Para Márcio, Pedro, André e Helena

AGRADECIMENTOS / ACKNOWLEDGEMENTS

Ao Professor Oto Neri Borges pelo seu trabalho como orientador.

To Professor Stephen Lerman for his supervision in London (UK), especially in chapter III.

Aos Professores Mario Jorge Dias Carneiro e Márcia Maria Fusaro Pinto pelas contribuições dadas por ocasião do exame de qualificação.

Aos colegas do Núcleo de Matemática da Escola Fundamental de Ensino do Centro Pedagógico, Colégio Técnico, Faculdade de Educação e Departamento de Matemática, da UFMG pelo apoio e incentivo.

À Rita pelo cuidado da casa.

À Professora Maria Clara Rezende Frota pela leitura da tese e sugestões.

À Escola Fundamental de Ensino do Centro Pedagógico da UFMG.

Ao Programa de Pós-graduação: Conhecimento e inclusão social da Faculdade de Educação da UFMG.

À CAPES pelo financiamento do estágio em Londres através de bolsa.

To Dr. Peter Winbourne and South Bank University for the hospitality in London.

SUMÁRIO

FIGURAS, GRÁFICOS, QUADROS E TABELAS

RESUMO

Esse trabalho de tese investigou o desenvolvimento da aprendizagem dos componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do conhecimento de áreas e medidas de alunos de uma escola pública do ensino fundamental, durante dois momentos distintos de seus percursos escolares. A investigação resultou da convergência de duas vertentes de investigação: uma de natureza teórica e outra de natureza empírica. Com relação à vertente teórica foram configurados elementos para fundamentar em bases sólidas o estudo do conhecimento matemático e da aprendizagem matemática como sendo principalmente tácitos. Tais elementos foram buscados na teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito, na visão construtivista social de Ernest do conhecimento matemático e nas teorias de aprendizagem situada ou comunidades de prática de Lave e Wenger.

No que se refere à vertente empírica, o processo de investigação constou, inicialmente, da análise de um episódio ocorrido durante um contexto de conversação coletiva em sala de aula acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais. O objetivo dessa pesquisa foi o de investigar como os componentes principalmente tácitos e principalmente explícitos, introduzidos por Ernest em seu modelo do conhecimento matemático e que adaptei para o conhecimento de áreas e medidas dos alunos, se manifestam em processos de aprendizagem. Isso feito, um estudo de caso foi realizado para investigar, propriamente, o desenvolvimento dos componentes.

Um resultado relevante que, pareceu, emergir da análise do episódio está relacionado ao fato de que aquilo que o aluno diz literalmente quando está realizando uma tarefa não deve ser entendido, sempre, como uma expressão direta de seu pensamento. A análise sugeriu que, ao realizar uma tarefa oral, a resposta do aluno pode, aparentemente, estar equivocada sob o ponto da disciplina. Mas, isso não quer dizer, necessariamente, que o aluno não sabe a resposta, ou que não interiorizou certos conhecimentos. O suposto erro ou a suposta não-interiorização podem estar indicando que, no momento da verbalização, o tácito ainda estava sob construção e, portanto, predominava sobre o explícito. Ou ainda, uma obstrução do funcionamento tácito do pensamento do aluno podia estar ocorrendo devido a uma inaptidão da fala: o aluno podia estar num processo de elaboração do sistema simbólico que, ainda, não

correspondia à sua compreensão tácita. Em relação ao estudo de caso, nele foram identificados todos os componentes do modelo de Ernest do conhecimento matemático adaptado para os alunos com maior ou menor intensidade e visibilidade. A análise sugeriu que o desenvolvimento dos componentes não ocorre em completa harmonia: alguns componentes – afirmações, provas e raciocínios, linguagem e simbolismo, por exemplo – predominaram sobre outros – proposições e estética e valores. Mais do que isso, o desenvolvimento de alguns componentes mostrou afetar mais diretamente o desenvolvimento de certos componentes do que o de outros. Por exemplo, a análise indicou que um elemento da linguagem matemática oral, a saber, a comunicação social de um conhecimento matemático, parece se desenvolver com uma certa independência do componente 'métodos, procedimentos,...' que expressa o 'saber fazer'. O trabalho de tese é concluído indicando possibilidades de pesquisa futura na área de educação matemática que emergiram dos resultados dessas investigações.

INTRODUÇÃO

Nos anos 90 fui surpreendida por reformas curriculares que me demandavam lidar, em sala de aula, com um 'tipo' de conhecimento matemático, sobre o qual não havia refletido até então. Naquela ocasião, os objetivos curriculares para o ensino da disciplina apresentavam esse conhecimento constituído de 'faces', algumas das quais me eram familiares, como por exemplo, aquelas relativas aos domínios de conceitos e de procedimentos. Outras faces eram menos familiares, tais como, as relativas aos domínios social, de crenças e de valores em relação à matemática. Desde então, a busca pela compreensão acerca do que consistia esse conhecimento 'multifacetado' e, conseqüentemente, de como ensiná-lo, tornou-se um comprometimento intelectual sobre o qual me debruçaria, a fim de que pudesse me adaptar ao perfil de educadora matemática que ora me era exigido.

No esforço de interpretar os objetivos curriculares no contexto das referidas reformas[1], deparei-me com autores como Polanyi (1962, 1975, 1983) e Ernest (1998a, 1998b). Esses autores proporcionaram-me uma 'nova' compreensão do conhecimento matemático. Digo nova compreensão não, exatamente, para diferenciá-la de uma determinada concepção que dele possuía (até porque não saberia precisar qual era essa concepção), mas para me referir a algo que se tornaria uma fonte de reflexão constante na minha prática. Enquanto o primeiro autor despertou-me para o reconhecimento da existência de uma dimensão tácita do conhecimento, o segundo mostrou-me um entendimento do conhecimento matemático como sendo caracterizado, em grande medida, por tal dimensão. Disso resultou um meu convencimento de que a implementação do currículo que se propunha para o ensino e a aprendizagem de matemática não poderia desconsiderar os elementos tácitos nela envolvidos. No âmbito educacional tais idéias são, especialmente, significativas na medida em que desafiam a

---

[1] Em meados dos anos 90 participei, ativamente, na qualidade de membro de equipes de consultores de matemática, de projetos de reformulação curricular da disciplina para os níveis de ensino fundamental e médio das Redes Estaduais de Ensino dos Estados de Minas Gerais e do Espírito Santo, de algumas escolas da rede privada de Belo Horizonte, bem como da Escola Fundamental de Ensino do Centro Pedagógico da UFMG onde atuo como professora desde 1983.

prática escolar que, tradicionalmente, tem tratado o ensino e a aprendizagem da disciplina como sendo essencialmente explícitos (Greeno, 1997, p.10; MEC, 1998, p.24-26; Romberg, 2001).

Em particular, os trabalhos de Ernest (1991, 1998a, 1998b) levaram-me a refletir mais profundamente sobre o fato de que os desenvolvimentos conceitual e procedimental matemáticos dos alunos são, apenas, dois componentes da aprendizagem matemática dentro de um espectro que contém vários outros componentes igualmente relevantes, a maioria dos quais principalmente tácitos: conhecimentos construídos sob experiências e ações e que não podem ser completamente ensinados/aprendidos por meio de regras ou palavras. No entanto, ao vislumbrar tal compreensão do conhecimento matemático, vi-me face à várias indagações de pesquisa que acabaram convergindo para a seguinte questão que defino como sendo o problema central desse trabalho de tese: **como se dá o desenvolvimento, pelos alunos, da aprendizagem de um determinado conhecimento matemático, segundo seus componentes tácitos e explícitos, durante o período em que esse conhecimento é trabalhado em sala de aula?**

O caminho que percorri desde as dúvidas e inquietações iniciais até conquistar a compreensão do conhecimento matemático que tenho hoje foi longo e exaustivo, porém, extremamente gratificante. As vertentes que dispunha para alcançar tal compreensão eram várias: história da matemática, evolução do campo de pesquisa da educação matemática, documentações curriculares, psicologia, filosofia e epistemologia da matemática, dentre outras. Todas essas vertentes me auxiliaram, de um jeito ou de outro, a compreender as razões que, no meu entender, levavam diferentes países à proposição de objetivos curriculares muito similares e que valorizavam um certo ‘tipo’ de conhecimento matemático. Todavia, foi através de uma articulação entre a teoria de Polanyi (1962, 1975, 1983) sobre conhecimento tácito e a concepção construtivista social de Ernest (1991, 1998a, 1998b) do conhecimento matemático que vislumbrei a resposta que buscava – o conhecimento matemático havia sido re-significado: além de seus componentes relativos, apenas, à sua justificação ele agrega outros componentes igualmente relevantes, a maioria dos quais principalmente tácitos. Em outras palavras, as perspectivas teóricas desses autores, articuladas, constituiriam os principais referenciais sob os quais o processo de compreensão das minhas inquietações seria conquistado e sob os quais a estrutura desse trabalho de tese seria organizada.

Como veremos no decorrer do trabalho, sob o ponto de vista epistemológico Ernest vê a prática da produção do conhecimento matemático como uma prática social na qual estão envolvidos fenômenos, tais como, linguagem, negociação, conversação e grupos de aceitação. Porém, a seu ver, esses fenômenos não podem ser explicados em termos puramente individuais ou objetivos. Sua filosofia construtivista social da matemática procura descrever como os conhecimentos subjetivo e objetivo se originam e contribuem um com o desenvolvimento do outro. Na tentativa de contemplar a complexidade de um conhecimento desenvolvido numa prática social, o autor caracteriza, já, agora, sob uma perspectiva ontológica, o conhecimento matemático através de um modelo multidimensional cujos componentes são classificados como 'principalmente explícitos' ou 'principalmente tácitos'. Por meio de uma simples inspeção no modelo conclui-se que parte desse conhecimento pode ser adquirida por meio da linguagem proposicional, mas o 'grosso' não. Em relação à prática dos matemáticos, isso significa que grande parte do conhecimento nela produzido é construída através de um processo de imersão nessa prática. E essa experiência é, somente, articulada parcialmente numa forma de linguagem ou outro sistema simbólico qualquer. Se interpretado para o âmbito escolar esse modelo nos diz, dentre outros aspectos, que grande parte do conhecimento matemático não pode ser ensinada/aprendida por meio da declaração ou explicitação de um conhecimento que o professor possui. Embora o modelo de Ernest do conhecimento matemático não contemple, por exemplo, processos cognitivos/psicológicos envolvidos na aprendizagem matemática, ainda assim, podemos considerá-lo um bom modelo dessa aprendizagem no sentido de que ele nos ajuda a compreender os 'tipos' de conhecimento matemático – conceitos, procedimentos, atitudes ou disposições – espera-se, hoje, os alunos aprendam nos diversos níveis de ensino.

Por outro lado, para Polanyi, o fato de um conhecimento tácito não poder ser completamente exposto ou declarado, não significa que ele não possa ser comunicado ou compartilhado. Ao descrever sobre o ato do conhecer, esse autor o faz em termos dinâmicos: conhecimento manifestando-se em processos de aprendizagem e conhecimento como realizações desses processos. Mais do que isso, Polanyi nos apresenta uma descrição detalhada de como usamos nossos conhecimentos para adquirirmos novos conhecimentos, sejam eles principalmente explícitos ou principalmente tácitos, através de alguns processos subsidiários observáveis. No caso da aprendizagem matemática tal descrição é valiosa na medida em que ela nos ajuda a compreender melhor os processos envolvidos na aquisição e uso de conhecimentos, processos esses que são principalmente tácitos.

Diante do exposto, esse trabalho de tese busca configurar elementos teóricos e empíricos em direção a um estudo do conhecimento matemático e da aprendizagem matemática como sendo principalmente tácitos. Em relação aos aspectos teóricos procuro fundamentar tal concepção em uma base epistemológica sólida, cujo principal pilar de sustentação encontra-se na obra de Polanyi sobre conhecimento tácito. No que se refere aos aspectos empíricos, procuro, não somente, dar consistência à minha opção epistemológica, como também investigar componentes principalmente tácitos e principalmente explícitos do modelo de Ernest do conhecimento matemático, quando interpretados para o âmbito escolar. Em ambos os casos, procuro intercalar, sempre que possível, uma interlocução com produções recentes da pesquisa em educação matemática. No caso particular da investigação empírica, uma pesquisa foi desenvolvida no contexto de uma sala de aula de matemática de uma escola pública do ensino fundamental.

O estudo do meu problema de tese resultou, então, da convergência de duas vertentes de investigação: uma de natureza teórica e outra de natureza empírica. Ao organizar o trabalho procurei seguir o caminho que percorri para conquistar a compreensão do conhecimento matemático que tenho hoje. Assim sendo, os três primeiros capítulos que compõem a vertente teórica são dedicados à configuração dos elementos teóricos que sustentam o estudo do conhecimento matemático e da aprendizagem matemática como sendo principalmente tácitos. O primeiro capítulo consiste na apresentação e discussão de alguns aspectos da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito. Tais aspectos estão relacionados com os processos envolvidos na comunicação, aquisição e uso de conhecimentos, a maneira pela qual damos um *status* de entidade para aquilo que está sendo conhecido, a participação do tácito no processo de articulação, o papel do social na construção do conhecimento pessoal, dentre outros.

No segundo capítulo, examino elementos da teoria filosófica construtivista social da matemática de Ernest. Em particular, contraponho seu modelo do conhecimento matemático a elementos da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito, bem como delimito o sentido no qual o conhecimento matemático escolar se aproxima do modelo. No terceiro capítulo, apresento uma teoria atual de aprendizagem – aprendizagem situada ou comunidades de prática – que, a meu ver, nos ajuda a compreender como conhecimentos tácitos circulam em contextos sociais, como por exemplo, aqueles que caracterizam a sala de aula de matemática. Esse capítulo complementa os capítulos anteriores na medida em que as teorias nele contidas preenchem espaços não cobertos pelas teorias de Polanyi e Ernest, se considerado o ensino e aprendizagem de matemática em termos de práticas sociais.

Os quatro capítulos seguintes são dedicados à vertente empírica. No capítulo quatro apresento o desenho de pesquisa. Mais precisamente, justifico a escolha do tema matemático de pesquisa: áreas e medidas, faço um breve relato da literatura recente sobre o tema e proponho uma adaptação do modelo de Ernest para o caso específico desse conhecimento matemático dos alunos. Além disso, apresento uma visão geral do cenário no qual a pesquisa foi desenvolvida, bem como da opção metodológica adotada. Por fim, descrevo, propriamente, o método de pesquisa empregado.

Nos capítulos cinco e seis encontra-se o relato de um episódio ocorrido durante uma conversação em sala de aula em torno da diferença entre figuras planas e figuras espaciais. Para facilitar a leitura desse relato, optei por dividi-lo em duas partes: a) metodologia de análise de um episódio (capítulo V) e b) análise do episódio (capítulo VI). O objetivo dessa pesquisa foi o de investigar a ressonância dos referenciais interpretativos de Polanyi e Ernest nos dados empíricos. Ou ainda, como componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest adaptado para os alunos se manifestam segundo o aspecto funcional da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito.

Isso feito, um estudo de caso de uma dupla de alunos foi realizado. Tal estudo cobriu dois momentos distintos do percurso escolar desses alunos e investigou como se dá o desenvolvimento dos componentes principalmente tácitos e principalmente explícitos de seus conhecimentos de áreas e medidas durante o processo de aprendizagem em sala de aula. O estudo de caso foi dividido nos capítulos sete e oito pela mesma razão que me levou a dividir a análise do episódio em duas partes. No capítulo sete apresento a análise do estudo de caso. No capítulo oito promovo a síntese desse estudo. Concluo o trabalho fazendo um apanhado do que foi feito nos capítulos anteriores. Mais particularmente, destaco os resultados que emergiram das investigações empíricas, bem como as pesquisas futuras que eles apontam para a área de educação matemática.

CAPÍTULO I

ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA DE POLANYI SOBRE CONHECIMENTO TÁCITO

Pense num exemplo. Conhecemos a face de uma pessoa e podemos identificá-la dentre milhares de outras, na verdade dentre milhões, ainda que usualmente não saibamos dizer como a reconhecemos. Assim,grande parte desse conhecimento não pode ser colocada em palavras. Todavia, a polícia introduziu, recentemente, um método através do qual podemos comunicar muito desse conhecimento. Eles confeccionaram uma grande coleção de gravuras que mostram uma variedade de narizes, bocas e outros aspectos. A partir desses, a vítima seleciona os particulares da face que ela conhece e as peças, então, podem ser encaixadas de maneira a formar uma razoável aproximação da face. Isso sugere que, apesar de tudo, podemos comunicar nosso conhecimento de uma fisionomia se nos forem dados meios adequados para nos expressar…Esse ato de comunicação exibe um conhecimento que não podemos falar sobre ele[2]. Michael Polanyi (1983, p.4-5)

1. INTRODUÇÃO E BREVE BIOGRAFIA

Esse capítulo é dedicado à teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito. A partir de uma breve biografia do autor veremos que seu legado intelectual inclui uma vasta coleção de obras dedicadas a uma ampla variedade de temas. Para muitos (JBSP, 1977; Wigner e Hodgkin, 1997) a maior contribuição de Polanyi encontra-se na filosofia da ciência. De sua reação contra a concepção positivista de conhecimento e de seu interesse pela epistemologia da prática científica emergiu sua teoria sobre o ‘ato do conhecer tácito’ (*tacit knowing*).

[2] Todas as traduções de citações referentes a trabalhos escritos em língua estrangeira são de minha autoria. A página indicada refere-se ao trabalho no original.

Nas demais seções do capítulo são tratados alguns aspectos dessa teoria que foram desenvolvidos pelo autor, sobretudo, em três de suas principais obras: *Personal* Knowledge (1962), *The Tacit Dimension* (1983) e *Meaning* (1975). Tais aspectos estão relacionados com os processos envolvidos na comunicação, aquisição e uso de conhecimentos, a maneira pela qual construímos uma ontologia para aquilo que está sendo conhecido, a participação do tácito no processo de articulação, o papel do social na construção do conhecimento pessoal, dentre outros[3]. Ao final do capítulo comento elementos de sua teoria para o caso da aprendizagem matemática.

Michael Polanyi (1891-1976) nasceu em março de 1891 no seio de uma família judia de classe média alta de Budapeste, Hungria. Embora se interessasse pelas artes e humanidades, sua formação matemática e científica básica o preparou para obter o seu primeiro grau universitário em medicina, em 1913. Esse título valeu-lhe um posto de médico no exército Austro-Húngaro durante a Primeira Guerra Mundial. No entanto, devido a problemas de saúde, Polanyi foi impedido de exercer a profissão nos piores momentos da guerra. Durante uma sua hospitalização e convalescença ele redigiu uma dissertação em química que lhe deu o título de PhD pela Universidade de Budapeste, em 1917, e que o lançou definitivamente na carreira de físico-químico após a guerra.

Os problemas políticos do pós-guerra na Hungria fizeram com que Polanyi emigrasse para a Alemanha, onde ocupou posições de prestígio, inicialmente, no Instituto de Química de Fibras (*Kaiser Wilhem Institut für Faserstoffchemie*) e, posteriormente, no Instituto de Física e Eletroquímica (*Institut für Physikalische Chemie und Electrochemie)*, ambos em Berlim. Desde então, sua brilhante carreira como pesquisador o tornaria reconhecido como uma das mentes científicas mais importantes do século vinte.

A escalada do poder de Hitler e do Partido Nacional Socialista marcaram o fim da carreira de Polanyi na Alemanha. Os crescentes ataques aos intelectuais judeus, em 1933, levaram-no a deixar esse país e a aceitar uma cadeira de físico-química na Universidade de Manchester, Inglaterra. A partir daí, embora tenha continuado suas

[3] Uma visão mais abrangente das obras de Polanyi pode ser encontrada, por exemplo, em Wigner e Hodgkin (1977), JBSP (October 1977, vol.8, No.3), Prosch (1986), Jha (1995, 1997), Sveiby (1997) e Polanyi Society (2002).

pesquisas científicas e se dedicado a publicá-las (cerca de 200 artigos durante sua carreira científica), seus interesses expandiram para além do trabalho científico. Dentre esses incluíram questões ligadas à economia, filosofia, relação entre comunidade científica e cultura política, organização e ordem na ciência e sociedade. No final dos anos 30, durante os anos 40 e início dos anos 50, Polanyi publicou uma vasta e variada coleção de materiais e ensaios sobre economia, ciência e filosofia política. Em 1948 ele trocou sua cadeira em química por uma cadeira em ciências sociais em Manchester, Inglaterra e, em 1958, tornou-se *Senior Research Fellow* em Merton College, Oxford, Inglaterra.

Durante os primeiros anos de Polanyi na Inglaterra, seus interesses se concentraram em críticas aos governos totalitaristas da Alemanha e da Rússia. As idéias filosóficas do cientista tomaram uma primeira forma durante os anos da Segunda Guerra Mundial. Suas atividades políticas em oposição ao planejamento da ciência para propósitos políticos e militares levaram-no a desenvolver uma epistemologia da ciência fundamentada na crença da existência de uma natureza individual da descoberta, desatrelada da interferência oficial ou dogmática. Em 1946 ele publicou o livro *Science, Faith and Society* (University of Chicago Press), seu primeiro trabalho filosófico em grande escala no qual encontram-se as fundações de sua teoria de conhecimento.

Ao longo dos anos 50 Polanyi realizou freqüentes viagens de cunho acadêmico aos Estados Unidos. De seus trabalhos lá realizados resultaram outras de suas principais obras. Em 1958 foi publicado o livro *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy,* considerado, pelos estudiosos de Polanyi, seu principal trabalho filosófico. A contribuição desse livro para a filosofia da ciência reside, sobretudo, na crítica do autor ao ideal positivista de objetividade e na influência de suas idéias na mudança ocorrida em tal filosofia, em meados do século vinte, em direção aos interesses sobre a prática científica, tal como a contribuição de Thomas Kuhn em seu famoso livro *A estrutura das revoluções científicas* (1998) que, segundo Jacobs (2002), faz uso dos pensamentos de Polanyi.

Além do componente crítico ao ideal de subjetividade que dominava a filosofia da ciência, nessa época, *Personal Knowledge* tem um componente construtivo, no sentido de que ele representa de maneira mais sistemática o interesse de Polanyi pela epistemologia. Esse livro traduz um esforço cuidadoso do autor em desenvolver um modelo epistemológico e um amplo referencial que permite pensar na concepção de conhecimento como algo 'pessoal', idéias essas preliminarmente apresentadas em *Science, Faith and Society*.

Em linhas gerais, segundo Polanyi, a concepção positivista de conhecimento que considerava verdadeiro o conhecimento impessoal (isento de emoções ou outros estados mentais), objetivo (no sentido de que sua substância era inteiramente determinada pela observação ainda que sua apresentação pudesse ser formalizada) e universalmente estabelecido (independente de quaisquer valores culturais ou contextos situacionais ou históricos) é falsa. Ao contrário, para ele, qualquer ato do conhecer envolve um comprometimento pessoal; uma contribuição apaixonada do sujeito que é um componente vital do conhecimento e não meras imperfeições desse conhecimento. Com isso em mente, ele reformula o conceito de objetividade, relacionando-o: a uma busca por explicações, resultados de fatos, em princípio, obscuros e recônditos da realidade; a uma superação/dominação de nossas incapacidades de existência corporal através de uma força que nos guia para a compreensão da realidade; a uma perseguição do conhecimento que vai além daquele percebido pelos nossos órgãos dos sentidos. Por outro lado, ele usa a palavra 'pessoal' para se referir a um comprometimento intelectual que, no seu entender, é um componente individual do ser humano na busca de compreensão. Em particular, esse componente individual, quando acionado, é um processo ativo de compreensão das coisas; uma ação que requer habilidade. De acordo com Polanyi, tal ação é realizada subordinando-se ou mobilizando-se um conjunto específico de conhecimentos e experiências do mesmo modo que usamos pistas ou instrumentos para conquistar qualquer outra compreensão. Desse modo, embora possa parecer tão contraditória a expressão 'conhecimento pessoal' quanto a expressão 'círculo quadrado' (como exemplifica Prosch, 1986), Polanyi argumenta que a palavra 'conhecimento' é legítima em tal expressão, pois ela significa que o homem transcende sua própria subjetividade em função de um empenho apaixonado de satisfazer seus comprometimentos pessoais na busca por padrões universais (Polanyi, 1962).

Em 1966, a partir de seus trabalhos em Yale, Estados Unidos, Polanyi publicou o livro *The Tacit Dimension*. Já nessa obra encontramos uma versão madura e refinada da epistemologia do autor, desenvolvida em *Personal Knowledge*. Em *The Tacit*

Dimension o autor elabora a estrutura do ato do conhecer tácito, isto é, uma descrição detalhada de como adquirimos e usamos nossos conhecimentos, além da revisão de seu conceito de conhecimento pessoal como comprometimento intelectual. Tal estrutura articula-se a esse conceito na medida em que ela descreve como se dá a participação pessoal do sujeito quando esse está num processo de descoberta.

Em 1975 com o declínio de sua saúde, o último livro do autor *Meaning* foi publicado com o auxílio de seu colaborador o filósofo americano Harry Prosch (1986). Esse livro mostra mais um estágio do amadurecimento de Polanyi em relação a suas principais idéias, desenvolvidas em *Personal Knowledge* e em *The Tacit Dimension.* Além disso, em *Meaning*, o autor busca analisar os problemas de significado do século vinte e estender sua filosofia às artes e religião. Em fevereiro de 1976, um ano após a publicação de *Meaning*, Polanyi morre em Oxford aos 84 anos. (Cash, 1996; Wigner e Hodgkin, 1997; DeepSight, 2002; ISCID, 2002)

2. O CONHECIMENTO TÁCITO, SEGUNDO POLANYI

Nos primeiros parágrafos do capítulo 1 do livro *The Tacit Dimension* (1983), Polanyi declara não ser possível tratar o conhecimento humano sem partir do princípio de que "sabemos mais do que podemos dizer" (p.4). Tal princípio se tornaria uma citação obrigatória por parte de todos aqueles que se remetem a Polanyi[4]. Embora esse princípio pareça ser óbvio, ele espelha um dos principais pilares de sua concepção de conhecimento: o reconhecimento da existência de um tipo de conhecimento que não pode ser completamente exposto e, mais especificamente, que não pode ser descrito em regras ou palavras: conhecimento tácito. Em particular, para o autor, tal conhecimento é subjacente a todo conhecimento proposicional ou, o que dá no mesmo, a linguagem sozinha é insuficiente para tornar um conhecimento explícito. Disto resulta que todo conhecimento ou é tácito ou é construído a partir de conhecimentos tácitos (Polanyi, 1969a, p. 144).

[4] Brennan (1977) bem observa que Polanyi não foi o único, nem mesmo o primeiro filósofo, a reconhecer que "sabemos mais do que podemos dizer". Seu mérito foi ter adotado essa idéia seriamente e dedicado grande parte de sua vida ao estudo profundo de suas implicações.

Analisando os diversos exemplos apresentados por Polanyi (1962; 1983; 1975) para ilustrar o que consiste um conhecimento dessa natureza, constata-se que um conhecimento tácito está estritamente vinculado a uma prática da seguinte maneira: quando realizamos uma tarefa que pode envolver tanto atos físicos quanto mentais, como por exemplo, andar de bicicleta, ler ou escrever um texto, reconhecer uma fisionomia, ensinar alguma coisa a alguém, compreender uma atitude de outra pessoa ou resolver um problema matemático, acionamos um processo interno de funcionamento das nossas ações cujo propósito é o de nos auxiliar na concretização dessa tarefa. Ao ser acionado, tal processo mobiliza um conjunto específico de conhecimentos que possuímos, os quais funcionarão como instrumentos para realizarmos a tarefa, bem como para monitorarmos sua realização. Cada um desses conhecimentos que são mobilizados para tal fim é um conhecimento tácito (Fischbein, 1989; Sternberg, 1995). De fato, segundo Polanyi, tais conhecimentos são tácitos na medida em que são usados de maneira instrumental e não explicitamente como objetos. Nesse sentido, enquanto estão sendo mobilizados eles não são percebidos em si mesmos, mas sim, em termos daquilo que eles contribuem para a realização da tarefa. Assim, podemos interpretar que o que é tácito varia de uma situação para outra; depende do contexto[5], como bem observa Lerman ao ressaltar o caráter 'situado' da mente: "a 'mente' não é estática ou descontextualizada, mas responde ao contexto, à atividade…e é orientada para comunicar e agir." (Lerman, 2002, p.108, aspas no original)

Por outro lado, de acordo com Polanyi, esse processo interno de funcionamento das nossas ações também é tácito no sentido de que ele é uma habilidade pessoal que não pode ser disponibilizada a outros, pois não sabemos explicar, exatamente, como o operamos. Nesse caso, tal processo pode ser mais ou menos consciente e mais ou menos intenso conforme, respectivamente, a tarefa e o grau de nosso envolvimento nela.

Diante do exposto, interpreta-se que, ao usar a palavra 'conhecimento', Polanyi se refere tanto ao produto ou realização de uma aprendizagem quanto ao processo dinâmico de um ato do conhecer. Algumas vezes quando o autor se refere ao primeiro, esse é tratado como um objeto que pode ser expresso em palavras ou formalizado.

[5] Nesse trabalho a palavra contexto é usada para se referir à participação dos sujeitos em práticas (sociais ou não). Assim, a expressão 'contextos distintos' significa formas de participação em práticas distintas.

Entretanto, isso não muda o fato de que tal conhecimento possui, em alguma medida, uma indeterminação devida ao que dele conhecemos tacitamente. Ao contrário, quando enfatiza o conhecimento como um processo dinâmico, o autor lança mão dos verbos *knowing* ou *learning*. Tal processo está relacionado com a maneira pela qual aprendemos novos conhecimentos.

Além disso, a palavra 'conhecer' para Polanyi significa uma combinação de ambos os conhecimentos prático e teórico. Isso pode ser ilustrado, por exemplo, na arte médica de diagnosticar. Para o autor, a habilidade de um médico precisa combinar a 'arte de fazer' (*know how*) com a 'arte de conhecer' (*know what*)[6]. Mais do que isso, esses dois aspectos do conhecer possuem estrutura similar e nenhum se faz presente sem a presença do outro. Isso leva Sveiby a interpretar que, de acordo com Polanyi, "não há, em princípio, uma diferença entre as habilidades analíticas de Bertrand Russel e as habilidades de usar a bengala por um cego. O processo do conhecer é o mesmo." (Sveiby, 1997, p.3)

Todavia, Polanyi não discute, claramente, a diferença entre um conhecimento prático e outros tipos de conhecimento. Porém, a partir da dicotomia, usada por ele, entre conhecimento prático e conhecimento teórico, e do que podemos extrair de sua concepção de teoria (1962, p.4) podemos interpretar que um conhecimento prático identifica-se com conhecimentos adquiridos de experiências diretas ou sensoriais e com o uso de conhecimentos. Assim sendo, podemos identificar um conhecimento prático com um conhecimento tácito no sentido de que não é fácil especificar como adquirimos conhecimentos dessas experiências e nem como usamos um conhecimento.

3. A COMUNICAÇÃO

O fato de um conhecimento tácito não poder ser declarado ou exposto completamente (ou mesmo não poder ser) não significa que ele não possa ser comunicado ou compartilhado. De acordo com Polanyi (1983), uma primeira pessoa pode aprender ou conhecer um conhecimento tácito de uma segunda pessoa através da apreensão de alguns de seus particulares (aspectos) que são identificados por meio de pistas – palavras, gestos, apontamentos, ações, por exemplo – mais ou menos fragmentárias, e por um esforço inteligente, por parte da primeira pessoa, para compreender e integrar os significados desses poucos aspectos apreendidos. Por outro lado, para que a segunda pessoa possa comunicar particulares de um seu conhecimento tácito à primeira pessoa é necessário que meios adequados estejam ao seu dispor. Assim, ambas a comunicação e a integração dos particulares de um conhecimento tácito ocorrem através de seus significados.

Para ilustrar essa questão, Polanyi lança mão de uma variada coleção de exemplos. Um deles relaciona-se ao reconhecimento de uma fisionomia e está, brevemente, descrito na epígrafe que abre esse capítulo. Outro, se refere aos esforços despendidos por alguns cursos universitários em suas aulas práticas, cujo objetivo é o de ensinar aos alunos como identificar determinadas doenças, espécies de rochas, plantas ou animais. Para ele, toda ciência descritiva estuda fisionomias que não podem ser totalmente descritas em palavras ou até mesmo em gravuras. No entanto, diz o autor, podemos fazer com que os alunos passem por certas experiências para que possam apreender esses conhecimentos de seus professores. Todavia, isso só será possível se confiarmos na co-operação inteligente do aluno para captar o significado dessas experiências. Em resumo, segundo Polanyi, qualquer definição de uma palavra denotando uma coisa, como por exemplo, um objeto, um animal, um sintoma, uma representação, precisa estar vinculada, em última instância, na confiança sobre o apontamento para essa coisa. Esse ato de apontar-mostrar-denominar esconde, para ele, uma lacuna que pode ser preenchida, somente, por um esforço inteligente por parte da pessoa a qual estamos querendo comunicar o que a palavra significa (Polanyi, 1983, p.5).

Quando integramos os significados de um conhecimento tácito de alguém que está querendo comunicá-lo a nós, realizamos "uma modelagem ativa de experiências realizadas visando perseguir o conhecimento" (Polanyi 1983, p.6). Polanyi observa que esse processo nunca é totalmente consciente[7], daí o princípio: sabemos mais do que

---

[6] A terminologia *know what* e *know how* é, comumente, atribuída a Ryle (1949).
[7] Ou seja, uma consciência na qual não se tem uma clara percepção da atividade da mente, mas, também, que não é inconsciente no sentido freudiano; uma consciência que o autor denomina 'subsidiária'.

podemos dizer. Para Jha (1997), o conceito de integração de Polanyi constitui a noção fundamental de sua teoria epistemológica. Segundo ela, esse processo "é mais do que adicionar aspectos e pistas – as pistas precisam ser 'integradas' (reorganizadas inteligentemente) dentro daquilo que estamos buscando reconhecer" (Jha, 1997, p.612, aspas no original). E essa reorganização das partes em relação ao todo, certamente, admite a possibilidade de erro, por exemplo, quando tais pistas são vagas ou incompletas. Por outro lado, Sveiby (1997) reconhece que "um tipo especial de meta-conhecimento é requerido para se obter uma integração; conhecimento sobre conhecimento enquanto elementos integrados. É possível que exista esse meta-conhecimento sem que se conheça seus detalhes" (p.2).

4. A ESTRUTURA DO ATO DO CONHECER

Baseado na subcepção (*subception*), isto é, um processo por meio do qual aprendemos a relação entre dois eventos, ambos conhecidos por nós, mas, somente, sobre um deles podemos falar, Polanyi (1983) elabora seu ponto de vista sobre como adquirimos e usamos nossos conhecimentos. De acordo com o autor, tal estrutura envolve duas coisas ou dois tipos de coisas que ele denomina 'os dois termos do ato do conhecer tácito'. A estrutura básica desse processo inclui os seguintes aspectos:

Aspecto funcional: Como dito acima, o conhecer tácito consiste de duas coisas ou dois termos. Esses dois termos relacionam-se tacitamente do seguinte modo: conhecemos o primeiro termo somente porque somos cientes (alertas) da sua existência para, então, voltarmos nossa atenção para o segundo termo. Segundo Polanyi, essa relação indica, de alguma maneira, que o primeiro termo encontra-se 'próximo de nós', enquanto que o segundo termo 'longe de nós'. Em função disso, o autor denomina o primeiro termo de 'termo proximal' e, o segundo, de 'termo distal'. Nesse sentido, diz Polanyi, enquanto mobilizamos um conhecimento tácito fazemos com que ele se torne uma extensão do nosso corpo tal como um martelo pode ser pensado como sendo uma extensão do nosso braço quando realizamos a tarefa de bater um prego. Mais ainda, quando fazemos isso, conquistamos uma integração – via atribuição de significados – entre particulares de nossos conhecimentos tácitos e a entidade integrada, isto é, aquilo que será constituído conjuntamente por esses dois termos. A lógica 'de-para-integração' que Polanyi propõe para explicar o ato do conhecer tácito resulta numa experiência de interiorização, ou seja, numa realização da aprendizagem e numa manifestação de compreensão (ainda que essa experiência possa admitir erros).

Podemos, então, identificar um conhecimento tácito com um conhecimento subsidiário (termo proximal) – um instrumento prático ou teórico – que mobilizamos para realizar uma tarefa ou conquistar uma compreensão (termo distal). No exemplo da comunicação de um conhecimento tácito envolvendo duas pessoas, como descrito na seção anterior, podemos dizer que a tarefa da primeira pessoa é a de compreender e integrar os significados de um conhecimento tácito da segunda pessoa. Por outro lado, a tarefa da segunda pessoa é a de comunicar um conhecimento tácito à primeira pessoa. Em ambos os casos, as pessoas mobilizam seus conhecimentos tácitos ou subsidiários para, em cada caso, realizar sua tarefa. Nessa atitude de busca por compreensão, por parte da primeira pessoa, e na atitude de comunicar um seu conhecimento tácito, por parte da segunda pessoa, interferirão, por exemplo, seus conhecimentos prévios, os propósitos que os mobilizam nesse processo e as relações que eles serão capazes de estabelecer entre o que já se sabe e o que está sendo compreendido e comunicado, respectivamente.

