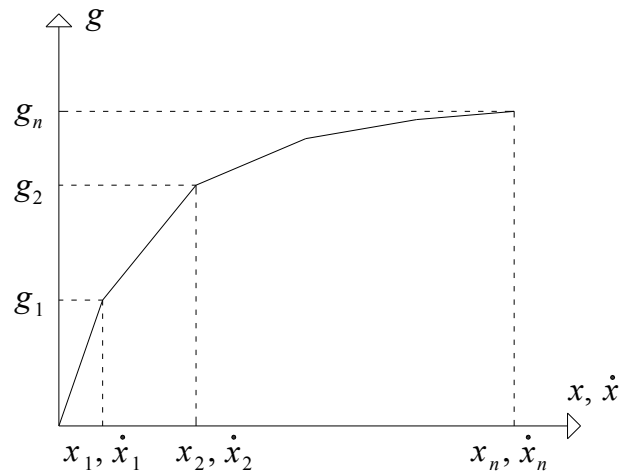


Figura 16 – Curva multilinear.

Essa abordagem, adotada também por Reis (2012), permite ao usuário inserir a curva que melhor lhe atenda, e apresenta maior estabilidade numérica do que a alternativa de se implementar uma função analítica para representar a não linearidade.

Como cada trecho da curva é linear, adotaram-se as seguintes relações para a mola e para o amortecedor, respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} g_i \\ g_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} g_i \\ g_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_i \\ \dot{X}_j \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Na Eq. (3.1) g_i e g_j representam as forças nodais que atuam, respectivamente, na direção dos graus de liberdade i e j , que estão conectados através de uma mola ou de um amortecedor. Destaca-se que i e j devem ser compatíveis, isto é, relativos a uma mesma direção: horizontal, vertical ou rotacional. O termo X_i é a incógnita na direção do grau de liberdade i e X_j é a incógnita na direção de j . O parâmetro k é a inclinação da reta corrente da curva da mola para um dado deslocamento $x = X_j - X_i$. Os termos $\dot{X}_i$ e $\dot{X}_j$ são as velocidades dos graus de liberdade i e j , respectivamente. Analogamente à k , o parâmetro c é a inclinação da reta corrente da curva do amortecedor para uma dada velocidade $\dot{x} = \dot{X}_j - \dot{X}_i$. Ressalta-se que X_i e X_j podem ser graus de liberdade translacionais ou rotacionais.

Assim, uma vez calculado o deslocamento relativo de uma mola ou a velocidade relativa de um amortecedor, verifica-se em qual trecho linear de cada lei de comportamento os dados se encontram e, através da Eq. (3.1), calculam-se as forças nodais e a matriz Hessiana correntes e os incorpora, respectivamente, no vetor de forças nodais e na matriz Hessiana da estrutura em cada grau de liberdade associado à ligação. Essa incorporação é feita dentro de cada iteração do método de Newton-Raphson. Além disso, caso o deslocamento ou velocidade calculado(a) coincida com um ponto pertencente a duas retas (Figura 16), adota-se a inclinação média das retas adjacentes ao ponto como a inclinação atual.

O procedimento adotado para incluir ligações viscoelásticas neste trabalho é consideravelmente mais simples do que o apresentado por Kassimali (1999) e Galvão *et al.* (2010), nos quais a matriz de rigidez do elemento finito é modificada para considerar as conexões.

É importante destacar que o amortecimento intrínseco da estrutura (Eq. (2.66)) permanece inalterado, uma vez que a massa não se altera. Porém, a matriz de amortecimento que será incluída na matriz Hessiana (Eq. (2.64)) poderá não ser mais constante ao longo da análise, tendo em vista a não linearidade de possíveis amortecedores presentes no modelo. Diante disso, a nova matriz Hessiana será:

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) = \mathbf{g}_{,k}(\mathbf{X}_0|_{s+1}) = \int_0^1 u_{,ik} d\xi \Big|_{\mathbf{X}_0|_{s+1}} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_0|_{s+1}} \quad (3.2)$$

evidenciando que $\mathbf{C}$ é calculado para uma velocidade $\dot{\mathbf{X}}_0|_{s+1}$.

Por fim, nos problemas estáticos, apenas a inclusão de molas é realizada, seguindo o procedimento anteriormente exposto.

▪ Implementação computacional

A estratégia para a implementação computacional das conexões neste trabalho é geral, ainda que apenas o modelo de Kelvin-Voigt seja adotado. O procedimento proposto permite a consideração de qualquer arranjo viscoelástico para modelar uma ligação pontual e, além disso, ele pode ser empregado seja qual for a formulação escolhida.

A motivação para a referida estratégia tem como base a técnica de conexão nodal apresentada por Greco (2004), como mostra a Figura 17.

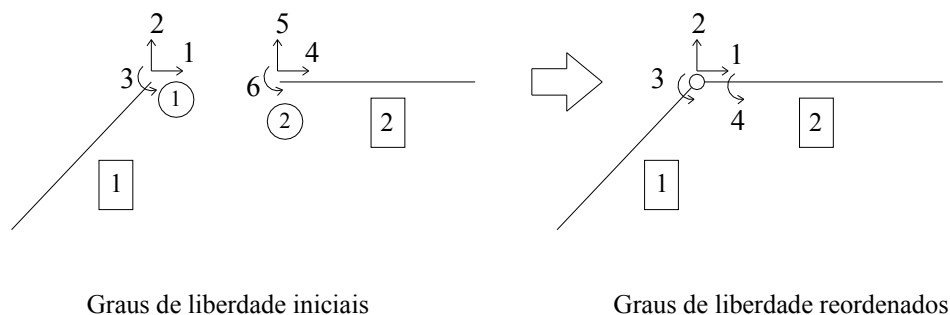


Figura 17 – Graus de liberdade iniciais e reordenados

Nessa técnica, os elementos finitos vizinhos podem possuir nós de extremidade em uma mesma posição geométrica, porém com numeração nodal distinta (Greco, 2004). Assim, a cinemática de um grau de liberdade de um nó pode ficar independente da do outro, como por exemplo, o giro, exemplificado pela Figura 17.

Desse modo, a criação de dois nós em um mesmo ponto já permite a inclusão do modelo reológico de Kelvin-Voigt, tendo em vista que nessa conexão necessita-se de apenas um grau de liberdade adicional (Figura 18) para representar o movimento relativo à esquerda e à direita de um nó. Na Figura 18 g_i é a força aplicada no nó i , g_j é a força aplicada no nó j , X_i é o

grau de liberdade do nó i em uma dada direção e X_j é o grau de liberdade do nó j na mesma direção.

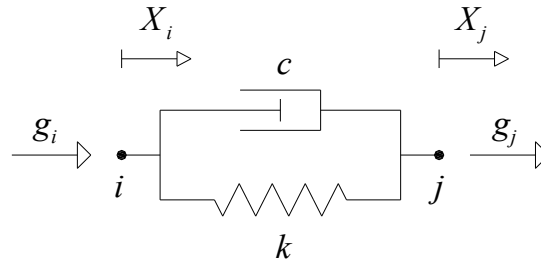


Figura 18 – Graus de liberdade para o modelo de Kelvin-Voigt.

No caso de um modelo de Maxwell ou de um modelo de Zener, para a correta descrição cinemática da ligação, deve-se adicionar mais um grau de liberdade. Dessa forma, o grau de liberdade extra é obtido criando-se mais um nó na mesma posição geométrica em que a conexão será introduzida, como mostra a Figura 19 e a Figura 20.

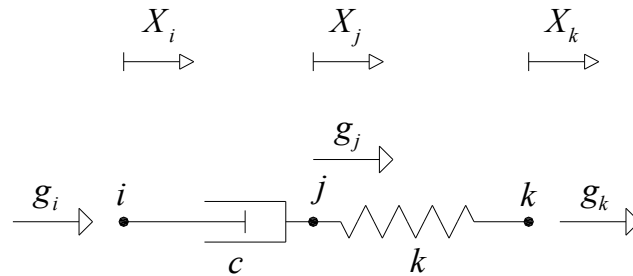


Figura 19 – Graus de liberdade para o modelo de Maxwell.

A força g_j na Figura 19 e na Figura 20 é aplicada no nó j . Sua representação está um pouco acima do nó apenas para melhor visualização.

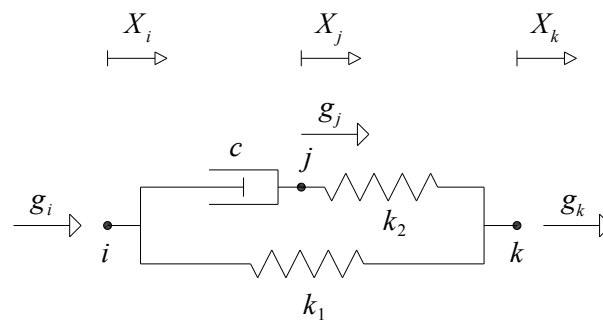


Figura 20 – Graus de liberdade para o modelo de Zener.

Assim, qualquer modelo viscoelástico pode ser incluído na análise de forma simples, bastando apenas que se insira um nó em uma mesma coordenada na malha, de acordo com o número de graus de liberdade adicionais requeridos. A Figura 21 e a Figura 22 mostram, por exemplo, modelos viscoelásticos mais gerais.

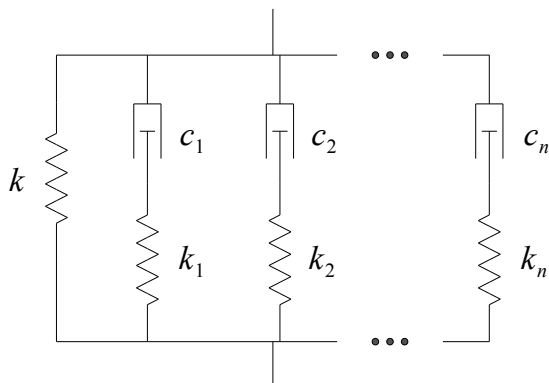


Figura 21 – Modelo generalizado de Maxwell.

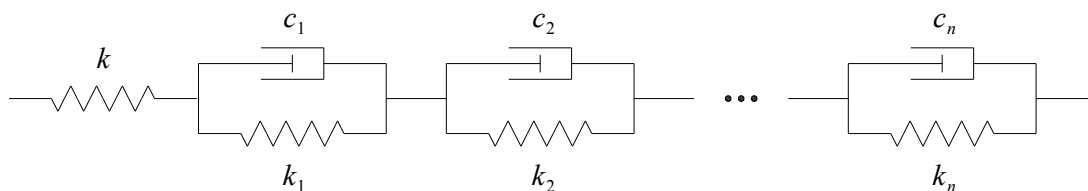


Figura 22 – Modelo generalizado de Kelvin-Voigt.

É importante destacar que o *script* implementado possibilita a consideração de movimento relativo na direção horizontal, vertical e rotacional em um mesmo ponto do modelo. Desse modo, é possível incluir em uma conexão pontual, por exemplo, o modelo de Zener na direção horizontal, o modelo de Maxwell na direção vertical e o modelo de Kelvin-Voigt na direção rotacional. Nesse exemplo citado deve-se criar três nós (j , q e k), como mostra a Figura 23.

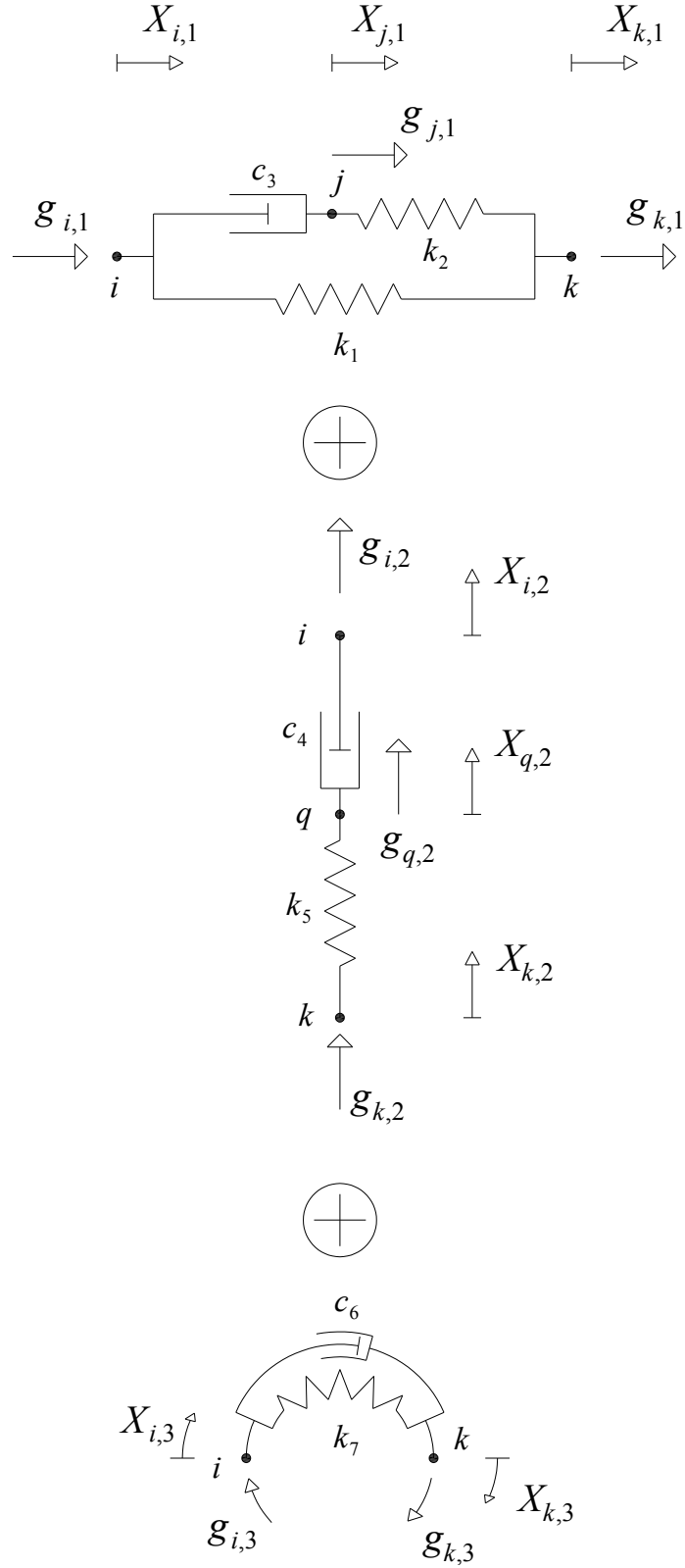


Figura 23 – Modelo Zener (horizontal), Modelo Maxwell (vertical) e Modelo Kelvin-Voigt (rotacional).

