

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Dissertação de Mestrado

"ANÁLISE DA DINÂMICA DA CARGA MOEDORA NOS MOINHOS DE BOLAS"

Autor: Dirceu Valadares Nascimento

Orientador: Professor Roberto Galery

Fevereiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Minas

Dirceu Valadares Nascimento

"ANÁLISE DA DINÂMICA DA CARGA MOEDORA NOS MOINHOS DE BOLAS"

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Metalúrgica e de Minas da Universidade Federal de Minas Gerais

Área de concentração: Tecnologia Mineral

Orientador: Prof. Roberto Galery

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2013

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	2
2. OBJETIVOS E METAS	5
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	6
3.1. COMINUIÇÃO.....	6
3.1.1. <i>Etapas</i>	6
3.1.2. <i>Mecanismos de cominuição</i>	7
3.1.3. <i>Aspectos energéticos e modelos clássicos</i>	9
3.1.4. <i>Equipamentos de Moagem</i>	12
3.1.5. <i>Projeto de circuitos</i>	23
3.2. SIMULAÇÃO COMPUTADORIZADA	24
3.2.1. <i>Introdução</i>	24
3.2.2. <i>Módulos da simulação</i>	26
3.2.3. <i>Dinâmica de Corpos Rígidos</i>	31
4. METODOLOGIA	35
4.1. MATERIAIS E MÉTODOS.....	35
4.1.1. <i>Dinâmica de Corpos Rígidos</i>	35
4.1.2. <i>Aplicativo</i>	42
4.1.3. <i>Tipo de dados obtidos</i>	45
4.1.4. <i>Tratamento de dados e estudos de simulação</i>	46
4.2. SIMULAÇÕES	51
4.2.1. <i>Configuração de controle</i>	51
4.2.2. <i>Efeito da geometria do revestimento</i>	53
4.2.3. <i>Efeito do tamanho de bolas</i>	58
4.2.4. <i>Efeito da rotação</i>	61
4.2.5. <i>Efeito do enchimento de bolas</i>	61
4.3. CALIBRAÇÃO DO APLICATIVO	61
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	64
5.1. CALIBRAÇÃO DO APLICATIVO.....	64
5.2. CONFIGURAÇÃO DE CONTROLE.....	70
5.3. EFEITO DA GEOMETRIA DO REVESTIMENTO	75
5.4. EFEITO DO TAMANHO DE BOLAS.....	90
5.5. EFEITO DA ROTAÇÃO	103
5.6. EFEITO DO ENCHIMENTO DE BOLAS	113
6. CONCLUSÕES	121
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	123

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-1 Moinho de bolas típico (Austin, 1984).....	2
FIGURA 3-1 Rompimento da rede cristalina em função de cargas de compressão e tração (Wills, 2006)	8
FIGURA 3-2 Concentração de tensão em tração uniforme (Wills, 2006).....	8
FIGURA 3-3 Relação entre aplicação de energia e o tamanho de partícula na cominuição (Hukki, 1961)	12
FIGURA 3-4 Moinho de Martelos (Wills, 2006)	13
FIGURA 3-5 Moinho de Rolos de Alta Pressão, o HPGR (Figueira, 2004).....	13
FIGURA 3-6 Tipo genérico de Moinho Cilíndrico (Figueira, 2004)	14
FIGURA 3-7 Moinho AG/SAG típico (Napier-Munn, 1996)	15
FIGURA 3-8 Moinho de bolas em repouso (Austin, 1984)	16
FIGURA 3-9 Diferentes geometrias de revestimento (Wills, 2006)	20
FIGURA 3-10 O movimento de catarata promove o lançamento de bolas a uma maior distância, podendo superar o limite do leito de bolas, causando danos.....	22
FIGURA 3-11 Configurações da classificação em circuitos de moagem (Gupta, 2006)24	
FIGURA 3-12 Módulos da simulação	26
FIGURA 3-13 No Método de Elementos Discretos a sobreposição	31
FIGURA 3-14 A Dinâmica Computacional é uma área da Ciência que estuda os movimentos dos corpos e suas causas (Adaptado de Halliday, 1974).....	32
FIGURA 3-15 Na Dinâmica de Corpos Rígidos a força F_n deverá impedir a sobreposição da bola com o plano horizontal.	33
FIGURA 4-1 Duas esferas se colidindo em um único contato.....	39
FIGURA 4-2 Janela principal do aplicativo de simulação	42

FIGURA 4-3 Janela de configuração do simulador.....	44
FIGURA 4-4 Aplicativo de tratamento de dados	46
FIGURA 4-5 Grade de presença de bolas em um instante de tempo.	48
FIGURA 4-6 Grade de presença de bolas com dados acumulados por 3 s em passos de tempo de 1E-3s.	49
FIGURA 4-7 Moinho de 1,5 m de diâmetro e detalhe das barras elevadoras utilizado na simulação.	52
FIGURA 4-8 Configuração do revestimento da simulação IDB01	55
FIGURA 4-9 Configuração do revestimento da simulação IDB02	55
FIGURA 4-10 Configuração do revestimento da simulação IDB03	56
FIGURA 4-11 Configuração do revestimento da simulação IDB04	56
FIGURA 4-12 Configuração do revestimento da simulação IDB05	57
FIGURA 4-13 Configuração do revestimento da simulação IDB06	57
FIGURA 4-14 Configuração do revestimento da simulação IDB07	58
FIGURA 4-15 Configuração do revestimento da simulação IDB08	58
FIGURA 4-16 Moinho utilizado na validação do software	63
FIGURA 4-17 Imagem da preparação de um teste de validação	63
FIGURA 5-1 O perfil interno do revestimento é reproduzido no aplicativo de simulação.	65
FIGURA 5-2 Testes de calibração.	65
FIGURA 5-3 Para um enchimento de bolas de 25%, velocidade de rotação de 70%Nc, o teste desenvolvido por Moys (Moys,2003) é comparado à simulação obtida pelo aplicativo desenvolvido para o presente trabalho.	67

FIGURA 5-4 Rotações de (A) 30, (B) 100, e (C) 160 %Nc são comparadas com o estudo apresentado por Moys (Moys,2003).....	68
FIGURA 5-5 Adaptado de Moys (Moys,2003) – A potência experimental é comparada aquela prevista pelo aplicativo de simulação para as condições apresentadas no estudo de Moys.....	69
FIGURA 5-6 A aceleração imediata da carga faz com que uma condição de equilíbrio só seja alcançada após alguns segundos de simulação.	70
FIGURA 5-7 Quadros da simulação de controle em estado de equilíbrio em intervalos de 2,00s.	71
FIGURA 5-8 Grades de análises, quadro final e trajetórias de bolas para a simulação de controle (IDA01).....	74
FIGURA 5-9 Distribuição de frequência de impacto para a simulação de controle.	74
FIGURA 5-10 A mudança do ângulo de ataque da barra promove uma modificação no lançamento das bolas, porém o ângulo de <i>toe</i> é pouco alterado.	76
FIGURA 5-11 O lançamento de bolas além do <i>toe</i> é fortemente influenciado pela altura da face de ataque das barras elevadoras.....	77
FIGURA 5-12 Detalhe da posição do <i>sholder</i> nas simulações IDB04 (A) e IDA01 (B)77	
FIGURA 5-13 Detalhe da posição do <i>toe</i> nas simulações IDB04 (A) e IDA01 (B)	78
FIGURA 5-14 Efeito de classificação do lançamento de bolas em virtude da redução do número de barras elevadoras.....	79
FIGURA 5-15 A redução do número de barras elevadoras, apesar de não modificar a posição do <i>toe</i> , faz com que bolas de maiores diâmetros sejam lançadas mais adentro do leito de bolas.	79
FIGURA 5-16 A carga em cascata é privilegiada por barras elevadoras mais altas.	80
FIGURA 5-17 Quadro final das simulações que investigaram o efeito da geometria do revestimento.....	81

FIGURA 5-18 Detalhes da geometria das barras elevadoras utilizadas nas simulações e respectivas trajetórias da carga de bolas.	84
FIGURA 5-19 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	85
FIGURA 5-20 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	86
FIGURA 5-21 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	87
FIGURA 5-22 Distribuição de frequência de impactos para as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	88
FIGURA 5-23 Número de impactos para as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	89
FIGURA 5-24 Relação entre a potência consumida e as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.	89
FIGURA 5-25 Relação entre cargas de monotamanho e potência consumida para as simulações que avaliam o efeito da do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.	90
FIGURA 5-26 Relação entre cargas de compostas por diferentes diâmetros e potência consumida para as simulações desenvolvidas.	91
FIGURA 5-27 Relação entre cargas e potência consumida para as simulações desenvolvidas.	92
FIGURA 5-28 Quadro final das simulações mostrando a configuração da carga em diferentes distribuições de tamanho de bolas.	93
FIGURA 5-29 Detalhe do ponto de <i>sholder</i> das simulações IDC02 e IDC05.	93

FIGURA 5-30 Detalhe da região de <i>toe</i> para cargas de monotamanho.....	94
FIGURA 5-31 Detalhe da região de <i>sholder</i> para cargas de monotamanho.	95
FIGURA 5-32 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.	96
FIGURA 5-33 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora. ...	97
FIGURA 5-34 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.....	98
FIGURA 5-35 Número de impactos por composição de carga testada nas simulações.	99
FIGURA 5-36 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.....	100
FIGURA 5-37 Distribuição de frequência de impacto para cargas monotamanho testadas nas simulações.....	101
FIGURA 5-38 Número de impactos por segundo para cargas monotamanho testadas nas simulações.....	101
FIGURA 5-39 Distribuição de frequência de impacto para cargas compostas testadas nas simulações.	102
FIGURA 5-40 Número de impactos por segundo para cargas compostas testadas nas simulações.....	102
FIGURA 5-41 FIGURA: Cargas de diferentes composições forneceram o mesmo padrão de impacto.....	103
FIGURA 5-42 Arranjo espacial do carregamento para as simulações que avaliaram o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.....	105
FIGURA 5-43 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.....	106

FIGURA 5-44 Potência simulada em função da rotação do moinho comparada com previsão teórica.	107
FIGURA 5-45 Número de impactos por segundo em função da rotação do moinho...	108
FIGURA 5-46 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.....	109
FIGURA 5-47 Relação de baixas magnitudes de impacto (0 a 20N.s) com a rotação do moinho.	110
FIGURA 5-48 Relação de altas magnitudes de impacto (> 560N.s) com a rotação do moinho.	110
FIGURA 5-49 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.....	111
FIGURA 5-50 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.	113
FIGURA 5-51 Arranjo espacial do carregamento para as simulações que avaliaram o efeito do enchimento de bolas na dinâmica da carga.....	114
FIGURA 5-52 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do enchimento na dinâmica da carga.....	115
FIGURA 5-53 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do enchimento na dinâmica da carga de bolas.	116
FIGURA 5-54 Relação do número de bolas com o enchimento para a distribuição de tamanho de bolas estabelecida nos testes.	117
FIGURA 5-55 Número de impactos por segundo em função do enchimento de bolas	117
FIGURA 5-56 Relação do número de impacto por segundo por bola nas simulações.	118
FIGURA 5-57 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.....	118
FIGURA 5-58 Relação da potência, simulada e teórica, com o enchimento de bolas.	119

FIGURA 5-59 Distribuição da energia cinética da carga de bolas. O aumento do enchimento contribui para a melhor definição da zona-morta.	120
---	-----

Lista de Tabelas

TABELA 3-1 Estágios da britagem (Figueira, 2004).....	6
TABELA 3-2 Módulos da simulação	27
TABELA 4-1 Descrição de análises espaciais	50
TABELA 4-2 Conjuntos de dados de controle da simulação	52
TABELA 4-3 Geometrias utilizadas nas simulações	53
TABELA 4-4 Configuração das simulações	54
TABELA 4-5 O número de bolas para cargas de diferentes tamanhos têm uma relação que cresce à terceira potência.	59
TABELA 4-6 Distribuição de cargas simuladas.....	60
TABELA 4-7 Rotações simuladas.....	61
TABELA 4-8 Enchimentos simulados	61
TABELA 4-9 Parâmetros dos testes de calibração.....	62

Resumo

A fragmentação que alguns chamam cominuição é o conjunto de operações que realizam o fraturamento do material, minério, desde grandes blocos vindo da lavra, até os menores tamanhos exigidos pela liberação do material útil daquele sem valor econômico. Dentre os inúmeros equipamentos destinados a realização da operação os moinhos revolventes são os mais empregados nas etapas finais do processo. Esses equipamentos consistem em uma estrutura cilíndrica horizontalizada, revestido com um material de proteção e preenchidos com uma carga moedora e o material a ser processado.

O entendimento da dinâmica da carga moedora em um moinho de bolas oferece um potencial para a melhoria das condições da operação, o que pode ser traduzido em diminuição de gastos energéticos, redução do desgaste prematuro do revestimento entre outras melhorias. Contudo, dado o a robustez do equipamento, a observação experimental da trajetória de cada uma das muitas bolas no interior do moinho é uma tarefa inviável, tornando esse estudo candidato a ser realizado por simulação.

No presente estudo o efeito no movimento da carga de bolas é investigado por simulação em duas dimensões de um moinho de bolas e avaliado quanto a alteração de parâmetros operacionais e de construção desses equipamentos tais quais: geometria do revestimento, distribuição de tamanho de bolas e velocidade de rotação.

Abstract

Comminution is a set of operations to achieve size reduction for a material, from large mined blocks (ROM – Run of Mine), to the smallest size required for liberation of useful material from that of no economic value. Among numerous equipments employed in this operation, tumbling mills are the most commonly used in the final stages of comminution process. These devices consist of a large cylindrical shell horizontally oriented, lined with a protection layer and filled with a grinding charge and the material being processed.

The charge dynamics in a ball mill is investigated by computer simulation using Rigid Body Dynamics method. The lining shape, ball size distribution of and rotation speed are evaluated for power consumption and impacts dynamics between balls and balls-shell.

1. Introdução

A fragmentação que alguns chamam cominuição é o conjunto de operações que realizam o fraturamento do material, minério, desde grandes blocos vindo da lavra, até os menores tamanhos exigidos pela liberação do material útil daquele sem valor econômico. Dentre os inúmeros equipamentos destinados a realização da operação os moinhos revolventes são os mais empregados nas etapas finais do processo. Esses equipamentos consistem em uma estrutura cilíndrica horizontalizada revestida internamente por um material de proteção. A carga moedora de bolas ou barras metálicas ou ainda autógenos e semi-autógenos, quando a carga moedora é o próprio minério, definem a designação do equipamento. Assim um moinho revolvente é comumente chamado de moinho de bolas, barras, autógeno ou semi-autógeno.

A FIGURA 1-1 apresenta a configuração de um moinho de bolas típico. A estrutura cilíndrica é carregada com bolas de aço, uma alimentação grosseira entra por uma extremidade e passa pelo seu interior recebendo ação de quebra da carga moedora que é lançada sobre o material devido ao efeito de rotação da carcaça cilíndrica. Um produto com uma distribuição granulométrica reduzida é descarregado pela outra extremidade.

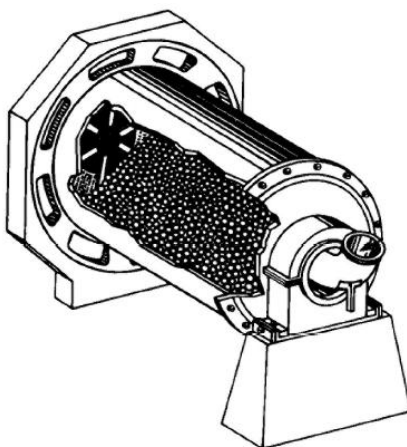


FIGURA 1-1 Moinho de bolas típico (Austin, 1984)

Nas últimas décadas, modelos matemáticos denominados como modelos fenomenológicos ou cinéticos foram apresentados e diferentes tipos de sistemas foram desenvolvidos com o objetivo de analisar o efeito da energia de impacto no processo de quebras das partículas minerais. O Modelo de Balanço Populacional (MBP) (Reid,

1965), tem sido largamente utilizado para a simulação e otimização de circuitos industriais de moagem.

Métodos mais recentes propostos nos estudos de Mishra e Rajamani (Mishra, 1990) envolvem a simulação do movimento da carga moedora obtidos por Modelo de Elementos Discretos (DEM - *Discrete Element Method*) (Cundall, 1979).

Estudos de simulação permitem avaliar as condições de moagem no que se refere à dinâmica da carga, um importante aspecto operacional já que a energia requerida ao fraturamento do material é obtida pelo impacto, atrito e compressão da carga sobre este. A energia é acumulada pela carga de bolas na forma de energia potencial gravitacional durante a elevação desta pela parede interna do moinho e descarregada na forma de energia cinética durante a queda. O movimento da carga moedora está condicionado a velocidade de rotação, geometria do revestimento, nível de enchimento e diversos outros fatores.

O entendimento da dinâmica da carga moedora em um moinho de bolas oferece um potencial para a melhoria das condições da operação, o que pode ser traduzido em diminuição de gastos energéticos, redução do desgaste prematuro do revestimento entre outras melhorias. Contudo, dado o a robustez do equipamento, a observação experimental da trajetória de cada uma das muitas bolas no interior do moinho é uma tarefa inviável, tornando esse estudo candidato a ser realizado por simulação.

A determinação do movimento dos elementos moedores traz, de forma inerente, informações sobre as forças envolvidas no movimento, um dado muito difícil de ser obtido na prática, que permite, por exemplo, prever a potência consumida pelo equipamento.

Simulações são ferramentas que imitam o comportamento de alguma situação ou processo de maneira suficientemente análoga. Para isso, faz-se o uso de modelos matemáticos compatíveis. A simulação do movimento da carga moedora em moinhos de bola desenvolvida pelo autor utiliza a Dinâmica de Corpos Rígidos (DCR) (Pöschel, 2005), um método que vem sendo desenvolvido rapidamente nos últimos anos. O software aplicado permite a análise do comportamento da carga moedora em diferentes configurações de construção e operação dos equipamentos.

No presente estudo o efeito no movimento da carga de bolas é investigado por simulação em duas dimensões de um moinho de bolas e avaliado quanto a alteração de parâmetros operacionais e de construção desses equipamentos tais quais: geometria do revestimento, distribuição de tamanho de bolas e velocidade de rotação.

2. Objetivos e metas

O presente trabalho tem por objetivo estudar a dinâmica da carga moedora em moinhos de bola através de técnicas de simulação por computador utilizando DCR. Através da análise do movimento da carga e a distribuição de energias de impacto, a simulação permitirá um melhor entendimento do movimento da carga moedora, oferecer um potencial para melhorar o *design* e operação dos moinhos e reduzir o desgaste do revestimento. Isso pode levar a um aumento da disponibilidade do equipamento, da eficiência de moagem, produção e diminuir custos e o gasto energético.

3. Revisão bibliográfica

3.1. Cominuição

Uma vez que a maioria das partículas de minério encontra-se disseminados nas rochas, existe a necessidade de se romper a união física entre elas, processo conhecido como liberação, para que a separação possa ser realizada. A liberação é realizada pela redução sucessiva do material até que as partículas de minério possam ser separadas pelo método de concentração mais conveniente. Além da liberação, a cominuição pode ter outros objetivos como:

- produção de partículas em formas e tamanhos determinados por especificações comerciais
- aumento da área superficial específica dos minerais, facilitando a cinética de reagentes químicos.

3.1.1. Etapas

Lavra: Explosivos geralmente são usados na mineração para remover o material de interesse da sua formação natural. Dessa forma, o desmonte do na lavra é considerado a primeira etapa de cominuição. Na usina de tratamento, a cominuição ocorre como uma sequência de processos de britagem e moagem.

Britagem: Desconsiderando o desmonte na lavra, a britagem é a primeira etapa no processo de cominuição e tem como objetivo a redução de grandes blocos de material a tamanhos compatíveis para a sequência do processamento. É geralmente uma operação seca e realizada em vários estágios, utilizando equipamentos capazes de fornecer razões de redução variando entre seis e dez em cada estágio. A razão de redução de um estágio de britagem pode ser definida como a relação do tamanho da maior partícula que entra para o maior tamanho de partícula que sai do britador, embora outras definições são usados às vezes. Blocos de do material ROM com dimensões de até 1,0 m de diâmetro são reduzidos na britagem primária a 10 cm em britadores de grande porte. É comum que os estágios de britagem sejam definidos de acordo com a TABELA 3-1, onde estágios terciários e quaternários também podem ser considerados como moagem.

TABELA 3-1 Estágios da britagem (Figueira, 2004)

Estágio da Britagem	Tamanho máximo de alimentação (mm)	Tamanho Máximo de saída (mm)
Primária	1000	100
Secundária	100	10
Terciária	10	1
Quaternária	5	0,8

A partir de uma série de estudos de caso (Flavel, 1978), foi constatado que nas etapas finais das operações de britagem, uma redução equivalente pode ser alcançada utilizando-se cerca de metade da energia e os custos exigidos em relação à mesma redução fornecida pela moagem.

A descrição detalhada da britagem e dos equipamentos utilizados está fora do escopo dessa dissertação.

Moagem: A moagem é o último estágio do processo de cominuição. Neste estágio as partículas são reduzidas, pela combinação de impacto, compressão e abrasão. A extensão da redução de tamanho irá depender de muitos fatores, mas principalmente da forma como o mineral útil está distribuído na ganga e do processo de concentração que irá ser usado em seguida.

Os investimentos na etapa de moagem geralmente são elevados, assim como o consumo energético da operação. Portanto, um bom desempenho dessa etapa é de extrema importância. A sobremoagem é indesejada, uma vez que a redução desnecessária do material aumenta o consumo energético e resulta em perdas na maioria dos processos de concentração. A submoagem resulta em redução da recuperação e também pode inviabilizar o processo de concentração.

Os equipamentos mais empregados na moagem são: moinho revolventes (barras, bolas ou seixos), moinho de martelos entre outros que serão descritos adiante.

3.1.2. Mecanismos de cominuição

Para entender como a cominuição ocorre dentro dos equipamentos industriais é primeiro preciso estudar o fenômeno físico que ocorre ali. Minerais são materiais em que os átomos estão dispostos em uma rede cristalina regular. As ligações interatômicas que

mantêm a estrutura dessas redes podem ser rompidas se a distância que separa os átomos for aumentada em função da aplicação de uma carga de compressão ou tração.

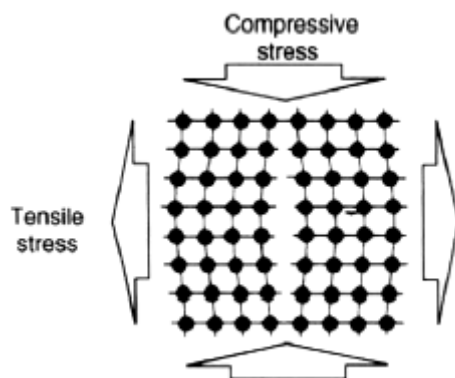


FIGURA 3-1 Rompimento da rede cristalina em função de cargas de compressão e tração (Wills, 2006)

Em uma rocha que sofre compressão ou tração, a distribuição interna das tensões tende a não ser uniforme. O fato se dá devido às propriedades mecânicas das partículas da rocha variar conforme o mineral do qual ela é composta e, principalmente, da presença de fraturas e imperfeições na rede cristalina, que age como sítios de concentração de tensões.

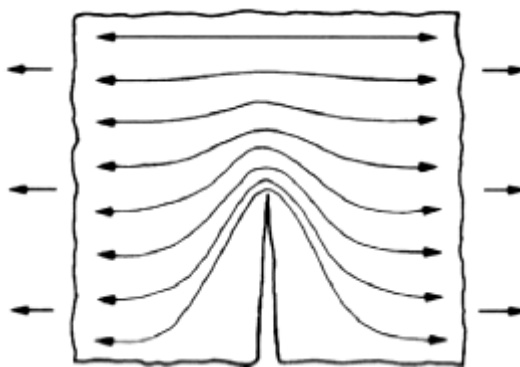


FIGURA 3-2 Concentração de tensão em tração uniforme (Wills, 2006)

Uma rocha carregada uniformemente que apresente uma região de fratura irá redistribuir a tensão aplicada. É mostrado (Ingilis, 1913) que nessas regiões ocorre um aumento da tensão proporcional ao tamanho da falha. Dessa maneira, se a carga aplicada é aumentada, os níveis de tensão na ponta da falha podem atingir valores

suficientes para romper a estrutura cristalina. Uma vez que a trinca é aumentada, a concentração de tensões se torna ainda maior e o progresso da falha ocorre pela rede cristalina, podendo resultar na a fratura completa.

Difícilmente as tensões aplicadas são uniformes em partículas minerais que possuem formas irregulares. A quebra dessas partículas é feita pela aplicação de tensões classificadas das seguintes formas:

- impacto: a aplicação de tensões de compressão de forma rápida em intensidades muito superiores ao limite de resistência da partícula resulta no aparecimento de partículas em uma ampla faixa granulométrica. É o principal mecanismo de fratura presente nos britadores de impacto e também aparece em moinhos.
- compressão: a aplicação mais lenta de tensões de compressão pouco superiores ao limite de resistência do material promove o progresso das trincas e a conseqüente fratura. É o principal mecanismo de fratura nos britadores de mandíbula, cônico e giratório.
- cisalhamento (abrasão): a aplicação de tensões tangenciais à superfície menores que o limite de resistência do material resulta na concentração de tensões que pode provocar o aparecimento de pequenas fraturas. O tamanho das partículas geradas por esse tipo de fratura é geralmente reduzido quando comparado à partícula original, ou seja, a produção de material fino é privilegiada. O mecanismo aparece sempre que ocorre o atrito entre o material com ele mesmo, com a carga moedora dos moinhos e nas placas dos britadores.

3.1.3. Aspectos energéticos e modelos clássicos

Uma das preocupações quando se trata da cominuição é a relação entre a energia utilizada e a extensão da redução obtida. O problema está no fato de que a maior parte da energia aplicada ao processo é absorvida pelos equipamentos de cominuição e somente uma pequena fração é direcionada para os mecanismos que promovem a quebra do material. Em moinho de bolas, menos de 1% da energia consumida na moagem é utilizada na fratura do material, sendo a maior parte da energia perdida na produção de calor (Wills, 2006). Outra fonte de perda se dá ao fato de que os materiais apresentam certa elasticidade, respondendo com deformações plásticas à aplicação de

tensões inferiores à resistência do material, resultando no consumo de energia sem a ocorrência de fratura.

No processo de fragmentação, a medida que as partículas se reduzem, sua área superficial aumenta. Dessa forma, a variação da área superficial serve para indicar a quantidade de energia gasta no processo.

Assim, se E for a energia usada para certa redução de tamanho, que resulta numa variação da área superficial S , temos que:

$$dE = kS^n dS$$

EQ. 3-1

onde k é uma constante que é função da resistência à fragmentação dos diferentes tipos de rocha. A integração da é feita entre o tamanho inicial x_1 da alimentação e o produto x_2 . Para fins práticos, costuma-se usar o F_{80} e P_{80} , ou seja, o tamanho onde se tem 80% passante do material da alimentação e produto, respectivamente.

Pesquisadores da segunda metade do século 19 apresentaram hipóteses físicas para determinar o valor do expoente n . A teoria mais antiga é a de Von Rittinger (Rittinger, 1867), ($n = 2$) que afirma que a energia consumida na redução de tamanho é proporcional à área da nova superfície produzida. Assim temos:

$$E = k \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right)$$

EQ. 3-2

Na mesma linha, Kick (Kick, 1883) afirma que o trabalho exigido é proporcional à redução do volume das partículas consideradas ($n = -1$).

$$E = k \ln(x_1 / x_2)$$

EQ. 3-3

A expressão de Bond (Bond, 1952), baseada em extensivo trabalho experimental, determina a energia para a redução substituindo $n = -1.5$:

$$E = 2k \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right)$$

EQ. 3-4

Para uma fragmentação em circuito fechado Bond derivou que a energia específica E (kW/t) para a moagem como:

$$E = 10W_i \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right)$$

EQ. 3-5

O *work-index* W_i é o parâmetro que expressa a resistência à cominuição do material à britagem e moagem. Numericamente é o quilowatts-hora por tonelada curta necessária para reduzir o material do tamanho de alimentação (teoricamente infinito) a 80% passando 100 micrômetros.

Hukki (Hukki, 1961) estudando dados industriais mostra que as relações acima não são, individualmente, adequadas processo. As regiões de aplicação de cada um dos modelos é mostrada na FIGURA 3-3. Para tamanhos grosseiros, tipicamente os da etapa de britagem, a equação de Kick é mais apropriada. A equação de Bond é indicada para os tamanhos que ocorrem geralmente em moinhos de barra e bola. Para moagem de finos a relação de Rittinger é a que mais se ajusta aos dados estudados.

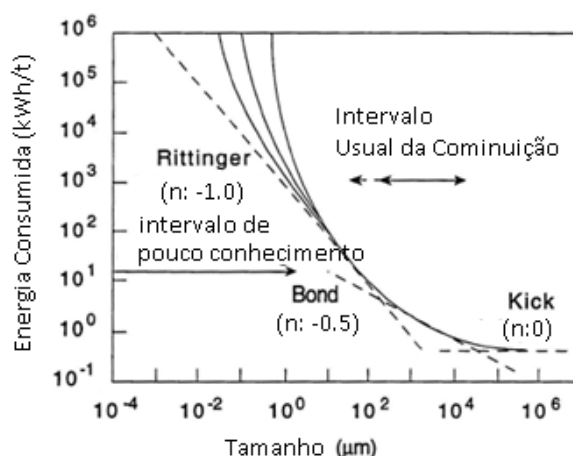


FIGURA 3-3 Relação entre aplicação de energia e o tamanho de partícula na cominuição (Hukki, 1961)

3.1.4. Equipamentos de Moagem

Diferentes tipos de material, aplicações e escalas de produção são aspectos a serem considerados na escolha do equipamento a ser utilizado em uma aplicação industrial. A seguir serão brevemente apresentados alguns dos equipamentos utilizados em circuitos de cominuição. Ênfase dada aos moinhos tubulares, especialmente os de bola, tema dessa dissertação.

Moinhos de martelos

O moinho de martelos, mostrados em seção na FIGURA 3-4 são formados por um eixo girando em alta rotação onde são presos martelos de aço. O material alimentado pela abertura superior é projetado pelos martelos nas paredes internas do equipamento, revestidas por placas de aço resistentes a abrasão. O material fragmentado segue para a extremidade inferior, onde uma tela classifica o produto desejado.

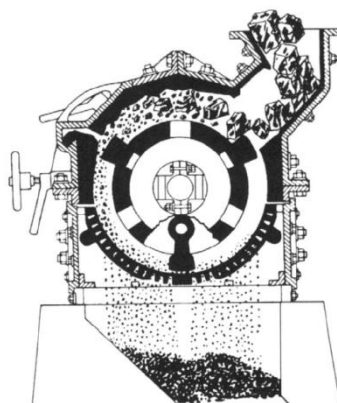


FIGURA 3-4 Moinho de Martelos (Wills, 2006)

Esse tipo de moinho tem pouca aplicação em usinas de tratamento, uma vez que a maioria das gangas são silicosas, provocando um grande desgaste dos componentes do equipamento.

Moinhos de rolo de alta pressão

Um dispositivo de cominuição relativamente novo, os rolos de moagem de alta pressão ou HPGR (*high pressure grinding rolls*, FIGURA 3-5), utiliza a compressão de um leito de partículas por um sistema hidráulico, de forma que a quebra ocorre inter-partículas reduzindo o atrito direto das partículas entre os dois rolos. A taxa de redução obtida em uma única passagem através do HPGR é substancialmente maior do que a obtida em britadores de rolo convencionais (Figueira, 2004).

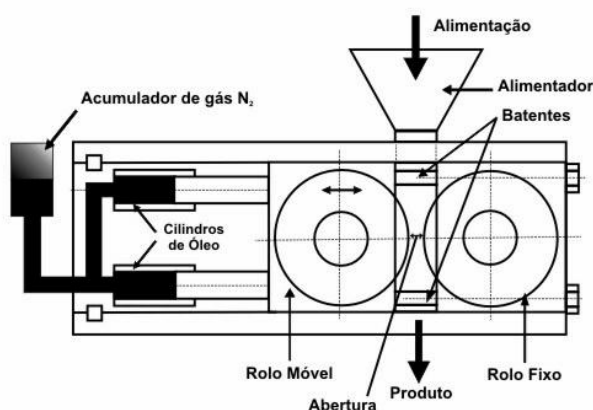


FIGURA 3-5 Moinho de Rolos de Alta Pressão, o HPGR (Figueira, 2004)

O HPGR oferece um potencial real para reduzir significativamente os requisitos de

energia necessária pelas usinas. Relatórios têm sugerido que os HPGR podem ser entre 20 e 50% mais eficiente do que os britadores e moinhos convencionais (Esna-Ashari e Kellerwessel, 1988).

Moinhos revolventes

Moinhos revolventes, FIGURA 3-6, consistem em uma estrutura cilíndrica horizontalizada revestida internamente por um material de proteção. O minério, ou o material a ser processado, é carregado junto à carga de bolas e (geralmente) água. A moagem pode, entretanto, ser realizada a seco, prática comum na indústria de cimento.

Carregados com barras ou bolas metálicas como o meio de moagem ou aqueles autógenos/semi-autógenos (quando a carga moedora é o próprio minério) são os equipamentos mais usados nos últimos estágios de cominuição.

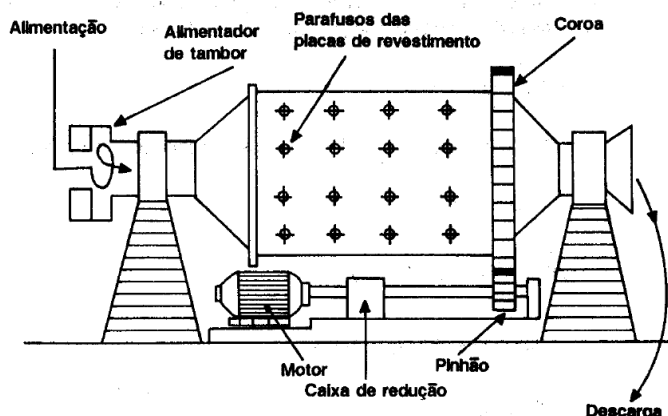


FIGURA 3-6 Tipo genérico de Moinho Cilíndrico (Figueira, 2004)

Entre esses moinhos, os de bola são aquele mais comum de serem encontrados em uma operação. A razão disso talvez seja a sua eficiência, sendo bem empregado em longa faixa granulométrica, variando de milímetros, em moagens primárias a micron em moagens secundárias/terciárias ou em produção de finos.

Moinhos de barra

São moinhos tubulares, que utilizam barras metálicas como meio moedor, sendo consideradas máquinas de britagem fina ou de moagem grossa. Eles são capazes de suportar uma alimentação tão grossa quanto 50 mm e fornecer um produto tão fino quanto 500 micrômetros. A característica principal do moinho de barra é que o

comprimento da seção cilíndrica tem 1,25 a 2,5 vezes o diâmetro. Essa razão é importante porque as barras, que têm somente poucos centímetros menores que o comprimento da carcaça, devem ser impedidas de se atravessarem dentro da mesma; entretanto a razão não deve ser muito elevada, pois isso acarretaria o uso de barras muito longas com tendência a se deformarem.

Moinhos AG/SAG

O termo autógeno aplicado a moinhos revolventes é atribuído a Robinson (Robinson, 1980). O adjetivo é bem empregado, uma vez que os moinhos deste tipo não necessitam de carga moedora se não aquela fornecida pela parcela do material de maior resistência a cominuição. O uso um reduzido enchimento de carga de bolas dá origem a moagem semi-autógena (ou SAG - *semi-autogenous grinding*). Nos últimos anos observa-se uma crescente popularidade no emprego desse tipo de moagem.

O moinho SAG da FIGURA 3-7 mostra uma elevada relação diâmetro/comprimento, característica desses equipamentos e que varia entre 1,5-3,0. Os moinhos AG/SAG podem ser inseridos em circuitos de cominuição logo após o britador primário, reduzindo os custos de capital com equipamentos de britagem secundária. Entretanto a geração de material na faixa de 25,0-50,0mm pelos moinhos AG/SAG faz comum a associação em circuito fechado de equipamentos de britagem.

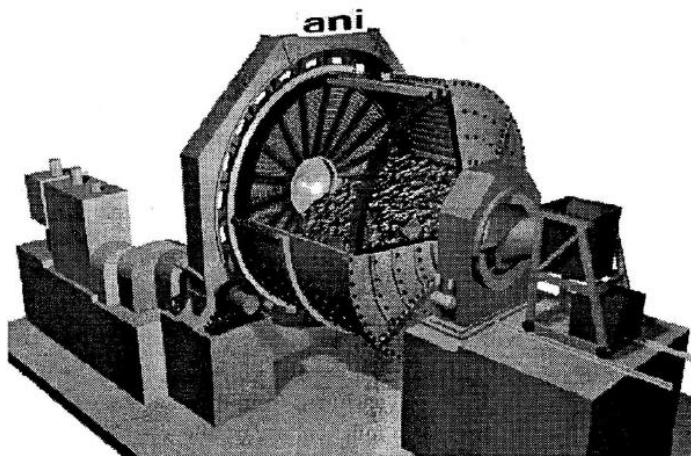


FIGURA 3-7 Moinho AG/SAG típico (Napier-Munn, 1996)

Moinhos de bola

Os moinhos de bolas são usados principalmente para moagem de finos, remoagem assim como no estágio secundário quando há dois circuitos de moagem.

Durante o século passado, a adoção industrial de moinhos de bola apresentou crescimento constantemente, movido principalmente pela sua alta capacidade de produção. Durante a década de 1950 e 60, moinhos de grandes diâmetros dominaram as moagens primárias de alta capacidade. Entretanto, desde 1970, a britagem e moagem primária de grossos por moinhos de bolas vêm sendo suplantados por circuitos AG/SAG. Moinhos de bola continuam a dominar as moagens secundárias, mas competem com circuitos fechados AG/SAG e moinhos de torre (Napier-Munn, 1996).

Descrição do processo

A FIGURA 3-8 apresenta a configuração de um moinho de bolas típico. A estrutura cilíndrica é carregada com corpos moedores, no caso bolas de aço. Um produto grosseiro é alimentado em uma extremidade, passa pelo seu interior recebendo ação de quebra da carga moedora que é lançada sobre o material devido ao efeito de rotação da carcaça cilíndrica. Um produto com uma distribuição granulométrica reduzida é descarregado pela outra extremidade.

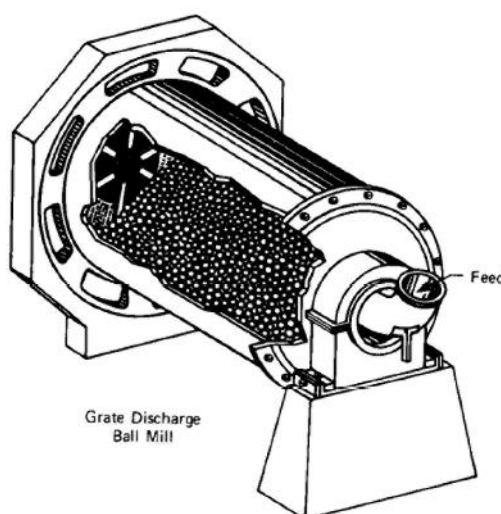


FIGURA 3-8 Moinho de bolas em repouso (Austin, 1984)

De maneira geral, esses equipamentos são utilizados na redução de partículas entre 5 e 250mm até um produto entre 40 e 300µm.

Dois tipos de moinhos de bola são distintos em função do seu sistema de descarga. Moinhos de descarga por *overflow* possuem uma abertura na extremidade de saída de diâmetro maior que aquela de entrada, o que gera um gradiente hidráulico, forçando o material para fora do moinho. Os de descarga por grelha possuem uma tela interna e barras elevadoras de polpa na extremidade de saída, permitindo a operação em níveis de polpa mais baixos em comparação aos de descarga por overflow.

Peneiras tipo trommel podem ser instaladas na saída do moinho, sendo eficazes na remoção de bolas e material grosseiro. Para operações de moagem primária com grandes bombas e classificadores, a adoção de uma espiral de retorno na descarga do moinho é suficiente para a retenção da carga e do material grosseiro, sendo dispensável a utilização de trommels.

Variáveis de importância

Potência

A energia requerida para a cominuição de um material grosseiro até a granulometria do produto desejado é uma função das propriedades do material, bem como das condições de operação do equipamento empregado. Conforme visto, a potência consumida pelo moinho é utilizada pelo método de Bond para o dimensionamento preliminar do equipamento. Além disso, é importante manter a relação de energia por tonelada de material produzido em níveis econômicos.

Austin determina a potência do moinho em função da geometria e condições de carregamento de acordo com a EQ. 3-6:

$$W_{st} = 4.879D^{0.3}(3.2 - 3T_c)V_r \left[1 - \frac{0.1}{2^{9-10V_r}} \right]$$

EQ. 3-6

Onde:

Wst : Potência consumida por tonelada curta de bolas carregadas

D: Diâmetro do moinho (m)

Tc: Fração do moinho ocupada por bolas

Vr: fração da velocidade crítica

Dimensões

Moinhos de bola podem ser bastante flexíveis em relação a suas dimensões. A relação de aspecto (comprimento/diâmetro) podem variar entre 1,0:1,3 e 3,0:1,0, sendo as mais comuns aquelas entre 1,0 e 1,5.

A capacidade de ser escalonável torna o equipamento versátil. Moinhos de laboratório podem ser construídos em dimensões de 200 mm x 200 mm, consumindo alguns watts, enquanto moinhos industriais são encontrados com até 6 m de diâmetro por 9 m de comprimento, consumindo mais de 10 megawatts.

Carregamento

Esses parâmetros são estabelecidos da mesma maneira, independente do tipo de moinho em questão. O carregamento de bolas J é dado pela fração do volume interno ocupada por bolas (Austin, 1981). Na prática, utiliza-se a massa de bolas carregada e a consideração de uma porosidade média de 0,4 para o cálculo do enchimento de bolas:

$$J = \left(\frac{\text{massa de bolas} / \text{densidade da bola}}{\text{volume do moinho}} \right) * \frac{1.0}{0.6} \quad \text{EQ. 3-7}$$

De maneira semelhante, a fração do volume ocupado por material f_c é calculado pela fórmula:

$$f_c = \left(\frac{\text{massa de material} / \text{densidade do material}}{\text{volume do moinho}} \right) * \frac{1.0}{0.6} \quad \text{EQ. 3-8}$$

A fração do volume entre as bolas ocupado por material U é dada pela relação:

$$U = \frac{f_c}{0.4J} \quad \text{EQ. 3-9}$$

Um valor adequado para J deve estar em torno de 0,35 – 0,40. A ocupação dos espaços entre as bolas por material é, geralmente, completa.