Polanyi chama a atenção de que essa consciência subsidiária não deve ser identificada, por exemplo, com os conceitos de subconsciente ou pré-consciente da psicologia:

> A relação de pistas em termos daquilo que elas indicam é uma relação lógica similar àquela em que a premissa possui nas inferências esboçadas em sua luz, porém, com a diferença fundamental de que inferências tácitas são esboçadas a partir de pistas que não são explícitas. Elas são informais, tácitas…A inferência tácita…não é o resultado de um argumento...não é uma dedução, mas uma integração. (Polanyi, 1965, p. 2)

Aspecto fenomênico: Esse aspecto estrutural nos dá uma relação do tipo parte-todo entre particulares de nossos conhecimentos tácitos e o objeto-foco de nossa atenção do seguinte modo: podemos dizer que reconhecemos o termo proximal (particulares) de um ato do conhecer tácito na aparência de seu termo distal (objeto foco de nossa atenção). Isso significa que a expectativa que temos de que uma ação será concretizada (ou de que alcançaremos a compreensão do termo distal) possibilita a consciência, pelo sujeito, de que ele integrou elementos particulares de um objeto ainda que ele não possa identificálos, todos, e nem identificar a forma com que realizou essa integração. Nesse sentido um conhecimento tácito não é percebido em si mesmo na medida em que nós o usamos de maneira subsidiária, ou ainda, porque ele não é o foco de nossa atenção. Porém, tornamo-nos conscientes dele, enquanto um conhecimento que possuímos, quando vislumbramos a realização de uma tarefa ou uma compreensão; pela expectativa de que seus particulares provocam em nós quando os vislumbramos projetados em tais realizações. Para Polanyi, esse vislumbre surge repentinamente e instala-se entre os termos proximal e distal do ato do conhecer tácito.

Uma ilustração da relação parte-todo, descrita acima, pode ser vista através do exemplo, dado pelo autor, do ato de leitura de um texto. Quando lemos um texto somos cientes do nosso conhecimento de palavras e regras lingüísticas em termos da compreensão do texto; quando surge uma expectativa da proximidade da compreensão do texto. Nesse caso, embora mobilizemos as palavras ou regras lingüísticas como instrumentos para alcançarmos tal compreensão, nós, também, as reconhecemos no texto em função do que elas significam para nós.

Aspecto semântico: Esse aspecto mostra a diferença entre o significado e aquilo que produz o significado. Para mostrar que tal diferença existe Polanyi toma como exemplo o uso de uma sonda para explorar uma caverna. Segundo ele, qualquer pessoa que usa uma sonda pela primeira vez, para tal fim, sentirá o seu impacto contra seus dedos ou palma da mão. Todavia, quando aprendemos a usá-la, a consciência que temos desse impacto em nossa mão é transformada em uma sensação alocada na extremidade da sonda tocando os objetos que estamos explorando. Esse movimento é interpretado como um esforço que transforma sentimentos de sentido (sensações), inicialmente destituídos de significados, em sensações imbuídas de significados, e isso ocorre, segundo o autor, a alguma distância da sensação original. Desse modo, um conhecimento tácito não possui significado em si mesmo mas, sim, na sua projeção naquilo que é o foco de nossa atenção. Seu significado não está dentro de nós, mas, projetado na entidade integrada. E é através dos significados de nossos conhecimentos tácitos que 'entramos' na aparência da entidade.

Entretanto, o autor observa que existem, pelo menos, duas maneiras de destruir o significado de um conhecimento tácito. A primeira, é tentar escrutinizar, minuciosamente e detalhadamente, todos os particulares que o caracterizam. A segunda, é tentar declarar, explicitamente, a relação entre os particulares. Segundo o autor, quando fazemos isso, os significados dos particulares são dispersos e podemos não recuperá-los em suas formas originais.

Aspecto ontológico: Esse aspecto "nos diz que um conhecimento tácito é um conhecimento de alguma coisa" (p.13). Em outras palavras, Para Polanyi, todo ato do conhecer envolve criar uma ontologia para aquilo que está sendo conhecido. Portanto, o que está sendo conhecido, seja uma tarefa prática, seja um problema intelectual, tomará um *status* de algo que pertence à realidade: uma entidade integrada constituída conjuntamente pelos particulares de nossos conhecimentos tácitos e seus significados. O autor denomina esse processo de 'emergência' e sua função no ato do conhecer é a de produzir inovações fundamentais: à medida que realizamos integrações consecutivas de significados – o que para o autor consiste no processo de aprendizagem – "interiorizamos pedaços do universo e então, o povoamos com entidades integradas" (p.35). Assim, o processo de emergência é identificado com o mecanismo fundamental do desenvolvimento.

Como interpreto Lerman (2002), sua concepção de desenvolvimento, também, está vinculada a sua concepção de realidade. De fato, segundo ele, instrumentos culturais são elementos fundamentais na constituição da realidade pelo indivíduo. Mais do que isso, os modos como a cultura organiza o mundo é internalizada pelo sujeito através de materiais simbólicos e de maneira situada, isto é, dependente do tempo e de aspectos culturais: "É a cultura que oferece ao indivíduo os sistemas simbólicos para a representação da realidade e, através deles, o universo de significados que permite ao sujeito interpretar e organizar os dados coletados das experiências reais no mundo" (p. 103). Como conseqüência, sua concepção de desenvolvimento – *becoming mathematical* – no caso da educação matemática, é sugerida em termos de sistemas simbólicos:

> Aprender matemática ou aprender a pensar matematicamente é aprender a falar matematicamente. Aquilo que constitui uma construção gramatical aceitável, em matemática, é aquilo que é aprovado de acordo com o discurso. Ao longo do tempo, estudos sobre desenvolvimento e progresso na sofisticação da linguagem matemática dos alunos indicam seus *becoming mathematical*. (p. 103)

Note que, para Polanyi, desenvolvimento é mais do que interpretar e organizar dados coletados das experiências reais do mundo, como diz Lerman. Polanyi entende que à medida que conhecemos as coisas, damos uma realidade a elas; um *status* de entidade. E é através dessas entidades que vemos e interpretamos o mundo. Isso significa que o desenvolvimento está estritamente vinculado à criação de uma ontologia pelo sujeito.

Para melhor compreender o que Polanyi diz sobre essa questão, sua concepção de realidade precisa ser esclarecida. Segundo ele, a capacidade de uma coisa (um referencial conceitual, por exemplo) revelar-se de modo inesperado no futuro, significa que a coisa observada possui uma significância que não é exaurida pela nossa concepção de um seu único aspecto. Nesse sentido, o sentimento que temos de que uma coisa possui uma independência e um poder de se manifestar, ainda que não atenda às nossas expectativas, é que a torna real. Diante disso, para Polanyi, mentes e problemas, por exemplo, possuem uma realidade mais profunda do que seixos embora esses sejam admitidos serem mais reais do que os primeiros por serem tangíveis. Como para o autor a significância de uma coisa é mais importante do que sua tangibilidade, coisas abstratas podem ser mais reais do que seixos. Assim, dar um *status* de entidade, por exemplo, a um problema significa atribuir-lhe um significado de independência do nosso conhecimento sobre ele de modo a tratá-lo ou a se referir a ele como algo tão ou mais concreto quanto seixos. Essa concepção, embora extremamente simples e interessante, pode ser polêmica, pois dá abertura para que as pessoas defendam a existência de muitas coisas, como por exemplo, idéias, dogmas e preconceitos. No caso da matemática, a história nos mostra que essa questão tem sido igualmente controversa (Davis e Hersh, 1985; Tymoczko, 1986) e não se esgotará facilmente (Ernest 1991, 1998a; Matthews, 1999; Lomas, 1999; Lakoff e Núñez 2000).

Para finalizar essa seção, gostaria de comentar que Polanyi reconhece a influência da psicologia Gestalt em suas elaborações teóricas. No entanto, o autor enfatiza que tal psicologia falha no que diz respeito à participação ativa do sujeito em atos de compreensão. Por exemplo, os resultados da Gestalt sobre a percepção de uma fisionomia baseiam-se na explicação da existência de um equilíbrio espontâneo dos particulares da fisionomia impressos na retina ou no cérebro do sujeito. Ao contrário, para o autor, tal ação não é espontânea, mas sim, uma integração ativa do sujeito na busca pela compreensão, e que deve ser entendida como um "poder tácito indispensável por meio do qual todo conhecimento é descoberto e, uma vez descoberto, é tomado como verdadeiro" (Polanyi 1983, p.6).

Mais geralmente, Polanyi acredita que tanto a percepção quanto os *insigths* científicos não são inatos, mas, como diz (Jha, 1995), aprendidos

> no sentido de que a capacidade de percepção de formas é desenvolvida na prática durante a maturação, e a capacidade para *insigths* científicos é desenvolvida por meio da participação ativa na comunidade científica. Ele [Polanyi] enfatiza que uma parte essencial do processo de aprendizagem é realizada por "uma forma de vislumbre inteligente similar àquele subjacente ao processo da descoberta [científica]…(Jha 1995, p.56, aspas no original, itálico meu).

5. O ATO DE OCUPAÇÃO

Quando fazemos com que um conhecimento tácito se torne um instrumento (termo proximal) de um ato do conhecer tácito, diz Polanyi, realizamos uma ação mental que é denominada por ele de 'ocupação' (*indwelling*). O autor descreve tal ação através da seguinte metáfora: nós nos ocupamos dos (ou deixamo-nos ocupar pelos) particulares desse conhecimento de modo a incorporá-los em nosso corpo (ou estendendo nosso corpo de modo a incorporá-los). O autor identifica esse processo com a interiorização desse conhecimento. Além disso, para ele, tal processo é subjacente a todo ato do conhecer. Em outras palavras, sempre que buscamos compreender uma coisa, seja ela de qualquer natureza, mobilizamos um conjunto específico de conhecimentos que possuímos de modo a alcançar tal compreensão. Na medida em que tais conhecimentos são usados de maneira subsidiária ou como instrumentos, podemos dizer que nós os interiorizamos. Nesse sentido, a interiorização pode ser interpretada como um processo criativo que dá estabilidade aos conhecimentos que conquistamos.

Para Polanyi, uma outra função da ocupação é a de criar condições para que uma primeira pessoa possa integrar os significados dos particulares de um conhecimento tácito de uma segunda pessoa. Nesse caso, a ocupação pode ser interpretada como sendo um processo de concentração, mais ou menos intensa, por parte da primeira pessoa quando essa está sob um esforço para apreender um conhecimento tácito de uma segunda pessoa. A metáfora que o autor utiliza, aqui, é a de que a primeira pessoa precisa ocupar ou deixar-se ocupar pela mente da segunda pessoa; acompanhar os movimentos dessa mente para que possa 'descobrir' seu conhecimento tácito: "Conhecemos a mente de um jogador de xadrez ocupando -nos dos estratagemas de seus jogos e conhecemos a dor de outra pessoa ocupando-nos de sua face distorcida pelo sofrimento" (Polanyi, 1965, p.3). Entretanto ele observa que, embora possamos integrar com sucesso alguns particulares de um desempenho pessoal (por exemplo, no caso do jogo de xadrez) ou de um estado físico ou mental de uma pessoa (no caso da dor), não podemos ir além do que eles podem nos dizer. Isso significa, que não podemos inferir sobre uma mente através da observação direta de seus trabalhos realizados externamente, na medida em que não a observamos em si mesma. Por outro lado, isso não quer dizer que não podemos obter um entendimento da mente através de um processo de investigação. Todavia, tal investigação consiste, como no caso de uma investigação científica, em retirar ou captar dicas/pistas supostamente acompanhadas da presença de alguma coisa que elas aparentam indicar. E muitas dessas dicas permanecerão ainda obscuras e podem até mesmo ser sublimadas (Polanyi, 1983, p.30).

Essa segunda função da ocupação pode ser estendida a qualquer ato do conhecer independentemente se tal ato envolve somente pessoas. Pensemos, por exemplo, em um problema matemático que estamos buscando compreender. É razoável dizer que a mobilização dos conhecimentos que utilizaremos como instrumentos para compreender e resolver o problema é precedida de um ato de deixarmo-nos ocupar/envolver por ele de modo a permitir que descubramos os segredos que ele esconde por de trás de suas pistas aparentes. Entendo, também, que tal ato será mais ou menos intenso e mais ou menos significativo dependendo da nossa motivação em alcançar tal compreensão.

No caso da linguagem denotativa, podemos dizer que as experiências, sugeridas por Polanyi, para que os alunos possam apreender o conhecimento de seus professores devem ser autênticas, no sentido de que essas proporcionem aos primeiros (alunos) 'ver' os últimos (professores) envolvidos em atividades que lhes exijam o uso de seus próprios conhecimentos tácitos. Usando a metáfora do autor, os alunos precisariam, para apreender tais conhecimentos, lançar mão de um ato de ocupação da mente de seus professores na tentativa de descobrir o que não pôde ser dito enquanto esses estiverem fazendo uso de seus conhecimentos tácitos. Através desse ato de ocupação é possível integrar com uma boa aproximação os significados dos particulares do conhecimento tácito da pessoa que o possui.

6. O PROCESSO MUDANÇA DE FOCO

Voltando à relação 'parte-todo' do ato do conhecer tácito, Polanyi observa que não é possível focarmos nossa atenção nos instrumentos e na tarefa a ser realizada por eles, ao mesmo tempo. Mais do que isso, se mudamos nossa atenção da tarefa em direção aos instrumentos perdemos a noção do todo. Uma mudança de foco desse tipo é identificada, pelo autor, com o efeito mental de desorganização comumente conhecido como auto-conscientização (*self-consciousness*, Polanyi, 1962, p.56, 63). Quando isso ocorre nossa performance tende a ser paralisada, de uma maneira ou de outra, porque os instrumentos não são reconhecidos por nós como instrumentos. Um dos exemplos dados pelo autor para ilustrar tal efeito consiste no caso de um pianista que muda sua atenção da melodia que ele está tocando para o que acontece com seus dedos enquanto ele a toca: o pianista fica confuso e sua performance tende a ser paralisada. Um segundo exemplo, encontra-se no famoso processo 'deu um branco'. Essa forma de auto-conscientização, diz Polanyi, é devida a uma intrigante ansiedade pela qual somos tomados quando dirigimos nossa atenção à próxima palavra, nota ou gesto, que temos que encontrar ou lembrar. Isso destrói nossa noção do todo; do contexto. O 'deu um branco' é eliminado e a fluência é recuperada se deixamos nossa mente levar-se sozinha e operar com uma clara visão da atividade – que estávamos inicialmente interessados – como um todo. Assim, numa mudança de foco tomamos consciência daquilo que éramos até então subsidiariamente cientes (daí o nome auto-conscientização) e, portanto, perdemos seu significado em relação ao todo. Nesse caso, entendo que podemos retornar à nossa performance ou voltar nossa atenção ao todo (ou não), com maior ou menor facilidade. No caso dessa última, pode acontecer que o estranhamento dos instrumentos seja tal que dirijamos nossa atenção para tentar compreendê-los. Sendo tais instrumentos, agora, aquilo que buscamos compreender, mobilizaremos, certamente, outros conhecimentos subsidiários que possuímos para alcançarmos essa nova compreensão. Isso nos mostra, então, um processo dinâmico envolvendo conhecimentos subsidiários e o objeto foco de nossa atenção.

Polanyi (1962) observa que a passagem de uma experiência para o plano operacional, isto é, para o uso de um conhecimento enquanto instrumento, não se dá por meio de meras repetições. Ela "é uma mudança estrutural conquistada por repetidos esforços objetivando a instrumentalização de certas coisas e ações em serviço de algum propósito" (p.61). Isso significa que tal passagem implica num movimento de não-consciência sobre algo em direção à aquisição de uma nova consciência – consciência subsidiária – sobre esse algo e, como conseqüência, na sua interiorização. Assim, se interpretada como uma inovação (emergência), a instrumentalização é uma mudança estrutural vista, não somente, sob o ponto de vista epistemológico, mas também sob o ponto de vista ontológico. De fato, o conceito de emergência de Polanyi assenta-se sobre dois pressupostos básicos (1983, p.34), porém, sofisticados que podem, em linhas gerais, ser assim resumidos: conhecimentos tácitos, isto é, conhecimentos usados subsidiariamente e seus significados projetados na entidade integrada pertencem a níveis distintos de realidade, e são controlados por princípios distintos. Em outras palavras, os termos proximal (conhecimentos subsidiários) e distal (entidade integrada) do ato do conhecer são entidades ontológicas distintas e o comportamento de cada um desses termos não pode ser explicado em termos do comportamento do outro. Segundo o autor, essa idéia pode ser traduzida pela "imagem de um universo preenchido com estratos de realidade, agrupados significativamente em pares de estratos de nível superior e de nível inferior" (p. 35).

A partir dos vários exemplos dados pelo autor para ilustrar essa idéia, minha interpretação é a de que, não é através dos significados dos particulares de um conhecimento tácito – que foram projetados numa entidade – que compreenderemos todos os particulares que caracterizam esse conhecimento. Por outro lado, o comportamento de tais particulares em si, embora contribuam para a aparência da entidade que será constituída conjuntamente por eles e por seus significados, não explica os princípios que regulam essa entidade.

7. O JULGAMENTO DE UMA HABILIDADE

Como dito anteriormente, para Polanyi, a participação do sujeito num ato do conhecer é uma ação que requer habilidade. Em *Personal Knowledge* ele propõe o exame da estrutura da habilidade de uma atividade prática que envolve coordenação motora para, então, examinar a natureza da participação pessoal de um cientista operando sobre a ciência (o que para ele é uma atividade prática, porém, intelectual). Por outro lado, como também já mencionado, o autor entende que parte essencial de qualquer processo de aprendizagem envolve uma participação pessoal do sujeito, similar àquela do cientista, quando esse está praticando ciência. Portanto, examinar a estrutura da habilidade de uma prática envolvendo coordenação motora nos dá elementos para examinar a participação pessoal do sujeito agindo em qualquer outro tipo de prática, por exemplo, a prática matemática:

> A partir da teoria voltamos nossa atenção para as coisas vistas em sua luz, e somos cientes da teoria, enquanto a usamos, em termos do espetáculo que ela serve para explicar. Isso explica porque uma teoria matemática pode ser aprendida somente praticando suas aplicações: seu conhecimento verdadeiro reside em nossa habilidade de usá-la. (Polanyi, 1983, p.16).

Polanyi parte do pressuposto de que "o objetivo de uma performance habilidosa é alcançado pelo cumprimento de um conjunto de regras que não são conhecidas como tal pelas pessoas que as seguem" (1962, p.49). Ele dá alguns exemplos para ilustrar isso: 1) de maneira geral, os nadadores desconhecem os princípios teóricos que os permitem flutuar na água; 2) os ciclistas conseguem se equilibrar numa bicicleta, sem contudo, conhecer os princípios físicos e mecânicos que o mantém em equilíbrio, ainda que eles sigam uma certa regra de deitarem-se para a direita ou para a esquerda quando sentem que devem fazê-lo. Segundo o autor, apesar desse último exemplo dispor de algumas explicações teóricas, existem vários outros fatores que são não declaráveis na formulação dessas regras. Para ele, regras – descrições teóricas ou máximas de uma arte – podem ser úteis, mas não determinam a prática da arte: "elas são máximas que servem para guiar uma arte somente se elas podem ser integradas ao conhecimento prático da arte; elas não podem substituir esse conhecimento prático" (1962, p.50). Nesse sentido, podemos dizer que atividades práticas que envolvem tanto atos físicos quanto intelectuais são, por definição, essencialmente tácitas.

De acordo com Polanyi, um conhecimento desse tipo, ou seja, que não pode ser completamente explicado em termos de seus particulares, pode levar a sérias dificuldades de julgamento quando ou não uma performance é autêntica ou genuína (1962, p.50). Nesse caso, ele ilustra a dificuldade de se julgar por meio de descrições, por exemplo, a qualidade do toque de um pianista. Para o autor, embora tal julgamento ou tentativa de explicar como conhecimentos desse tipo ocorrem passem longe das práticas ou experiências genuínas, ele é necessário e indispensável, e sem o seu exercício constante nenhum cientista ou técnico poderia decidir sobre quais das muitas observações poderiam ser deixadas de lado; sem explicação. Resumindo, ainda que um conhecimento seja tácito, a formulação de juízo sobre ele é fundamental para validá-lo ou refutá-lo. Ou ainda, atividades práticas podem e devem ser avaliadas, embora sejam tácitas.

8. A PARTICIPAÇÃO DO TÁCITO NO PROCESSO DE ARTICULAÇÃO

Polanyi (1962) usa a palavra articulação em um sentido mais amplo do que o comumente usado para se referir, apenas, a reais enunciações da linguagem. Para ele, manejamos símbolos mentalmente; criamos representações internas que podem não se concretizar (ou mesmo não podem), necessariamente, numa forma de representação externa. Em outras palavras, uma articulação pode ocorrer internamente ao sujeito sem que esse consiga (ou mesmo não possa) projetá-la externamente.

Diante disso, o autor sugere que a participação do tácito no processo de articulação, isto é, que o processo no qual o tácito (pessoal) co-opera com o explícito (formal), seja examinado através de três áreas ou domínios nos quais a relação entre pensamento e fala varia de um extremo ao outro, passando por um nível intermediário (1962, p.87). São eles:

Domínio do inefável: o tácito predomina a ponto da articulação ser virtualmente impossível. O sujeito sabe uma coisa, mas só consegue descrevê-la de modo vago; menos preciso do que o usual. Para Polanyi, o inefável pode ocorrer de duas maneiras: a) quando os particulares em si mesmos são reconhecidos como instrumentos e não como objetos focais. Os particulares não são completamente (ou mesmo não são) especificáveis ou expostos; não possuem uma representação externa completa e suas pistas são extremamente vagas e imprecisas. Esse caso ocorre com maior freqüência quando a pessoa está envolvida numa atividade prática (pensar matematicamente, diagnosticar; andar de bicicleta, dentre outras); b) na integração dos particulares, ainda que esses possam ser especificáveis. Por exemplo, no campo de geometria, a pessoa pode saber declarar os critérios de congruência de triângulos sem, contudo, não conseguir integrar os elementos desses critérios numa situação-problema. Nesse caso, Polanyi entende que processos de inferência são necessários para a integração.

Domínio intermediário: o tácito é ou coincide com a informação transportada por uma fala ou texto facilmente inteligível. Essa área relaciona o ato de ouvir/ler uma mensagem/um texto e decifrar o que ela/ele está tentando transmitir. De acordo com o autor, o conhecimento adquirido através de uma mensagem é o significado da mensagem. Nesse caso, aquilo que foi transmitido na mensagem corresponde ao significado que atribuímos a ela. Esse tipo de conhecimento ou significado difere profundamente dos conhecimentos relatados no domínio do inefável naquilo que concerne à sua verbalização. Portanto, o conhecimento tácito comunicado na mensagem manifesta-se, não só, quando ele ultrapassa os limites da articulação interna, mas até mesmo quando ele coincide exatamente com a representação externa dessa articulação. Ou ainda, quando entendemos um texto, a relação entre palavras e pensamento é a mesma.

Domínio da sofisticação: área na qual o tácito e o explícito são independentes. Nesse caso, não é formado um completo entendimento das operações simbólicas que deveria expressar o tácito. Segundo Polanyi, isso pode ocorrer em dois extremos quando: a) cometemos incoerências ou trapalhadas a serem corrigidas mais tarde pelo nosso entendimento tácito; b) estamos sendo pioneiros numa operação simbólica que será aperfeiçoada mais tarde pelo nosso entendimento tácito. Mais precisamente, o autor está se referindo, em ambos os casos, a um estado mental de desconforto diante de um sentimento que temos de que nossos pensamentos tácitos não coincidem com nossas operações simbólicas a ponto de termos que decidir sobre qual dos dois – pensamento tácito ou operações simbólicas – devemos confiar e qual deverá ser corrigido sob a luz do outro. Em relação ao primeiro caso, na medida em que usamos um referencial interpretativo, diz Polanyi, estamos sujeitos a cometer erros (já os animais estão livres disso). Portanto, a lacuna entre o tácito e o articulado externamente pode levar-nos a uma interpretação inadequada ou a outro tipo qualquer de mal entendido. O segundo caso, pode ser exemplificado através da matemática quando se está explorando regiões ainda não exploradas. Segundo o autor, esse formalismo pioneiro por pouco não levou algumas descobertas matemáticas a serem consideradas absurdos no passado. Isso porque tal pioneirismo causa confusões ou estranhamentos na medida em que ele excede os conhecimentos já existentes.

Em qualquer uma das situações, descritas acima, entendo que está presente um julgamento – ou por parte do sujeito que se encontra num dos domínios, ou por parte de uma segunda pessoa que observa a performance de outra pessoa, ou por parte de ambos – que opera tentando ajustar o tácito e o explícito.

9. O SOCIAL NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO PESSOAL

A fim de compreendermos o papel do social na construção do conhecimento pessoal é importante termos em mente a distinção entre os conceitos de 'pessoal' e 'subjetivo' na epistemologia de Polanyi. Isso porque, no passado, cometeu-se o equívoco de que tal epistemologia endereçava-se ao conhecimento subjetivo (Jha 1997, p.630). A diferença entre essas duas formas de conhecimento – pessoal e subjetivo – reside no comprometimento do indivíduo por uma verificação e validação (teste e aceitação pública) de suas premissas ou resultados dentro de um sistema de crenças qualquer. O conhecimento subjetivo não demanda tal necessidade:

> Nossa participação pessoal [num ato do conhecer] é em geral maior numa validação do que numa verificação..[Porém] ambas *verificação e validação* são em qualquer situação reconhecidas como um comprometimento: elas clamam pela presença de alguma coisa real e externa ao indivíduo..experiências *subjetivas* podem somente ser ditas *autênticas*, e autenticidade não envolve um comprometimento no sentido no qual ambas verificação e validação envolvem. (Polanyi 1962, p.202, itálico no original)

Assim, a busca por verificação e, sobretudo, por validação – que leva o indivíduo a transcender sua subjetividade – dá ao conhecimento pessoal um caráter público. Por outro lado, o quanto tal conhecimento assenta-se no social nos é informado através do conceito de tradição, dado por Polanyi.

Polanyi foi um dos precursores do conceito de comunidades de prática, mais particularmente, para o caso da prática científica em meados do século vinte (Jacobs, 2002). Todavia, ele introduziu tal conceito em termos de tradição, um sistema de valores que descreve como o conhecimento é transferido dentro de um contexto social:

> Uma arte que não pode ser especificada, em detalhes, não pode ser transmitida por prescrição, desde que nenhuma prescrição para ela existe. Ela pode ser passada somente pelo exemplo de um mestre para um aprendiz. Isso restringe o âmbito de difusão daquilo que está sendo transmitido. .[por exemplo] enquanto *os conteúdos articulados da ciência* são ensinados com sucesso em todo o mundo, em centenas de universidades, *a não-especificável arte da pesquisa científica* não tem, ainda, penetrado em muitas delas. .Aprender pelo exemplo é submeter à uma autoridade. Você segue seu mestre porque você confia na sua maneira de fazer as coisas mesmo quando você não pode analisar e explicar em detalhes a efetividade dessa maneira de fazer as coisas. .Observando e acompanhando o mestre e emulando seus esforços na presença do seu exemplo, o aprendiz capta inconscientemente as regras da arte, inclusive aquelas que não são explicitamente conhecidas pelo próprio mestre. Essas regras ocultas podem ser assimiladas somente por uma pessoa que se deixa render a tal ponto de, a-criticamente, imitar outra pessoa. Uma sociedade que quer preservar um fundo de conhecimento pessoal precisa submeter-se à tradição. (Polanyi 1962, p.53, itálico no original)

Com base na citação, acima, podemos tecer algumas interpretações. Em primeiro lugar, submeter-se à tradição de uma arte socialmente estabelecida requer uma enculturação por parte das pessoas que ingressam na prática a ela associada. Os indivíduos que se submetem a ou que adotam uma tradição compartilham linguagem, ações, regras, normas e valores. Assim sendo, valores não são subjetivos. De fato, segundo Sveiby (1997, p.4), "a tradição é um sistema de valores que se encontra fora do indivíduo. Ambas linguagem e tradição são sistemas sociais que se ocupam, guardam e transferem o conhecimento da sociedade."

Em segundo lugar, numa tradição há um posicionamento claro entre os participantes que a adotam: uma hierarquia estabelecida socialmente dentro de uma escala aprendiz/mestre. Nesse sentido, os aprendizes são indivíduos que se submetem a uma autoridade – o mestre – numa relação que envolve legitimidade, credibilidade e confiança. Penso que num primeiro momento dessa submissão, a aprendizagem pode ser a-crítica, como diz Polanyi: o aprendiz confia em seu mestre e rende-se aos seus ensinamentos, sem questionamentos, porque atribui a ele uma legitimidade de fazer as coisas. Porém, num segundo momento, o aprendiz é capaz de reconstruir a versão do conhecimento do mestre, bem como de julgar sua competência. Finalmente, quando o aprendiz é capaz de preservar os ideais da tradição ele é, então, liberado: a relação mestre-aprendiz muda ou é suspensa. Assim, a formação de conhecimentos dentro de uma tradição ocorre localmente – relação aprendiz/mestre – e, em grande medida, na atuação profissional. Isso sugere que um indivíduo não é competente *per se*. Ao contrário, é em função de seu papel ou desempenho individual dentro de um contexto social que uma competência lhe será atribuída: o sucesso ou não do indivíduo na comunidade é o que o faz ser reconhecido como competente. Portanto, a tradição não é uma mera faísca que aciona ou estimula o processo de aprendizagem de um indivíduo que a ela se submete. Ela é constitutiva de parte do conhecimento pessoal do indivíduo: o indivíduo adquire parte desse conhecimento por meio de uma imersão na tradição. Isso, por sua vez, implica numa delimitação do processo de aprendizagem: grande parte do conhecimento tácito de uma arte é preservada, somente, numa tradição. Acredito que isso não deve significar, contudo, que uma experiência matemática autêntica[8], por exemplo, não possa ocorrer num contexto fora da comunidade matemática.

Por outro lado, algumas limitações do conceito de tradição de Polanyi devem ser observadas. Uma relaciona-se ao fato de que Polanyi parece ver a tradição como um processo no qual o mestre é sempre uma pessoa mais velha do que o aprendiz. Segundo Sveiby (1997), essa concepção é coerente com a maioria das profissões até os anos 70, porém, atualmente não. Outra observação relaciona-se à não problematização, por parte de Polanyi, por exemplo, das interações sociais entre mestre e aprendiz e entre aprendizes. Na sua descrição de tradição parece que o processo de aprendizagem se dá em 'mão única': na direção do mestre para o aprendiz.

Salvo as observações, acima, e outras que não fui capaz de perceber, tal descrição é muito similar às atuais caracterizações de comunidades de prática, por exemplo, àquela dada por Winbourne e Watson (1998):

> 1. Os participantes, através de suas participações na prática, criam e encontram nela suas identidades.
> 2. Uma comunidade de prática tem que ter algum tipo de estrutura social na qual seus participantes possam posicionar-se numa escala aprendiz/mestre.
> 3. Tal comunidade possui um propósito.
> 4. Nela são compartilhados modos de comportamento, linguagem, hábitos, valores e ferramentas de uso.
> 5. A prática é constituída pelos participantes.
> 6. Todos os participantes vêm a si próprios engajados, essencialmente, na mesma atividade. (p. 94)

[8] Isto é, experiências que requerem a participação do sujeito em atividades envolvendo formulação e avaliação de problemas, questões, exemplos, conjecturas, conclusões, argumentação e conversação.

O item 6, da citação acima, sugere, ao contrário do que Polanyi parece sugerir, que a aprendizagem dentro de uma comunidade de prática segue múltiplos caminhos: todos os seus participantes possuem participação ativa na prática no sentido de que uns aprendem com os outros.

De maneira geral, vejo o conceito de tradição de Polanyi contendo elementos bastante similares com aqueles presentes nas perspectivas de aprendizagem situada no campo da educação matemática (Lave, 1988; Lave e Wenger, 1991; Greeno, 1997; Watson, 1998; Wenger, 1998; Cobb e Bowers, 1999; Boaler, 2000a; Lerman, 2001, 2002). A noção central dessas perspectivas é que a aprendizagem de parte do conhecimento não pode ser desatrelada do seu contexto de origem e emprego ou uso. No caso da tradição, tal conhecimento corresponderia ao conhecimento tácito. Mas isso será discutido mais adiante, em detalhes.

10. COMENTÁRIOS

Como se pode ver, as idéias de Polanyi apresentadas nesse capítulo são complexas o bastante para que sejam exauridas numa única seção de comentários. Ao longo desse trabalho de tese, observações e interpretações dessas idéias serão desenvolvidas. Todavia, acredito ser pertinente tecer alguns comentários preliminares que ajudarão o leitor no prosseguimento da leitura desse trabalho. Em primeiro lugar, é importante notar que Polanyi não faz um único uso da palavra 'tácito'. De fato, ao descrever a estrutura do ato do conhecer, cada um dos aspectos – funcional, fenomênico, semântico e ontológico – dessa estrutura estabelece níveis nos quais a palavra possui diferentes significados: em relação ao aspecto funcional, um conhecimento tácito é um instrumento prático ou intelectual[9]. Em relação ao aspecto fenomênico, esse conhecimento é parte de um todo. Um conhecimento tácito é um significado se referido ao aspecto semântico, e uma entidade tão ou mais concreta do que seixos se referido ao aspecto ontológico. Além desses, com base no argumento de

[9] Nesse caso, vimos que o uso da palavra 'tácito' está estritamente vinculado com processos de aprendizagem (*tacit knowing*). Por essa razão, tal aspecto é conhecido como 'a versão psicológica da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito' (Wigner and Hodgkin, 1976; Fischbein, 1989; Sternberg, 1995; Frade and Borges, 2002).

Polanyi (1969a, p.144) de que todo conhecimento ou é tácito ou é construído a partir de conhecimentos tácitos, podemos fazer um uso da palavra 'tácito' e da palavra 'explícito' para classificar um aspecto ou componente de uma determinada prática (andar de bicicleta, nadar, ler, escrever, ensinar, reconhecer uma fisionomia, compreender uma atitude de outra pessoa, resolver um problema matemático) quanto à sua natureza. Em outras palavras, podemos usar as palavras 'tácito' e 'explícito' como opostas no seguinte sentido: dados uma certa prática e um componente (uma regra, um processo, um conceito, um valor, uma ação) dessa prática, a palavra 'tácito' refere-se àquele componente que não pode ser ou que pode ser parcialmente representado por proposições ou declarações. Ao contrário, a parte do componente que pode ser representada por proposições ou declarações é chamada explícita. Desse modo, o tácito e o explícito são dimensões ontológicas distintas, porém, complementares de um mesmo componente de uma prática.

Em segundo lugar, cabe lembrar que a epistemologia de Polanyi procura explicar como aprendemos novos conhecimentos sejam eles explícitos (por exemplo, conhecimentos teóricos), sejam eles tácitos. Mais ainda, como vimos, o processo do conhecer é o mesmo para ambos os conhecimentos. No entanto, o autor observa que conhecimentos teóricos, tais como, definições e inferências explícitas operam com um mínimo de 'ocupação' (*indwelling*); de esforço mental. Isso não muda o fato de que toda declaração ou argumento explícito origina-se de uma experiência que é conquistada pelo ato de ocupação (Polanyi 1969b, p.4).

Em terceiro lugar, no caso particular do conhecimento matemático, Polanyi nos diz que saber matemática consiste, essencialmente, em saber usar esse conhecimento. E isso é uma habilidade. Além disso, a aprendizagem matemática dá-se na direção do tácito para o explícito: a formalização de relações entre entidades matemáticas emerge a partir do nosso conhecimento tácito sobre elas. Isso significa que o desenvolvimento do conhecimento matemático se dá, em parte, por meio da aquisição da linguagem matemática, como bem observou Lerman (2002). Porém, Polanyi diz mais do que isso: a linguagem matemática é um estágio posterior ao ato do conhecer tácito. No âmbito educacional, podemos, então, dizer que um objetivo fundamental do ensino de matemática consiste em aproximar a articulação interna do aluno, gradativamente e ao máximo possível, da área de coincidência do tácito com o explícito. Entretanto, pelo que foi discutido nesse capítulo, explicitar um conhecimento não é sempre possível (em relação à matemática, isso será melhor discutido no próximo capítulo). Por exemplo, no caso em que algumas entidades matemáticas possuem caracterização e relevância em termos de denominações (entes geométricos ou símbolos, por exemplo) Polanyi diz que essas entidades podem ser aprendidas, em última instância, na confiança dos alunos em tais denominações. No caso em que os conhecimentos matemáticos estão relacionados com o uso de conhecimentos e, portanto, são tácitos, o autor nos diz que isso não os impede de serem comunicados ou validados. Nesse caso, os alunos precisam ser incentivados a desenvolver métodos para que possam se expressar. O mesmo vale para os professores. Tentar explicitar tais conhecimentos, ainda que seja difícil, fornece pistas que podem ser apreendidas e integradas para que se obtenha uma razoável aproximação desses conhecimentos.

Em quarto lugar, sob o ponto de vista metodológico, alguns processos descritos por Polanyi podem ser extremamente úteis. São eles: ocupação, mudança de foco, emergência e articulação (segundo as três áreas de co-operação do tácito com o explícito: domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação). Tais processos podem ser vistos, metodologicamente, como evidências de momentos de mobilização de conhecimentos tácitos.

Por fim, gostaria de enfatizar que, segundo Polanyi, o conhecimento pessoal é um comprometimento intelectual, ou seja, a aprendizagem é, em última instância, compromisso do aprendiz. Isso não retira, no entanto, a responsabilidade do professor no processo de aprendizagem do aluno: o conhecimento pessoal do professor – distribuído e compartilhado no ato de educar – é, também, um comprometimento intelectual.