A Figura 24 mostra o arquivo de entrada para o exemplo da Figura 23.

```

:
Número de Leis
7

Lei 1
0,0 0,0
1,0 100,0
2,0 400,0
:
Lei 7
0,0 0,0
1,0 100,0
2,0 400,0

Nó inicial  Nó final  Lei_k(H)  Lei_c(H)  Lei_k(V)  Lei_c(V)  Lei_k(R)  Lei_c(R)
i j  -1   3  -1 -1 -1 -1
j k   2 -1 -1 -1 -1 -1
i k   1 -1 -1 -1  7  6
i q  -1 -1 -1  4 -1 -1
q k  -1 -1  5 -1 -1 -1
:

```

Figura 24 – Dados no arquivo de entrada.

O campo “Lei_k(H)” denota qual é a lei da mola disposta na direção horizontal, o campo “Lei_c(V)” denota qual é a lei do amortecedor disposto na direção vertical e assim define-se os demais campos. Além disso, o número -1 indica que não há mola/amortecedor na respectiva direção. Isso posto, entre o nó *i* e *j* na direção horizontal define-se um amortecedor de lei 3, entre o nó *j* e *k* na direção horizontal tem-se uma mola de lei 2 e entre *i* e *k* tem-se uma mola de lei 1 na direção horizontal e uma mola de lei 7 e um amortecedor de lei 6 na direção rotacional. Entre *i* e *q* há um amortecedor com lei 4 e entre *q* e *k* há uma mola com lei 5, ambos na direção vertical. Destaca-se que as leis 1 e 7 representam leis bilineares, como mostra a Figura 24.

3.2. Abordagem clássica para o método incremental-iterativo aplicada à FPMEF

Repete-se aqui a equação do problema estático (Eq. (2.50):

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} \cong \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{g}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{Q} \quad (3.3)$$

em que se definiu $\mathbf{H} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)$ como sendo a matriz Hessiana. Montando-se uma equação incremental da Eq. (3.3) de forma análoga à Eq. (2.70) tem-se:

$$\mathbf{H}_{k-1}^j \delta \mathbf{X}_k^j = -\delta \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)_k^j + \mathbf{Q}_{k-1}^j \quad (3.4)$$

Nota-se que:

$$\delta \mathbf{g}(\mathbf{X}_0)_k^j = \delta \left(\frac{dU}{d\mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}_0} - \mathbf{P} \right)_k^j = \delta (\mathbf{F}_{\text{int}} - \mathbf{P})_k^j = (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j - \delta \mathbf{P}_k^j = (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j - \delta \lambda_k^j \mathbf{P} \quad (3.5)$$

em que:

$$(\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j = [(\mathbf{F}_{\text{int}})_k^j - (\mathbf{F}_{\text{int}})_{k-1}^j] \quad (3.6)$$

No entanto, o termo $(\mathbf{F}_{\text{int}})_k^j$ da Eq. (3.6) ainda é desconhecido antes do cálculo de $\delta \mathbf{X}_k^j$. Diante disso, optou-se por realizar o cálculo do incremento do vetor de força interna utilizando $\mathbf{F}_{\text{int}}$ da última iteração ($k - 1$) e da penúltima iteração ($k - 2$):

$$(\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j = [(\mathbf{F}_{\text{int}})_{k-1}^j - (\mathbf{F}_{\text{int}})_{k-2}^j] \quad (3.7)$$

O procedimento adotado na Eq. (3.5) permite que se defina $\mathbf{P}$ e λ da mesma forma que a abordagem clássica. Desse modo, pode-se construir os métodos de controle para a FPMEF de maneira análoga ao que foi feito no item 2.5.

Assim, utilizando-se a Eq. (3.5) na Eq. (3.4) tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{k-1}^j \delta \mathbf{X}_k^j &= \delta \lambda_k^j \mathbf{P} - (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j + \mathbf{Q}_{k-1}^j \Rightarrow \delta \mathbf{X}_k^j = (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} [\delta \lambda_k^j \mathbf{P} - (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j + \mathbf{Q}_{k-1}^j] \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta \mathbf{X}_k^j &= \delta \lambda_k^j (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{P} - (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j + (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^j \Rightarrow \\
\Rightarrow \delta \mathbf{X}_k^j &= \delta \lambda_k^j \delta \mathbf{X}_k^{j,P} + \delta \mathbf{X}_k^{j,\delta \mathbf{F}_{\text{int}}} + \delta \mathbf{X}_k^{j,Q}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

em que se definiu:

$$\delta \mathbf{X}_k^{j,P} = (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{P} \tag{3.9}$$

$$\delta \mathbf{X}_k^{j,\delta \mathbf{F}_{\text{int}}} = -(\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} (\delta \mathbf{F}_{\text{int}})_k^j \tag{3.10}$$

$$\delta \mathbf{X}_k^{j,Q} = (\mathbf{H}_{k-1}^j)^{-1} \mathbf{Q}_{k-1}^j \tag{3.11}$$

A convergência adotada foi:

$$\frac{\|\mathbf{Q}_k\|}{\|\lambda_k \mathbf{P}\|} \leq \text{Tol} \tag{3.12}$$

O vetor $\mathbf{Q}_k$ é calculado da seguinte forma:

$$\mathbf{Q}_k = \lambda_k \mathbf{P} - (\mathbf{F}_{\text{int}})_k \tag{3.13}$$

sendo que no início de cada passo o vetor $\mathbf{Q}$ é zerado e $(\mathbf{F}_{\text{int}})_k$ é calculado com base no vetor $\mathbf{X}_k^j$. A atualização das variáveis é feita como:

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \delta \lambda_k \tag{3.14}$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \delta \mathbf{X}_k \tag{3.15}$$

em que $\delta \mathbf{X}_k$ é obtido pela Eq. (3.8). A Figura 25 mostra o algoritmo genérico para esse método incremental-iterativo.

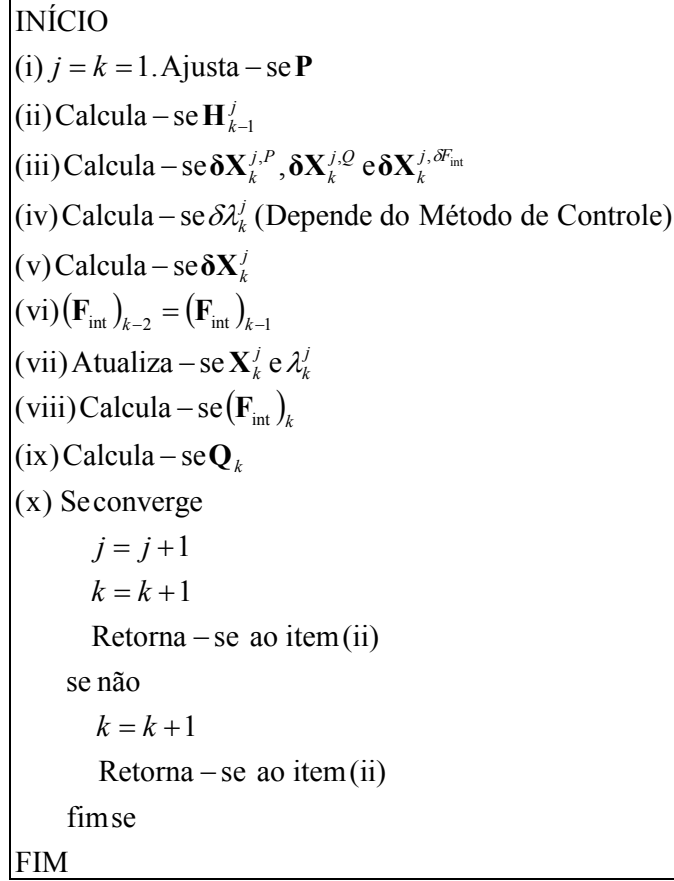


Figura 25 – Algoritmo proposto para análise estática utilizando a abordagem clássica.

O cálculo de $\delta \lambda_k^j$ para o método de controle de força é idêntico ao indicado pela Eq. (2.78). Já para o controle direto de deslocamento, a Eq. (2.79) requer o incremento de deslocamento. No entanto, o incremento de deslocamento é igual ao incremento da posição de um grau de liberdade i :

$$(U)^i = (X)^i - (X_0)^i \Rightarrow (\delta U)^i = (\delta X)^i \quad (3.16)$$

Diante disso, a entrada de dados pelo usuário não se altera e, então, pode-se obter o valor de $\delta \lambda_k^j$ da Eq. (3.8), escrita para um grau de liberdade i , da seguinte forma:

$$\delta\lambda_k^j = \frac{(\delta X_k^j)^i - (\delta X_k^{j, \delta F_{\text{int}}})^i - (\delta X_k^{j, Q})^i}{(\delta X_k^{j, P})^i} \quad (3.17)$$

Como $\mathbf{Q}$ é nulo na primeira iteração, e nas demais iterações o incremento de posição é nulo, então tem-se:

$$\delta\lambda_k^j = \begin{cases} \frac{(\delta X_k^j)^i - (\delta X_k^{j, \delta F_{\text{int}}})^i}{(\delta X_k^{j, P})^i}, & \text{para } k = 1 \\ -\frac{[(\delta X_k^{j, \delta F_{\text{int}}})^i + (\delta X_k^{j, Q})^i]}{(\delta X_k^{j, P})^i}, & \text{para } k > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Entretanto, o desenvolvimento anterior não conduziu a respostas satisfatórias para o controle por deslocamento devido à instabilidade numérica gerada pela presença dos termos relativos a $\delta\mathbf{F}_{\text{int}}$. Diante disso, optou-se por desprezar esses termos nas equações. Assim, a Eq. (3.8) se tornou:

$$\delta\mathbf{X}_k^j = \delta\lambda_k^j \delta\mathbf{X}_k^{j, P} + \delta\mathbf{X}_k^{j, Q} \quad (3.19)$$

e a Eq. (3.18) foi modificada para:

$$\delta\lambda_k^j = \begin{cases} \frac{(\delta X_k^j)^i}{(\delta X_k^{j, P})^i}, & \text{para } k = 1 \\ -\frac{(\delta X_k^{j, Q})^i}{(\delta X_k^{j, P})^i}, & \text{para } k > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

No próximo capítulo aplica-se as formulações/metodologias propostas. Os exemplos 1, 2 e 3 são referentes a problemas estáticos e os demais envolvem problemas dinâmicos.

4

EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1. Exemplo 1

Deseja-se obter a trajetória vertical de equilíbrio do ponto de aplicação da força P da treliça mostrada na Figura 26 pela solução analítica e pela FPMEF. As molas são consideradas lineares elásticas.

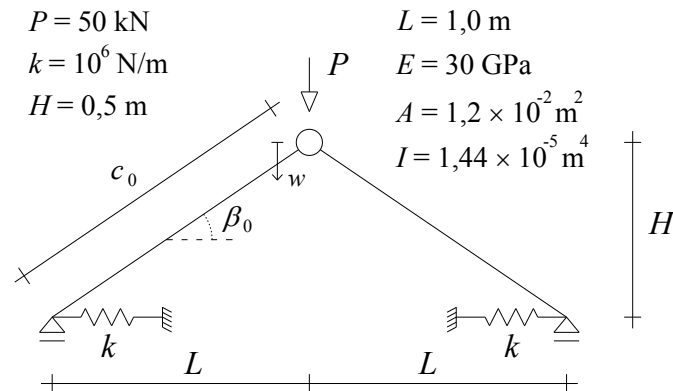


Figura 26 – Dados do exemplo 1.

A solução analítica será obtida fazendo-se o equilíbrio da estrutura na posição deslocada, como mostra a Figura 27a.

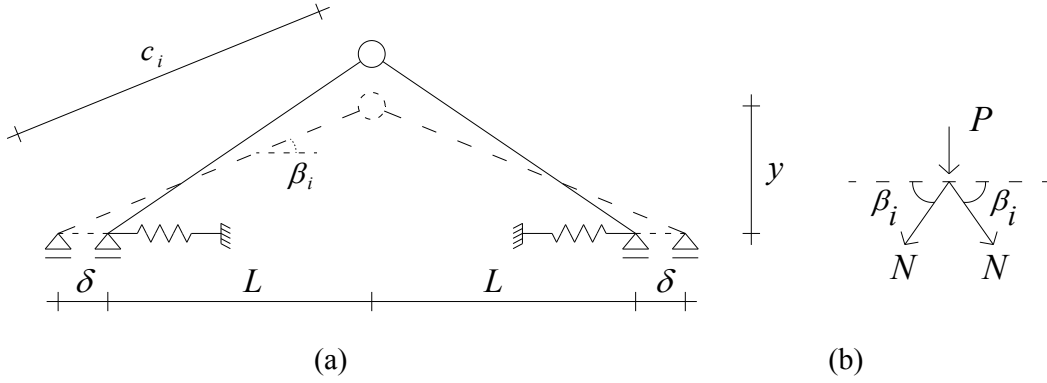


Figura 27 – Dados geométricos para solução analítica.