Velocidade de rotação

A rotação do moinho é dada pela fração (ou porcentagem) daquela onde a carga começa a ser centrifugada em seu interior. Nesse ponto o moinho apresenta a chamada velocidade crítica N_c em RPM tem-se:

$$N_c = \frac{42.3}{\sqrt{D-d}} \quad \text{EQ. 3-10}$$

Onde D é o diâmetro em metros interno ao revestimento e d o diâmetro em metros da maior bola carregada.

A velocidade de rotação é um parâmetro de grande importância quando se trata do consumo energético de um moinho. Em geral a operação é feita com rotações de 65 a 85% da velocidade crítica.

Revestimento

Internamente os moinhos são revestidos com um material resistente a impactos e abrasão. Além disso, placas elevadoras (*lifters*) são utilizadas para promover um melhor lançamento da carga moedora sobre o material. Geralmente utiliza-se ligas de aço-manganes e aço-cromo além ou borracha.

Existem inúmeras variações para a geometria do revestimento dos moinhos. Perfis lisos privilegiam a quebra por abrasão, sendo mais utilizadas para moagem de finos. Em geral os *lifters* são elaborados para promover uma maior elevação da carga moedora, privilegiando a quebra pelo mecanismo de impacto. A FIGURA 3-9 mostra diferentes geometrias comuns para o revestimento.

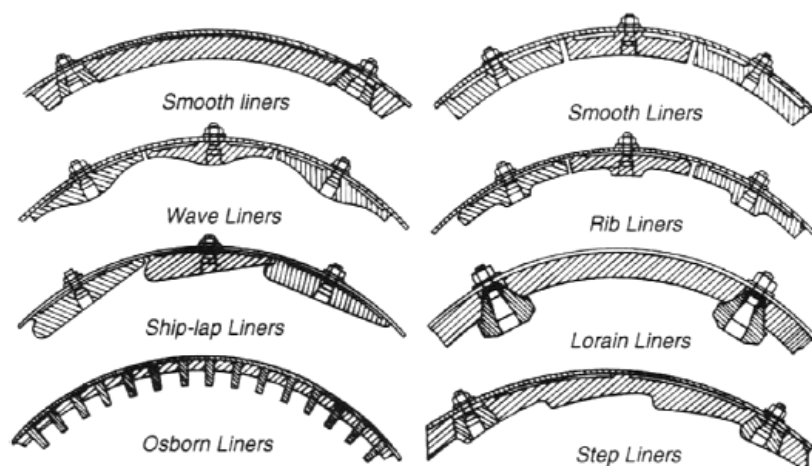


FIGURA 3-9 Diferentes geometrias de revestimento (Wills, 2006)

A troca do revestimento representa um custo expressivo na operação dos moinhos, além da perda econômica devido ao tempo ocioso para a manutenção. Dessa forma a tendência é de se privilegiar a seleção revestimentos que apresentam uma maior vida útil, independentemente da relação de custos entre eles (Wills, 2006).

O uso de revestimentos de borracha tem suplantado os de liga de aço em algumas operações, apresentando maior vida útil, facilidade e rapidez na instalação além da redução nos níveis de ruído da operação. O consumo de carga moedora entretanto pode ser aumentado pelo uso de revestimento de borracha, além disso a temperatura de operação não deve passar de 80°C. Por outro lado, a espessura do revestimento de borracha em comparação com o de aço é maior, o que reduz o volume interno, conseqüentemente a capacidade do equipamento (Wills, 2006).

Corpos moedores

Para a fragmentação de materiais grosseiros é necessário impactos de alta energia, que é fornecido por corpos moedores de maiores dimensões. Por outro lado, a moagem de material fino necessita de corpos moedores com grande área superficial, ou seja, aqueles de menores tamanhos.

Assumindo que apenas os mecanismos de impacto e abrasão são responsáveis pela redução do material em moinhos de bola (Morrell, 1992) estabelece as seguintes relações

- Quebra por impacto $\propto b^3$ (massa de bolas)
- Quebra por atrito $\propto 1/b$ (área superficial de bolas)

Onde b é o diâmetro da bola.

A energia de impacto dependerá também da altura que as bolas irão cair e o ângulo de incidência do impacto.

A forma dos corpos moedores pode ser alterada devido a padrões de desgaste, qualidade do aço ou ser deliberadamente modificada por formas com maior área superficial.

A presença de bolas deformadas com faces ‘mordidas’ indica uma região de inércia no interior do moinho. Essa seção se move lentamente e não produz uma moagem eficiente. O aumento da rotação, redução no nível de enchimento ou o aumento da altura das barras elevadoras podem ser uma solução à questão.

Movimento da carga

O movimento da carga, bolas e material, dentro de um moinho é de considerável importância teórica e prática, por essa razão o assunto tem sido considerado em diversos estudos. Um simples exemplo prático da importância de se conhecer a trajetória da carga de bolas no interior do moinho é o caso da determinação da rotação do moinho. A escolha desse parâmetro deve ser feita de modo que as bolas em queda atinjam a região do leito de bolas, e não no revestimento do moinho. O impacto de bolas sobre o revestimento pode levar ao rápido desgaste do mesmo e elevar os custos de manutenção.

O movimento da carga moedora no interior do moinho é caracterizado pelas condições de cascata e/ou catarata.

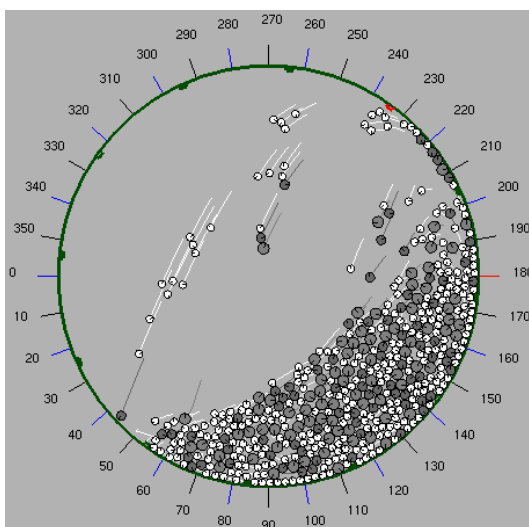


FIGURA 3-10 O movimento de catarata promove o lançamento de bolas a uma maior distância, podendo superar o limite do leito de bolas, causando danos.

Acompanhando a trajetória de uma bola no interior da carga, estando ela inicialmente em contato com a parede do moinho, irá se observar que ela segue em trajetória circular sem escorregamentos, em relação à parede e as outras bolas vizinhas, até atingir a superfície do leito de bolas. A partir de então as bolas irão rolar pela superfície da carga, gerando uma camada de bolas com o movimento denominado de cascata. Entretanto, algumas bolas, ao atingir a superfície, poderão ser ejetadas para longe da parede do moinho, no movimento conhecido como catarata. O movimento de catarata é pronunciado com o aumento da rotação do moinho, enquanto o de cascata acontece em menores velocidades. Nas rotações típicas da moagem ambos movimentos ocorrem. O movimento de cascata privilegia a moagem por atrito, sendo privilegiado na moagem de finos e remoagem. O movimento de catarata privilegia a quebra por impacto, entretanto deve-se tomar cuidado para que as bolas não atinjam diretamente o revestimento do moinho. Na situação representada na FIGURA 3-10 é possível identificar ambos movimentos.

Outra característica importante do movimento da carga são os ângulos de *sholder* e *toe* e identificam radialmente a posição onde a carga de bolas inicia e termina seu movimento de queda livre, respectivamente.

Porcentagem de sólidos

Os moinhos de bola operam a seco ou a úmido, entretanto, o mais comum é o úmido. A utilização de polpa muito diluída leva a uma moagem pouco eficiente, pois as partículas sólidas se encontram muito dispersas na polpa sendo poucos os choques efetivos entre elas e as bolas. Elevando-se a porcentagem de sólidos há um aumento na eficiência de moagem com uma redução considerável no consumo de bolas. Essa melhora vai até um certo ponto quando então a eficiência começa decrescer. Portanto, a capacidade de moagem passa por um ponto máximo que corresponde a uma determinada concentração de sólidos na polpa do moinho. Em geral, a porcentagem de sólidos varia entre 60 e 80% de sólidos.

3.1.5. Projeto de circuitos

Em um circuito de cominuição um dos objetivos é o de obter uma determinada redução no tamanho do material para uma capacidade de operação. Além de contínua, a operação deve permitir um determinado nível de controle para atender possíveis mudanças na especificação do produto. Aspectos econômicos devem ser observados, ou seja, o custo de produção do material dentro das especificações estabelecidas deve ser minimizado.

O projeto de moinhos segue os mesmos princípios de um projeto de circuito de cominuição. O primeiro passo no projeto é a determinação do tamanho do moinho para atender a produção (toneladas / hora) desejada de um produto a partir uma alimentação conhecida.

Pelos métodos clássicos o dimensionamento do moinho está intimamente ligado à potência consumida para operar o moinho e relação com a quantidade de material produzido dentro das especificações. Além das dimensões do equipamento, a melhor escolha das condições operacionais como rotação do moinho, fração de carregamento e o tamanho das bolas devem ser determinadas. É importante observar que as condições operacionais que minimizam o consumo energético podem não ser aquelas que maximizam capacidade a produção. Em geral o dimensionamento de moinhos é feito de maneira a permitir uma operação com a maior eficiência energética em uma determinada capacidade de produção, sendo observados ainda fatores como desgaste do revestimento, contaminação do produto, custos de manutenção, etc.

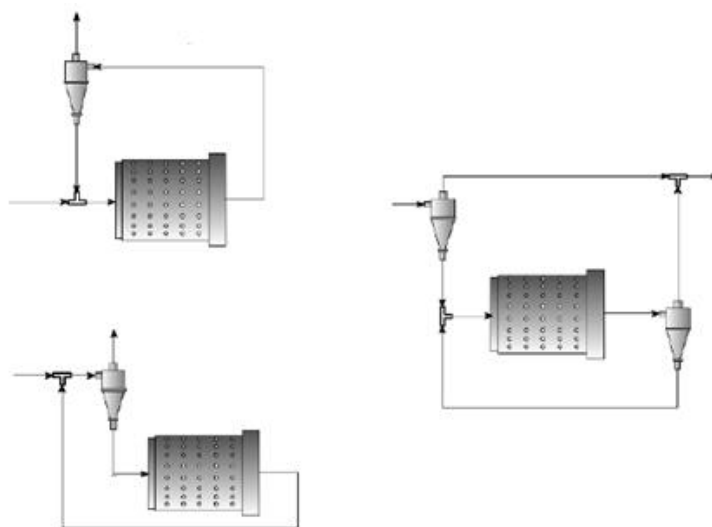


FIGURA 3-11 Configurações da classificação em circuitos de moagem (Gupta, 2006)

Entretanto geralmente não é possível a melhoria das condições de operação de um equipamento sem ter informações do circuito na qual ele será inserido. O projeto de um circuito de moagem envolve não somente o moinho, mas os equipamentos relacionados a ele, como os classificadores. A FIGURA 3-11 mostra as diversas configurações possíveis na disposição de ciclones classificadores que irão alterar a característica da alimentação do material alimentando o moinho. Devemos analisar o sistema por completo, sendo os seguintes fatores observados (Austin, 1981)

- 1) Dimensões do moinho (diâmetro interno e comprimento)
- 2) Potência consumida e potência específica da cominuição
- 3) Otimização das condições de moagem
- 4) Carga circulante e eficiência dos classificadores
- 5) Flexibilidade do circuito a variações nas condições de operação
- 6) Demais otimizações de aspecto econômico

3.2. Simulação computadorizada

3.2.1. Introdução

Simulação computadorizada é a técnica que utiliza do computador como uma ferramenta que imite algumas características do mundo real (Pörchell, 2005). As aplicações dessa tecnologia são inúmeras: em projetos de engenharia podemos criar,

modificar e testar interativamente concepções antes de construirmos um primeiro protótipo.

A maior necessidade de uma simulação é de ser fisicamente acurada. O objetivo de um sistema de simulação não deve ser o de produzir uma seqüência de animação que pareça com a realidade, ela deve representá-la com rigorosidade. Para isso, a simulação faz uso de um modelo físico, sendo então diretamente dependente desse para representar a dinâmica do mundo real.

A segunda maior necessidade de uma simulação é de que ela seja computacionalmente eficiente. Se precisarmos esperar meses para que um estudo de simulação seja concluído para então estudarmos o efeito de uma mudança aplicada, talvez seja economicamente mais interessante a construção de diversos protótipos.

O método é conhecido como Dinâmica dos Corpos Rígidos (Pörrschell, 2005) vem sendo desenvolvido com grande velocidade nos últimos anos. A principal característica do método é permitir a simulação de corpos que não sofram deformação, ou seja, corpos rígidos. Além disso, é computacionalmente mais eficiente, ou seja, obtemos resultados em menos tempo sem comprometimento dos objetivos da simulação.

Em Física a Mecânica Clássica pode ser dividida em Estática, Cinemática e Dinâmica. Essa última fundamenta-se nas Leis de Newton e estuda o movimento de partículas fundamentado em forças, massas, aceleração, impulso, quantidade de movimento linear, etc. O desenvolvimento de um aplicativo de simulação é então uma questão de aplicação da Dinâmica. Em geral, os métodos utilizados são estruturados de maneira semelhante. Antes de tratar o assunto quantitativamente serão apresentados os componentes básicos de uma simulação.

3.2.2. Módulos da simulação

As simulações apresentadas nesse trabalho são parte de um modelo matemático organizado em um aplicativo computacional, sendo assim desenvolvidas em forma de algoritmos e transformadas em linguagem de programação. Um algoritmo é uma sequência de instruções dadas a um computador, um determinado conjunto dessas sequências representará um módulo, ou seja, os principais processos desenvolvidos pelo modelo de simulação.

A FIGURA 3-12 apresenta os principais módulos encontrados na maioria dos métodos de simulação.

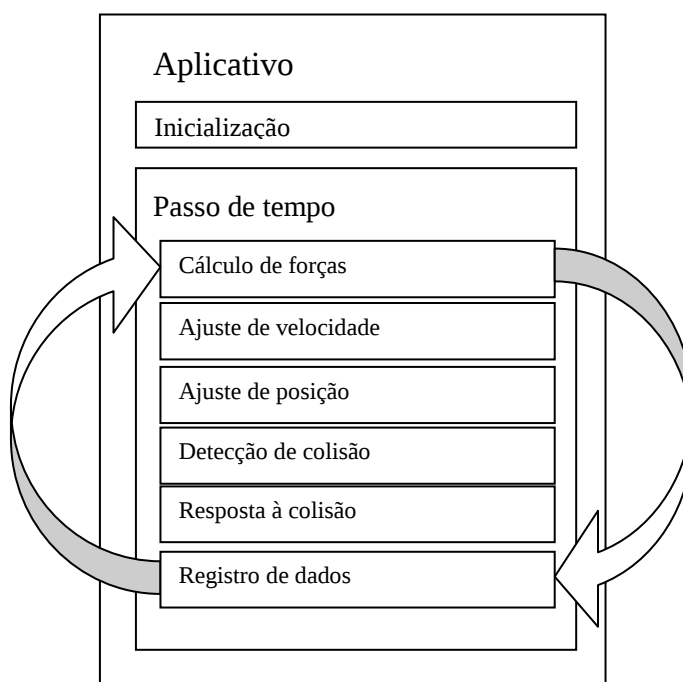


FIGURA 3-12 Módulos da simulação

A primeira etapa a ser realizada é a de 'Inicialização'. Deve-se definir uma série de características a serem simuladas: quais forças irão atuar nos corpos, quais serão os limites impostos ao movimento desses por obstáculos fixos, suas formas e outras propriedades. Essa inicialização deve ser feita em uma etapa pré-simulação, assim pode-se carregar todos esses parâmetros quando se desejar repetir a configuração em particular.

Discretização do tempo

Quando o aplicativo está em execução ele efetua o que se chama de *passo de tempo*, ou seja, o estado da simulação deve avançar no tempo em uma quantidade dt . Quando esse avanço de tempo estiver concluído os corpos em simulação terão suas posições e orientações modificadas. O aplicativo pode então ler essas novas posições e usá-las para exibir na tela o novo estado dos corpos ou registrar essas e outras informações para ser utilizadas mais tarde.

A FIGURA 3-12 mostra um esquema das tarefas que são executadas a cada avanço de tempo. O diagrama é didático, ou seja, pode existir um método de simulação onde existam mais ou menos módulos, entretanto eles são identificados na maioria dos modelos de simulação existentes. A discussão de cada um dos módulos será elaborada a seguir, a TABELA 3-2 sumariza cada etapa.

TABELA 3-2 Módulos da simulação

Módulo	Descrição
Cálculo de Força	Calcula as forças e torques resultantes que estão sendo aplicadas em cada corpo
Ajuste de velocidade	A partir da força resultante calcula-se a aceleração em cada corpo. Por integração numérica determinar-se uma nova velocidade.
Ajuste de posição	Utiliza das novas velocidades e, por integração, determinam-se novas posições e orientações dos corpos.
Deteção de colisão	Encontra todos os contatos entre os corpos
Resposta à colisão	Trabalha os contatos de forma a impedir que os corpos se sobreponham.
Registro de dados	Armazena a configuração do sistema simulado no momento simulado.

Ao final de um passo de tempo o tempo de simulação será incrementado em dt .

Cálculo de Força

O trabalho do módulo de cálculo de forças é o de somar todas aquelas forças e torques que estão atuando em um corpo naquele momento da simulação. Para cada corpo existe uma força e um torque externo atuando, por exemplo, pela ação da gravidade, por outros campos de força ou até mesmo forças inseridas deliberadamente pelo aplicativo de simulação.

Todas as forças são calculadas conforme as leis de Newton para o movimento e devem ser calculadas para atuarem no centro de massa do mesmo.

Forças de atrito e contatos são um caso em particular, uma vez que elas só existem quando os corpos estão em contato. Desse modo, transfere-se o cálculo dessas forças para o módulo de resposta à colisão.

Acerto da velocidade e posição

Uma vez calculada as forças que atuam em um corpo é preciso modificar as demais variáveis que definem o estado desse corpo após a aplicação da força resultante durante o intervalo de tempo determinado. Isso é alcançado através da integração das Leis de Newton por métodos numéricos.

Deteção de contatos ou Colisões

Um algoritmo de simulação capaz de tratar de forças, mudança na velocidade e posição dos corpos será o suficiente para calcular suas trajetórias no espaço. Porém os corpos poderão se mover um através dos outros e através de barreiras físicas como as paredes de um moinho. Dessa forma, é preciso saber quando ocorrem colisões ou contatos entre os corpos simulados.

A detecção de contatos é um problema geométrico que objetiva a determinação de quando e onde dois ou mais corpos se tocam. Na seqüência da simulação os algoritmos de resposta à colisão irão usar o resultado dessa etapa para gerar a resposta apropriada aos contatos encontrados.

Quando dois corpos se tocam, podem existir simultaneamente vários pontos de contato, por exemplo, uma aresta de um corpo toca uma face do outro ou duas faces de corpos diferentes se encontram. Nesse último caso existem infinitos pontos de contato na região de contato. Nessa situação é necessária a identificação de apenas alguns pontos de contato chave para se calcular uma resposta correta para o movimento. O contato entre dois corpos simulados será caracterizado por um ou mais pontos de contato.

Em simulações de corpos rígidos não é levado explicitamente em conta a deformação dos corpos simulados, por essa razão a colisão é tida como se ocorresse em um único instante de tempo. Em simulações onde a deformação é um parâmetro resposta ao contato é iniciada e se segue até que os corpos não mais se toquem. Por essas razões, a colisão deve ser detectada assim que se faz o primeiro contato entre os corpos.

Quando todos os pontos de contato são conhecidos, o cálculo das equações de trajetória dos corpos é interrompido para que ajustes de parâmetros físicos sejam feitos de acordo com o modo de resposta adotado.

Resposta à colisão

Movimento sem restrição

Quando um corpo está em movimento sem qualquer tipo de restrição (ou seja, não existem obstáculos na trajetória em que o corpo segue) o cálculo do movimento é relativamente simples e, uma vez conhecidas as forças e momentos aplicados, a dinâmica do movimento podem ser resolvidas em um sistema de equações para as acelerações. Por integração das acelerações em relação ao tempo obtém-se as velocidades e posições, sendo o movimento completamente definido.

Movimento restringido

Em uma situação real, quando dois corpos colidem é de se esperar que eles não se sobreponham e, independente da solução adotada para se tratar a colisão, as leis da física devem ser obedecidas na sequência do movimento dos corpos simulados. Em um exemplo simples: uma bola com velocidade nula está em uma região do espaço onde não atua nenhuma força sobre ela. Outra bola move-se em sua direção. Quando ocorre o contato, as duas bolas começam a se deformar. Enquanto elas estão se deformando a primeira bola está acelerando enquanto a segunda tem sua velocidade reduzida. Isso continua até que as duas tenham adquirido a mesma velocidade, onde a deformação será a máxima. Numa colisão perfeitamente plástica o processo de colisão termina neste ponto. Numa colisão elástica o processo ainda se segue. A deformação é restituída, a segunda bola continua sendo desacelerada e a primeira bola continua ganhando velocidade. Numa colisão perfeitamente elástica a deformação dos corpos é totalmente restituída. A velocidade do segundo corpo é reduzida e a do primeiro corpo aumentada, ou seja, eles trocaram momento. O momento de cada corpo se modificou, entretanto o momento total foi conservado.

Modos de resposta

O evento de uma colisão acontece em um curto intervalo de tempo. Para trabalhar com colisões em simulações de dinâmica de corpos rígidos ela é tida como se ocorresse em um instante de tempo: a colisão é detectada e o simulador modifica a velocidade dos

corpos para uma velocidade pós-colisão correta. Temos então uma mudança discreta na velocidade dos corpos em contraste com a mudança contínua que ocorre na realidade. Na solução da colisão pelo Método de Elementos Discretos permite-se que pequenas sobreposições entre os corpos representem a deformação que ocorre na realidade, a essa deformação atribui-se uma força de interação que, ao longo de passos de tempos, irá produzir o movimento desejado.

O papel da resposta a colisão é de fazer com que os corpos tenham seu movimento alterado quando um contato for detectado. O resultado dessa etapa será observado por um estado pós-colisão diferente daquele que o corpo teria caso não existisse uma restrição ao seu movimento. Podemos alcançar esse objetivo fazendo alterações nas variáveis que governam o movimento do corpo, ou seja, alterações diretamente na velocidade do corpo, aplicação de forças ou torques ou alterando diretamente a posição do corpo.

Métodos baseados em forças

Um dos modos mais simples para se tratar uma colisão é a utilização de forças restritivas. O método mais popular foi desenvolvido por Peter Cundall em 1979 e é conhecido como Método dos Elementos Discretos. Nesse método, a simulação apresenta a estrutura apresentada aqui: calcula-se as forças externas aplicadas em cada corpo, acerta-se a velocidade e posições baseada nessas forças e finalmente detecta-se a ocorrência de novos contatos. Detectado, um par de forças iguais e opostas é aplicado na direção perpendicular às superfícies dos corpos no ponto de contato, ou seja o vetor normal da colisão. A magnitude da força a ser aplicada é modelada de diversas formas. Uma formulação clássica é aquela que considera a existência uma mola entre os corpos, sendo a força determinada então pela Lei de Hook, que relacionada à elasticidade dos corpos e serve para calcular a deformação causada pela força exercida sobre ele, matematicamente temos $F = kx$, onde k é uma constante geralmente muito alta (representando uma mola muito dura) e x é a sobreposição entre os corpos. A FIGURA 3-13 mostra dois discos onde ainda se vê o progresso da resposta a colisão pelo DEM.

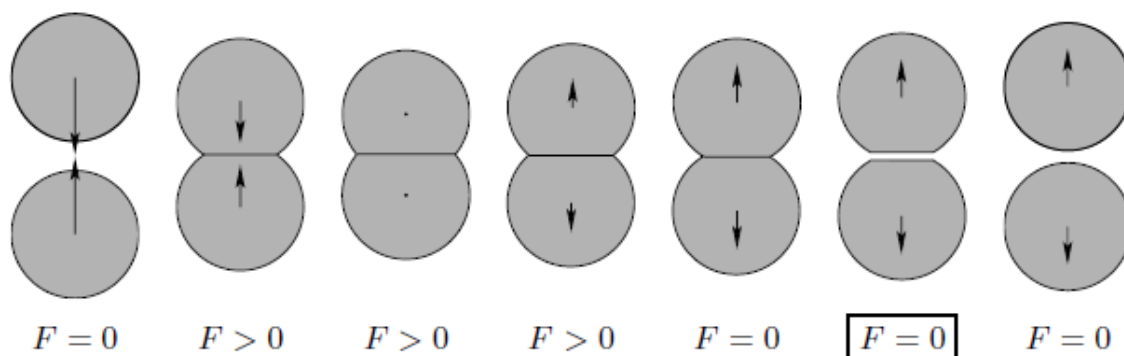


FIGURA 3-13 No Método de Elementos Discretos a sobreposição

Métodos baseados em impulsos

Outra possibilidade é a de mudar diretamente a velocidade do corpo através de impulsos. Um impulso linear é definido como $\mathbf{J} = m\Delta\mathbf{v}$ e pode ser aplicado em um ponto do corpo de massa m para causar uma mudança de velocidade delta $\Delta\mathbf{v}$ nessa posição, restringindo o movimento em uma determinada direção.

A aplicação de impulsos de restrição pode ter efeito equivalente ao de se aplicar uma força de restrição constante em um intervalo Δt , uma vez que $\mathbf{J} = m\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t$. A diferença para um método baseado em força é que um impulso modifica diretamente a velocidade para um novo valor imediatamente, enquanto a resolução por forças terá que passar pelos módulos de correção de velocidade e posição até se obter o resultado desejado.

3.2.3. Dinâmica de Corpos Rígidos

A Dinâmica de Corpos Rígidos (DCR) é uma técnica pertencente ao campo da Dinâmica Computacional que, conforme a FIGURA 3-14, faz parte de Dinâmica, área da Física Clássica que estuda a o movimento de corpos e a causa desse (Halliday, 1974). A Dinâmica Computacional, por sua vez, é ocupada em solucionar as equações do movimento em sistemas multi-corpos utilizando a ferramenta computacional. A DCR faz referência ao modo como os corpos são tratados na simulação, ou seja, como corpos rígidos, sendo então a deformação decorrente do contato/colisão não mais o fundamento para o cálculo do movimento decorrente. A técnica é apresentada em detalhes como

Dinâmica de Corpos Rígidos em Pöschel (Pöschel, 2005), entretanto as base de seu funcionamento está associada à Dinâmica Computacional apresentada em Shabana (Shabana, 1994) e faz uso de soluções computacionais de Baraff (Baraff, 1995). De modo usual, a técnica foi desenvolvida para a simulação da dinâmica de um conjunto de corpos através da integração numérica das leis de Newton . Nesse esquema, utiliza-se a discretização do tempo, tipicamente em passos da ordem de 10^{-3} a 10^{-5} s onde, a cada passo, forças de interação (impulsos) entre os corpos são computadas e, dando seqüência a integração, utilizadas para corrigir as velocidades e posições dos corpos.

O estabelecimento de condições que irão modificar o movimento livre de um sistema de corpos é o fundamento dessa técnica, que também é conhecida por dinâmica de contato (Baraff, 1995). Nela, um sistema de corpos apresenta o chamado movimento sob restrição, ou seja, a trajetória de cada elemento do sistema é dependente de interações (e.g. colisões e contatos) que ocorrem durante o decorrer do tempo. Por meio de restrições diversas geometrias podem ser elaboradas, bem como são modelados aspectos relativos ao atrito e colisões inelásticas.

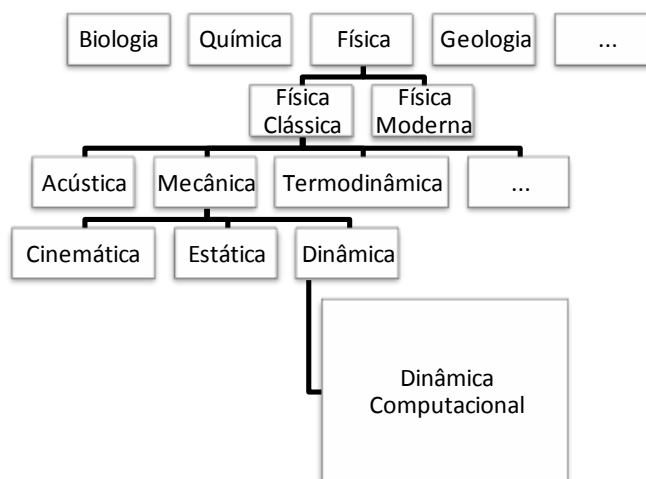


FIGURA 3-14 A Dinâmica Computacional é uma área da Ciência que estuda os movimentos dos corpos e suas causas (Adaptado de Halliday, 1974)

Enquanto no método DEM o comportamento dos corpos é conseguido pela determinação de forças de interação, na Dinâmica de Corpos Rígidos ocorre o contrário: as forças de interação são determinadas de acordo com o comportamento esperados dos corpos. Sendo assim, o método é adequado para a simulação de corpos perfeitamente rígidos, sem a necessidade da aplicação de uma força baseada em sobreposições. Considere a situação mostrada na FIGURA 3-15, onde uma esfera rígida está apoiada em uma superfície plana. Existem duas forças atuando na esfera, a gravidade $m\vec{g}$ e a força vertical de contato $\vec{F}^n$, ambas consideradas positivas na direção vertical para cima. A escolha de $F^n = 0$ levará a esfera se mover para baixo com aceleração $\vec{g}$, levando à sobreposição com a superfície. Este comportamento não esperado deverá ser evitado por uma escolha adequada da força $\vec{F}^n$. Essa escolha certa será assegurada pelas seguintes condições:

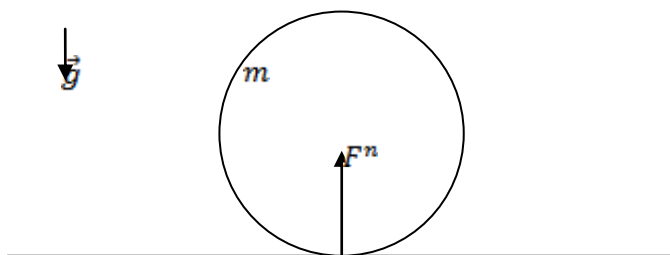


FIGURA 3-15 Na Dinâmica de Corpos Rígidos a força F^n deverá impedir a sobreposição da bola com o plano horizontal.

Condição 1- As forças de contato são escolhidas de modo a evitar a sobreposição dos corpos em contato.

Condição 2- As forças de contato desaparecem assim que o contato é interrompido.

Condição 3- Não devem ser aplicadas forças de atração.

Condição 4 – As forças de contato não devem produzir um aumento da energia no sistema.

Cada condição anterior é representada pelas chamadas equações de restrição. Considerando a restrição de sobreposição, cada corpo possui uma série de equações que define a distância entre ele e todos os outros. Cada equação é satisfeita quando a separação entre os corpos é positiva. Detectado um contato, a simulação é interrompida e um impulso é aplicado aos corpos em colisão, alterando suas velocidades e impedindo sua interpenetração. No espaço simulado podem existir múltiplas e simultâneas restrições que são resolvidas uma após a outra. A aplicação de um impulso a dois corpos pode levar ao cálculo de uma nova velocidade que irá violar outras restrições. Dessa forma, métodos sequenciais processam as restrições por um número determinado de iterações até que todas elas sejam satisfeitas ou o limite de iteração seja atingido.

4. Metodologia

Os modelos fenomenológicos mais utilizados para se estudar a operação de cominuição em moinhos de bola geralmente enxergam o processo através de considerações como a taxa de quebra do material, tempos de residência e a configuração do circuito de cominuição. A simulação da dinâmica da carga de bolas, feita aqui através do método da DCR, é uma ferramenta que auxilia o entendimento desse processo revelando detalhes do que acontece dentro de um moinho em funcionamento. Nessas simulações o movimento da carga de bolas é reproduzido em função de diversos parâmetros construtivos e operacionais, sendo possível acessar a magnitude das forças exercidas pela carga em cada colisão bola-bola, bola-carcaça, observar a característica do movimento da carga e determinar as regiões de cascata ou catarata, verificar o efeito do revestimento utilizado para proteger o interior do equipamento e aumentar a eficiência da operação em função da sua geometria. A adequação da distribuição de tamanho de bolas e a geometria do revestimento também é uma informação útil ao projeto do equipamento e operação e que pode ser verificada com ajuda de simulações.

4.1. Materiais e métodos

O aplicativo de simulação foi elaborado com auxílio de um microcomputador dotado de compilador para a linguagem de programação C++. A linguagem de programação orientada a objetos foi escolhida por ser robusta e adequada para a aplicação. O aplicativo desenvolvido fez uso dos métodos da Dinâmica de Corpos Rígidos apresentada em Pöschel, (2005) e outros autores, conforme descrito a seguir.

4.1.1. *Dinâmica de Corpos Rígidos*

O desenvolvimento de um sistema genérico para o tratamento de um conjunto de corpos rígidos, incluindo detecção de colisão e resposta a colisão é desenvolvido utilizando a abordagem fornecida por Pöschel (Pöschel, 2005). As forças de restrição são incógnitas para o sistema e são calculadas com base na informação que é fornecida pelo sistema de detecção de colisão.

Começando pelo modelo detalhado em Shabana (Shabana, 1994), um corpo rígido é tratado de acordo com as leis de Newton para o movimento. A aceleração $\ddot{\mathbf{v}}_i$ do i -ésimo corpo no sistema é dada pela respectiva força

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i \quad \text{EQ. 4-1}$$

Onde $\mathbf{m}_i$ é a matriz que descreve as propriedades da massa do corpo i no espaço ou no plano. Para um sistema de n corpos o vetor $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ armazena as velocidades de todos os corpos no sistema. De maneira semelhante o vetor $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$ é o vetor de forças do sistema como um todo, assim temos:

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F} \quad \text{EQ. 4-2}$$

Onde $\mathbf{M}$ é a matriz diagonal:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{m}_n \end{pmatrix} \quad \text{EQ. 4-3}$$

As restrições aos movimentos dos corpos são dadas pelas equações de restrição. Uma equação de restrição fornece um valor escalar c_k dado em função das coordenadas de posição $\mathbf{x}$ dos corpos.

$$c_k(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{EQ. 4-4}$$

Para um sistema com s restrições, $\mathbf{C}$ é utilizado para armazenar todas as restrições do sistema. Restrições geométricas, como as impostas pela parede do moinho, são representadas por essas equações.

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T \quad \text{EQ. 4-5}$$

Uma vez que o vetor $\mathbf{C}$ é função de coordenadas de posição, a derivada no tempo $\dot{\mathbf{C}}$ fornece o vetor de restrições das velocidades. Na diferenciação, a matriz de vetores $\mathbf{J}$ fornece a direção das forças de restrição e é chamada de matriz de Jacobiano das restrições.

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{J}\mathbf{V} = 0 \quad \text{EQ. 4-6}$$

Cada restrição possui uma força interna de reação $\mathbf{f}_c$ bem como um torque τ_c . Para o sistema com n corpos essas reações são representadas pelo vetor:

$$\mathbf{F}_c = (\mathbf{f}_{c1} \quad \tau_{c1} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{cn} \quad \tau_{cn})^T \quad \text{EQ. 4-7}$$

Calculadas dessa maneira, as forças de reação não produzem trabalho no sistema e, uma vez que têm direção perpendicular à velocidade, podemos escrever:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \quad \text{EQ. 4-8}$$

Onde o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ representa a o vetor de magnitude das forças de reação e é a incógnita de um sistema.

Para permitir que as forças de reação realizem trabalho no sistema, a EQ. 4-6 é modificada adicionando o vetor $\boldsymbol{\zeta}$, definido como função de posição e tempo.

$$\mathbf{J}\mathbf{V} = \boldsymbol{\zeta} \quad \text{EQ. 4-9}$$

Pelo desenvolvimento da lei de Newton para um sistema de corpos rígidos (Pöschel, 2005) pode-se mostrar que o movimento sob restrição passa então a ser dado pelo sistema

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} \quad \text{EQ. 4-10}$$

Onde $\mathbf{F}_{ext}$ representa o vetor de forças externas aplicadas ao sistema, por exemplo, a ação da gravidade.

Considerando $\dot{\mathbf{V}}$ em passo de tempo Δt :

$$\dot{\mathbf{V}} \approx \frac{\mathbf{V}^2 - \mathbf{V}^1}{\Delta t} \quad \text{EQ. 4-11}$$

Onde $\mathbf{V}^1$ e $\mathbf{V}^2$ representam, respectivamente, os vetores de velocidade do sistema antes e após Δt .

Substituindo EQ. 4-11 em EQ. 4-10 temos:

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}^2 - \mathbf{V}^1) = \Delta t(\mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}_{ext}) \quad \text{EQ. 4-12}$$

A solução do sistema (Baraff, 1995) segue-se resolvendo EQ. 4-12 para $\boldsymbol{\lambda}$ e utilizando a equação de restrições $\mathbf{J}\mathbf{V}^2 = \zeta$ o problema é reduzido a um sistema de equações lineares

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad \text{EQ. 4-13}$$

onde,

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \quad \text{EQ. 4-14}$$

e

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\Delta t} \zeta - \mathbf{J} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{V}^1 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_{ext} \right) \quad \text{EQ. 4-15}$$

Uma vez que $\boldsymbol{\lambda}$ é calculado, as velocidades do sistema após o passo de tempo Δt é facilmente obtida, dando seqüência a integração numérica das novas posições dos corpos.

Aplicação do algoritmo

Considere a situação indicada na FIGURA 4-1 onde duas esferas estão se colidindo. As duas esferas têm raio $R = 1 \text{ m}$ e massa $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$. A esfera 1 está se movendo na direção x com velocidade linear de 1 m/s . A esfera 2 está em repouso. Devemos achar a velocidade $\mathbf{V}^2$ (após a colisão) conforme o algoritmo apresentado.

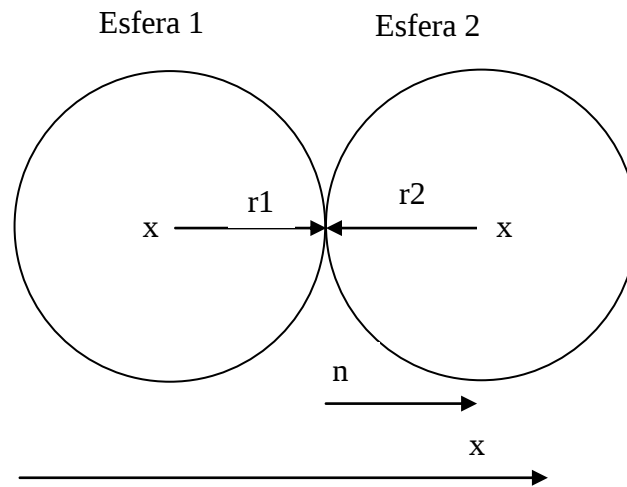


FIGURA 4-1 Duas esferas se colidindo em um único contato.

De acordo com a situação, as velocidades lineares e angulares das esferas são representadas em um único vetor V^1 . A velocidade linear para as duas esferas são:

$$\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

como não possuem velocidade angular, o vetor V^1 será:

$$V^1 = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{w}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

O vetor $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ liga o centro de cada esfera ao ponto de contato. O vetor $\vec{n}$ é o vetor normal à superfície de colisão. Dessa forma temos:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_1 \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O cálculo de J para a restrição de não-sobreposição, temos:

$$J = (-n^T \quad -(r_1 \times n)^T \quad n^T \quad (r_2 \times n)^T) = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

A matriz M , guarda as massas e o tensor de inércia I em coordenadas globais para cada corpo. Dessa forma temos:

$$I_1 = I_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Temos ainda que $m_1 = m_2 = 1$. De acordo com o algoritmo temos uma matriz B representada por:

$$B = M^{-1}J^T = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Se a colisão apresentada não apresenta sobreposição entre as esferas, temos que $\xi = 0$. Adotando $\Delta t = 0.5$ e Assumindo que não há forças externas atuando em nenhuma esfera, ou seja, $F_{ext} = 0$. Temos então:

$$\eta = \frac{1}{\Delta t} \xi - J \left(\frac{1}{\Delta t} V^1 + M^{-1} F_{ext} \right) = -\frac{1}{\Delta t} J V^1 = -2 * (-1) = 2$$

Prosseguindo a resolução do problema de LCP, queremos achar um λ tal que:

$$JB\lambda = \eta$$

Temos que $JB = 2$ e $\eta = 2$, portanto $\lambda = 1$.

Utilizando agora a equação abaixo podemos determinar V^2 , temos:

$$M(V^2 - V^1) = \Delta t(J^T \lambda + F_{ext})$$

$$V^2 = \Delta t(M^{-1}J^T \lambda + M^{-1}F_{ext}) + V^1 = \Delta t B \lambda + V^1$$

Como

$$M^{-1}J^T = B \text{ e } F_{ext} = 0, \text{ temos:}$$

$$V^2 = 0.5 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja, as duas esferas continuam o movimento com a mesma velocidade linear de 0.5 m/s , o que era esperado para uma colisão inelástica.

4.1.2. Aplicativo

O software em desenvolvimento, mostrado na FIGURA 4-2, permite a realização de simulações do movimento da carga moedora em moinhos de bola onde as posições, velocidades, bem como as forças envolvidas no processo podem ser armazenadas e analisadas para fornecerem dados quantitativos. O software permite estudos da dinâmica do movimento com a variação de uma série de parâmetros como a geometria do moinho, velocidade de rotação e a distribuição de carga de bolas.