CAPÍTULO II

A VISÃO DE ERNEST DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Nesse capítulo discorro sobre aspectos da visão construtivista social do conhecimento matemático do filósofo inglês Paul Ernest[10]. Mais precisamente, veremos que, para ele, a prática matemática é uma prática social e, como conseqüência, o conhecimento nela produzido é multidimensional no sentido de que ele envolve componentes de domínios distintos – o cognitivo, o social, o de crença e o de valores – e de diferentes naturezas – uns são mais comunicáveis ou mais passíveis de explicitação do que outros.

Assim sendo, na primeira seção do capítulo apresento a concepção de Ernest do que seja uma prática social. Para tal, mostro como essa concepção encontra-se inserida em sua filosofia construtivista social da matemática. Como não é objetivo desse trabalho discorrer, em detalhes, sobre tal filosofia, apresento-a, apenas, em sua visão geral e a partir de seus principais influenciadores: Vygotsky, Wittgenstein e Lakatos[11]. Na segunda seção, procuro mostrar como Ernest vê as participações do tácito e do explícito acomodadas numa epistemologia naturalística[12] da matemática vista como uma prática social. Na terceira seção, apresento o modelo de Ernest do conhecimento matemático, segundo seus componentes tácitos e explícitos. Além disso, interpreto esse modelo quando comparado com alguns aspectos da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito, bem como delimito o sentido no qual o conhecimento matemático

---

[10]Na *homepage* pessoal de Ernest <www.ex.ac.uk/~PErnest/> o leitor pode obter boas indicações do envolvimento do autor na educação matemática e na filosofia da educação matemática.

[11] Ao fazer isso, reconheço o risco de apresentar uma exposição concisa que não faça jus ao caráter original, integrado, bem estruturado, erudito e consistente do trabalho de Ernest. Mas essa exposição é necessária para que um leitor não muito familiarizado com o trabalho do autor não seja levado a um entendimento equivocado de que a concepção da matemática de Ernest é estática ou restringe-se, apenas, ao modelo do conhecimento matemático que ele propõe. Ao contrário, esse modelo emerge da sua visão da prática social da matemática.

[12]Isto é, uma epistemologia que leva em conta a natureza do conhecimento matemático.

escolar se aproxima do modelo. Na quarta e última seção do capítulo, identifico algumas idéias construtivistas sociais no ensino e aprendizagem da disciplina.

1. A PRÁTICA DA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO COMO UMA PRÁTICA SOCIAL, SEGUNDO ERNEST

Ao longo do curso da história da filosofia e da epistemologia o conhecimento matemático foi visto como um corpo de conhecimentos infalíveis longe de serem extraídos de quaisquer valores humanos[13] (Confrey, 1981; Kitcher, 1984; Davis e Hersh, 1985; Tymoczko 1986; Ernest, 1991, 1998a; Romberg, 1992). A dimensão social era um contingente, um fato empírico: o 'social' era reconhecido ma is como um meio de divulgação e validação do conhecimento matemático produzido individualmente ou de transmissão desse conhecimento de uma geração à outra do que, propriamente, um fenômeno fundamental da epistemologia.

Com os avanços dos estudos sobre a compreensão do conhecimento, em meados do século XX, configura-se na epistemologia a necessidade de se considerar a dimensão social no desenvolvimento da matemática. No que se refere à filosofia, constata-se um crescente interesse de filósofos da matemática de incorporar às questões tradicionais da disciplina perspectivas sociais para descrever a prática dos matemáticos. Dentre algumas dessas perspectivas podemos citar: teorias de linguagem, história da matemática, aspectos evolucionários da epistemologia e abordagens naturalísticas, as quais podem ser encontradas nos trabalhos de Wittgenstein (1995a, 1995b), Lakatos (1982, 1986), Kitcher (1984), Davis e Hersh (1985), Putnan (1986), Tymoczko (1986),

---

[13] Tal concepção é conhecida na filosofia recente da matemática como 'absolutista' (Confrey 1981, Ernest 1991, 1998a). Ernest inclui, nessa concepção, as correntes filosóficas platonista, logicista, formalista e construtivista da matemática. Apesar das divergências filosóficas no que se refere, por exemplo, à realidade dos objetos matemáticos e à maneira pela qual os resultados matemáticos são obtidos, tais correntes compartilham algumas características comuns: a) a ênfase do conhecimento matemático está na sua forma, nos seus fundamentos e na sua justificação; b) a gênesis do conhecimento, em geral, é assunto da psicologia e das ciências sociais; c) o conhecimento matemático é tratado como se existisse independentemente de contextos culturais, sociais ou políticos (nenhuma dessas correntes, pelo menos, abordou tais questões. Segundo Ernest (1991) uma exceção parcial pode ser feita à corrente construtivista que reconhece, ainda que de modo estilizado, um agente do conhecimento). Diante disso, a missão da filosofia da matemática era a de estabelecer a certeza desse conhecimento. Deve-se, contudo, não

e outros. Todos esses filósofos, de uma maneira ou de outra, vêm o conhecimento matemático como um construto social e, portanto, falível e aberto à revisão como qualquer outra atividade humana[14].

Em relação aos filósofos mencionados, no parágrafo acima, Wittgenstein e Lakatos merecem destaque no que se refere às influências exercidas nas raízes da filosofia construtivista social da matemática elaborada por Ernest (1990,1991, 1998a). Com base na explicação da natureza do conhecimento matemático em termos de suas bases lingüísticas, de acordo com Wittgenstein, e no caráter dialético da gênesis do conhecimento matemático, segundo Lakatos, Ernest fundamenta os pilares de sua filosofia. Isso não significa que elementos de outras perspectivas filosóficas sociais (até mesmo de algumas absolutistas) e de outras disciplinas que, paralelamente à filosofia, também abordaram a matemática socialmente (como por exemplo, a psicologia, a sociologia e os estudos culturais), não tenham sido incorporados na filosofia do autor. Por exemplo, o modelo do conhecimento matemático, proposto por Ernest, que apresento nesse capítulo é baseado na caracterização de Kitcher (1984) da prática matemática.

No que se refere à psicologia, Ernest adota o nome ‘construtivismo’ na sua filosofia para enfatizar a concepção de que qualquer "conhecimento não é passivamente recebido, mas ativamente construído pelo sujeito cogniscente" (1990, p.3). De maneira geral, as diversas correntes de pensamento que se denominam ou que são consideradas construtivistas sociais compartilham a idéia de que a dimensão social influencia, de algum modo, o desenvolvimento do indivíduo naquilo que concerne à construção de significados em resposta às experiências em contextos sociais.

Nas primeiras versões da filosofia construtivista social da matemática de Ernest (1990, 1991), o nome ‘construtivismo social’ traduz uma tentativa do autor de conciliar a teoria cognitiva da mente, conforme o construtivismo radical de von Glasersfeld (1984, 1992), porém, acrescida de uma ênfase na aquisição e uso da linguagem, e a

---

confundir a corrente construtivista da filosofia da matemática com as correntes da psicologia ou pedagogia construtivistas.

[14] Tal concepção é conhecida na filosofia como ‘falibilista’. No tratamento dessa questão, Confrey (1981) distingue as concepções absolutista e ‘falibilista’ da matemática segundo um paralelo entre essas e a teoria de mudança conceitual na filosofia da ciência.

teoria social ‘falibilista’ da matemática originada com Wittgenstein, Lakatos e outros. Já em sua versão atual (1994,1998a), o nome ‘construtivismo social’ expressa a posição do autor em favor da teoria Vygotskiana da mente (Vygotsky, 1984, 1987). Isso significa que, num dado momento, Ernest abandona a idéia de priorizar aspectos individuais da construção do conhecimento, na qual as interações sociais desempenham um papel periférico, para advogar que todo aspecto da aprendizagem humana é inerentemente social, isto é, social e nada mais que isso[15]:

> Essa abordagem [se referindo à versão atual de sua filosofia] vê os sujeitos individuais e o terreno do social como indissoluvelmente interconectados, com os sujeitos humanos formados através de suas interações uns com os outros (como também por meio de seus processos individuais) em contextos sociais. Essa versão do construtivismo social não encontra, subjacente a ela, a metáfora para a mente individual totalmente isolada. (Ernest, 1994, p.6)

Por outro lado, os contextos sociais aos quais Ernest refere, acima, são explicados em termos dos conceitos de ‘jogos de linguagem’ e ‘formas de vida’ de Wittgenstein: “Esses contextos são formas de vida compartilhadas e, inseridos nelas, jogos de linguagem compartilhados (Wittgenstein)..Essa versão do construtivismo social [é delineada] sob a metáfora da conversação[16], constando de pessoas em interações linguísticas de significados e extra-linguísticas [isto é, tácitas]”. (Ernest, 1994, p.6)

Na medida em que tais conceitos espelham a representação do que seja uma prática social, segundo Wittgenstein, conclui-se que o entendimento de prática social de Ernest, em particular, a prática matemática é uma forma de vida na qual compartilha-se jogos de linguagem. De fato, a partir do conceito de Wittgenstein de que o significado de uma palavra está no uso dessa palavra numa certa linguagem, Ernest diz que jogos de linguagem podem ser identificados com contextos nos quais uma palavra pode possuir

---

[15] Ernest muda sua visão de que interações sociais são meros dispositivos ou estimuladores do processo interno de construção de significados do indivíduo, para a visão de que pensamentos, raciocínios e significados são produtos de atividades sociais.

[16] O conceito de conversação para Ernest (1998a) tem um sentido mais amplo do que aquele atribuído, somente, à imediata conversação entre duas ou mais pessoas ‘face a face’ comunicando-se por meio da fala ou símbolos. O autor enfatiza três tipos de conversação: *conversação intrapessoal*, na qual o pensamento é um discurso silencioso de uma pessoa consigo mesma; um diálogo mental carregado pelo passado dessa pessoa e seu contexto social; *conversação interpessoal*, na qual a matemática é um ‘jogo de linguagem’ inserido numa ‘forma de vida’ *a la* Wittgenstein; *conversação cultural*, na qual o leitor interroga um texto como se estivesse engajado numa conversação (Ernest 1998b, cap. 7, Selden e Selden 1996).

significado. Por outro lado, uma forma de vida é uma prática humana vivida e estabelecida socialmente na qual os indivíduos que dela participam compartilham propósitos comuns, regras implícitas, padrões de comportamento e jogos de linguagem (Ernest, 1998a, p.69).

A influência de Wittgenstein na filosofia de Ernest vai além dos meros conceitos de jogos de linguagem e formas de vida para explicar sua concepção de prática social. Ernest adota as fundações epistemológicas de Wittgenstein para a matemática em termos das convenções sociais, normas, padrões vividos de comportamento, incluindo aqueles aceitos socialmente acerca do uso da linguagem, para fundamentar a base social-epistemológica de sua filosofia construtivista social (Ernest 1998a, p.134-135). Desse modo, para Ernest, a objetividade é explicada em termos sociais; o conhecimento objetivo[17] é aquele intersubjetivo e social, ou seja, aquele que é compartilhado publicamente (em jogos de linguagem inseridos em formas de vida):

> O social consiste de seres humanos agrupados com seus padrões de interação, o uso mútuo de símbolos compartilhados, porém sempre parcialmente negociados, e conjuntas formas de vida..O social é mais do que somente a soma dos indivíduos, na medida em que eles estão engajados numa gama de práticas compartilhadas, aprendendo e usando instrumentos e artefatos, e tomando parte numa conversação ..E por causa desse aspecto compartilhado, com toda a sua complexidade e propriedades constitutivas dos seres humanos, ele [o social] não pode ser reduzido a um único indivíduo. Portanto, o conhecimento objetivo que assenta-se no social é baseado no uso da linguagem compartilhada, em regras e entendimentos, inseridos em formas de vida compartilhadas. (Ernest 1998a, p.146)

Como conseqüência, segundo tal filosofia, o desenvolvimento do conhecimento matemático se dá, em parte, por meio da aquisição da linguagem matemática. Além disso, do mesmo modo que a objetividade do conhecimento matemático é social, os objetos matemáticos, também, o são. Em outras palavras, segundo o construtivismo social de Ernest, o discurso da matemática cria um domínio cultural que determina a natureza e existência dos objetos matemáticos[18]:

---

[17] Note que o conceito de objetividade de Ernest é distinto do de Polanyi. Como vimos, a objetividade para Polanyi reside no 'pessoal', ou seja, ela é explicada em termos de um comprometimento pessoal do indivíduo que o faz transcender sua subjetividade para buscar a universalidade.

[18] Como interpreto Polanyi, ele também atribui a existência e realidade da ciência ao ambiente no qual o 'idioma científico' é compartilhado. No artigo *The Stability Of Beliefs* (1952), o autor argumenta que a linguagem é um 'idioma de crenças'; um veículo que transporta uma visão de mundo a qual, por sua vez, aparece implícita no vocabulário e estrutura desse idioma. Nesse sentido, não é que a ciência seja verdadeira porque ela explica fenômenos da realidade; ela é um sistema de crenças, com idioma (ou

> Platonismo e realismo em matemática oferecem uma explicação de um ambiente autônomo dos objetos matemáticos. Os objetos lá encontrados (lá projetados pela imaginação, conforme o construtivismo social) tem uma aparente – porém não convincente – estabilidade, "solidez", autonomia. O argumento que defendo..é que os objetos da matemática, como também os teoremas e outras expressões do conhecimento matemático, são construtos culturais..a ontologia da matemática é dada pelo ambiente discursivo da matemática, o qual é povoado por objetos culturais que possuem uma existência real nesse domínio, tal como o dinheiro a possui no domínio das relações econômicas humanas. (Ernest 1998a, 202-203, aspas no original)

No que se refere à Lakatos, sua influência na filosofia de Ernest encontra-se na gênese do conhecimento matemático e na lógica da descoberta matemática. No livro *Pruebas y refutaciones* (1982), Lakatos descreve um ambiente hipotético de sala de aula onde se desenvolve todo o processo de elaboração intersubjetiva pelo qual passam uma afirmação e um conceito matemático antes de atingirem sua maturidade matemática final. Nesse ambiente formado por uma intensa interação dialógica entre professor e alunos, repleto de dúvidas, hipóteses, conjecturas e refutações, Lakatos enfatiza o caráter dialético da matemática desafiando a concepção formalista de que todo o conhecimento matemático nasce dos princípios de um sistema formal. Além disso, extrai-se de seu trabalho que o conhecimento matemático está longe de ser um produto de idéias isoladas[19]. Segundo Ernest, isso traduz o papel essencialmente social e dialético do processo de criação do conhecimento matemático, bem como de sua consistência (Ernest 1998a, p.117, p.134-135).

Diante do exposto, como então as idéias de Wittgenstein e de Lakatos se articulam para formar os pilares que sustentam as bases da filosofia de Ernest? Como vimos, sob o ponto de vista epistemológico, fenômenos sociais, tais como, linguagem, negociação, conversação e grupos de aceitação – *a la* Wittgenstein – ocupam um papel fundamental na filosofia da matemática de Ernest (1998a). Porém, a seu ver, tais fenômenos não podem ser explicados em termos puramente individuais ou objetivos; o conhecimento matemático origina-se tanto de conhecimentos subjetivos[20] quanto de

---

discurso) próprio, da qual pessoas chamadas 'cientistas' compartilham suas premissas. A ciência é verdadeira por ser uma crença compartilhada num idioma e os poderes interpretativos de seus referenciais conceituais são, para as pessoas que dela participam, evidências de verdade e realidade desses referenciais.

[19] De acordo com Davis e Hersh (1985), a influência das idéias de Lakatos levou a filosofia e a educação matemática modernas a trilharem novos rumos na medida em que valoriza a prática matemática, revelando todas as imperfeições inerentes a qualquer atividade humana, e o conhecimento matemático informal.

[20] Para Ernest, a imaginação e intuição matemáticas emergem da capacidade humana de construir e de recordar ou recuperar mundos matemáticos imaginados. E são as práticas discursivas culturais,

conhecimentos objetivos, tal como na dialética da descoberta matemática, segundo Lakatos. A teoria construtivista social da matemática de Ernest procura explicar ambos os conhecimentos subjetivo e objetivo, bem como descrever os mecanismos através dos quais essas duas formas de conhecimento se originam, contribuindo uma para a renovação da outra. Em linhas gerais: o conhecimento subjetivo – a criação pessoal de um indivíduo – é colocado em público sob a forma de uma nova proposta, argumento ou texto. Esse conhecimento passa por um processo de escrutínio e, muitas vezes, de reformulação por parte da comunidade matemática. Uma vez aceito pela comunidade, ele é admitido como um novo conhecimento matemático que será incluído no corpo de conhecimentos matemáticos objetivos e aceitos. O conhecimento objetivo é, então, internalizado e reconstruído pelos indivíduos para tornar-se um conhecimento subjetivo do indivíduo. Usando esse conhecimento, os indivíduos criam e colocam em público um novo conhecimento matemático, desse modo, completando o ciclo. Segundo Ernest, a conversação interpessoal e a negociação desempenham um papel fundamental nos estágios relativos aos processos de escrutínio público e reformulação do conhecimento do indivíduo e de reconstrução, pelo indivíduo, do conhecimento matemático objetivo (Ernest, 1998a, p.242-244).

A ênfase social dada por Ernest a sua filosofia da matemática a tem levado a uma caracterização relativista, por exemplo, a uma sugestão de que a matemática não é uma disciplina estável, pois é um conhecimento dependente de acordos e aceitações de um grupo particular de pessoas em um tempo particular, como o fez Matthews (1999). Ou ainda, como o faz Lomas (1999), a uma sugestão de que os objetos matemáticos (conceitos, axiomas, teoremas, etc) não possuem estabilidade uma vez que, para Ernest, a existência desses objetos é determinada por acordos e aceitações e, portanto, são invenções humanas. Contrário a posição de Ernest, Lomas se apóia na corrente filosófica platonista para argumentar que a estabilidade de alguns objetos matemáticos deriva da confiança que temos em nossa intuição sobre eles. E essa intuição não é subjetiva. Além disso, ele se apóia em Aristóteles para discordar de Ernest que é o discurso da matemática que determina a realidade de seus objetos. Para Lomas, os exemplares concretos de vários desses objetos no mundo ao nosso redor é o que os torna

---

apropriadas pelos indivíduos, que fornecem os recursos para imaginar e intuir matematicamente (1998a, p.219).

real. E, somente, após o reconhecimento de que tais objetos necessitam ser investigados é que uma linguagem precisa, para explorá-los, seria desenvolvida.

Ernest reconhece que sua filosofia é, de fato, epistemológica e ontologicamente relativista, porém, formulada numa forma de relativismo defensável. Por essa razão, o autor antecipa em seu livro *Social Construstivism as a Philosophy of Mathematics* (1998a) uma resposta à essas críticas. Muito brevemente e em linhas gerais, Ernest se posiciona em relação a essa questão não elaborando uma caracterização própria de relativismo na qual sua posição seja contemplada completamente. Ele usa caracterizações de relativismo de outros autores, como por exemplo, Perry (1970, em Ernest, 1998a, p.248-249) e Harré e Krausz (1996, em Ernest, 1998a, p.249) para argumentar o quanto sua postura relativista rejeita ou se aproxima dessas caracterizações. Por exemplo, em relação às duas formas de relativismo – multiplicidade e relativismo contextual – descritas por Perry, Ernest entende que a arbitrariedade de pontos de vistas e ausência de julgamentos em detrimento de escolhas racionais e acordadas numa 'forma de vida' está subentendida na primeira forma. Por essa razão, ela é insustentável e não representa o relativismo epistemológico adotado pelo construtivismo social. Por outro lado, ele reconhece que o relativismo contextual se aproxima de sua posição, dado que, epistemologicamente, essa segunda forma reconhece a pluralidade de pontos de vistas numa 'forma de vida'. Mas, nesse caso, conhecimentos, justificações e conclusões são vistos como dependentes do contexto e são avaliados ou justificados dentro de sistemas de princípios ou regras estabelecidos por uma 'forma de vida'. Assim, no relativismo contextual existe uma base subjacente para conhecimentos, escolhas racionais e julgamentos; uma base contextual-relativa e, não, absoluta ou anárquica. Com relação a sua posição ontológica-relativista, Ernest enfatiza que os objetos matemáticos são objetos discursivos, na medida em que sua existência não possui nenhum significado fora das conversações humanas nas quais eles figuram (p.255).

2. O TÁCITO E O EXPLÍCITO NO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Uma das características comuns compartilhadas pelas correntes filosóficas tradicionais da matemática encontra-se na ênfase dada à forma, aos fundamentos e à justificação[21] do conhecimento matemático. Sob o ponto de vista epistemológico, isso pressupõe que o conhecimento matemático, como um todo, pode ser representado por um conjunto de sentenças formuladas explicitamente e quanto mais esse conhecimento puder ser formalizado, mais conhecimento matemático é produzido. Ao contrário, se a produção do conhecimento matemático é vista como uma prática social, em seu sentido mais amplo, sua epistemologia precisa acomodar tanto os componentes relativos a sua justificação quanto aqueles relativos à sua descoberta. Ernest (1998a) acredita que a prática matemática envolve não só o conhecimento de proposições ou declarações (*know what*), mas sobretudo, conhecimentos práticos, habilidades, disposições (*know how*) que não podem ser transmitidos na forma de regras ou proposições, ainda que possam (ou não possam), em última instância, serem assim representados:

> A motivação para incluir "*know how*" bem como conhecimentos proposicionais como parte do conhecimento matemático é que isso explica o entendimento humano, a atividade, a experiência para fazer ou justificar a matemática – em resumo, o *know-how* matemático. Muito do que é aceito como conhecimento matemático consiste em ser capaz de realizar certos procedimentos ou operações simbólicas ou conceituais. Saber o algoritmo da adição, a prova por indução, ou integrais definidas é saber realizar as operações envolvidas e não meramente ser capaz de declarar certas proposições. Portanto, o que um indivíduo sabe de matemática, além dos conhecimentos proposicionais declarados publicamente, inclui seu *know-how* matemático, e essa última categoria precisa ser acomodada numa epistemologia naturalística adequada da matemática. (Ernest 1998a, p.136, aspas no original)

Ernest identifica esse *know-how* com o conceito de conhecimento tácito, segundo Polanyi (1962), Wittgenstein (1995) e Khun (1998), e defende que esse conhecimento é condição necessária para que o conhecimento explícito (*know what*) seja desenvolvido, confirmado ou justificado. Em relação à justificação de conhecimentos tácitos, ele argumenta o seguinte: na medida em que um conhecimento é tácito, sua justificação, ou pelo menos parte dela, também o é, sob pena de contradição. Isso significa que o reconhecimento de conhecimentos tácitos ou a formulação de juízo sobre eles não pode se dar, completamente, por meio de explicitações. Ernest advoga que a validade de um conhecimento tácito é dada em termos de performance:

> a validade de um conhecimento tácito será demonstrada implicitamente pela participação bem sucedida de um indivíduo em alguma atividade social ou 'forma de vida". Entretanto, a justificação não precisa ser tácita em todos os casos. Por exemplo, o conhecimento tácito de um indivíduo acerca da língua inglesa é aceito como sendo

[21] A palavra 'justificação' deve ser, aqui, entendida como a entende Confrey (1981): a aceitação pública de argumentos.

> justificado e validado de acordo com as normas públicas de gramática correta, significado e uso da língua. Assim, a produção da fala de uma pessoa de uma suficientemente ampla variedade de declarações apropriadas em um contexto pode servir como uma garantia que essa pessoa possui o conhecimento do inglês. O know-how prático é também validado em termos de performance pública e demonstração. Conhecer uma linguagem é ser capaz de usá-la para se comunicar ..[Tal validação] é uma validação mais fraca do que uma prova matemática, pois nenhum número finito de performances pode exaurir todos os possíveis resultados de um conhecimento tácito como uma disposição..Portanto, estou reivindicando que conhecimentos tácitos podem ser defendidos como conhecimentos objetivos e aceitos uma vez que eles são suportados por alguma forma de justificação ou validação (possivelmente tácita) da qual o conhecedor ou outro juiz de competência está, ou pode tornar-se, ciente. (Ernest 1998a, p.138, aspas no original)

Além das classificações dicotômicas: conhecimento explícito × conhecimento tácito ou pessoal (Polanyi 1962, Khun 1998), conhecimento explicitamente declarado × conhecimento implícito em jogos de linguagem e formas de vida (Wittgenstein, 1995a), conhecer o que (*know what*) × conhecer como (*know what*) (Ryle 1949), já mencionadas nesse trabalho, Ernest (1998b) sugere, ainda, que conhecimentos matemáticos tácitos e explícitos podem ser, também, entendidos em termos das seguintes classificações já conhecidas na literatura da educação matemática: entendimento conceitual × entendimento procedimental (Skemp 1976, Mellin-Olsen 1981); entendimento relacional × entendimento instrumental (Hiebert e Lefevre 1986) e conhecimento explicito × conhecimento implícito (Tirosh, 1994). Na sua opinião, o primeiro termo de cada par dessas dicotomias corresponde ao conhecimento explícito enquanto que o segundo termo corresponde ao conhecimento tácito.

Em relação aos modos através dos quais os conhecimentos são transferidos numa forma de vida, Ernest adota, como Polanyi, na minha opinião, uma posição 'parcialmente situada': parte de conhecimentos tácitos pode ser adquirida, somente, através da participação em jogos de linguagem e formas de vida apropriados. Ele diz ainda que, enquanto conhecimentos explícitos de diferentes culturas são, facilmente, inter-transladados, conhecimentos tácitos não o são, completamente, por definição. Para que fossem, primeiramente, eles teriam que se tornar explícitos. Mas, na medida em que isso só pode ser feito parcialmente, existirão sempre resíduos desses conhecimentos que permanecerão confinados na forma de vida que lhes deu significado. Nesse sentido, Ernest conclui que o social é irredutível, portanto, não pode ser reduzido ao discurso ou conhecimento (Ernest 1998a, p.250-251).

3. O MODELO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Nas seções anteriores, vimos como Ernest entende a prática social da matemática e, como conseqüência, sua argumentação em favor da necessidade de se acomodar na epistemologia dessa prática os elementos tácitos nela envolvidos. Mas, afinal, no que consiste o conhecimento construído nessa 'forma de vida'? Quais os 'jogos de linguagem' nela compartilhados? Que tipo de conhecimento os matemáticos adquirem de suas experiências matemáticas pessoal e social?

Na tentativa de contemplar a complexidade da natureza de um conhecimento desenvolvido e compartilhado numa forma de vida, Ernest propõe um modelo do conhecimento matemático baseado na caracterização de Kitcher (1984) da prática matemática. Tal caracterização, por sua vez, originou-se de um paralelo entre a prática matemática e a prática científica, essa última, segundo Khun (1998).

Na interpretação de Kitcher, a principal contribuição de Khun para a filosofia da ciência reside na sua rejeição ao pressuposto de que mudanças científicas são explicadas, somente, em termos de lealdade aos princípios teóricos. Ao contrário, o que muda deve ser visto em termos dos vários componentes que constituem a prática científica: linguagem, princípios teóricos, trabalhos experimentais e teóricos considerados exemplares, métodos aceitos de raciocínio, técnicas de resolução de problemas, valorização da importância de questões, visão meta-científica acerca da natureza do trabalho científico, dentre outros. Desse modo, diz Kitcher, o foco das mudanças científicas ocorridas na história da ciência está na seqüência dos componentes que constitui a prática científica (Kitcher 1984, p.163). Com isso em mente, ele adota uma tese análoga a de Khun para sua filosofia 'falibilista' da matemática. Kitcher sugere que olhemos para o desenvolvimento ou para as mudanças do conhecimento matemático ao longo da história em termos da prática matemática. A sugestão do autor é que:

> vejamos a prática matemática como consistindo de cinco componentes: uma linguagem, um conjunto de afirmações aceitas, um conjunto de raciocínios aceitos, um conjunto de questões selecionadas como importantes, e um conjunto de visões meta-matemáticas (incluindo padrões de provas e definições, e alcance e estrutura da matemática). Uma notação conveniente é adotar a expressão "<L,M,Q,R,S>" como um símbolo para uma prática matemática arbitrária (onde L é a linguagem da prática, M o conjunto de visões

meta-matemáticas, Q o conjunto de questões aceitas, R o conjunto de raciocínios aceitos, e S o conjunto de afirmações aceitas). (Kitcher, 1984, p.163-164, aspas no original)

Assim, o problema de explicar o desenvolvimento do conhecimento matemático transfere-se para o problema de compreender o que provoca a transição de uma prática <L,M,Q,R,S> para outra prática <L',M',Q',R',S' > imediatamente posterior. Continuando o paralelo com a prática científica, Kitcher diz, ainda, que "os componentes de uma prática matemática nunca estão em completa harmonia uns com os outros" – o que interpreto que alguns componentes podem mudar enquanto outros não, ou, o que dá no mesmo, o desenvolvimento dos componentes pode não se dar em bloco, "e que o esforço pela concordância gera uma mudança matemática" (Kitcher, 1984, p.164) – ou seja, a prática muda como um todo quando todos os seus componentes são alterados[22].

A partir daí, Ernest enriquece nossa compreensão do conhecimento matemático. Em primeiro lugar, ele bem observa que Kuhn (1998) deixa claro que a prática científica não se exaure, apenas, com a lista de componentes que foi por ele citada (a mesma observação é feita em relação à Kitcher no caso da caracterização da prática matemática). Além disso, tal lista inclui conhecimentos tácitos os quais são aprendidos fazendo-se ciência mais do que adquirindo e seguindo regras para fazê-la. Em segundo lugar, Ernest entende que a caracterização de Kitcher da prática matemática, embora seja um avanço se comparada com as concepções tradicionais do conhecimento matemático, não contempla, por exemplo, a complexidade e o caráter socialmente situado – compreendendo um conjunto de pessoas, um conjunto de relações e um discurso – desse conhecimento e dos valores e crenças compartilhados pelos matemáticos. Por outro lado, Ernest reconhece que tal caracterização acomoda tanto elementos explícitos (proposicionais) quanto tácitos da prática matemática (Ernest,

[22] No livro *The Nature of Mathematical Knowledge* (1984), mais precisamente nos capítulos 8, 9 e 10, Kitcher descreve e discute, em detalhes, o que constitui cada um dos componentes, bem como os tipos de mudanças ou alterações que ele entende serem possíveis de neles ocorrer. Para cada caso, ele fundamenta seus argumentos com exemplos de conceitos e métodos da matemática, discutidos sob uma perspectiva histórica de seus desenvolvimentos. Como já mencionado nesse capítulo, o modelo de Ernest do conhecimento matemático baseia-se na caracterização de Kitcher da prática matemática. Na verdade, veremos que tal modelo pode ser visto como uma extensão da lista de componentes, proposta por Kitcher. Com exceção do componente 'visões meta-matemáticas', os demais componentes da lista de Kitcher não sofrem reformulações significativas por parte de Ernest. Por essa razão, opto por não discutir tais

1998a, p.138-144). Diante dessas circunstâncias, ele entende que a caracterização de Kitcher da prática matemática é mais adequada para descrever o conhecimento matemático, ou melhor, ela serve como um modelo 'parcial' desse conhecimento. Assim sendo, Ernest (1998b) adiciona à lista de Kitcher dois componentes que, a seu ver, são importantes e que não estão nela incluídos ou estão nela incluídos implicitamente. Feito isso, ele adota essa 'nova' lista como um modelo do conhecimento matemático. A essa altura, Ernest já possui uma elaboração mais precisa do que consistem conhecimentos matemáticos principalmente explícitos e principalmente tácitos. Prossigamos, então, por partes.

Para Ernest, um conhecimento matemático explícito é aquele que pode ser adquirido por meio da linguagem proposicional ou de demonstrações, como por exemplo, o teorema de Pitágoras. Por outro lado, um conhecimento matemático tácito é aquele adquirido por meio de experiências ou ações e que não pode ser totalmente representado por meio da linguagem proposicional. Esse último, segundo o autor, inclui métodos, abordagens, operações simbólicas, estratégias e procedimentos, que são, freqüentemente, aplicáveis a novos problemas, porém, usados de maneira diferente em diferentes situações (Ernest, 1998b, p.13).

A tabela 1 mostra o modelo de Ernest do conhecimento matemático (Ernest, 1998b, p.15); uma descrição dos tipos e da natureza dos conhecimentos que os matemáticos adquirem de suas experiências matemáticas pessoal e social.

Os primeiros cinco componentes desse modelo são os propostos por Kitcher e, os dois últimos, são os incluídos por Ernest. O primeiro componente – afirmações e proposições – compreende o conjunto de conhecimentos matemáticos no sentido tradicional da disciplina: definições, hipóteses, conjecturas, axiomas e teoremas. O segundo componente – provas e raciocínios – compreende o conjunto de declarações ou argumentos considerados aceitáveis pela comunidade matemática. Tal conjunto inclui: demonstrações, incluindo as menos formais[23]; argumentos indutivos e analógicos;

componentes, segundo Kitcher. Isso será feito quando discorrer sobre o modelo de Ernest. Sempre que necessário, entretanto, me remeterei à Kitcher.

[23] Isto é, demonstrações que embora não sejam consideradas provas formais, são vistas pela comunidade como tendo valor em seu conteúdo.

soluções de problemas, incluindo análises e computações (algoritmos e regras, por exemplo). Segundo Ernest, esses dois primeiros componentes são principalmente explícitos, pois estão estritamente relacionados com a justificação e consistência em matemática. Em particular, para ele, raciocínios aceitos são entidades discursivas, portanto, são principalmente, se não totalmente, explícitos (Ernest 1998a, 140-141; 1998b, 14).

Tabela 1 – O modelo de Ernest do conhecimento matemático (baseado em Kitcher 1984)

Componentes do conhecimento matemático	**Explícito ou Tácito**
Afirmações e proposições aceitas.	Principalmente Explícito
Provas e raciocínios.	Principalmente Explícito
Problemas e questões.	Principalmente Explícito
Linguagem e simbolismo.	Principalmente Tácito
Visões meta-matemáticas: prova e definição padrões, alcance e estrutura da matemática.	Principalmente Tácito
Métodos, procedimentos, técnicas, estratégias.	Principalmente Tácito
Estética e valores.	Principalmente Tácito

O terceiro componente corresponde ao conjunto de questões e problemas que a comunidade matemática considera como tendo importância passada, atual e futura (Ernest, 1998a, p.141). Embora qualquer uma dessas questões possa originar ou tomar o *status* de um problema e, alternativamente, de qualquer problema possam emergir questões, como problemas entendem-se os 'tradicionais' problemas matemáticos: 'alguma coisa' que diz respeito à matemática e que demanda uma solução matemática. Como questões, Kitcher exemplifica duas que tiveram grande importância intrínseca à matemática, no final do século dezenove. São elas: "Existem funções reais que são contínuas em todo ponto mas que não são diferenciáveis em nenhum ponto?" e "É possível fazer comparações entre 'tamanhos' de conjuntos infinitos?" (Kitcher, 1984, p.185). Como questões extrínsecas à matemática ou, como ele diz, questões instrumentais, o autor entende aquelas que emergem, por exemplo, de aplicações da matemática na ciência. Na medida em que são discutidos dentro da comunidade matemática, problemas e questões são, também, principalmente explícitos (Ernest, 1998b, p.14). Em outras palavras, ainda que alguns desses problemas ou questões sejam inéditos, tão logo sejam formulados e reconhecidos pela comunidade, eles são passíveis de circulação dentro dessa comunidade.

Com base a) no conceito de Wittgenstein de que o significado de uma palavra está no seu uso num jogo de linguagem inserido numa forma de vida; b) na visão de Polanyi de que todo conhecimento proposicional origina-se do conhecimento tácito da linguagem, dentre outros autores, Ernest elabora dois argumentos de acordo com os quais o quarto componente – linguagem e simbolismo – é principalmente tácito. O argumento genético é que todo conhecimento da linguagem é adquirido experimentalmente; gramática e regras da linguagem são conhecidas tacitamente, isto é, inferidas inconscientemente pelo aprendiz a partir dos padrões de suas experiências. O argumento lógico é que o significado de alguns conceitos, termos, palavras e frases são supostamente conhecidos de maneira tácita. Caso contrário, ter-se-ia que definir, explicitamente, todos esses elementos da linguagem, o que levaria a um regresso infinito (Ernest, 1998a, p.137).

Ernest vê a linguagem matemática como uma sub-linguagem das diversas línguas, complementada com símbolos matemáticos e seus significados. Segundo ele, essa linguagem é ampla e equipada com um vasto conjunto de objetos discursivos: símbolos matemáticos, notações, diagramas, termos, conceitos, definições, axiomas, afirmações, analogias, problemas, explicações, métodos, demonstração, teorias e textos (Ernest, 1998a, p.140)

O quinto componente – visões meta-matemáticas – inclui visões: i) de provas e definições padrões; ii) do escopo e estrutura da matemática[24]. Visões de provas e definições padrões consistem num conjunto de conhecimentos relativos à normas e critérios que, espera-se, provas e definições satisfaçam para serem aceitas pela comunidade. Para Ernest o conhecimento de problemas, soluções, definições e provas

[24] Na caracterização de Kitcher da prática matemática, o quinto componente compreende, além de i e ii, as seguintes visões: iii) ordem das disciplinas matemáticas (ou seja, hierarquização das diversas áreas da matemática); iv) valores relativos dos tipos particulares de investigação (isto é, valorização de algumas investigações em relação à outras) (Kitcher, 1894, p.189). Embora Ernest não confirme essa interpretação, no meu entender, iii e iv foram incluídos no componente 'estética e valores', por ele proposto. Ernest (1998b) diz que a razão que o levou a propor esse componente deveu-se ao fato de que Kitcher não menciona aspectos da visão meta-matemática relacionados à estética e valores. Na verdade, o que percebo é que Kitcher não discute tais visões no mesmo patamar de clareza que os demais componentes foram discutidos. Ele as apresenta através de alguns exemplos (ou particulares) que, a seu ver, refletem posições de consenso entre os matemáticos contemporâneos. Aliás, é interessante observar que à medida que os componentes vão ficando cada vez mais tácitos, tanto na lista de Kitcher quanto no modelo de Ernest, as descrições desses componentes, por parte dos autores, vão, gradativamente, ficando

exemplares ou típicos é essencial, não só, para a aceitação, como também para a formulação dessas normas e critérios (Ernest, 1998b, p.141-142). No caso das visões sobre o alcance e estrutura da matemática, Ernest diz que "essas incluem princípios organizativos para a matemática como um todo: seus sub-conjuntos de disciplinas ou áreas de estudo e suas priorizações epistemológicas" (Ernest, 1998a, p.142). E essas visões meta-matemáticas possuem consistência (isto é, são validadas) porque existe uma aceitação tácita evidenciada pelo uso dessas visões por parte da comunidade matemática.