Convencionando-se a força normal N nas barras de tração, o equilíbrio do nó da rótula fornece (Figura 27b):

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow P + 2N \sin \beta_i = 0 \quad (4.1)$$

Considerando o material elástico linear tem-se:

$$\sigma = E \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \frac{\Delta u}{c_0} \Rightarrow N = EA \frac{\cos \beta_0}{L} \Delta u \quad (4.2)$$

em que A é área da seção transversal e Δu é diferença de comprimento ocorrida em cada barra. Realizando-se o equilíbrio de uma das barras de acordo com a Figura 28 tem-se:

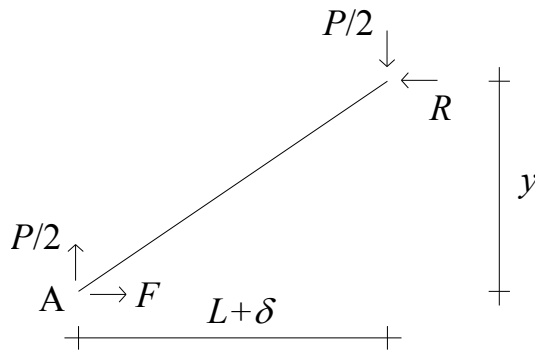


Figura 28 – Dados para o equilíbrio de uma das barras do sistema.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R = \frac{P}{2y} (L + \delta) \quad (4.3)$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow F = \frac{P}{2y}(L + \delta) \quad (4.4)$$

Como a mola tem comportamento linear ($F = k\delta$), tem-se pela Eq. (4.4):

$$k\delta = \frac{P}{2y}(L + \delta) \Rightarrow \delta = \frac{PL}{2ky - P} \quad (4.5)$$

Determinando-se Δu utilizando-se a Eq. (4.5) tem-se:

$$\Delta u = c_i - c_0 = \frac{L + \delta}{\cos \beta_i} - \frac{L}{\cos \beta_0} = \frac{2kLy(\cos \beta_0 - \cos \beta_i) + PL \cos \beta_i}{(2ky - P)\cos \beta_i \cos \beta_0} \quad (4.6)$$

Substituindo-se a Eq. (4.6) na Eq. (4.2) tem-se:

$$N = EA \frac{2ky(\cos \beta_0 - \cos \beta_i) + P \cos \beta_i}{(2ky - P)\cos \beta_i} \quad (4.7)$$

Substituindo-se a Eq. (4.7) na Eq. (4.1) tem-se:

$$\boxed{P + 2EA(\tan \beta_i) \frac{[2ky(\cos \beta_0 - \cos \beta_i) + P \cos \beta_i]}{(2ky - P)} = 0} \quad (4.8)$$

em que:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{H}{L}\right) \quad (4.9)$$

$$\beta_i = \arctan\left(\frac{y}{L + \delta}\right) = \arctan\left[\frac{y}{L + \left(\frac{PL}{2ky - P}\right)}\right] = \arctan\left[\frac{(2ky - P)}{2kL}\right] \quad (4.10)$$

A Eq. (4.8) está descrita em função de P e y e é a solução analítica procurada para o problema.

Na resolução do problema através da FPMEF foram adotadas as numerações mostradas na Figura 29. Nota-se que a mola do apoio esquerdo interliga os graus de liberdade 1 (nó 1) e 4 (nó 2) e a mola do apoio direito interliga os graus de liberdade 10 (nó 5) e 13 (nó 6). Foi utilizada uma tolerância igual a 10^{-8} .

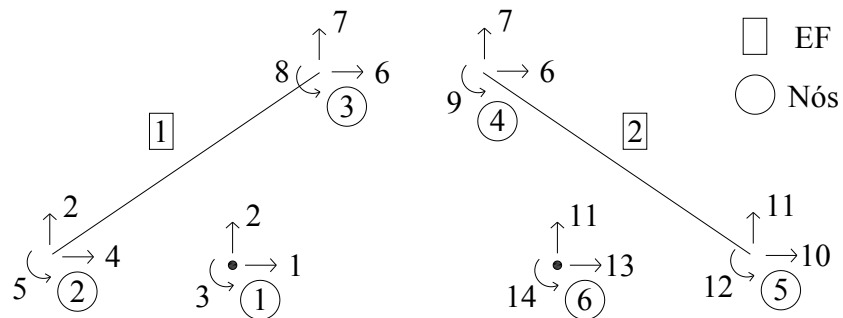


Figura 29 – Dados para análise numérica.

A Figura 30 mostra as trajetórias de equilíbrio obtidas. Nota-se que a formulação de controle de deslocamento não foi capaz de traçar a trajetória de forma fidedigna no trecho em que P é negativo. A trajetória via controle de força foi satisfatória, mostrando ótima correlação com a solução analítica antes e após o *snap-through*.

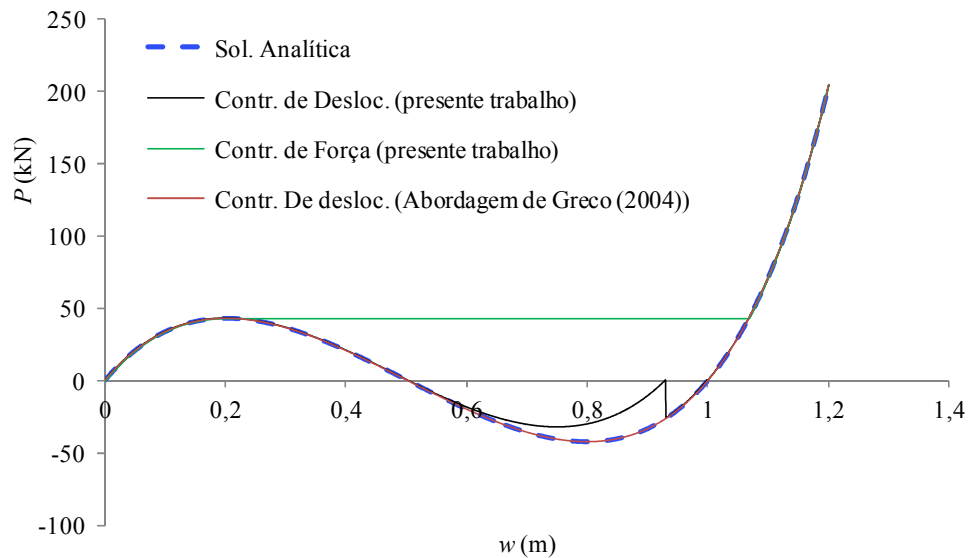


Figura 30 – Trajetória de equilíbrio utilizando a solução analítica, o controle de força e o controle de deslocamento.

4.2. Exemplo 2

O exemplo trata de um pórtico (Figura 31) cujas barras horizontais foram discretizadas em 15 EF, as barras verticais de 3,2 m em 8 EF e as diagonais em 34 EF. As molas translacionais são lineares e, para as ligações rotacionais, adotou-se uma discretização da função $M = k\sqrt{\theta}$. Nas conexões inclinadas, situadas no meio das diagonais, foi utilizada uma decomposição da rigidez conforme mostra a Figura 32.

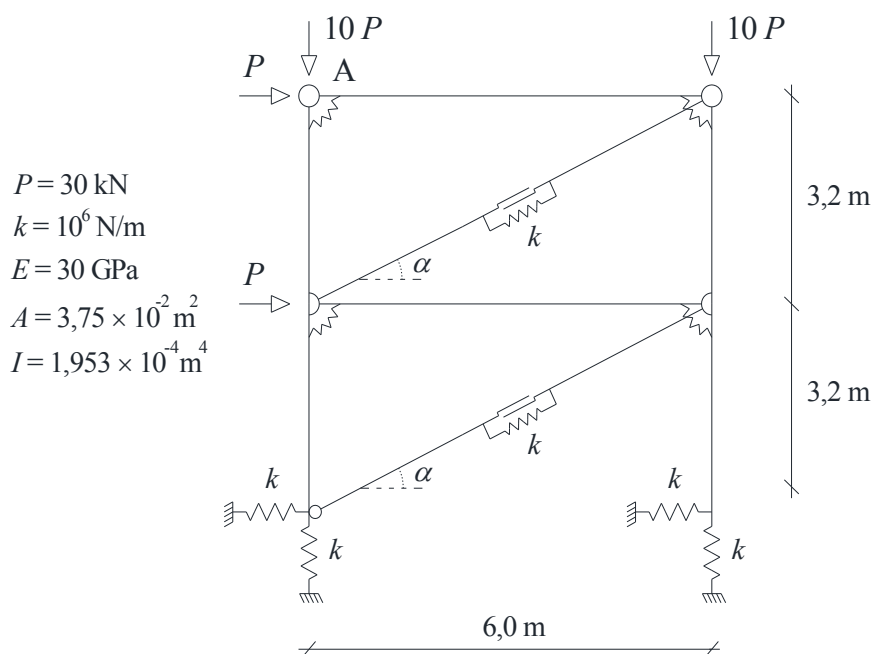


Figura 31 – Dados do exemplo 2.

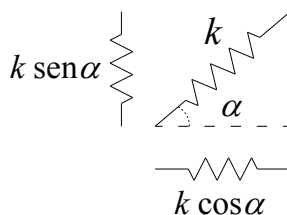


Figura 32 – Decomposição da rigidez.

A Figura 33 mostra a resposta obtida para o pórtico com e sem molas, sendo este último com os apoios engastados. Nota-se, então, que o uso das ligações horizontais nos apoios, em vez do engastamento, contribuiu para um aumento considerável no deslocamento horizontal do nó A.

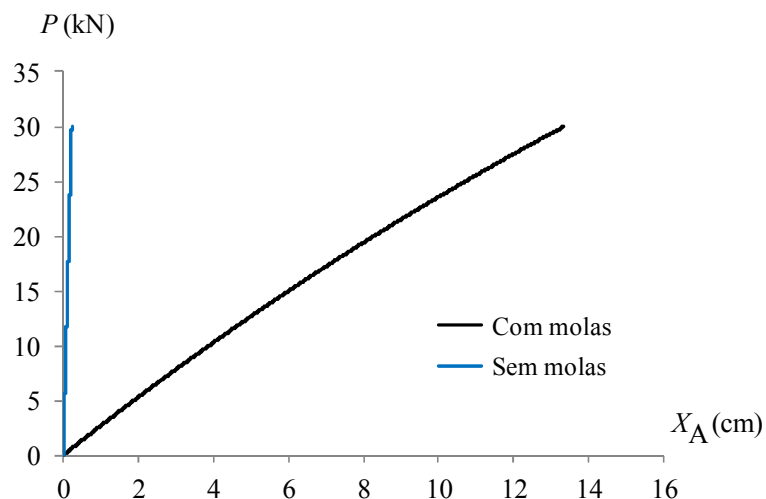


Figura 33 – Força $P \times$ posição horizontal do nó A.

Na Figura 34 são mostradas as deformadas do pórtico para alguns níveis de carregamento. Os deslocamentos nodais foram aumentados 4 vezes para melhor visualização. Destaca-se que a FPMEF se mostrou capaz e eficiente para a análise do modelo.

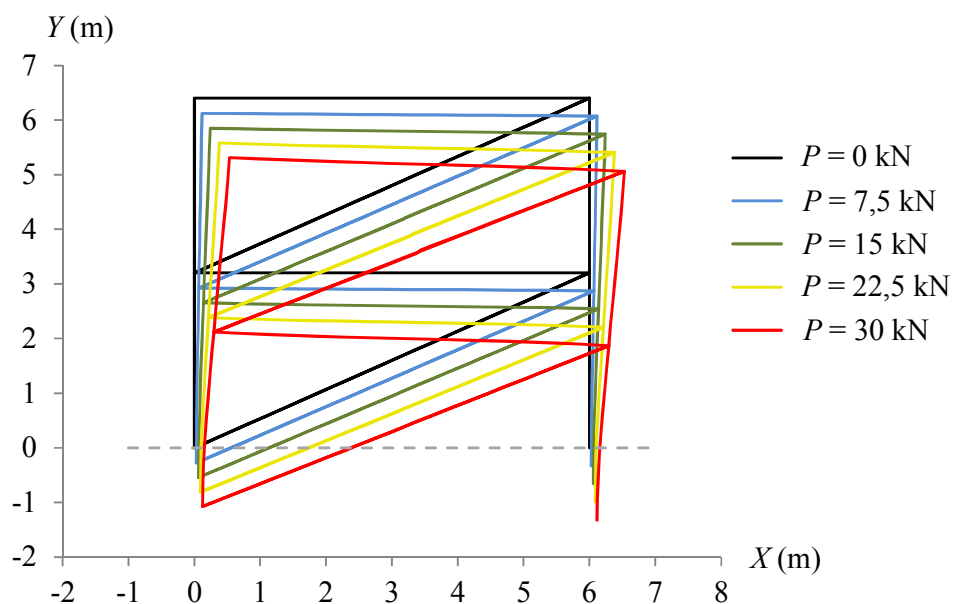


Figura 34 – Aspecto deformado da estrutura em algumas etapas de carga.

4.3. Exemplo 3

O exemplo trata de um arco senoidal de formato $y(x) = z \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ submetido a um carregamento uniformemente distribuído, como mostra a Figura 35. O arco foi discretizado em 18 EF, cada um com comprimento horizontal igual a $1/18$ m. Pretende-se comparar os resultados obtidos com os encontrados em Galvão *et al.* (2010) para valores diferentes da rigidez k das molas elásticas lineares.

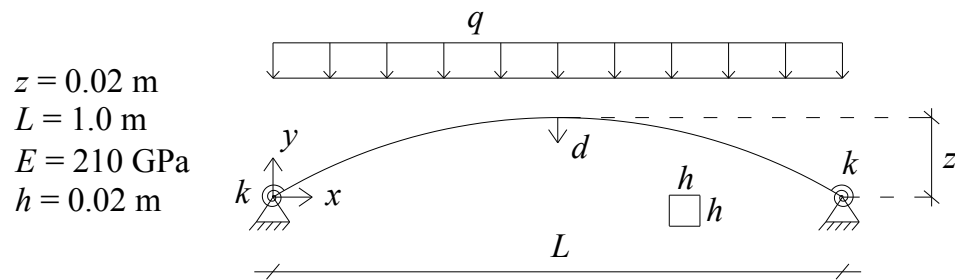


Figura 35 – Dados do exemplo 3.

A Figura 36 mostra os resultados obtidos. Nota-se que há ótima concordância com os resultados fornecidos pela literatura. O método de controle por deslocamento direto para este exemplo mostrou-se estável e eficaz.

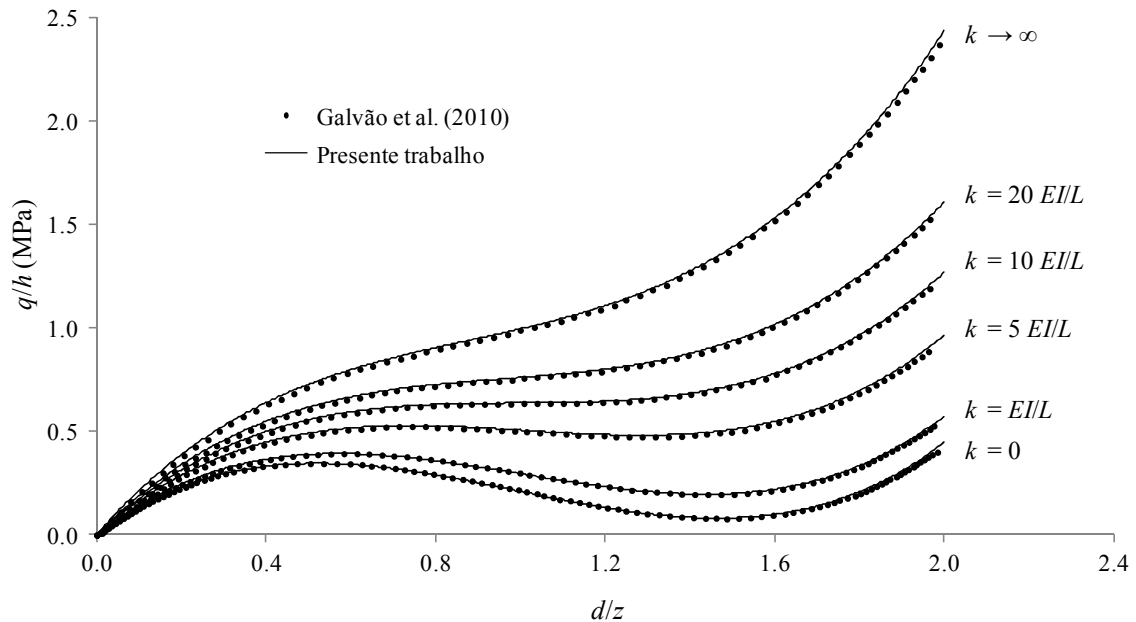


Figura 36 – Caminhos de equilíbrio para diferentes valores de k .