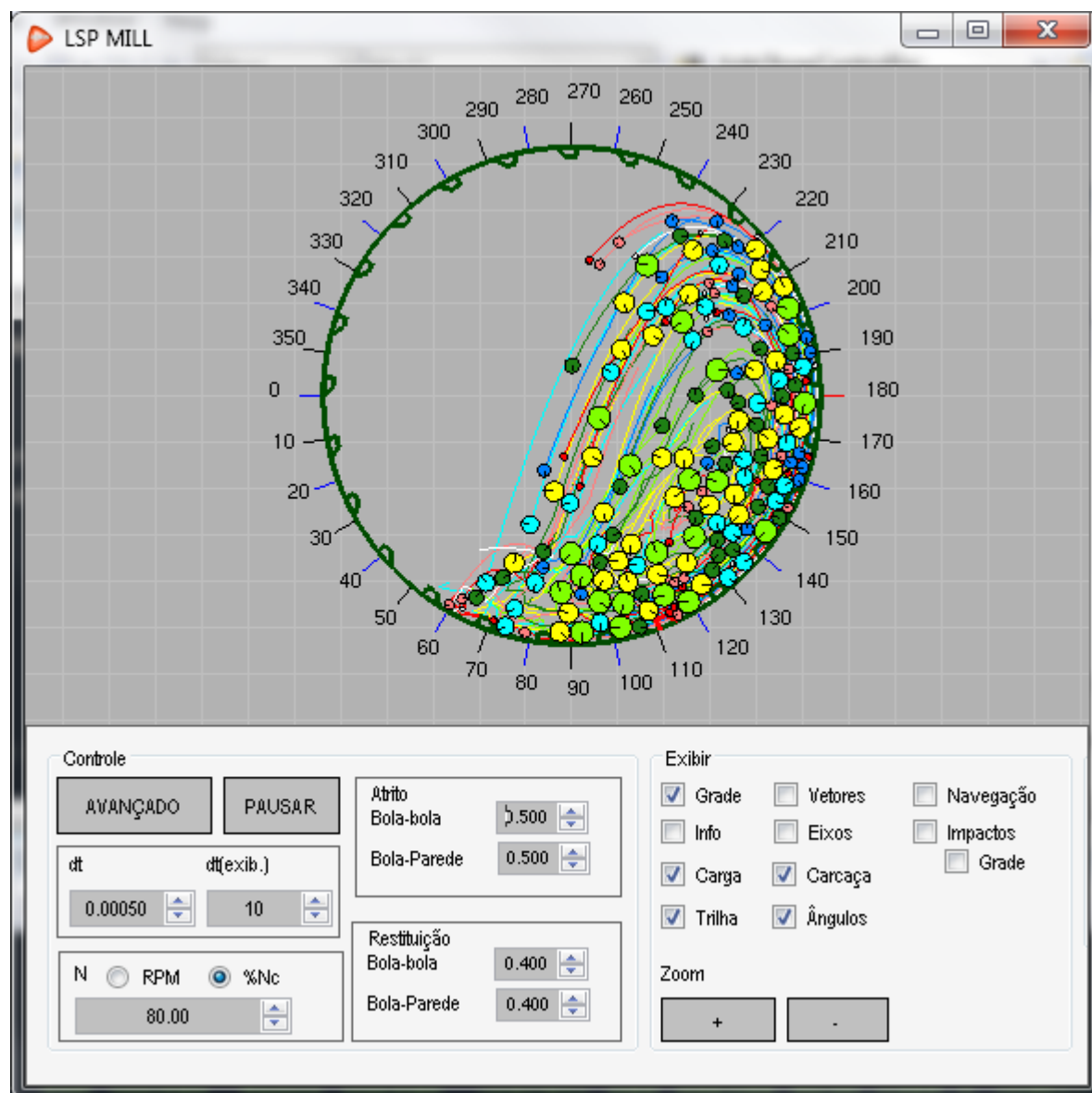


FIGURA 4-2 Janela principal do aplicativo de simulação

Na janela principal do aplicativo o estado atual da simulação é exibido na parte superior, onde em um sistema de eixos cartesianos é mostrada ainda a carga de bolas, o revestimento interno e externo do moinho, barras elevadoras e a carga de bolas, que são coloridas de acordo com o diâmetro e apresentam uma marcação que vai do centro até um ponto fixo na extremidade, de forma a possibilitar a visualização da rotação decorrente de forças de atrito. Quando a simulação está em execução, a trilha desenvolvida pela carga de bolas também é exibida, o que permite uma rápida checagem dos pontos de *toe* e *sholder* da configuração atual. Na parte inferior do aplicativo aparecem opções de controle da simulação e exibição. Nesses controles é possível regular o passo de tempo entre quadros da simulação e o número de quadros simulados a cada quadro exibido. É possível ainda alterar a velocidade de rotação do moinho tanto em termos da rotação absoluta, medida em RPM ou relativa, medida em porcentagem da rotação crítica. Os parâmetros de atrito e restituição também podem ser modificados enquanto a simulação está sendo executada e permitem um ajuste na dinâmica da carga. Outras configurações de exibição permitem o caminhamento do eixo cartesiano em quatro direções (acima, abaixo, para esquerda e para direita) nos botões posicionados no canto superior direito do aplicativo, ajustes de proximidade (zoom mais e zoom menos). Por fim, a exibição da carcaça do moinho, carga de bolas, eixos e grades de referência, vetores de velocidade na carga de bolas, marcação de ângulos externo ao moinho e impactos entre bolas e carcaça podem ser habilitados individualmente nas respectivas caixas de marcação.

EDIÇÃO

Moinho

Geometria

Diâmetro externo (m) 1.440 Comprimento (m) 3.660

Diâmetro interno (m) 1.440

Revestimento

Arquivo: W:\dissertacao\Defesa Final\Configuração de controle\controle.txt Carregar

Número de lifters 12

Diâmetro de ancoramento (m) 1.440 ☒ Criar raio

Carga

Enchimento (%) 35.000 Porosidade (%) 40.000 Densidade (g/cm³) 7.800

Distribuição da carga

Diâmetro (mm)	%	Cor
114	23	Verde
101	31	Amarelo
89	18	Ciano
76	15	Verde escuro
63.5	7	Azul
51	3.8	Vermelho

Diâmetro (mm) 0.000

% 0.000

Cor Escolher

Adicionar Limpar

OK

FIGURA 4-3 Janela de configuração do simulador

Na janela de configurações avançadas mais detalhes da geometria, revestimento e carregamento do moinho são definidos. O diâmetro interno, bem como o diâmetro externo, utilizado no cálculo da velocidade crítica e o comprimento do moinho, utilizado no cálculo da potência consumida, são estabelecidos nas configurações de geometria. Além disso, através do cálculo do torque desenvolvido na seção do moinho simulada em duas dimensões é possível a determinação da potência consumida, dessa forma o comprimento do moinho também é considerado. As configurações de carga englobam a fração de enchimento, porosidade da carga e densidade do material. Os diâmetros de bola e a distribuição na carga é determinado e uma cor associada a cada classe de tamanho.

O desenho do revestimento é obtido a partir de um arquivo de texto contendo os pares de ponto ordenados da geometria.

4.1.3. Tipo de dados obtidos

A Dinâmica de Corpos Rígidos permite a modelagem computacional de um conjunto de corpos de forma genérica sujeita a restrições de contato que variam continuamente. Colisões se estabelecem e desaparecem ao longo da simulação, dando origem a forças que modificam a trajetória dos corpos no sistema. De maneira geral, essa configuração está sujeita ainda a alguma força externa que pode levar o sistema a um estado de equilíbrio estático ou dinâmico. No estudo do movimento da carga em moinhos de bola tem-se um sistema em equilíbrio dinâmico onde é de interesse, dentre outros aspectos, a determinação da região no interior do moinho ocupada por bolas, bem como os pontos limites do carregamento, *toe* e *sholder*, além da dinâmica de impacto, que aqui se entende por número ou distribuição frequência de impactos pela a energia (magnitude) de impacto.

Em tais simulações o sistema apresenta um determinado estado a cada instante: a força, posição, velocidade, rotação e torques estabelecidos em cada corpo são determinados e conhecidos a todo o momento. Essas informações precisam ser organizadas de maneira coerente para que sejam considerados aspectos de processo e da eficiência do equipamento. Uma vez que o cálculo das interações e o movimento resultante de um sistema de multicorpos por si só é computacionalmente dispendioso, o tratamento dos dados brutos é deixado para uma etapa posterior do estudo. Dessa forma, conforme o diagrama da FIGURA 3-12, além da rotina do cálculo das equações de movimento, o aplicativo de simulação realiza, quadro a quadro, o armazenamento apenas do estado geral do sistema.

A cada quadro simulado é registrado a posição, velocidade e força resultante em cada bola da carga, a orientação e velocidade de rotação da carcaça além da dinâmica de contato. As forças de impacto e atrito, decorrentes do contato entre os corpos são representadas vetorialmente e os corpos envolvidos nos contatos identificados.

Um aplicativo de tratamento de dados e visualização é então escrito para receber as informações dadas pelo aplicativo de simulação e realizar as análises específicas a partir

da base de dados que descreve o comportamento físico do sistema ao longo da simulação.

4.1.4. Tratamento de dados e estudos de simulação

Durante a simulação as informações de estado do sistema são armazenadas quadro a quadro. Dessa forma é possível o estudo do movimento da carga sem a necessidade de reproduzir a simulação. O aplicativo de tratamento de dados mostrado na FIGURA 4-4 recebe os dados de saída da simulação e permite a conferência da configuração inicial da simulação, como as dimensões do moinho, fração de enchimento e distribuição da carga de bolas e elabora diversas análises do movimento da carga, além da animação do movimento.

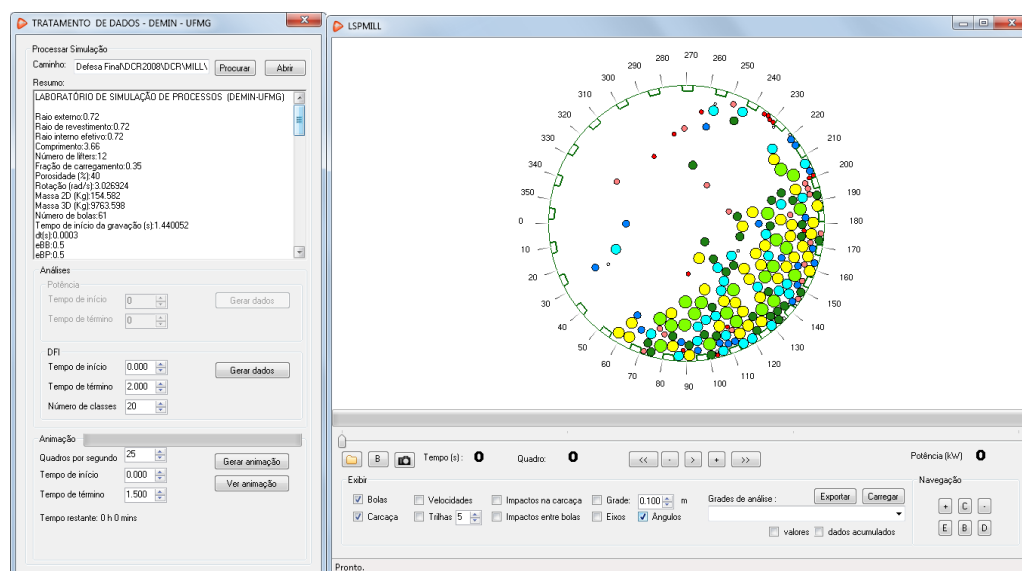


FIGURA 4-4 Aplicativo de tratamento de dados

Animação do movimento

Para se obter a trajetória de cada bola da carga de um moinho por um período de dez segundos são gerados em torno de cem mil quadros onde as posições de cada uma delas são recalculadas de acordo com as forças que atuam em cada bola. O passo de tempo reduzido é importante para assegurar o cálculo de todas as interações entre os corpos do sistema e que a trajetória do movimento não seja comprometida por erros numéricos e decorrentes da discretização excessiva.

Entretanto, o elevado número de quadros gerados torna a reprodução do movimento prolongado. Para se ter uma ideia, uma animação pode se tornar fluida ao olho humano se cerca de mais de 25 quadros forem exibidos por segundo. Com essa taxa de reprodução, se todos os quadros gerados fossem utilizados, teríamos uma animação de quatro mil segundos, pouco mais de uma hora de reprodução de um movimento de dez segundos.

Para contornar esse problema o aplicativo de tratamento de dados permite a determinação da taxa de reprodução da animação final do movimento da carga. Além disso, o tempo de início e término da animação também é considerado, assim é possível eliminar, por exemplo, o início do movimento gerado na simulação, onde geralmente não se verifica o equilíbrio do movimento da carga.

A animação final é construída eliminando quadros da base gerada pelo aplicativo de simulação em função da taxa de reprodução estabelecida. Embora a simulação final apresente menos quadros que o total simulado, as estatísticas e análises consideradas adiante continuam levando em conta o total da simulação.

Análises espaciais

Para desenvolver o estudo do movimento da carga de bolas será considerada a localização espacial de variáveis como a posição das bolas, pontos de impacto, etc. Para isso, uma grade regular de 40x40 células é sobreposta sobre a seção transversal do moinho. Cada célula pode armazenar informações relativas a uma variável de interesse em sua área de abrangência. A FIGURA 4-5 mostra um exemplo onde se nota a presença de bolas. Assim, a cada célula está associado um valor booleano quando da presença ou não de bola em sua área de abrangência. Na figura, as células onde existem bolas estão marcadas em vermelho.

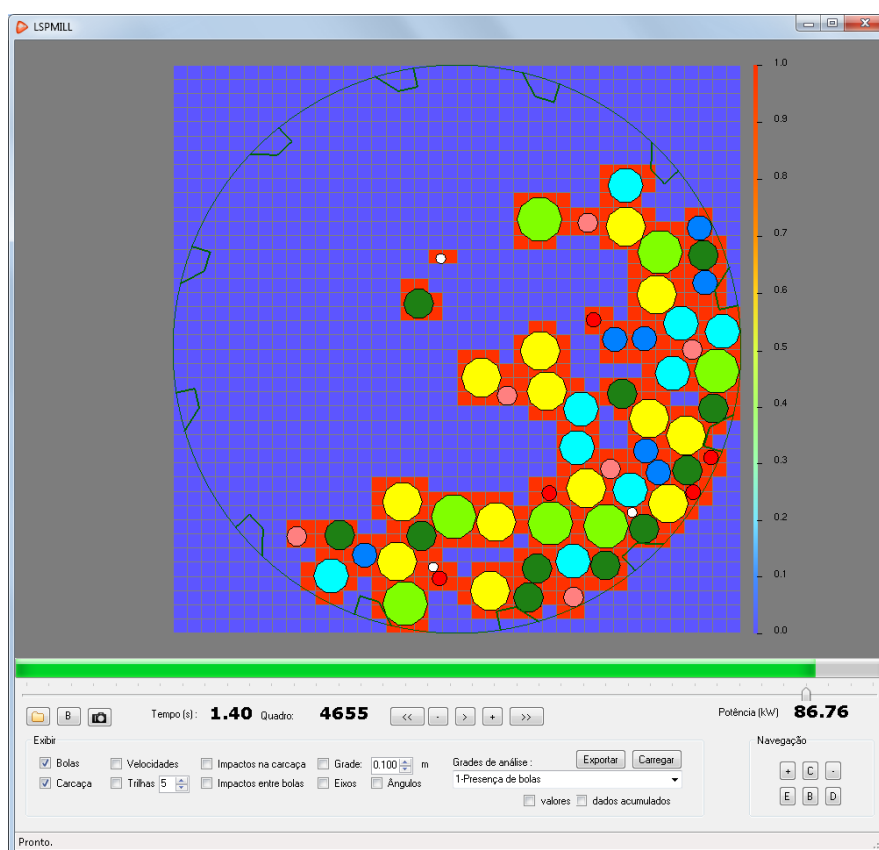


FIGURA 4-5 Grade de presença de bolas em um instante de tempo.

Mais uma análise pode ser feita em função dos dados acumulados ao longo da simulação e plotados em função da sua frequência no tempo. Na FIGURA 4-6, para cada célula, os valores da grade de presença de bolas foram acumulados em cada passo de tempo, totalizando 10 segundos. Os valores acumulados foram normalizados e apresentados em uma escala de cor onde o mínimo é representado por azul, passando por verde, amarelo e os maiores valores representados por vermelho. Nesse caso, a visualização permite distinguir as zonas de cascata e catarata desenvolvidas pela carga de bolas. Além disso, os ângulos de *sholder* e *toe*, pontos na carcaça do moinho onde a carga de bolas inicia e termina seu movimento de queda-livre, respectivamente, também podem ser visualizados.

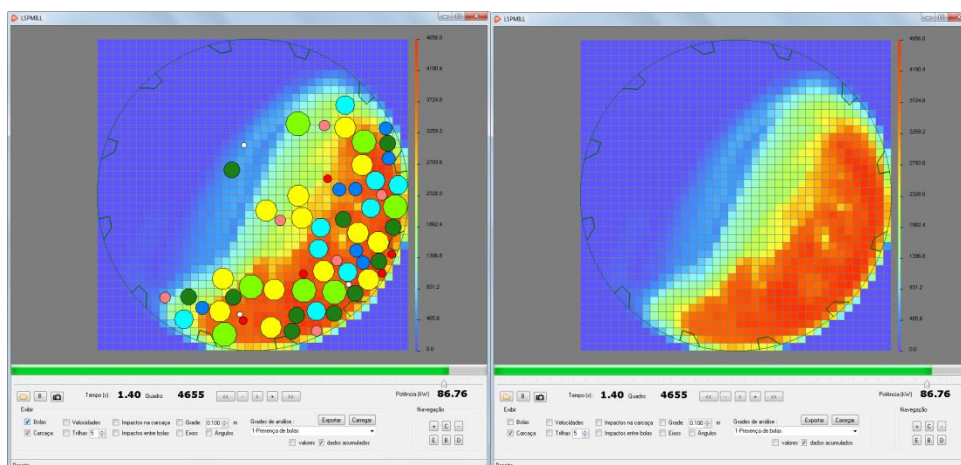


FIGURA 4-6 Grade de presença de bolas com dados acumulados por 3 s em passos de tempo de 1E-3s.

Ao todo oito grades de grades de análise são armazenadas, sendo ainda possível a obtenção de grades derivadas, por exemplo, a magnitude de impactos média pode ser obtida dividindo-se o valor da grade de magnitude de impactos por aqueles da de número de impacto. Obtendo-se a visualização da magnitude média de impacto em cada região do moinho.

A descrição de cada uma das grades é mostrada na TABELA 4-1. Além de análises espaciais, a potência desenvolvida pelo moinho também é obtida pela simulação através do cálculo do torque exercido pela carga de bolas na carcaça do moinho.

TABELA 4-1 Descrição de análises espaciais

Grade	Descrição
Presença de bolas	Associa a cada célula um valor, um ou zero, quando da presença ou não de bola, respectivamente, em sua área de abrangência em cada instante de tempo.
Magnitude de impacto entre bolas	Associa a cada célula a soma das magnitudes de todos impactos entre bolas ocorridos em sua área de abrangência em cada instante de tempo. Os valores são dados em N*s.
Magnitude de impacto na carcaça	Associa a cada célula a soma das magnitudes de todos impactos entre bola-parede ocorridos em sua área de abrangência em cada instante de tempo. Os valores são dados em N*s.
Magnitude de impacto	Associa a cada célula a soma das magnitudes de todos impactos entre bola-parede ocorridos em sua área de abrangência em cada instante de tempo. Os valores são dados em N*s.
Número de impactos na carcaça	Associa a cada célula a soma dos números de impactos bola-parede ocorridos em sua área de abrangência em cada instante de tempo.
Número de impactos entre bolas	Associa a cada célula a soma dos números de impactos entre bolas ocorridos em sua área de abrangência em cada instante de tempo.
Energia cinética	Associa a cada célula a soma da energia cinética ($mv^2/2$) de todas as bolas cujo centro de massa esteja em sua área de abrangência em cada instante de tempo. Os valores são dados em J.
Velocidade	Associa a cada célula a soma da magnitude da velocidade de todas as bolas cujo centro de massa esteja em sua área de abrangência em cada instante de tempo. Os valores são dados em m/s.

Análises quantitativas

Além da animação, análises espaciais e energéticas a frequência de impacto também é elaborada no tratamento de dados e apresentada em forma de distribuição de energia de impacto.

De acordo com o método utilizado, durante uma colisão entre dois corpos um vetor de impulso é gerado. O termo energia de impacto pode ser considerado quando, em uma colisão inelástica, acontece a variação da energia cinética do sistema antes e depois da colisão. Uma vez que a energia cinética despendida em um contato é função do coeficiente de restituição, constante nas simulações, e do impulso decorrente da colisão,

a energia de impacto irá ser função apenas do impulso. Dessa forma a magnitude desse vetor determinará a energia da colisão. Além disso, forças de atrito estão presentes na interação entre os corpos e causam perda de energia cinética. A energia de impacto total, medida em forma de impulso e quantificada em {N.s} é obtida pela soma vetorial das forças de impulso e atrito.

A distinção dos pares bola-bola, bola-carcaça é utilizada para avaliar a distribuição de impactos exclusivamente sobre o revestimento em diferentes condições e geometria.

4.2. Simulações

Esta dissertação em por objetivo aplicar a técnica da Dinâmica de Corpos Rígidos ao estudo do movimento da carga moedora em moinhos de bolas. Através do desenvolvimento de um aplicativo computacional serão estudados os efeitos da variação de parâmetros de construção e operacionais no comportamento da carga de bolas. A ferramenta desenvolvida permite avaliar o comportamento espacial da carga, prever a potência desenvolvida pelo moinho, além de disponibilizar informações sobre as forças de impacto entre os elementos da carga, informação útil e de difícil acesso experimental.

O trabalho irá fazer uso do aplicativo desenvolvido para analisar os efeitos decorrentes da modificação de aspectos geométricos como a geometria interna do revestimento e operacionais, como a velocidade de rotação do moinho. Procura-se avaliar as diferenças no comportamento do moinho frente a alterações, portanto, uma configuração inicial será tomada para servir de referência às demais.

4.2.1. Configuração de controle

Um moinho de 2,438m de diâmetro, com 25 barras elevadoras trapezoidais, em detalhes na FIGURA 4-7, será estabelecido como configuração de controle. O comprimento do moinho é utilizado para realizar correlações de potência e será estabelecido em 3,66m. A TABELA 4-2 relaciona a distribuição da carga de bolas, que será tomada como aquela sugerida por Bond (Bond, 1952) bem como todos os demais parâmetros necessários à simulação.

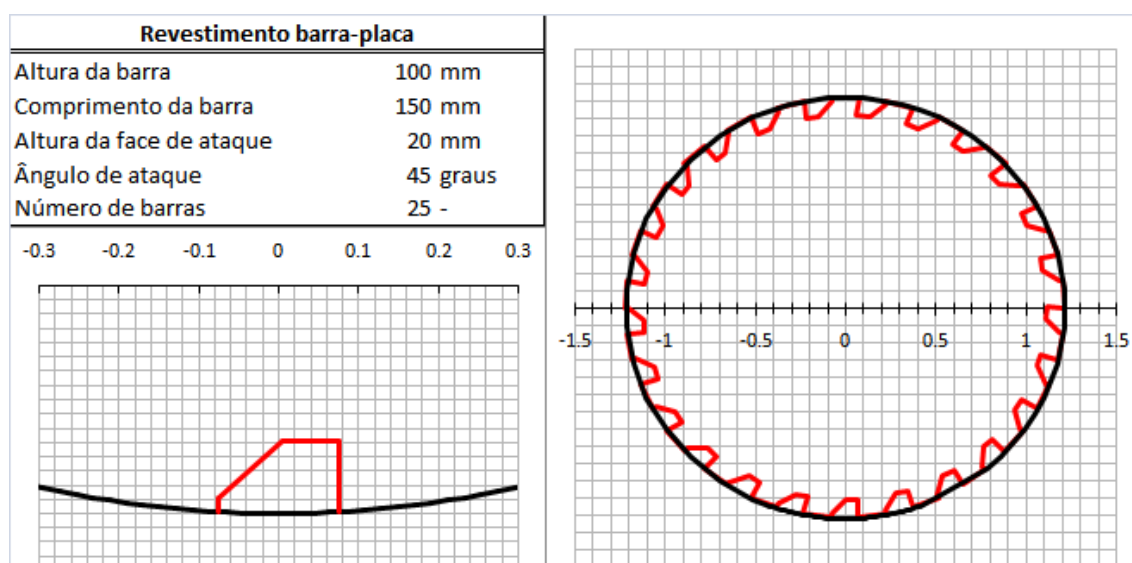


FIGURA 4-7 Moinho de 1,5 m de diâmetro e detalhe das barras elevadoras utilizado na simulação.

TABELA 4-2 Conjuntos de dados de controle da simulação

Configurações da simulação - IDA01			
dt	1,00E-4 s	Densidade da carga	7,80 t/m ³
Diâmetro interno	2,438 m	Enchimento	35,00%
Comprimento	3,66 m	Porosidade	40,00%
Nº de <i>lifters</i>	25	Rotação	75,00 %Nc
Coeficiente de restituição		Coeficiente de atrito	
Bola-bola	Bola-parede	Bola-bola	Bola-parede
0,5	0,4	0,3	0,4
Carga			
Diâmetro (mm)		Carregamento (%)	
114,00		0	
101,00		0	
89,00		0	
76,00		0	
63,50		0	
51,00		40,0	
38,00		45,0	
25,40		15,0	
TOTAL		100,00	

4.2.2. Efeito da geometria do revestimento

Em moinhos de bola o revestimento interno tem a função de proteger o moinho contra impactos diretos na carcaça e promover o levantamento da carga, gerando o movimento de cascata e catarata. Embora muitas vezes negligenciado, o desempenho da operação pode estar ligado a aspectos relacionados ao revestimento. A geometria do revestimento pode favorecer ainda um determinado tipo de quebra. Os revestimentos do tipo barra-placa são preferidos quando se deseja privilegiar a quebra por impacto, enquanto em operações de moagens de finos ou remoagens a escolha é feita pelo revestimento tipo dupla onda, que propicia a quebra por abrasão.

Além disso, devido ao movimento da carga de bolas e as condições geralmente abrasivas do ambiente no interior do moinho a geometria inicial do revestimento é alterada devido ao desgaste. Na fase de projeto dos *lifters* deve se considerar o efeito do desgaste no movimento da carga de bolas para se garantir boas condições de operação.

Para avaliar o efeito da variação da geometria do revestimento no comportamento do movimento da carga, seja por decisão de engenharia ou pelo desgaste eventual, serão estudadas alterações na altura, comprimento e ângulo de ataque e número de barras elevadoras.

TABELA 4-3 Geometrias utilizadas nas simulações

Simulação	Altura da barra	Comprimento da barra	Altura da face de ataque	Ângulo de ataque	Número de Barras
<i>IDA01</i>	<i>100</i>	<i>150</i>	<i>20</i>	<i>45</i>	<i>25</i>
IDB01	100	150	20	75	25
IDB02	100	150	60	45	25
IDB03	100	150	20	30	25
IDB04	100	105	20	45	25
IDB05	100	150	20	45	15
IDB06	60	150	20	45	25
IDB07	100	150	20	60	25
IDB08	70	130	10	50	20

A TABELA 4-3 apresenta as configurações adotadas para a construção da geometria do revestimento das simulações elaboradas, os valores em destaque são aqueles modificados em relação à simulação de controle.

A TABELA 4-4 apresenta as configurações adotadas nas simulações, em sequência as FIGURA 4-8 a FIGURA 4-15 mostram a geometria em cada uma das simulações.

TABELA 4-4 Configuração das simulações

Configurações da simulação - IDB01 a IDB08			
dt	0,000100 s	Densidade da carga	7,80 t/m ³
Diâmetro interno	1,50 m	Enchimento	35,00%
Comprimento	0,80 m	Porosidade	40,00%
Nº de <i>lifters</i>	vários	Rotação	75,00% Nc
Coefficiente de restituição		Coefficiente de atrito	
Bola-bola	Bola-parede	Bola-bola	Bola-parede
0,5	0,4	0,3	0,4
Carga			
Diâmetro (mm)		Carregamento (%)	
114,00		0	
101,00		0	
89,00		0	
76,00		0	
63,50		0	
51,00		40,0	
38,00		45,0	
25,40		15,0	
TOTAL		100,00	

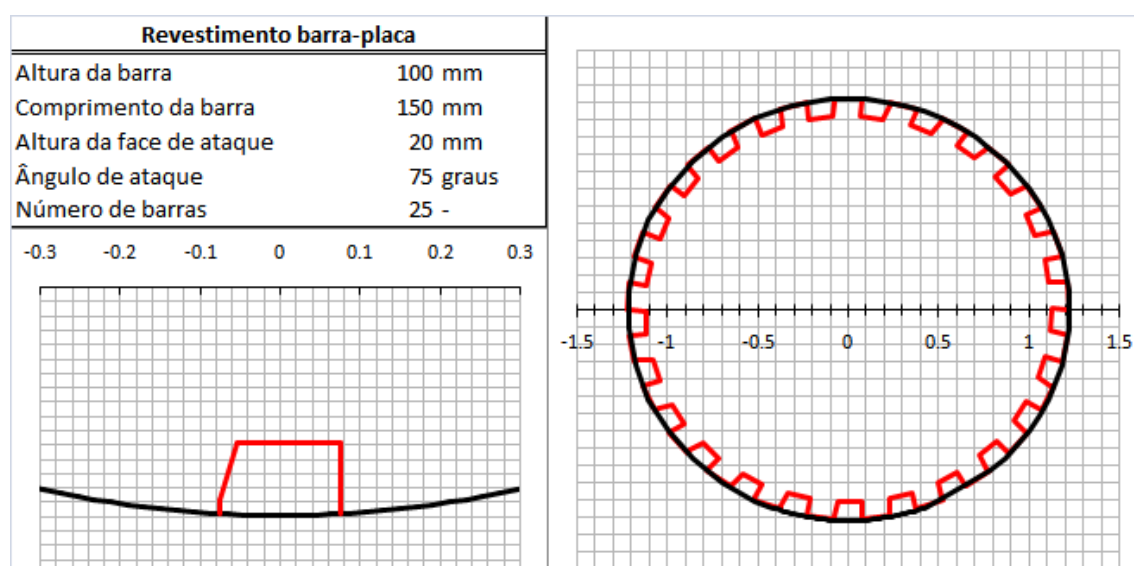


FIGURA 4-8 Configuração do revestimento da simulação IDB01

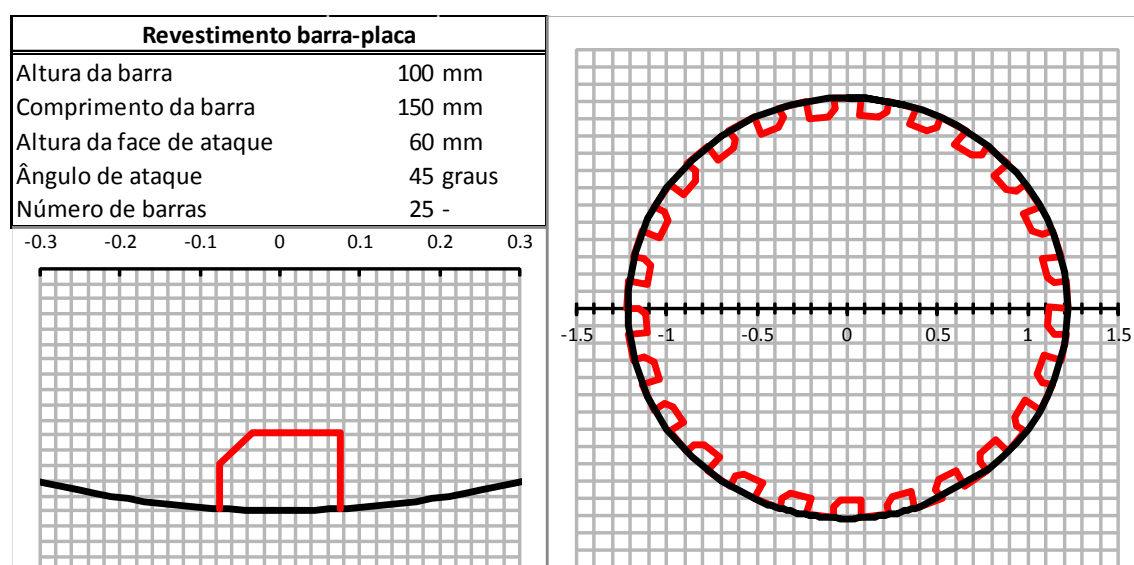


FIGURA 4-9 Configuração do revestimento da simulação IDB02

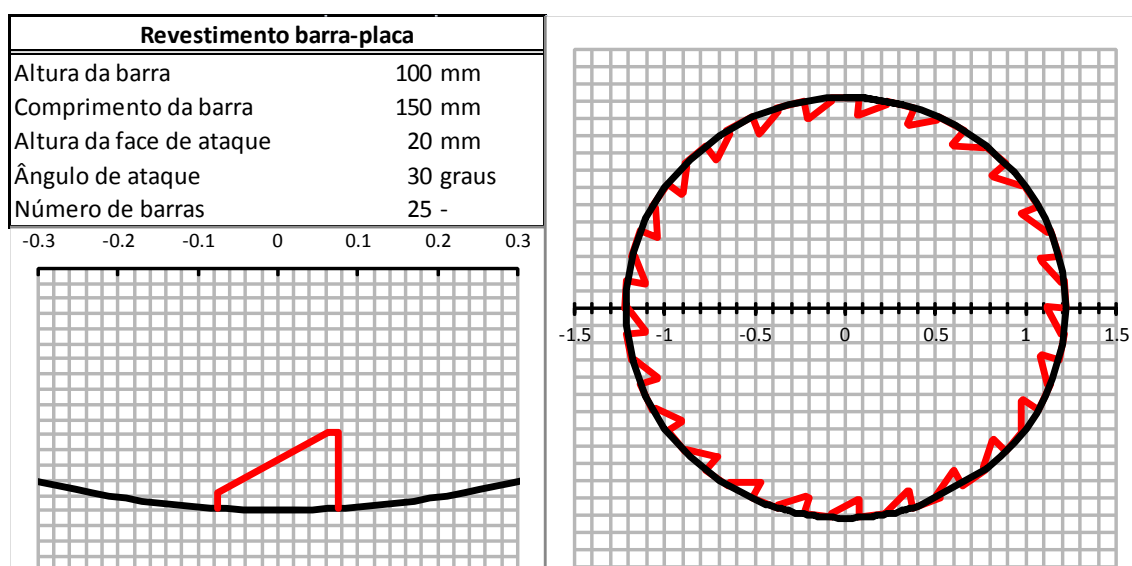


FIGURA 4-10 Configuração do revestimento da simulação IDB03

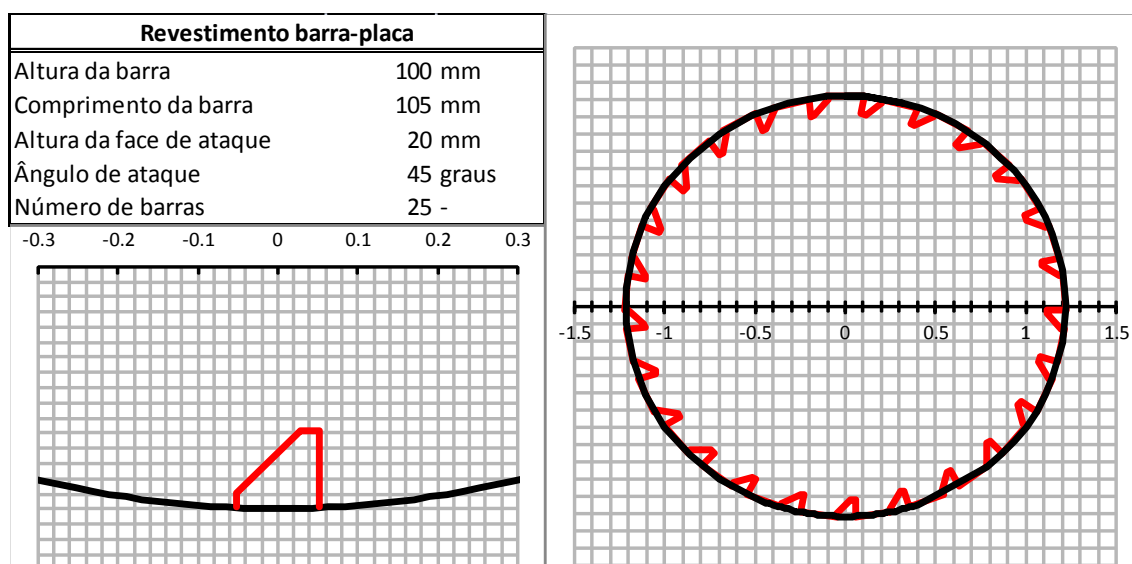


FIGURA 4-11 Configuração do revestimento da simulação IDB04

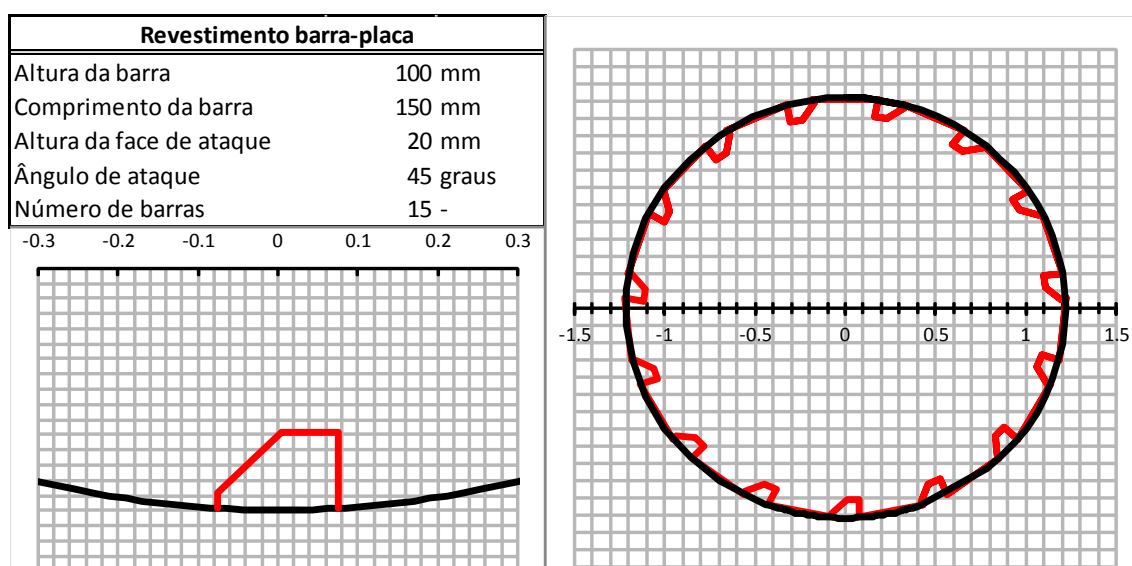


FIGURA 4-12 Configuração do revestimento da simulação IDB05

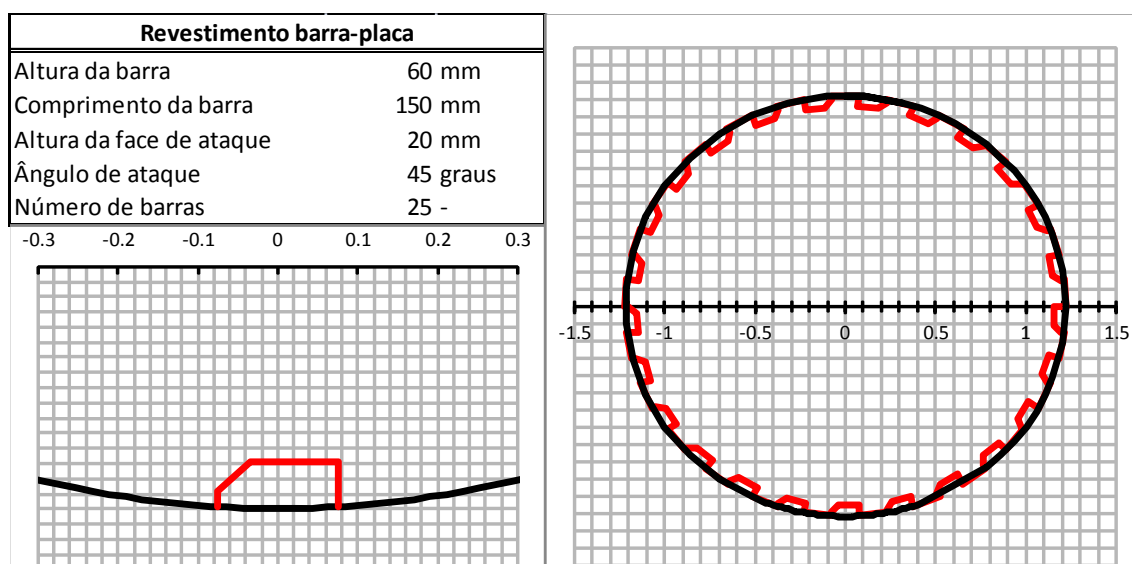


FIGURA 4-13 Configuração do revestimento da simulação IDB06

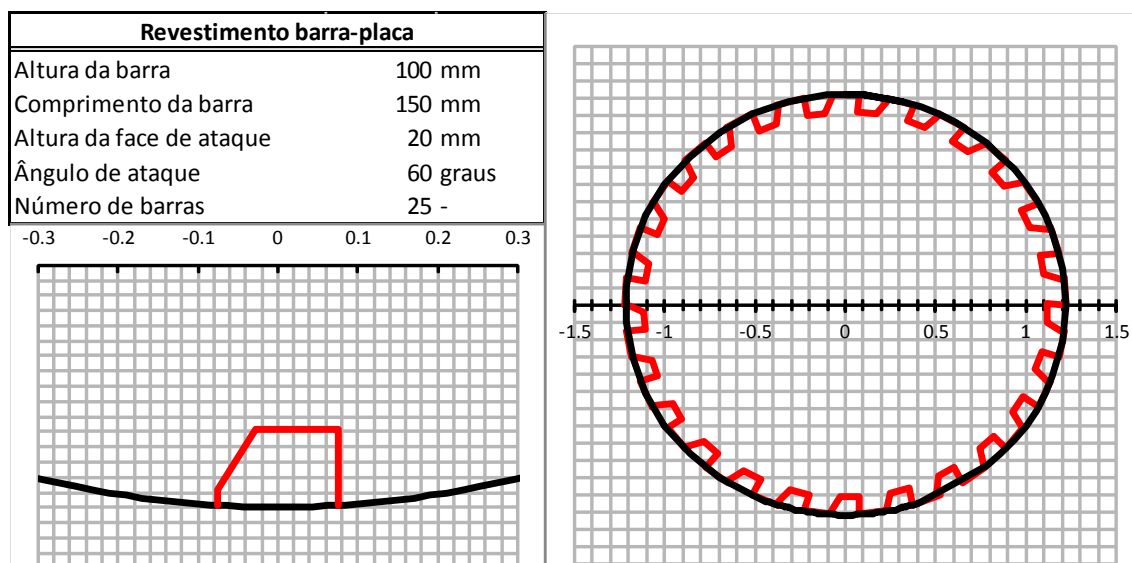


FIGURA 4-14 Configuração do revestimento da simulação IDB07

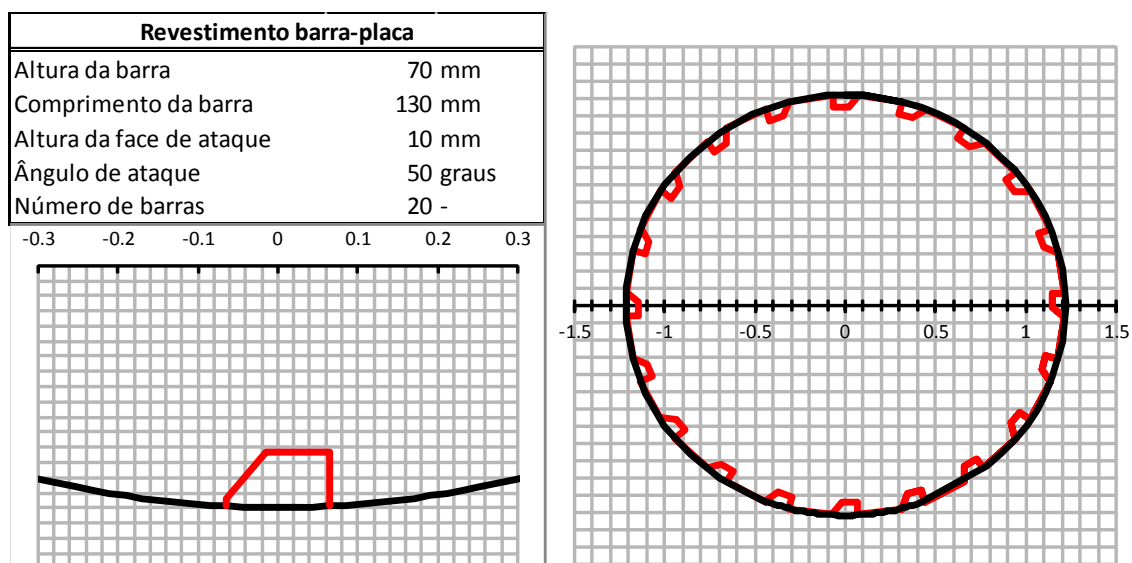


FIGURA 4-15 Configuração do revestimento da simulação IDB08

4.2.3. Efeito do tamanho de bolas

A moagem eficiente de diferentes tamanhos de partículas do material em um moinho requer uma adequada composição de corpos moedores, que irá depender da distribuição granulométrica do produto pretendido e da alimentação do moinho. Os diâmetros de

bolas disponíveis comercialmente variam entre 10 a 150mm (GUPTA,2006). A quantidade e os tamanhos utilizados na composição da carga do moinho dependem principalmente do *top size* da alimentação.