Segundo Kitcher, ambas as visões i e ii requerem um conhecimento de lógica, ou melhor, de como funciona a lógica da matemática. De maneira geral, para ele, o componente 'visões meta-matemáticas' pode ser assim resumido: um conjunto de conhecimentos que media ou coordena as diversas empreitadas do trabalho matemático, tais como, dar consistência às afirmações, sistematizar os resultados obtidos e oferecer provas que sirvam para o desenvolvimento da compreensão matemática. Além disso, visões meta-matemáticas variam dentro da comunidade matemática e refletem o entendimento reflexivo dessa comunidade sobre como, em última instância, seus objetivos devem ser alcançados (Kitcher, 1984, p.189). Ele entende, ainda, que tais visões não podem ser formuladas explicitamente pelos matemáticos engajados na prática. Assim sendo, Ernest (1998b) as classifica como sendo um elemento tácito do conhecimento matemático no sentido de que os matemáticos as adquirem e as constroem através da enculturação na comunidade matemática. E essa experiência não pode ser comunicada totalmente de maneira explícita.

Com relação aos procedimentos, métodos, técnicas e estratégias, Ernest entende que eles são parte essencial do trabalho matemático para não serem contemplados por Kitcher ou estarem subentendidos em sua lista. Por essa razão, Ernest adiciona à essa lista um componente compreendendo esses elementos. Ele argumenta que embora procedimentos, métodos, técnicas e estratégias sejam com freqüência aplicados em novos problemas, os mesmos são usados diferentemente em diferentes situações. Assim, diz Ernest, "enquanto as aplicações desses procedimentos e estratégias são explícitas, o

---

menos precisas; elas passam a ser dadas a partir de alguns de seus aspectos. O mesmo acontecerá na minha descrição.

conhecimento mais geral subjacente à eles normalmente não o é" (Ernest, 1998b, p.13). Em outras palavras, para Ernest, não são os procedimentos, estratégias e algoritmos que não são explícitos, mas sim, o conhecimento de como e quando eles são usados, por exemplo. De fato, uma vez decidido quando e em quais circunstâncias tais procedimentos e estratégias podem ser usados, sua aplicação é, de um jeito ou de outro, justificada explicitamente. Na medida em que isso acontece, tal conhecimento 'perde' seu caráter tácito e passa a ser um conhecimento (produto) incluído no componente 'provas e raciocínios'.

O último componente – estética e valores – transcende a visão meta-matemática e é principalmente tácito na medida em que sentimentos sobre a estética e beleza da matemática estão intimamente ligados a concepções e crenças pessoais que são principalmente tácitas (Ernest, 1998b, p.15). Dentre alguns valores compartilhados pela comunidade matemática Ernest (Ernest, 1998a, p.142) menciona a valorização de alguns tipos de investigação sobre outros. De acordo com as visões meta-matemáticas de Kitcher, o mesmo pode-se dizer em relação às áreas de pesquisa da matemática. Porém, isso não significa que exista um consenso na comunidade de valorizar um mesmo tipo de investigação ou uma mesma área de pesquisa. Isso pode ser evidenciado pelo vasto e variado conjunto de áreas de pesquisa que constituem, hoje, a pesquisa matemática.

A seguir, teço algumas observações e interpretações do modelo de Ernest. Em primeiro lugar, observo que não encontramos, explicitamente, em tal modelo, um lugar para a ontologia que os matemáticos constroem da matemática e de seus objetos, ao longo de suas experiências matemáticas. Como vimos, Ernest atribui a existência e realidade dos objetos matemáticos ao domínio cultural criado pelo discurso da matemática. Isso significa que as pessoas que compartilham esse discurso povoam tal domínio de objetos culturais que possuem uma existência real nesse domínio. Esse sentimento de realidade é forte o bastante não só, entre os matemáticos, mas também entre todos que fazem uso do conhecimento matemático, para não considerá-lo um elemento essencial de seu desenvolvimento. Em outras palavras, tal sentimento provou (Davis e Hersh 1985, Tymoczko 1986), prova e, certamente, continuará provando (Ernest 1991, 1998a, Matthews 1999, Lomas 1999, Lakoff e Núñez 2000, Núñez, 2000) no curso da história ser motivo de rivalidades e desavenças filosóficas. Portanto, a meu ver, a ontologia que os matemáticos constroem da matemática e de seus objetos não pode deixar de ser contemplada em nenhum modelo do conhecimento matemático. Lembremos que, para Polanyi (1983), a 'emergência' – processo através do qual damos uma realidade àquilo que está sendo conhecido e cuja função é a de promover inovações fundamentais – é o mecanismo fundamental do desenvolvimento; qualquer aprendizagem está atrelada a tal processo. Assim sendo, é natural que se inclua no componente 'visões meta-matemáticas' do modelo de Ernest a visão ontológica dos matemáticos acerca da matemática, bem como de seus objetos. Desse modo, a matemática e objetos da matemática passam a ter um *status* de entidade, isto é, algo que pertence à realidade (dos matemáticos e, certamente, de todos que fazem uso da matemática).

Em segundo lugar, penso estar claro que Ernest reconhece que podemos adquirir conhecimentos a partir de processos de aprendizagem não explícita. Mais do que isso, no caso do conhecimento matemático, ele identifica quais desses conhecimentos não podem ser completamente adquiridos por meio de palavras ou outra representação simbólica qualquer. É o caso do componente 'visões meta-matemáticas', por exemplo. Assim, considerando os componentes do modelo de Ernest do conhecimento matemático como produto ou realizações de aprendizagem, aqueles cuja natureza é principalmente tácita também são tácitos no sentido 'ontológico' de Polanyi: o tácito e o explícito são dimensões diferentes, porém complementares de um mesmo conhecimento. De fato, pensemos, por exemplo, nessa idéia representada numa escala onde seus extremos pudessem ser, um, o conhecimento totalmente não articulado externamente, e outro, o conhecimento totalmente articulado externamente. Em tal escala os componentes do conhecimento matemático estão próximos de um extremo ou de outro, porém nunca alcançam esses extremos. Além disso, a posição de um componente na escala está diretamente relacionada com sua aprendizagem: o quão perto um componente estiver de um extremo, mais fácil ou mais difícil será alcançá-lo por meio da linguagem proposicional. Isso dependerá de qual extremo o componente se encontra mais próximo. Assim, o caráter tácito do conhecimento matemático, presente no modelo de Ernest, está relacionado com a maneira pela qual comunicamos ou aprendemos esse componente. Isso significa que as 'pistas fragmentárias' de Polanyi – as quais permitem a identificação de particulares de um certo conhecimento tácito que alguém está tentando comunicar – serão mais ou menos significativas, mais ou menos facilmente apreendidas, dependendo se a pessoa está mobilizando componentes principalmente explícitos ou principalmente tácitos, respectivamente. De fato, como vimos, embora o processo do conhecer, para Polanyi, seja o mesmo para ambos os conhecimentos principalmente explícitos e principalmente tácitos, os primeiros demandam de nós pouco esforço mental.

Em relação ao processo dinâmico do ato do conhecer tácito (ou ao aspecto funcional de um conhecimento tácito), descrito por Polanyi, interpreto que dentre os vários tipos de conhecimentos que mobilizamos para realizar uma tarefa matemática, estão os componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest. Isso nos dá uma boa ilustração de como componentes principalmente explícitos, como por exemplo, o teorema de Pitágoras, podem se tornar tácitos no sentido 'psicológico' da teoria de Polanyi: quando usamos um certo conhecimento como subsidiário para outro, o primeiro é mobilizado como um conhecimento tácito. Isso significa que enquanto o teorema de Pitágoras está sendo usado instrumentalmente para resolver um problema, por exemplo, esse conhecimento específico não é completamente (ou não é) exposto porque ele não é o foco de nossa atenção (nesse momento podemos até mesmo não sermos cientes de que possuímos tal conhecimento). Assim, como já dito anteriormente, o que é visto como conhecimento matemático tácito no sentido psicológico da teoria de Polanyi, depende do contexto; da situação de uso.

Em terceiro lugar, embora não contemple, por exemplo, processos cognitivos/psicológicos envolvidos na aprendizagem matemática, o modelo de Ernest nos ajuda a compreender os tipos de conhecimento – conceitos, procedimentos e atitudes – estão sendo atualmente valorizados nos currículos da disciplina (por exemplo, MEC, 1998). Em outras palavras, ainda que o modelo de Ernest seja um modelo do conhecimento matemático dos matemáticos e, portanto, tenha que ser adaptado para o âmbito escolar, ele se aproxima do conhecimento matemático escolar no seguinte sentido: ao final de um contexto de aprendizagem e para cada nível de ensino, espera-se que os alunos adquiram um conjunto de afirmações e proposições, saibam raciocinar matematicamente e justificar seus raciocínios, usem a linguagem e simbolismo matemáticos em situações tanto de uso pessoal quanto de uso social, desenvolvam uma certa visão do âmbito e da estrutura da matemática como um todo e saibam decidir quando e quais métodos, estratégias ou procedimentos são mais adequados para resolver problemas. Mais do que isso e, talvez, o mais importante, espera-se que os alunos desenvolvam uma atitude favorável para a investigação matemática como um meio para compreender e transformar o mundo ao seu redor. Entendo que tal atitude envolve os vários aspectos do componente afetivo – disposição, interesse, motivação – e origina-se, sobretudo, de experiências, crenças, valores e um senso de estética pessoais sobre a matemática.

Interpretado assim, o conhecimento matemático escolar também agrega múltiplas faces ou múltiplos domínios: o cognitivo, o social, o cultural, o de crenças e valores. E a maioria desses conhecimentos é principalmente tácita. Isso significa que parte do conhecimento matemático pode ser ensinada/aprendida por meio da linguagem proposicional, mas o 'grosso' não. Essa natureza tácita da aprendizagem matemática nos leva a refletir sobre nossa prática em direção a ações mais provocadores dos alunos e a uma busca por meios mais adequados para que eles possam se expressar sobre seus conhecimentos tácitos.

Em quarto lugar, ao decompor o conhecimento matemático dos alunos em componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos podemos tratar um conhecimento, até então, bastante amplo e complexo em partes viáveis de serem abordadas, tanto do ponto de vista de sua melhor compreensão, quanto do ponto de vista de quais componentes necessitam de um apoio pedagógico em sala de aula.

Entretanto e finalmente, não podemos esquecer que o modelo de Ernest descreve um conhecimento que é principalmente tácito a partir de alguns de seus aspectos. Portanto, tal modelo deve ser visto com todas as limitações inerentes à tentativa de explicitar um conhecimento dessa natureza. Lembremos que, de acordo com Polanyi, ao tentar descrever um conhecimento tácito através do escrutínio meticuloso de seus particulares ou explicitar as relações entre eles, os significados dos particulares dispersam-se e podemos não recuperá-los em suas formas originais. Devemos levar em conta que as revelações obtidas dos componentes, sozinhas, são insuficientes. As relações entre tais componentes devem ser consideradas, mas o 'todo' é, obviamente, muito mais que a soma de suas partes.

4. O CONSTRUTIVISMO SOCIAL NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

No âmbito da matemática escolar, o construtivismo social[25] tem sido particularmente significativo na medida em que os objetivos curriculares da disciplina passaram a enfatizar a construção pelos alunos de seus próprios conhecimentos matemáticos levando em conta suas linguagens, culturas, experiências de vida e de instrução. Apoiando-se na primeira versão da filosofia construtivista social da matemática de Ernest (1991), Romberg (1992) diz que isso implica numa profunda revisão acerca do que seja a aprendizagem matemática. Por um lado, 'conhecer' ou 'saber' matemática não é mais acumular seus registros, e sim, fazer matemática. Para ele, fazer matemática é engajar-se num processo no qual "uma pessoa reúne, descobre ou cria conhecimento no curso de alguma atividade que possui um propósito: esse processo ativo não é o mesmo que a absorção de registros de conhecimento" (p. 751-752). Por outro lado, o autor entende que, sendo a matemática um construto social, fazer matemática não pode ser visto como uma atividade mecânica de desempenho, solitária e independente da cultura. Fazer matemática, de maneira geral, implica em acordos sobre quais procedimentos devem ser seguidos e sobre o que será considerado como um trabalho aceitável. Tais acordos, por sua vez, nascem da prática social cotidiana da comunidade matemática. Desse modo, um matemático envolve-se na matemática como um membro de uma comunidade instruída que cria o contexto no qual o indivíduo matemático trabalha; os membros dessa comunidade compartilham uma mesma maneira de ver a atividade matemática. Romberg diz, ainda, que fazer matemática envolve, necessariamente: resolução de problemas, construção de modelos matemáticos, abstração, invenção, prova e aplicação, dentre outras práticas. Assim, para ele, o objetivo da matemática escolar é o de desenvolver seqüências de atividades que deveriam, ao mesmo tempo, ser interessantes para os alunos e dar-lhes uma oportunidade de experimentar tais práticas.

---

[25] Aqui, não estou me referindo a nenhuma corrente de pensamento construtivista social específica (psicológica, socio-cultural, sociológica ou filosófica), porque, como bem mostra Ernest (1994), parece não existir um consenso sobre o que significa esse termo e quais são suas bases teóricas e pressuposições. Assim sendo, ao me referir ao construtivismo social na presente seção desse capítulo o faço, somente, em termos do que, pode-se dizer, suas diversas versões compartilham: a noção de que a dimensão social

Na visão de Schoenfled (1992), "a matemática é uma atividade inerentemente social" (p.335). Para esse autor, fazer matemática é um ato de fazer sentido matemático, ou seja, é compreender, saber analisar, relacionar e usar as ferramentas matemáticas – abstração, representação e manipulação simbólicas – para compreender a estrutura da matemática. Ele diz ainda que, para ser um membro da comunidade matemática necessita-se passar por um processo de enculturação no qual um indivíduo que possui as disposições mencionadas anteriormente, torna-se seu membro e aceita seus valores. Uma pessoa torna-se um matemático em seu sentido mais profundo (isto é, por meio de uma visão de mundo), tanto através de uma aprendizagem demorada, quanto por definição (treino em matemática e meio de vida). Schoenfeld sintetiza a essência do trabalho de um matemático como sendo resolver problemas. Alguns, são motivados por questões teóricas ou práticas do mundo real (problemas aplicados), outros, são motivados por questões abstratas (problemas internos). Quanto à aprendizagem matemática, ele defende que as salas de aula devem espelhar-se em aspectos selecionados da comunidade matemática, favorecer a interação entre alunos, entre alunos e matemáticos, de modo a promover o pensamento matemático (p.348). Sua sugestão é a de que tais aspectos estejam relacionados ao desenvolvimento de disposições favoráveis à investigação matemática, bem como à promoção de uma dialética de conjecturas, refutações e exercícios de argumentação. Dessa maneira, Schoenfeld acredita que os alunos se envolvem, de fato, numa experiência matemática.

Numa perspectiva cultural[26] da aprendizagem, Winbourne e Watson (1998) observam que uma boa maneira de descrever a escola poderia ser a de um espaço social constituído de múltiplas interseções de práticas e trajetórias. De acordo com eles, dentro das escolas, é possível pensar na idéia de Jean Lave (1993) de comunidades locais de prática: "tais comunidades podem ser pensadas como locais em termos do tempo e do espaço: elas são locais em termos das vidas das pessoas; em termos das práticas cotidianas da escola e das salas de aula; em termos dos membros participantes da prática..." (p. 95).

influencia, de alguma maneira, o desenvolvimento do indivíduo no que se refere à construção de significados em resposta às experiências em contextos sociais.

[26] Isto é, uma perspectiva social na qual a antropologia é um determinante fundamental da cognição e o desenvolvimento de um ponto de vista de um indivíduo é moldado pela comunidade a que pertence esse indivíduo.

Os autores acreditam que, apesar das restrições impostas pelo tempo e pelo espaço, descritas acima, é possível criar em sala de aula situações de aprendizagem que a caracterize como comunidades locais de prática[27]. Para tal, as situações de aprendizagem devem, necessariamente, possuir as seguintes características:

1. Os alunos se vêm como que funcionando matematicamente e, para estes alunos, faz sentido ver suas ações matemáticas como parte essencial de quem está dentro da prática.

2. Através das atividades e dos papéis assumidos pelos participantes, existe um reconhecimento público de desenvolvimento de competências dentro da sala de aula.

3. Os alunos vêm a si próprios trabalhando coletivamente com o mesmo propósito de conquistar um entendimento comum.

4. Em sala de aula, eles compartilham modos de comportamento, linguagem, hábitos, valores e ferramentas de uso.

5. A aula é, essencialmente, constituída pelas participações ativas de alunos e professores.

6. Alunos e professores poderiam ver a si próprios engajados numa mesma atividade durante um certo período de tempo. (p. 103)

Entretanto, segundo os autores, seria absurdo afirmar que somente as aulas planejadas com uma intenção deliberada de criar comunidades locais de prática podem ser produtivas em termos da aprendizagem matemática. Também, seria absurdo afirmar que uma sala de aula é apenas, ocasionalmente, uma comunidade de prática. Eles argumentam que a maioria dos alunos experimenta, de fato, poucas atividades

---

[27] Os autores apresentam duas atividades realizadas em sala de aula com alunos de 11 a 13 anos como exemplos de comunidades locais de práticas matemáticas e, uma terceira, na qual não se detectam tais práticas.

matemáticas que exploram os modos de aprendizagem característicos de uma comunidade de prática. Para Winbourne e Watson, o sucesso individual de um aluno estará associado com o seu posicionamento dentro da comunidade de prática, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Diante do exposto, podemos dizer que compreender melhor o significado e as implicações do que seja fazer matemática, no sentido social discutido nesse capítulo, bem como, de sua relação com os contextos e as experiências de vida dos alunos constitui o grande desafio a ser enfrentado, hoje, na matemática escolar. Para Adler (1998), a "prática da matemática na escola é, por necessidade, não somente situada na prática do dia-a-dia, nem somente na prática dos matemáticos. Ela é uma atividade híbrida. O desafio para a educação matemática é o de criar uma ponte eficaz entre essas duas práticas que resulte numa tensão da matemática escolar que seja viável e não patológica de nenhuma prática." (p. 162)

No que se refere ao construtivismo, nem todos os educadores, no entanto, comungam seu fervor quando importado para o contexto educacional. Uma das críticas que Kilpatrick (1987) dirige aos construtivistas radicais (von Glasersfeld, por exemplo) é a de que o construtivismo é uma teoria epistemológica e não uma teoria de ensino. Para o autor não há, necessariamente, uma conexão entre como uma pessoa vê o conhecimento sendo adquirido e quais os instrumentos instrucionais a pessoa acredita poder favorecer a aprendizagem (p.12).

CAPÍTULO III

APRENDIZAGEM SITUADA

Nos capítulos anteriores vimos que tanto Polanyi quanto Ernest enfatizam, cada um a sua maneira, a prática matemática como um elemento epistemológico fundamental do conhecimento matemático. Para Ernest, a prática matemática é uma prática social – *a la* Wittgenstein – e sua teoria filosófica construtivista social descreve, sob o ponto de vista da comunidade dos matemáticos, como os conhecimentos subjetivo e objetivo se originam e contribuem um com o desenvolvimento do outro. Essa teoria não é uma teoria de ensino ou de aprendizagem. Por outro lado, o foco da epistemologia de Polanyi concentra-se na estrutura dos processos individuais mentais envolvidos na aprendizagem (no ato do conhecer tácito). Através do conceito de tradição, ele formula uma breve descrição de como conhecimentos tácitos de uma arte socio-culturalmente estabelecida (a investigação científica ou matemática, por exemplo) são transferidos dentro de um contexto social. Mais ainda, ele advoga que parte desses conhecimentos é preservada, somente, adotando-se a tradição dessa arte. Ernest diz o mesmo, porém, em termos dos conceitos de formas de vida e jogos de linguagem. Se partirmos do pressuposto de que ensinar e aprender matemática possui uma história socio-cultural – matemática e escolarização – que é comum em todo o mundo e, portanto, requer uma enculturação em aspectos selecionados da prática matemática, então, ensinar e aprender matemática envolve, de alguma maneira e em alguma extensão, adotar a tradição ou o sistema de valores dessa prática. O mesmo pode ser dito em relação aos conceitos de forma de vida e jogos de linguagem: ensinar e aprender matemática demanda exercitar e compartilhar, de alguma maneira e em alguma extensão, jogos de linguagem inseridos numa forma de vida. Ora se esse pressuposto é razoável, o que acredito ser, então o que Polanyi e Ernest estão sinalizando no caso da aprendizagem matemática é que grande parte desses aspectos pode ser adquirida, somente, praticando-se matemática. Ou ainda, a sala de aula de matemática precisaria funcionar como um tipo de comunidade de prática matemática ou conter algumas características dessa comunidade, de modo a promover a aprendizagem de parte desses aspectos.

Todavia, ambos os construtos de Polanyi e Ernest acerca da circulação de conhecimentos tácitos, seja adotando-se uma tradição, seja numa forma de vida (*a la* Wittgenstein), estão longe de refletir a complexidade das interações sociais envolvidas no desenvolvimento de conhecimentos em tais contextos. Em outras palavras, nem o conceito de tradição nem os conceitos de formas de vida e jogos de linguagem são suficientemente ricos para nos informar, por exemplo, sobre o ensino e a aprendizagem matemática em termos de práticas sociais.

Abordar a aprendizagem dos alunos em termos de práticas sociais como, entendo, propõe uma atual e crescente tendência da área de educação matemática (Lave, 1988; Lave e Wenger, 1991; Greeno, 1997; Watson, 1998; Wenger, 1998; Cobb e Bowers, 1999; Boaler, 2000a; Lerman, 2001, 2002; dentre outros) requer observar, pelo menos, dois pontos importantes:

1. O conhecimento matemático dos alunos não é exatamente o mesmo conhecimento matemático dos matemáticos, mas está relacionado a ele.

2. Se a sala de aula pode ser dita um tipo de comunidade de prática, então, essa comunidade não é a comunidade de prática dos matemáticos.

Diante disso, o presente capítulo é dedicado às perspectivas de aprendizagem situada ou comunidades de prática. Como veremos, tais perspectivas podem nos ajudar a compreender a sala de aula de matemática como uma comunidade de prática específica e, conseqüentemente, como a aprendizagem matemática (ou parte de conhecimentos matemáticos tácitos) se desenvolve dentro dessa comunidade. Na primeira seção do capítulo, discorro sobre a principal fonte teórica de aprendizagem situada que vem influenciando a educação matemática nos últimos 15 anos: as teorias de Lave e Wenger. Em particular, detalho o conceito de comunidades de prática na segunda seção. Na seção três discuto esses dois referenciais sob o ponto de vista da matemática escolar. Na quarta e última seção comento como os capítulos I, II e III e as teorias neles contidas se complementam, cada uma preenchendo espaços não cobertos pelas outras. O capítulo III fecha a parte teórica desse trabalho de tese.

1. PERSPECTIVAS DE APRENDIZAGEM SITUADA

De acordo com Lerman (2000, 2001), referenciais teóricos para interpretar as origens sociais do conhecimento e consciência aparecem na literatura da educação matemática no final dos anos oitenta. O autor chama esse movimento de ‘virada social’ e observa que ele emergiu para desafiar os estudos tradicionais na epistemologia, ontologia, conhecimento e aquisição de conhecimento. Até então, embora algumas teorias não tenham ignorado fatores sociais, tais estudos vinham enfatizando os processos individuais de aquisição de conhecimento e o *status* do conhecimento em termos de sua realidade. Alternativamente, as teorias sociais aparecem para olhar conhecimento, significado, pensamento e raciocínio como produtos de atividades sociais.

A virada social originou-se, sobretudo, de três fontes intelectuais: antropologia (por exemplo, Lave, 1988), sociologia (por exemplo, Walkerdine, 1988 em Lerman, 2000) e psicologia discursiva/cultural (por exemplo, Lerman, 2002), todas, com suas raízes nas teorias de Vygotsky. A partir de uma visão antropológica da cognição, o livro *Cognition in Practice* (1988) de Jean Lave desafiou as abordagens cognitivistas e de transferência de conhecimentos na aprendizagem matemática. Os estudos da autora sobre a aquisição de competências matemáticas numa comunidade de aprendizes de alfaiataria na África Ocidental levaram-na a concluir que conhecimentos são produzidos em formas particulares de experiências situadas e não, meramente, na mente dos indivíduos. Nesse sentido, conhecimento deve ser entendido como algo locado entre pessoas e meio e, portanto, relacionado com a competência na vida prática e não, somente, em termos de atributos individuais. Assim, a contribuição do aprendiz passa a ser valorizada ou é reconhecida dentro de uma comunidade de prática na medida em que ele se torna um adepto da prática. Observemos que essa idéia é exatamente aquela interpretada quando da discussão do conceito de tradição de Polanyi: a formação de conhecimentos numa tradição ocorre localmente através da relação aprendiz/mestre, como também no desempenho profissional. Isso, por sua vez, sugere que um indivíduo não é competente *per se*. Ao contrário, é em função de seu papel ou desempenho dentro de um contexto social que uma competência lhe será atribuída. O sucesso ou o fracasso de um indivíduo na comunidade é o que lhe causa ser reconhecido como competente.

Os estudos de Lave levantaram questões educacionais fundamentais com relação à aplicação de técnicas escolares em práticas fora da escola. Por exemplo, pesquisas realizadas em algumas comunidades de clientes de supermercado (Lave, 1988) e de pessoas que fazem dieta (Lave, 1997)[28] indicam que os processos de aprendizagem de estratégias matemáticas e de procedimentos de tomada de decisões são parte de um processo pelo qual passa a pessoa ao se tornar um participante dessa comunidade. De maneira geral, as identidades das pessoas são desenvolvidas ao longo da participação em comunidades de prática e, nesse sentido, aprendizagem é vista como desenvolvimento em práticas. Partindo dessa concepção ela argumenta, mais recentemente, que tais comunidades e as escolas formais não se distinguem no que se refere aos modos de aprender, e diz:

> … em todo lugar a aprendizagem é um aspecto da mudança de participação em "comunidades de prática" dinâmicas. Qualquer que seja o lugar no qual pessoas se envolvem por períodos substanciais de tempo, dia-a-dia, em fazer coisas nas quais suas atividades correntes são interdependentes, aprendizagem é parte da mudança de suas participações em práticas dinâmicas. (Lave, 1996, p.150, aspas no original)

Provavelmente, devido ao impacto causado na educação pelo livro, acima mencionado, Lave e Wenger (1991) desenvolveram uma teoria de aprendizagem situada de maneira mais sistemática. Essa teoria possui suas fundações no conceito de 'participação periférica legítima' – PPL – dentro de uma comunidade de prática. Para os autores, o conceito de uma comunidade de prática vai além do compartilhamento cultural de identidades. Uma comunidade de prática consiste de relações entre: pessoas, outras comunidades tangenciais e sobrepostas, atividade e mundo, como também o tempo. Os membros dessa comunidade possuem diferentes interesses, variados pontos de vista e contribuem para as atividades de diversas maneiras. Diante disso, uma comunidade de prática fornece o suporte necessário para que significados sejam atribuídos e para que sua herança ou tradição seja preservada. Isso caracteriza uma comunidade de prática como uma condição intrínseca para a existência de conhecimentos: a participação numa comunidade de prática é um princípio epistemológico para a aprendizagem. A estrutura social dessa prática, suas relações de

[28] Publicado originalmente em *Cultural Psychology: Essays on Comparative and Human Development* (1990), Cambridge University Press.

poder e suas condições de legitimidade define as possibilidades para a aprendizagem, ou seja, o que os autores denominam PPL. Nesse sentido, aprendizagem numa comunidade de prática é o mesmo que PPL.

Na expressão ‘PPL’, a palavra ‘legítima’ correspo nde às características dos modos de se pertencer à comunidade ou de preservar seus ideais. Por outro lado, a palavra ‘periférica’ é uma maneira de distinguir o processo gradual de participação do aprendiz em direção a uma participação integral futura. Para Lave e Wenger, essa palavra, também, deve sugerir que existem múltiplas e variadas, mais ou menos engajadas, maneiras de ser locado no campo de participação estabelecido pela comunidade. Além disso, a PPL do aprendiz move-se numa direção centrípeta e essa participação é motivada por um crescente senso de participação e pelo desejo de se tornar um participante pleno da prática.

Assim como para Polanyi, o que interpreto que Lave e Wenger estão dizendo é que a aprendizagem é, em última instância, um compromisso do aprendiz. De fato, mover em direção a uma participação plena na prática envolve, não só, um real comprometimento de dedicação de tempo, esforços intensificados e responsabilidades, mas também um crescente senso de identidade de maestria. Portanto, aprendizagem e senso de identidade são inseparáveis na teoria de Lave e Wenger: esses elementos são aspectos do mesmo fenômeno. Como identidade os autores entendem a maneira pela qual uma pessoa se compreende e vê. Também, como os outros a vêm, uma percepção bastante estável de si mesmo.

Lave e Wenger discordam que um aprendiz que ingressa numa prática aprende suas especificidades, meramente, por observação ou imitação. De acordo com os autores, a participação do aprendiz inclui: o conhecimento de quem está envolvido na prática; o que eles fazem; como o mestre fala, anda, trabalha e leva sua vida; como as pessoas que não estão envolvidas na prática interagem com ela; o que outros aprendizes fazem e o que eles precisam saber para se tornarem praticantes. Isso inclui uma crescente compreensão de como, quando e sobre o quê os praticantes colaboram, o que eles gostam e não gostam, respeitam ou admiram. Além disso, existem tensões e conflitos entre aprendizes e entre eles e os mestres ainda que o resultado da aprendizagem seja por imitação submissa. E é em relação a essas questões que mencionei que o conceito de tradição de Polanyi e os conceitos de formas de vida e jogos de linguagem de Wittgenstein não refletem a complexidade de uma comunidade de prática. Por exemplo, submeter ou adotar uma tradição requer muito mais que observação ou imitação.

Ainda com relação à discussão mestre/aprendiz, Lave e Wenger dizem que a questão da legitimidade – atribuir legitimidade um para com o outro – é mais importante do que a questão de ensinar intencionalmente. Além disso, tal relação pode ser mais ou menos difusa, mais ou menos específica ou explícita. Isso depende da prática. Essa relação, também, pode variar dentro da mesma comunidade dependendo do tempo e lugar, e a autoridade do mestre e seu envolvimento com os aprendizes pode variar substancialmente entre comunidades. De qualquer maneira, como mencionado no caso da tradição, credibilidade, confiança e segurança são fatores epistemológicos fundamentais nas perspectivas de aprendizagem situada.

A teoria de Lave e Wenger leva-nos a fazer uma distinção entre currículo de aprendizagem e currículo de ensino. Nos estudos que eles realizaram foi observado menos fenômeno de ensino do que de aprendizagem. Isso os levou a argumentar que o currículo 'potencial' é algo bastante diferente do que prescrições para o exercício de uma prática. Os estudos dos autores mostraram que os aprendizes aprendem mais através do relacionamento com outros aprendizes. Em linhas gerais, um currículo de aprendizagem consiste de oportunidades situadas para o desenvolvimento improvisado de uma nova prática: ele é um campo de recursos de aprendizagem na vida prática visto da perspectiva dos aprendizes ou alunos. Ao contrário, um currículo de ensino é constituído para a instrução dos novatos. Nesse caso, o significado do que será ensinado é mediado pela participação de um instrutor; por uma visão externa do que se está buscando instruir (p. 97). Em resumo, a distinção, acima, pode ser assim traduzida: o que se pretende ensinar não é, necessariamente, aquilo que será aprendido.

Outra distinção importante que a teoria de Lave e Wenger nos leva a fazer relaciona-se com os conhecimentos do que seja abstrato e concreto. Para eles, a abstração precisa ser entendida como algo desatrelado da aprendizagem que ocorre numa prática cultural particular (p. 104). Isso não significa, no entanto, que concreto é o mesmo que vizinhança, dia-a-dia ou aplicação. Deixe-me explicar como entendo essa idéia: por exemplo, abstração e generalização em matemática são conhecimentos concretos para os matemáticos, pois eles fazem parte da prática matemática. Ou ainda, são componentes do conhecimento matemático; eles requerem uma visão meta-matemática. Por outro lado, aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, na estatística ou medicina, podem ser conhecimentos abstratos para os matemáticos puros. Desse modo, o que é concreto ou abstrato depende do contexto; da comunidade de prática.

Gostaria de observar que os conceitos de concreto e de abstrato, também, não devem ser entendidos como o mesmo que 'significativo' e 'sem significado', respectivamente. Assumir isso seria considerar que as únicas coisas que são significativas para nós são aquelas que estão diretamente relacionadas com alguma prática da qual participamos. Isso não deve ser o caso. O mundo é muito maior do que as práticas de que participamos, efetivamente, e possui múltiplas e várias práticas tangenciais e sobrepostas. Ainda que não participemos de uma certa comunidade de prática, somos capazes de atribuir-lhe significado. Caso contrário, nossa mente e comportamento seriam reduzidos, apenas, aos nossos interesses e a nós mesmos.

Voltando à questão dos currículos de aprendizagem e ensino ou entre prática e prescrição, uma pergunta natural se coloca: qual é o lugar da linguagem nas perspectivas de aprendizagem situada? Lave e Wenger respondem a essa pergunta dizendo que a linguagem tem mais a ver com a legitimidade de participação e com o acesso ao periférico do que com a transmissão de conhecimentos. Tornar-se um legítimo participante de uma comunidade de prática envolve aprender a falar (e, também, a silenciar) de um modo como os participantes já integrados o fazem. Além disso, em certas comunidades de prática as histórias desenvolvem um importante papel na prática. Elas podem funcionar como exemplos a serem seguidos ou em tomadas de decisões (p.108).

Boaler (2000a) observa que o reconhecimento de que conhecimento emerge como função do meio, de pessoas, atividades e objetivos, leva a uma expansão e combinação de disciplinas, tais como, sociologia, psicologia, antropologia, política, estudos socio-culturais e educação matemática. A autora diz, ainda, que, se por um lado, as idéias de conhecimento socialmente compartilhado e de que a aprendizagem corresponde à participação em práticas sociais trouxe um novo vigor à comunidade educacional, por outro lado, a idéia, também, trouxe tensões, confusões e dilemas, especialmente, na educação matemática. Ela discute algumas dessas questões e apela à Greeno (1997) para reparar a concepção equivocada de que as perspectivas de aprendizagem situada pressupõem que o conhecimento não é transferível de um contexto para outro. Embora Greeno reconheça, por exemplo, que os alunos, freqüentemente, acham difícil usar métodos aprendidos na escola em contextos fora da escola, porque as situações e práticas que requerem os usos desses métodos mudaram, isso não é dizer que conhecimentos não possam ser transferidos para novas situações. O autor enfatiza que o fundamental nas perspectivas de aprendizagem situada é a inadequação de focar, apenas, no conhecimento desatrelado das práticas de sua produção e uso.

Com relação à questão da transferência de conhecimentos de uma situação para outra, apresentada como objetos mentais descontextualizados, entendo que Lerman (2000) propõe que a abordemos sob um outro prisma. Para ele aprender a transferir conhecimentos matemáticos entre práticas é uma prática. Por outro lado o autor observa que:

> as práticas das salas de aula de matemática são certamente muito diferentes das práticas dos matemáticos, ou daqueles que usam a "matemática" no local de trabalho…entretanto, podemos dizer que aprender a ler tarefas matemáticas em problemas em sala de aula, os quais têm aparência de pensamento descontextualizado, é ainda um aspecto particular da prática matemática escolar…(Lerman, 2000, p.26, aspas no original)

Um dos resultados que emergiram (Frade e Borges, 2002) de nossa análise dos atuais objetivos curriculares para o ensino da disciplina, baseada no modelo de Ernest do conhecimento matemático, foi que tais objetivos valorizavam algumas práticas e processos similares àqueles usados pelos matemáticos para produzir e usar matemática. Isso é dizer que os alunos, gradualmente, e em cada nível de ensino precisam construir, dentre outros componentes do conhecimento matemático, uma visão meta-matemática. E como vimos, esse componente está relacionado a uma visão da estrutura da matemática como um todo, bem como de seu escopo, ainda que essa visão possa parecer envolver pensamentos ou raciocínios descontextualizados como Lerman observa.

2. COMUNIDADES DE PRÁTICA

No livro *Communities of Practice* (1998) Wenger discute, em detalhes, e de uma maneira mais sistemática do que aquela anteriormente discutida em seu livro com Lave (Lave e Wenger, 1991), o que consiste uma comunidade de prática, bem como os aspectos básicos que ela define, tais como, significado, comunidade, aprendizagem, conhecimento e identidade. Nessa seção apresento uma breve descrição de algumas das idéias subjacentes a esses aspectos na busca pela compreensão de como a sala de aula de matemática pode ser pensada como uma comunidade de prática específica.