4.4. Exemplo 4

O exemplo trata de um pórtico em L com uma ligação semirrígida k submetido à força $P(t)$ como mostra a Figura 37. A viga e o pilar foram discretizados com 10 EF cada um. Considerou-se $\Delta t = 10^{-4}$ e uma tolerância de 10^{-8} . Dois valores de amortecimento (c_m) foram adotados: $c_1 = 2,0$ e $c_2 = 4,0$. Os resultados obtidos são comparados com os fornecidos por Silva (2009). Este exemplo foi publicado no trabalho de Fernandes, Vasconcellos e Greco (2018).

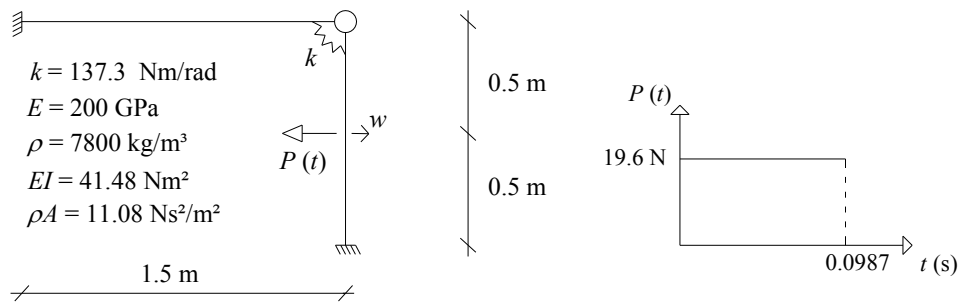


Figura 37 – Dados do exemplo 4.

A Figura 38 mostra os resultados obtidos para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força $P(t)$. Nota-se que o caso não amortecido concorda satisfatoriamente com o encontrado por Silva (2009). Além disso, os casos amortecidos têm a mesma frequência de fase do caso não amortecido e a amplitude relativa à estrutura com c_2 é menor do que a amplitude relativa à estrutura com c_1 , com ambas decrescendo em toda a análise, conforme era esperado.

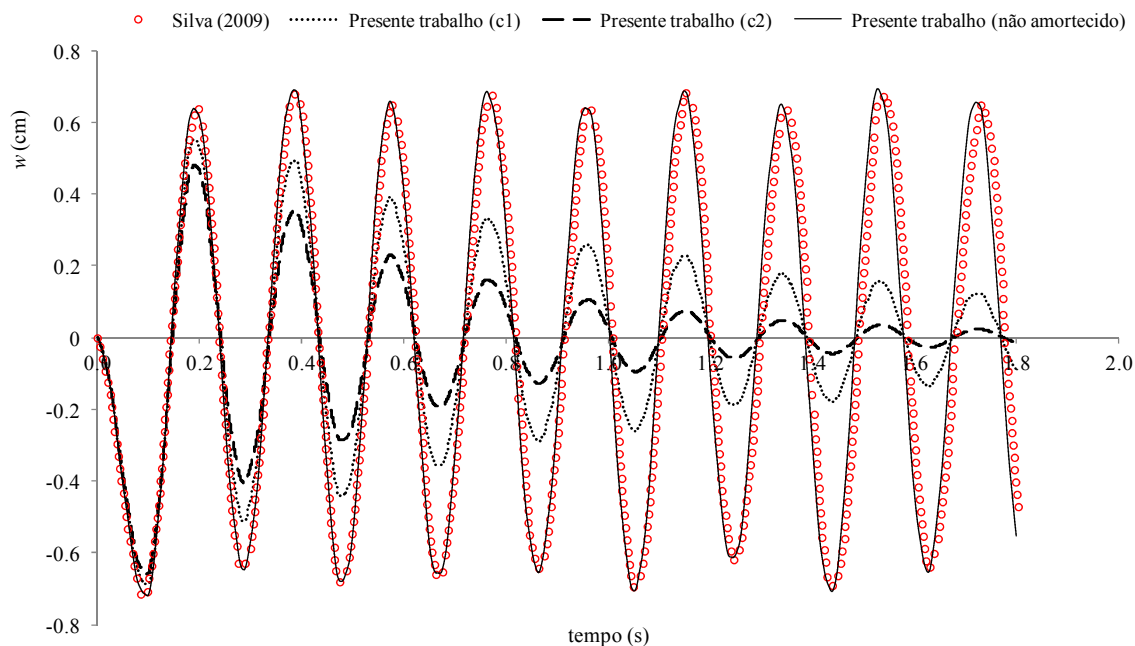


Figura 38 – Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força $\times$ tempo.

A Figura 39 mostra a resposta do pórtico para diferentes valores de $P(t)$. Percebe-se que quando P cresce um comportamento não periódico e irregular tende a ser mais visível. Além disso, para $P = 800$ kN e $P = 900$ kN uma instabilidade numérica é verificada.

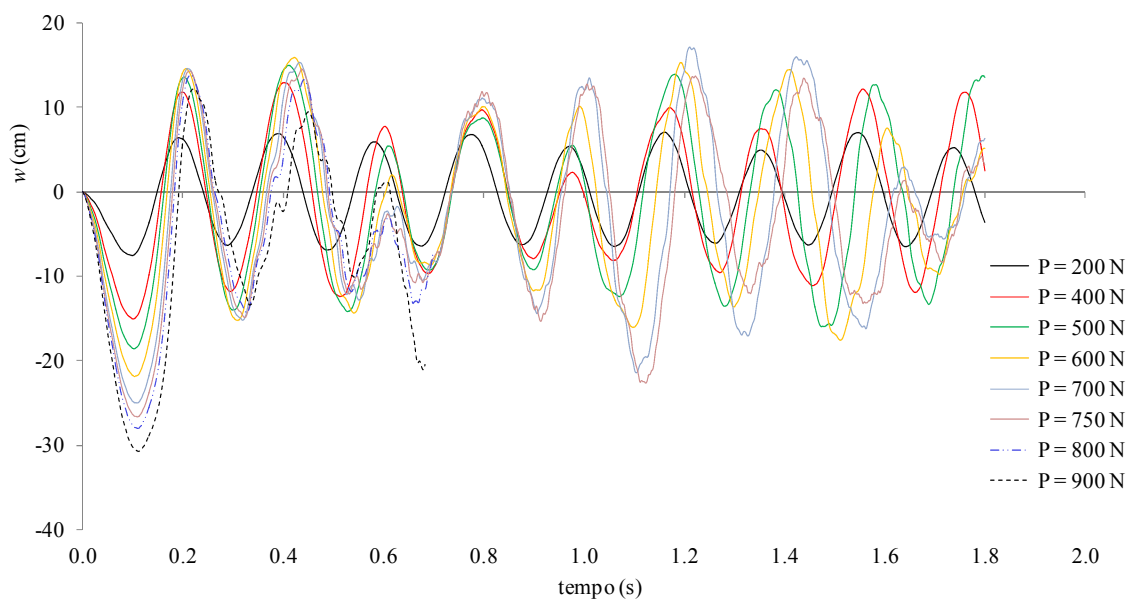


Figura 39 – Deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força para diferentes valores de $P(t)$.

4.5. Exemplo 5

O exemplo trata de uma viga com ligação Kelvin-Voigt em ambas as extremidades que está submetida a uma força $P(t)$ como mostra a Figura 40. A estrutura foi dividida em 10 EF. Foi escolhido $\Delta t = 10^{-5}$ e uma tolerância igual a 10^{-8} . O amortecimento estrutural não foi considerado. Uma comparação é feita com os trabalhos de Chan e Chui (2000) e Silva (2009). Este exemplo foi publicado no trabalho de Fernandes, Vasconcellos e Greco (2018).

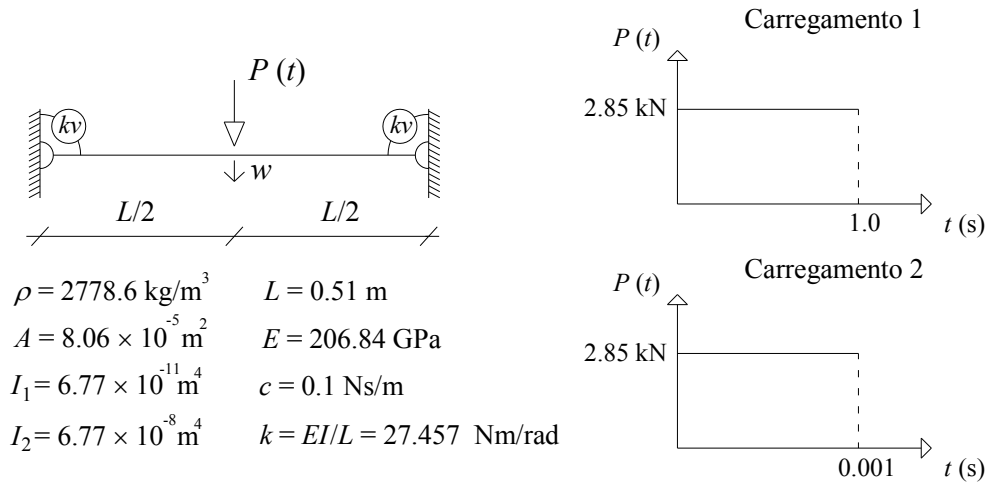


Figura 40 – Dados do exemplo 5.

A Figura 41 mostra o deslocamento vertical do ponto médio da viga biengastada obtido por Silva (2009), Chan e Chui (2000) e pela formulação proposta usando a inércia I_1 e o carregamento 1. A Figura 42 mostra o caso para a viga com ligações elásticas usando também a inércia I_1 e o carregamento 1. Conclui-se, então, que há boa concordância dos resultados obtidos pela FPMEF com os disponibilizados pela literatura.

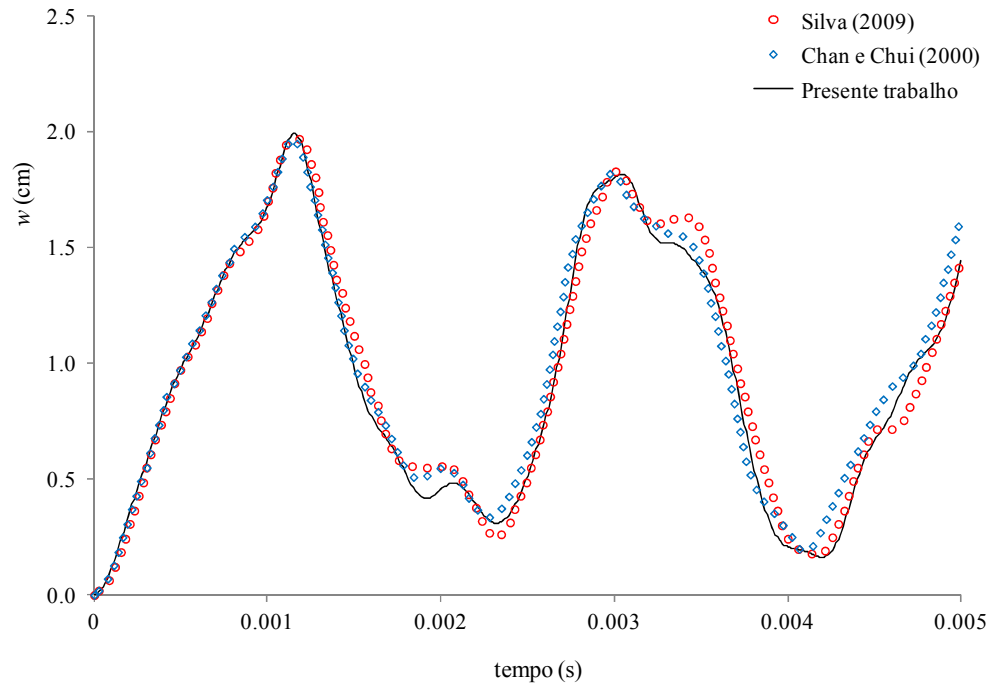


Figura 41 – Deslocamento vertical $\times$ tempo para viga biengastada.

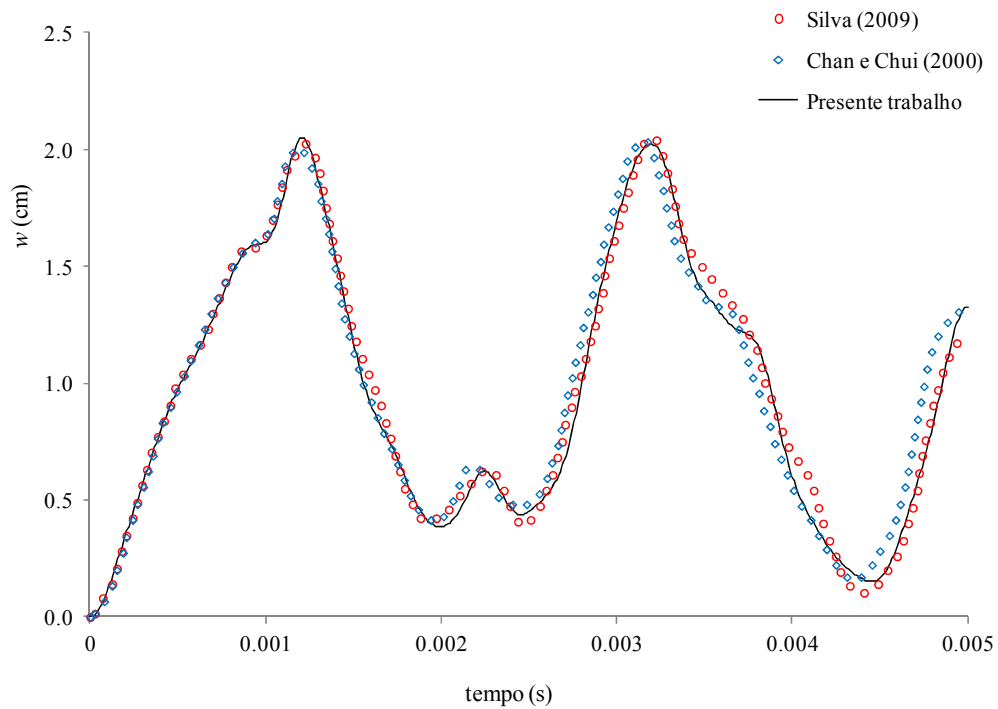


Figura 42 – Deslocamento vertical $\times$ tempo para ligação elástica.