É teoricamente possível o aumento da massa de bolas carregada mantendo-se o volume da carga constante. Diferentes densidades de carga podem ser obtidas com um melhor empacotamento da carga, ou seja, uma redução na porosidade.

O tamanho dos corpos moedores também tem uma significativa importância nas moagens de finos e ultrafinos e é geralmente o que primeiro limita o quanto se consegue reduzir às frações finas em um dado moinho. À medida que a alimentação e produto são reduzidos em tamanho, a energia necessária para realizar a quebra de uma partícula também é reduzida, e a frequência de impacto por unidade de massa aumenta. A aplicação de energia em excesso é convertida em calor e não contribui para a cominuição do material. A maneira mais eficiente de se aumentar a frequência de eventos de quebra é pela redução do tamanho dos corpos moedores.

Considerando a relação entre número e tamanho de bolas a TABELA 4-5 mostra a relação entre esses números por unidade de massa. O número de corpos moedores, bolas, por unidade de volume é inversamente proporcional à terceira potência do tamanho de bolas. Uma vez que os eventos de quebra são proporcionais ao número de corpos moedores, fica evidenciado a importância da escolha correta da distribuição do colar de bolas adequado a operação que se pretende.

TABELA 4-5 O número de bolas para cargas de diferentes tamanhos têm uma relação que cresce à terceira potência.

Tamanho de bolas (mm)	Área Superficial (m ² /t)	Número de bolas /t	Número de bolas normalizado
20	83.3	30606.72	1
15	111.1	72549.26	2.4
10	166.7	244853.8	8
5	333.3	1958830	62
3	555.6	9068658	296
2	833.3	30606720	1,000

O efeito da combinação de bolas de diferentes tamanhos será estudado através da simulação das cargas apresentadas na TABELA 4-6. Distribuições de monotamanho, embora não comumente adotadas em operações, servirão para acessar a o comportamento que cada tamanho de bolas tende a apresentar e possam ser comparadas às composições de cargas.

TABELA 4-6 Distribuição de cargas simuladas

ID	Simulação	
IDC01	Carga 1	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	25,40	100,00
IDC02	Carga 2	
	Diâmetro (mm)	% no carregamento
	38,00	51,0
	25,40	49,0
IDC03	Carga 3	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	63,50	34,00
	51,00	43,00
	38,00	17,00
	25,40	6,00
IDC04	Carga 4	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	63,50	50,00
	51,00	50,00
IDC05	Carga 5	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	38	100,00
IDC06	Carga 6	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	51	100,00
IDC07	Carga 7	
	Diâmetro (mm)	Carregamento (%)
	63,50	100,00

4.2.4. Efeito da rotação

A rotação do moinho é muitas vezes um parâmetro inalterável nas operações industriais.

O efeito da rotação será avaliado realizando a simulação de acordo com a configuração de controle alterando a velocidade de rotação conforme o quadro a seguir.

TABELA 4-7 Rotações simuladas

Teste	IDD01	IDD02	IDD03	IDD04	IDD05	IDD06	IDD07	IDD08	IDC09	IDD010
% Nc	20,00	40,00	50,00	60,00	65,00	75,00	80,00	85,00	90,00	100,00

4.2.5. Efeito do enchimento de bolas

O efeito do enchimento da carga de bolas será avaliado realizando a simulação de acordo com a configuração de controle alterando conforme o quadro a seguir.

TABELA 4-8 Enchimentos simulados

Teste	IDE01	IDE02	IDE03	IDE04	IDE05	IDE06
J (%)	15,00	25,00	45,00	55,00	65,00	75,00

4.3. Calibração do aplicativo

Os testes para ajuste de parâmetros do modelo de simulação serão realizados no Laboratório de Tratamento de Minérios do Departamento de Engenharia de Minas da UFMG em um moinho mostrado na FIGURA 4-16 e FIGURA 4-17. O equipamento de bancada possui diâmetro e comprimento interno de 0,29 m e será dotado de uma tampa transparente de acrílico que permitirá o registro de imagens. Serão realizados três testes variando o enchimento de bolas entre 20 e 35%. A TABELA 4-9 apresenta as demais configurações estabelecidas.

TABELA 4-9 Parâmetros dos testes de calibração

Parâmetro	Teste 1	Teste 2	Teste 3	
Diâmetro interno	0.290	0.290	0.290	m
Comprimento interno	0.290	0.290	0.290	m
Volume interno	0.019155	0.019155	0.019155	m ³
Massa de bolas	18.02	22.53	31.54	kg
Densidade das bolas	7840	7840	7840	kg/m ³
Porosidade	0.40	0.40	0.40	Fração
Volume preenchido	0.20	0.25	0.35	Fração
Velocidade crítica (Nc)	78.6	78.6	78.6	RPM
%Velocidade crítica	56	56	56	Fração

O perfil interno do moinho, tipo dupla onda, será mapeado através de fotografias com marcas de escalas e reproduzido no aplicativo de simulação. As demais características de operação nos testes serão reproduzidas em simulações e o resultado obtido será comparado visualmente através de gravações de vídeo. Os coeficientes de atrito e restituição serão ajustados de modo a aproximar o movimento simulado do real. A partir daí, testes com diferentes velocidades de rotação e enchimento de bola serão tomados para o estudo do movimento da carga de bolas em moinhos de tamanho industrial. O aplicativo será também validado utilizando-se predições teóricas de potência consumida conforme Austin (Austin, 1981) e dados experimentais disponíveis em Moys (Moys, 2003).



FIGURA 4-16 Moinho utilizado na validação do software



FIGURA 4-17 Imagem da preparação de um teste de validação

5. Resultados e Discussões

O estudo do movimento da carga em moinhos de bolas foi elaborado com o auxílio dos *softwares* de simulação e tratamentos de dados desenvolvidos para este trabalho. Das simulações resultou a trajetória desenvolvida pela carga, potência e diferentes informações derivadas da dinâmica impacto da carga. No início do trabalho, testes de laboratório e dados de literatura foram utilizados para a calibração de parâmetros cinemáticos adotados no modelo adotado no simulador. A partir de então, simulações envolvendo alteração de variáveis operacionais como enchimento de carga de bolas, variações da geometria do perfil interno e velocidade de rotação foram elaboradas.

A apresentação dos resultados obtidos nas simulações será organizada com a exposição dos resultados para a simulação adotada como controle, evidenciando aspectos do movimento da carga e as análises decorrentes dos dados elaborados pelo aplicativo de simulação. Adiante serão apresentados os resultados de demais simulações envolvendo os efeitos das variáveis em estudo, a saber: geometria do revestimento, distribuição de tamanho de bolas, rotação e fração de enchimento.

5.1. Calibração do Aplicativo

Uma vez que a descrição do movimento da carga feita pelo aplicativo de simulação leva em consideração parâmetros físicos como atrito e perda de energia cinética na colisão entre os corpos, é necessária a calibração desses antes de se desenvolver os estudos de simulação.

O moinho de bancada com dimensões de 29cm de diâmetro e 29cm de profundidade, mostrado na FIGURA 5-1 foi utilizado para a realização dos testes de calibração. Uma vez que o efeito do minério não é considerado nas simulações nenhum material foi utilizado na moagem. O perfil do revestimento do moinho foi mapeado através de fotografia digital e reproduzido no aplicativo de simulação.

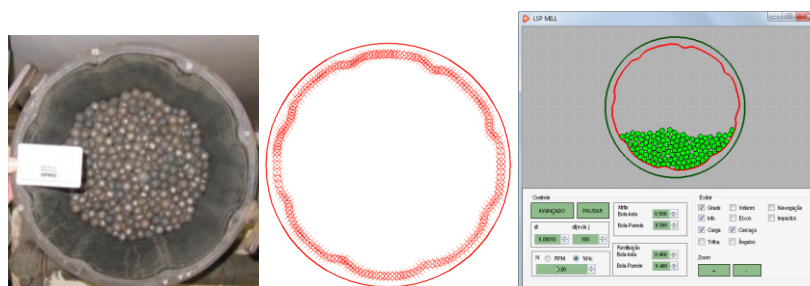


FIGURA 5-1 O perfil interno do revestimento é reproduzido no aplicativo de simulação.

A FIGURA 5-2 apresenta imagens capturadas em vídeo dos testes em laboratório comparadas às respectivas simulações.

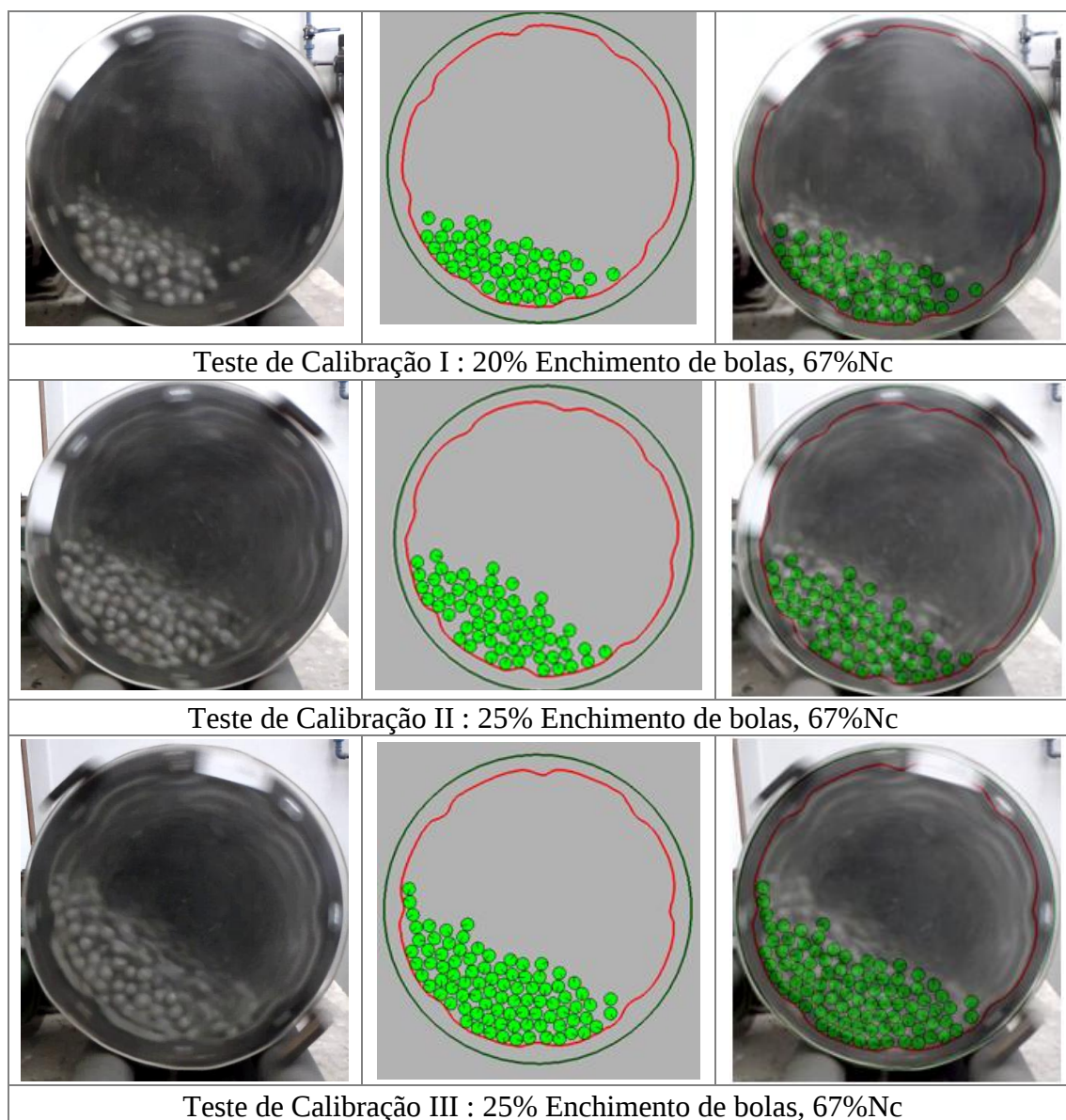


FIGURA 5-2 Testes de calibração.

Os parâmetros de atrito e restituição foram variados por tentativa e erro, ajustados de modo a que a simulação obtida melhor se aproximasse aos vídeos registrados nos três testes de calibração, onde os níveis de enchimento de bola foram de 20, 25 e 35%.

Além dos testes de laboratório, o estudo apresentado por Moys (Moys,2003), foi utilizado para verificar o a escolha dos parâmetros de calibração adotados. O estudo faz uso de um moinho experimental de 0.55m de diâmetro e comprimento de 0.0235m onde a parte frontal foi coberta com uma placa de acrílico que permite a observação do comportamento da carga. Doze barras elevadoras, ou *lifters*, de geometria quadrada e trapezoidal foram utilizados. Os *lifters* quadrados feitos em aço com arestas de 22,00mm, enquanto os trapezoidais apresentam dimensões de 24 (base inferior) x 8 cm e 22cm de altura. Bolas de diâmetro de 22,24mm e densidade de 7800kg/m³ foram utilizadas como carregamento. Três frações de enchimentos são testadas, 25%, 35% e 45%, correspondendo a 120, 168 e 216 bolas na carga. O moinho foi dotado de instrumentação de controle que permitiu a variação da velocidade até 200% da velocidade crítica. Uma câmera digital foi utilizada para produzir imagens do experimento.

As condições dos testes utilizando 12 barras elevadoras quadradas, 25,35 e 45% de enchimento foram reproduzidas no aplicativo de simulação utilizado para o presente trabalho. A comparação dos testes de simulação com as imagens apresentadas por Moys são apresentadas a seguir nas FIGURA 5-3 e FIGURA 5-4.

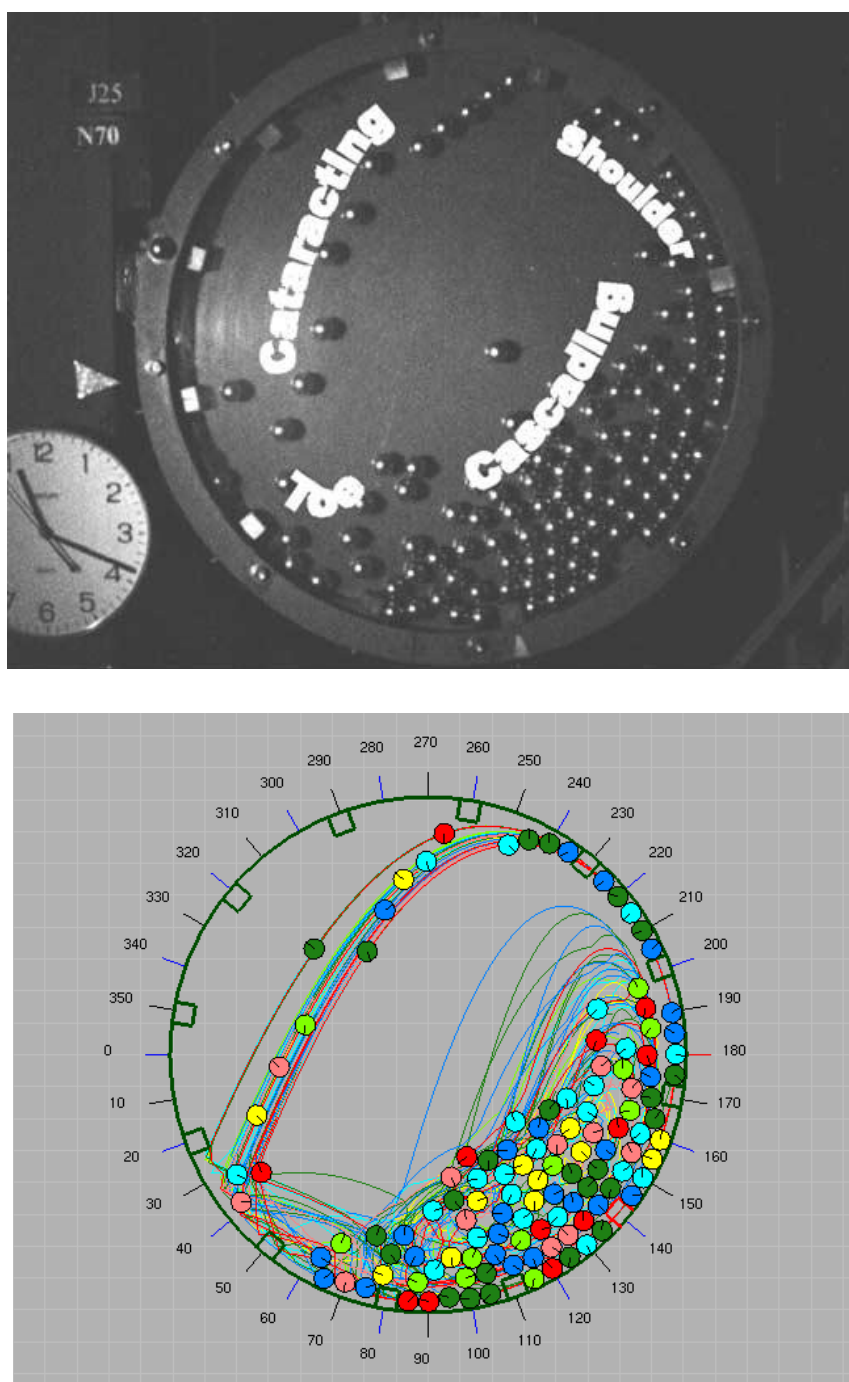
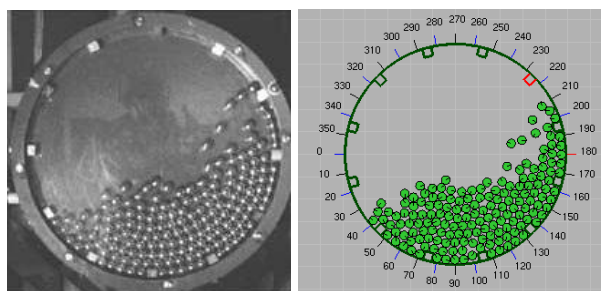
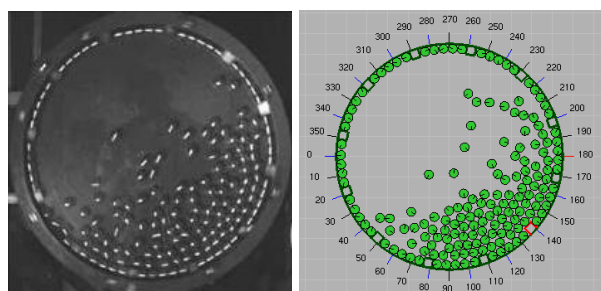


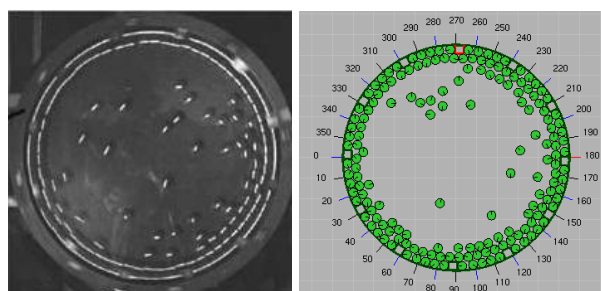
FIGURA 5-3 Para um enchimento de bolas de 25%, velocidade de rotação de 70%Nc, o teste desenvolvido por Moys (Moys,2003) é comparado à simulação obtida pelo aplicativo desenvolvido para o presente trabalho.



(A)



(B)



(C)

FIGURA 5-4 Rotações de (A) 30, (B) 100, e (C) 160 %Nc são comparadas com o estudo apresentado por Moys (Moys,2003).

A comparação visual dos testes apresentados por Moys com os desenvolvidos em simulação permitem a validação do aplicativo no que diz respeito à descrição da trajetória desenvolvida pela carga de bolas.

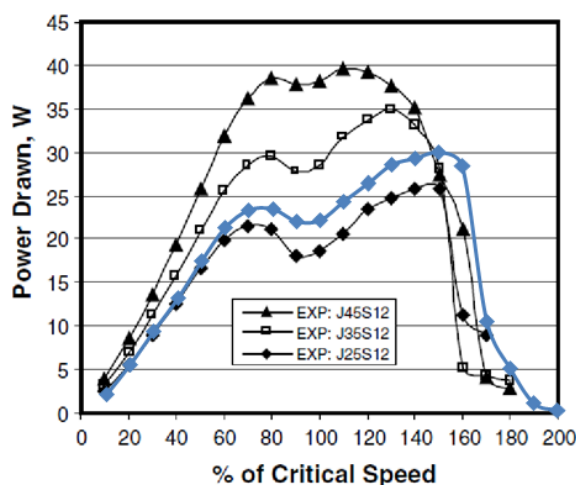


FIGURA 5-5 Adaptado de Moys (Moys,2003) – A potência experimental é comparada aquela prevista pelo aplicativo de simulação para as condições apresentadas no estudo de Moys.

O trabalho de Moys apresenta ainda a potência desenvolvida pelo moinho de laboratório, reproduzidas na FIGURA 5-5. Conforme apresentado pelo referido estudo, a potência do moinho apresenta inicialmente um trecho de dependência linear com a rotação até cerca de 70% da velocidade crítica. Com a elevação da rotação até aproximadamente 100% da velocidade crítica a centrifugação da carga faz com que exista uma queda na potência. Na continuidade da curva, outro trecho de dependência linear, segue até 160%Nc, sendo explicado pela elevação da carga de bolas em níveis mais internos ao centro do moinho. A potência do moinho sofre então uma queda abrupta e é praticamente anulada em rotações superiores a 180%Nc, onde ocorre centrifugação total da carga de bolas.

Para a validação dos dados de potência apresentados pelo aplicativo desenvolvido para o presente trabalho, simulações variando a velocidade de rotação foram desenvolvidas para o nível de enchimento de 35% e o perfil de 12 barras elevadoras quadradas, conforme apresentado na publicação referida. Os resultados mostram que também as potências obtidas pelo simulador desenvolvido neste trabalho se aproximam dos resultados experimentais, principalmente em rotações inferiores a 100%Nc.

5.2. Configuração de Controle

A FIGURA 5-6 apresenta o perfil e carga de bolas utilizada para a simulação de controle. A sequência de imagens mostra a carga no início do movimento de rotação da carcaça. Após a partida, uma condição de equilíbrio é conseguida após alguns segundos, no tempo da simulação. Como metodologia, a obtenção de dados só é iniciada após decorrido esse tempo.

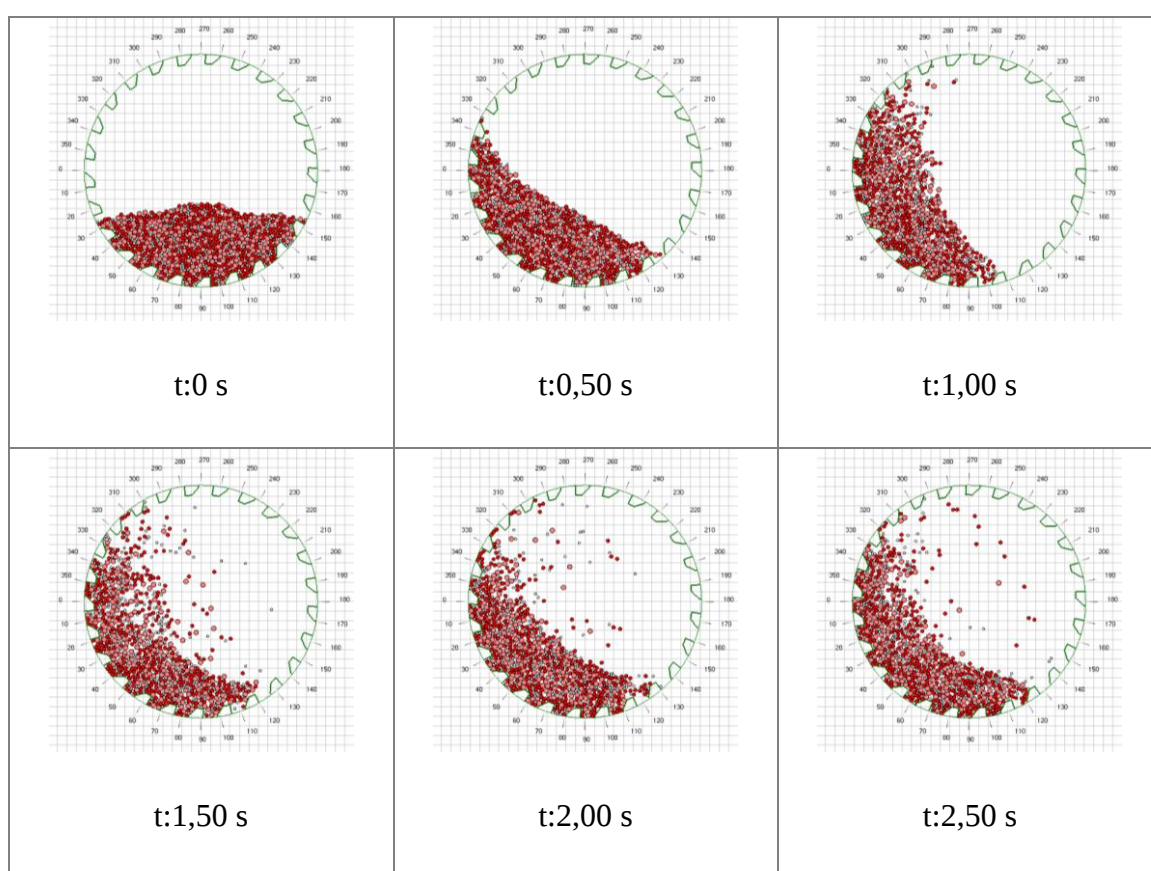


FIGURA 5-6 A aceleração imediata da carga faz com que uma condição de equilíbrio só seja alcançada após alguns segundos de simulação.

A FIGURA 5-7 apresenta quadros da simulação de controle em diferentes momentos, percebe-se que a condição de equilíbrio dinâmico esperado para o início da obtenção de dados é garantida após 5 segundos de simulação. Nota-se ainda que os limites do leito de bolas atingem um *sholder* de até 310° em relação à horizontal e um *toe* de 140°. A potência média calculada após 10s de simulação foi de 284.97 kW.

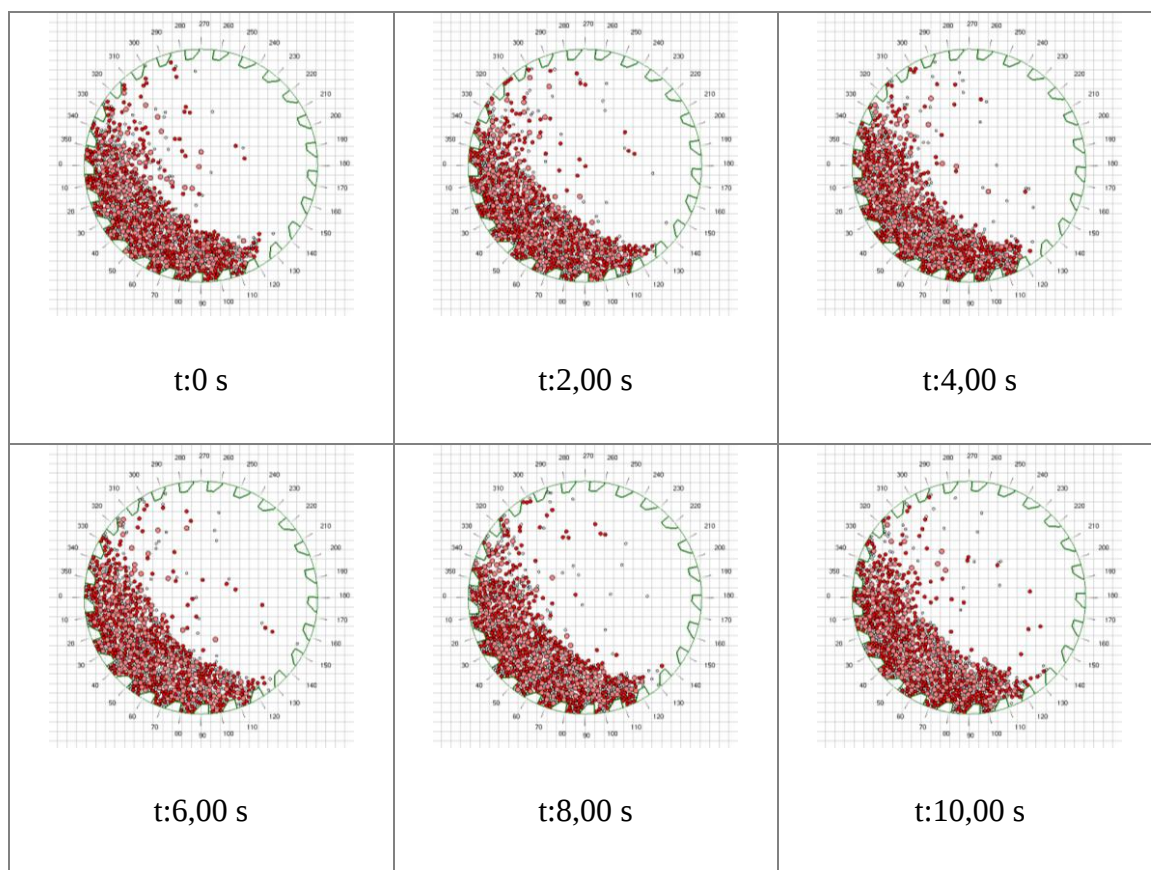


FIGURA 5-7 Quadros da simulação de controle em estado de equilíbrio em intervalos de 2,00s.

Após a condição de equilíbrio de o movimento ser atingida os dados da simulação são registrados em memória física por 10s, tempo de simulação.

A partir dessa base da base de dados gerada pelo aplicativo de simulação, diversas análises são que são disponibilizadas pelo *software* de tratamento de dados. Análises espaciais são mostradas na FIGURA 5-8 (A), onde o último quadro da simulação é mostrado sobreposto a trilhas de trajetória desenvolvidas pelas bolas da carga. O tamanho das trilhas é determinado pela posição das bolas em um mesmo intervalo de tempo. Ao lado, FIGURA 5-8 (B), é exibida a imagem sem a presença das bolas, onde então é possível identificar o formato característico do leito de bolas, conhecido por rim ou feijão e melhor identificar os limites do leito de bolas. A formação de uma ‘zona morta’, ou seja, uma zona onde as bolas possuem baixa velocidade também pode ser notada pela curtas trajetórias observada na região central da carga.

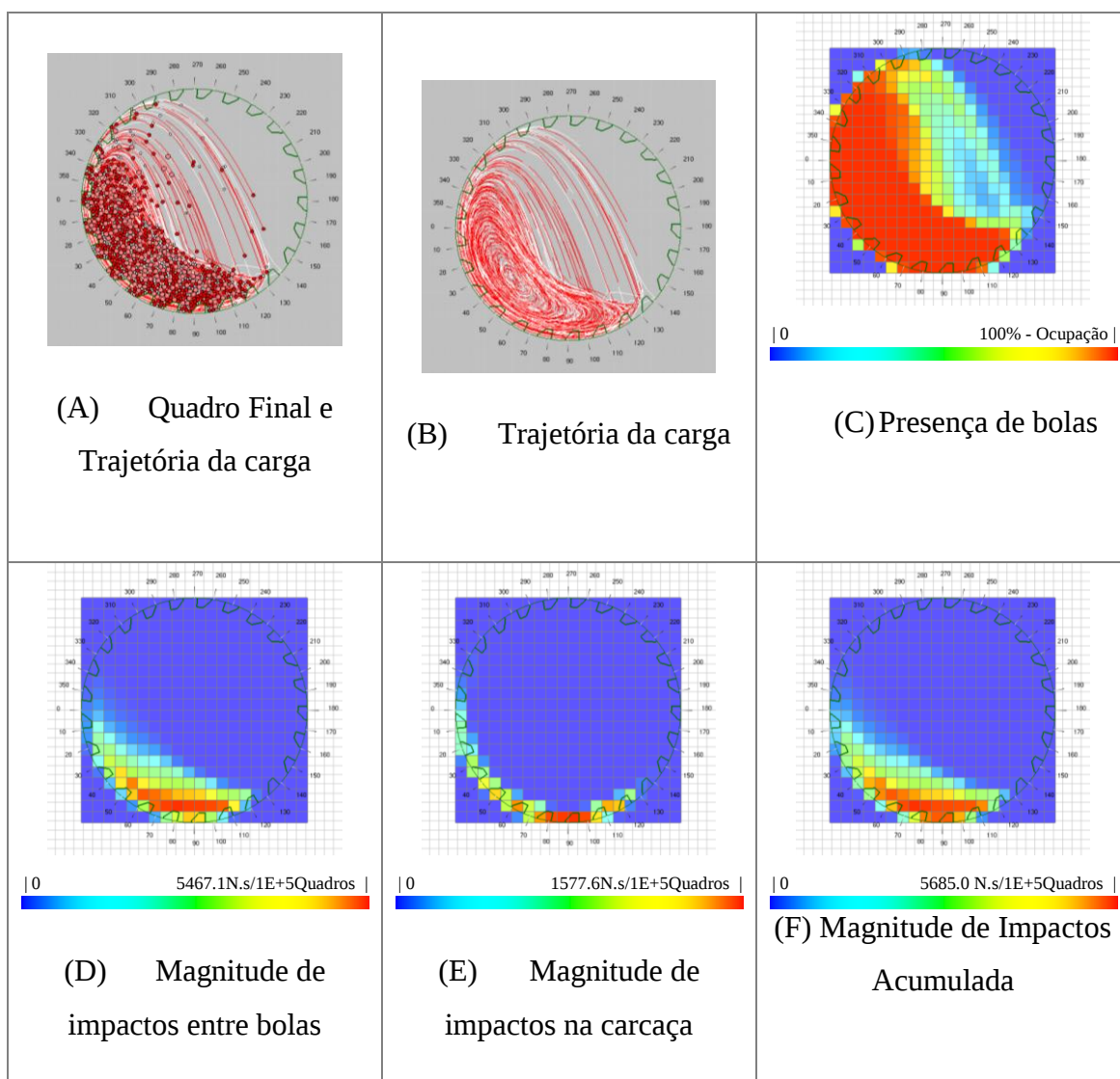
As análises quantitativas são mostradas em sequência, para isso, a área da seção do moinho é segmentada em uma grade regular e para cada célula é atribuída uma determinada cor, função da variável em estudo. A FIGURA 5-8 (C) apresenta a presença de bolas acumulada na escala de cores, vermelho identifica as regiões no interior do moinho onde existiu a presença de bolas por todo intervalo de tempo simulado. A gradação segue por amarelo, verde, azul claro e azul escuro representando regiões onde nenhuma bola foi registrada durante os 10s de simulação. A visualização também é chamada de *densidade de presença*, e serve para quantificar a os limites espaciais da carga de bolas, além de permitir identificar as regiões de cascata e catarata.

A força de contato entre uma bola e a carcaça, ou duas bolas do carregamento, é representada, no simulador, por um vetor de impulso com origem no ponto de contato. Uma vez calculadas as colisões, avaliações espaciais da distribuição dos impactos gerados durante o movimento da carga são elaboradas. Em cada célula da grade apresentada na FIGURA 5-8 (F) o módulo dos vetores de impulso são acumulados durante os diversos quadros que compõem a simulação para todo impacto ocorrido na região delimitada pela célula. Também são elaborados e mostrados nas FIGURA 5-8 (D), (E), e (G) a distribuição da magnitude dos impactos entre bolas, na carcaça e o número de impactos, respectivamente. Na FIGURA (D) apenas os contatos bola-bola são registrado, na FIGURA(E) são armazenados os contatos bola-carcaça.

Através da análise da magnitude de impactos acumulada, FIGURA 5-8 (F), nota-se pela escala de cores que a distribuição de forças cresce gradualmente da superfície do leito de bolas e se concentra na região inferior do moinho.

A FIGURA 5-8 (G) foi elaborada com os números de impactos ocorridos em cada grade de análise durante o tempo de registro de dados da simulação. Aqui é ressaltado que, quando aprisionadas entre as barras do revestimento, as bolas manterão contato entre si ou com a carcaça durante toda a trajetória de elevação. Dessa forma, tem-se uma acentuada diferença entre o número de impactos registrados próximos à carcaça do moinho com aqueles de regiões centrais. Verifica-se que esses contatos, apesar de existirem em grande número, não possuem grandes magnitudes individuais por serem contatos de repouso, ou seja, a velocidade relativa entre os elementos de contato é nula ou muito baixa. Na FIGURA 5-8 (H) a visualização do impacto médio (divisão dos

valores de magnitude de impacto acumulada pelo número de impactos), nota-se a concentração de impactos de alta energia na região aonde as bolas da carga chegam ao final da sua trajetória em queda livre, atingindo o leito de bolas ou a carcaça do equipamento. A visualização é útil para avaliar o comprometimento da carcaça em função de impactos diretos e será elaborada para as demais simulações apresentadas no presente trabalho.



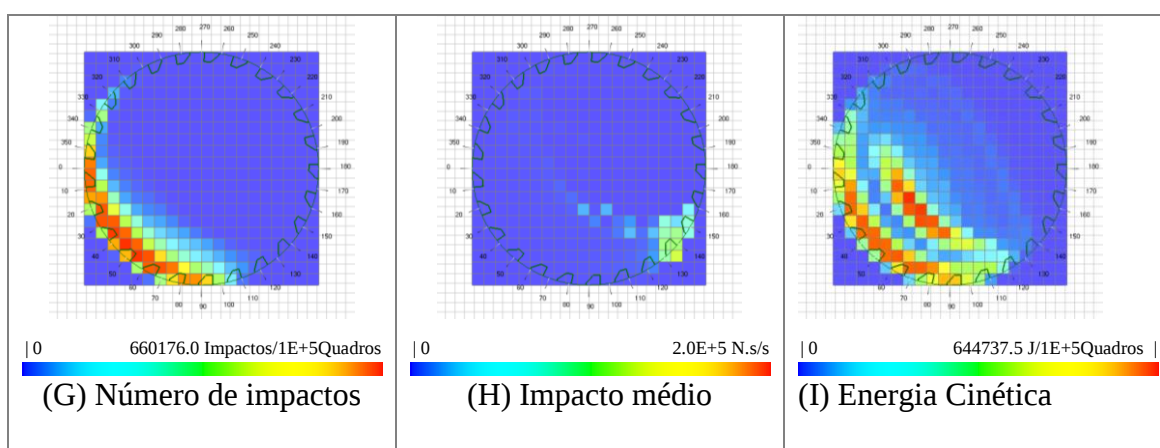


FIGURA 5-8 Grades de análises, quadro final e trajetórias de bolas para a simulação de controle (IDA01)

A FIGURA 5-8 (I) apresenta a distribuição de energia cinética da carga de bolas, onde se percebe o delineamento da chamada *zona-morta* separando as regiões de ascensão (parte mais externa, próxima às barras elevadoras) da de queda de bolas, região mais ao centro do moinho. Essa região de transição evita que forças de cisalhamento muito grande ocorram entre as bolas que seguem sentidos opostos, entretanto, o efeito de quebra do material também é reduzido.

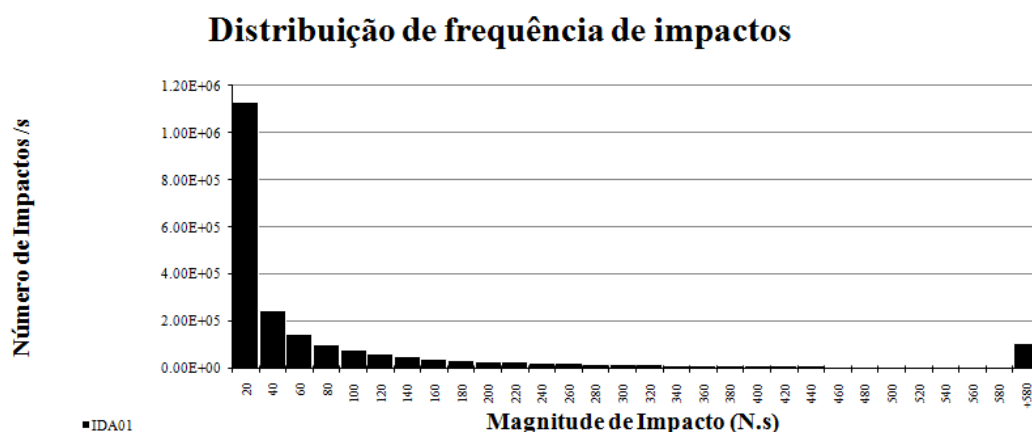


FIGURA 5-9 Distribuição de frequência de impacto para a simulação de controle.

Além do cálculo da trajetória das bolas e análises espaciais, o aplicativo de simulação permite obter ainda a distribuição de frequência de impactos. Na FIGURA 5-9 o histograma apresenta a distribuição que se estende por um amplo intervalo de magnitudes. Observa-se que a grande maioria dos impactos encontra-se na região de

baixa magnitude, devido principalmente ao contato de repouso permanente ou por um período de tempo relativamente prolongado (não instantâneo) que ocorre com as bolas que compõem o leito de corpos moedores. Para permitir a comparação de modo mais efetivo, a distribuição apresentada na forma de histograma para a simulação de controle é formatada, adiante, em gráfico de linhas.

Na seqüência são apresentados os resultados obtidos para as simulações desenvolvidas, de acordo com os parâmetros elaborados para o estudo.