Prática social

Para Wenger (1998), prática significa 'fazer' alguma coisa não em si mesma, mas dentro de um contexto histórico e social, o qual dá uma estrutura e significado àquilo que está sendo feito. Tal como Polanyi e Ernest, Wenger advoga que uma prática inclui ambos o explícito e o tácito: o que é dito e o que foi deixado não-dito, o que é representado externamente e o que é assumido. Além disso, a prática inclui: linguagem, símbolos, instrumentos, papéis e regras bem definidos, procedimentos, regulamentos, contratos, relações e convenções implícitas, entendimentos, visões de mundo e crenças compartilhadas. Nesse sentido, o conceito de prática do autor não deve ser entendido como dicotômico de teoria nem de reflexivo. Ainda que ele reconheça que teorias são objetivos em si mesmos, elas não são desvinculadas de um contexto de práticas específicas. A produção de uma teoria é uma prática num tal contexto (p.49).

Diante disso, interpreto que as diferenças entre: conhecimentos teórico e prático, atividades mentais e manuais ou motoras, abstrato e concreto, são discussões que não são importantes de serem enfatizadas nas perspectivas de aprendizagem situada. Cada um desses termos ganha significado de acordo com a especificidade da prática e, portanto, podem obter múltiplas interpretações.

Prática e significado

Para o autor, significado é uma experiência. Essa concepção o leva a assumir que:

- Significado é algo que está locado num processo chamado negociação de significado.
- A negociação de significado envolve participação e reificação.
- Participação e reificação formam uma dualidade que é fundamental para a experiência humana e, portanto, para a natureza da prática (p.55).

A negociação de significado é um processo através do qual experimentamos o mundo de maneira significativa. Isso é dizer que significados não estão dentro de nós. Tampouco no mundo, mas sim, numa relação dinâmica que acontece enquanto nele vivemos. Numa dessas relações podemos ter participação, isto é, um processo ativo que combina o fazer, o falar, o pensar, o sentir e o pertencer. Podemos ser ditos participantes de algo quando nos envolvemos integralmente nesse algo. Isso inclui nosso corpo, mente, emoções e, sobretudo, relações sociais.

Para distinguir participação de outras atividades, tais como, mero envolvimento/engajamento ou assistir a alguma coisa (um filme, uma aula, uma exibição esportiva), Wenger caracteriza a participação como tendo a possibilidade de reconhecimento mútuo. Essa caracterização associa, então, a prática e o social. Disso resulta que nem todo envolvimento/engajamento é participação. Por exemplo, no sentido dado pelo autor, podemos estar engajados na leitura de um livro, ou num trabalho no computador, sem que sejamos um participante porque essas situações não envolvem reconhecimento humano mútuo. Por outro lado, reificação é um processo de dar forma às nossas experiências através da produção de registros que congelam essas experiências em algo. Esses registros podem ser: abstrações, instrumentos, histórias, conceitos, os quais concretizam alguma coisa da prática que queremos congelar. Enquanto que, para Wenger, na participação reconhecemos uns aos outros (aspecto mútuo), na reificação projetamo-nos no mundo sem a preocupação de nos reconhecer em tais projeções. O autor observa, ainda, que os processos de participação e reificação não são excludentes. Ao contrário, eles se complementam numa prática.

Prática e comunidade

A associação entre prática e comunidade é dada através de três relações nas quais Wenger vê a prática como uma propriedade de uma comunidade, e que levarão a formulação dos conceitos de aprendizagem, conhecimento e identidade. São elas:

1. Engajamento/envolvimento mútuo (organizado em torno dos objetivos que a comunidade busca alcançar);
2. Um empreendimento conjunto (e, conseqüentemente, negociação mútua e responsabilidade da qual se deve prestar contas);
3. Um repertório compartilhado (rotinas, linguagens, símbolos, modos de fazer as coisas, dentre outros). (p.73)

O autor observa, no entanto, que essas três relações não implicam, necessariamente, que, em toda comunidade de prática existe, sempre, homogeneidade de identidades, consenso de idéias ou acordos sobre os empreendimentos (p.76-77).

Wenger reconhece que existem fatores externos que escapam ao controle dos membros de uma comunidade e que podem influenciar e limitar o funcionamento da prática. Porém, diz ele, a realidade do dia-a-dia da prática é, em última instância, produzida por seus membros.

A fim de identificar se uma prática foi formada, o autor propõe as seguintes unidades de análise:

1. Manutenção de relações mútuas (harmônicas ou conflituosas).
2. Modos compartilhados de engajamento/envolvimento em tarefas coletivas.
3. Fluxo rápido de informações e propagação de inovações.
4. Ausência de preâmbulos introdutórios (como se conversações e interações fossem meramente a continuação de processos em andamento).
5. Apresentação rápida de um problema a ser discutido.
6. Consenso substancial nas descrições dos participantes sobre quem pertence à comunidade de prática.

7. Conhecimento sobre o quê os participantes sabem, o quê eles podem fazer, e como eles podem contribuir para um empreendimento.
8. Identidades sendo definidas mutuamente.
9. Habilidade de acessar e apropriar ações e produtos.
10. Instrumentos específicos, representações e outros artefatos.
11. Mitos locais, historias compartilhadas, brincadeiras internas.
12. Jargões e modos rápidos e eficientes de comunicação, bem como facilidade de produzir novos jargões e modos de comunicação.
13. Certos estilos reconhecidos como associados aos membros;
14. Discurso compartilhado que reflete certas perspectivas sobre o mundo (p.125-126)

Podemos observar que as três características – engajamento mútuo, um empreendimento conjunto e um repertório compartilhado – estão, claramente, contempladas na lista acima. Como mencionado anteriormente, a presença dessas características não significa que todos os membros de uma comunidade contribuem para ela da mesma maneira e nem com a mesma intensidade.

Wenger usa a palavra 'constelação' para expressar que, em geral, comunidades de prática podem ser vistas como formando um agrupamento de práticas (sobrepostas ou não). Nesse caso, cada comunidade deve negociar seu lugar dentro das várias constelações que a envolvem.

Prática e aprendizagem

No que se refere à aprendizagem, o que caracteriza o desenvolvimento de uma prática é sua capacidade de manter o engajamento de seus membros na perseguição de empreendimentos comuns. "A partir dessa perspectiva, comunidades de prática podem ser pensadas como histórias compartilhadas de aprendizagem" (Wenger, 1998, p.86). Assim, os membros de uma comunidade de prática são conectados a essas histórias através da participação e reificação. Nesse sentido, esses dois processos são fontes de lembrança e esquecimento: eles estão relacionados àquilo que guardamos ou recuperamos em nossas memórias.

Segundo Wenger, aprendizagem numa prática inclui:

- Evolução das formas de engajamento mútuo (descoberta de como se engajar, desenvolvimento de relações e identidades, quem conhece o quê,…);
- Compreensão e ajuste do empreendimento (alinhar os engajamentos aos empreendimentos, esforço para defini-los,…);
- Desenvolvimento do repertório, estilos e discurso (renegociação de significados de vários elementos da prática, produção ou adoção de instrumentos, modos de falar sobre eventos ou de recontá-los,…) (p.95).

Quando a aprendizagem afeta ou muda os três aspectos de uma prática, descritos acima, pode-se dizer que uma aprendizagem significativa ocorreu. Isso não é uma mera questão de processos mentais, aquisição de memórias, hábitos e habilidades, mas sim, como diz Wenger, a formação de uma identidade. Em se tratando de comunidades de prática é, então, essencial assumir, sempre, a aprendizagem como um processo emergente. Caso contrário, a prática pode, equivocadamente, parecer estável e conservadora. Além disso, pelo fato de que as pessoas transitam dentro e fora de uma comunidade de prática podemos dizer que a prática compartilhada através de gerações cria um processo de aprendizagem compartilhada.

Conhecimento na prática

Quando a participação de uma pessoa se torna periférica numa comunidade de prática ela precisa desenvolver alguma aprendizagem em alguma das seguintes dimensões de competência na prática: engajamento mútuo, responsabilidade pelo empreendimento da qual se deve prestar contas e o exercício de negociar o repertório. Em outras palavras, para Wenger, o aprendiz precisa desenvolver uma habilidade de se engajar com outros membros, estabelecer relacionamentos, compreender o empreendimento da comunidade, contribuir para seus propósitos e fazer uso do repertório da prática para nela se engajar. Isso caracteriza o processo de aquisição de conhecimento na prática e o desenvolvimento de ambos os conhecimentos individual e coletivo.

A fim de conquistar as competências estabelecidas pela prática, seus membros precisam sintonizar ou transformar suas experiências de modo a acomodá-las no regime[29] de competências dessa prática. Nesse sentido, 'competências podem guiar experiências'. Por outro lado, 'experiências podem guiar competências': os membros da comunidade podem negociar de modo a incluir suas experiências no regime de competências dessa comunidade. Resumindo, os processos de aquisição de conhecimentos e aprendizagem podem ser caracterizados como processos que objetivam o alinhamento ou equilíbrio entre experiência e competência. Essa concepção de conhecimento/aprendizagem enfatiza, então, o conceito de competência, não em termos de atributos individuais, mas sim, na habilidade de se adaptar e desenvolver socialmente em práticas.

Identidade na prática

Wenger vê a questão da identidade na prática como uma interseção do local e do global; do individual e do coletivo. Se por um lado nossa participação numa prática contribui para seu desenvolvimento, por outro lado, a prática contribui para a negociação de nossas identidades. De acordo com o autor, através de nossas experiências, e de outros, de participação e reificação numa comunidade de prática, definimos quem somos, como também através de práticas não familiares. Nossa não-participação em certas comunidades de prática, também, ajuda a moldar nossas identidades pelo contraste com o não familiar. Definimos quem somos pelas nossas trajetórias (passadas, presentes e futuras); pela maneira com que elas foram ou serão construídas. Somos o que somos reconciliando nossas várias formas de participação em uma única identidade: **nossos modos de pertencer a qualquer comunidade de prática refletem, apenas, uma parte de nossa identidade.** Definimos quem somos em termos da ampla constelação de comunidades de prática a que pertencemos, bem como dos variados estilos e discursos que nelas exercemos (p.149).

O autor observa que algumas experiências de não-participação não implicam que uma identidade de não-participante pleno será construída. A não-participação faz parte do viver numa constelação de práticas. Wenger propõe distinguir duas formas de não-participação ou de ser um membro (*insider*) de uma prática: 'periferalidade' e

[29] Isto é, um conjunto de intenções, conhecimentos, planejamentos, ações e regras a serem desenvolvidas e implementadas numa certa prática buscando alcançar seus objetivos.

marginalidade. No caso da primeira, a não-participação tem que ocorrer em alguma extensão para distinguí-la de uma participação plena. Nesse caso, o que predomina é o senso de participação, isto é, um movimento em direção a uma participação integral. Alternativamente, marginalidade rejeita, em alguma extensão, tal participação: o movimento é em direção a uma participação restrita. Isso pode ser causado por vários fatores, tais como, escolhas individuais, interesses, estratégias, protesto contra alguma decisão ou pressão institucional ou coletiva. Também, porque certas experiências não são completamente aceitáveis no regime de competência da comunidade, tais experiências podem ser reprimidas, desprezadas, ameaçadoras ou ignoradas. Uma pessoa que não é membro de uma certa comunidade de prática é chamada um não-participante pleno (*outsider*).

Wenger enfatiza que a identificação e o exercício de negociar formam as identidades dos sujeitos. A primeira está relacionada com as comunidades e a maneira pela qual o sujeito é um membro dela. O segundo é definido em termos das configurações sociais e do posicionamento dos indivíduos em tais configurações. Em outras palavras, identificação define quais significados são importantes para nós, enquanto o exercício de negociar determina a habilidade do indivíduo de negociar esses significados.

Identificação pode ser entendida como um processo através do qual os modos com que pertencemos a uma comunidade são constitutivos de nossas identidades. Identificamo-nos com alguma coisa quando criamos laços ou restrições a essa coisa, nos quais investiremos. Esse processo lida com conceitos, tais como, exclusão, comprometimento, afinidade, lealdade, solidariedade, estereótipos, etc. Entretanto, identificação não é suficiente para determinar nossa habilidade de participar numa comunidade. É através do processo de negociar que: um significado pode ser aplicado a novas situações, requeremos a colaboração de outros, damos um sentido aos eventos, ou fazemos valer nossa participação. Portanto, esse processo está relacionado com a abertura de acesso a novas informações, com o ouvir outras perspectivas, com a argumentação, dentre outros.

O autor observa que os processos: identificação e o exercício de negociar que constituirão nossas identidades permite que diferentes compreensões da dicotomia individual/coletivo sejam tratadas em termos de formação de identidades. Na medida em a aprendizagem transforma nossos modos de engajar no mundo; de compreendê-lo e de sintonizar nossos empreendimentos nele; nossos repertórios, estilos e discurso; a aprendizagem, também, transforma quem somos e o quê podemos fazer. Isso é dizer que a aprendizagem não é uma questão de mera acumulação de habilidades e informações, mas um processo que faz uma pessoa ser como ela é, ou o que ela não é. "Acumulamos habilidades e informações não com uma finalidade abstrata em si mesma, mas em serviço de uma identidade" (p.215).

Educação

Wenger propõe um desenho para a aprendizagem com base nas três dimensões: engajamento, imaginação e alinhamento, as quais, a seu ver, caracterizam os modos de se pertencer a uma comunidade de prática ou as fontes de identidade. Antes de prosseguir, vejamos, de maneira breve, no que consistem essas dimensões.

Engajamento tem a ver com um envolvimento ativo em processos de negociação mútua de significados. Imaginação permite-nos criar imagens do mundo e ver conexões através do tempo e espaço pela extrapolação de nossas próprias experiências. Em particular, essa dimensão acomoda a criatividade. Alinhamento relaciona-se à coordenação de nossas energias e ações buscando acomodá-las a uma estrutura ampla, e à nossa contribuição em empreendimentos mais gerais (p.174). É importante destacar que essas três dimensões não são mutuamente excludentes; cada uma delas afeta as demais.

O papel da educação, diz o autor, é, então, o de dar suporte à formação de comunidades de aprendizagem – ambientes de identidades que promovam possíveis trajetórias – nas quais os alunos tenham a oportunidade de exercer:

1. Engajamento: atividades que demandam envolvimento mútuo, desafios e responsabilidades para encorajar os alunos a explorarem novos territórios, continuidade para que os participantes possam desenvolver práticas compartilhadas

e comprometimento a longo termo para com as suas empreitadas e para uns com os outros (p.272).

2. Imaginação: dar aos alunos uma visão das trajetórias possíveis e disponíveis em várias comunidades, incentivá-los a explorar quem eles são, quem eles não são ou quem eles poderão vir a ser, motivá-los a buscarem experiências distintas (p.273).
3. Alinhamento: encontrar modos de coordenar perspectivas conflitantes e múltiplos estilos e discursos (p.274).

A fim de que as dimensões: engajamento, imaginação e alinhamento possam ser combinados, as comunidades de aprendizagem precisam usar o mundo à sua volta como um recurso de aprendizagem, como também ser um recurso de aprendizagem para o mundo. Elas não podem ser fechadas. Ao contrário, elas devem oferecer aos alunos conexões a outras comunidades e interações entre gerações de modo a consolidar suas participações nas histórias da prática.

Para finalizar essa seção, gostaria de tecer alguns comentários. Em primeiro lugar, a teoria de Wenger não advoga que toda aprendizagem ocorre, necessariamente, através de interações entre indivíduos. Também não nega que um indivíduo possa aprender 'sozinho', tampouco que toda a aprendizagem possui uma intenção de que o sujeito se torne um membro pleno de uma comunidade de prática ou de outro tipo de comunidade qualquer. O que o autor enfatiza é que a aprendizagem, independentemente da forma que tenha, muda o que somos mudando nossa habilidade de participar, de pertencer, de negociar significados. E essa habilidade é configurada socialmente em relação à prática; às comunidades. Em segundo lugar, o autor desenvolve o conceito de comunidades de prática sob o ponto de vista específico de comunidades profissionais. Embora as salas de aula sejam, evidentemente, um tipo de comunidade, a meu ver, não é tão simples traduzir a teoria de Wenger diretamente para elas. A fim de que isso possa ser feito é necessário, a meu ver, que se defina que tipo (ou quais tipos) de prática é fornecido pela ou ocorre na educação formal. Em terceiro lugar, ambos os focos das teorias de Lave e Wenger concentram-se na aprendizagem e esse processo parece ser largamente desatrelado do ensino intencional. Graven e Lerman (*in press*) observam que essa ausência de consideração pelo ensino intencional é problemática na educação, em particular, para nós da área de educação matemática. Esses autores observam que existem várias pesquisas na área da didática em matemática que mostram aprendizagens bem sucedidas em termos dos resultados pretendidos. Por outro lado, sob o ponto de vista dos professores, seu sucesso profissional depende de aprendizagens bem sucedidas. De fato, como já dito anteriormente, uma competência lhe será atribuída conforme sua habilidade de promover aprendizagens significativas.

3. A SALA DE AULA DE MATEMÁTICA VISTA COMO UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA ESPECÍFICA

Dentre a constelação de práticas de que nós professores participamos ou nas quais estamos envolvidos, a prática da sala de aula é, certamente, uma delas. O mesmo pode ser dito em relação aos alunos. Iniciar essa seção reconhecendo isso é olhar para a sala de aula como Lerman (1998) propõe: com uma lente cujo *zoom* vai de uma multiplicidade de práticas para uma só prática. Essa metáfora, no entanto, não torna mais fácil o trabalho de caracterizar a sala de aula de matemática como uma comunidade de prática específica. A metáfora é útil para mostrar qual será o foco de minha discussão. Como mencionado anteriormente, é evidente que uma sala de aula é uma comunidade e não um mero agregado de pessoas definido por algumas características. Salas de aula são, supostamente, formadas com o objetivo de se alcançar um propósito ou empreendimento comum: uma interação entre ensino e aprendizagem. Ou ainda, como diz Wenger (1998), para sustentar lugares de identidades que proporcionem possíveis trajetórias. Também é evidente que professores e alunos compartilham alguma prática social nesses espaços ainda que seja difícil descrever, precisamente, todas as suas características e os fatores externos que a afetam. O que não é tão evidente é o quanto a sala de aula pode ser vista como uma comunidade de prática em termos das idéias de Lave e Wenger (Watson, 1998; Boaler, 2000b).

Na seção nove – O social na construção do conhecimento pessoal – do capítulo I, contrastei o conceito de tradição de Polanyi com a caracterização de comunidades de prática de Winbourne e Watson (1998). Com base nas seções anteriores do presente capítulo podemos ver que tal caracterização é claramente compatível com as idéias de Lave e Wenger. Na seção quatro - O construtivismo social no ensino e aprendizagem de matemática – do capítulo II, mostrei que Winbourne e Watson vão além dessa caracterização quando dizem que a sala de aula de matemática pode ser vista como comunidades locais de prática. Segundo os autores, dentre os principais aspectos que caracterizam uma comunidade de prática, não se pode dizer, de maneira geral, que, em sala de aula, os participantes constituem a prática e que todos os participantes vêm a si próprios engajados numa mesma atividade. Entretanto, como vimos, Winbourne e Watson acreditam que situações de aprendizagem podem ser criadas de modo a caracterizar as salas de aula de matemática como tais comunidades, e dão alguns exemplos de atividades nas quais professores e alunos poderiam estar engajados em experiências matemáticas autênticas.

Além do aspecto relacionado ao engajamento dos alunos nas aulas de matemática, eu acrescentaria dois outros aspectos que dificultam a tradução direta das idéias de Lave e Wenger para as salas de aula de maneira geral:

1. A participação dos alunos nas práticas escolares não é voluntária.
2. Eles raramente pensam em se tornar matemáticos (ou biólogos, químicos, etc), nem professores de matemática (ou de biologia, química, etc).

Apesar disso, acredito que alguns elementos das teorias de Lave e Wenger possam ser re-significados de modo a acomodar as salas de aula de matemática como comunidades de prática particulares. Porém, anterior a isso é preciso tornar claro no que consiste (ou deveria consistir) a prática matemática escolar, incluindo suas dimensões tácitas e explícitas. A partir daí, podemos, então, argumentar que as salas de aula de matemática podem ser pensadas como um tipo particular de comunidades de prática, não só, quando restritas à criação de situações de aprendizagem específicas, como as que Winbourne e Watson propõem, mas num sentido mais amplo. E é isso que me proponho a fazer nos próximos parágrafos.

A prática matemática escolar

Como professores de matemática estamos sujeitos a uma tensão constante entre ‘o que devemos ensinar’ e ‘como ensinar’. Portanto, uma maneira útil de olhar a questão: no que consiste a prática matemática escolar, seria abordando-a em termos de currículos[30] de matemática. Para tal fim, apelarei à idéia de Wenger de que *competências podem guiar experiências* para dizer que *currículos de matemática podem guiar práticas matemáticas escolares*.

De fato, quando uma comunidade ou instituição estabelece ou propõe seu regime de competências ou o regime de competências de outras comunidades, algum tipo de prática emerge. Nesse sentido, podemos dizer que um currículo funciona como um regime de competências que estabelece ou propõe, ainda que por prescrição, uma prática (ou práticas) na escola, mais especificamente, nas salas de aula e em cada nível de ensino. Por exemplo, as competências dos professores têm a ver com a promoção de aprendizagens bem sucedidas: eles precisam desenvolver uma habilidade para orquestrar suas salas de aula de modo a dar condições para os alunos desenvolverem suas competências, conhecimentos e identidades. Isso inclui uma reflexão sobre ações pedagógicas e formas de avaliação buscando sintonizá-las com aquilo que, efetivamente, eles esperam que os alunos aprendam. Por outro lado, as competências dos alunos têm a ver com aprendizagem significativa: eles precisam desenvolver uma habilidade para tirar proveito dos contextos de aprendizagem criados em sala de aula de modo a desenvolver seus conhecimentos e identidades. Em ambos os casos – professores e alunos – as competências podem ser mais ou menos explícitas nos currículos: elas podem estar neles prescritas ou interpretadas a partir de suas orientações ou objetivos. Na medida em que currículos expressam tendências e valores de uma certa comunidade (ou comunidades) num certo tempo, tais competências não são estáticas: elas podem variar no tempo, de acordo com o contexto ou sociedade. De qualquer modo, a fim de conquistar suas competências, professores e alunos precisam sintonizar ou transformar suas experiências de modo a adapta-las na busca por essas competências. Esse balanço ou equilíbrio – sintonizar ou transformar – define práticas escolares e, em particular, práticas nas salas de aula.. Embora reconheça que nem toda intenção de ensino resulte em aprendizagem, alguma correspondência entre ensino e aprendizagem e entre as competências propostas pelos currículos e a prática efetiva – ações de ensino

[30] O termo currículo é usado aqui em sentido amplo para designar o conjunto de orientações, objetivos, metas, programas, conteúdos específicos que serão propostos, práticas pedagógicas, estratégias de ensino e recursos didáticos que poderão ser utilizados no processo de ensino e aprendizagem, no dia-a-dia da sala de aula.

e de aprendizagem – ocorre em sala de aula. Caso contrário, um currículo seria algo dispensável ou sem utilidade o que, acredito, não deva ser o caso.

Em relação à matemática usarei um de nossos recentes trabalhos (Frade e Borges, 2002) para definir o que seja (ou o que deveria ser) uma prática matemática escolar. Como dito anteriormente, nesse trabalho analisamos atuais objetivos curriculares de diversos países e para diferentes níveis de ensino com base no modelo de Ernest do conhecimento matemático. O propósito da pesquisa foi o de apresentar evidências de que tais objetivos valorizam a aprendizagem daqueles componentes do conhecimento matemático que são principalmente tácitos. Como uma ilustração, tomemos o objetivo 1 (*Attainment Target 1*) – Usando e aplicando matemática – sugerido pelo The National Curriculum for Math of the United Kingdom[31]. Nossa opção de analisar esse objetivo deveu-se a uma crença de que ele expressa os objetivos gerais para o ensino de matemática naquilo que concerne à delimitação do contexto no qual os demais objetivos – Números e Álgebra; Forma; Espaço e Medidas; Tratamento da Informação – serão desenvolvidos.

Embora tenhamos entendido que qualquer sub-objetivo do objetivo 1 pudesse abarcar outros, se não todos os componentes do modelo de Ernest, a partir da análise de cada sub-objetivo identificamos os componentes **dominantes** do modelo. Esses deveriam ser construídos a fim de que se alcançasse ou conquistasse os sub-objetivos. Ao final da análise do objetivo 1 obtivemos a identificação representada no quadro 1.

Em relação ao sub-objetivo 4 – Desenvolvendo habilidades do pensamento matemático – a identificação correspondente à segunda linha desse quadro, por exemplo, resultou da nossa interpretação de que a ação 'fazer conjecturas e hipóteses" está intimamente ligada a uma disposição favorável para inquirir ou problematizar. Essa disposição, por sua vez, origina-se de experiências pessoais, crenças e valores sobre a matemática Assim, o componente dominante do modelo de Ernest que identificamos a fim de que esse objetivo possa ser alcançado foi 'estética e valores'. Por outro lado

[31] http://www.dfee.gov.uk/nc/matks34.html (11/16/1998)

Quadro 1 – Componentes dominantes do modelo de Ernest identificados nos objetivos curriculares no Reino Unido

Objetivo 1 (5ª a 6ª série do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio) – Usando e aplicando a matemática	**Componentes**	**Natureza**
1 Aos alunos devem ser dadas oportunidades de:	AP	PE
a) Usar e aplicar a matemática em tarefas práticas, em problemas do cotidiano e dentro da matemática em si mesma;	PMTE	PT
b) trabalhar em problemas que coloquem desafios;	EV	PT
c) buscar e considerar diferentes linhas de argumento matemático.	VM	PT
	EV	PT
2 Tomando e monitorando decisões para resolver problemas	EV	PT
a) Encontrar maneiras de superar dificuldades que aparecem; desenvolver e usar estratégias próprias;	PMTE	PT
b) escolher, selecionar e avaliar uma variedade de possíveis abordagens; identificar quais informações adicionais podem ser requeridas a fim de seguir uma linha particular de investigação; partir um problema complexo numa série de tarefas;	PMTE	PT
	VM	PT
c) escolher e organizar recursos matemáticos; estender suas visões e refletir sobre abordagens alternativas próprias;	PMTE	PT
	VM	PT
	EV	PT
d) examinar progressos durante o envolvimento no trabalho, e verificar e avaliar soluções.	EV	PT
	VM	PT
3 Comunicando matematicamente		
a) Compreender e usar a linguagem matemática e notações;	LS	PT
b) Usar formas matemáticas de comunicação, incluindo diagramas, tabelas, gráficos e recursos de computador;	LS	PT
c) Apresentar trabalhos com clareza, usando diagramas, gráficos e símbolos, adequadamente, para transportar significados;	LS	PT
d) Interpretar a matemática apresentada numa variedade de formas; avaliar formas de apresentação;	VM	PT
e) Analisar criticamente, melhorar e justificar suas escolhas de apresentação matemática.	VM	PT
	PR	PE
4 Desenvolvendo habilidades do pensamento matemático	LS	PT
a) Explicar e justificar como eles chegaram a uma conclusão ou solução de um problema;	PR	PE
b) fazer conjecturas e hipóteses, esboçar métodos e testá-los, e analisar resultados para ver se são válidos;	EV	PT
	PMTE	PT
	VM	PT
c) compreender afirmações gerais, fazer e testar generalizações, reconhecer casos particulares, e apreciar a diferença entre explicação matemática e evidência experimental;	LS	PT
	PMTE	PT
	VM	PT
d) apreciar e usar a linha de argumentação 'se...então' em números, álgebra e geometria, e esboçar inferências a partir de estatísticas;	EV	PT
	PR	PE
	PMTE	PT
e) usar o raciocínio matemático, inicialmente, na explicação e depois seguindo uma linha de argumentação, reconhecendo inconsistências.	PR	PE
	VM	PT

Legenda: **Componentes** – Componentes dominantes do modelo de Ernest; AP – afirmações e proposições; PR – provas e raciocínios; LS – linguagem e simbolismo; VM – visão meta-matemática; MPTE – métodos, procedimentos, técnicas, estratégias; EV – estética e valores; **Natureza** – Natureza dos componentes; PE – Principalmente Explícito; PT – principalmente Tácito.

"esboçar métodos para testá-los", envolve, não somente, a observação de casos particulares para, a partir dessas observações, desvendar regularidades, mas também conhecimentos sobre formas próprias da matemática de testar hipóteses e resultados. Nesse caso, identificamos os seguintes componentes dominantes: procedimentos, métodos, ... e visão meta-matemática. Finalmente, "analisar resultados para ver se eles são válidos" demanda, dentre outros, fazer conexões entre o conhecido e o novo, bem como uma forma de pensar baseada em evidência ou argumentação. Entendemos que tal ação requer conhecimentos construídos através de um processo lento de enculturação e o desenvolvimento de uma certa visão de como a matemática atua no contexto em questão. Aqui, identificamos o componente dominante 'visão meta-matemática'. Essas identificações exemplificam como o processo de análise dos objetivos curriculares, de maneira geral, foi construído no referido trabalho. Desse modo, chegamos não a uma identificação única e precisa entre os sub-objetivos e os componentes do modelo de Ernest, mas sim, a uma combinação dos componentes **predominantes** desse modelo, envolvidos em cada sub-objetivo.

Os sub-objetivos do objetivo 1 guiam, claramente, as competências pretendidas que os alunos desenvolvam no nível de ensino em questão no Reino Unido e, indiretamente, as competências dos professores. Subjacentes às competências dos alunos encontram-se os tipos de conhecimento matemático – explícito ou tácito – que eles precisariam construir para alcançá-las. Portanto, as salas de aula de matemática seriam comunidades de aprendizagem, cuja prática giraria em torno do desenvolvimento dessas competências e conhecimentos matemáticos.

Através de uma simples inspeção no quadro 1, pode-se ver que há uma preponderância dos componentes principalmente tácitos envolvidos no objetivo 1, em particular, os mais tênues e lentos componentes a serem construídos: visão meta-matemática e estética e valores. Esses são aqueles componentes que moldam nossa maneira medida em que são, em grande medida, estáveis no tempo. Essa preponderância pode ser encontrada, também, em documentos referentes a currículos de matemática dos seguintes países: Brasil, Portugal, Estados Unidos, Espanha, Alemanha e Japão, os quais, também, sofreram modificações similares em seus currículos na década de 90. Disso concluímos que existe uma tendência curricular na epistemologia da matemática escolar que valoriza uma prática matemática baseada em experiências matemáticas autênticas, isto é, em algumas práticas e processos similares àqueles usados pelos matemáticos para produzir e usar matemática.

A participação de professores e alunos nas aulas de matemática consistiria, então, em sintonizar suas experiências para acomodá-las a tais experiências. Esse balanço ou equilíbrio define ou guia o que, entendo, deveria consistir a prática matemática escolar em cada nível de ensino.

Gostaria de observar que, do mesmo modo que *experiências podem guiar competências*, segundo Wenger, podemos dizer que *práticas escolares podem guiar currículos*. Nesse caso, estou considerando duas experiências distintas: as dos professores e as dos alunos. Em relação às primeiras, algum mecanismo precisa ser criado de modo a levar em conta as experiências dos professores quando da elaboração de políticas educacionais. A realidade do dia-a-dia dos professores precisa ser negociada com a comunidade (ou comunidades) que elabora reformas curriculares para que a implementação dos currículos seja possível na prática. Em relação às experiências dos alunos, os professores precisam desenvolver uma sensibilidade para incorporá-las em suas ações de ensino. Acredito que o engajamento dos alunos nas práticas escolares depende fortemente das oportunidades que lhes são dadas de negociarem suas experiências com os participantes da prática.

Uma comunidade de prática particular

Uma vez definida a prática matemática escolar, podemos, então, analisar quais conceitos ou idéias de Lave e Wenger são aplicáveis ou não a essa prática. Por exemplo, o conceito de participação periférica legítima (Lave and Wenger, 1991) pode ser interpretado como as características dos modos através dos quais os alunos adaptam suas experiências para se engajarem na prática. Ou ainda, às intenções dos alunos em preservar um ambiente favorável e coletivo para a aprendizagem. Aqui, não vejo sentido em dizer que 'periferalidade' tem a ver com uma distância necessária da participação plena objetivando a maestria da profissão. Poderíamos dizer que periferalidade na prática de sala de aula é um modo de participação (e não um modo de não-participação como Wenger propõe) que está associado ao comprometimento do aluno (mais ou menos intenso) com sua aprendizagem. Desse modo, tal conceito estaria relacionado com motivação, interesse e predisposição para a aprendizagem e, nesse sentido, ele estaria relacionado, de alguma maneira, ao componente 'estética e valores' do modelo de Ernest do conhecimento matemático.

Por outro lado, marginalidade poderia estar associada com a falta de comprometimento do aluno, ou seja, com uma atitude estável de rejeitar a participação. Nesse caso, embora Polanyi e as teorias de aprendizagem situadas enfatizem que a aprendizagem é um compromisso do aprendiz, faz parte das competências dos professores procurar trazer os alunos não-participantes para se integrarem na prática da sala de aula. Interpretando esses conceitos – periferalidade e marginalidade – dessa maneira, os aspectos 1 e 2, mencionados anteriormente, que dificultam a tradução das idéias de Lave e Wenger para as salas de aula não seriam obstáculos para olharmos as salas de aula como comunidades de prática específicas. De fato, 'não-voluntarismo' e 'desejo de não se tornar professor de matemática ou matemático' não implicam, necessariamente, que os alunos construirão uma identidade de não-participantes da prática matemática escolar. Tampouco que eles não almejem desenvolver trajetórias possíveis ou investir em si mesmos.

Em segundo lugar, as três dimensões – engajamento mútuo, empreendimento comum e compartilhamento de repertório – as quais, segundo Wenger, caracterizam uma comunidade de prática, são ações fundamentais para o desenvolvimento da prática matemática escolar tal como ela foi definida. Práticas escolares que valorizam verdadeiras experiências matemáticas ou os componentes tácitos da aprendizagem matemática demandam, necessariamente, tais ações. Ambas as teorias de Polanyi e Ernest sustentam esse argumento, pois, cada uma a sua maneira, advoga que a prática matemática possui uma dimensão social que é essencialmente tácita. Mais especificamente, em relação às quatorze unidades de análise, sugeridas por Wenger, através das quais podemos identificar se uma comunidade de prática está sendo formada, acredito que algumas delas – 1, 2, 7, 8, 10, 11 e 12 – possam se aplicar nas salas de aulas de matemática. Em relação às demais, tenho dúvidas ainda. Examinar em detalhes essa questão requer uma investigação mais cuidadosa. Isso poderá ser apresentado numa outra oportunidade.

Em terceiro lugar, gostaria de observar que a maneira pela qual propus definir a prática matemática escolar requer um desenho para a sala de aula que proporcione aos alunos experiências de engajamento, imaginação e alinhamento, como propõe Wenger. Como já mencionado, os professores precisam garantir que isso ocorra. Mais que isso, tais ações devem ser uma prática constante em sala de aula e não características de situações específicas ou particulares de aprendizagem. Tenho discutido que a aprendizagem matemática envolve elementos explícitos e tácitos. Valorizar os tácitos não significa que os explícitos devam ser ignorados. Certamente, haverá momentos em que os alunos aprenderão pela observação e até mesmo pela imitação de seus professores ou colegas. Essas ações, também, fazem parte da aprendizagem matemática. O que é importante para a constituição de uma comunidade de prática em sala de aula, a meu ver, é que os alunos sintam que são participantes da prática podendo compartilhar suas dúvidas, conhecimentos, compreensões, significados e experiências.

Finalmente, vale a pena clarear o conceito de identidade em termos da prática matemática escolar. Como vimos nas primeiras seções desse capítulo, na visão de Lave e Wenger tal conceito traduz a idéia de que aprendizes ou alunos desenvolvem uma relação com seus conhecimentos. No caso da matemática, Boaler (2002a) caracteriza as identidades matemáticas dos alunos com "os conhecimentos que eles possuem, bem como os modos nos quais eles se apegam a esses conhecimentos, os modos nos quais os alunos usam seus conhecimentos e suas crenças matemáticas, e executam práticas que interagem com seus conhecimentos" (p. 16). Alguns exemplos de como as identidades matemáticas dos alunos têm sido tratadas na literatura da educação matemática podem ser encontrados, por exemplo, nas pesquisas de Boaler e Greeno (2000) e Winbourne (2002). Essas pesquisas sugerem que a ênfase nas práticas matemáticas escolares é uma fonte frutífera para a investigação do desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos em termos de suas identidades matemáticas.

Implicações pedagógicas

Ao dizer que os atuais objetivos curriculares aproximam a matemática escolar da matemática dos matemáticos, quero dizer que o conhecimento matemático que, espera-se, os alunos aprendam, deixa de ser entendido, apenas, como produto e justificação de um conhecimento já produzido pelos matemáticos. Ele passa a ser entendido, também, como a maneira pela qual esse conhecimento matemático científico é produzido e usado pelos matemáticos. Essa produção, por sua vez, e, também, muito do seu uso passa, necessariamente, por processos de criação ou descoberta; de previsões, formulações, exames de casos particulares, aperfeiçoamento de argumentos e escrita matemáticos, erros e acertos, conversas entre matemáticos, dentre outros. Assim, uma prática escolar que valoriza tais processos precisa reconhecer que os caminhos muitas vezes tortuosos pelos quais passam os alunos para produzirem e usarem seus conhecimentos matemáticos, são trilhados por movimentos de idas e vindas, de erros e acertos, movimentos esses naturais e similares àqueles que levam os matemáticos à descoberta matemática e ao uso do conhecimento matemático.