Uma análise da resposta da viga com conexões elásticas para diferentes valores de $P(t)$ com duração igual a 10^{-3} s revela um comportamento não esperado como pode ser observado pela Figura 43. A amplitude de resposta para $P = 180$ kN é menor do que para $P = 150$ kN, que é

menor do que para $P = 100$ kN na vibração livre. Desviando desse padrão, para $P = 280$ kN o sistema oscila com uma amplitude maior do que para $P = 100$ kN. Outro comportamento anômalo é o fato da frequência não permanecer constante para os diferentes valores de P . Então, é provável que para P em torno de 100 kN a viga sofre algum tipo de instabilidade estrutural, tendo em vista a análise qualitativa de sua resposta.

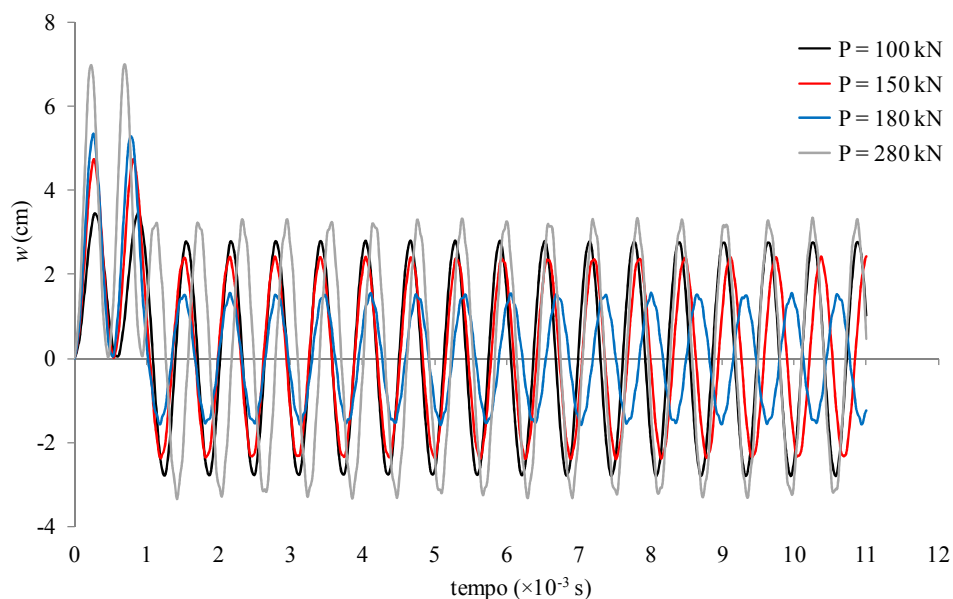


Figura 43 – Resposta da viga com conexões elásticas para diferentes valores de P .

A Figura 44 mostra a resposta da viga com ligações elásticas e viscoelásticas utilizando-se a inércia I_2 e o carregamento 2. Observa-se que o modelo reológico de Kelvin-Voigt diminui continuamente a amplitude do deslocamento na vibração livre, conforme se esperava.

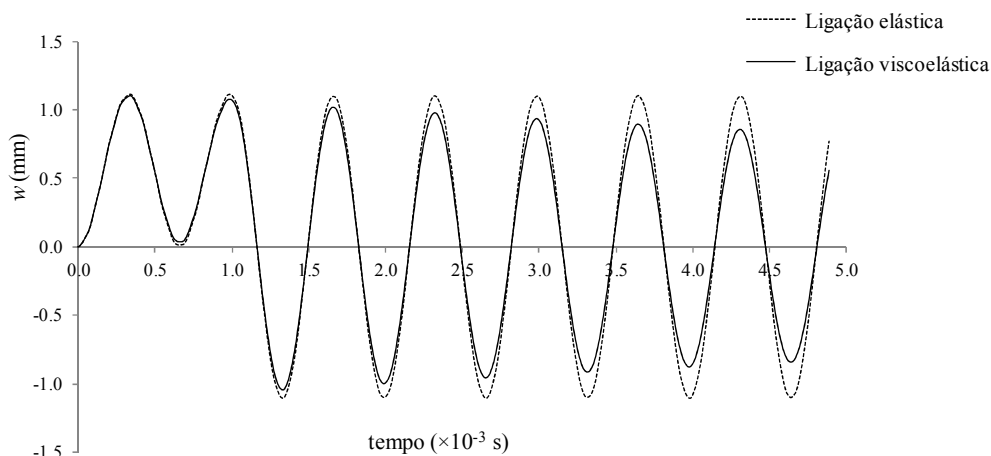


Figura 44 – Resposta para ligação elástica e viscoelástica.

4.6. Exemplo 6

O exemplo trata de um mecanismo biela-manivela submetido a um momento $M(t)$, conforme mostra a Figura 45. A haste AB foi discretizada em 5 EF e a haste BC em 10 EF. Foi escolhido $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ e uma tolerância igual a 10^{-10} . O amortecimento estrutural não foi considerado. No nó da rótula (nó B) empregou-se uma conexão de Kelvin-Voigt (KV) na direção horizontal e uma na direção rotacional, como indicado na Figura 45. A rigidez da mola da ligação viscoelástica horizontal é constante e igual a $5,0 \times 10^4$ N/m. A mola da ligação viscoelástica rotacional segue a lei dada pela Figura 46 e o amortecedor dessa conexão pode seguir as leis mostradas na Figura 48, indicadas graficamente na Figura 47. Parte desse exemplo foi publicado no trabalho de Vasconcellos e Greco (2017).

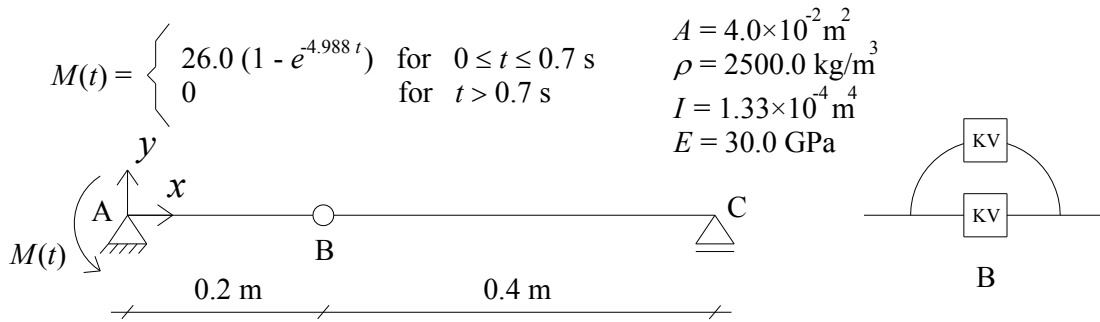


Figura 45 – Dados do exemplo 6.

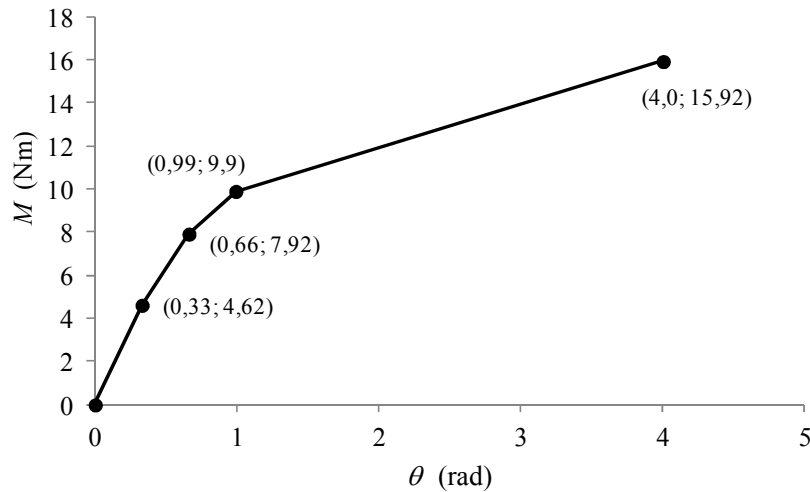


Figura 46 – Lei da mola da ligação viscoelástica rotacional no nó B.

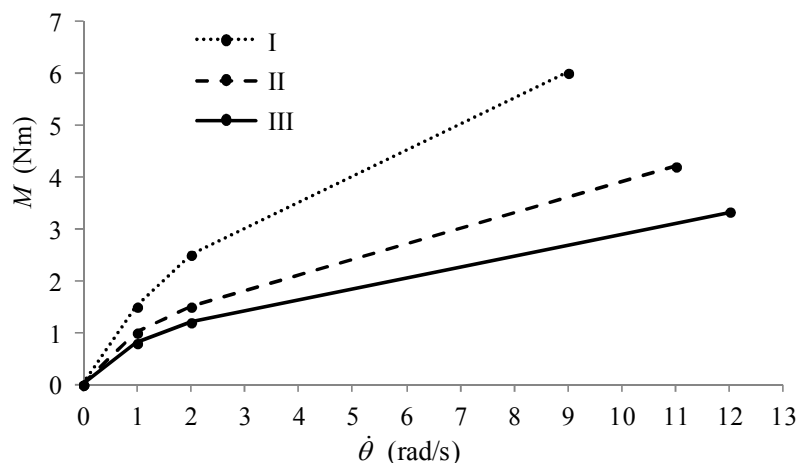


Figura 47 – Leis utilizadas para os amortecedores.

Lei I		Lei II		Lei III	
$\dot{\theta}$ (rad/s)	M (Nm)	$\dot{\theta}$ (rad/s)	M (Nm)	$\dot{\theta}$ (rad/s)	M (Nm)
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	0,8
2,0	2,5	2,0	1,5	2,0	1,2
9,0	6,0	11,0	4,2	12,0	3,33

Figura 48 – Coordenadas dos pontos das leis utilizadas nos amortecedores.

A Figura 49 mostra a posição do nó C em função do tempo para alguns casos de conexões. O rótulo “rKV III” indica que foi utilizado apenas a ligação viscoelástica rotacional de Kelvin-Voigt com o amortecedor seguindo a lei III e, de maneira análoga, definem-se os rótulos “rKV II” e “rKV I”. A indicação “rKV III + hKV I” significa que foi empregada a conexão de Kelvin-Voigt rotacional com um amortecedor de lei III e a conexão de Kelvin-Voigt horizontal com um amortecedor de lei I. Nota-se que a presença apenas da ligação elástica rotacional diminuiu a frequência, mas manteve o caráter periódico da resposta, como era esperado. Além disso, o amortecedor de lei I implicou na diminuição da amplitude de maneira mais rápida que o amortecedor de lei II, e esse de maneira mais rápida que o amortecedor de lei I. Esse resultado confirma uma análise qualitativa da Figura 47 que mostra a lei I com maior inclinação que a lei II, e essa com maior inclinação que a lei III. Outro aspecto interessante é que quando a conexão viscoelástica horizontal é usada junto com a rotacional, a posição horizontal do nó C ultrapassa a posição original (60 cm) de maneira mais acentuada, como pode ser visto na Figura 49 pouco depois de $t = 2$ s.

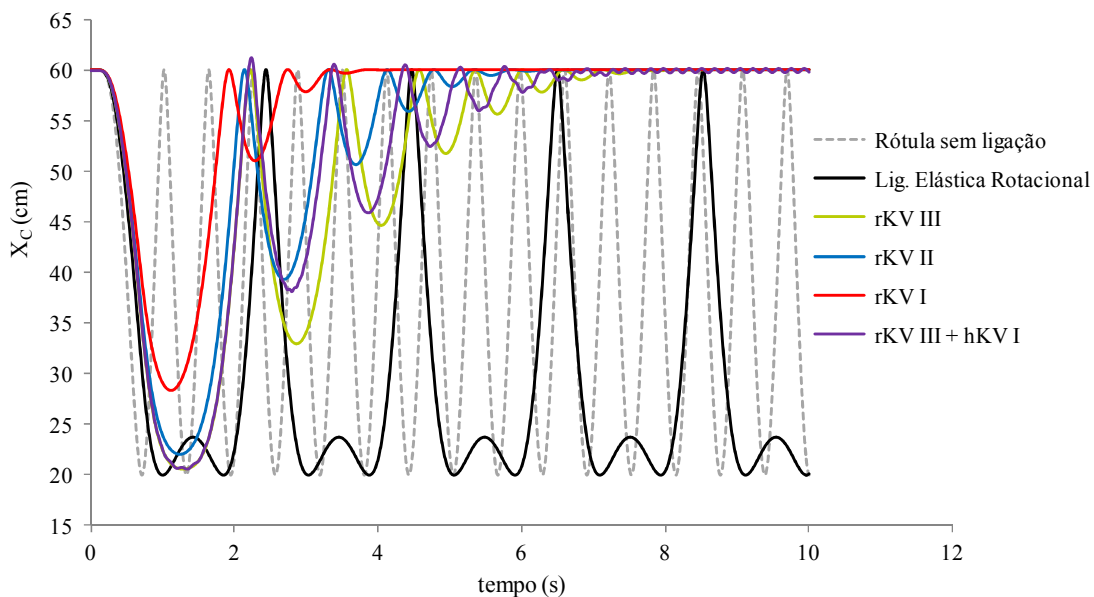


Figura 49 – Posição horizontal do nó C $\times$ tempo para as ligações estudadas.

A Figura 50 mostra a deformada do mecanismo com ligação “rKV III + hKV I” para alguns instantes de tempo. Nota-se que a conexão horizontal provoca um deslocamento relativo horizontal bem evidente no nó da rótula, tanto em instantes que ocorrem afastamento das barras quanto nos instantes quem ocorrem cruzamento das barras.