5.3. Efeito da Geometria do Revestimento

A carga lançada em um movimento de queda livre pode, no final de sua trajetória, alcançar grandes velocidades. Por exemplo, para um moinho de 5 metros de diâmetro, uma bola da carga pode chegar a 8m/s e se chocar contra as placas do revestimento, danificando-o. Um acelerado desgaste do revestimento pode acontecer devido a situações como essa. Como resultado, a vida útil do revestimento pode ser reduzida de anos para poucos meses de operação, além do prejuízo de eficiência da moagem por conta da perda do evento de quebra na colisão bola-bola. Outro fato, o aumento da taxa de quebra de bolas pode ocorrer quando o revestimento é feito de aço, o que leva a mudança da característica da carga moedora, ou seja, a redução do *top size* da carga de bolas, reduzindo a eficiência da moagem e aumentando os custos com reposição de bolas. (Kawatra, 2006)

As simulações identificadas por IDB1 a IDB8 avaliaram o efeito da geometria do revestimento no movimento da carga de bolas utilizando diferentes perfis de revestimento do tipo barra-placa. A altura da barra, ângulo de ataque, altura da face de ataque, comprimento e número de barras foram variados, mantendo-se uma mesma composição de carga de bolas.

Quanto ao ângulo de ataque da barra, foi variado de 30° na IDB03 para 45° na simulação IDA01, 60° na IDB07 e 75° na IDB01. A FIGURA 5-10 apresenta o detalhe da posição do toe e trilhas de bolas. Verifica-se que os ângulos de *toe* da carga permanecem praticamente inalterados entre 120° a 130°. Entretanto o lançamento de bolas sofre um ligeiro aumento, especialmente na situação de maior ângulo de ataque.

Destaca-se ainda, na mesma imagem, o aumento do lançamento de bolas de maiores diâmetros em função da elevação do ângulo de ataque.

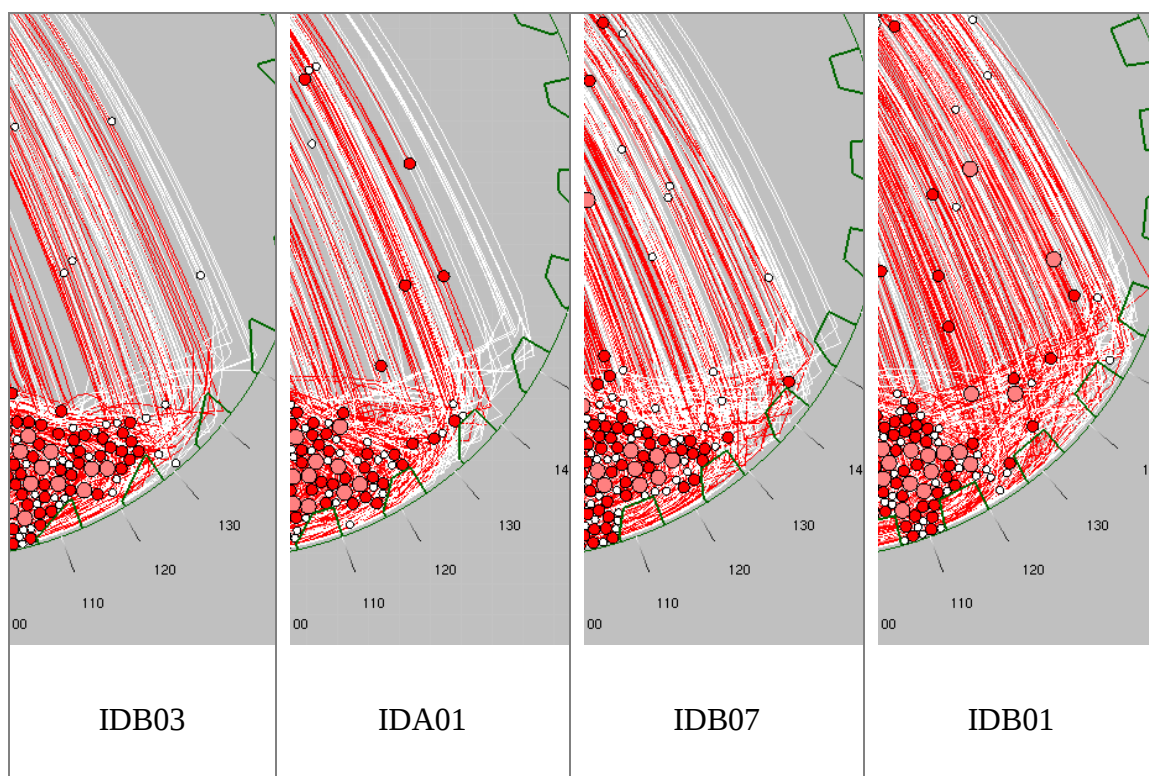


FIGURA 5-10 A mudança do ângulo de ataque da barra promove uma modificação no lançamento das bolas, porém o ângulo de toe é pouco alterado.

Já a variação em altura da face de ataque da barra, de 20 para 60 mm entre as simulações IDA01 e IDB02, trouxe um pronunciado efeito no ângulo de lançamento da carga, que atingiram valores de no máximo 150° na configuração da simulação IDA01, sendo elevadas para até próximo de 170° na configuração da simulação IDB02. A potência média consumida pelo moinho variou de 284.97 kW com o perfil com menor face de ataque para 267.56 kW, uma redução de 6.1% devida principalmente ao maior retorno da energia da carga de bolas para a carcaça do moinho em razão da queda das bolas em uma posição mais distante horizontalmente do centro do moinho, conforme o detalhe na FIGURA 5-11.

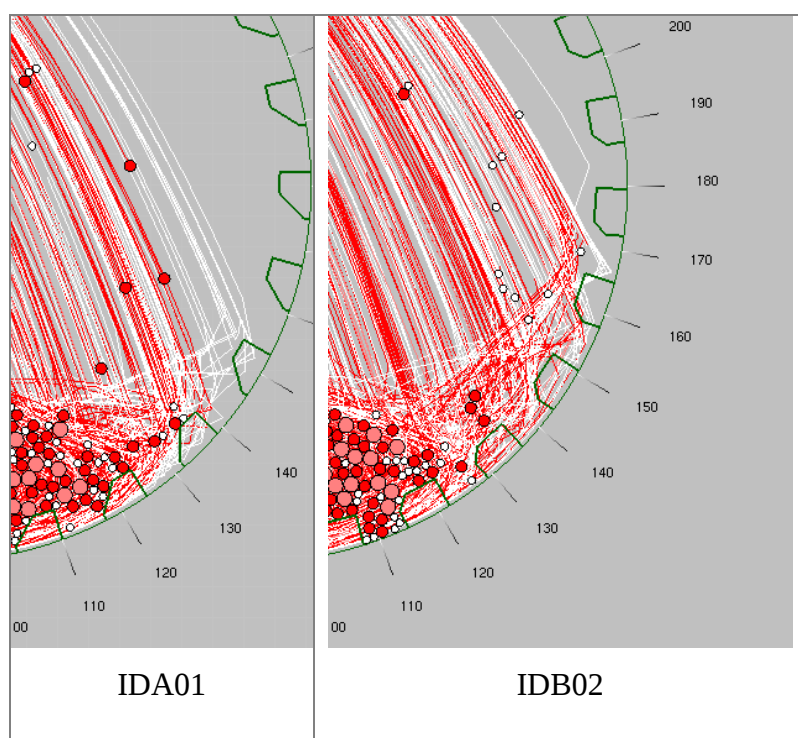


FIGURA 5-11 O lançamento de bolas além do *toe* é fortemente influenciado pela altura da face de ataque das barras elevadoras.

O comprimento da barra foi reduzido de 150 mm na simulação IDA01 para 105 na simulação IDB04. A alteração trouxe poucas mudanças nos pontos limites da carga, conforme mostra a FIGURA 5-12 e FIGURA 5-13. Quanto ao consumo energético, ocorreu um aumento de 4,6% na potência quando da utilização da barra mais curta.

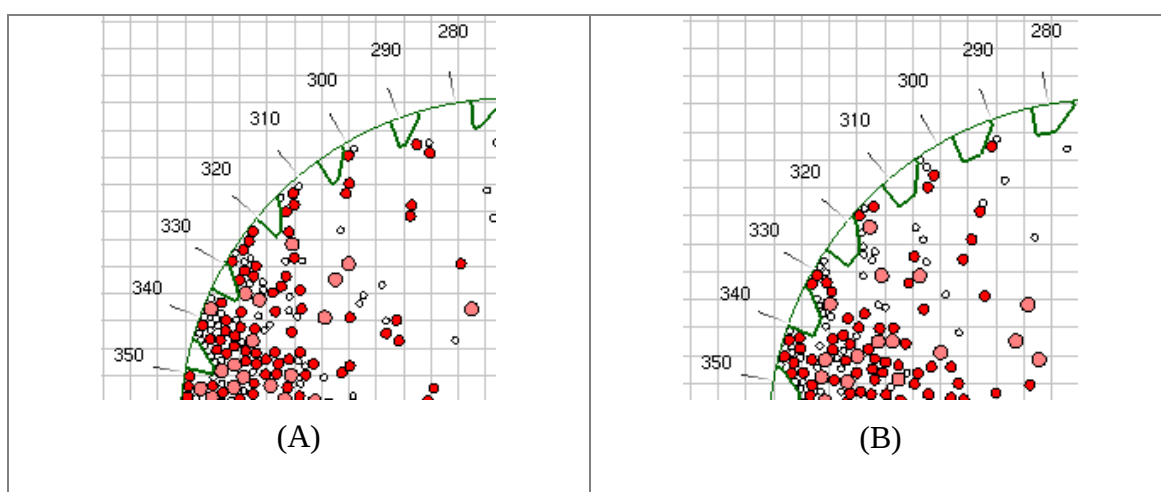


FIGURA 5-12 Detalhe da posição do *sholder* nas simulações IDB04 (A) e IDA01 (B)

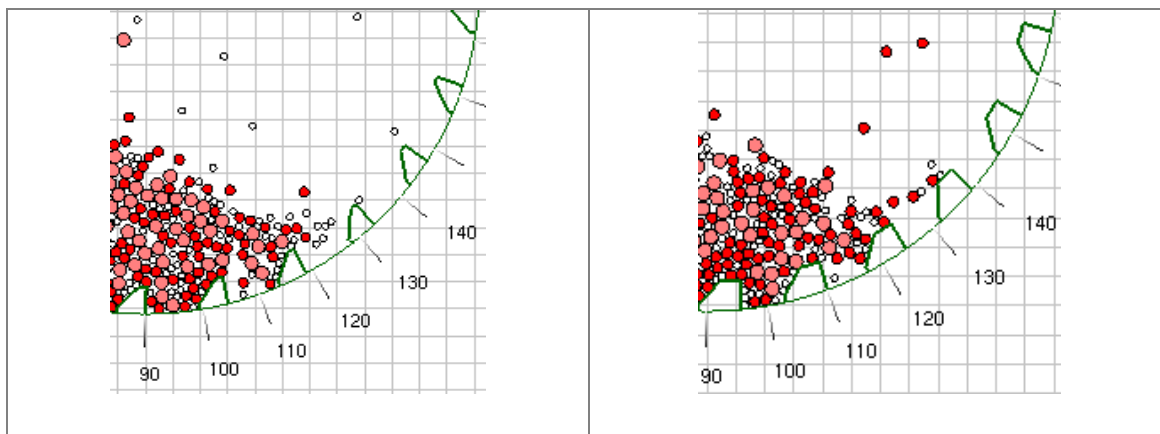


FIGURA 5-13 Detalhe da posição do *toe* nas simulações IDB04 (A) e IDA01 (B)

Quanto ao número de barras, o lançamento da carga foi ligeiramente afetado por sua variação. A redução, de 25 na simulação IDA01 para 15 na IDB05 trouxe um efeito mostrado na FIGURA 5-14, no detalhe da região de *sholder* de ambas as configurações. Para a configuração de 15 barras elevadoras, foi destacada a trajetória extrema observada pelas bolas de 38mm de diâmetro. Observa-se que essas bolas, de maiores diâmetros, conseguem atingir maiores alturas antes de serem lançadas em queda livre quando da utilização de um maior número de barras elevadoras. O contorno geral do leito de bolas permanece pouco alterado, porém há uma maior frequência de bolas de 25mm nas regiões mais altas durante o lançamento da carga na configuração de menos barras. A classificação torna-se mais nítida na inspeção do *toe*, mostrado na FIGURA 5-15, onde as bolas de menores diâmetros são claramente segregadas.

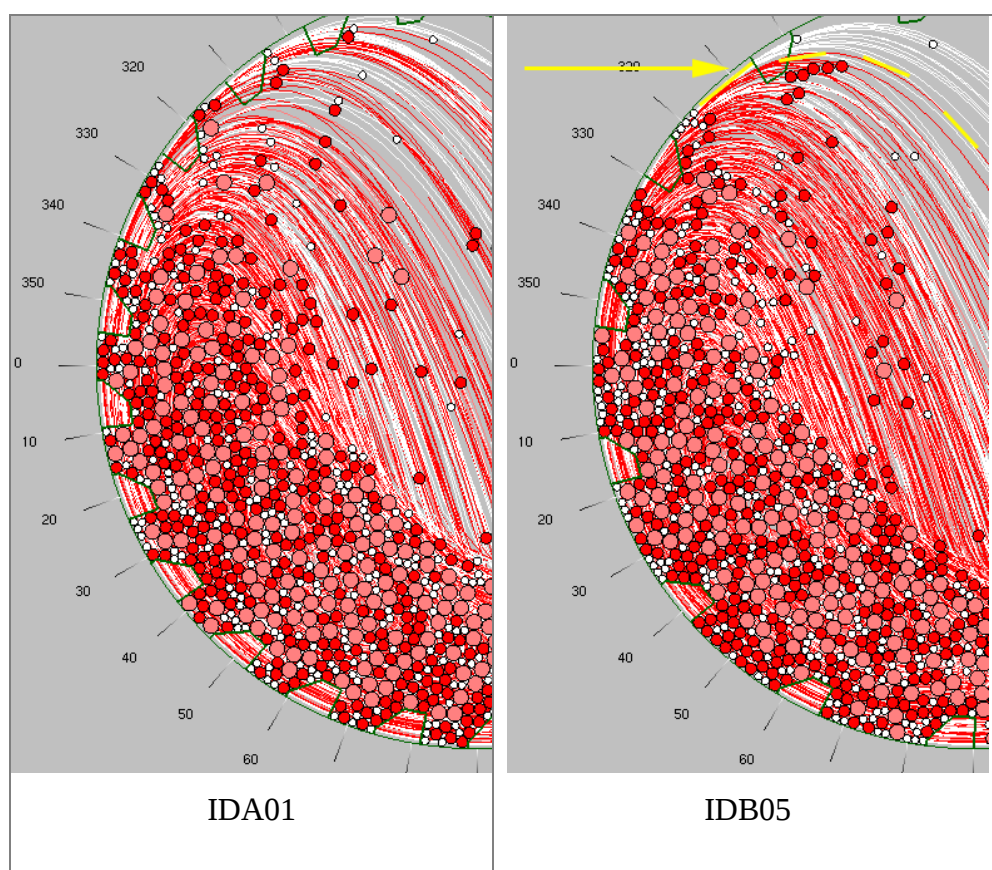


FIGURA 5-14 Efeito de classificação do lançamento de bolas em virtude da redução do número de barras elevadoras.

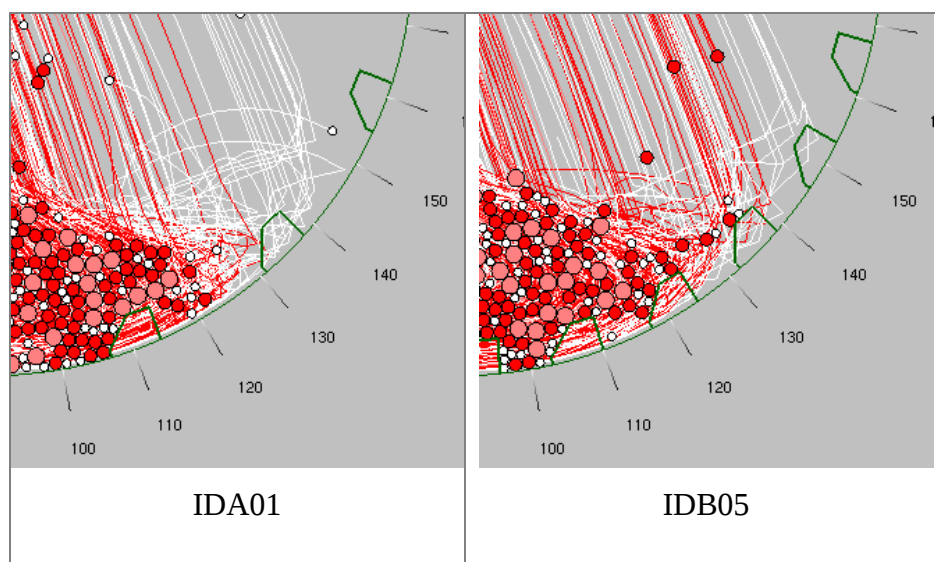


FIGURA 5-15 A redução do número de barras elevadoras, apesar de não modificar a posição do *toe*, faz com que bolas de maiores diâmetros sejam lançadas mais adentro do leito de bolas.

A altura da barra promoveu o movimento de catarata da carga de bolas. A FIGURA 5-16 apresenta a comparação da densidade de presença entre as simulações IDA01 e IDB06, onde a altura da barra foi reduzida de 100 para 60mm. Nota-se uma notada alteração no lançamento da carga, principalmente em porções mais interiores ao leito de bolas. Em termos de potência desenvolvida, a configuração reduziu em cerca de 2% o consumo quando comparado à simulação de controle.

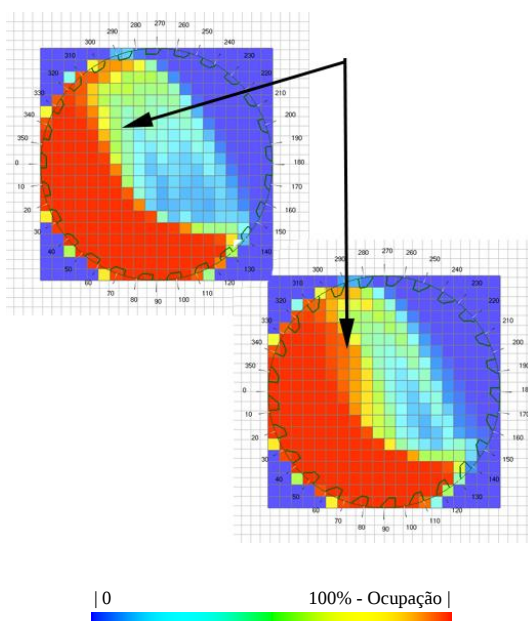


FIGURA 5-16 A carga em cascata é privilegiada por barras elevadoras mais altas.

A geometria da barra elevadora utilizada na simulação IDB08 foi ajustada através de tentativa e erro para que a trajetória da carga de bolas atingisse diretamente o leito de bolas, sendo um exemplo de aplicação do aplicativo na determinação de geometrias. A seguir a FIGURA 5-17 apresenta a configuração do leito de bolas para as simulações desenvolvidas.

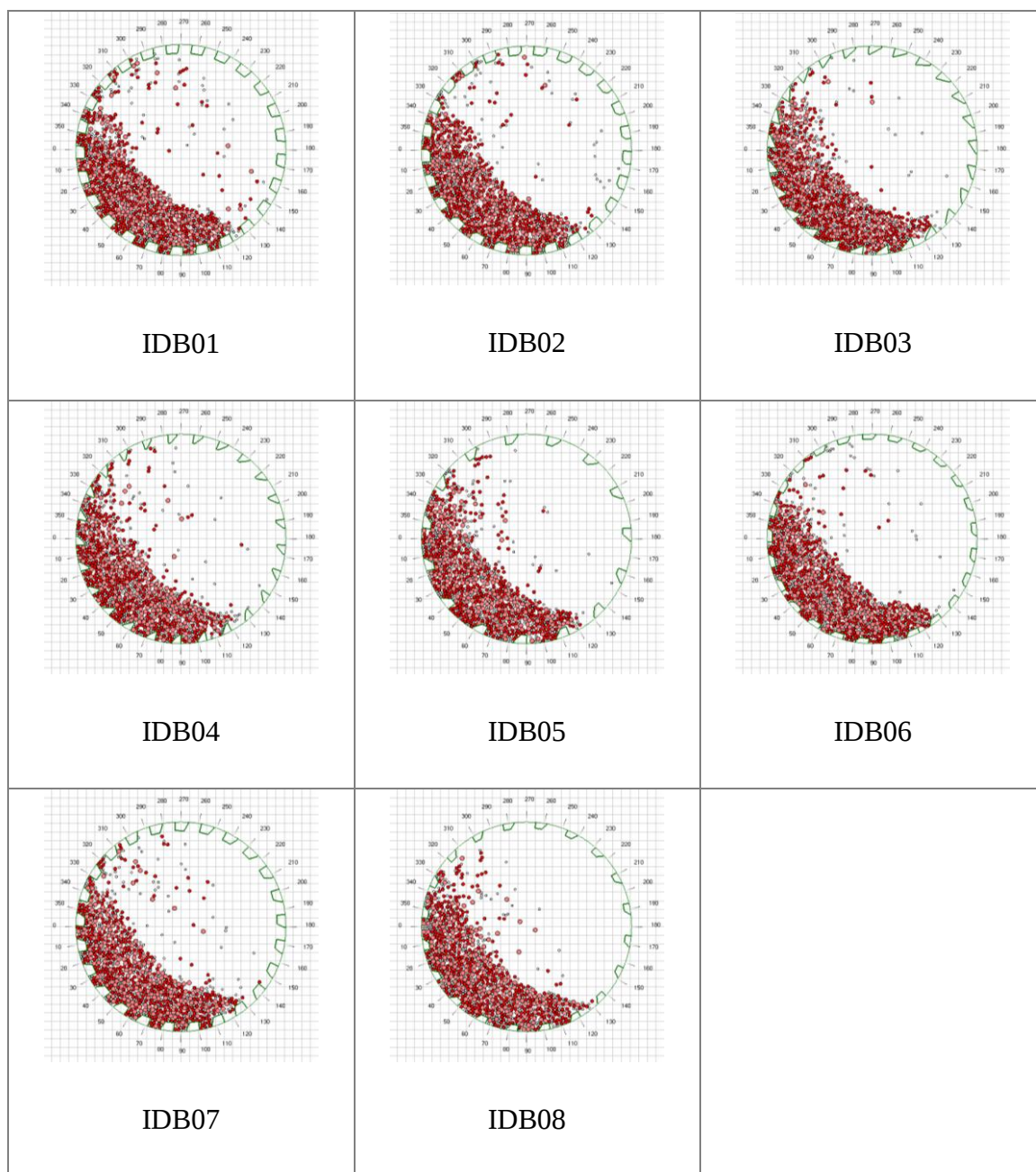
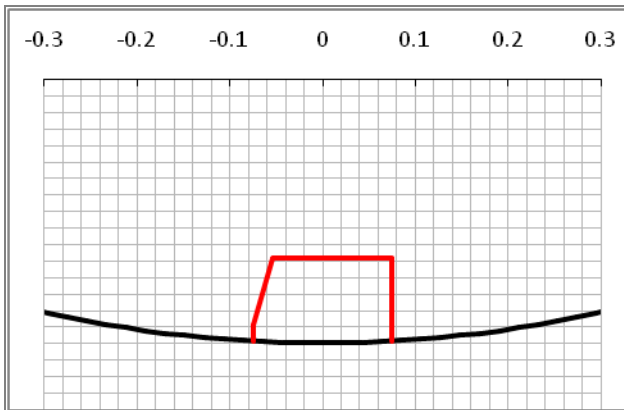
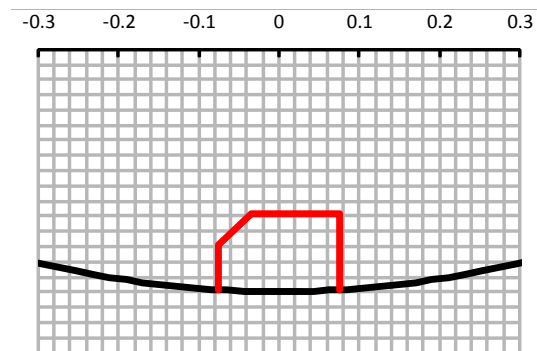
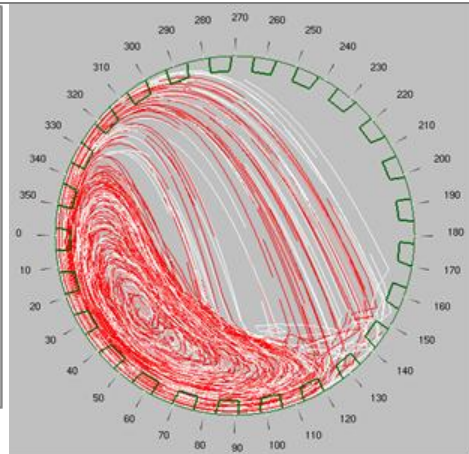


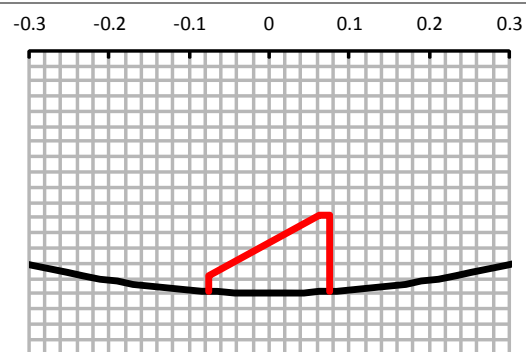
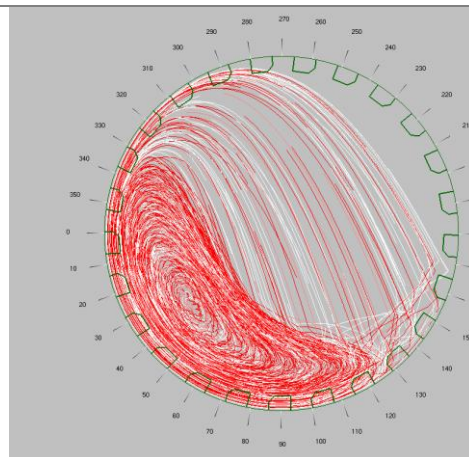
FIGURA 5-17 Quadro final das simulações que investigaram o efeito da geometria do revestimento.



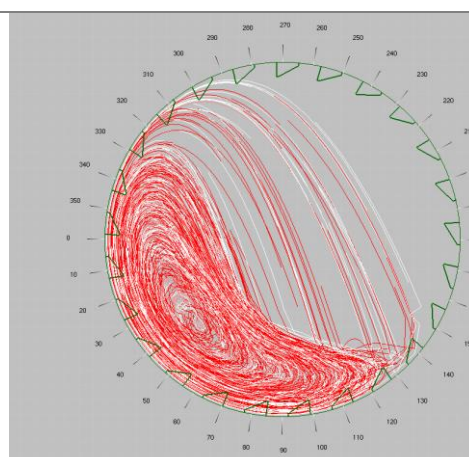
IDB01

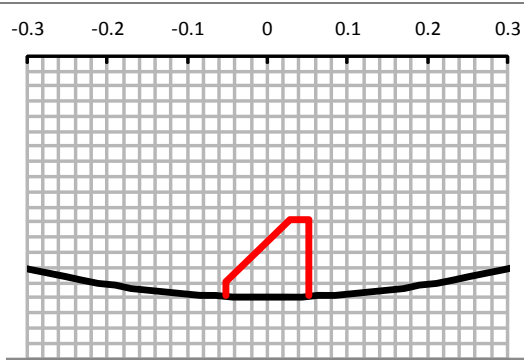


IDB02

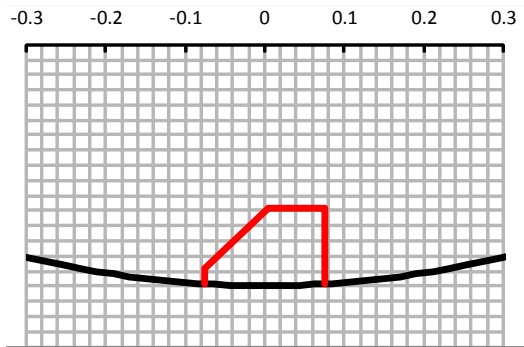
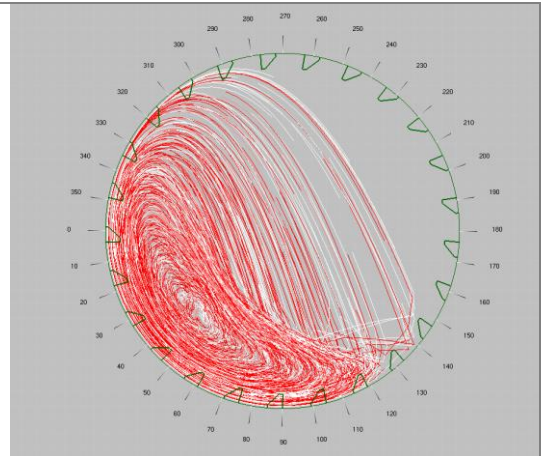


IDB03

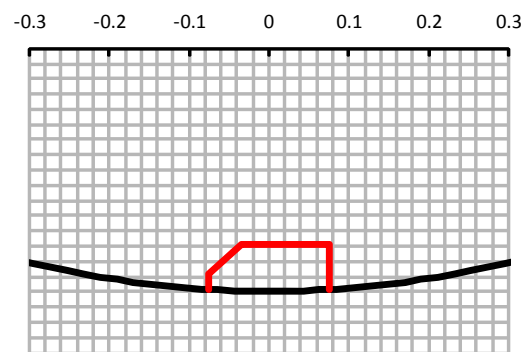
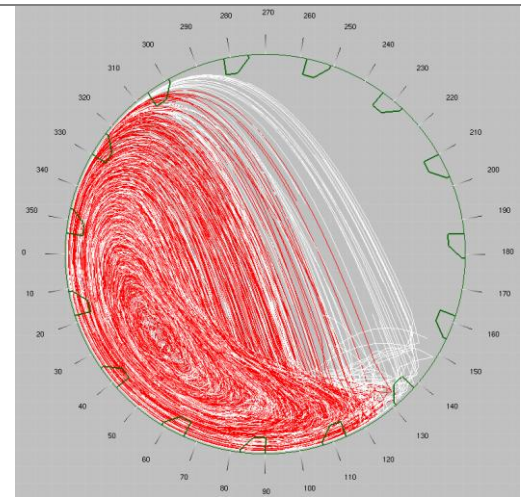




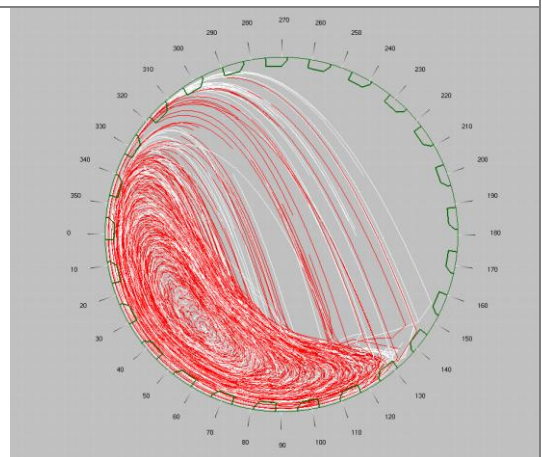
IDB04



IDB05



IDB06



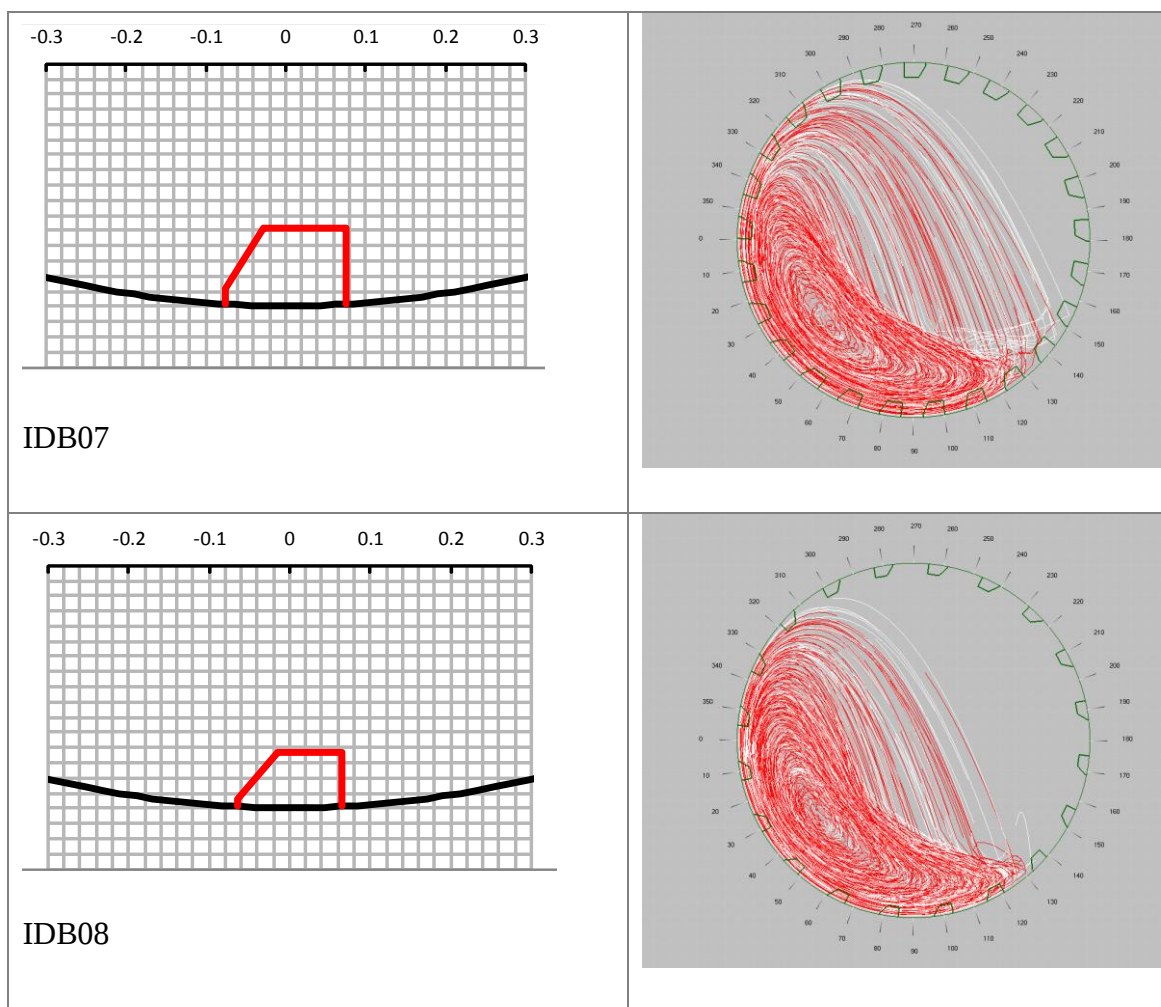


FIGURA 5-18 Detalhes da geometria das barras elevadoras utilizadas nas simulações e respectivas trajetórias da carga de bolas.

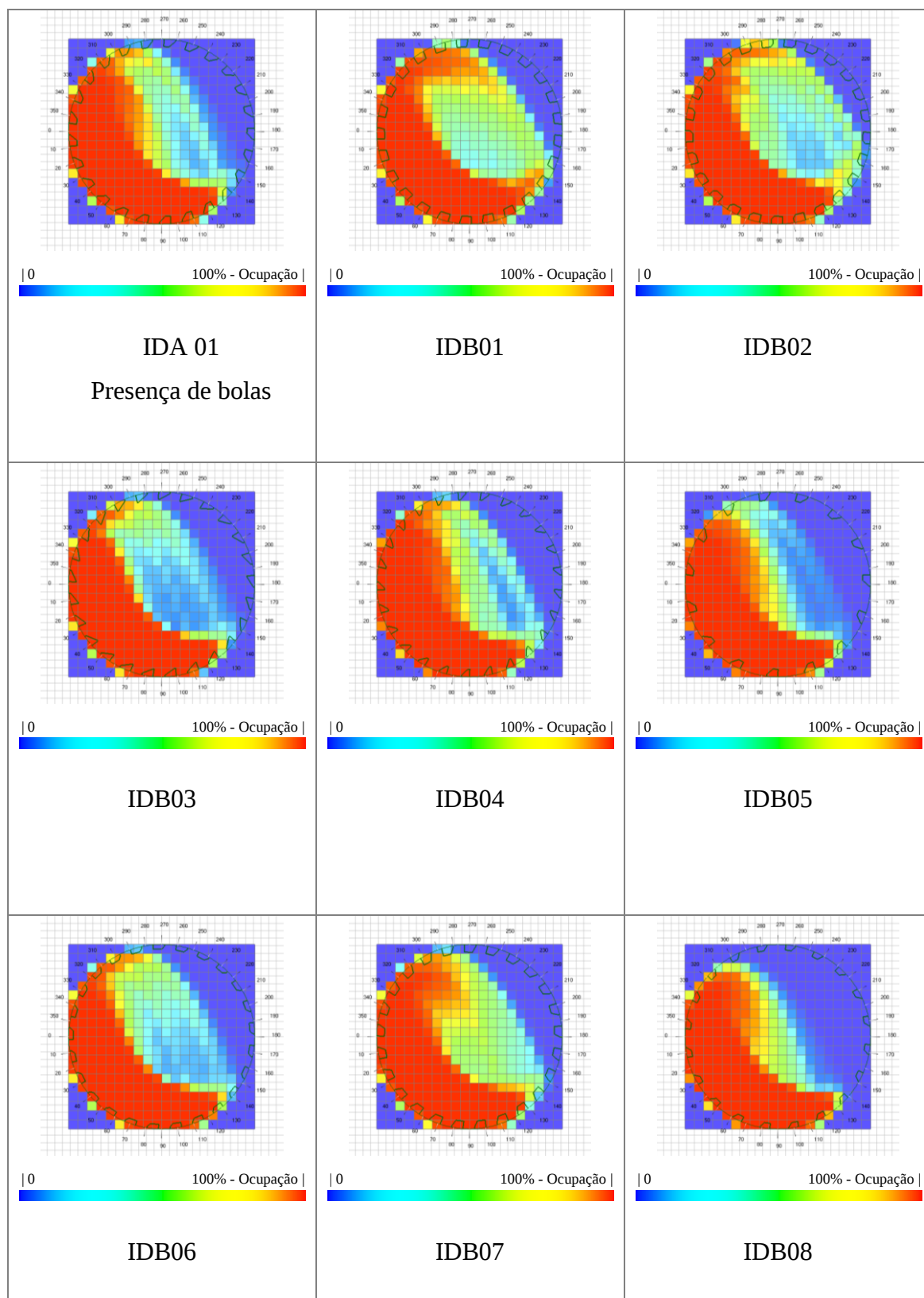


FIGURA 5-19 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

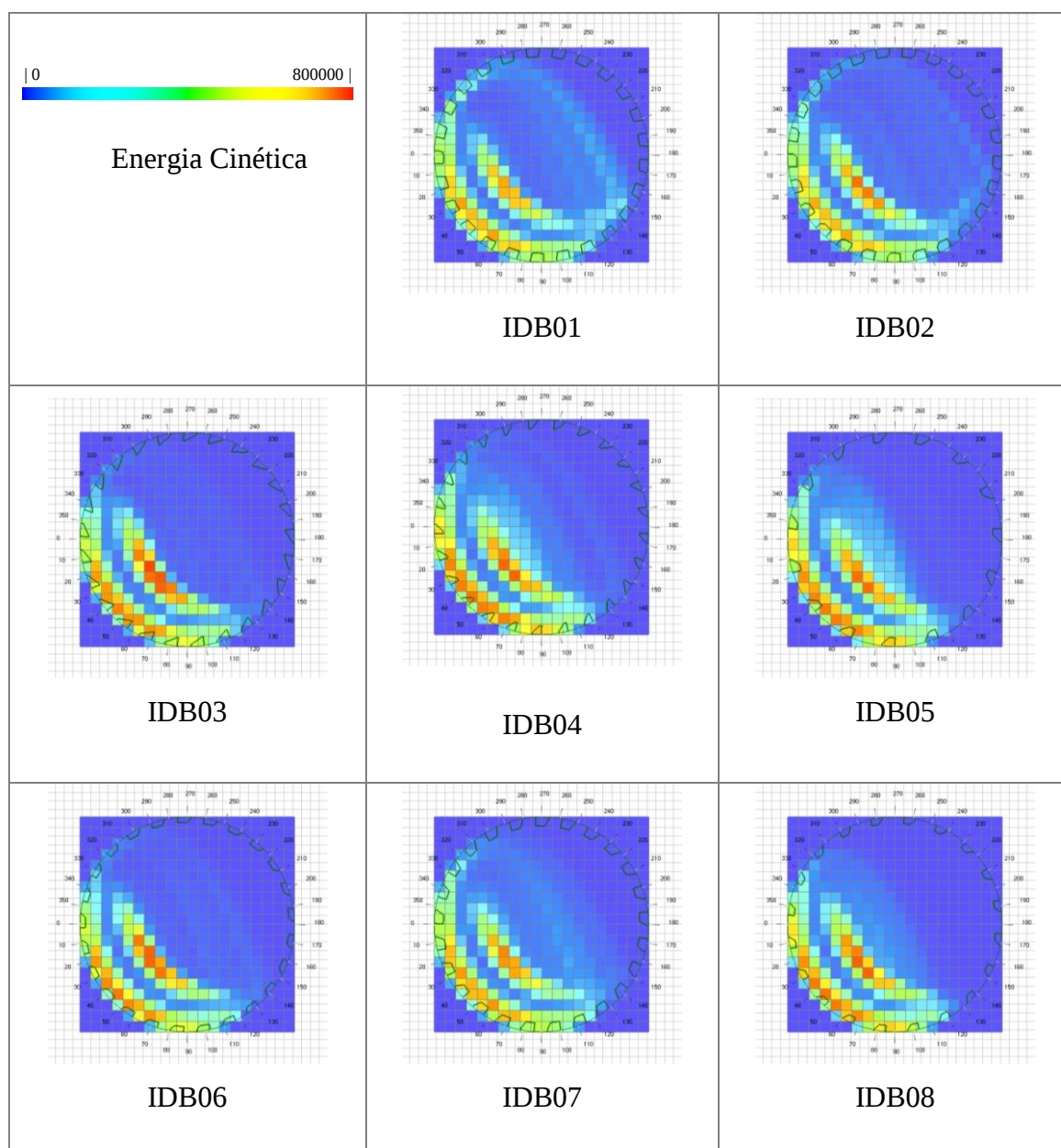


FIGURA 5-20 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

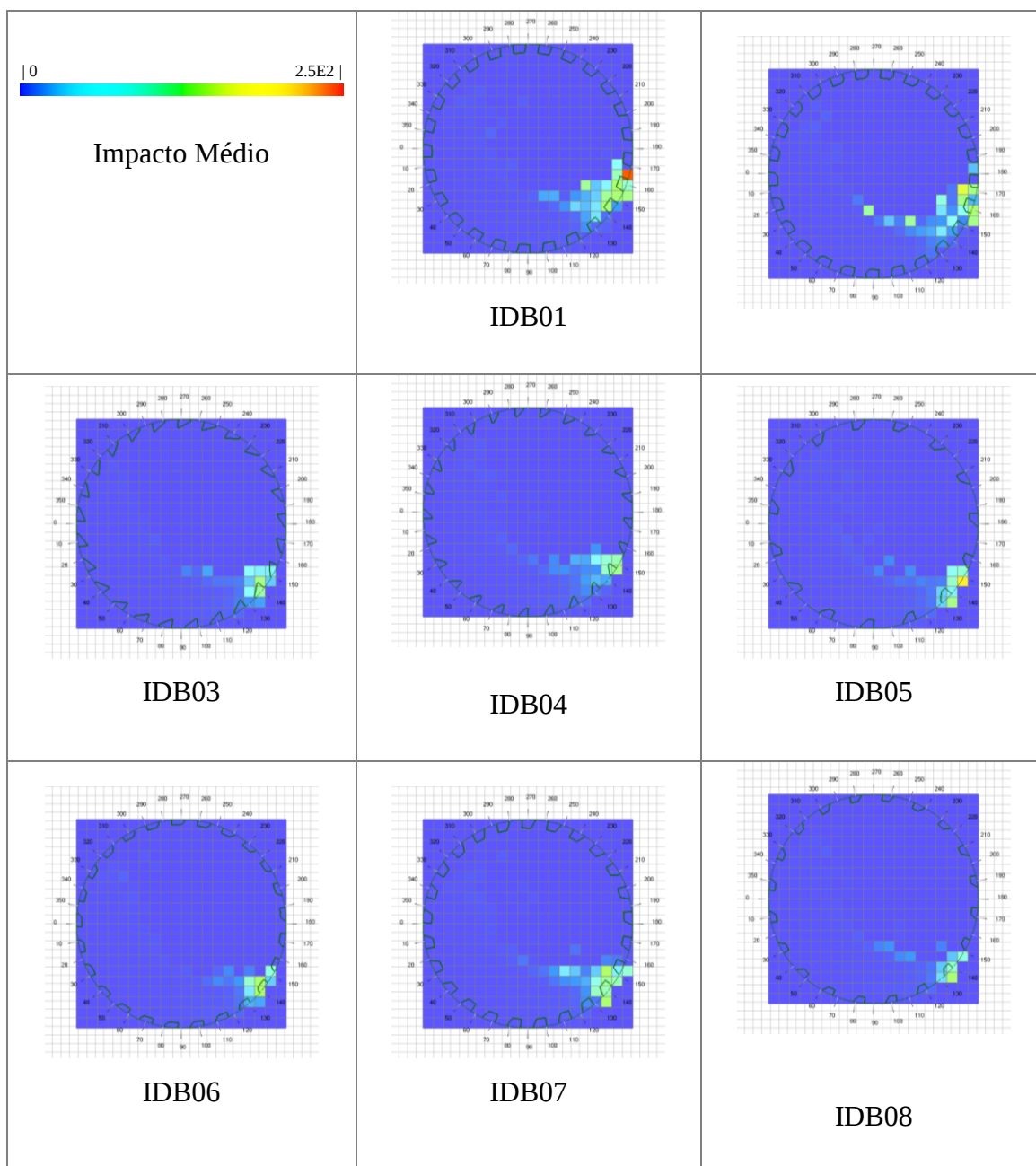


FIGURA 5-21 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

A FIGURA 5-21 apresenta graficamente a distribuição da magnitude média de impactos obtidos para as diversas configurações de geometria testadas. Percebe-se notadamente o efeito da altura e ângulo de ataque da barra na geração de impactos de alta energia próximos a região do *toe*, particularmente na simulação IDB01, de maior altura e ângulo

de ataque, onde são registrados os máximos de energia de impacto nessa região. Já a simulação IDB06, de perfil de menor altura, apresenta menores áreas comprometidas por impactos de alta energia. A geometria da barra influencia também o padrão de energia cinética obtida pelas bolas em sua trajetória, como mostra a FIGURA 5-20, onde os tons de vermelho identificam as regiões de maior energia cinética. Comparando, por exemplo, as simulações IDB03 (ângulo de ataque 30°) com a configuração IDB01 (ângulo de ataque 75°), é de se notar que a região onde as bolas sofrem o movimento de cascata, mais próxima a superfície do leito, apresenta maiores energias com perfis de menor ângulo de ataque. Da mesma forma, a região onde as bolas lançadas ao ar na configuração IDB01 apresenta um aumento na energia cinética.