Por outro lado, aproximar a matemática escolar da matemática dos matemáticos não significa, necessariamente, que os contextos de significação que apoiarão as estratégias de ensino deverão ser buscados, somente, dentro da matemática. Acredito que o processo da descoberta matemática científica só se concretiza porque os contextos nos quais tal processo se realiza são significativos para os matemáticos. Em relação aos alunos, não há porque ser diferente. Portanto, esperar que os alunos se envolvam em experiências matemáticas autênticas em sala de aula é configurar a prática de sala de aula dentro do espaço de significação dos alunos, absorvendo suas linguagens, culturas, experiências de vida e instrução.

Por fim, devo dizer que tal abordagem da matemática valoriza aspectos menos explícitos da produção e uso desse conhecimento, tais como, a intuição, a imaginação e a criatividade. Daí pode-se prever os desafios a serem enfrentados por um professor da disciplina: se por um lado a matemática pode tornar-se mais interessante para o aluno, o trabalho do professor deverá tornar-se bem mais complexo na medida em que ele precisa lidar com processos menos explícitos da produção do conhecimento matemático dos alunos.

4. COMENTÁRIOS

Concluo a parte teórica desse trabalho de tese fazendo uma reflexão sobre como as teorias discutidas nos capítulos I, II e III podem ser combinadas para abordar o problema de tese que me propus a investigar. No capítulo I vimos que Polanyi nos dá informações detalhadas sobre como usamos nossos conhecimentos para adquirir novos conhecimentos, sejam eles explícitos, sejam eles tácitos, ou conquistar uma compreensão. Qualquer que seja o caso, realizamos um processo mental – ocupação – que é subjacente a todo ato do conhecer. Como usamos nossos conhecimentos de maneira subsidiária, o autor identifica tal processo com a interiorização de conhecimentos. Em outras palavras, interiorizar conhecimentos é usá-los para adquirir outros. Esse processo criativo, por sua vez, resulta na construção de entidades e, desse modo, povoamos o mundo com coisas que estamos buscando compreender. Portanto, o conceito de desenvolvimento de Polanyi – emergência - corresponde à criação de uma ontologia pelo sujeito.

Embora a teoria de Polanyi trate do conhecimento, de maneira geral, ao longo de seus trabalhos podemos ver a presença da matemática para ilustrar algumas das principais idéias do autor. Essas idéias traduzidas para o conhecimento matemático e contrastadas com a visão de Ernest do conhecimento matemático, como apresentada no capítulo II, podem resultar num poderoso referencial para investigar empiricamente as dimensões tácita e explícita do conhecimento matemático dos alunos.

Vimos que ambos os autores reconhecem que podemos adquirir conhecimentos tácitos, tanto individualmente quanto em interações com outros. No caso de algumas artes socioculturalmente estabelecidas, Polanyi diz que parte desses conhecimentos pode ser adquirida, somente, adotando-se suas tradições. Porém, tenho dito que o conceito de tradição de Polanyi não é suficiente o bastante para refletir a complexidade de comunidades que preservam essas artes e nem como os conhecimentos tácitos que nelas circulam são produzidos. Nesse ponto pode-se dizer que as teorias de Lave e Wenger cobrem os espaços deixados abertos por Polanyi. De fato, as teorias desses autores, combinadas, descrevem, em detalhes, as características dos ambientes sócio-culturais nos quais tradições são preservadas. O conceito de aprendizagem em comunidades de prática de Lave e Wenger mostra o quão tácita é a produção de conhecimentos em tais contextos. Além disso, o conceito de identidade dos autores nos permite pensar em desenvolvimento matemático num sentido mais amplo ou diferente do que aquele proposto por Polanyi: o conceito de desenvolvimento do autor tem o foco nos atributos individuais ou na habilidade dos sujeitos de construir entidades. No caso de Lave e Wenger, desenvolvimento está atrelado à habilidade do indivíduo de participar em práticas sociais: pela participação em tais práticas aprendemos como engajar no mundo. Essa aprendizagem transforma nosso entendimento de mundo, nossos repertórios, estilos e discurso, como também o quê somos e o quê podemos fazer. Desse modo, pode-se dizer que o conceito de desenvolvimento de Lave e Wenger corresponde a mudanças em nossas identidades em relação a práticas sociais. Em outras palavras, investigar o desenvolvimento matemático de um aluno seria investigar o posicionamento que ele se atribui na prática da matemática escolar, ou ainda, como ele se reconhece em relação a essa prática ou ao seu conhecimento matemático (Boaler e Greeno, 2000; Winbourne 2002).

Observo que o conceito de tradição de Polanyi não será explorado na análise dos dados empíricos. Isso ultrapassa os objetivos desse trabalho de tese e é uma área para pesquisa futura que será retomada no capítulo final da tese. Pela mesma razão essa tese não se estenderá na investigação empírica do conceito de desenvolvimento de Lave e Wenger em termos das identidades matemáticas dos alunos. Isso não significa, contudo, que algumas especulações sobre elas não serão delineadas.

CAPÍTULO IV

DESENHO DE PESQUISA

1. INTRODUÇÃO E RETOMADA DO PROBLEMA

Na introdução desse trabalho de tese procurei mostrar como, a partir de um contexto de reforma curricular, emergiram questões de pesquisa que culminaram no problema de tese que me propus investigar: como se dá o desenvolvimento, pelos alunos, da aprendizagem de um determinado conhecimento matemático, segundo suas dimensões tácitas e explícitas, durante o período em que esse conhecimento é trabalhado em sala de aula?

Com o objetivo de fundamentar em bases sólidas um estudo desse problema foram configurados, nos capítulos I, II e III, elementos teóricos relativos à teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito, à visão de Ernest do conhecimento matemático e às teorias de aprendizagem situada de Lave e Wenger. Em particular, uma articulação teórica entre o aspecto funcional da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito e os componentes do modelo de Ernest do conhecimento matemático foi construída na seção 3 do capítulo II. Subjacente a essa interpretação encontra-se a seguinte hipótese de pesquisa sob a qual se deram os estudos empíricos do problema: tal como no modelo de Ernest do conhecimento matemático, o conhecimento matemático escolar é multidimensional no sentido de que ele envolve componentes de domínios distintos, tais como, o cognitivo, o social, o de crença e de valores, e de diferentes naturezas, ou seja, uns são mais comunicáveis ou mais passíveis de explicitação do que outros.

No processo de investigação empírica o primeiro passo que, entendi, deveria ser dado para responder o problema seria verificar a ressonância dos referenciais interpretativos de Polanyi e Ernest nos dados empíricos. Isso feito, acreditei que estaria em condições de investigar o desenvolvimento dos componentes principalmente tácitos e principalmente explícitos de um certo conhecimento matemático dos alunos durante uma seqüência de aprendizagem em sala de aula. Assim sendo, a investigação empírica do problema seria realizada sob dois ângulos, nessa ordem:

a) Identificar como componentes matemáticos principalmente explícitos e principalmente tácitos, no sentido dado por Ernest, podem se manifestar em processos de aprendizagem (isto é, segundo o aspecto funcional de um conhecimento tácito, descrito por Polanyi).

b) Investigar, a partir das identificações acima, como se dá o desenvolvimento desses componentes durante o processo de aprendizagem de um conhecimento matemático.

A fim de iniciar as investigações, descritas acima, um tema matemático de pesquisa deveria ser escolhido, uma adaptação do modelo de Ernest para o conhecimento matemático dos alunos precisaria ser construída e um desenho de pesquisa precisaria ser traçado. E é a esses elementos que dedico o presente capítulo. Na segunda seção, justifico a escolha do tema matemático de pesquisa: áreas e medidas. Em particular, faço um breve relato de algumas pesquisas recentes sobre o tema. Na terceira seção, proponho uma adaptação do modelo de Ernest para o caso específico desse conhecimento matemático dos alunos. Na quarta seção do capítulo, apresento uma visão geral do cenário no qual a pesquisa foi desenvolvida, bem como da opção metodológica adotada. Discuto, mais detalhadamente, as questões de ordem ético-metodológicas envolvidas na pesquisa. Nas demais seções do capítulo descrevo, propriamente, o desenho de pesquisa empregado.

2. A ESCOLHA DO TEMA MATEMÁTICO DE PESQUISA: ÁREAS E MEDIDAS

A razão pela qual optei pelo tema áreas e medidas como tema matemático de pesquisa teve como critérios gerais:

1. Ser um conhecimento matemático que possui boa chance dos alunos possuírem um conhecimento prévio sobre ele, pois é um conhecimento que se relaciona a várias situações do cotidiano.

2. Ser um conhecimento matemático reconhecidamente importante para compreender o mundo e atuar nele.

3. Estar presente ao longo de toda a escolarização fundamental, média e superior.

Além disso, áreas e medidas é um conhecimento básico que: envolve comparação entre superfícies; se relaciona a outros conhecimentos matemáticos, como por exemplo, aos conhecimentos de comprimento e volume; integra o conceito de números ao conceito de medida; é utilizado em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, no tratamento de mapas em geografia; à medida que se progride nos níveis de escolarização, as relações entre ele e outros conhecimentos matemáticos se intensificam. Em resumo, medidas de área são parte de nossa cultura, da ciência e tecnologia e, também, da nossa vida diária.

Investigações sobre como as crianças desenvolvem esse conhecimento enfatizam seus múltiplos aspectos. Piaget, Inhelder e Szeminska (1960) concentram estudos na conservação de área. Os autores concluem que o estágio no qual as crianças são capazes de realizar, com eficiência, medidas de área é precedido do estágio no qual elas são capazes de compreender intuitivamente os processos de adição e subtração de áreas combinados com a propriedade de invariância da área em relação à mudança de posição. Douady and Perrin-Glorian (1989) pesquisaram sobre as concepções de medidas de área de crianças de 9 até 11 anos, segundo três perspectivas: (a) comparação de áreas através da manipulação de algumas figuras planas, não usando recursos de medidas; (b) área como um número que traduz comparação entre figuras planas; (c) medida de área como o produto de medidas de comprimento. Dentre outros resultados, a pesquisa mostrou que a não dissociação área- perímetro, pelas crianças, é bastante resistente. O foco da pesquisa de Héraud (1897) concentrou-se no uso de unidades de medidas de área por parte de um grupo de crianças de 8 e 9 anos. Mais precisamente, as crianças foram submetidas a uma atividade na qual elas deveriam recobrir diferentes figuras, usando uma variedade de unidades de medida de área de formatos diferentes. A análise mostrou que a maioria das crianças tende a escolher um único tipo de unidade, e que esse tipo está intimamente ligado à forma da figura cuja área está sendo medida. Mais recentemente, temos um estudo desenvolvido por Baturo e Nason (1996) que focalizou nas concepções e nos conhecimentos de áreas e medidas de um grupo de alunos do primeiro ano de um curso de licenciatura. No caso da pesquisa de Kordaki e Potari (1998) um dos objetivos foi o de investigar o efeito dos conhecimentos adquiridos do dia-a-dia e da escola acerca de medidas de área nas tomadas de decisões e ações de crianças de 12 anos. A pesquisa mostrou, dentre outros resultados, que tais conhecimentos estão impregnados de elementos culturais trazidos pelas crianças para a sala de aula. Strom, Kemeny, Lehrer e Forman (2001) analisaram uma aula na qual os alunos exploraram e debateram questões sobre o conceito de áreas e medidas. Os autores investigaram o desenvolvimento e a estruturação dos vários significados de medida de área que foram produzidos durante o curso da aula. Nesse caso, a análise deu-se sob a perspectiva da cognição emergindo de um contexto coletivo. Hino (2002) pesquisou os usos que um grupo de crianças faz da multiplicação para o cálculo de áreas. O autor mostrou que esses usos passam por três estágios hierárquicos e que o progresso das crianças de um estágio para o outro difere, notoriamente, entre elas.

Todas essas pesquisas investigaram, de uma maneira ou de outra, o pensamento de alunos (crianças ou futuros professores) com relação a aspectos bastante específicos do conteúdo ‘áreas e medidas’. Nesse sentido, encontra-se, a meu ver, a originalidade de minha pesquisa. Embora ela tenha sido realizada em dois momentos em que os alunos trabalharam com esse conteúdo matemático, focalizei não o conteúdo *per se*, mas sim, a investigação das dimensões tácitas e explícitas do conhecimento desse conteúdo pelos alunos. Além disso, os pesquisadores, mencionados no parágrafo acima, não eram os professores efetivos dos alunos ou crianças pesquisadas. No meu caso, fui pesquisadora de minha própria turma, como relatarei mais adiante.

3. O MODELO DE ERNEST ADAPTADO PARA O CONHECIMENTO DE ÁREAS E MEDIDAS DOS ALUNOS

Embora o modelo de Ernest represente o conhecimento matemático científico (isto é, dos matemáticos), na seção 3 do capítulo II argumentei como o conhecimento matemático dos alunos se aproxima desse modelo. Além disso, apesar dessa representação descrever o conhecimento matemático em sua totalidade, acredito que a mesma possa aplicar-se em parte, se não totalmente, a um conhecimento matemático específico. Nessa seção procuro clarear essas questões.

Em primeiro lugar, ao dizer que o conhecimento matemático dos alunos se aproxima do modelo de Ernest, subentende-se aí o pressuposto de que o primeiro tem uma estrutura similar ao conhecimento matemático dos matemáticos. Isso não significa, no entanto, que todos os componentes do modelo se manifestam ou se desenvolvem da mesma maneira ou, concomitantemente ou, ainda, com a mesma intensidade ao longo da educação matemática dos alunos. De fato, Skemp (1976) argumenta que um entendimento instrumental não implica, necessariamente, num entendimento relacional. Isso é o mesmo que dizer, por exemplo, que alguns procedimentos, técnicas ou métodos podem ser empregados com sucesso numa tarefa matemática específica sem que se consiga relacioná-los ou adaptá-los a uma tarefa similar. Por outro lado, é de se esperar que alguns componentes predominem sobre outros, ou que se desenvolvam mais rapidamente do que outros numa determinada fase dessa educação. A pesquisa de Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), mencionada na seção anterior, mostra exatamente isso no caso da conservação de áreas e dos procedimentos de medidas de área. No caso dos matemáticos, Kitcher (1984) mostra como isso se verifica. E para citar Polanyi e Ernest vimos que ambos advogam que conhecimentos tácitos precedem o desenvolvimento de conhecimentos explícitos.

Em segundo lugar, é sensato propor uma adaptação do modelo de Ernest para o conhecimento de áreas e medidas dos alunos que não seja especifica de cada série que eles cursam. Caso contrário, teria que listar, por exemplo, o conjunto de afirmações, proposições, provas, raciocínios, aspectos da linguagem e simbolismo, métodos, procedimentos que, espera-se, os alunos aprendam em cada série. Muitos dos elementos desse conjunto são previsíveis de serem aprendidos ou mesmo prescritos para serem ensinados, se tomarmos como base um determinado programa curricular. Mas, muitos não são, por exemplo, aqueles inesperados que surpreendem em sala de aula pela criatividade ou improvisação dos alunos. Notemos que nem Kitcher nem Ernest se propõem a descrever todos os elementos que constituem cada um dos componentes da prática matemática ou do conhecimento matemático dos matemáticos (isso seria impossível!). Eles escrevem sobre os componentes usando ilustrações. Portanto, qualquer adaptação do modelo de Ernest para os alunos deve ser, ao mesmo tempo, ampla e flexível. Ampla no sentido de que ela dê conta do desenvolvimento dos alunos como acontece na caracterização de Kitcher da prática matemática e do modelo de Ernest do conhecimento matemático. De fato, precisamos assumir que, ao desenvolver e apropriar conhecimentos, os componentes mudam e evoluem tanto no que se refere à qualidade, quanto no que se refere à quantidade de novos conhecimentos que são agregados aos componentes. Isso pode ocorrer ainda que a estrutura do modelo – em termos dos tipos de componentes que a compõem – seja estável. Flexível no sentido de que a estrutura do modelo se adapte às diversas séries que os alunos cursam.

Finalmente, o modelo de Ernest adaptado para os alunos não pode ser imperativo no que diz respeito à aceitação e consistência matemáticas tal como ele o é no caso do conhecimento dos matemáticos. Em outras palavras, os alunos são aprendizes e parte do processo de aprendizagem consiste em aperfeiçoar, gradativamente, seus entendimentos e procedimentos os quais, numa primeira manifestação, podem parecer equivocados sob o ponto de vista da disciplina. Polanyi nos alerta quanto ao risco de interpretarmos tais manifestações sempre como equívocos matemáticos ao descrever os domínios de co-operação entre o tácito e o explícito. Por exemplo, quando o aluno está operando no domínio do inefável ou no domínio da sofisticação sua fala não coincide, exatamente, com a sua compreensão. No primeiro caso isso significa que o tácito predomina ou está em processo de construção. No segundo caso o aluno pode estar num processo de elaboração do sistema simbólico que, ainda, não corresponde à sua compreensão tácita.

Feitas essas considerações, apresento, abaixo, como vejo o modelo de Ernest do conhecimento matemático adaptado ao conhecimento de áreas e medidas dos alunos. Nessa apresentação, PE significa principalmente explícito e PT significa principalmente tácito.

Afirmações e proposições (PE): esse componente incluiria, por exemplo, definições (formais ou intuitivas), hipóteses e proposições (testadas ou não) relacionadas aos conhecimentos: de área, de unidades de medidas, de transformações de unidades de medidas de áreas, das diversas maneiras de medir (contando ou através de medidas diretas - fórmulas - e indiretas), de estimativas. No caso das proposições poderíamos citar os exemplos: (a) o conhecimento de que a área de um triângulo é igual a 1/2 vezes o produto de um de seus lados pela altura relativa a esse lado; (b) o conhecimento do teorema de Pitágoras em termos das áreas dos quadrados construídos a partir dos lados do triângulo retângulo.

Provas e raciocínios (PE): esse componente compreenderia o conjunto de declarações ou argumentos usados, pelos alunos, para justificar seus raciocínios durante a aprendizagem de áreas e medidas. Tal conjunto inclui: demonstrações formais ou informais; argumentos indutivos e analógicos; soluções de problemas, incluindo análises e computações (algoritmos e regras, por exemplo). Entendo que nesse componente estaria incluído, também, um saber explicitar se um raciocínio utilizado numa prova está correto ou não. Em outras palavras, suponhamos que um aluno apresentou uma prova da proposição (a), descrita acima, e que, para isso, ele usou um determinado raciocínio. Um segundo aluno, deve saber explicitar se, na sua opinião, esse raciocínio está correto ou não. No caso de ele achar que não está correto, saber identificar onde encontra(m)-se o(os) argumento(s) impróprio(s).

Problemas e Questões (PE): esse componente não será investigado devido à dificuldade de adaptá-lo pronta e satisfatoriamente ao conhecimento dos alunos. Isso não significa que ele não possa acomodar-se no modelo de Ernest.

Linguagem e Simbolismo (PT): esse componente estaria relacionado com a utilização do vocabulário matemático usado pelo aluno para interpretar e transmitir informações sobre o conhecimento de área e medidas.

Visão metamatemática (PT): esse componente estaria associado a uma visão geral do tema e a uma certa compreensão da estrutura da matemática (por exemplo, como a lógica da matemática funciona). Uma visão geral do tema poderia incluir: o conhecimento de conceitos, fatos ou resultados equivalentes; o conhecimento de grandezas e medidas como integrador dos conhecimentos de números, geometria e tratamento da informação; o conhecimento da distinção entre os conceitos de comprimento, área e volume; a idéia de dimensão.

Métodos, procedimentos, técnicas, estratégias (PT): esse componente incluiria os conhecimentos que os alunos possuem sobre quando e como usar métodos, procedimentos, técnicas e estratégias em situações novas. Assim, o componente estaria associado ao estabelecimento de relações. Por exemplo, suponha que um aluno usou um método ou uma estratégia (pessoal ou padronizada) para resolver um problema envolvendo áreas. Antes de usar esse método ou estratégia, o aluno teria que reconhecê-los como tal por meio da evocação de alguma experiência pessoal: uma intuição, uma analogia. Ao explicitar o método ou a estratégia, essa experiência pessoal perde o caráter tácito e a explicitação, em si, passa a ser um conhecimento incluído no componente provas e raciocínios.

Estética e valores: Em relação a esse componente, é razoável supor que os alunos do ensino fundamental que já passaram por alguns anos de escolarização, tenham desenvolvido um certo senso de estética sobre a matemática, bem como o que eles valorizam na disciplina. Na medida em que esses elementos estão vinculados a uma apreciação da matemática como um todo ou de alguns de seus aspectos, resultados ou conteúdos, podemos dizer que o componente estética e valores está estritamente ligado a um gosto (ou não) pela matemática. E esse gosto pode se manifestar nos alunos por meio de predisposição, interesse, motivação e participação, por exemplo. Portanto, esse componente é fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois, de certa forma, ele funciona como condição para que os demais componentes se desenvolvam. Nesse sentido é que disse no capítulo III que o conceito de periferalidade de Wenger pode ser identificado ao componente estética e valores. De fato, como vimos, periferalidade tem a ver com participação; com o comprometimento do aluno com sua aprendizagem. Esse comprometimento pode se revelar na forma de predisposição, interesse ou motivação. Em outras palavras, ambos estética e valores e periferalidade envolvem componentes afetivos. E vice-versa: esses componentes afetivos expressam, de alguma maneira, o senso de estética e valores dos alunos em relação à matemática, como também o modo como eles participam no processo de ensino e aprendizagem. E esse modo de participação é um elemento da identidade matemática dos alunos; é uma relação que o aluno possui com o conhecimento matemático (Boaler, 2002). Assim sendo, no caso de áreas e medidas, o componente estética e valores poderia estar associado: ao reconhecimento de que tal conhecimento é importante para transmitir informações precisas do mundo a nossa volta; a uma disposição favorável para realizar ou estimar medidas quando houver necessidade; a uma sensibilidade e um gosto pelo cuidado e precisão no uso dos diferentes instrumentos de medida e na realização de medidas; a perseverança na busca de soluções; a valorização do trabalho coletivo.

Diante do exposto, a pesquisa empírica seguiu na direção de investigar como esses componentes ou suas variantes se manifestam e se desenvolvem em processos de aprendizagem.

4. CENÁRIO DE PESQUISA E OPÇÃO METODOLÓGICA

A pesquisa foi realizada com uma turma de alunos de uma escola pública de ensino fundamental, em duas fases ou momentos distintos do percurso escolar desses alunos:

1. Segundo semestre de 2000 quando eles cursavam a 5ª série (ou 1º ano do terceiro ciclo).

2. Primeiro semestre de 2001 quando eles cursavam a 6ª série (ou 2º ano do terceiro ciclo).

Em ambos os momentos os dados foram, por mim, coletados durante as aulas que ministrei sobre o tema áreas de figuras planas e medidas uma vez que exercia o papel de professora das três turmas de 5ª série e de 6ª série dessa Escola, nos anos de 2000 e 2001, respectivamente. Assim, acompanhei por dois anos como professora-pesquisadora o processo de aprendizagem do conhecimento de áreas e medidas dos alunos de uma mesma turma. Em outras palavras, durante as duas fases de pesquisa exerci, profissionalmente, ambos o papel de professora – envolvendo-me em toda a rotina que caracteriza o trabalho de sala de aula – e o papel de pesquisadora –

considerando a mesma sala de aula como meu campo de experimentação (Lerman 1990, Cochran-Smith e Lytle 1990, Baumann e Duffy 2001, Czarnocha 2002).

No exercício desse duplo papel procurei, ao máximo, seguir alguns procedimentos que considero de extrema relevância sob o ponto de vista ético-metodológico (Miles e Huberman 1994, Adler e Lerman 2001). Foram eles:

1. *Optar pela investigação empírica de um tema matemático que constasse do programa* previamente estabelecido para as turmas de 5ª série e de 6ª série da Escola, nos anos de 2000 e 2001, respectivamente. Isso porque, por um lado, a pesquisa consistia na investigação do desenvolvimento, pelos alunos, de um certo conhecimento matemático. Portanto, tal investigação demandava um tempo relativamente longo para a coleta de dados. Por outro lado, se considerado o ensino, um compromisso que tinha com os alunos, seus pais e a própria escola era o de não deixar que o tempo gasto nessa coleta de dados prejudicasse o cumprimento do referido programa. Observo que esse critério precedeu o critério de escolha do tema matemático de pesquisa.

2. *Evitar fugir dos hábitos que nas classes desenvolvo*, inclusive o de trabalhar, efetivamente, com um livro texto[32]. Em ambas as fases de pesquisa optei por não criar atividades com os alunos que considerasse artificiais à nossa rotina de sala de aula **no seguinte sentido**: a pesquisa foi realizada levando-se em conta as limitações de tempo, espaço e material disponível para trabalhar com o tema. Isso não significou, no entanto, que, em alguns momentos, não tenha exigido dos alunos um pouco mais de trabalho do que o habitual na medida em que lhes foi solicitada a elaboração de algumas produções escritas que, em situações normais, eles não precisariam elaborar. Por exemplo, antes de iniciar o estudo de um tema matemático com os alunos tenho o hábito de promover uma exposição de seus conhecimentos prévios sobre o tema na forma de discussões coletivas. Para efeito de pesquisa o que se alterou nas aulas iniciais sobre áreas e medidas, relativas às duas fases de

[32] Durante as duas fases de pesquisa, o livro adotado foi: IMENES, Luiz Márcio e LELLIS, Marcelo. *Matemática*, São Paulo: Scipione, 1997. Na primeira fase de pesquisa usou-se o volume de 5ª série enquanto que na segunda fase foi usado o volume de 6ª série.

pesquisa, foi que tal exposição realizou-se, inicialmente, na forma de um questionário-diagnóstico escrito.

3. *Priorizar o papel de professora* em função das necessidades que identificava na turma ou dos acontecimentos ocorridos em sala de aula sempre que me visse em face de ter que optar por decisões de ensino ou de pesquisa. Nesse sentido, o desenvolvimento da pesquisa foi flexível. Para ilustrar essa questão remeterei ao protocolo que elaborei no dia 30/10/2000 ao término da aula de número seis. Nesse protocolo, encontra-se registrado o seguinte:

    Comecei a aula desse dia entregando uma folha em branco para cada aluno e dizendo à turma que eles deveriam ler, em dupla, o texto sobre área de retângulos e responder por escrito o questionário Conversando sobre o texto e os exercícios 13 a 18 da página 226 para entregar. (...) Como a aula desse dia era só de 50 minutos, a maioria dos alunos não avançou muito nos exercícios. Sendo assim, me entregaram a folha praticamente com o Conversando sobre o texto e o primeiro exercício da lista. Decidi que eles deveriam terminar os exercícios em casa, nos seus próprios cadernos, pois se deixasse que eles os fizessem na próxima aula, eles ficariam uma semana sem trabalhar no assunto uma vez que nossa próxima aula é daqui a uma semana (...).

    O registro, acima, mostra que, naquela ocasião, priorizei a continuidade de uma seqüência de aprendizagem em andamento em detrimento da aplicação de um instrumento, a saber, o registro em áudio e em vídeo das interações de algumas duplas trabalhando, em sala, nos exercícios. Todavia, após finalizar tal seqüência de aprendizagem, reintegrei a alteração ocorrida ao material de pesquisa registrando em áudio e em vídeo a correção coletiva que promovi dos exercícios que os alunos trouxeram de casa.

4. *Evitar que os alunos passassem por constrangimentos ou tivessem suas privacidades ou autonomias ameaçadas em função da pesquisa*. Com relação a essa questão alguns cuidados foram tomados. Antes de iniciar a pesquisa conversei com a turma a ser pesquisada, expondo os objetivos da pesquisa, os critérios e instrumentos de pesquisa que adotaria, bem como o trabalho que desenvolveríamos. No entanto, não pude garantir, todo o tempo, que alguns constrangimentos fossem evitados. Por exemplo, ao final da primeira fase de pesquisa alguns alunos foram entrevistados em horário extra-classe para esclarecerem algumas idéias que eles tinham expresso nas suas produções escritas acerca do tema estudado. Ao analisar o registro em áudio dessa entrevista percebe-se, pela tonalidade das falas, que todos

esses alunos, com exceção do aluno A7, mostraram-se à vontade com a entrevista. No caso do aluno A7 evidencia-se, claramente, uma timidez e desconforto do aluno em responder aos esclarecimentos que lhe foram solicitados. Em tal registro, observa-se que minha curiosidade e insistência por esclarecimentos, muito provavelmente, causaram desconforto e confusão nesse aluno. A transcrição da fita de áudio referente aos trechos da entrevista com o aluno A7 que evidencia tal fato não será apresentada nesse documento porque seu efeito não é percebido como o é no registro original.

5. *Minimizar os efeitos da pesquisa provocados nos alunos e em mim*. De início, isso não me parecia muito problemático para os alunos na medida em que a Escola tem como característica ser uma escola de experimentação e pesquisa e, portanto, eles estavam acostumados a participar de projetos de ensino e de pesquisa desde as séries iniciais. No entanto, no primeiro dia da primeira fase de pesquisa algumas perturbações ou expectativas ocorreram tanto da minha parte quanto da parte dos alunos. Isso pode ser evidenciado nos trechos dos protocolos que elaborarei após o término das primeiras aulas da primeira fase de pesquisa:

   Protocolo do dia 19/10/2000:

   Os alunos e eu estávamos bastante ansiosos. Nos primeiros quarenta minutos de aula, mais ou menos, eu me sentia bastante desconfortável com aquela câmera e confesso que estava muito preocupada com a minha imagem. Não somente com a física (meus gestos), mas, também, com a minha fala. Com o passar do tempo fui relaxando e os alunos parece que também, embora reconheça que pela intimidação da câmera e dos gravadores, não agi de maneira muito natural.

   Protocolo do dia 23/10/2000:

   Hoje, fiquei bem mais relaxada. Percebi que os alunos também!

   Nos protocolos das aulas seguintes, inclusive naqueles referentes às aulas da segunda fase de pesquisa, perturbações como essas já não foram mais comentadas.

   Ainda com relação essa questão, gostaria de observar que, de maneira geral, os professores que atuam nessa Escola têm como prática incentivar o trabalho dos alunos em pequenos grupos, bem como contar com o auxílio freqüente de monitores e/ou estagiários em sala de aula. Durante a primeira fase de pesquisa contei com o auxílio de duas monitoras nas minhas três turmas de 5ª série. Já na segunda fase, duas estagiárias me acompanharam na pesquisa. Ao seu término, solicitei-lhes que elaborassem um relatório escrito no qual deveriam expressar suas impressões sobre os efeitos da pesquisa nos alunos e em mim. Tais relatórios foram entregues e anexados ao material de pesquisa. Ao analisá-los, juntamente com o meu orientador, não encontramos nenhuma alteração expressiva que pudesse comprometer a pesquisa.

6. *Iniciar os procedimentos de análise sistemática dos dados com um certo afastamento da prática docente*. Em nenhum momento após as aulas terem sido registradas, os instrumentos aplicados naquele dia foram analisados com o objetivo de modificar minha prática nas aulas seguintes. Minhas preocupações ao término de cada aula eram, principalmente: (a) fazer uma breve inspeção nos instrumentos de coleta de dados daquele dia para assegurar-me da qualidade dos seus registros; (b) decidir se seria necessário realizar entrevistas de esclarecimento na aula seguinte; (c) elaborar um protocolo com o desenvolvimento da pesquisa naquele dia para orientar-me na análise posterior dos dados ou na condução de uma entrevista caso tivesse decidido realizar. Embora tenha analisado e corrigido, isoladamente, alguns instrumentos de pesquisa – problemas, exercícios e testes individuais – logo após a sua aplicação, a análise sistemática dos dados iniciou-se, aproximadamente, seis meses após a coleta de dados da segunda fase de pesquisa. Nessa ocasião eu já não mais ministrava aulas na turma em questão.

A fim de melhor organizar a descrição do desenho de pesquisa utilizado opto por apresentar as duas fases de pesquisa, separadamente.

5. PRIMEIRA FASE DE PESQUISA

AMBIENTE DE PESQUISA

A escolha da turma de pesquisa teve como critério o fato de que, dentre as três turmas de 5ª série da Escola, em 2000, essa turma era aquela que demonstrava maior motivação, interesse e participação nas aulas de matemática. Nessa ocasião, a turma contava com 27 alunos (14 meninos e 13 meninas) cujas idades variavam de 11 a 12 anos. Com exceção de alguns poucos alunos, a turma possuía a mesma formação desde a 1ª série (ou 1º ano do primeiro ciclo).

A Escola, nessa época, possuía salas ambientes, isto é, salas equipadas conforme a necessidade e especificidade de cada disciplina. A sala ambiente de matemática não possuía carteiras individuais para os alunos. Ela era montada com mesas cujo tamanho permitia que se acomodassem dois alunos em cada mesa. A ocupação das mesas e a formação das duplas de trabalho ficavam a cargo dos alunos. Além disso, a carga horária de matemática das 5ª séries era de quatro aulas semanais, sendo cada aula de 50 minutos e duas aulas da semana eram geminadas (seguidas).

Durante o segundo semestre de 2000 contei com o auxílio de duas monitoras de um curso de licenciatura em matemática que alternavam os dias de trabalho nas minhas três turmas de 5ª série. Elas foram orientadas, por mim, a permanecerem na turma de pesquisa durante todo o período de sua realização atendendo aos alunos da mesma maneira que o faziam nas aulas normais. Embora as duas monitoras tenham me auxiliado em alguns momentos da realização da pesquisa, distribuindo ou recolhendo material dos alunos, por exemplo, não lhes foi exigido o papel de auxiliares de pesquisa; suas funções restringiram-se, prioritariamente, ao atendimento dos alunos durante as atividades desenvolvidas em sala.

Antes de iniciar a pesquisa conversei com a professora que, no ano anterior, ministrou aulas de matemática nessas mesmas três turmas para informar-me se ela havia trabalhado com os alunos o tema áreas de figuras planas e medidas. Ela me disse que não e que, em relação à geometria e medidas, seu trabalho restringiu-se, apenas, à identificação e classificação das principais figuras planas e espaciais e à medidas de comprimento.

O ESTUDO DE ÁREAS E MEDIDAS NA 5ª SÉRIE

De acordo com o programa de matemática da Escola, os objetivos do estudo de áreas e medidas nas turmas de 5ª série em 2000 eram, principalmente, os seguintes: (a) desenvolver a noção de área através da comparação entre superfícies, sendo uma delas tomada como unidade de medida; (b) calcular áreas de figuras planas de maneira precisa ou aproximada usando unidades padronizadas ou não; (c) calcular áreas de retângulos utilizando-se a fórmula. Quanto às orientações didáticas o programa sugeria que se introduzisse e explorasse o tema a partir de situações-problema e, sempre que possível, com aquelas relacionadas ao cotidiano.

Como o livro didático adotado atendia a essas orientações, tanto em seus textos quanto em seus exercícios, o trabalho com o tema seria organizado baseando-se em dois tópicos do capítulo 'Áreas e Perímetros' do livro da 5ª série. Isso não significaria, no entanto, que não seriam promovidas discussões ou que não seriam propostos exercícios ou atividades além daqueles promovidos e propostos pelo livro.

O primeiro tópico a ser estudado no livro didático chamava-se Noção de área. O texto relativo a esse tópico consistia de uma situação-problema na qual apresentava-se uma vista de cima do prédio de uma escola contendo dois pátios retangulares os quais, por sua vez, eram pavimentados com lajotas quadradas de mesmo tamanho. O problema proposto resumia-se em descobrir qual dos dois pátios era o maior. Sugerindo que a comparação dos pátios fosse observada pela quantidade de lajotas que cobria cada um deles, o texto introduzia, desse modo, o conceito de unidade de medida de área e o conceito de área como correspondendo ao número dessas unidades (no caso, o número de lajotas) que cada pátio continha.

O segundo tópico intitulava-se Áreas de retângulos. Nesse caso, o livro introduzia o tema propondo uma situação-problema na qual eram apresentados um prédio bem alto na forma de um bloco retangular revestido com cerâmicas de mesmo tamanho e um diálogo entre duas crianças acerca de qual estratégia seria mais conveniente adotar para se calcular as áreas das paredes laterais desse prédio. As alternativas discutidas pelas crianças eram duas: (a) ou se contava, uma a uma, todas as cerâmicas que revestiam o prédio ou (b) se contava o número de cerâmicas de uma fileira de cada uma das paredes e, em seguida, multiplicava-se esse número pelo número de fileiras que cada parede continha para, ao final, somar os resultados obtidos dessas multiplicações. Sugerindo que a estratégia mais conveniente (isto é, a mais econômica) nesse caso era a segunda alternativa, o texto introduzia, desse modo, a fórmula da área de retângulos.

O estudo de outros conteúdos, como por exemplo, perímetros e o cálculo de áreas por meio de composição ou decomposição de figuras estavam propostos nos exercícios que se seguiam aos textos.

INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Nessa primeira fase de pesquisa, do total de 14 aulas dedicadas ao trabalho com o tema matemático em questão, 12 foram filmadas e as falas coletivas foram gravadas. Nos momentos em que os alunos trabalharam em duplas, três dessas duplas foram escolhidas, previamente, para que suas interações fossem registradas em detalhes tanto em áudio quanto em vídeo. O critério utilizado para a escolha das duplas foi construído da seguinte maneira: no dia anterior ao início previsto da pesquisa, a monitora do dia e eu observamos quais duplas de alunos demonstravam grande interação durante a confecção dos exercícios propostos naquela aula. Seis duplas atenderam a esse critério. Dessas seis duplas, observamos quais solicitavam com maior freqüência as presenças da professora (no caso, eu) ou monitora para esclarecimentos. Três duplas satisfizeram a esse segundo critério, a saber, A14 e A23 (duas meninas), A4 e A7 (dois meninos), A5 e A11 (dois meninos)[33]. Essas duplas foram, então, selecionadas para serem gravadas durante todo o período de realização da pesquisa e os alunos que as formavam seriam aqueles cujas aprendizagens seriam investigadas mais sistematicamente.

Ao escutar as primeiras fitas de áudio do trabalho em sala, dessas duplas, para certificar-me da qualidade dos registros, tive muita dificuldade em identificar as

[33] Para efeito de pesquisa os alunos foram identificados pelo código Ai, onde i = 1, 2,..., 27.

interações da dupla de alunos A5 e A11, pois eles falavam muito baixo. Diante disso, tinha duas opções: a primeira seria pedir-lhes que discutissem um pouco mais alto para que suas falas pudessem ser mais claramente registradas. A segunda seria escolher outra dupla. Minha opção foi pela segunda alternativa, pois pensei que se optasse pela primeira os alunos A5 e A11 poderiam mudar o foco de atenção das atividades propostas para a maneira de se comunicarem. Posto isso, decidi substituir essa dupla pela dupla A24 e A25 (dois meninos) até o término da pesquisa. A opção por essa última dupla deveu-se, somente, à influência de um artigo[34] sobre pesquisa qualitativa que estudava, naquela ocasião. Tal artigo alertava o pesquisador sobre a necessidade de se dar voz, também, àqueles integrantes do grupo que, pelas suas atitudes, compromissos ou desempenhos, dele destoavam. Ao longo da pesquisa, entretanto, percebi que tal opção não me satisfazia, completamente, uma vez que os alunos dessa dupla interagiam muito pouco entre si. Mesmo tendo confirmado tal fato decidi que a dupla A24 e A25 seria gravada até o final dessa fase de pesquisa.

Os dados foram coletados por meio de: (a) questionários, (b) exercícios escritos propostos pelo livro e outros, (c) entrevistas de esclarecimento, (d) registros em áudio e vídeo das discussões coletivas, (e) registros em áudio do trabalho, em sala, das duplas previamente escolhidas, (f) registros da re-elaboração de respostas a questionários e exercícios, (g) produção escrita acerca do tema estudado, (h) teste individual e escrito. Em relação às fitas de áudio e de vídeo, elas não foram transcritas total e integralmente, e sim, parcialmente. Mas, ambas encontram-se disponíveis para qualquer consulta que se fizer necessária. Como mencionado anteriormente, após cada aula elaborei um protocolo contendo o desenvolvimento da pesquisa naquele dia, bem como observações que julguei pertinente registrar.

Convém deixar claro que todos os alunos da turma pesquisada foram submetidos aos instrumentos de pesquisa a, b, d, f, g, h, descritos no parágrafo acima. Além disso, os alunos das duplas previamente escolhidas foram submetidos aos instrumentos c, e. Alguns instrumentos foram aplicados simultaneamente, como por exemplo, os instrumentos b, e, mas a maioria foi aplicada de forma seqüenciada. As produções

---

[34] Miles, B. Matthew e Huberman, A. Michael 1994. *Qualitative Data Analysis: an expanded sourcebook*. 2nd ed., London: SAGE, Chapter 10, 245-286.

escritas de todos os alunos foram lidas e algumas delas corrigidas por mim na medida em que exercia o papel de professora da turma.

Com relação às entrevistas realizadas, devo esclarecer que elas ocorreram de duas maneiras: uma somente com perguntas de esclarecimento, sem a minha intervenção, e, outra, com a minha intervenção quando julguei necessário. A razão que me levou a optar por essa segunda forma de conduzir as entrevistas deveu-se ao fato de que, em determinados momentos, as considerei como momentos de aprendizagem tal como considero os diálogos que estabeleço com os alunos em sala de aula. Isso para a pesquisa era importante, pois, como disse anteriormente, procurei desviar-me o mínimo possível dos hábitos que desenvolvo em classe. Assim sendo, uma entrevista desse tipo poderia promover uma interação com o aluno de tal modo a conduzí-lo, gradativamente, à compreensão, à sistematização e a uma possível explicitação de sua aprendizagem no caso dessas não estarem claras para mim.

DESENVOLVIMENTO

A pesquisa foi desenvolvida de acordo com o planejamento das aulas, como sintetizado na tabela 2.

As aulas descritas na tabela 2 ocorreram na sala ambiente de matemática exceto nos dias em que os alunos elaboraram uma produção escrita acerca do tema estudado (aula 12) e que foram submetidos a um teste individual e escrito (aulas 13 e 14). Nesses dias foi promovida uma troca de sala para uma outra sala de aula que possuía carteiras individuais. Isso porque tais atividades foram consideradas produções individuais dos alunos. Embora o questionário-diagnóstico (aulas 1 e 2) também fosse considerado uma produção individual do aluno, no dia em que eles o responderam não foi preciso mudar de sala. Além disso, durante as aulas em que essas três atividades – questionário-diagnóstico, teste individual e escrito, produção escrita acerca do tema estudado – foram desenvolvidas, a monitora do dia e eu não atendemos aos alunos individualmente. Nas demais aulas, especialmente naquelas em que os alunos resolveram exercícios e problemas, a monitora do dia e eu circulamos pela sala atendendo aos alunos.

Tabela 2 – Seqüência de aulas/ atividades, conteúdos desenvolvidos/condução das atividades (1ª fase).

Aulas	Conteúdos/Atividades	Condução
1 e 2	Questionário-diagnóstico: conhecimento prévio dos alunos acerca de áreas e medidas. Introdução: de medidas de área através da comparação entre duas superfícies, sendo uma delas tomada como unidade de medida; do conceito de área como sendo o número dessas unidades que recobrem uma superfície; de unidades padrões de medida de área (1 cm^2, 1m^2 e km^2). Questionário e exercícios propostos pelo livro.	A primeira aula iniciou-se com a aplicação de um questionário-diagnóstico seguida da leitura, pelos alunos, de suas respostas e da reelaboração das respostas iniciais. Após o recolhimento desse material os conteúdos, descritos ao lado, foram introduzidos, mais sistematicamente, a partir da leitura e discussão coletiva do texto 'Noção de área' do capítulo 'Áreas e perímetros' do livro didático adotado. Ao término da discussão o questionário e os exercícios foram trabalhados em sala de aula e em dupla.
3	Continuação dos exercícios. Entrevistas de esclarecimento.	A confecção dos exercícios, pelos alunos, ocorreu como na aula anterior. Enquanto os alunos resolviam os exercícios foram realizadas, na própria sala de aula, entrevistas de esclarecimento com os alunos pesquisados sobre suas respostas aos itens 4 e 5 do questionário-diagnóstico. Outros exercícios do livro foram propostos de Para Casa.
4 e 5	Correção dos exercícios de Para Cara propostos na aula anterior. Introdução da unidade de medida de área 'hectare (ha)' e sua relação com o km^2.	A correção dos exercícios e o conteúdo introduzido foram discutidos coletivamente. Ao término dessa discussão, os alunos tiveram a oportunidade de reelaborar suas respostas iniciais dos exercícios.
6	Introdução: das fórmulas para o cálculo de áreas do quadrado e do retângulo; do cálculo de áreas a partir da decomposição de figuras. Questionário e exercícios propostos pelo livro.	As fórmulas para o cálculo de áreas do quadrado e do retângulo foram introduzidas a partir da leitura do texto 'Áreas de retângulos' pertencente, ainda, ao capítulo 'Áreas e perímetros' do livro didático. P orém, para essa atividade, foi pedido aos alunos que lessem e discutissem o texto, em dupla, bem como respondessem, por escrito, o questionário e os exercícios sem que a professora discutisse o texto *a priori*. Para Casa: terminar os exercícios.
7	Reflexão sobre as aulas anteriores: dedução das fórmulas; diferença entre retângulos e quadrados; diferença entre perímetro e área; multiplicação de decimais. Correção dos exercícios propostos na aula anterior.	A professora iniciou a aula discutindo o texto lido pelos alunos na aula anterior ao mesmo tempo em que promoveu uma reflexão sobre alguns conteúdos já tratados. Feito isso, foram promovidas correções e discussões coletivas do questionário e dos exercícios. Exercícios de Para Casa.
8	Correção dos exercícios de Para casa. Reflexão sobre as relações ou não-relações entre: perímetro/contorno (número/linha), área/interior (número/superfície), perímetro/área e medidas de comprimento/medidas de área.	A correção dos exercícios e a reflexão sobre os conteúdos foram conduzidas coletivamente.
9 e 10	Reflexão sobre o fato de que o perímetro não determina a área. Lista de problemas elaborada pela professora.	Manipulação, pelos alunos, de um barbante amarrado nas pontas para visualizar a obtenção de figuras de mesmo perímetro e áreas diferentes. Após essa atividade, os alunos trabalharam, em dupla, na resolução de quatro problemas de uma lista elaborada pela professora.
11	Correção dos problemas.	Correção e discussão coletiva dos problemas.
12	Continuação da correção dos problemas. Produção escrita, pelos alunos, sobre o tema estudado.	Correção e discussão coletiva dos problemas. Ao término dessas, foi solicitado aos alunos que elaborassem uma produção escrita e individual sobre o tema estudado.
13 e 14	Teste individual e escrito.	Aplicação de um teste individual e escrito sobre o tema estudado. A professora leu cada uma das questões e esclareceu algumas dúvidas dos alunos quanto a alguns de seus enunciados.

Questionário-diagnóstico:

O questionário diagnóstico constou de cinco itens e teve como objetivo o de expor os conhecimentos prévios dos alunos acerca de áreas e medidas. Embora soubesse que as três turmas de 5ª série da Escola não haviam trabalhado esse tema, nos anos anteriores, isso não significava, para mim, que os alunos não possuíssem um conhecimento prévio sobre o tema. Tal questionário foi, também, elaborado com o propósito de se tornar um instrumento de aprendizagem.

O objetivo do primeiro item foi o de identificar se os alunos associavam, de alguma maneira, a palavra 'área' ao conceito matemático de área. Esse item foi entregue aos alunos numa folha separada dos demais. Os alunos receberam uma outra folha contendo os demais itens, somente, quando responderam a esse primeiro. Isso foi feito para que os alunos não fossem influenciados pelos enunciados dos itens seguintes.

No segundo item foi pedido aos alunos que assinalassem, dentre dez alternativas, aquelas que melhor representavam o tipo de situação na qual o conceito matemático de área se aplicava (era esperado que os alunos assinalassem cinco alternativas). O objetivo desse item foi o de identificar se os alunos sabiam distinguir situações nas quais tal conceito pode ser aplicado de situações nas quais o conceito não se aplica. Esse item poderia auxiliar, também, a interpretar o item anterior no caso em que nele fosse constatada uma dificuldade de explicitação ou uma não explicitação, pelos alunos, de seus conceitos matemáticos prévios de área. Em outras palavras, o segundo item poderia informar que mesmo tendo dificuldades em explicitar ou mesmo não tendo explicitado tais conceitos, no item anterior, os alunos conseguiam identificar situações nas quais o conceito matemático de área se aplica.

No terceiro item foi pedido aos alunos que escrevessem, dentre as figuras[35] geométricas e objetos de uma lista dada, quais dessas figuras ou objetos possuíam comprimento, área ou volume, explicando o porquê. O objetivo desse item foi o de identificar se os alunos sabiam distinguir, dentre alguns objetos e figuras, aqueles que possuíam área, comprimento ou volume. Esse item poderia indicar, também, se os alunos sabiam que: ao conceito de comprimento estão associadas figuras de dimensão 1; ao de área estão associadas figuras de dimensão 2; e ao de volume estão associadas figuras de dimensão 3. Entretanto, posso adiantar que esse item se revelou mal

[35] Estou chamando de figuras qualquer subconjunto do espaço euclidiano tridimensional.

formulado na medida em que as respostas dos alunos não surtiram os resultados pretendidos.

De fato, ao analisar os questionários respondidos verifiquei que as respostas dos alunos ao terceiro item não me levavam a interpretações satisfatórias. Quando ele foi elaborado minha expectativa era a de que os alunos incluiriam uma figura ou objeto numa única categoria: tem comprimento, tem área ou tem volume. Pensei, por exemplo, que mesmo um cubo tendo um 'certo' comprimento e uma 'certa' área, ter volume era uma característica que predominaria sobre as outras e, portanto, os alunos incluiriam o cubo, somente, na categoria tem volume. Entretanto, isso não ocorreu. A grande maioria dos alunos incluiu uma mesma figura ou objeto em mais de uma categoria. Minha pretensão foi ainda maior ao esperar que eles explicassem o porquê de incluir uma figura ou objeto numa determinada categoria através da associação com as dimensões 1, 2 ou 3. A maior parte dos alunos não explicou sua resposta. O fato de não ter chegado a interpretações satisfatórias com tal item isso não significou, para mim, que os alunos não visualizassem, de alguma maneira, uma relação entre as figuras e os objetos dados e suas dimensões mas, apenas, que o item tal como foi formulado não fornecia informações relevantes sobre essa relação. Por essa razão um item similar não seria incluído no questionário que aplicaria, posteriormente, nessa turma na segunda fase de pesquisa.

No quarto item foi pedido aos alunos que calculassem, a partir de um desenho, a área de um retângulo dada uma unidade de medida de área. O objetivo desse item foi o de identificar se os alunos poderiam calcular a área de um retângulo quadriculado onde cada quadradinho representava uma unidade de medida de área. Esse item poderia indicar se mesmo um aluno que não tivesse trabalhado com áreas e medidas anteriormente poderia inferir uma comparação entre uma unidade de medida de área e a área de um retângulo, a partir da analogia com unidades de medida de comprimento (na realidade, se o aluno conseguisse isso, no meu entender ele estaria estendendo ao cálculo de áreas seus conhecimentos sobre contagem). Se um aluno pesquisado, ou seja, um dos alunos das duplas que foram escolhidas previamente acertasse esse item, ele seria entrevistado para esclarecer o porquê de sua resposta.

No quinto item foi pedido aos alunos que calculassem a área de um retângulo dadas suas dimensões. O objetivo desse item foi o de identificar se os alunos poderiam calcular tal área utilizando a fórmula $A = b \times h$. Se um aluno pesquisado acertasse esse item, ele seria entrevistado para esclarecer se já conhecia a fórmula, se acertou por acaso ou se fez uma analogia com o item anterior.

Assim que os alunos receberam o questionário (lembrando que inicialmente eles receberam uma folha contendo o primeiro item e, somente, depois que responderam a esse primeiro foi-lhes entregue uma outra folha contendo os demais) li, em voz alta, cada item e, vez ou outra, esclarecia os enunciados. Disse aos alunos que caso eles não soubessem responder a algum item que escrevessem, no espaço reservado para as respostas, as frases 'não sei' ou 'não entendi'.

Lista de problemas:

A lista de problemas teve como objetivo ampliar o estudo de áreas e medidas que vínhamos desenvolvendo em sala com o livro didático. Os critérios utilizados para selecionar tais problemas foram: (a) se eu os considerava problemas importantes de serem discutidos; (b) se os mesmos representavam uma situação-problema nova para os alunos.

Produção escrita sobre o tema estudado:

Os objetivos dessa atividade foram principalmente dois: (a) promover uma reflexão do tema estudado; (b) identificar o quanto os alunos poderiam expor, na forma de uma produção escrita, o que aprenderam sobre áreas. Para tal, elaborei com o auxílio de uma professora de matemática da Escola, que possuía grande experiência de trabalho com turmas de 5ª série, um pequeno roteiro através do qual os alunos deveriam se orientar para elaborar tal produção.

Esclareço que sempre que terminamos o estudo de um tema matemático tenho como hábito promover uma síntese do trabalho realizado com os alunos na forma de uma discussão coletiva. Assim, o que se alterou nesse hábito, para efeito de pesquisa, foi que solicitei-lhes que fizessem, individualmente, tal síntese por escrito. Após o recolhimento desse material e uma subseqüente análise preliminar, algumas entrevistas de esclarecimento foram realizadas com os alunos pesquisados. Contudo, não promovi uma discussão coletiva dessas produções com a turma em função do tempo que dispúnhamos para trabalhar com o tema.

Teste individual e escrito:

Ao elaborar o teste individual e escrito procurei contemplar as principais idéias e procedimentos trabalhados com os alunos em sala de aula. O teste constou de cinco questões inspiradas em outros materiais didáticos e, antes de aplicá-lo, submeti o mesmo às minhas duas monitoras para que elas se expressassem quanto à sua coerência com o trabalho realizado em sala. Isso feito, as monitoras e eu concordamos que as questões poderiam nos informar sobre:

1ª questão:

a) Se os alunos compreenderam que para calcular a área de uma figura podemos usar unidades de medida de área diferentes e não padronizadas.

b) Se dadas uma figura e uma unidade de medida de área, essa última dada por meio de outra figura, os alunos aprenderam que a área da primeira figura pode ser obtida contando-se a quantidade de unidades de medida de área dessa segunda figura que cobrem a primeira.

2ª questão:

a) Se dada uma situação-problema do cotidiano, os alunos sabem calcular a área do retângulo e, em particular, a do quadrado, usando a fórmula.

b) Se os alunos sabem explicitar uma unidade de medida de área, no caso, de um retângulo, dadas as medidas de suas dimensões (Ex: $m \times m = m^2$).

3ª questão:

a) Se dada uma situação-problema do cotidiano, os alunos sabem diferenciar perímetro e área de um polígono.

b) Se os alunos sabem calcular a área de um polígono que pode ser decomposto em retângulos, a partir das áreas desses.

c) Se os alunos sabem calcular o preço total de um terreno sabendo-se o preço de uma unidade de medida de área desse terreno.

Observação: O método que consiste em calcular o valor de várias unidades a partir do valor dado de uma unidade era, supostamente, conhecido dos alunos. Contudo, o que muda nesse caso é que a unidade é uma unidade de medida de área.

4ª questão: Se dada uma figura, os alunos sabem calcular a área de um polígono, a partir de uma subtração de áreas.

5ª questão: Se os alunos sabem como usar o conceito de área numa situação-problema do cotidiano.

O tempo que foi dado aos alunos para fazer o teste foi de 1 hora e 20 minutos. À medida que eles terminavam, a monitora do dia e eu o recolhíamos. Por motivos que independeram de minha vontade, a aula dedicada ao teste não foi registrada em fitas de áudio e nem de vídeo.

O número de aulas dedicado ao trabalho com áreas e medidas nessa primeira fase de pesquisa foi de 14, lembrando que cada aula era de 50 minutos. Ou seja, foram registradas 11,6 horas de trabalho distribuídas ao longo de cinco semanas, conforme detalhado no quadro 2.

Em relação aos registros em vídeo, gostaria de observar que, durante essa primeira fase de pesquisa, nos momentos em que os alunos trabalharam em dupla a câmera de vídeo focou as duplas de alunos pesquisados. Nos momentos em que ocorreram discussões coletivas, a câmera de vídeo procurou registrar a participação de outros alunos.

Quadro 2 – Aulas da 1ª Fase de Pesquisa / Instrumentos utilizados

Aulas/Instrumentos	A	B	C	D	E	F	G	H
1 e 2 (19/10/00)	X	X		X	X	X		
3 (23/10/00)		X	X		X			
4 e 5 (26/10/00)				X				
6 (30/10/00)	X	X			X			
7 (07/11/00)				X				
8 (08/11/00)				X				
9 e 10 (09/11/00)		X		X	X			
11 (13/11/00)		X		X	X			
12 (16/11/00)				X			X	
(*) (20/11/00)			X					
13 e 14 (29/11/00)								X

Legenda:
A - Questionários
B - Exercícios escritos propostos pelo livro e outros (problemas, por exemplo)
C - Entrevistas de esclarecimento
D - Registros em áudio e vídeo das discussões coletivas
E - Registros em áudio dos trabalhos das duplas pesquisadas
F - Registros da re-elaboração de respostas a questionários e exercícios
G - Produção escrita acerca do tema estudado
H - Teste individual e escrito
(*) - Nesse dia, as entrevistas de esclarecimento foram realizadas fora do nosso horário de aulas.

6. SEGUNDA FASE DE PESQUISA

A segunda fase de pesquisa realizou-se no primeiro semestre de 2001 com a turma de 6ª série que havia sido pesquisada no semestre anterior, e foi conduzida tomando-se como base o desenvolvimento metodológico da primeira fase. Assim sendo, opto por descrever a metodologia da segunda fase no que se refere, apenas, às modificações ocorridas.

AMBIENTE DE PESQUISA

Em relação à pesquisa realizada no segundo semestre de 2000, o ambiente de pesquisa do primeiro semestre de 2001 sofreu as seguintes alterações:

No final do ano de 2000, os professores do terceiro ciclo (5ª e 6ª séries) da Escola, do qual fazia parte, reuniram-se para discutir a conveniência da reenturmação de alguns alunos para o ano de 2001. Tal reenturmação teve como objetivos: (a) diluir alguns grupos de alunos que, a nosso ver, estavam prejudicando o desenvolvimento dos trabalhos coletivos; (b) reequilibrar as turmas com alguns alunos cujas atitudes e posturas em relação aos estudos nos pareciam ser mais positivas.

Em relação ao último objetivo, mencionado acima, dentre algumas sugestões de mudanças de alunos de uma turma para a outra, foi discutida a reenturmação da aluna A23, que pertencera a uma das duplas pesquisadas na primeira fase de pesquisa. Nessa ocasião, cheguei a pensar em solicitar aos demais professores do terceiro ciclo que essa aluna não fosse reenturmada em função da pesquisa. Todavia, não levei adiante tal atitude por avaliar que tal mudança poderia beneficiar a turma que estava sendo sugerida para ela cursar a 6ª série. Assim sendo, não contaria com os dados da aluna A23 em 2001.

Por outro lado, foram integrados, dentre outros, à turma de pesquisa três alunos que tinham dificuldade em manter responsabilidades e compromissos escolares. Inicialmente, a presença desses alunos na, então, turma de pesquisa alterou bastante o ritmo de trabalho dessa turma em relação ao ritmo do ano anterior; a turma mostrou-se muito mais agitada do que habitualmente o era na 5ª série. Diante disso, optei por uma decisão de pesquisa, para não correr o risco da mesma ser prejudicada. Alguns dias antes de iniciar a pesquisa, chamei esses três alunos para informar-lhes que eu estaria dando continuidade a uma pesquisa iniciada no ano anterior e solicitei-lhes que refletissem e revissem suas atitudes em sala de aula. Caso contrário, eu solicitaria uma reunião com eles, seus pais e os professores do terceiro ciclo, para encontrarmos uma solução mais eficaz que não viesse a prejudicar o desenvolvimento da pesquisa. Eles me pediram uma chance e se comprometeram a se esforçar para melhorar suas atitudes. Se, passado um tempo, eles não conseguissem cumprir seus compromissos eu, então, poderia tomar outras providências. Mas, para a minha surpresa, esses alunos não só mudariam de postura como colaborariam efetivamente com a pesquisa em relação à participação, em todos os sentidos, nas atividades propostas.

Resumindo, em relação à constituição da 6ª série a ser pesquisada no ano de 2001 ficaria, então, decidido, pelos professores do terceiro ciclo, que: cinco alunos dessa turma seriam reenturmados em outras turmas e seis alunos dessas outras turmas seriam integrados a ela. Desse modo, a turma de pesquisa do primeiro semestre de 2001 contaria com 28 alunos (17 meninos e 11 meninas).

Uma segunda alteração percebida nessa turma no início do ano de 2001 estava relacionada à formação das duplas de alunos. A maioria das duplas que trabalhou na primeira fase de pesquisa já não possuía a mesma formação em 2001. Diante dessa constatação, tinha que optar por: (a) impor aos alunos que mantivessem as mesmas duplas do ano anterior; (b) deixar que eles escolhessem seus pares para esse ano de 2001. Decidi pela segunda opção em função das questões ético-metodológicas 2, 3 e 5 discutidas na introdução desse capítulo. Assim sendo, chamei alguns alunos das duplas pesquisadas na primeira fase de pesquisa, a saber, os alunos A4, A7 e A14 (lembrando que a aluna A23 formava uma dupla com A14 na ocasião dessa primeira fase de pesquisa) e solicitei-lhes que escolhessem seus pares para realizarmos a segunda fase de pesquisa. Disse-lhes que eles não precisariam manter os mesmos pares do ano anterior, porém, uma vez os pares escolhidos, eles teriam que mantê-los durante toda a segunda fase de pesquisa. A única condição que lhes impus foi que selecionassem seus pares utilizando como critério de escolha aqueles colegas que possuíssem com eles grande interação e que fossem tão engajados nas atividades quanto eles o eram. Isso porque queria manter o padrão de interação entre as duplas, que obtive na primeira fase de pesquisa. Quanto à dupla A24 e A25, que manteve sua formação no início de 2001, decidi que, nessa segunda fase de pesquisa, ela não mais seria gravada em detalhes em função da pouca interação entre os alunos que a compunham, fato esse constatado na fase anterior de pesquisa como já mencionado.

Após os alunos pesquisados refletirem sobre a solicitação, eles se dirigiram a mim para informar-me de suas escolhas. Os alunos A4 e A7 decidiram manter a dupla do ano anterior, a saber, a formada por eles mesmos. Já a aluna A14, após negociações com algumas colegas, decidiu constituir uma dupla com a aluna A22. Assim, até esse momento, eu tinha já confirmadas as duplas A4/A7 e A14/A22 para a continuidade da pesquisa em 2001. No entanto, necessitava investigar, mais detalhadamente, pelo menos mais duas outras duplas. O critério que utilizei para selecioná-las foi o mesmo adotado na primeira fase de pesquisa: alto grau de engajamento nas tarefas (motivação), grande interação entre os colegas de dupla, participação efetiva nas aulas (disposição para discussão) e solicitação freqüente de esclarecimentos ao professor ou monitores/estagiários. Ao final, as duplas selecionadas para serem gravadas, em detalhes, durante a segunda fase de pesquisa foram: A4/A7 (dois meninos), A14/A22 (duas meninas), A15/A19 (duas meninas) e A5/A26 (dois meninos). Diante dessas circunstâncias, os únicos alunos cujos dados teriam continuidade em 2001 eram A4, A7 e A14.

A terceira e última alteração ocorrida no ambiente de pesquisa para o ano de 2001 relacionava-se à presença, na turma a ser pesquisada, de duas estagiárias da disciplina Prática de Ensino de um curso de licenciatura em matemática. No mês que antecedeu a realização da pesquisa, essas estagiárias realizaram estágio nas minhas três turmas de 6ª série. Terminado o período de estágio elas continuaram, somente, por solicitação minha na turma de pesquisa em duas das quatro aulas semanais que tinha com a turma com o objetivo prioritário de observarem a pesquisa. Contudo, nos dias em que estavam presentes nessa turma, as duas estagiárias auxiliaram-me na distribuição e recolhimento do material dos alunos e no registro de suas falas por ocasião das discussões coletivas.

Antes de iniciar a pesquisa, conversei com elas e disse-lhes que elas poderiam atender aos alunos, esclarecendo suas dúvidas, do mesmo modo que o fizeram durante o período de estágio. Como na primeira fase de pesquisa, solicitei-lhes, também, que registrassem, por escrito, na forma de um relatório, suas impressões sobre: os efeitos da pesquisa nos alunos; os efeitos da pesquisa no pesquisador; situações de aprendizagem que elas julgassem relevantes. Tais relatórios me foram entregues e anexados ao material de pesquisa. Ao discutí-los com o meu orientador não encontramos nenhuma alteração expressiva que comprometesse a pesquisa. Ao término dessa fase de pesquisa, as duas estagiárias encerraram sua participação nas minhas aulas.

Como o foi na 5ª série, a carga horária de matemática nas turmas de 6ª séries era de quatro aulas semanais de 50 minutos cada. Porém, no ano de 2001, as aulas da turma pesquisada eram, duas a duas, geminadas.

Do total de 20 aulas dedicadas ao trabalho com áreas e medidas nessa segunda fase de pesquisa, 18 foram filmadas e as falas coletivas foram gravadas. Quanto aos demais instrumentos de coleta de dados, salvo pequenas alterações, eles foram os mesmos da fase anterior. Por essa razão, opto por descrever em seguida o trabalho com o tema áreas e medidas planejado para o ano de 2001.

O ESTUDO DE AREAS E MEDIDAS NA 6ª SÉRIE

O trabalho realizado com áreas e medidas nas turmas de 6ª série no ano de 2001 foi uma continuação do trabalho iniciado em 2000. Os objetivos do estudo desse tema nas turmas de 6ª série eram, principalmente, os seguintes: (a) trabalhar os conteúdos estudados no ano anterior, porém num nível de complexidade maior; (b) introduzir, de maneira mais sistemática, transformações de unidades de medidas de área.

No ano de 2001, o trabalho com o tema seria também organizado baseando-se no livro didático adotado na 6ª série, mais precisamente, seguindo os tópicos: 'Classificação das formas geométricas' do capítulo 'Formas geométricas', e 'Áreas' do capítulo 'Áreas e Volumes'. Por uma questão de tempo e organização que eu dispunha para trabalhar os conteúdos nas três turmas de 6ª série, o trabalho com volumes, tal como proposto pelo livro, não seria contemplado no ano de 2001. Como no ano anterior, abordei o conceito de volume de maneira intuitiva, não sistemática e com a finalidade, apenas, de diferenciá-lo do conceito de área.

O livro apresentava o tópico 'Classificação das formas geométricas', inicialmente, por meio de fotografias de vários objetos do mundo ao nosso redor (bola, pratos, pirâmides, embalagens, etc), seguidos de três quadros classificatórios de objetos ou figuras, de modo geral. O primeiro quadro dividia-se em dois e classificava tais objetos ou figuras conforme suas dimensões: formas chatas, planas, sem volume *versus* formas espaciais, que podem ter volume. O segundo quadro, também dividido em dois, classificava as formas planas em polígonos *versus* não polígonos, e o terceiro, novamente dividido em dois, classificava as formas espaciais em poliedros *versus* não poliedros. Nas subdivisões de cada quadro encontravam-se desenhos de vários objetos ou figuras geométricas de modo que o leitor dispunha somente da observação desses objetos ou figuras para associá-los àquelas classificações. Em particular, na subdivisão do primeiro quadro classificatório: formas espaciais, que podem ter volume, além de desenhos de vários objetos ou figuras tridimensionais, encontrava-se o desenho de uma figura bidimensional, parecida com uma folha de papel encurvada, o que sugeria que nem todas as figuras bidimensionais são necessariamente planas[36].

Com relação ao tópico 'Áreas', o livro propunha o trabalho através do uso do *tangram*[37]. Para tal, foram apresentados um roteiro para a sua confecção e algumas atividades a serem exploradas a partir da manipulação de suas peças. *A* primeira atividade consistia, propriamente, na construção do *tangram*. Através de uma seqüência de figuras, o livro mostrava como se deveria cortar e dobrar uma folha retangular de modo a obter um quadrado-molde com cerca de 20 cm de lado, e os respectivos polígonos que comporiam as peças do quebra-cabeça. A partir da malha de dobras construída no quadrado-molde, outro desenho indicava quais segmentos sobre essa malha deveriam ser realçados para se obter tais peças. Uma vez destacados esses segmentos, a atividade pedia que se colasse o quadrado-molde sobre uma cartolina, para que tanto ele quanto suas peças já, então, realçadas fossem recortados. *A* segunda atividade consistia na comparação das áreas das peças por meio de sobreposições das mesmas. Ainda, por meio de sobreposições, a terceira atividade convidava o leitor a descobrir as medidas dos ângulos internos de cada uma das peças. Por fim, a quarta atividade pedia que se descobrisse a área das peças do *tangram,* supondo-se que a área do quadrado em cartolina (obtido do quadrado-molde) era igual a 1. Ao término dessas atividades, o livro propunha duas listas de exercícios: uma para se fazer em sala e outra em casa.

DESENVOLVIMENTO

A segunda fase de pesquisa foi desenvolvida conforme o planejamento das aulas, como sintetizado na tabela 3.

---

[36] Nesse nível de ensino, tais conceitos matemáticos foram abordados da seguinte maneira: (1) uma figura é um subconjunto qualquer do espaço euclidiano tridimensional; (2) uma figura plana é um subconjunto qualquer de um plano; (3) uma figura espacial é qualquer figura que não é plana.

[37] O *tangram* é um antigo jogo chinês, formado por 7 polígonos, com os quais podemos montar uma grande variedade de figuras.

Tabela 3 – Seqüência de aulas/atividades, conteúdos desenvolvidos/ condução das atividades (2ª fase).

Aulas	Atividades/ Conteúdos	Condução
1 e 2	Revisão sobre classificação das formas geométricas. Exercícios do livro.	A revisão do conteúdo mencionado ao lado foi realizada a partir da observação e discussão coletiva das figuras e quadros classificatórios, apresentados no tópico 'Classificação das formas geométricas' do livro didático adotado. Ao término da discussão, os alunos passaram a fazer, em sala de aula e em dupla, exercícios propostos pelo livro.
3 e 4	Reflexão sobre a aula anterior: figuras planas e figuras espaciais. Correção dos exercícios propostos na aula anterior. Conhecimento prévio dos alunos acerca de 'áreas e medidas'.	A professora iniciou a aula promovendo uma discussão com os alunos sobre a diferença entre figuras planas e figuras espaciais. Enfatizou-se que figuras bidimensionais não são necessariamente planas. A correção dos exercícios foi feita coletivamente. Terminada a correção, os alunos se assentaram individualmente para a aplicação de um questionário-diagnóstico.
5 e 6	Discussão das respostas ao questionário-diagnóstico.	A aula iniciou-se com os alunos lendo suas respostas ao questionário. Após síntese das respostas feita pela professora, os alunos puderam reelaborar suas respostas iniciais.
7 e 8	Atividades com o *tangram* propostas pelo livro: montagem do *tangram*; cálculo das áreas das peças do *tangram* através da sobreposição de peças; cálculo dos ângulos internos das peças.	Os alunos construíram o *tangram* conforme a orientação dada pelo livro. Ao término da confecção do *tangram*, eles passaram a fazer as atividades em sala e em dupla.
8 e 10	Continuação das atividades com o *tangram*. Correção das atividades. Exercícios do livro. Revisão do cálculo de área e perímetro e introdução de transformação de unidades de medida de área.	A correção das atividades com o *tangran* foi feira coletivamente. Ao término da correção, os alunos passaram a fazer exercícios propostos pelo livro em sala e em dupla. Os conteúdos, descritos ao lado, foram trabalhados a partir desses exercícios.
11 e 12	Término dos exercícios propostos na aula anterior. Correção dos exercícios.	Os exercícios foram corrigidos coletivamente. Outros exercícios foram propostos de Para casa.
13 e 14	Correção dos exercícios de Para casa. Continuação dos exercícios do livro.	A correção dos exercícios ocorreu como de costume: coletivamente. Ao término dessa correção, os alunos continuaram a fazer outros em sala e em dupla.
15 e 16	Continuação dos exercícios propostos na aula anterior.	Diante do fato de que vários exercícios demandavam o uso do *tangram* e das dúvidas dos alunos em resolver os exercícios em casa, foi permitido que eles os terminassem em sala e em dupla.
17 e 18	Correção dos exercícios da aula anterior.	Correção e discussão coletiva dos exercícios.
19	Produção escrita, pelos alunos, sobre o tema estudado.	Os alunos se assentaram individualmente para elaborarem uma produção escrita e individual sobre o tema estudado.
20	Teste individual e escrito.	Aplicação de um teste individual e escrito sobre o tema estudado. A professora leu cada uma das questões e esclareceu algumas dúvidas dos alunos quanto a alguns de seus enunciados.

Como na primeira fase de pesquisa, durante as aulas dedicadas às atividades: questionário-diagnóstico, produção escrita acerca do tema estudado e teste individual e escrito, as estagiárias presentes no dia e eu não atendemos aos alunos individualmente. Nas demais aulas, especialmente naquelas em que os alunos confeccionaram o *tangram* e resolveram exercícios, as estagiárias presentes no dia e eu circulamos pela sala atendendo aos alunos.

Questionário-diagnóstico:

O questionário-diagnóstico foi elaborado com o objetivo de expor o conhecimento prévio dos alunos acerca de áreas e medidas. Uma vez que no ano anterior já havia trabalhado o tema, parcialmente, com a turma, o questionário-diagnóstico dessa segunda fase de pesquisa incorporou alguns itens e aspectos da linguagem diferentes dos incluídos no questionário-diagnóstico da fase anterior. Assim, em relação ao questionário-diagnóstico de 2000, o questionário de 2001 sofreu as seguintes alterações:

Em relação ao item 1, foi solicitado aos alunos que escrevessem com suas próprias palavras o que a palavra área, em matemática, significava para eles. Nesse caso, a alteração encontrava-se no enunciado do item, na medida em que nele se pedia, explicitamente, que o significado da palavra área fosse relacionado à matemática.

Em relação ao item 2, a modificação ocorrida encontrava-se no grau de dificuldade das alternativas.

O item 3 era novidade em relação ao questionário do ano anterior e foi elaborado com os seguintes objetivos: (a) identificar se os alunos sabiam comparar áreas pela observação de figuras; (b) identificar se eles conseguiam explicar o porquê de suas respostas.

Já o objetivo do item 4 que, também, era novidade em relação ao questionário do ano anterior, foi o de identificar se os alunos sabiam o caráter aditivo do conceito de áreas.