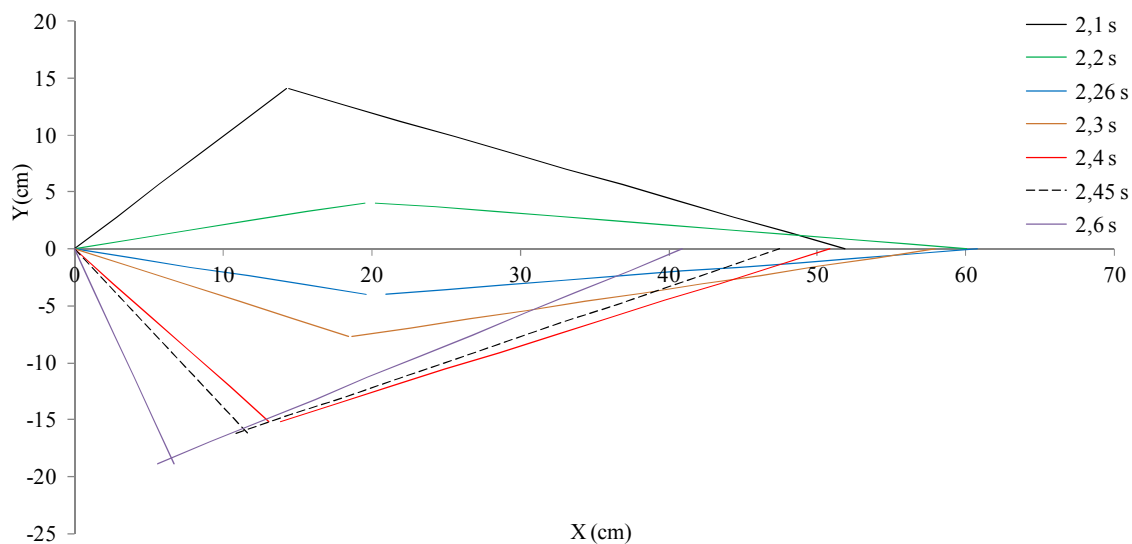


Figura 50 – Mecanismo biela-manivela em alguns instantes de tempo.

4.7. Exemplo 7

O exemplo trata de um mecanismo com 3 barras submetido a um momento $M(t)$ como pode ser visto na Figura 51. As barras AB e CD foram discretizadas em 5 EF e a barra BC em 10 EF. Foi escolhido $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ e uma tolerância igual a 10^{-10} . O amortecimento estrutural não foi considerado. Nas rótulas B e C foram empregadas ligações de Kelvin-Voigt rotacionais, cada uma com mola linear de rigidez igual a 0,8 Nm/rad e amortecedor linear cujo coeficiente de amortecimento vale 0,09 Nm/(rad/s). O carregamento dinâmico $M(t)$ está indicado na Eq. (4.11).

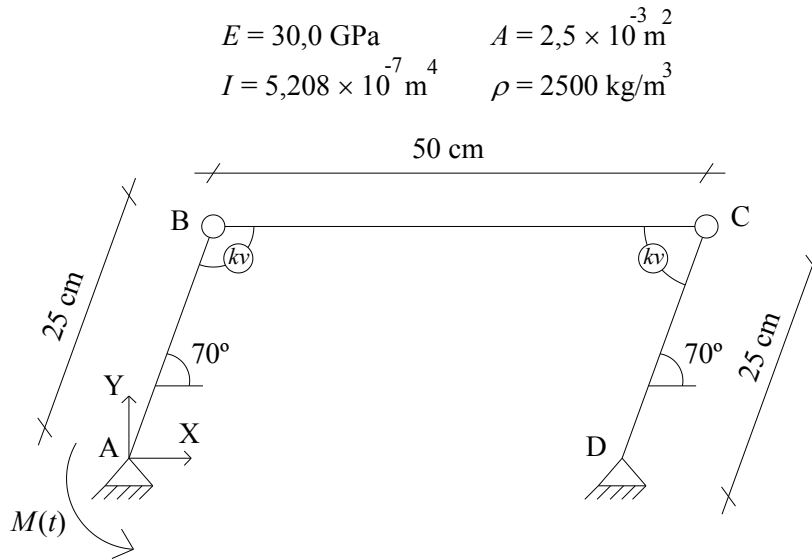


Figura 51 – Dados do exemplo 7.

$$M(t) = \begin{cases} 15(1 - e^{-4,988t}) & \text{p/ } 0 \leq t \leq 0,7 \text{ s} \\ 0 & \text{p/ } t > 0,7 \text{ s} \end{cases} \quad (4.11)$$

A Figura 52 mostra a posição horizontal do ponto C em função do tempo para o caso com ligação viscoelástica, com ligação elástica e com rótula livre. Constata-se que a análise com a rótula livre foi abortada no instante $t = 0,9 \text{ s}$ e a análise com ligação elástica no instante $t = 4,015 \text{ s}$, respectivamente. A análise numérica do mecanismo com ligação de Kelvin-Voigt, no entanto, forneceu resultados para um intervalo de tempo maior, resultando em um amortecimento eficaz, como mostra a Figura 52.

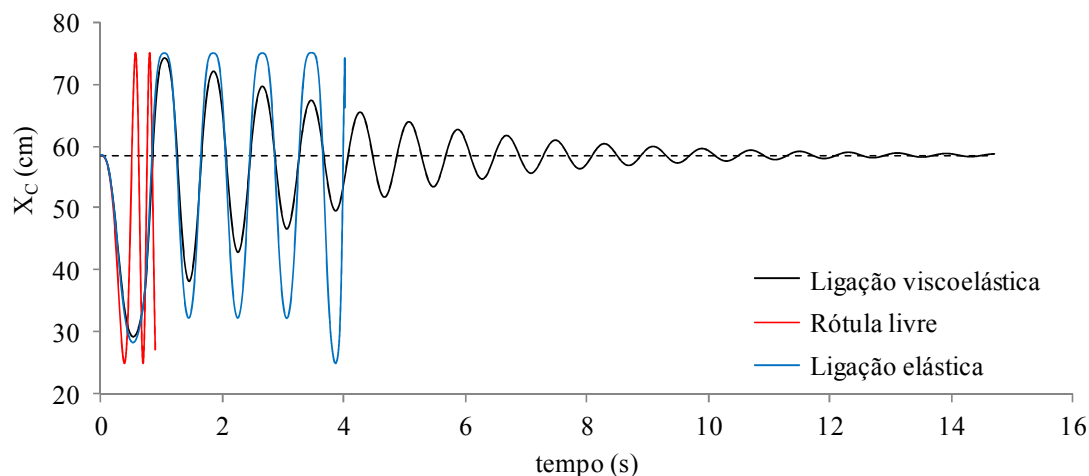


Figura 52 – Posição horizontal do ponto C $\times$ tempo para ligação de Kelvin-Voigt e para rótula livre.

A Figura 53 mostra a posição horizontal do ponto C quando se utiliza uma ligação apenas elástica com rigidez da mola igual a 6 Nm/(rad/s). Consta-se que o movimento com essa ligação permanece em caráter periódico com amplitude menor do que para o caso com rótula livre, conforme era esperado.

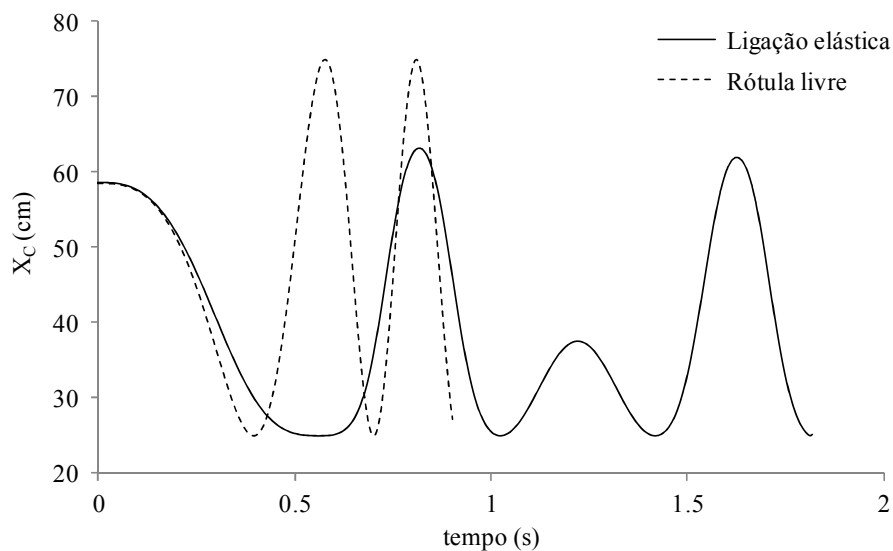


Figura 53 – Posição horizontal do ponto C $\times$ tempo para $k = 6$ Nm/(rad/s).

Para o caso em que a rigidez da mola vale 6 Nm/(rad/s) um comportamento curioso do mecanismo pode ser observado, como mostra a Figura 54. Em vez de seguir o giro anti-horário, as barras assumem uma configuração diferente, indicada em $t = 0,6$ s. O movimento oscilatório permanece e a análise numérica consegue descrever a cinemática do mecanismo até $t = 1,82$ s.

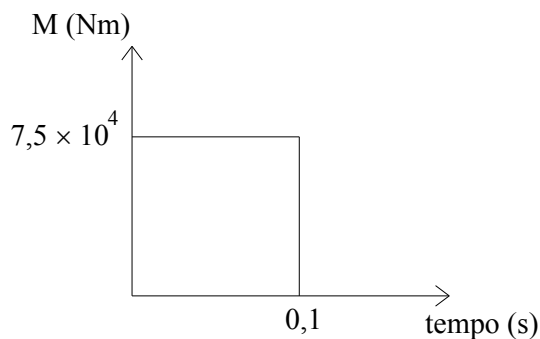


Figura 56 – Carregamento dinâmico aplicado no mecanismo Peaucellier.

A Figura 57 mostra a posição vertical do ponto E para o mecanismo com todas as rótulas livres. Observa-se que, em geral, quanto maior o número de ligações presentes no modelo, maior é a frequência do sistema, conforme se esperava.

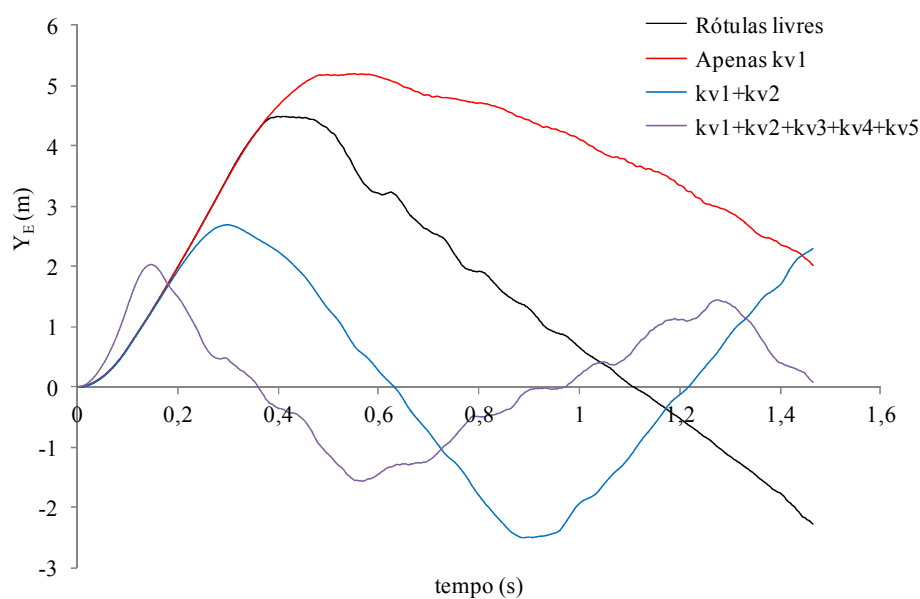


Figura 57 – Posição vertical do ponto E × tempo.

As figuras 58 e 59 mostram a configuração do mecanismo sem ligações para alguns instantes de tempo. Nota-se que em $t = 0,37$ s a barra AF fica acima da barra AD e a barra CF também se situa acima da barra CD como mostra a Figura 58.

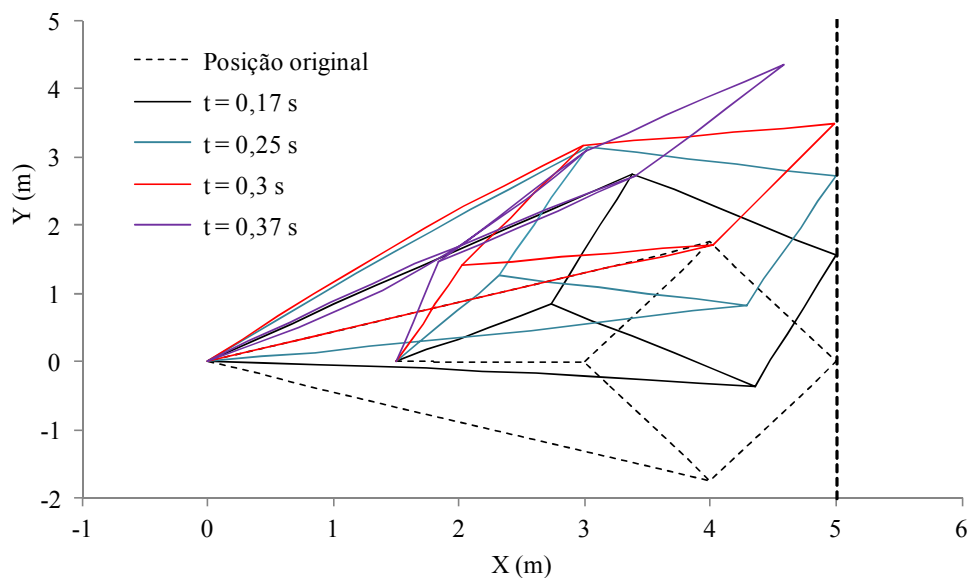


Figura 58 – Mecanismo sem ligações em alguns instantes de tempo (parte 1/2).