Quanto a distribuição de magnitudes de impacto, (FIGURA 5-22) ocorre novamente semelhança nas curvas obtidas, com pequenas divergências nas simulações IDB03,06 e 08 principalmente na região de baixas magnitudes de impacto. Já ao número de impactos, (FIGURA 5-23) observa-se uma constância nos valores de todas as simulações realizadas, com uma pequena redução nas configurações IDB03,06 e 08.

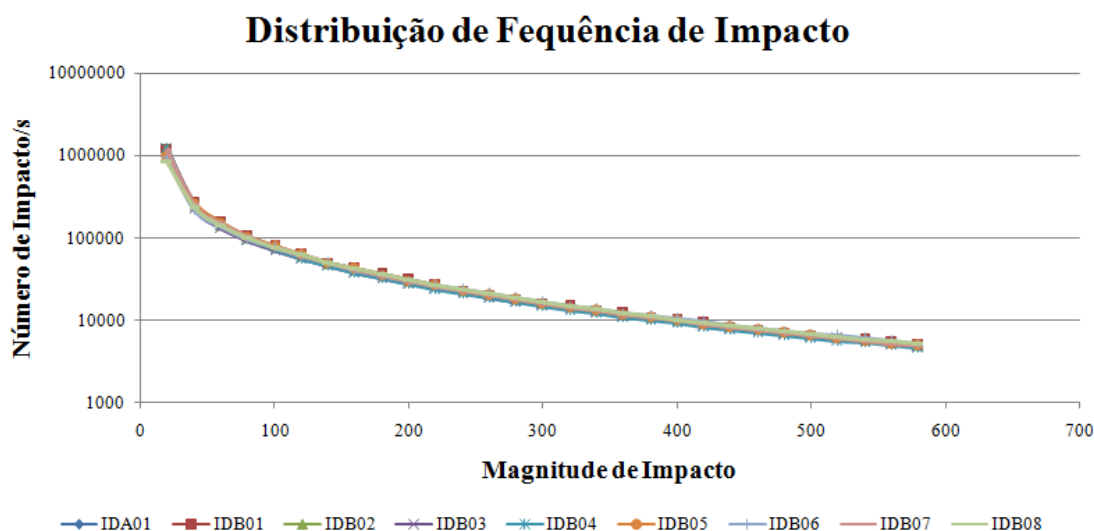


FIGURA 5-22 Distribuição de frequência de impactos para as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

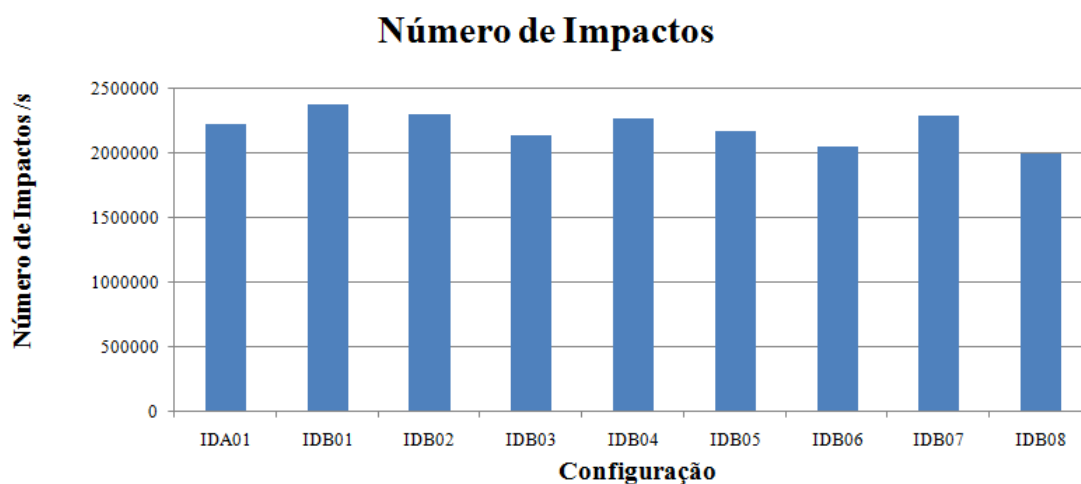


FIGURA 5-23 Número de impactos para as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

Em relação ao o consumo energético (FIGURA 5-24), embora varie 33.57kW, entre 264.63kW e 298.20kW, apenas com a variação do revestimento, os resultados obtidos levam a crer que a geometria do revestimento seja um aspecto mais importante pela adequação do movimento da carga e conseqüente preservação do revestimento e aumento da disponibilidade do equipamento.

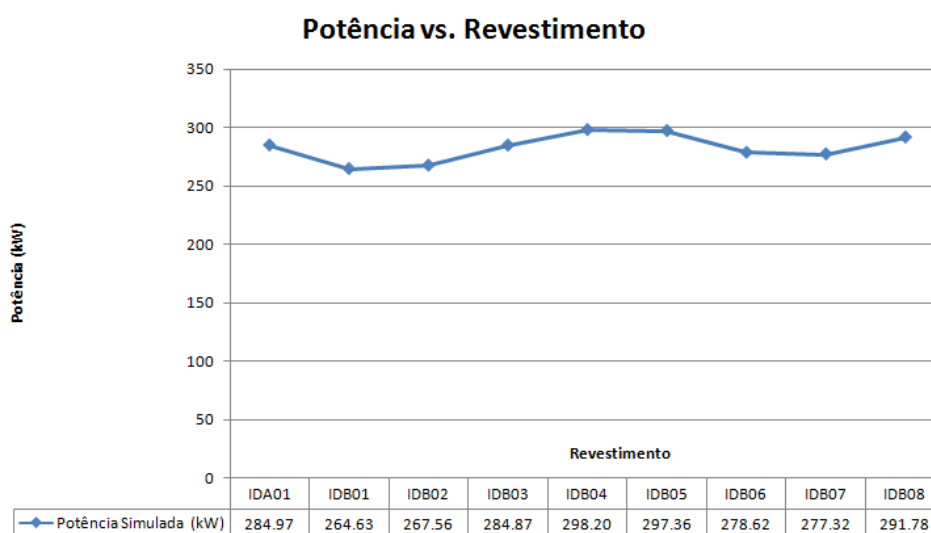


FIGURA 5-24 Relação entre a potência consumida e as simulações que avaliam o efeito da geometria do revestimento na dinâmica da carga de bolas.

5.4. Efeito do Tamanho de Bolas

As simulações desenvolvidas para estudar o efeito do carregamento de bolas adotaram composições de diferentes diâmetros de bola e também cargas de monotamanho. Industrialmente a distribuição de bolas é determinada pelo desgaste diferencial dos diferentes diâmetros carregados e, mesmo com a reposição de um só diâmetro de bola, a ocorrência de carregamentos monotamanho é pouco esperada. Operacionalmente, o controle do equilíbrio da distribuição da carga de bolas pode ser feito pela reposição de bolas de diferentes diâmetros e a amostragem da carga de bolas.

Nas simulações, os resultados obtidos mostram que a composição de cargas com diferentes diâmetros traz pronunciados reflexos no consumo energético, na dinâmica de impacto e na distribuição espacial da carga de bolas dentro do moinho.

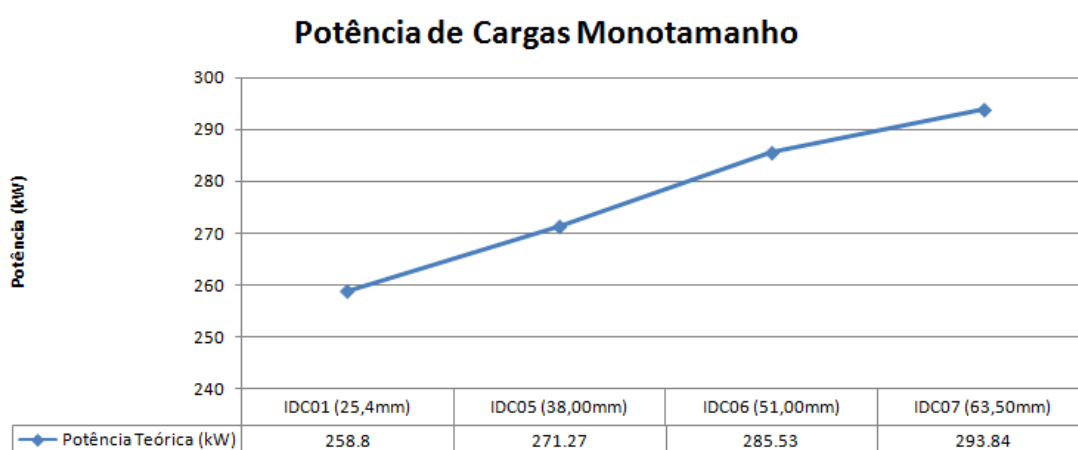


FIGURA 5-25 Relação entre cargas de monotamanho e potência consumida para as simulações que avaliam o efeito da do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.

Quanto à potência, as cargas de monotamanho apresentaram um consumo energético crescente com o aumento do diâmetro de bola, conforme mostra a FIGURA 5-25, variando cerca de 15% em relação à menor potência registrada.

A composição de bolas também resulta em um aumento da potência em relação ao carregamento monotamanho. Em um exemplo: cargas 25,4 e 38,00mm apresentaram,

respectivamente, um consumo de 258,8 e 271,27kW. Os mesmos diâmetros de bolas, quando compostos, apresentaram um consumo de 277,63kW, aumento de aproximadamente 7% em relação ao menor valor. A FIGURA 5-26 apresenta os resultados de potência obtidos para as simulações com cargas compostas por diferentes diâmetros de bolas.

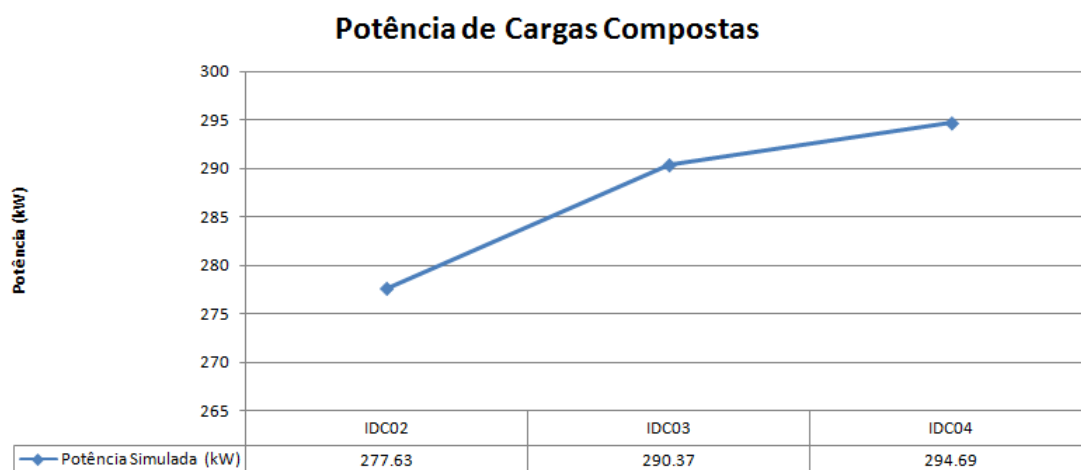


FIGURA 5-26 Relação entre cargas de compostas por diferentes diâmetros e potência consumida para as simulações desenvolvidas.

É de se por em evidência a variação na potência obtida apenas pela modificação da composição de bolas. Tomando-se como referência a simulação de controle, onde foi registrada uma potência média de 284.97kW, variações de até 9.1% desse valor são atingidas quando utilizado a carga de bolas da simulação IDC01. Por outro lado, cargas com configurações distintas apresentaram potências semelhantes, caso das simulações IDC03 e IDC07, o que chama a atenção para o cuidado com o excessivo controle da operação em função apenas de leituras de potência. A FIGURA 5-27 mostra a relação da potência com as diferentes cargas testadas.

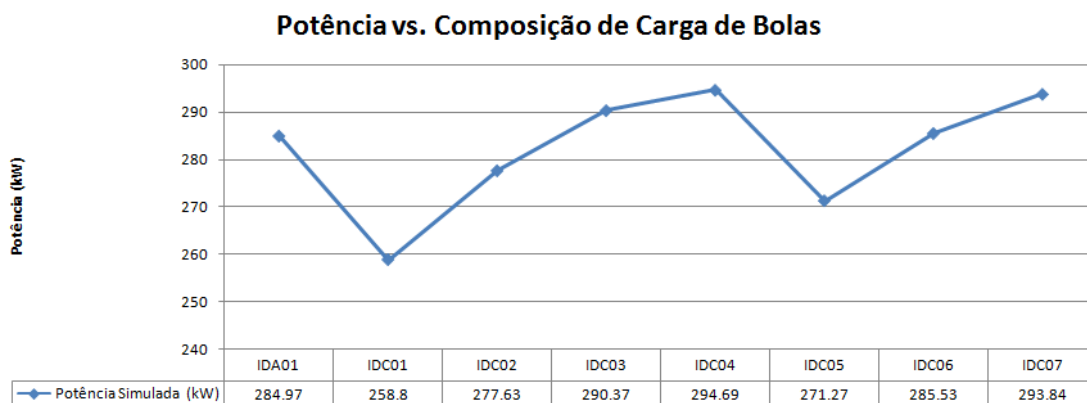
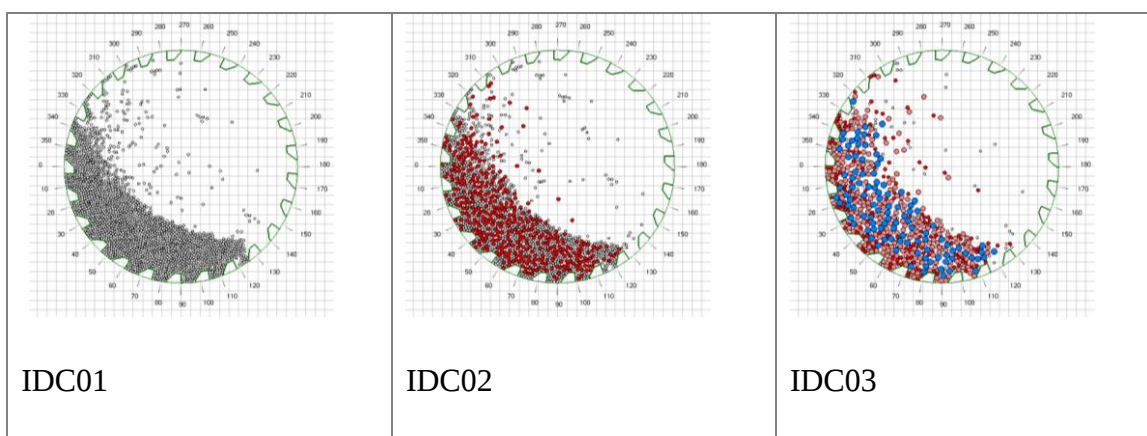


FIGURA 5-27 Relação entre cargas e potência consumida para as simulações desenvolvidas.

Outro aspecto, observado na FIGURA 5-28 e em detalhe na FIGURA 5-29, é o da elevação da carga de bolas compostas quando comparadas a carregamentos monotamanho. Por conta da acomodação das bolas de menor diâmetro, que passam pelos espaços vazios de bolas maiores, essas vão ocupar preferencialmente o contato entre o leito e a carcaça do moinho. Esse arranjo influi no lançamento das bolas de maior diâmetro, que são partem para o movimento de queda livre a menores alturas.



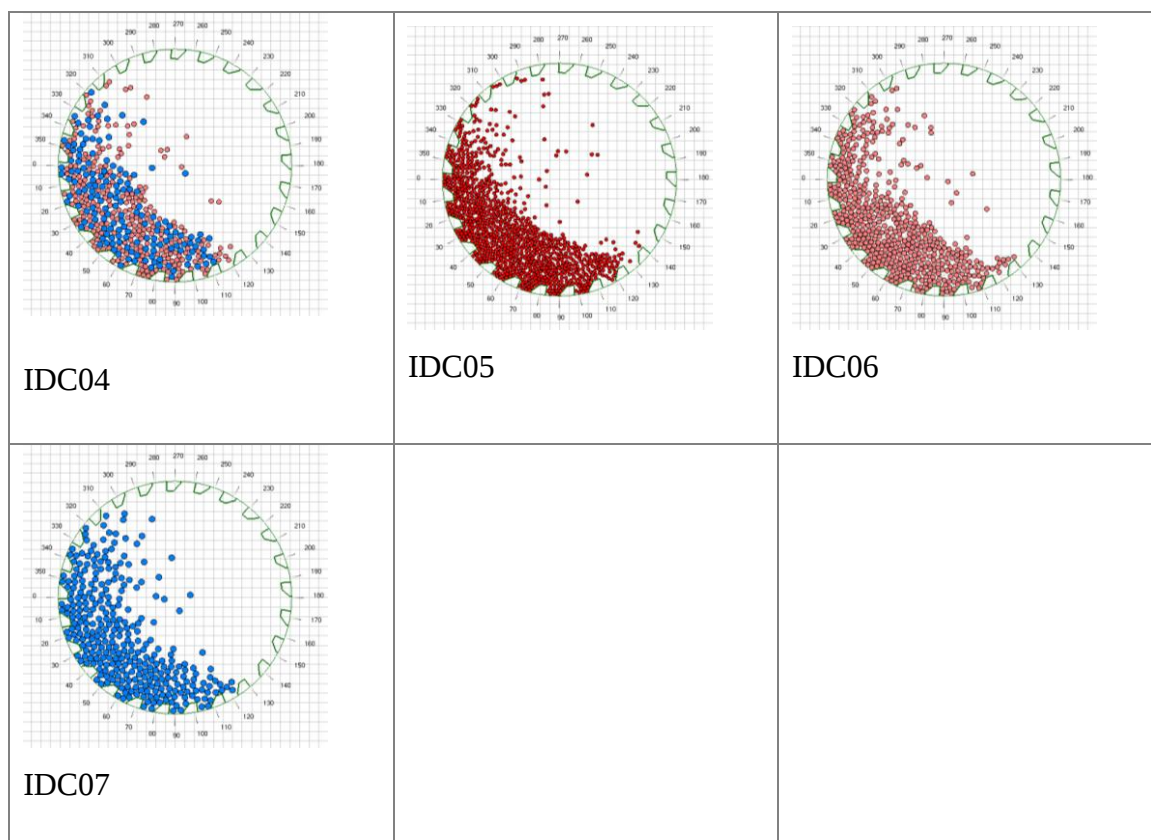


FIGURA 5-28 Quadro final das simulações mostrando a configuração da carga em diferentes distribuições de tamanho de bolas.

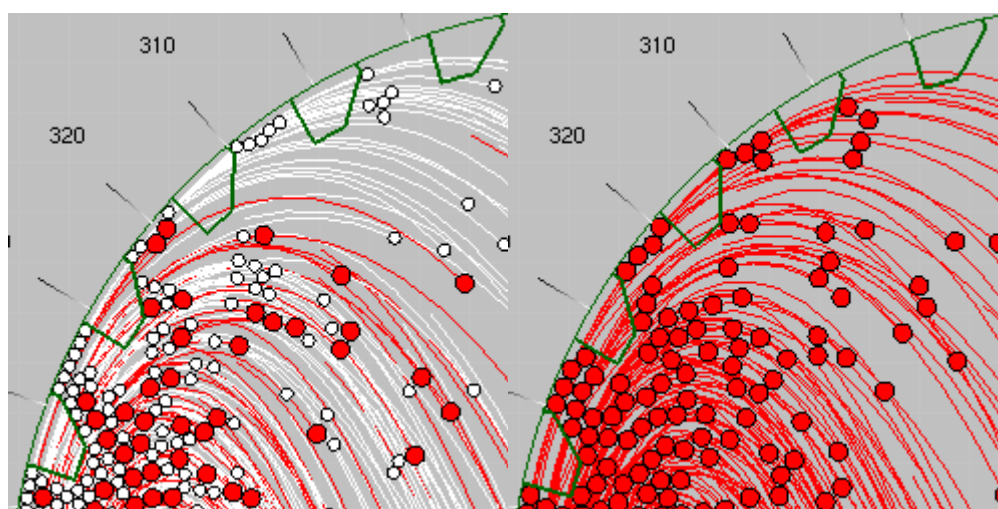


FIGURA 5-29 Detalhe do ponto de *sholder* das simulações IDC02 e IDC05.

Ainda quanto aos limites espaciais da carga de bolas, observa-se que o carregamento com menores diâmetros está mais sujeito a lançamentos diretos na carcaça que aqueles

com diâmetros maiores. Entretanto, observa-se na FIGURA 5-30 que o aumento do diâmetro de bolas, em carregamentos de monotamanho, faz com que a região de *toe* do carregamento seja deslocada ao sentido de rotação da carga. Esse efeito torna difícil a escolha de uma configuração ideal de distribuição de tamanho de bolas, uma vez que pretende-se que a trajetória atinja sempre o leito de bolas e não o equipamento. Ao adotar uma carga de bolas de menor tamanho tem-se uma maior proteção da região de *toe* pelo espalhamento mais uniforme da carga e, por outro lado, um maior lançamento pelo efeito de rotação do moinho.

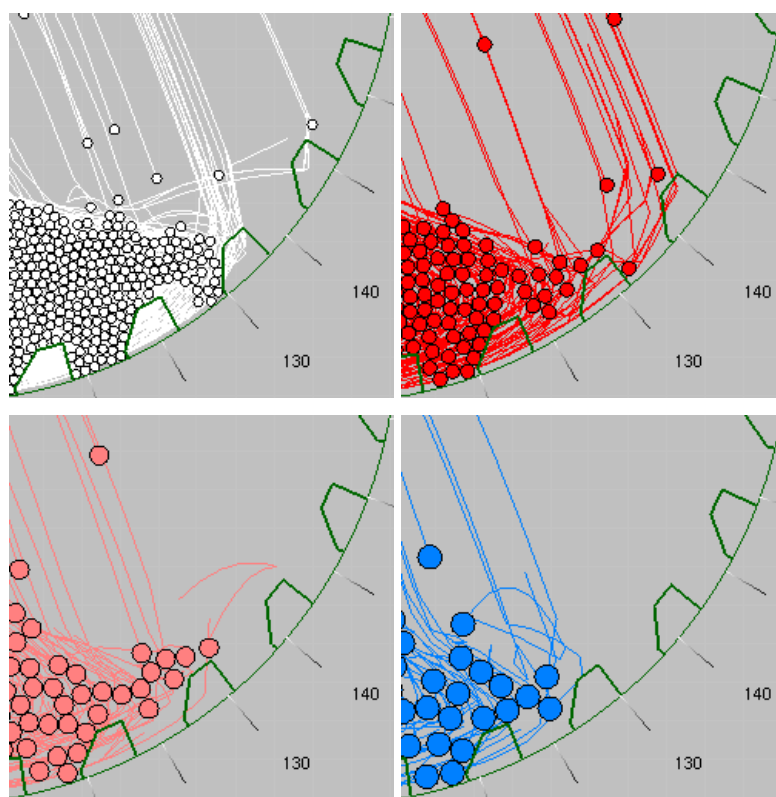


FIGURA 5-30 Detalhe da região de *toe* para cargas de monotamanho.

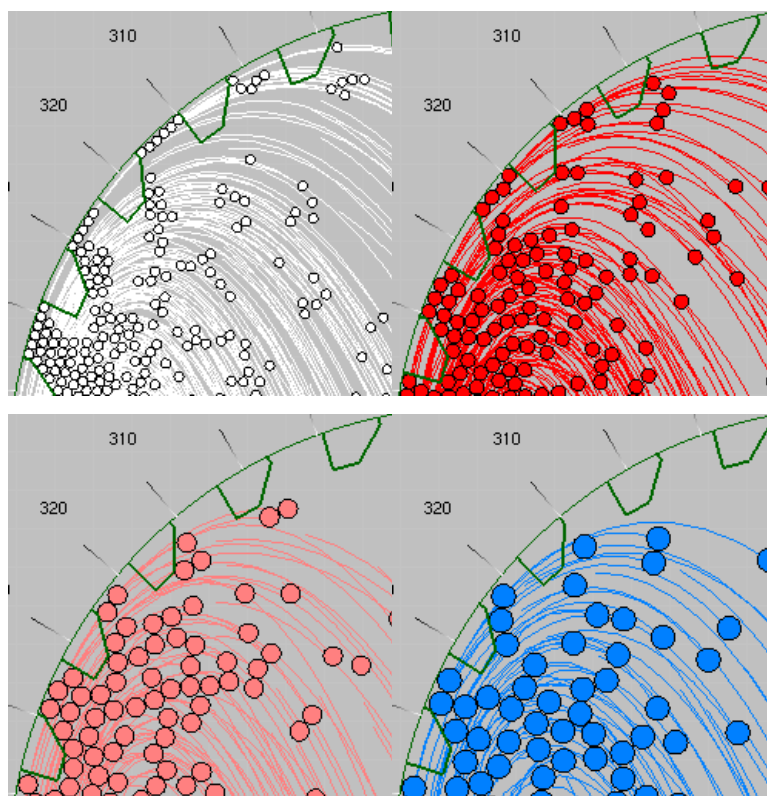


FIGURA 5-31 Detalhe da região de *sholder* para cargas de monotamanho.

A FIGURA 5-32 apresenta a presença de bolas obtida para as referidas simulações. Uma diferença notável tem-se em relação ao lançamento da carga no movimento de catarata. Observa-se que nos carregamentos onde bolas de menores diâmetros estão presentes, essas são levadas pela altura da face de ataque das barras e percorrem a trajetória equivalente as de um revestimento de face reta, sendo elevadas a pontos mais altos. Esse aspecto deve ser levado em conta tanto na definição da geometria do revestimento quanto na determinação do carregamento.

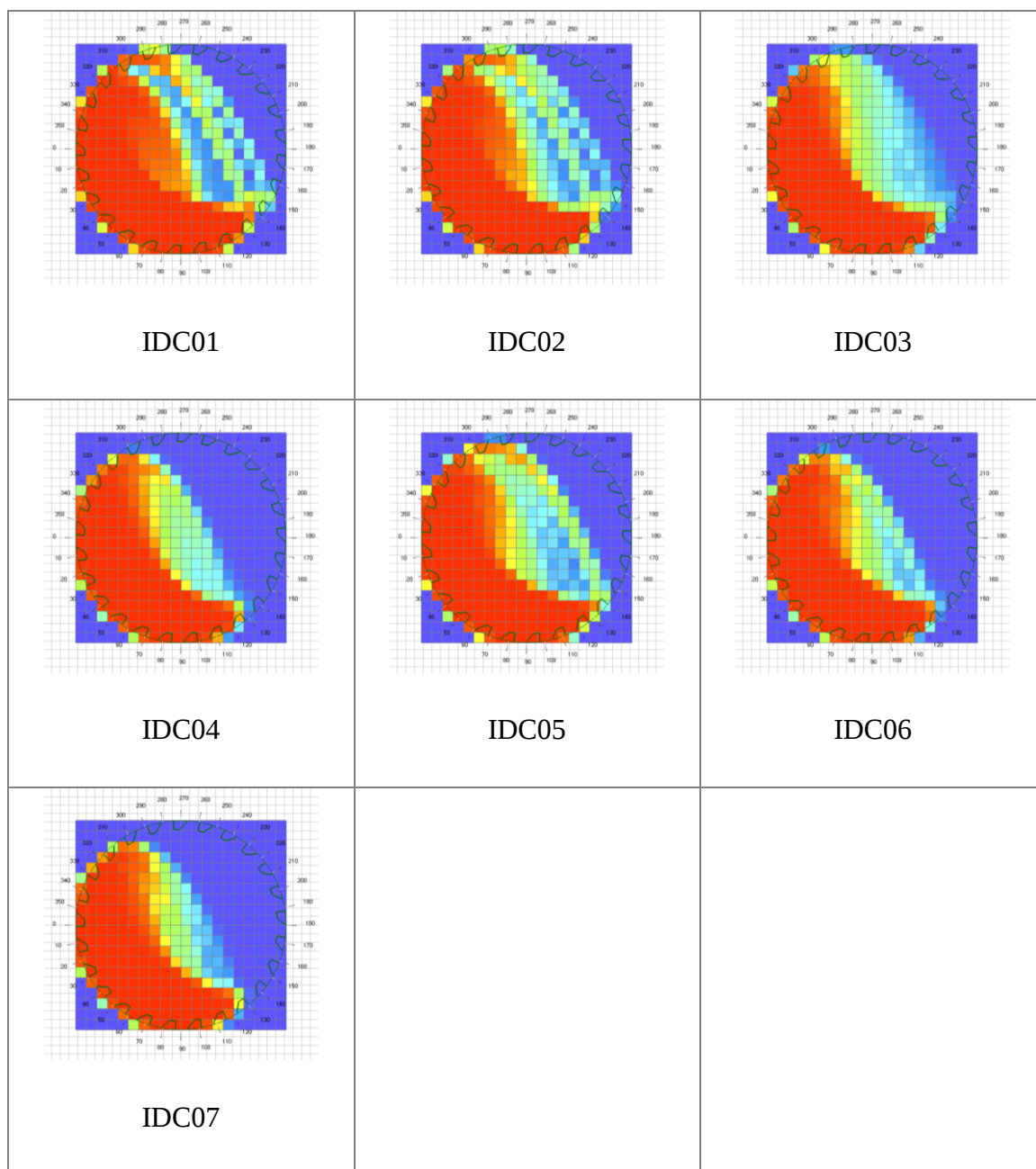


FIGURA 5-32 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.

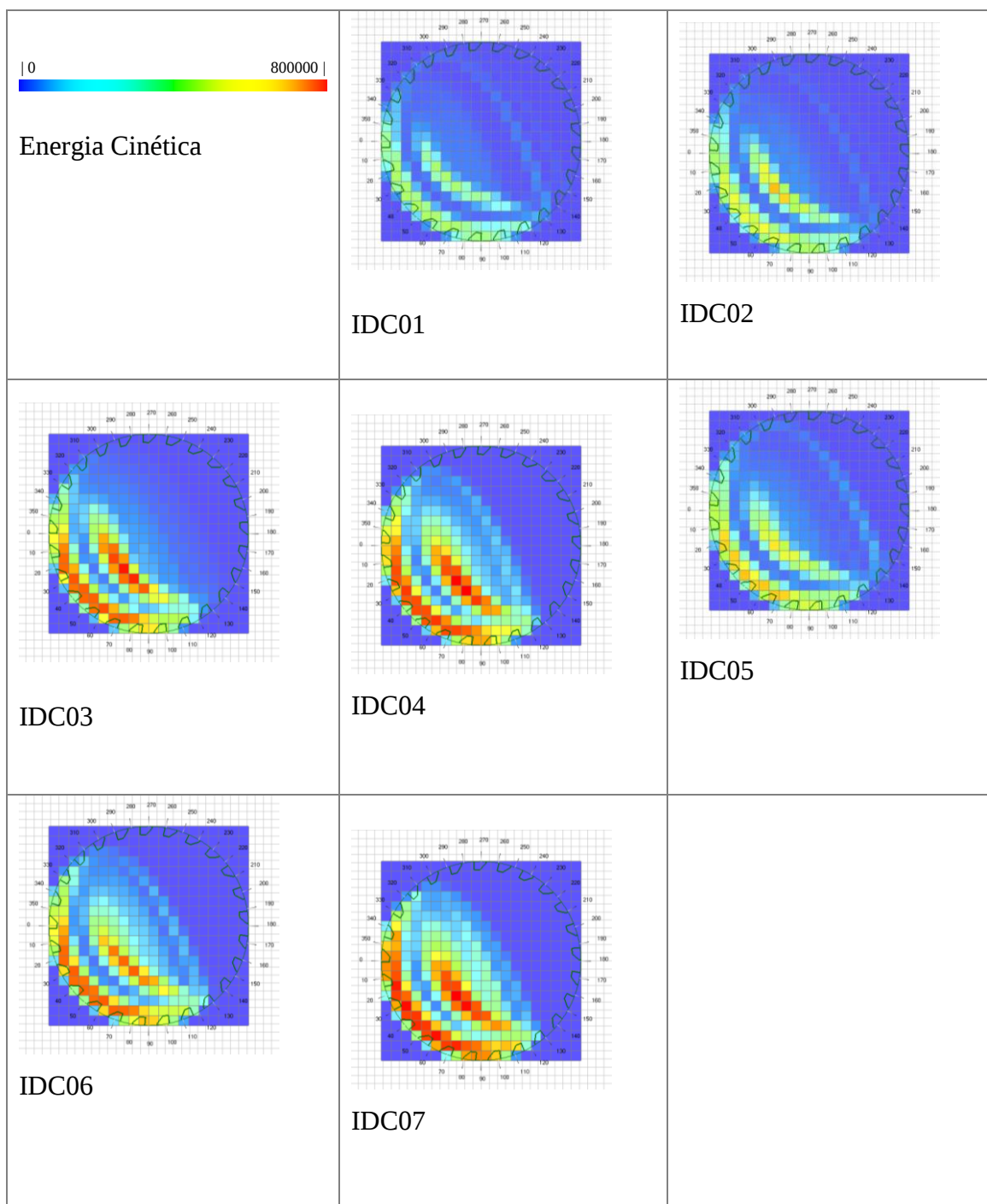


FIGURA 5-33 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.

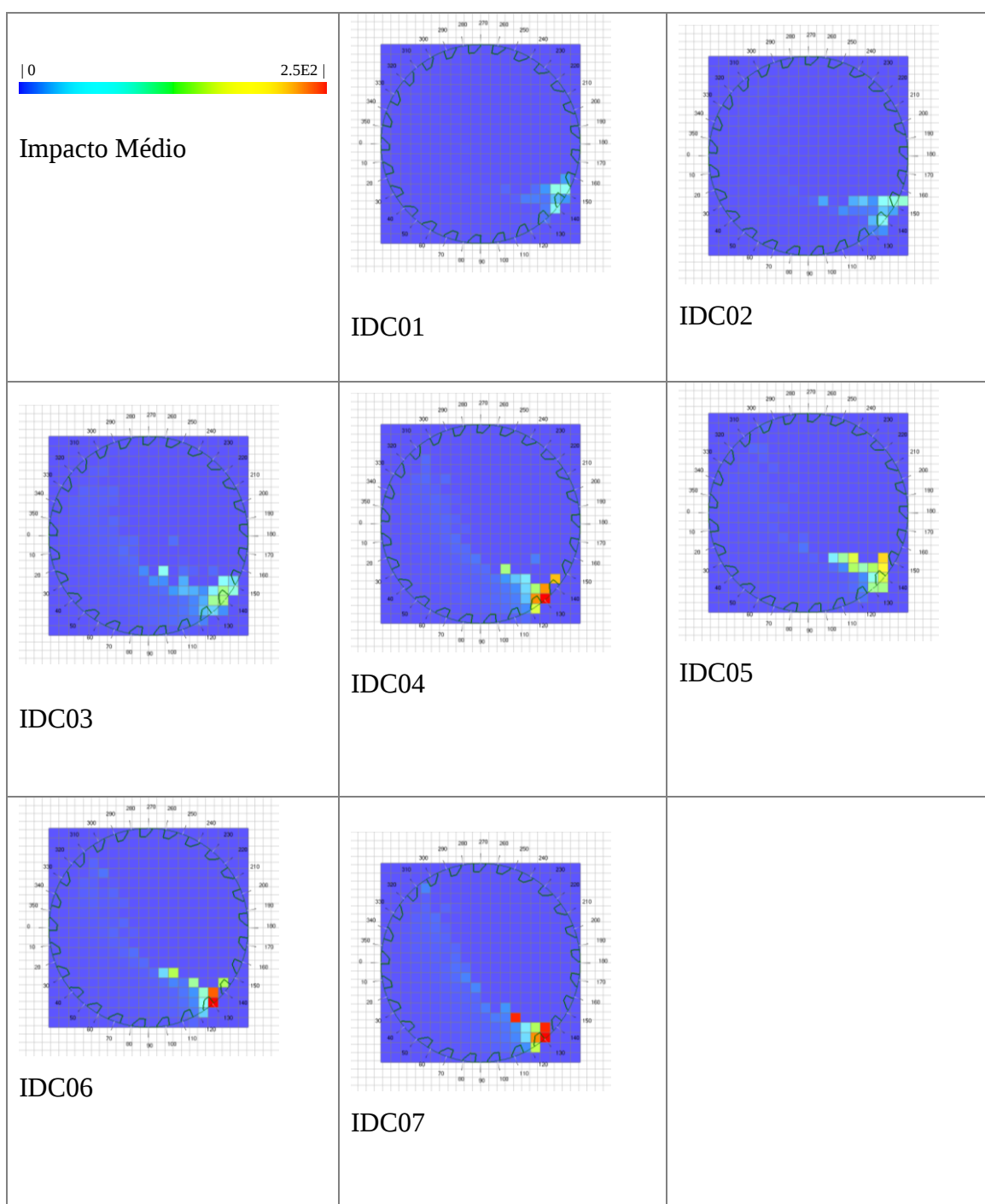


FIGURA 5-34 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da geometria do tamanho de bolas na dinâmica da carga moedora.

A distribuição de tamanho de bolas também é fator importante para a preservação do equipamento, a FIGURA 5-34 apresenta a visualização dos impactos médios registrados para as cargas testadas. Claramente as bolas de maiores diâmetros contribuem para o

aumento da energia de impacto na região do *toe*, o que pode representar uma menor vida útil do revestimento. Em razão da maior massa por corpo moedor, as bolas de maiores diâmetros também alteram a distribuição de energia cinética, apresentada na FIGURA 5-33, onde a energia da parte da carga em movimento de cascata se apresenta mais elevada em cargas de maiores diâmetros de bola.

Quanto à frequência e número de impacto, essas se permitem grande controle através da adequação da composição de bolas. Os espectros são apresentados na FIGURA 5-36 para as composições estudadas. Os números totais de impacto por segundo são mostrados na FIGURA 5-35.

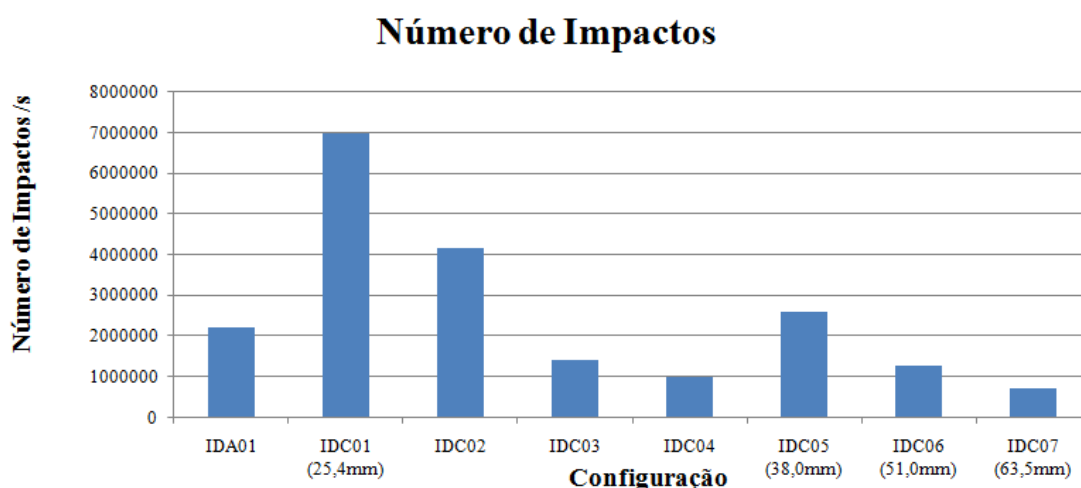


FIGURA 5-35 Número de impactos por composição de carga testada nas simulações.

Na FIGURA 5-36, a distribuição monotamanho de menor diâmetro (IDC 01 – 25,4mm) apresenta as maiores frequências de impacto na região de baixa magnitude e as menores frequências em maiores magnitudes de impacto, o que era de se esperar de uma carga de bolas usada tipicamente para produtos finos e remoagens onde menores energias de impacto são as aplicadas para a quebra do material.

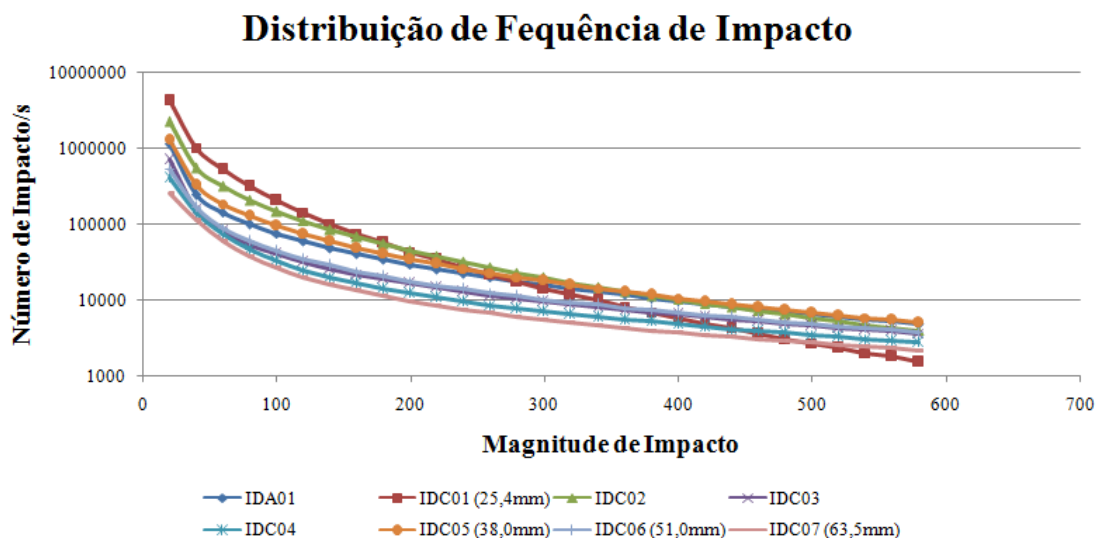


FIGURA 5-36 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.

Analisando somente cargas de monotamanho, FIGURA 5-37, o aumento do diâmetro da carga de 25,4 (IDC01) para 38mm (IDC05) provoca uma considerável redução da frequência de impactos de baixa magnitude e igualmente considerável aumento da frequência de maiores magnitudes. A partir de então, nos carregamentos de 51 e 63,50mm (IDC06 e IDC07, respectivamente) a tendência que se observa é de queda em todos os intervalos de magnitude de impacto, o que se deve principalmente a redução do número de bolas e os consequentes eventos de quebra, conforme mostra a FIGURA 5-38.

Distribuição de Frequência de Impacto

(Cargas Monotamanho)

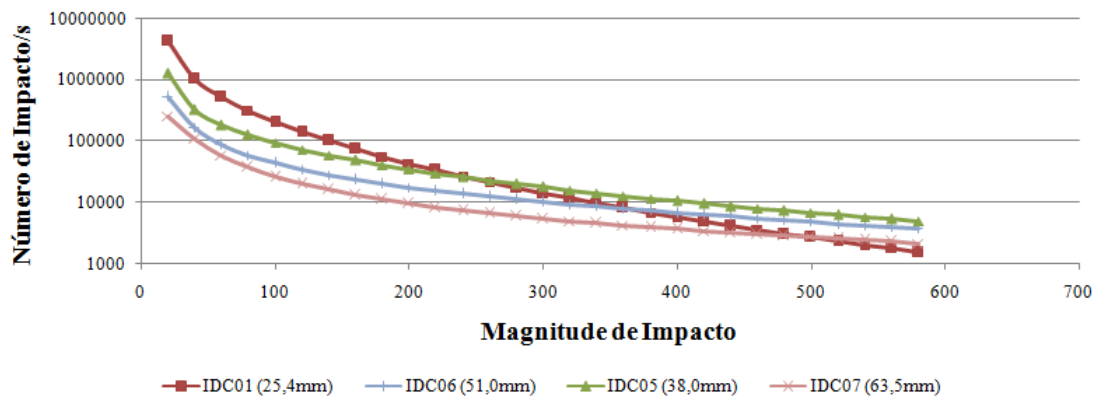


FIGURA 5-37 Distribuição de frequência de impacto para cargas monotamanho testadas nas simulações.

Número de Impactos (Cargas de Monotamanho)

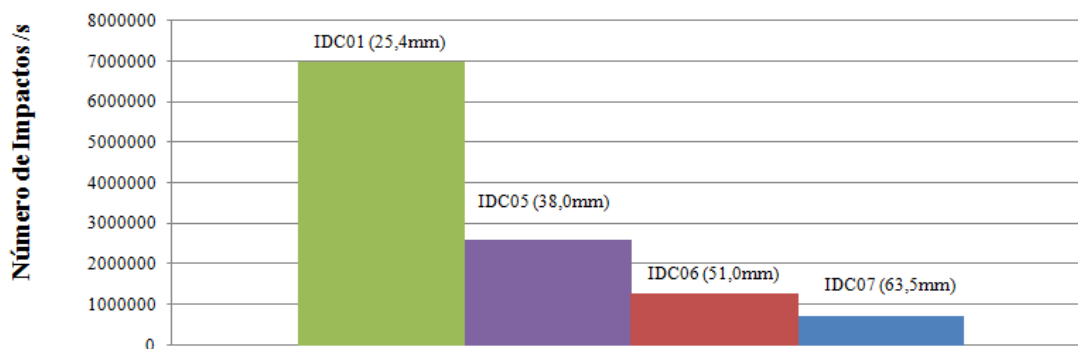


FIGURA 5-38 Número de impactos por segundo para cargas monotamanho testadas nas simulações.

Para cargas compostas, FIGURA 5-39 e FIGURA 5-40, aquela que apresentou os maiores números de impactos foi a formada por bolas de 25,4 e 38mm (IDC02), tanto em regiões de baixa quanto de alta energia), seguida pela composição de 25,4;38;51 e 63,5mm (IDC03) e por último, a carga de bolas com os maiores diâmetros, 51 e 63,50mm (IDC07).

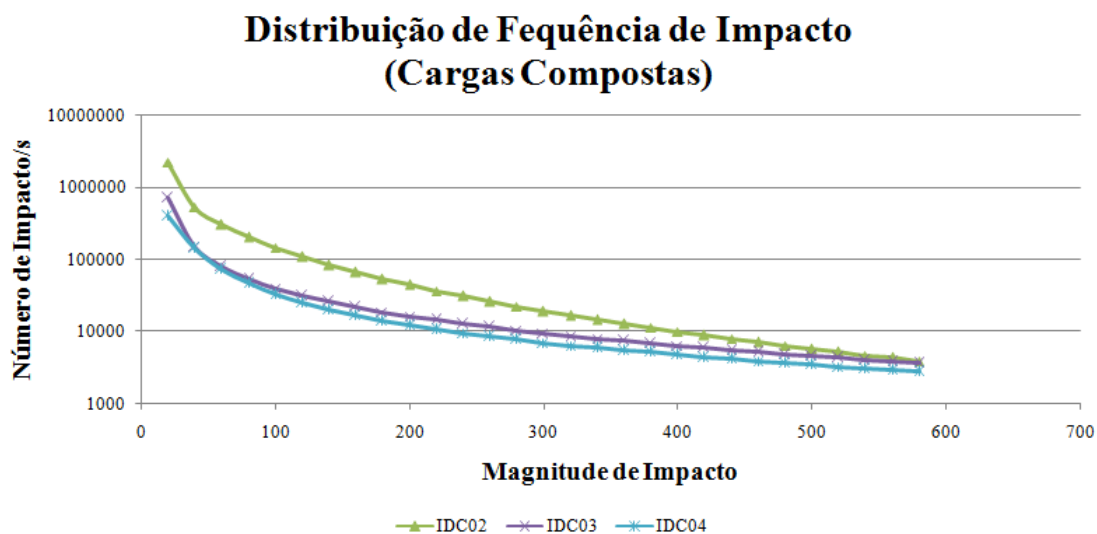


FIGURA 5-39 Distribuição de frequência de impacto para cargas compostas testadas nas simulações.

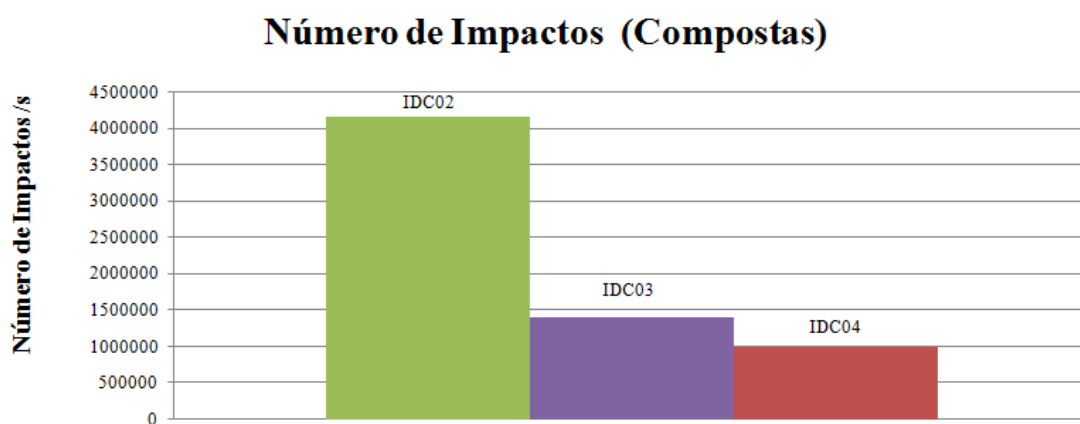


FIGURA 5-40 Número de impactos por segundo para cargas compostas testadas nas simulações.

O resultado evidencia a importância da composição dos diâmetros de bola, uma vez que energias de impacto de grande magnitude foram aumentadas sem alterações muito bruscas na quantidade de impactos global. Além disso, distribuições de frequência de impacto parecidas foram obtidas com cargas de diferentes tamanhos, o que é destacado na FIGURA 5-41, onde a distribuição de frequência de impacto do carregamento IDC03

(25,4;38;51 e 63,5mm) é comparada a da configuração de monotamanho IDC06 (51,0mm).

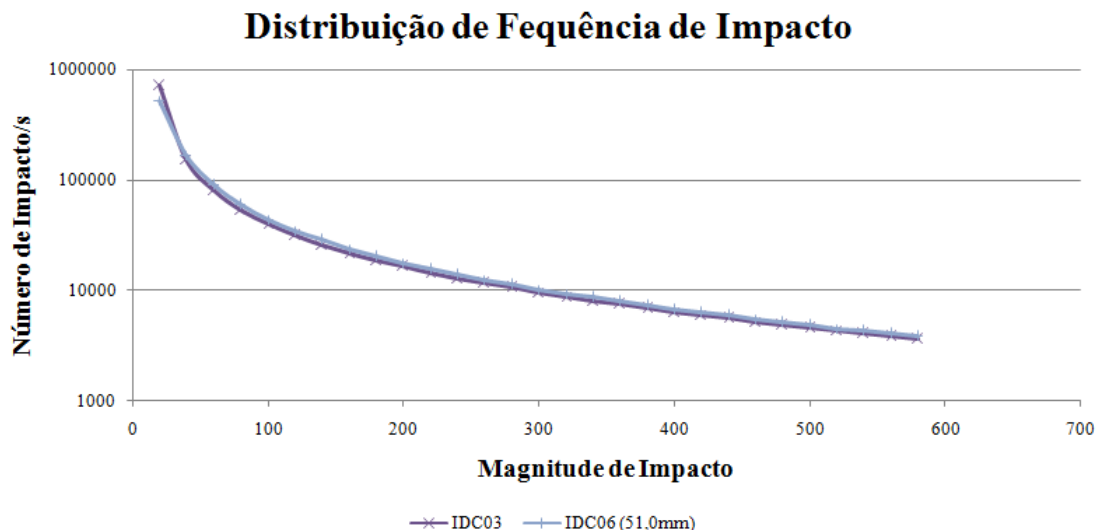


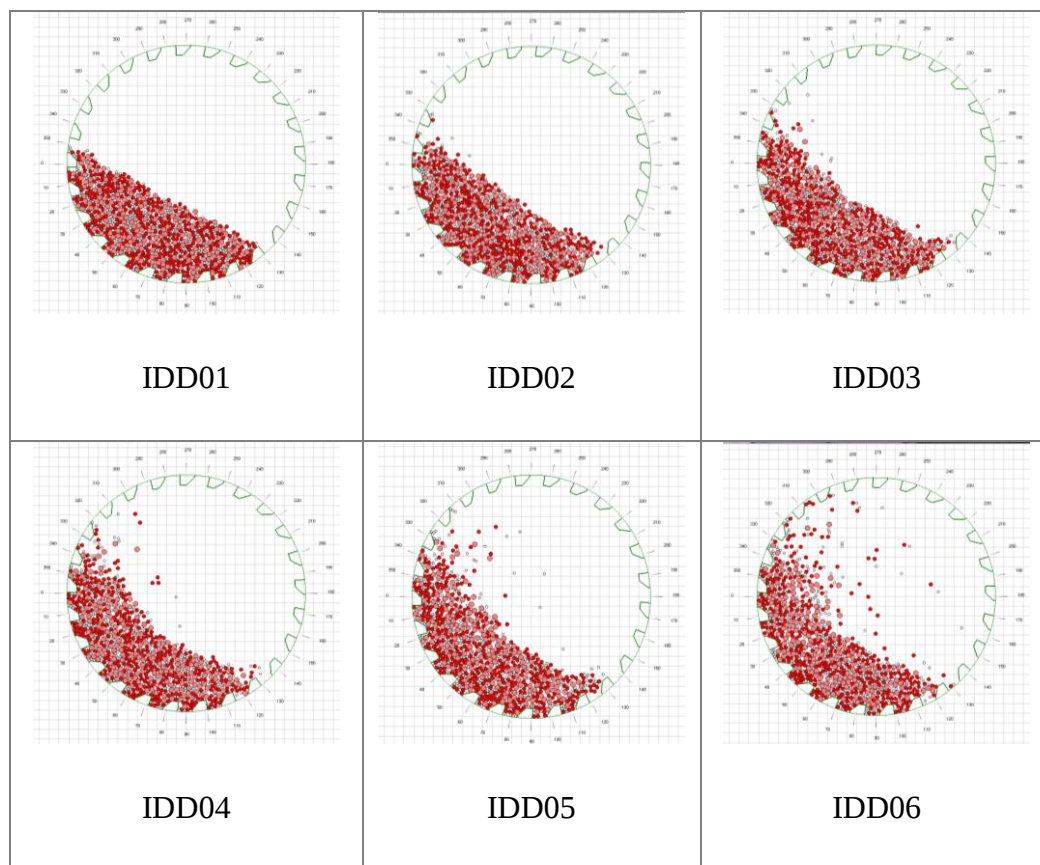
FIGURA 5-41 FIGURA: Cargas de diferentes composições forneceram o mesmo padrão de impacto.

5.5. Efeito da Rotação

A rotação do moinho é uma das variáveis operacionais de maior importância. Fatores econômicos e de qualidade como o consumo energético do equipamento e as características do produto estão intimamente ligados ao *set point* da rotação. Simulações foram desenvolvidas para a faixa de rotação de 20 a 100% da velocidade crítica. Os dados obtidos permitiram verificar a elevada influência da rotação na ocupação do leito de bolas, potência consumida e energia de impactos entre os elementos da carga.

A forma de ocupação do moinho pela carga de bolas é bastante influenciada pela velocidade de rotação. A FIGURA 5-42 apresenta quadros com instantes das simulações onde a rotação varia de 20 a 100% da velocidade crítica. Em baixas rotações (~20%Nc) as bolas são elevadas pela parede do moinho e ao atingir o ponto de *sholder* rolam pela superfície do leito até o ponto de *toe* da carga. Elevando-se a rotação para 40% é algumas bolas começam a se desprender do leito e apresentam um leve lançamento por conta da geometria do revestimento. O formato característico de feijão

da carga de bolas começa a aparecer em rotações acima de 50%Nc, onde o lançamento de bolas também já é bem pronunciado. Em rotações de 65 a 75% da velocidade crítica, para o revestimento utilizado e todas as demais configurações, as bolas são lançadas ao ar e retornam ao leito da carga ainda sem atingir diretamente o revestimento do equipamento. Para velocidades superiores observa-se o comprometimento do revestimento por esses lançamentos. Rotações acima de 75%Nc começam apresentar tendência de centrifugação da carga de bolas que são pegas entre as placas de revestimentos consecutivos. A ocupação dos espaços entre as barras do revestimento traz um efeito de redução do diâmetro efetivo do moinho, ou seja, grande parte das bolas é lançada ao ar em uma trajetória mais curta, menos alta, caindo no leito de bolas muito antes da região do *toe*, seguindo em um movimento de rolamento até serem introduzidas novamente em um movimento ascendente. Isso fica evidenciado na FIGURA 5-43 onde é mostrada a presença de bolas para as diversas rotações simuladas, principalmente para as simulações IDD08 a 10.



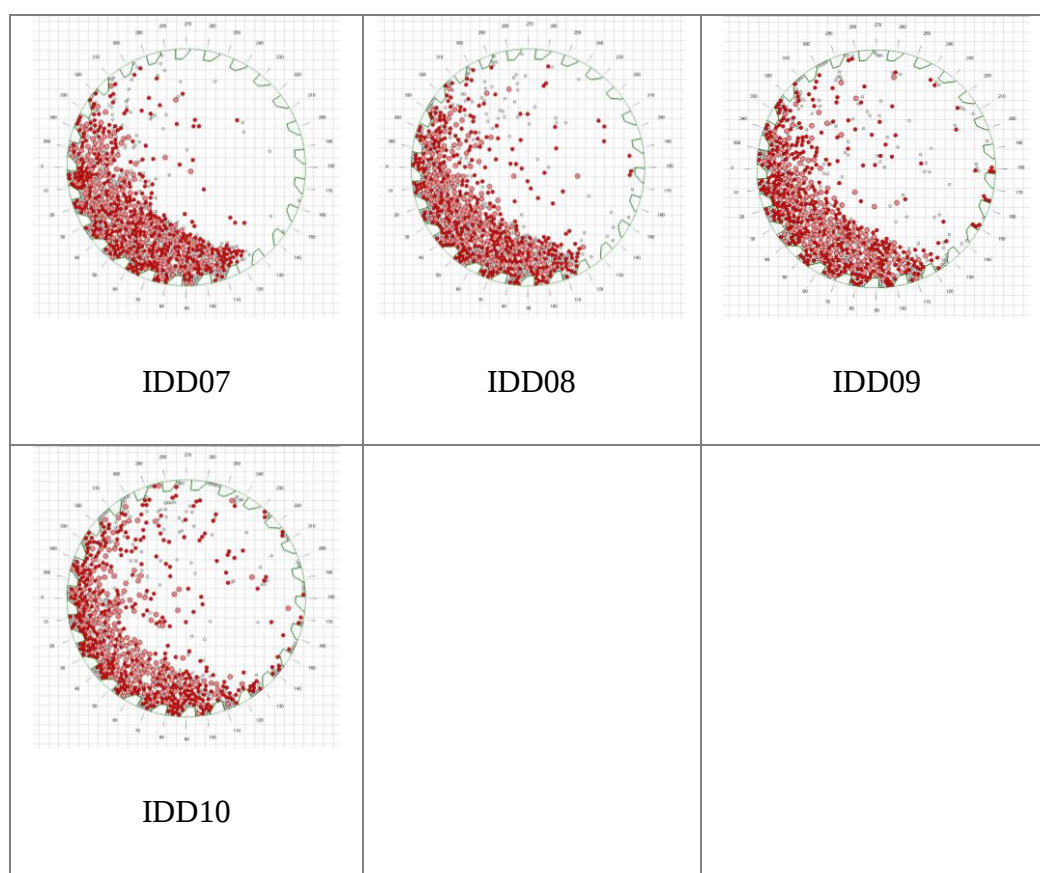
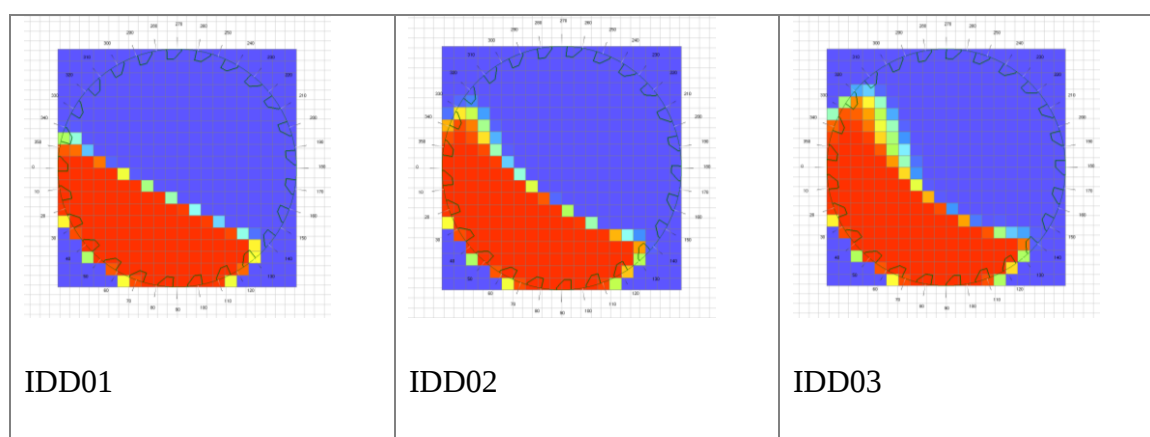


FIGURA 5-42 Arranjo espacial do carregamento para as simulações que avaliaram o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.



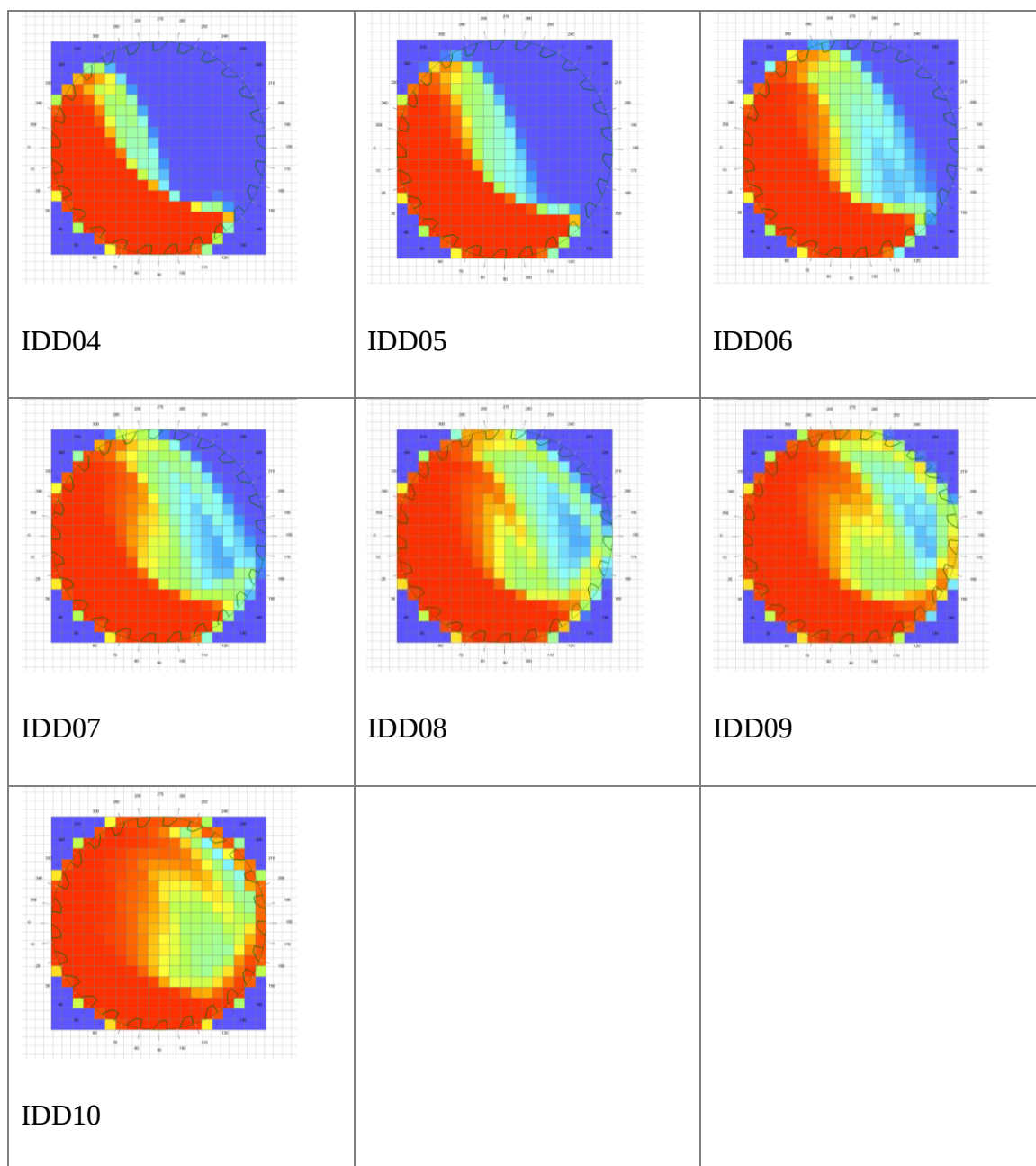


FIGURA 5-43 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.

Quanto à potência foram dispostos na FIGURA 5-44 os consumos registrados para as condições simuladas, juntamente da previsão teórica de Austin, dada pela EQ. 3-6. Observa-se uma aproximação dos valores até rotações próximas a 80% N_c , onde então a potência simulada começa a ser sistematicamente superior à prevista pelo modelo matemático. Tal característica é explicada pela consideração, nas simulações, de diferentes fatores como, por - exemplo, o perfil do revestimento. Teoricamente, devido

à centrifugação de parte da carga, a potência desenvolvida pelo moinho é reduzida com o aumento da fração centrifugada. Por conta da geometria do revestimento e do rolamento das bolas pela face angulada das barras, a fração centrifugada é reduzida, gerando um consumo energético maior que o considerado pelo modelo matemático.

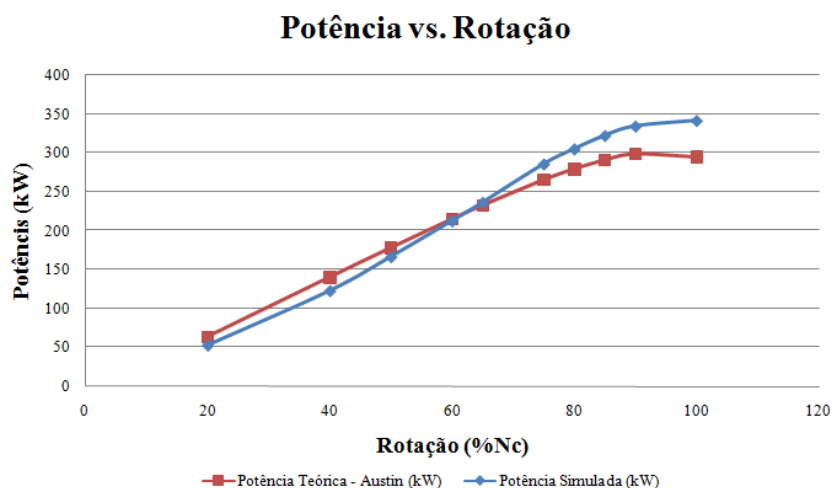


FIGURA 5-44 Potência simulada em função da rotação do moinho comparada com previsão teórica.

A importância da velocidade de rotação é verificada também quando se observa sua relação com a distribuição da energia de impacto entre os corpos moedores. A FIGURA 5-45 relaciona o número de impactos por segundo registrados nas simulações. A análise desses dados pode ser um tanto quanto elaborada. Em rotações muito baixas ($\sim 20\%N_c$) existe uma maior quantidade de impactos entre os elementos da carga. Isto se dá devido ao fato de cada bola do enchimento sempre estar em contato com uma ou mais na vizinhança. O simples contato de repouso entre os corpos responde com um impacto de pequena magnitude. Aumentando a rotação ocorre o início do lançamento da carga ao ar, desfazendo-se esses contatos de baixa energia e reduzindo-se assim o número total de impactos. Com a continuada subida da rotação ocorre a centrifugação da carga, retornando a situação onde uma fração maior de bolas apresenta-se durante todo o tempo em contato com ao menos uma bola vizinha.

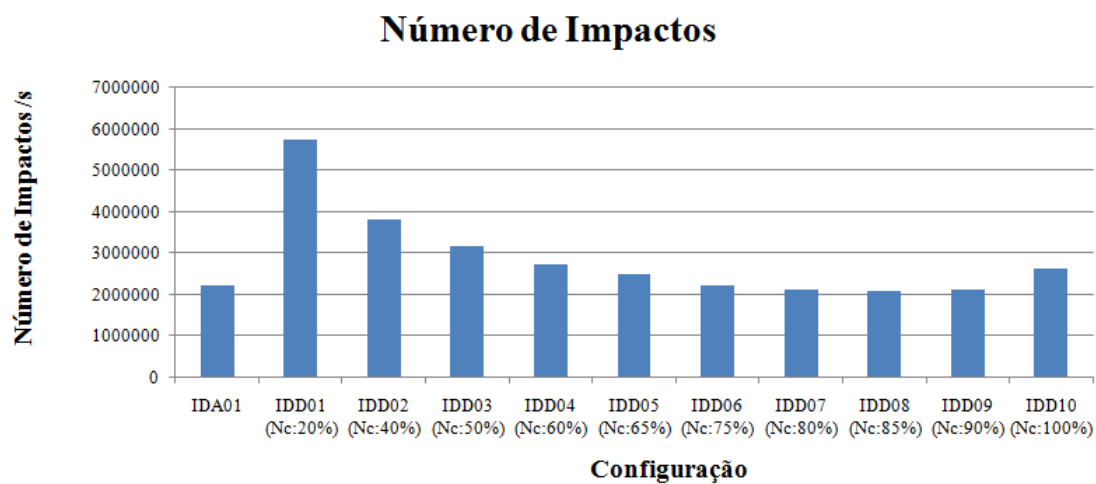


FIGURA 5-45 Número de impactos por segundo em função da rotação do moinho.

A distribuição da magnitude de impactos também é afetada fortemente pela rotação da carcaça. Na FIGURA 5-46 são apresentadas as distribuições para as diferentes condições testadas.

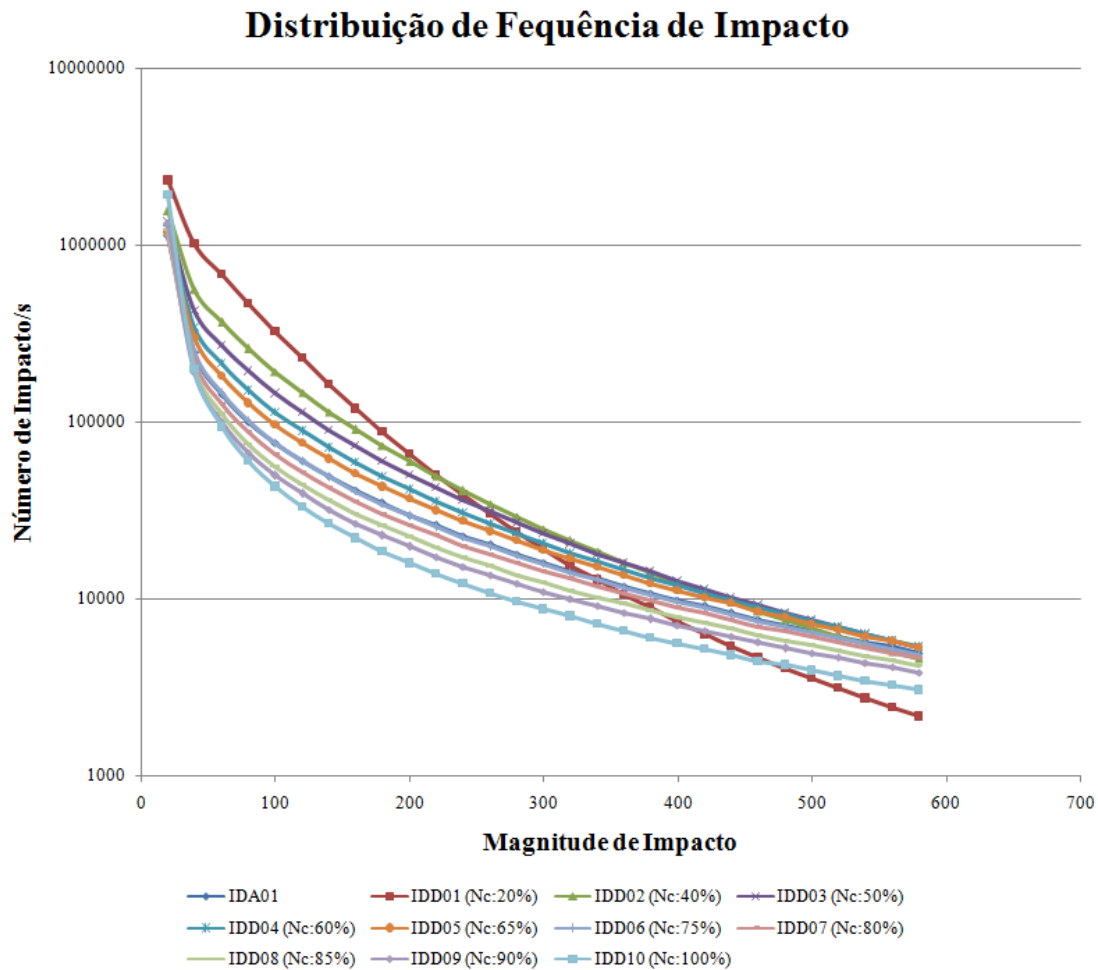


FIGURA 5-46 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.

A partir dos dados de frequência de impacto, níveis de magnitude estabelecidos arbitrariamente como baixa (0 a 20N) e alta (soma das maiores que 560N.s). Para essas faixas foram estabelecidas as relações de frequência de impacto e rotação, mostrada na FIGURA 5-47 e FIGURA 5-48. Observa-se que as baixas magnitudes de impacto ocorrem em maior frequência nas menores rotações, reduzindo a um ponto de mínimo em rotações próximas a 75%Nc. O efeito de centrifugação da carga faz com que as bolas permaneçam mais tempo em contato umas com as outras, o que é verificado pelo aumento da frequência de impacto de baixas magnitudes a partir da rotação de 75%Nc e principalmente entre 90 e 100%Nc. Quase que o oposto se verifica para altas magnitudes de impacto (540 a 560N.s). Inicialmente baixas, essa faixa de magnitude,

apresenta um máximo de frequência em torno de 70%Nc e, a partir daí, estabiliza-se até aproximadamente 75%Nc, quando volta a cair com o aumento da rotação.

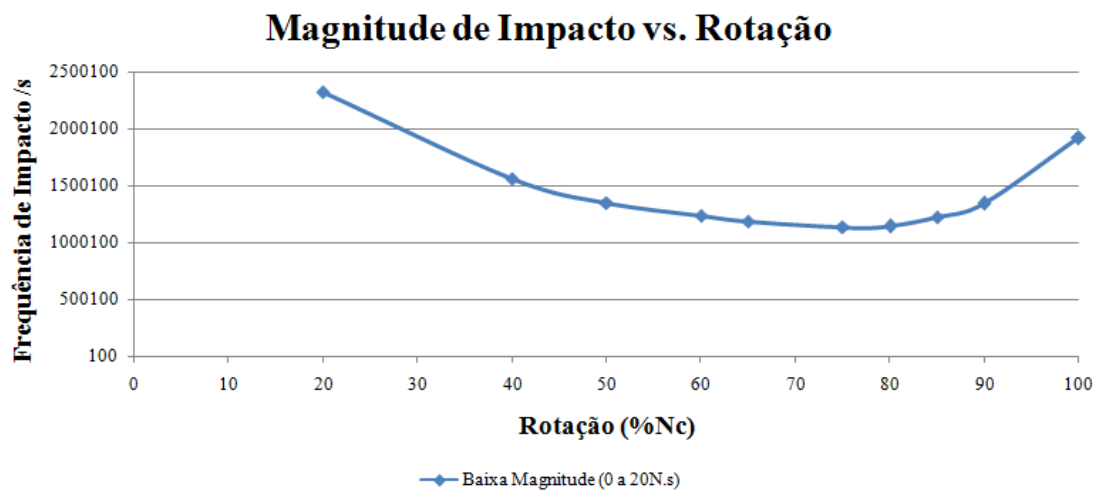


FIGURA 5-47 Relação de baixas magnitudes de impacto (0 a 20N.s) com a rotação do moinho.

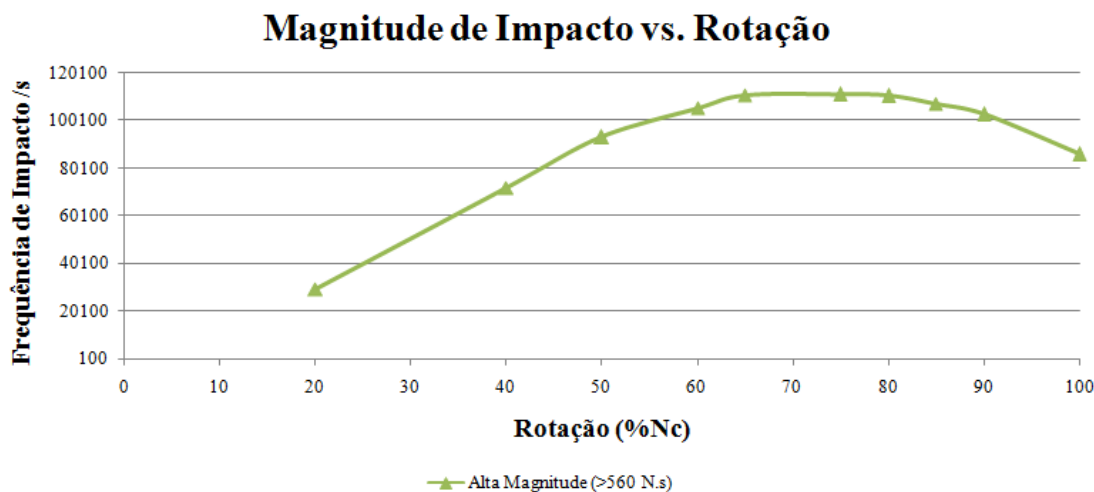


FIGURA 5-48 Relação de altas magnitudes de impacto (> 560N.s) com a rotação do moinho.