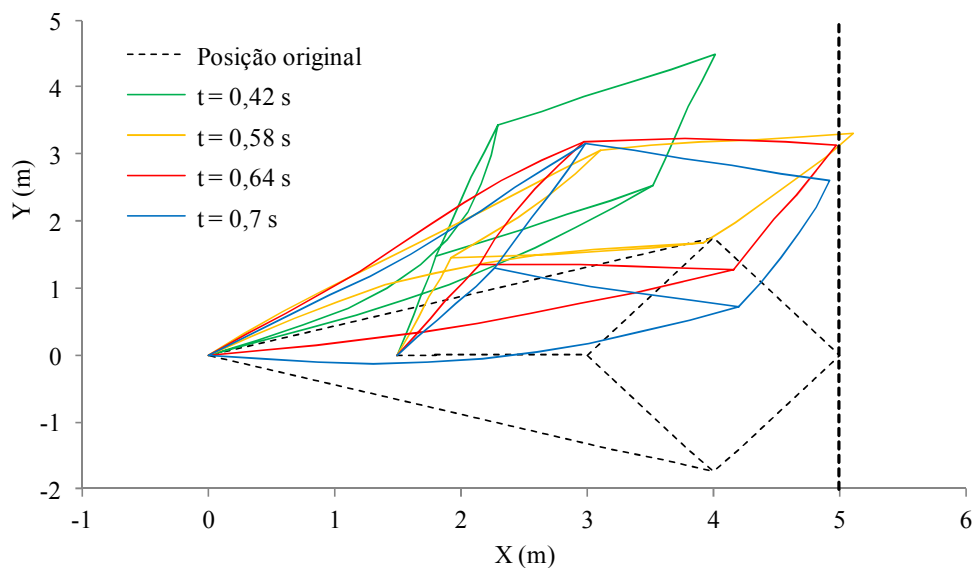


Figura 59 - Mecanismo sem ligações em alguns instantes de tempo (parte 2/2).

As figuras 60 e 61 mostram a configuração do mecanismo com a ligação kv1 em alguns instantes de tempo. Observa-se que a conexão impede a sobreposição das barras AD e AF, porém ainda há grande aproximação das barras CF e CD, principalmente em $t = 0,7$ s na Figura 61.

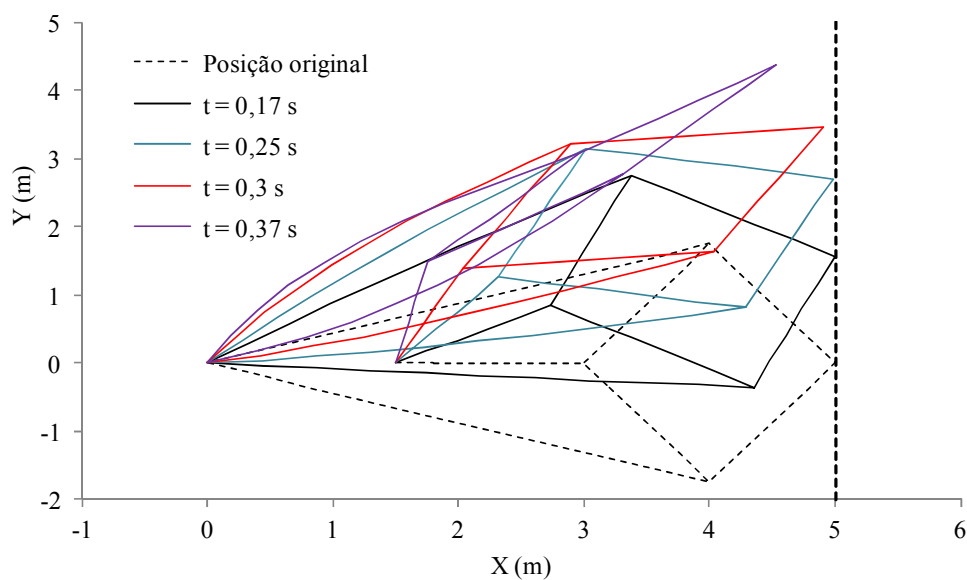


Figura 60 – Mecanismo com kv1 em alguns instantes de tempo (parte 1/2).

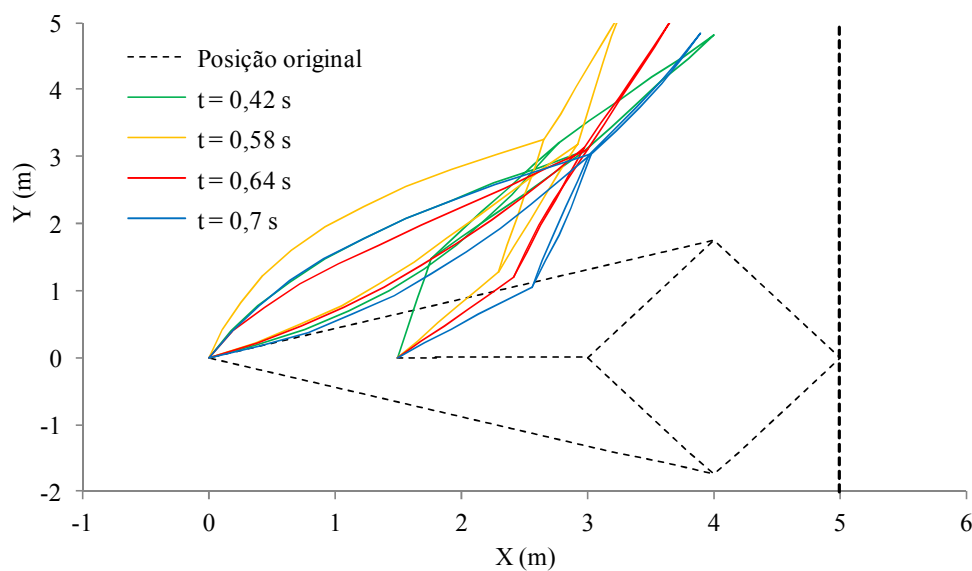


Figura 61 – Mecanismo com kv1 em alguns instantes de tempo (parte 2/2).

As figuras 62 e 63 mostram a configuração do mecanismo com as ligações kv1 e kv2 em alguns instantes de tempo. Percebe-se que as conexões impedem a sobreposição das barras AD e AF e das barras CF e CD.

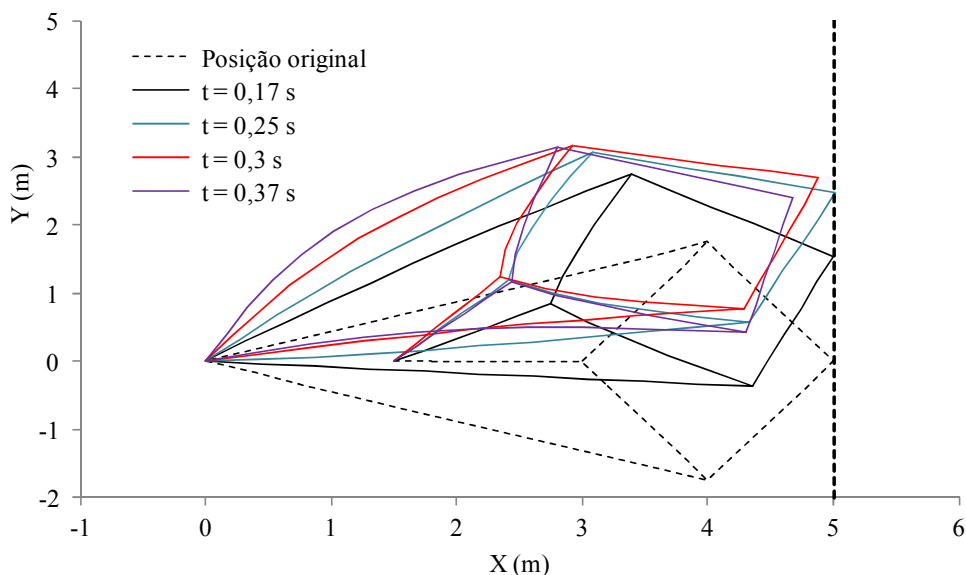


Figura 62 – Mecanismo com (kv1+kv2) em alguns instantes de tempo (parte 1/2).

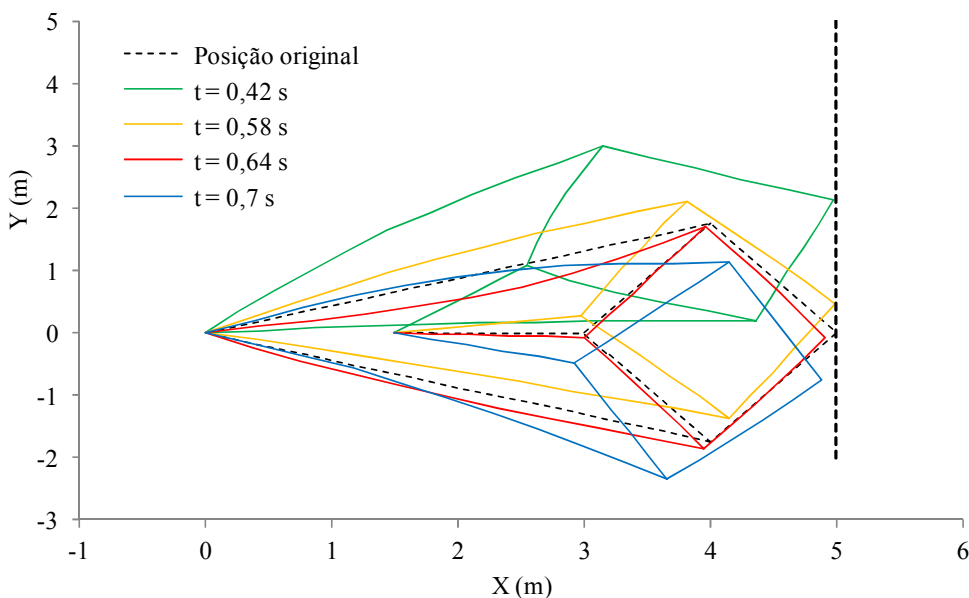


Figura 63 – Mecanismo com (kv1+kv2) em alguns instantes de tempo (parte 2/2).

As figuras 64 e 65 mostram a configuração do mecanismo com todas as ligações viscoelásticas em alguns instantes de tempo. Comparando-se as configurações dos mesmos tempos das figuras 62 e 64 nota-se que a frequência do sistema com todas as ligações aumentou, como era esperado. De igual modo, tem-se a mesma conclusão ao se confrontar as figuras 63 e 65.

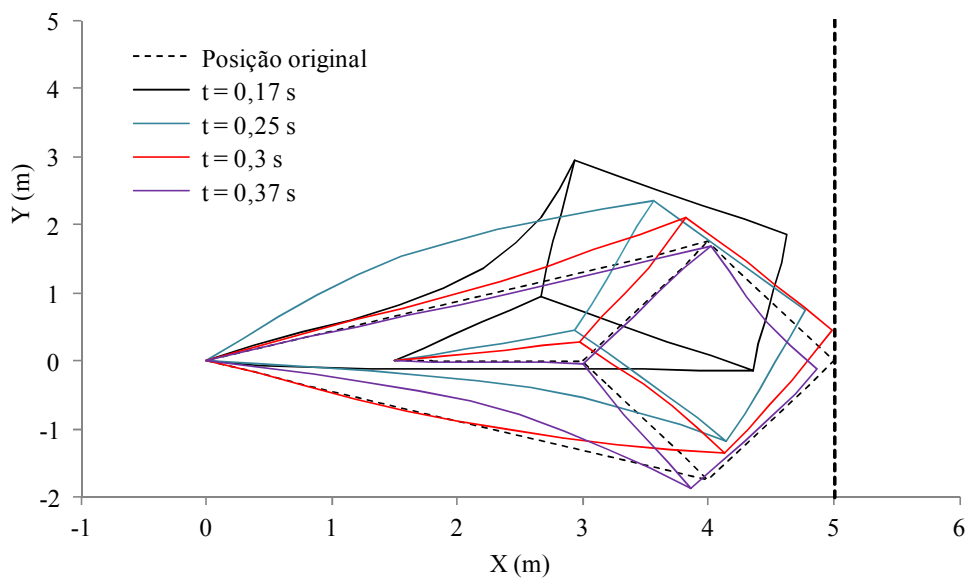


Figura 64 – Mecanismo com todas as conexões viscoelásticas em alguns instantes de tempo (parte 1/2).

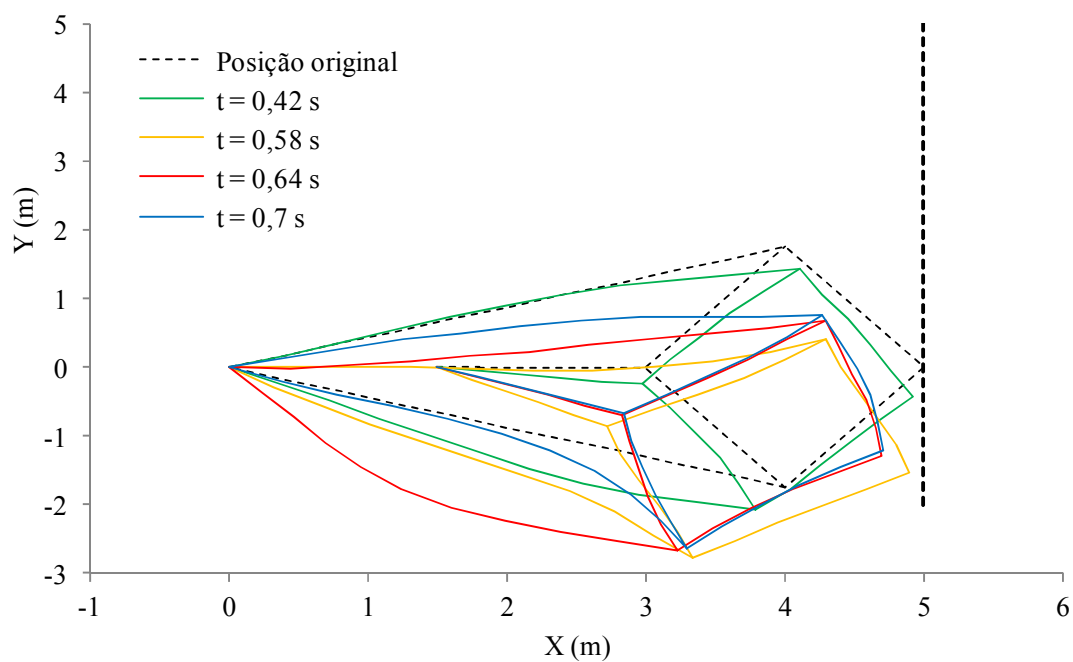


Figura 65 - Mecanismo com todas as conexões viscoelásticas em alguns instantes de tempo (parte 2/2).

5

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho a FPMEF foi aplicada à análise de estruturas e mecanismos multicorpos reticulados planos com ligações viscoelásticas não lineares de Kelvin-Voigt. A estratégia adotada para incluir as ligações na malha de elementos finitos permite a consideração de qualquer modelo reológico viscoelástico e, além disso, pode ser empregada seja qual for a formulação escolhida.

A utilização da referida metodologia com ligações elásticas conduziu a resultados condizentes com os fornecidos pela literatura como indicado nos exemplos 3 (Figura 36), 4 (Figura 38) e 5 (Figura 42). O uso das ligações do tipo Kelvin-Voigt levou a resultados satisfatórios do ponto de vista qualitativo como discutido nos exemplos 5, 6, 7 e 8. Além disso, destaca-se que o procedimento proposto possibilita a inserção de uma conexão na direção horizontal, vertical e rotacional entre elementos finitos ou entre um apoio e um EF. Salienta-se ainda que a técnica adotada para incluir a não linearidade nas molas e amortecedores (curva multilinear) é geral e apresentou boa estabilidade numérica. Adicionalmente, reforça-se que a formulação posicional mostrou-se capaz para a análise de mecanismos com conexões viscoelásticas, como mostrado nos três últimos exemplos.

Outra proposta do trabalho foi uma formulação alternativa para a análise estática utilizando-se a FPMEF e a abordagem clássica do método incremental-iterativo. O uso dessa abordagem possibilitou estudar o exemplo 3, cuja análise seria mais trabalhosa caso se utilizasse o algoritmo da Figura 11, tendo em vista que este requer um vetor deslocamento incremental como dado inicial. No entanto, constatou-se que a formulação de controle de deslocamento não forneceu resultados satisfatórios para o exemplo 1, no trecho em que a força tem sinal negativo. Diante disso, ressalta-se que a formulação requer revisões nesse aspecto em futuras pesquisas. Outros temas que poderão ser tratados posteriormente são: implementação de outros métodos de controle adotando a metodologia proposta, análise de mecanismos com

outros modelos reológicos nas ligações, extensão da análise de mecanismos com conexões 2D para mecanismos 3D, inclusão de efeitos térmicos nos exemplos desta dissertação e desenvolvimento de algoritmos para análise quase-estática de estruturas com ligações viscoelásticas usando técnicas de adaptatividade do incremento de tempo. Além disso, pode-se utilizar a mesma ideia de inserção de ligações viscoelásticas deste trabalho para analisar os casos mais gerais com conexões viscoelastoplásticas. Por fim, destaca-se que a implementação do *script* que permite visualizar o movimento de um mecanismo foi de grande valia, pois contribuiu para uma melhor análise do comportamento do sistema ao longo do tempo.

6

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMBRÓSIO, J.; VERISSIMO, P. *Improved bushing models for general multibody systems and vehicle dynamics*. Multibody System Dynamics, v. 22, p. 341-365, 2009.

ARGYRIS, J. H. *Continua and Dincontinua*. Proceedings of First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Paterson Air Force Base, Ohio, p. 11-89, 1965.

ATTARNEJAD, R.; PIRMOZ, A. *Nonlinear analysis of damped semi-rigid frames considering moment-shear interaction of connections*. International Journal of Mechanical Sciences, v. 81, p. 165-173, 2014.

AVANCINI, G. *Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: uma formulação baseada em elementos finitos e partículas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2018.

BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, Singapore, 2010.

BECHO, J. S.; BARROS, F. B.; GRECO, M. *Formulação posicional para descrição do comportamento mecânico de fluência em vigas e estruturas de pórtico*. Ciência & Engenharia, v. 24, n. 1, p. 31-41, 2015.

BECHO, J. S. *Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2016.

CARRAZEDO, R. *Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. *Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 46, n. 11, p. 1008-1016, 2010.

CAVALCANTE, J. P. B. *Contribuição ao estudo de treliças não lineares considerando efeitos térmicos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

CHAN, S. L.; CHUI, P. P. T. *Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Elsevier, Oxford, UK, 2000.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Structural stability*. Elsevier, New York, 1987.

CODA, H. B. *An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description*. XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brazil, 2003.

CODA, H. B.; GRECO, M. *A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 193, n. 33, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. *An alternative positional FEM formulation for geometrically nonlinear analysis of shells-curved triangular isoparametric elements*. Computational Mechanics, v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. *A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 5, n. 1, p. 205-223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. *A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 91, p. 1-15, 2014.

CRAIG JR., R. R.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*, Wiley, New Jersey, 2006.

FERNANDES, W. L.; VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. *Dynamic instability in shallow arches under transversal forces and planes frames with semirigid connections*. Mathematical Problems in Engineering, v. 2018, p. 1-14, 2018.

FILHO, J. M.; JÚNIOR, J. d. A. F.; DA COSTA, M. M. M. *Reologia*. Apostila, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2007.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. Dover Publications, New York, 1989.

FLORES, P.; AMBRÓSIO, J.; CLARO, J. P. *Dynamic analysis for planar multibody mechanical systems with lubricated joints*. Multibody systems dynamics, v. 12, p. 47-74, 2004.

FUINA, J. S. *Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2004.

GALVÃO, A. S.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M.; GONÇALVES, P. B. *Nonlinear dynamic behaviour and instability of slender frames with semi-rigid connections*. International Journal of Mechanical Science, v. 52, p. 1547-1562, 2010.

GRECO, M. *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2004.

GRECO, M.; CODA, H. B. *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis*. Journal of Sound and Vibration, v. 290, n. 3, p. 1141-1174, 2006.

GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. *Nonlinear positional formulation for space truss analysis*. Finite Elements in Analysis and Design, v.42, n. 12, p. 1079-1086, 2006.

GRECO, M.; VENTURINI, W.S. *Stability analysis of three-dimensional trusses*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 3, p. 325-344, 2006.

HUANG, B. W.; KUANG, J. H.; TSENG, J. E.; WANG, J. C; QIU, Y. X. *Seismic analysis of a viscoelastic damping isolator*. Advances in material science and engineering, v. 2015, p. 1-6, 2015.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; TAYLOR, R. L.; LIM, H. *Non-linear dynamics of flexible multibody systems*. Computers & Structures, v. 81, n. 12, p. 1113–1132, 2003.

JOHN, A.; GEORGE, M. *Study on beam-column connection with viscoelastic hysteretic dampers for seismic damage control*. International journal of innovate science, engineering and technology, v. 3, p. 473-483, 2016.

KASSIMALI, A. *Matrix analysis of structures*. Cengage Learning, Standford, USA, 1999.

KZAM, A. K. L. *Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2016.

LACERDA, E. G. M. *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2008.

MACIEL, D. N.; CODA, H. B. *Dynamic positional finite element method applied to nonlinear geometric 3D solids*. *Mecânica Computacional*, v. XXIX, n. 43, p. 4377-4387, 2010.

MADEIRA, R. H.; CODA, H. B. *Kelvin viscoelasticity and Lagrange multipliers applied to the simulation of nonlinear structural vibration control*. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 5, p. 964-991, 2016.

MÄKINEN, J. *Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 9, p. 1009–1048, 2007.

MARQUES, G. C. d. S. C. *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2006.

NORTON, R. L. *Cinemática e dinâmica dos mecanismos*. Mc Graw Hill, New York, 2010.

OLIVEIRA, F. M. *Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2012.

OLIVEIRA, F. M.; GRECO, M. *Nonlinear dynamic analysis of beams with layered cross sections under moving masses*. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 37, p. 451-462, 2015.

PIAN, T. H. H.; TONG, P. *Variational Formulation of Finite Displacement Analysis*. *Proceedings of IUTAM Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures*, University of Liege, Liege, Belgium, p. 43-63, 1971.

RABELO, J. M. G. *Formulação posicional não linear utilizando viscoelasticidade para análise de estruturas treliçadas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2015.

REIS, M. C. J. *Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2012.

REIS, M. C. J.; CODA, H.B. *Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 11, p. 1163-1189, 2014.

RIGOBELLO, R. *Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio*. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2011.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; MUNAIAR, J. N. *A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 91, p. 68-83, 2014.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. *Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 14, n. 01, p. 52-71, 2017.

SILVA, A. R. D. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, UFOP, 2009.

SILVA, R. L. D. *Estudo de pórticos planos não lineares considerando efeitos térmicos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SILVA A. R. D.; BATELO, E. A. P.; SILVEIRA R. A. M.; NEVES F. A.; GONÇALVES P. B. *On the nonlinear transient analysis of planar steel frames with semi-rigid connections:*

from fundamentals to algorithms and numerical studies. Latin American Journal of Solids and Structures. v. 15, n. 3, p 1-28, 2018.

SIQUEIRA, T. M. *Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2016.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. *Development of sliding connections for structural analysis by a total Lagrangian FEM formulation*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 13, n. 11, p. 2059-2087, 2016.

VALIPOUR, H. R.; BRADFORD, M. *An efficient compound-element for potential progressive collapse analysis of steel frames with semi-rigid connections*. Finite Elements in Analysis and Design, v. 60, p. 35-48, 2012.

VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. *Análise dinâmica não linear de estruturas e mecanismos 2D com ligações viscoelásticas*. XXXVIII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, Brasil, 2017.

VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. *Análise de estruturas 2D com ligações elásticas não lineares através da formulação posicional*. XX Encontro Nacional de Modelagem Computacional, Nova Friburgo, Brasil, 2017.

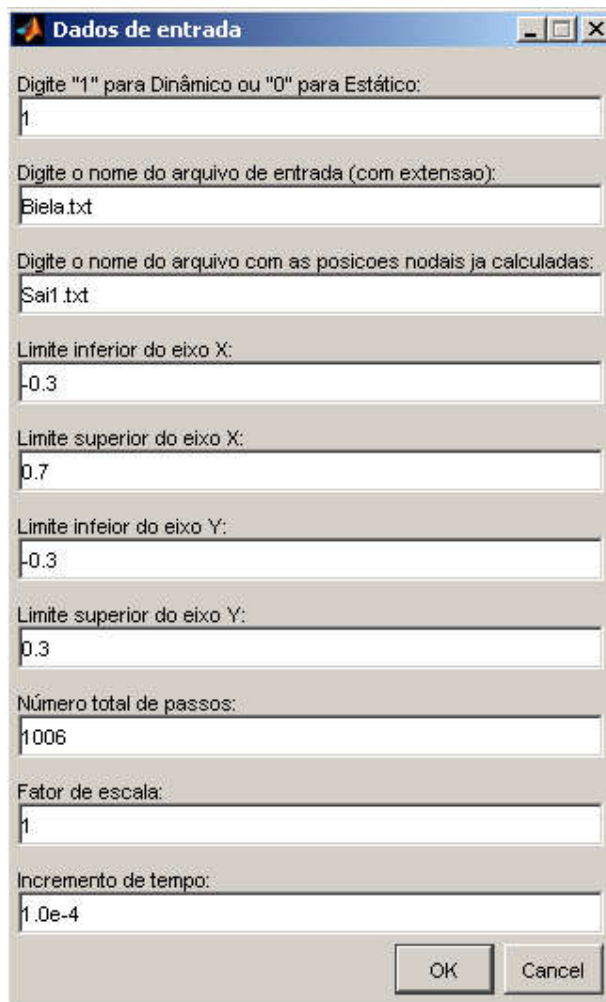
WYLEN, G. V.; SONNTAG, R.; BORGNAKKE, C. *Fundamentos da termodinâmica clássica*. Blucher, 1995.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. *Solution method for nonlinear problems with multiple critical points*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 28, p. 2110-2116, 1990.

ZIENKIEWICZ, O. C., *Incremental Displacement in Non-Linear Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 3, p. 587-588, 1971.

APÊNDICE A – SOBRE O SCRIPT DESENVOLVIDO

A Figura 66 mostra a caixa de diálogo gerada pelo *script* criado. Dois arquivos de extensão ‘.txt’ devem ser fornecidos para que o programa obtenha os dados iniciais do modelo, bem como as posições nodais já calculadas previamente. Além disso, incluiu-se um campo ‘Fator de escala’ com o intuito de aumentar os deslocamentos do mecanismo para melhor visualização de seu comportamento.



Dados de entrada

Digite "1" para Dinâmico ou "0" para Estático:
1

Digite o nome do arquivo de entrada (com extensão):
Biela.txt

Digite o nome do arquivo com as posições nodais já calculadas:
Sai1.txt

Limite inferior do eixo X:
-0.3

Limite superior do eixo X:
0.7

Limite inferior do eixo Y:
-0.3

Limite superior do eixo Y:
0.3

Número total de passos:
1006

Fator de escala:
1

Incremento de tempo:
1.0e-4

OK Cancel

Figura 66 – Dados de entrada para a animação.

A ideia básica da animação está apresentada na Figura 67. Utilizando-se o comando ‘line’ do MATLAB® e a matriz de incidência nodal, o código desenha a configuração do mecanismo para um instante de tempo e, em seguida, pausa essa configuração por um intervalo de tempo bem pequeno. Antes de passar para a próxima iteração, a configuração corrente é deletada, fornecendo, assim, o caráter de movimento da animação.

```

for t = 0:npt                                     % Loop no n° total de passos de tempo.
    [X,Y] = Nodal_Positions(Arq2);
    if t == 0                                     % Realiza só uma vez.
        X0 = X;                                  % Armazena a posição inicial do mecanismo.
        Y0 = Y;                                  % Armazena a posição inicial do mecanismo.
    else
        delete(A);
        str = strcat(' t = ', num2str(t*dt), ' s');
        A = annotation('textbox',dim,'String',str,'FitBoxToText','on');
    end
    L = zeros(nel,1);
    for i = 1:nel                                  % Desenha para o instante de tempo corrente.
        L(i,1) = line([X0(inc(i,1)) + (X(inc(i,1)) - X0(inc(i,1)))* ...
            fs X0(inc(i,2)) + (X(inc(i,2)) - X0(inc(i,2)))*fs],...
            [Y0(inc(i,1)) + (Y(inc(i,1)) - Y0(inc(i,1)))*fs ...
            Y0(inc(i,2)) + (Y(inc(i,2)) - Y0(inc(i,2)))*fs], ...
            'Color','r', 'LineWidth',2);
    end
    pause(1e-300);
    if (t < npt)                                   % A fim de não apagar a última configuração.
        delete(L);                                % Apaga a configuração corrente do mecanismo.
    end
end

```

Figura 67 – Trecho do script.