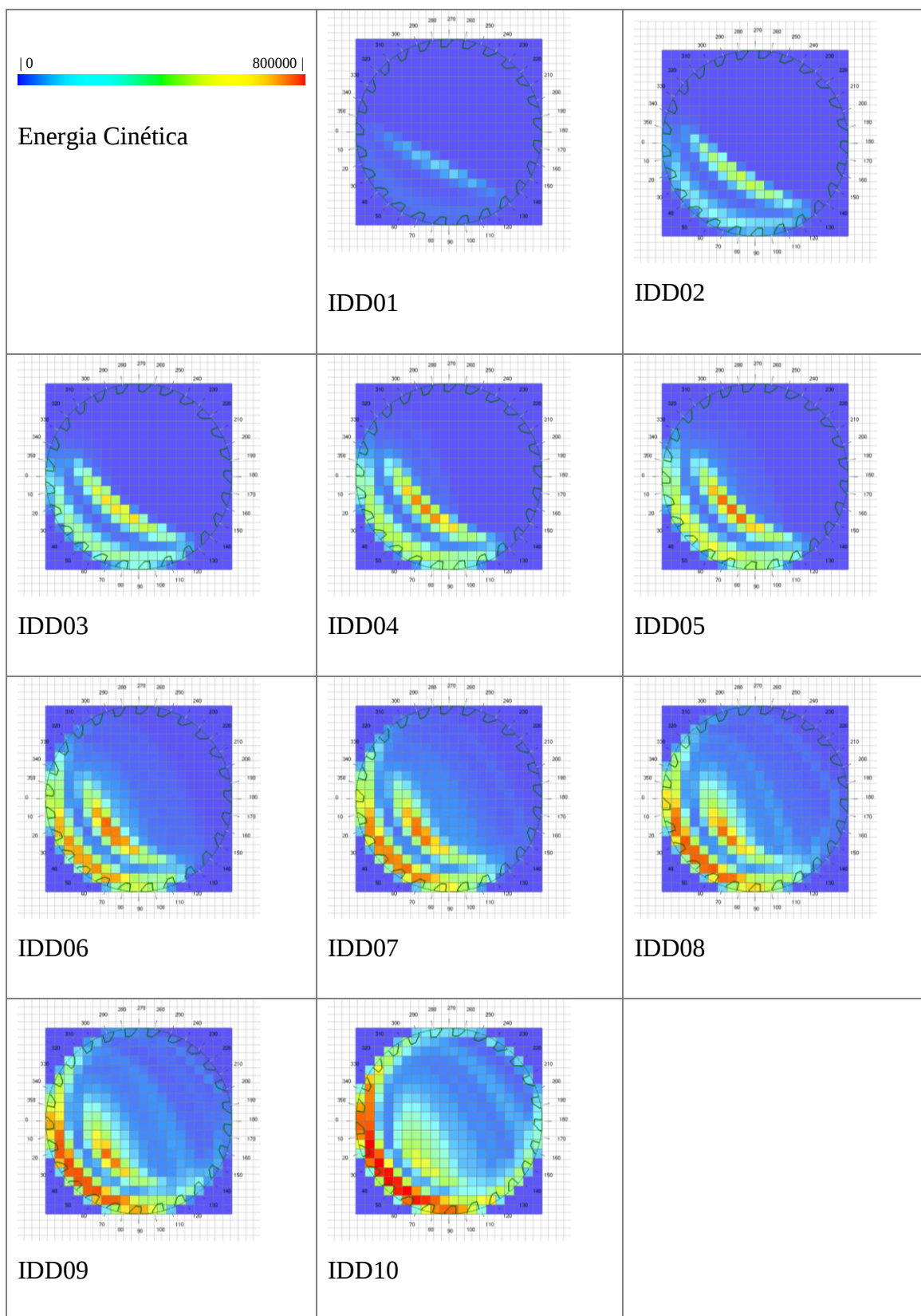
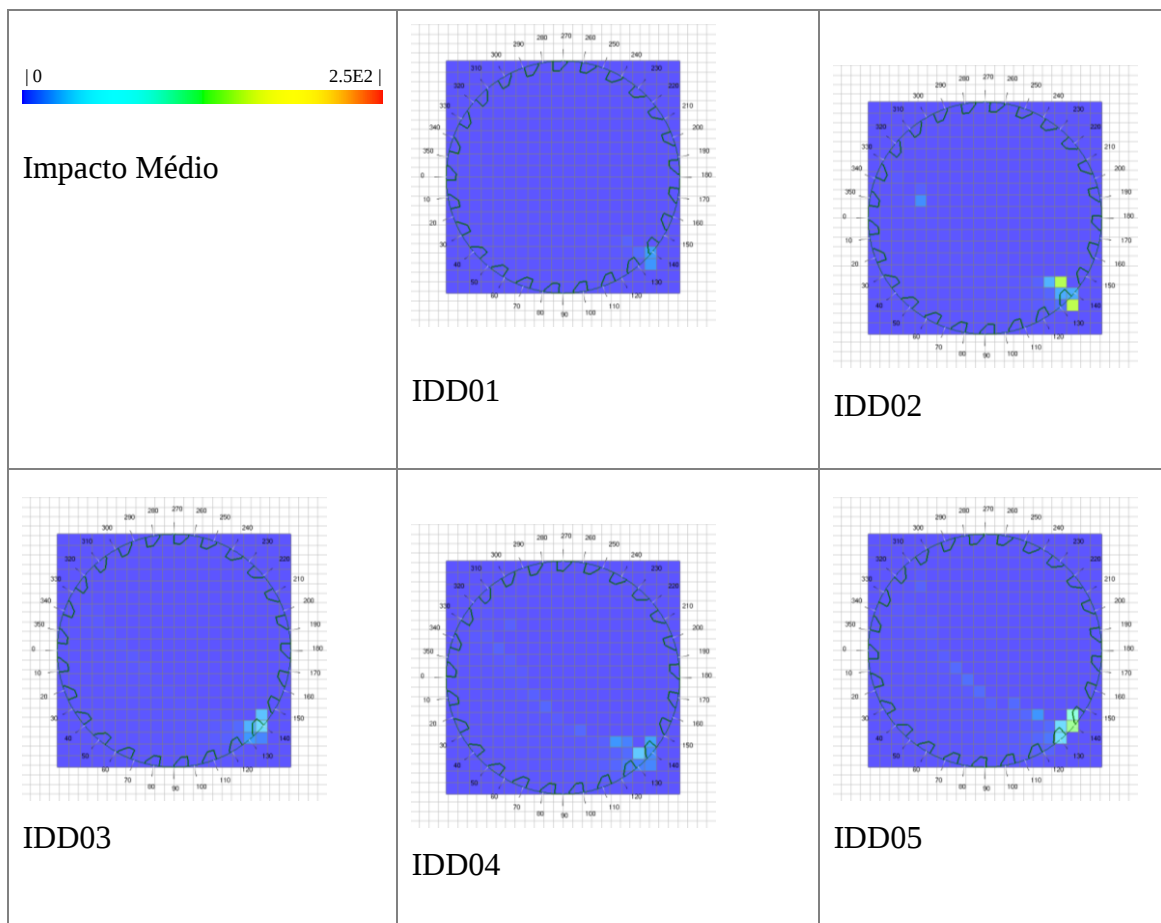


FIGURA 5-49 Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.

Distribuição espacial da energia cinética da carga para o conjunto de simulações que avalia o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.

A distribuição de energia cinética do carregamento, em detalhe na FIGURA 5-49, também é altamente dependente da rotação. É de se destacar a semelhança no comportamento dessa medida para a carga na região mais central do carregamento e aquela que descreve o movimento de cascata a partir de 75%Nc (IDD06) até 100%Nc (IDD10).



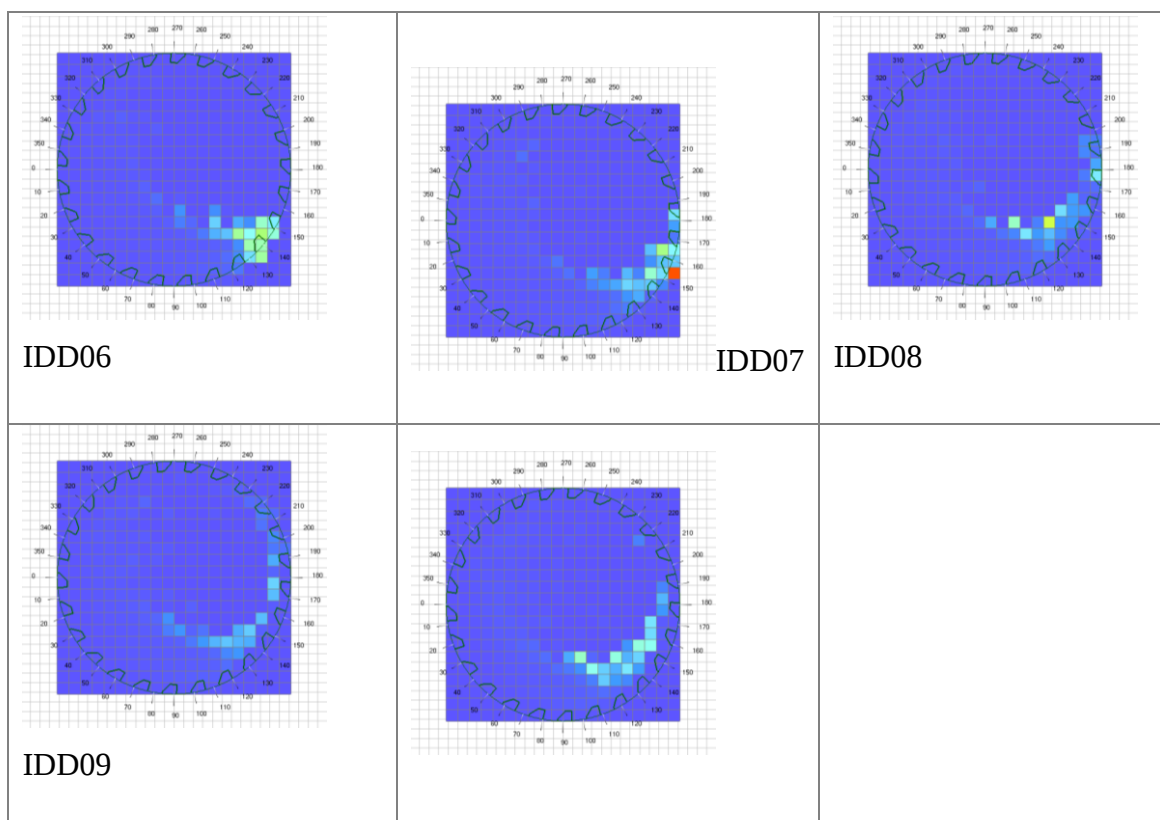


FIGURA 5-50 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito da rotação na dinâmica da carga de bolas.

A proteção da carcaça do moinho pode ser aprimorada através do controle da rotação. Na FIGURA 5-50 é apresentada a distribuição dos impactos médios registrados para as rotações testadas. Até cerca de $80\%N_c$ da velocidade crítica (IDD07), nota-se o crescente comprometimento do revestimento com o aumento da rotação. Com o início da centrifugação da carga, embora impactos de elevada energia ainda ocorram, a distribuição de impactos próximos ao *toe* tende a se estabilizar.

5.6. Efeito do Enchimento de Bolas

Muitas vezes, por conta da disponibilidade de energia ou outros fatores, a redução do nível de enchimento é tomada como alternativa para a diminuição do consumo energético da operação. Através da observação do arranjo da carga no moinho, FIGURA 5-51, e da presença de bolas, FIGURA 5-52, as simulações mostram que quando isso acontece a dinâmica da carga é fortemente modificada e uma das principais implicações é o lançamento de bolas na carcaça do equipamento. Enquanto o ponto de

sholder é praticamente inalterado, a altura do *toe* é fortemente dependente do enchimento.

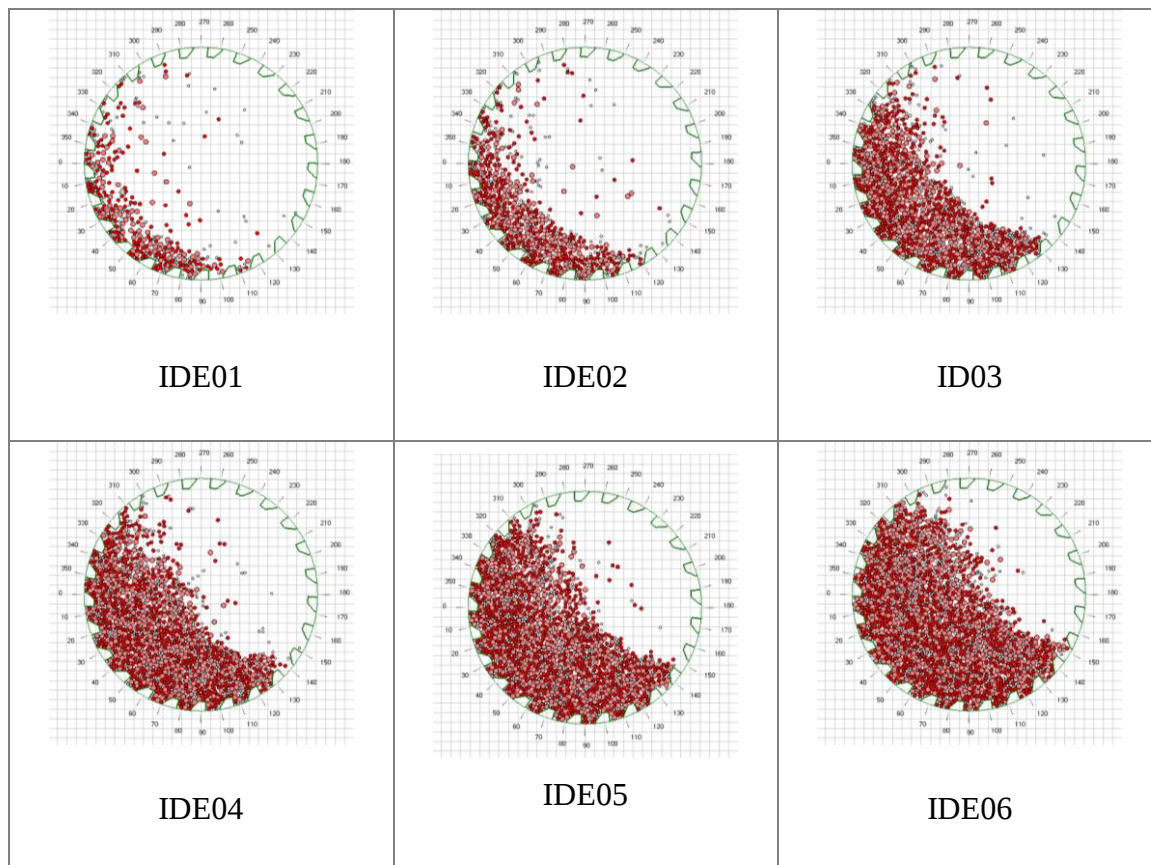
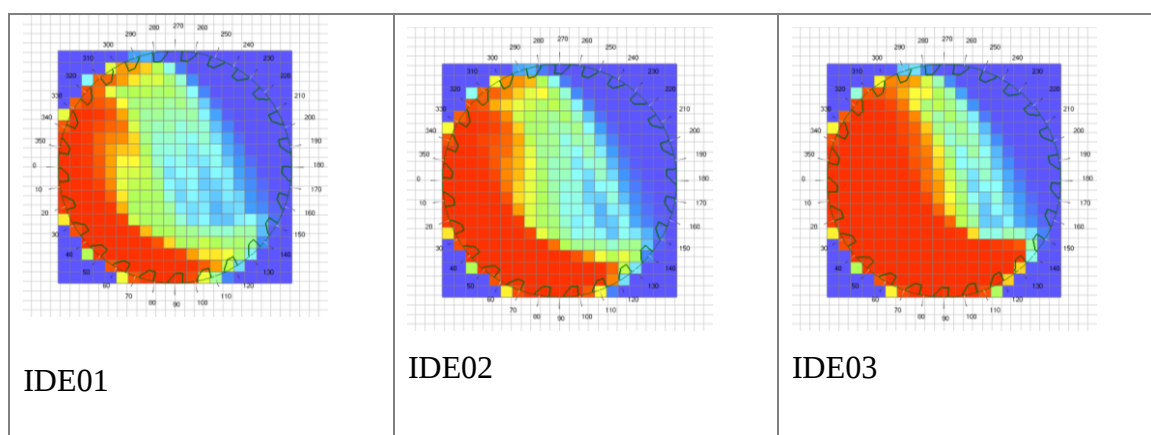


FIGURA 5-51 Arranjo espacial do carregamento para as simulações que avaliaram o efeito do enchimento de bolas na dinâmica da carga.



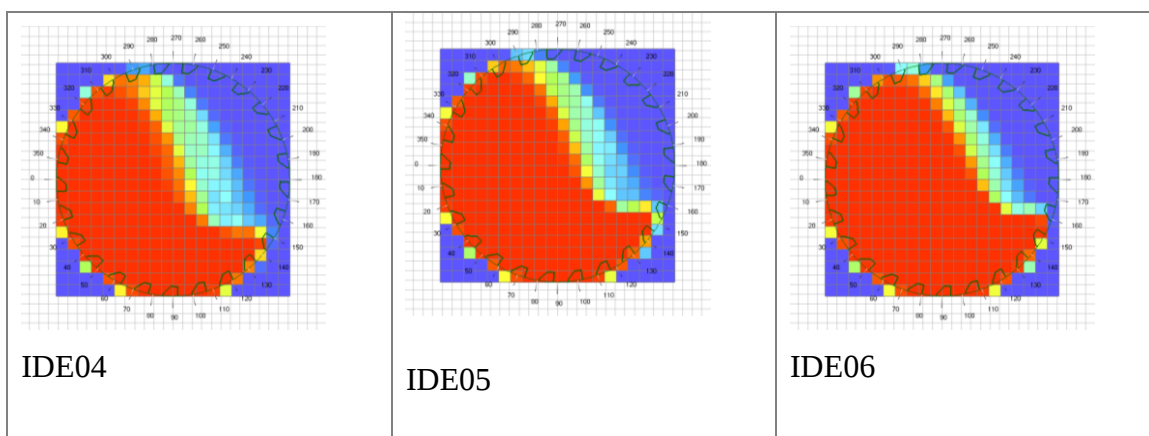
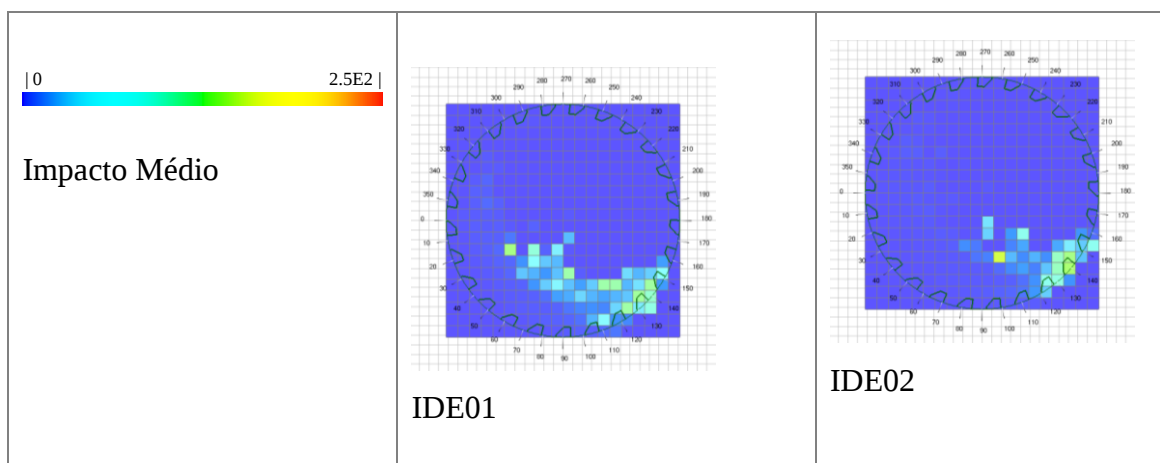


FIGURA 5-52 Densidade de presença para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do enchimento na dinâmica da carga de bolas.

A avaliação de comprometimento do revestimento é corroborada através da observação da FIGURA 5-53, onde é colocada a distribuição de impacto médio registradas no interior do moinho. Enchimentos de 15% e 25% sofrem com grandes áreas comprometidas por impactos de alta energia, comprometendo não só a carcaça, mas também a composição da carga de bolas, que podem sofrer quebras e a descaracterização da distribuição de tamanho.



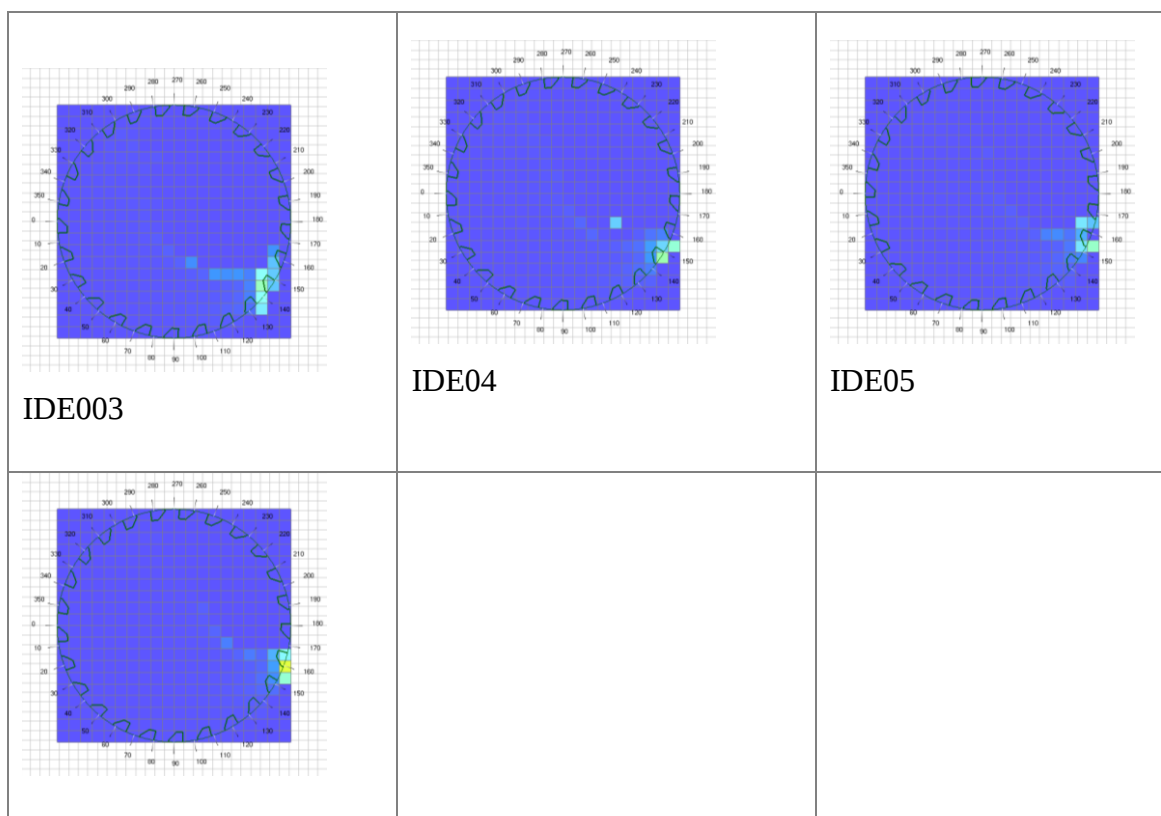


FIGURA 5-53 Distribuição espacial da magnitude de impacto média para o conjunto de simulações que avaliam o efeito do enchimento na dinâmica da carga de bolas.

Outro aspecto a ser considerado, o número total de bolas carregadas é de fundamental importância para a ocorrência de eventos de quebra suficientes para o grau de cominuição desejado. Nas simulações elaboradas neste trabalho o aplicativo de simulação calcula esse valor, de acordo com o nível de enchimento e distribuição de tamanho de bolas. Para as simulações elaboradas o total de elementos moedores é apresentado na FIGURA 5-54.

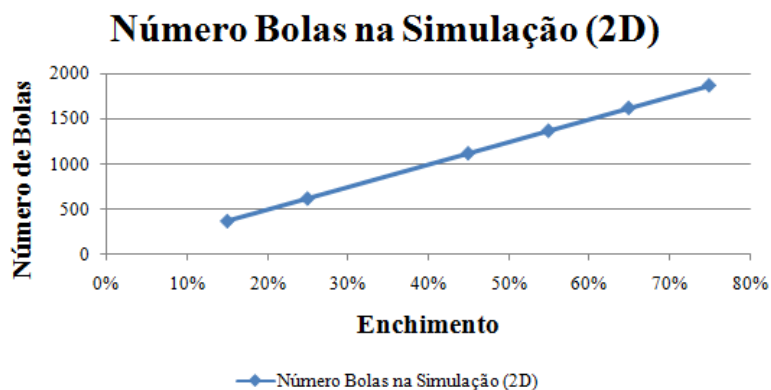


FIGURA 5-54 Relação do número de bolas com o enchimento para a distribuição de tamanho de bolas estabelecida nos testes.

Também foi determinado o número de impactos por segundo em função do nível de enchimento. O resultado é mostrado na FIGURA 5-55.

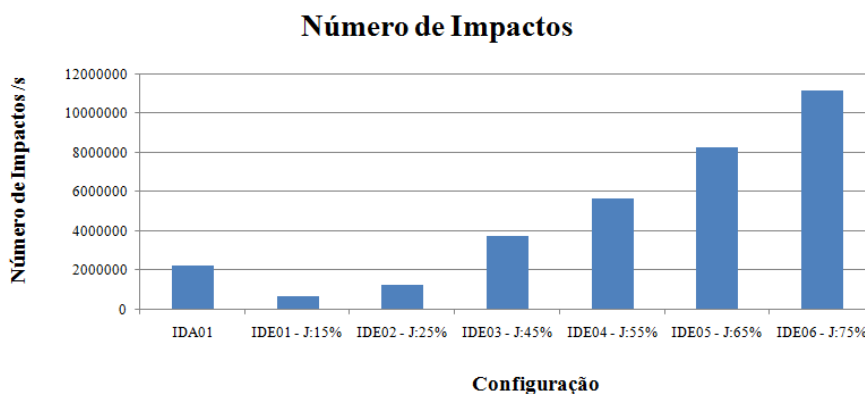


FIGURA 5-55 Número de impactos por segundo em função do enchimento de bolas

Na relação entre o número de impactos por segundo e o número de bolas, FIGURA 5-56, observa-se a notada dependência dos eventos de quebra com o nível de enchimento.

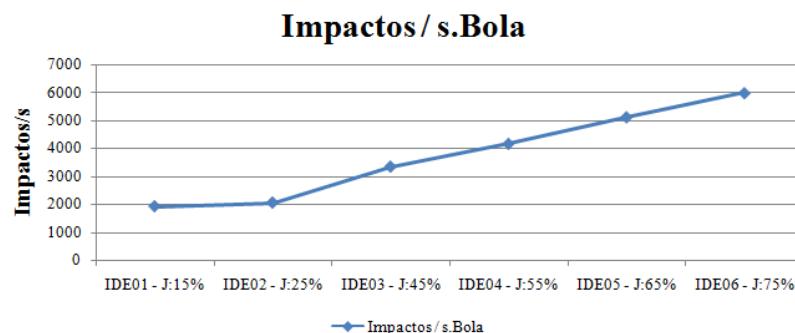


FIGURA 5-56 Relação do número de impacto por segundo por bola nas simulações.

Embora importante para ilustrar a importância do enchimento de bolas, a frequência de impactos por bola da carga não é suficiente para determinar as melhores condições de enchimento. A distribuição de frequência de impacto, FIGURA 5-57, também deverá ser considerada na determinação do grau de enchimento adequado.

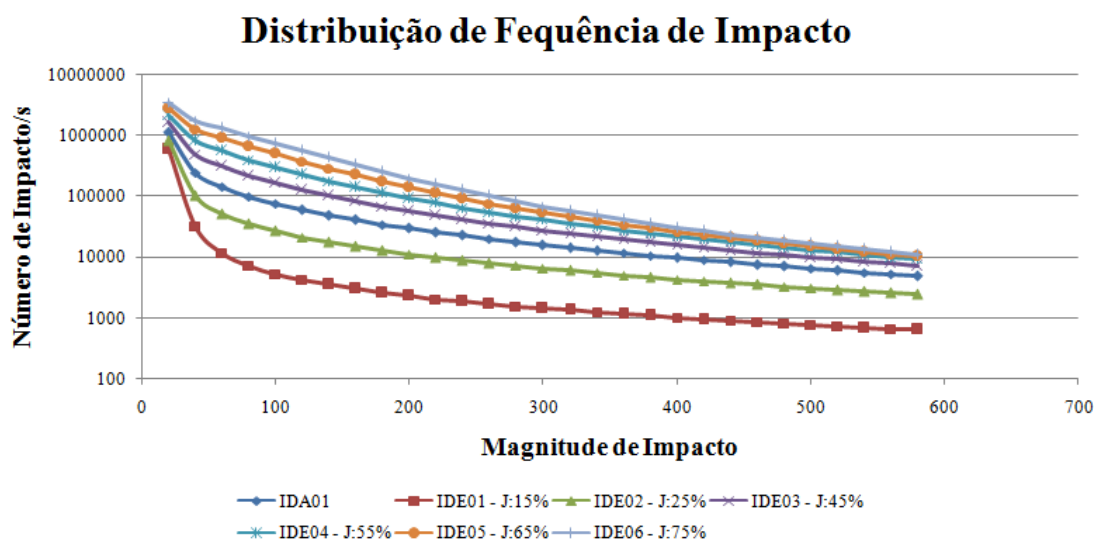


FIGURA 5-57 Distribuição de frequência de impacto para as configurações testadas nas simulações.

Observa-se que a distribuição de frequência de impactos é diretamente dependente do enchimento, de forma que menores enchimentos apresentam sempre menores frequências de impacto, independente da magnitude observada. Nos resultados obtidos é de se destacar a semelhança das distribuições que vão de 45 a 75% de enchimento,

contrastando com o salto em frequência de impactos que se tem ao se elevar de 15 para 25% de enchimento.

Quanto à potência, mostrou-se também fortemente dependente do nível de enchimento. A FIGURA 5-58 apresenta a relação das variáveis e o correspondente teórico. De acordo com a equação EQ. 3-6 a potência apresenta um ponto máximo próximo a 50% do enchimento, o que não é verificado nos dados obtidos por simulação. Embora a forma da curva seja mantida, o ponto de máximo fica acima do esperado, em torno de 65% de enchimento. Além do enchimento de bolas, o consumo energético é determinado por uma série de outras variáveis que são consideradas tanto pelos modelos matemáticos quanto pela simulação, não necessariamente as mesmas. Conforme já apresentado, a geometria do revestimento pode trazer variações na medida, sendo uma possível explicação para o desvio obtido.

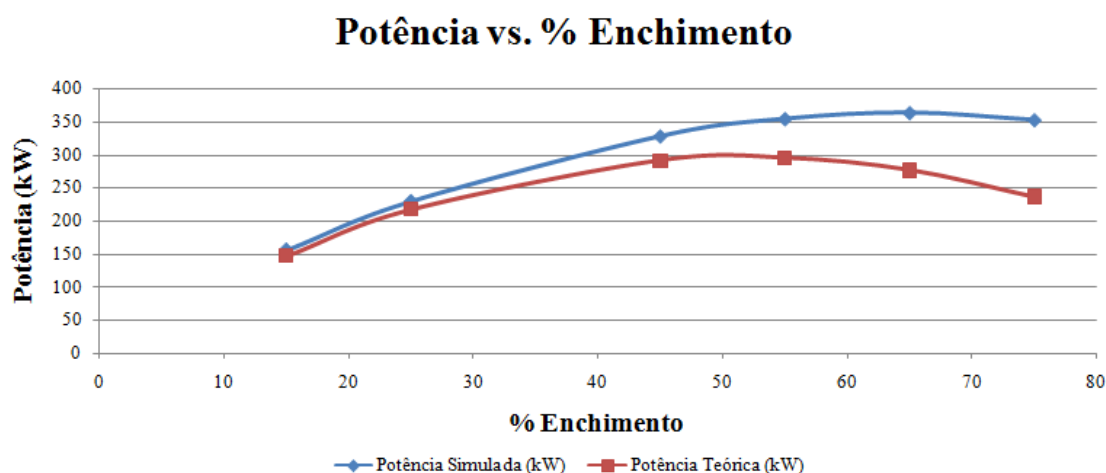


FIGURA 5-58 Relação da potência, simulada e teórica, com o enchimento de bolas.

No o formato característico adquirido pela carga de bolas no interior do moinho em operação, muitas vezes chamado de feijão ou rim, identifica-se a região conhecida por zona-morta, onde a carga de bolas apresenta-se praticamente estática. Sabe-se que o consumo de metal da carga moedora é fortemente reduzido pela formação dessa região, por outro lado, o efeito de quebra também, daí a importância dessa área na adequação da razão dos custos/eficiência da operação. As simulações desenvolvidas permitem observar que uma operação com baixo nível de enchimento produz uma reduzida área de zona-morta, o que é observado pela FIGURA 5-59 Distribuição da energia cinética

da carga de bolas. O aumento do enchimento contribui para a melhor definição da zona-morta., que mostra a distribuição da energia cinética da carga no interior do moinho.

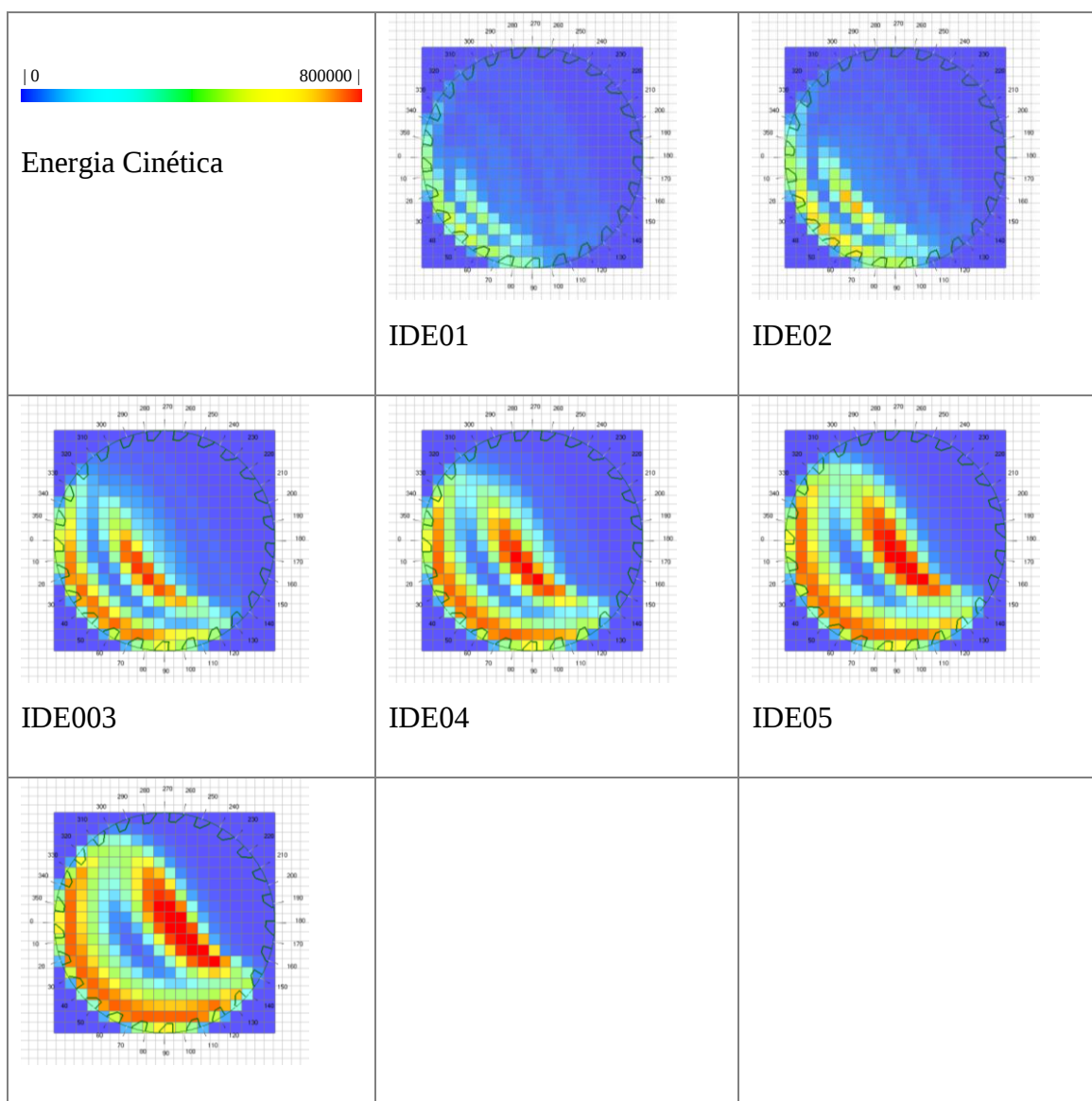


FIGURA 5-59 Distribuição da energia cinética da carga de bolas. O aumento do enchimento contribui para a melhor definição da zona-morta.

6. Conclusões

A dinâmica da carga moedora em moinhos de bolas foi estudada através de técnicas de simulação por computador utilizando o método da Dinâmica dos Corpos Rígidos. Através do desenvolvimento de aplicativos de simulação e análise de dados, alguns dos principais pontos de interesse na operação de moagem puderam ser mais bem entendidos. Testes em laboratório foram desenvolvidos para a calibração de parâmetros do modelo e permitiram ainda a observação do comportamento da carga de bolas em diferentes pontos operacionais. O método de simulação empregado foi considerado de sucesso por permitir a reprodução fidedigna do movimento da carga moedora, além de prover medidas de difícil obtenção em experimentos práticos.

As principais características de um moinho de bola são suas dimensões, diâmetro e comprimento, além da potência desenvolvida pelo equipamento. Operacionalmente têm-se a quantidade de corpos moedores carregados, a velocidade de rotação, tipo e perfil do revestimento interno, porcentagem de sólidos e granulometria do material alimentado. Considerando a influência no movimento da carga moedora em moinhos de bolas, os parâmetros de velocidade de rotação, perfil do revestimento, nível de enchimento, diâmetro e distribuição da carga de bolas, foram desenvolvidas simulações que possibilitaram análises do movimento, dinâmica de impacto e consumo energético em função das referidas parâmetros construtivo-operacionais.

O estudo da geometria do revestimento avaliou perfis do tipo barra-placa onde a geometria foi caracterizada pela altura e comprimento da barra, altura da face de ataque, ângulo de ataque e número de barras ao longo do perfil interno. Dos resultados obtidos destaca-se a variação de potência, saindo de 264.63kW na simulação identificada por IDB01 atingindo o máximo de 298.2kW em IDB04. Apesar da variação na potência, surpreendentemente a dinâmica de impacto entre as diversas geometrias testadas não apresentou grandes variações. Avaliando a distribuição espacial dos impactos no interior do moinho, outro aspecto a se destacar foi no elevado grau de comprometimento do revestimento interno frente a barras elevadoras de grande altura ou ângulos de ataque muito elevados. Dessa forma, os resultados levam a crer que a geometria do revestimento seja mais importante para aumentar a disponibilidade do equipamento que de ajustes da qualidade do produto da moagem.

A distribuição de tamanho de bolas, outro parâmetro avaliado, foi avaliado simulando cargas de monotamanho e composições de diferentes diâmetros. Como principais resultados, variações no consumo energético da ordem de 10% foram registradas, além disso, quanto à frequência de impacto, foram obtidas distribuições que privilegiaram tanto baixas quanto altas magnitudes, de forma a permitir afirmar que o espectro de energia na quebra do material dentro do moinho possui grande controle através da adequação desse parâmetro.

A avaliação da velocidade de rotação do moinho mostrou-se determinante no arranjo espacial da carga de bolas, distribuição de frequência de impacto e consumo energético. Observou-se que à medida que a rotação é aumentada o efeito de rolamento, cascata, é reduzido e pronuncia-se a elevação da carga de bolas pelas barras elevadoras do revestimento, ocorrendo daí o lançamento de bolas em trajetórias parabólicas, no típico movimento de catarata. Se elevada ainda mais, a rotação do moinho promove o lançamento das bolas fora do leito da carga de bolas. Quanto à distribuição de frequência de impacto, os resultados mostraram que existe um ponto ótimo de velocidade para a ocorrência de impactos de elevadas magnitudes. Destaca-se ainda o efeito da centrifugação da carga de bolas na diminuição acentuada na frequência de impactos entre bolas.

O enchimento de bolas, outro parâmetro estudado através das simulações, mostrou-se significativo principalmente na determinação das curvas de frequência e número de impactos, fundamental para a ocorrência da cominuição. A redução do nível de enchimento, além de reduzir o número de eventos de quebra, mostrou-se influente também na dinâmica da carga, acarretando no lançamento de bolas diretamente no revestimento do equipamento. Além disso, verificaram-se zonas no interior do moinho onde impactos bola-bola de elevada magnitude podem levar a quebra dos corpos moedores, comprometendo a distribuição de bolas desejada.

7. Referências Bibliográficas

- AUSTIN L.G., KLIMPEL R.R. e LUCKIE P.T. (1981) The process engineering of size reduction: ball milling. AIME, New York.
- BARAFF D. (1995) Interactive Simulation of Solid Rigid Bodies, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 15, No. 3
- BOND F.C. (1952) The third theory of comminution, Trans. AIME, 193, 484.
- CATTO E. (2005) Iterative dynamics with temporal coherence. Technical report, Crystal Dynamics, Menlo Park, California.
- CUNDALL P.A. e STRACK A. (1979) Discrete numerical model for granular assemblies. Geotechnique, 29:47–65
- ESNA-ASHARI M. e KELLERWESSEL H. (1988) Interparticle crushing of gold ore improves leaching, Randol Gold Forum 1988, Scottsdale, USA, 141-146.
- FIGUEIRA H. V. O., ALMEIDA S. L. M. e LUZ, A. B. (2004) Cominuição; In: Tratamento de Minérios. Rio de Janeiro. Centro de Tecnologia Mineral; Capítulo quatro.
- FLAVEL M.D. (1978) Control of crushing circuits will reduce capital and operating costs, Min. Mag., Mar., 207.
- GUPTA A., e D. S. YAN. (2006) Mineral Processing Design and Operation: an Introduction. Amsterdam: Elsevier.
- HALLIDAY D. e RESNICK (1974) R.. Física 1 (em Português). 2ª Edição ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora. 85 e 86 p. vol. 1.
- HUKKI R.T. (1961) Proposal for a Solomonic settlement between the theories of von Rittinger, Rick and Bond. Trans SME/AIME, 220, 403-408.
- INGLIS C.E. (1913) Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp comers. Proc. Inst. Nav. Arch.

KICK F. (1883) The law of proportional resistance and its application to sand explosions. Dingers J, 247, 1-5.

KOMAR KAWATRA (2006) Advances in Comminution. SME.

LYNCH A.J.(1977) Mineral crushing and grinding circuits: their simulation, optimization, design and control. Elsevier

METSO (2002) Basics in Mineral Processing, 1st Edition, Metso Minerals.

MISHRA B.K. e RAJAMANI R.K. (1994) "Simulation of charge motion in ball mills Part 1: experimental verifications". Int J of Proc, 40, 171-186

MORRELL S., NAPIER-MUNN T.J. e ANDERSEN J. (1992) The prediction of power draw for comminution machines. Comminution: Theory and Pratici, Ed: Kawatra, 405-426, 233-248 AIME

MOYS M.H., HLUNGWANI O., RIKHOTSO J., DONG H., (2003) Further validation of DEM modeling of milling: effects of liner profile and mill speed. School of Process and Materials Engineering, University of the Witwatersrand, Private Bag 3, WITS, Johannesburg 2050, South Africa.

MUNJIZA A. (2004) The Combined Finite-discrete Element Method. Hoboken, NJ: Wiley

NAPIER-MUNN T.J., MORRELL S., MORRISON R.D., e KOJOVIC T. (1996). JKMRC, University of Queensland, Brisbane, 413pp.

PÖSCHEL THORSTEN (2005) Computational Granular Dynamics Models and Algorithms Berlin, Heidelberg Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. Berlin.

POWELL M.S. e NURICK G.N. (1996). A study of charge motion in rotary mills, Parts 1-3 Mineral Eng, 9, 259-268, 343-350, 399-418

REID K.J. (1965) A solution to the batch grinding equation. Chem Eng Sci, 20, 953-963

RITTINGER R.P. (1867). Textbook of mineral dressing. Ernst and Korn, Berlin

ROBINSON B. (1980) The history of autogenous grinding. CIM Bulletin, 73, 114-118

ROWLAND, C.A.; KJOS, D.M., (1969) Rod and ball mills, in Mineral processing plant design, cap. 12, SME, N. York, p. 239-78

SHABANA AHMED A. (1994) Computational Dynamics. New York: Wiley. Print.

TAGGART A.F. (1945). Handbook of mineral dressing. Wiley, New York

WILLS, B. A., TIM NAPIER-MUNN (2006) Mineral Processing Technology: an Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery. Amsterdam: Elsevier/BH.