O item 5 desse questionário, embora fosse similar ao item 4 do questionário-diagnóstico da primeira fase de pesquisa, apresentou maior grau de dificuldade, em relação a esse último no que se refere aos cálculos de área.

O item 6, também uma novidade em relação ao questionário do ano anterior, foi elaborado com o objetivo de identificar se os alunos sabiam como usar o conceito de áreas numa determinada situação-problema.

Finalmente, o item 7 foi elaborado com o objetivo de identificar se os alunos sabiam como calcular a área de uma figura 'irregular' por meio de sua decomposição em figuras cujas áreas eram conhecidas e cujas dimensões haviam sido informadas. Esse item, mais uma vez, era uma novidade em relação ao questionário do ano anterior.

Produção escrita acerca do tema estudado:

Tal produção teve os mesmos objetivos da produção escrita elaborada pelos alunos na primeira fase de pesquisa: (a) promover uma reflexão do tema estudado; (b) identificar o quanto eles poderiam expor, na forma de uma produção escrita, o que aprenderam sobre áreas. Além disso, as orientações e o roteiro que lhes foram sugeridos para produzirem seus textos corresponderam aos mesmos quando da elaboração dessa produção na fase anterior.

Teste individual e escrito:

Como na fase anterior de pesquisa, procurei contemplar nesse teste as principais idéias e procedimentos trabalhados com os alunos em sala de aula. O teste constou de seis questões e, antes de aplicá-lo, submeti o mesmo às minhas duas estagiárias para assegurar-me da sua coerência com o trabalho realizado em sala. Feito isso, concordamos que suas questões poderiam nos informar sobre:

1ª questão: Se dada a área, em cm^2, de uma das peças do tangram os alunos sabem calcular as áreas das demais peças.

2ª, 3ª e 4ª questões

a) Se os alunos sabem como usar o conceito de área em situações-problema do cotidiano.

b) Se os alunos sabem calcular a área de retângulos usando a fórmula.

c) Se os alunos sabem que para realizar operações com áreas, devemos fazê-lo utilizando a mesma unidade de medida (3ª questão).

d) Se os alunos sabem como usar o caráter aditivo do conceito de áreas (4ª questão).

5ª questão: Se os alunos sabem calcular a medida do lado de um quadrado conhecida sua área.

6ª questão

a) Se dada uma situação-problema do cotidiano, os alunos sabem diferenciar perímetro e área de um polígono.

b) Se os alunos sabem calcular a área de um polígono que pode ser decomposto em retângulos, a partir das áreas desses.

c) Se os alunos sabem explicitar uma unidade de medida de área de um retângulo, dadas as medidas de comprimento do retângulo (Ex: $m \times m = m^2$).

Observação: Embora algumas questões propostas nesse teste fossem similares, do ponto de vista matemático, a alguns exercícios e problemas trabalhados ao longo das duas fases de pesquisa, procurei diversificar seus enunciados no teste. Na verdade, minha preocupação ao elaborar tal teste era a de nele incluir questões que eu considerava importantes de serem resolvidas pelos alunos, ainda que fossem questões consideradas questões padrões.

A aplicação desse teste durou 1 hora e 20 minutos, sendo recolhidos após esse período. Como na fase anterior, tais atividades não foram registradas em fitas de áudio e nem de vídeo.

O número de aulas dedicado ao trabalho com áreas e medidas nessa segunda fase de pesquisa foi de 20, lembrando que cada aula era de 50 minutos. Ou seja, foram registradas, nessa fase, 16,6 horas de trabalho, distribuídas ao longo de seis semanas conforme detalhado no quadro 3.

Quadro 3 – Aulas da 2ª Fase de Pesquisa / Instrumentos utilizados

Aulas/Instrumentos	A	B	C	D	E	F	G	H
01 e 02 (*) (23/04/01)		X		X				
03 e 04 (07/05/01)	X			X				
05 e 06 (08/05/01)				X		X		
07 e 08 (10/05/01)				X				
09 e 10 (14/05/01)		X		X	X			
11 e 12 (15/05/01)		X		X	X			
13 e 14 (21/05/01)		X		X	X			
15 e 16 (22/05/01)		X			X			
17 e 18 (24/05/01)				X				
19 (31/05/01)							X	
(*) (01/06/01)			X					
20 (05/06/01)								X

Legenda:

A - Questionários
B - Exercícios escritos propostos pelo livro e outros (problemas, por exemplo)
C - Entrevistas de esclarecimento
D - Registros em áudio e vídeo das discussões coletivas
E - Registros em áudio dos trabalhos das duplas pesquisadas
F - Registros da reelaboração de respostas a questionários e exercícios
G - Produção escrita acerca do tema estudado
H - Teste individual e escrito
(*) - Nesse dia, as entrevistas de esclarecimento foram realizadas for a da sala de aula.

Considerando-se, então, as duas fases de pesquisa, juntas, foram registradas 34 aulas o que equivale a, aproximadamente, 28,3 horas de trabalho com o tema ao longo dos anos de 2000 e 2001.

Para finalizar esse capítulo gostaria de observar algumas alterações ocorridas em relação aos registros dos instrumentos de pesquisa da segunda fase de pesquisa, se comparados com os da fase anterior. A primeira alteração refere-se aos exercícios propostos pelo livro. Ao longo da segunda fase de pesquisa optei por não recolhê-los de todos os alunos; recolhi, apenas, os exercícios dos alunos pesquisados e daqueles alunos que, voluntariamente, quiseram entregá-los. A segunda alteração consistiu na opção de deixar a câmera de vídeo focada, todo o tempo, nas duplas pesquisadas. Isso porque queria observar o comportamento dos alunos integrantes dessas duplas, não só, enquanto eles trabalhavam em pares ou participavam das correções, mas também quando os demais colegas estavam com a voz.

CAPÍTULO V

METODOLOGIA DE ANÁLISE DE UM EPISÓDIO

Esse capítulo é dedicado à metodologia de análise empregada em um estudo que investigou como conhecimentos matemáticos principalmente explícitos e principalmente tácitos, segundo o modelo de Ernest do conhecimento matemático, manifestam-se em processos de aprendizagem. Tal estudo refere-se a um episódio ocorrido durante as aulas 1 e 2 da segunda fase de pesquisa no qual a professora[38] promoveu uma discussão coletiva acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais.

A análise dos dados foi fundamentada na teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito, e beneficiou-se de uma técnica de representação gráfica dos dados inspirada no 'modelo gráfico-teórico para a estrutura de um argumento' desenvolvido por Strom, Kemeny, Lehrer e Forman (2001). No estudo apresentado por esses autores a representação gráfica traduz, diretamente, uma conversação ocorrida em sala de aula em torno do processo de elaboração de um argumento matemático. A partir dessa representação e sob a perspectiva da análise do discurso, eles analisam a estrutura semântica da conversação. Ao contrário dessa perspectiva, o foco de minha análise concentrou-se na estrutura das ações mentais que precederam as falas produzidas pelos alunos durante o processo de elaboração de suas compreensões acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais. Utilizando-me de uma variação do modelo gráfico-teórico de Strom e colaboradores (2001), desenvolvi uma representação gráfica que exibiu uma rica dinâmica entre o tácito e o explícito, e me possibilitou evidenciar, não só, as zonas de co-operação entre o tácito e o explícito no processo de articulação das

[38] Para facilitar os relatos dessa e da próxima pesquisa e deixar claro os diferentes papéis exercidos pela professora-pesquisadora, adotei a seguinte estratégia lingüística: quando quero me referir ao meu papel como pesquisadora uso a primeira pessoa do singular. Quando estou me referindo ao meu papel como professora uso a terceira pessoa do singular.

compreensões produzidas, como também as demais coordenações[39] entre essas duas dimensões dos conhecimentos dos alunos.

A justificativa da escolha desse episódio deveu-se ao fato de que, ao examinar os dados de que dispunha, vislumbrei nos registros relativos à discussão coletiva acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais um grande potencial informativo sobre: a) como componentes matemáticos principalmente explícitos, segundo o modelo de Ernest, como por exemplo, conceitos, poderiam ser usados de maneira instrumental ou subsidiária na realização de uma tarefa matemática; b) como componentes matemáticos principalmente tácitos, segundo o modelo de Ernest, tais como, aspectos da linguagem, poderiam me informar sobre a participação do tácito no processo de articulação de conceitos pelos alunos. Em outras palavras, nessa discussão vislumbrei a possibilidade, não só, de ilustrar como componentes matemáticos principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest se manifestam em processos de aprendizagem mas, sobretudo, de consolidar minha própria compreensão sobre como esse modelo poderia ser interpretado de acordo com o aspecto funcional da teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito.

1. BREVE DESCRIÇÃO DO EPISÓDIO

Como mencionado na subseção 'O estudo de áreas e medidas na 6ª série' da seção seis do capítulo anterior, o estudo sobre Classificação das Formas Geométricas desenvolveu-se a partir dos estudos de três quadros classificatórios: 1) formas chatas, planas, sem volume *versus* formas espaciais, que podem ter volume; 2) polígonos *versus* não polígonos; 3) poliedros *versus* não poliedros; propostos pelo livro didático adotado.

O episódio que analisei trata, apenas, de parte do estudo do primeiro quadro classificatório. Na figura 1 vemos que tal quadro divide-se em dois e classifica alguns objetos do mundo ao nosso redor ou figuras conforme suas dimensões: formas chatas, planas, sem volume *versus* formas espaciais, que podem ter volume. Em particular, na

[39] Aqui, coordenações correspondem a relações sem hierarquia. Numa coordenação entre elementos, não há predominância de um elemento sobre o outro; o ajuste é sincrônico.

subdivisão: formas espaciais, que podem ter volume, encontra-se o desenho de uma figura bidimensional[40] parecida com uma folha de papel encurvada[41] o que sugere que nem todas as figuras bidimensionais são, necessariamente, planas.

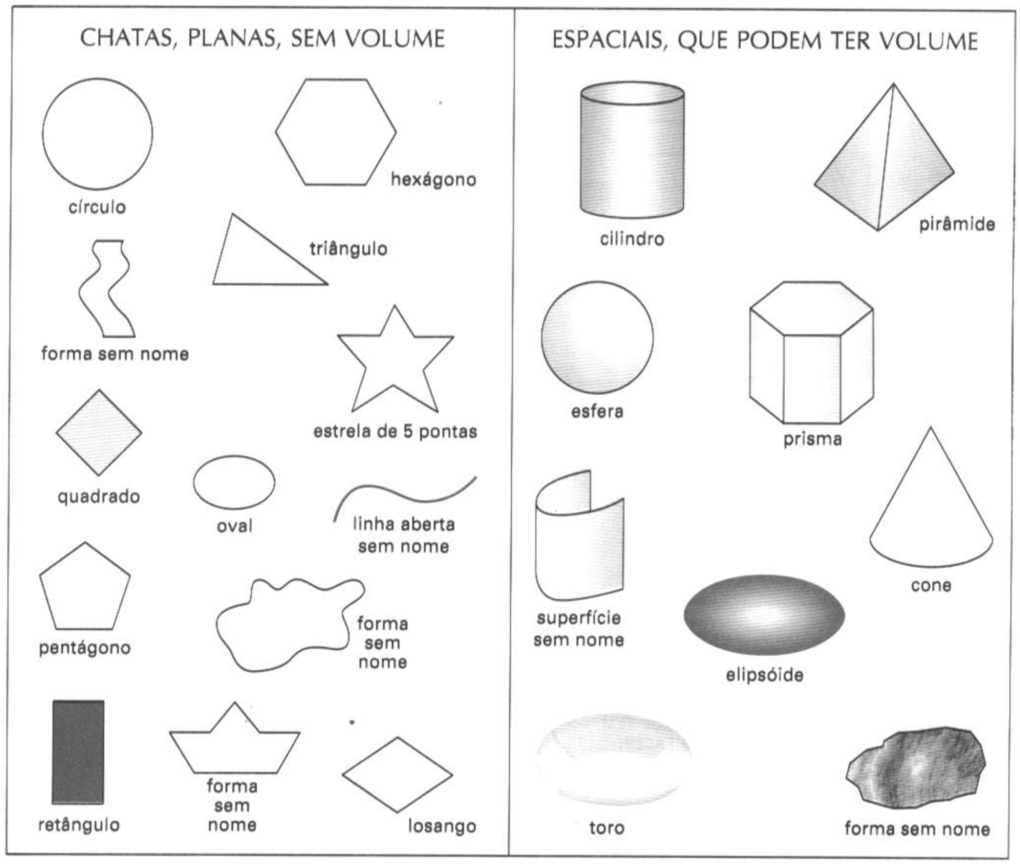


Figura 1 – Primeiro quadro classificatório

A duração do episódio correspondeu aos vinte minutos da conversação conduzida pela professora, em sala de aula, durante a qual os alunos expuseram suas compreensões acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais. A sistematização dessas compreensões, bem como a relação entre elas e entre elas e os conceitos matemáticos de figuras planas e figuras espaciais, promovidas pela professora, não constam desse episódio porque ambas ocorreram nas aulas seguintes

[40] Isto é, um espaço de Hausdorff, localmente homeomorfo a um aberto de um semi-plano de R^2.
[41] Essa figura que, no quadro aparece como 'superfície sem nome', na verdade, tem um nome matemático: superfície cilíndrica. Provalvelmente, os autores optaram por dizer que ela não tinha nome

após o estudo dos três quadros classificatórios. Assim sendo, não enfoquei nessa análise o quanto tais compreensões seriam consideradas certas ou erradas sob o ponto de vista da disciplina. Meu olhar sobre as respostas dos alunos se deu sob a perspectiva de que eles elaboraram suas compreensões usando pressuposições não testadas de conhecimentos pessoais que foram compartilhados em sala de aula.

2. DESENVOLVIMENTO E METODOLOGIA

A professora iniciou o estudo do primeiro quadro classificatório solicitando aos alunos que o observasse com atenção. Em seguida, solicitou-lhes que tentassem escrever numa folha de papel, para entregar, o que diferenciava as figuras planas das figuras espaciais. Assim sendo, a tarefa dos alunos era, inicialmente, a de elaborar uma compreensão acerca da diferenciação entre tais figuras e registrá-la por escrito. Como os alunos estavam dispostos em dupla, a professora solicitou-lhes, ainda, que elaborassem uma resposta por dupla.

Após o período de observação dado aos alunos, a professora conduziu uma conversação acerca das suas respostas. Inicialmente, ela se dirigiu a eles perguntando quem havia percebido as diferenças entre as figuras planas e figuras espaciais que constavam do quadro classificatório, mas estava achando difícil escrever. Alguns alunos se manifestaram positivamente. Diante disso, ela optou por não insistir com que os alunos focassem suas atenções na realização da tarefa por escrito, pois seu objetivo maior era o de que os alunos desenvolvessem uma compreensão acerca da diferença entre as figuras. Como conseqüência, ela decidiu não recolher a tarefa que alguns alunos, possivelmente, haviam realizado por escrito. Posto isso, a professora circulou pela sala solicitando, então, aos alunos que ou lessem o que eles tinham escrito ou falassem sobre suas compreensões. Alguns alunos leram o que escreveram e completaram seus pensamentos durante ou após as leituras. Outros, produziram uma fala na hora em que lhes foi solicitado dar uma resposta. Em alguns casos, a professora solicitou esclarecimentos. Em outros, ela esclareceu alguns comentários dos alunos ou,

para evitar que os alunos, no nível de escolarização considerado, a confundissem com o sólido ‘cilindro’ que é mais conhecido por eles.

ainda, problematizou sobre alguns aspectos por eles não observados. Todos os alunos que quiseram tiveram a oportunidade de expor suas compreensões.

Os dados foram coletados durante as duas aulas geminadas (seguidas) que a professora ministrou sobre o tema matemático em questão, e o instrumento de coleta de dados utilizado foi o registro integral em áudio dessas aulas. Durante a conversação não foi elaborado um registro de quais alunos realizaram a tarefa por escrito e quais alunos produziram uma fala em tempo real. Mas, pela análise do instrumento de pesquisa percebe-se com facilidade quais alunos participaram da conversação lendo o registro escrito de suas respostas e quais alunos produziram uma resposta verbal no momento em que foram solicitados a dá-las. Em vista disso, a análise desse episódio levou em conta que foi permitido aos alunos realizar duas tarefas distintas, a saber:

<u>Tarefa 1</u>: Elaborar uma compreensão acerca da diferenciação entre as figuras planas e espaciais e registrá-la por escrito.

<u>Tarefa 2</u>: Elaborar, em tempo real, uma verbalização acerca da sua compreensão da diferenciação entre as figuras planas e espaciais.

Após leitura preliminar dos dados, a estratégia de análise adotada foi a seguinte:

1. Transcrição integral do registro em áudio do episódio.

2. Construção de categorias a partir da análise da transcrição da fita em áudio e da consulta sistemática de seu registro original.

3. Construção de gráficos representativos da dinâmica e coordenações entre as categorias, inspirados no modelo gráfico-teórico de Strom e colaboradores (2001).

4. Diferenciação nos gráficos, através de um código, dos <u>aspectos observáveis</u> (falas dos alunos e da professora, por exemplo) e de <u>aspectos não observáveis</u> (tais como, integrações dos conhecimentos tácitos mobilizados pelos alunos que resultaram em articulações das suas compreensões) identificados durante o episódio.

5. Identificação nos gráficos, através de um código, das ações mentais e falas dos alunos em relação às tarefas 1 e 2.

Minha principal dificuldade consistiu em construir uma estratégia de análise através da qual pudesse exibir a dinâmica tácito-explícito presente no episódio. Todavia, foi a própria teoria de Polanyi – no que se refere ao aspecto funcional de um conhecimento tácito – que me permitiu construir as bases para essa estratégia: em relação à dinâmica tácito-explícito que está presente em todo ato do conhecer, vimos que o autor sugere examinar a participação do tácito no processo de articulação (ou seja, o processo no qual o tácito co-opera com o explícito) através de três áreas ou domínios nos quais a relação entre pensamento e fala varia de um extremo ao outro, passando por um nível intermediário. São eles: domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação (seção 8 do capítulo I).

Distinguir em que domínio o aluno está operando não é um ato de mera constatação ou inferência imediata. Polanyi nos alerta para a existência de domínios de operação nos quais a articulação pode não coincidir (domínio da sofisticação) ou pode coincidir vagamente (domínio do inefável) com a compreensão explicitada. Disto decorre que, identificar tais domínios envolve uma interpretação arriscada por parte da pessoa que procura descrever o modo de operar do aluno. Cabe lembrar que nem mesmo o próprio aluno tem um acesso direto, privilegiado ao seu modo de operar e, portanto, de descrevê-lo. Essa identificação, necessariamente, exige inferências de ordem mais alta, mais reflexão e esforço mental, ou ainda, julgamentos mais arriscados. Essas inferências se contrapõem àquelas mais imediatas, ou seja, aquelas nas quais a distância entre o inferido e o observável (fala ou comportamento) pode ser dita 'minimizada ao máximo'. As inferências que nos permitem identificar o domínio de operação do aluno estão baseadas nas apreensões de dicas/pistas mais ou menos fragmentárias, ou de aspectos muitos particulares de sua compreensão, os quais são refletidos em sua fala de maneira bastante tênue. Em resumo, as evidências que apresento, como toda e qualquer boa evidência, não são evidentes por si mesmas. Na verdade, elas são construções genuínas da pesquisadora; artefatos criados para interpretar os atos explícitos da fala e coordená-los com os modos tácitos de operar do aluno.

Partindo dessa perspectiva, assumi que minha tarefa se iniciaria com a elaboração de uma taxionomia que desse conta dos domínios de operação do aluno. Para tal, deveria examinar os registros originais do episódio e suas transcrições em busca de trechos das falas dos alunos (não, necessariamente, coincidentes com os turnos das falas) que pudessem ser interpretados como resultantes de seus modos de operar. Por outro lado, cada articulação interna identificada seria seguida de uma fala explícita ao mesmo tempo em que precedida da mobilização de conhecimentos principalmente explícitos ou principalmente tácitos que compõem uma compreensão. Essa compreensão, por sua vez, era, de alguma forma, projetada na fala e identificada. Isso será melhor ilustrado na próxima seção.

3. CONSTRUÇÃO DAS CATEGORIAS DE ANÁLISE EM FUNÇÃO DAS FALAS E OUTRAS AÇÕES PRODUZIDAS DURANTE O EVENTO

Através de um intenso trabalho de reflexão, interpretação e refinamentos sucessivos, procurei identificar dicas ou pistas nas falas dos alunos para inferir sobre suas compreensões. Nesse processo encontrei alguns padrões de compreensão dos alunos, bem como de intervenções da professora. A partir desses padrões foram, então, criados grupos de categorias que expressavam as compreensões dos alunos, suas articulações internas (ou os domínios em que operavam) e ações da professora. Optei por não especular sobre as operações mentais da professora. Caracterizei, apenas, seus comportamentos observáveis (falas) para diminuir os riscos de interpretação. A partir, então, das falas dos alunos e da professora, foram criados os seguintes grupos de categorias[42]:

[42] A criação de categorias exigiu, é claro, uma análise dos dados. Porém, tal análise pode ser dita intermediária para efeito do estudo do episódio como um todo. De fato, como veremos, ela serviu de base para que eu pudesse desenvolver uma metodologia de análise para o episódio usando uma variação da técnica de representação gráfica de Strom e colaboradores (2001). Nesse sentido, o processo de construção das categorias, embora tenha envolvido análise dos dados, é parte da metodologia empregada na análise do episódio.

- conhecimentos usados de maneira subsidiária (conhecimentos tácitos) pelos alunos para realizar as tarefas 1 e 2.

- falas dos alunos acerca da sua compreensão da entidade integrada – a diferenciação entre figuras planas e espaciais – considerando-se ambas as tarefas 1 e 2.

- intervenções da professora.

Além dessas, foram construídas duas outras categorias: uma relativa ao processo de observação do quadro classificatório, pelos alunos, a qual denominei 'concentração', e outra, relativa ao processo mudança de foco da entidade integrada para os particulares.

A tabela 4 mostra as categorias C1,..,C7 que representam os diversos conhecimentos tácitos, matemáticos ou não – superfícies, capacidade, espessura, movimentos rígidos, dobradura, realidade tangível e meta-cognição – mobilizados pelos alunos na elaboração de uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais. Observo que o fato de terem sido identificados nas falas dos alunos os conhecimentos: superfícies, capacidade, espessura, movimentos rígidos, dobradura e realidade tangível, os quais interpretei como sendo conhecimentos matemáticos, não quer dizer que os alunos tivessem consciência desses conhecimentos ou mesmo que esses constituíam conhecimentos matemáticos formalizados. Também não faço uma afirmação sobre a origem desses conhecimentos: se eram conhecimentos matemáticos advindos de instrução escolar, se foram adquiridos informalmente através de experiências do dia-a-dia ou, ainda, se eram idéias matemáticas embrionárias. A razão pela qual interpretei os conhecimentos, listados acima, como sendo matemáticos deve-se ao fato de que eles foram usados tacitamente (isto é, subsidiariamente ou instrumentalmente) durante a realização de uma tarefa matemática. Além disso, no futuro, esses conhecimentos poderiam vir a ser formalizados matematicamente e, então, os alunos poderiam reconhecê-los como sendo conhecimentos matemáticos. Resumindo, interpretações como essas são construídas pela pesquisadora; a identificação dos conhecimentos dos alunos se deu sob o olhar de uma pesquisadora que possui uma formação matemática.

Como disse, tais conhecimentos foram inferidos a partir de pistas, mais ou menos fragmentárias, contidas nas falas dos alunos e, por mim, apreendidas e significadas. Ao ser perguntado pela professora sobre a diferença entre figuras planas e figuras espaciais, um aluno, por exemplo, respondeu o seguinte, em relação à tarefa 2: "Esse aqui...é tipo oco por dentro, e as chatas, planas e sem volume não é oco por dentro". As palavras ou expressões 'oco' e 'por dentro' foram interpretadas como pistas dadas pelo aluno de que, dentre os conhecimentos que ele mobilizou e integrou para elaborar tal compreensão, estão seus conhecimentos matemáticos pessoais de uma propriedade inerente dos objetos tridimensionais: espessura ou profundidade. Daí a denominação 'espessura' dada a essa categoria. Seguindo o mesmo raciocínio, as demais categorias foram construídas e denominadas.

Tabela 4 - Conhecimentos tácitos (conhecimentos usados subsidiariamente) identificados

Código	Denominação da categoria	Domínio do conhecimento	Exemplo
C1	Superfície	Matemático	"As semelhanças eu coloquei assim: em algumas figuras **aparecem algumas formas chatas que formam** uma figura com volume. Exemplo, o **cilindro** tem **duas faces** com a **forma** de um **círculo**, o **prisma** tem **duas faces** de um **hexágono** e **duas** de um **retângulo**." (Tarefa 1)
C2	Capacidade	Matemático	"Aqui, nós colocamos assim: a diferença entre as chatas, planas e sem volume e as espaciais que podem ter volume é que as chatas **não podem colocar material dentro** e as que tem volume **podem ter materiais por dentro**." (Tarefa 1)
C3	Espessura	Matemático	"Esse aqui (...) é tipo **oco por dentro**, e as chatas, planas e sem volume não é **oco por dentro**." (Tarefa 2)
C4	Movimentos rígidos	Matemático	"É que por exemplo, a pirâmide e o triângulo. Se pegar um triângulo desse e **tirar ele da folha** vai ser igual a folha. Você **vira ela** e tá igual a mesma coisa. Agora essa daqui vai ser igual um lápis, você **vai virando ela**, ela **vai tendo outros ângulos de visão**, eu acho que a principal diferença é essa." (Tarefa 2)
C5	Dobradura não-plana	Matemático	"(...) nós colocamos aqui que as figuras sem volume **não ficam em pé** e as figuras espaciais **ficam em pé**" (Tarefa 1)
C6	Realidade tangível	Matemático	"Olha aqui, todas as **formas espaciais** que tem volume dão **exemplo de ser reais** (...)" (Tarefa 2)
C7	Meta-cognição	Não-matemático	"Ah, eu **entendi mais ou menos** o que algumas são(...)" (Tarefa 2)

Observação: As palavras ou expressões em negrito, na quarta coluna, correspondem às pistas dos particulares do conhecimento tácito do aluno identificado.

A categoria superfície representa, então, os conhecimentos matemáticos tácitos cujas pistas dadas pelo aluno indicam que ele mobilizou e integrou particulares de conhecimentos sobre características das superfícies de alguns sólidos. Já a categoria capacidade corresponde aos conhecimentos matemáticos tácitos cujas pistas dadas pelo aluno indicam que os particulares que ele mobilizou e integrou envolveram os conceitos de capacidade ou volume dos sólidos. As falas exemplificativas da categoria movimentos rígidos[43] sugerem que os alunos elaboraram uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais em termos das diferentes perspectivas através das quais essas figuras podem ser vistas se nelas realizarmos movimentos de rotação e/ou translação no espaço. A categoria dobradura não-plana representa os conhecimentos matemáticos tácitos cujas pistas dadas pelo aluno sugerem que ele mobilizou e integrou particulares de um conhecimento relacionado a uma propriedade inerente das figuras espaciais que as impede de 'desabarem' (colapsarem) sobre qualquer plano. Tal propriedade foi interpretada como sendo dobradura não-plana, isto é, dobras cujo resultado final é uma figura que 'sai do plano'. Nesse caso, é possível que o aluno possua idéias embrionárias de que figuras espaciais admitem três direções espaciais não coplanares e que figuras bidimensionais não são, necessariamente, figuras planas. Na categoria realidade tangível foram incluídos os conhecimentos tácitos cujas pistas indicam que os particulares mobilizados e integrados pelo aluno para elaborar uma compreensão da entidade integrada expressam, de alguma maneira, uma concepção ontológica pessoal da entidade: a de que figuras espaciais são objetos reais porque são concretas/tangíveis e que figuras planas não pertencem à realidade porque não são concretas. Tais conhecimentos foram interpretados como conhecimentos tácitos matemáticos. Isso porque eles podem ser identificados com conhecimentos meta-matemáticos (ou estão incluídos no componente meta-matemático do modelo de Ernest) na medida em que o processo de construção de uma visão da matemática como um todo é acompanhado do desenvolvimento de uma concepção ontológica dos entes matemáticos[44]. Por exemplo, as seguintes falas de um aluno, em relação à tarefa 2: "Isso aqui parece ser um ovo" e "Isso daqui parece ser tipo um desenho" sugere que, para esse aluno, a representação desenho pode não ser real. É possível até que, sendo a matemática uma disciplina que trata de entes abstratos, muitos deles comumente representados por desenhos, o aluno não a considere real. Por fim, a categoria meta-cognição corresponde aos conhecimentos tácitos cujas pistas indicam que o aluno está consciente da sua aprendizagem na medida em que ele expressa, de uma maneira ou de

[43] Isometrias espaciais euclidianas, isto é, aplicações do espaço euclidiano no espaço euclidiano que preservam distância.
[44] Aspecto ontológico da estrutura do ato tácito do conhecer (Polanyi, 1983).

outra, que se encontra, ainda, num processo de controle e/ou reflexão das suas ações. Vejamos outros exemplos de falas exemplificativas das categorias C1,..,C7:

C1 **–** Superfície**:**

> "A **base** é, o **hexágono** é a **superfície** e a ba...tem a **superfície** e a **base do prisma**." (Tarefa 1)
>
> "..as espaciais a maioria delas **não tem polígonos**, a maioria. E as chatas, planas e sem volume quase todas **tem polígonos**." (Tarefa 2)
>
> "..a gente **corta uma tirinha** de um **quadrado**, **só uma tirinha** prá **montar ele**." (Tarefa 2)
>
> "..as chatas e planas parecem...não ter **muitos lados e nem superfícies**. E as espaciais que podem ter volume...**tem lado**..Parece ter **superfícies cobertas e fechadas**." (Tarefa 1)

Note que em todas as falas, descritas acima, aparecem nomes matemáticos, tais como, base, hexágono, quadrados, prisma, superfície, polígonos e lados. Ainda que os alunos que produziram essas falas não fossem capazes de explicitar completamente os conceitos matemáticos correspondentes a esses nomes, é razoável supor que tais conceitos foram, de uma maneira ou de outra, e em ocasiões anteriores, ensinados aos alunos explicitamente, ou seja, por meio da linguagem proposicional (Ex: Hexágono é um polígono de 6 lados). Assim, podemos dizer que os alunos cujas falas expressaram características dos sólidos, mobilizaram conhecimentos matemáticos principalmente explícitos, no sentido dado por Ernest. Nesse caso, temos um bom exemplo de como tais conhecimentos podem se tornar tácitos no sentido do aspecto funcional da teoria de Polanyi. Em outras palavras, dentre os conhecimentos subsidiários que os alunos usaram para elaborar uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais, estão seus conhecimentos principalmente explícitos sobre a superfície de alguns sólidos.

C2 – Capacidade:

> "..porque essas aqui podem..elas têm volume, então elas..como é que fala? Podem **colocar algum material**, esses aqui não tem jeito." (Tarefa 2)
>
> "A diferença das chatas, planas, sem volume para as espaciais que podem tem volume é porque as chatas, planas sem volume elas não podem **conter nada em seu interior** pois não tem volume, ou seja, elas são chatas e lisas." (Tarefa 1)
>
> "E a diferença entre as espaciais que podem ter volume e as planas sem volume é que elas podem **conter algo dentro**..".(Tarefa 1)

"Essa daqui pode ter alguma **coisa dentro** delas ou então não. Essas daqui são simples, não tem nada...". (Tarefa 2)

É interessante observar nas falas, acima, como são parecidas as expressões usadas pelos alunos para projetar seus conhecimentos tácitos de capacidade. Para formular uma interpretação mais consistente de que tais conhecimentos são principalmente explícitos, no sentido de Ernest, seria preciso investigar como o conceito de capacidade foi trabalhado com os alunos em anos anteriores. No entanto, é razoável supor que os alunos construíram tal conceito através de elementos explícitos da linguagem.

C3 – Espessura:

"...eu acho que todas as formas espaciais...que tem volume **são ligadas ... de uma forma**. E essas outras aqui são todas do tipo ...são só de senhos **finos** assim...". (Tarefa 2)

"...as chatas e planas parecem não **ter fundo**...E as espaciais que podem ter volume parecem **ter fundo**..." (Tarefa 1)

"Essa aqui **tem tipo uma luz** aqui assim que faz ela ficar mais..."(Tarefa 2)

"...aqui na **esfera** tem tipo um, não sei, **dá um reflexo**..." (Tarefa 2)

No caso dessa categoria penso ser mais difícil elaborar uma interpretação de que os conhecimentos tácitos de espessura dos sólidos que os alunos mobilizaram tacitamente para produzir as falas são principalmente explícitos, no sentido de Ernest. Na última fala, entretanto, é razoável dizer que, ao usar a palavra 'esfera' o aluno tenha mobilizado de maneira subsidiária um conhecimento matemático principalmente explícito na medida em que esse aluno, possivelmente, aprendeu, em ocasiões anteriores, o que é uma esfera por meio de denominação. E aprender por denominação não deixa de ser aprender de maneira explícita.

C4 – Movimentos rígidos:

"As formas sem volume só podem **ser vistas de uma maneira**...E as formas volumosas podem **ser vistas de várias maneiras**..." (Tarefa 1)

"A esfera você pode **girar ela de várias maneiras**. Que um tem volume, um você **pode virar ele assim**...Ele **tem várias formas de ver**." (Tarefa 2)

C5 – Dobradura: único exemplo

"...nós colocamos aqui que as figuras sem volume **não ficam em pé** e as figuras espaciais **ficam em pé**." (Tarefa 1)

Em relação às categorias C4 e C5, mencionadas acima, o comentário feito em relação às falas exemplificativas da categoria C3 se aplica.

C6 – Realidade tangível: Outros exemplos:

> "E as **espaciais** que podem ter volume parecem… **ser reais** …" (Tarefa 1)
>
> "Isso aqui **parece ser um ovo**". "Isso daqui **parece ser tipo um desenho**." (Tarefa 2)
>
> "…essa não, só **parece que tem um lado concreto**, tipo uma bola." (Tarefa 2)
>
> "…as **espaciais** que podem ter volume… **podemos pegá-las** e **ocupam espaço**." (Tarefa 1)

Nesse caso podemos dizer que os alunos cujas falas, descritas acima, mobilizaram conhecimentos matemáticos principalmente tácitos, no sentido dado por Ernest. De fato, como já mencionado, estou interpretando que possuir uma concepção ontológica dos entes matemáticos é um conhecimento meta-matemático. Aqui, temos um bom exemplo de como conhecimentos principalmente tácitos, segundo Ernest, podem se manifestar, tacitamente, segundo o aspecto funcional da teoria de Polanyi.

C7 – Meta-cognição:

> "Tá na ponta da língua, mas que não quer sair. " (Tarefa 1)
>
> "Só que eu queria explicar isso, mas não tem palavras." (Tarefa 2)
>
> "Uma das nossas opções são essas." (Tarefa 2)
>
> "Eu escrevi aqui, mas eu não sei se está certo." (Tarefa 1)
>
> "Calma, é meio complicado. " (Tarefa 2)
>
> "Entre essas duas aqui eu fiquei um pouco em dúvida." (Tarefa 1)

Nesse caso, apesar das falas, acima, indicarem que os alunos mobilizaram conhecimentos tácitos não-matemáticos, tais conhecimentos podem ser ditos principalmente tácitos no sentido de Ernest. De fato, conhecimentos meta-cognitivos são adquiridos muito mais por meio de experiências adquiridas ao longo do processo de aprendizagem do que por transmissão explícita.

Com exceção dos conhecimentos tácitos pertencentes à categoria dobradura, todos os demais conhecimentos tácitos, representados pelas categorias da tabela 4, foram identificados tanto nas falas dos alunos que realizaram a tarefa 1 quanto nas falas dos alunos que realizaram a tarefa 2. A seqüência de numeração dada aos códigos das categorias exibidas nessa tabela não deve ser entendida como correspondendo a nenhuma hierarquia; tal numeração é casual. Em alguns casos podemos interpretar que alunos realizaram operações mentais do tipo: de-para-integração (estrutura lógica do ato do conhecer tácito, segundo Polanyi) envolvendo particulares mais relacionados à aparência direta da entidade do que a particulares mais abstratos ou gerais da entidade. Por exemplo, consideremos as seguintes falas:

> **A12**: "..em algumas figuras aparecem algumas formas chatas que formam uma figura com volume. Exemplo, o cilindro tem duas faces com a forma de um círculo, o prisma tem duas faces de um hexágono e duas de um retângulo." (categoria superfície, Tarefa 1)
>
> **A16**: "..por exemplo, a pirâmide e o triângulo. Se pegar um triângulo desse e tirar ele da folha vai ser igual a folha. Você vira ela e tá igual a mesma coisa. Agora essa daqui vai ser igual um lápis, você vai virando ela, ela vai tendo outros ângulos de visão, eu acho que a principal diferença é essa." (categoria movimentos rígidos, Tarefa 2)

A fala do aluno A12 dá pistas de que ele mobilizou e integrou seus conhecimentos pessoais sobre características das superfícies do cilindro e do prisma de base hexagonal. Tais características referem-se a aspectos imediatos ou superficiais (fisionomia) dessas figuras. Por outro lado, a fala de A16 dá pistas de que ele mobilizou e integrou seus conhecimentos pessoais sobre as várias perspectivas que podem ser vistas algumas figuras tridimensionais. Nesse caso, os conhecimentos do aluno referem-se aos vários ângulos de visão sob os quais podemos olhar para essas figuras quando nelas realizamos, por exemplo, movimentos de rotação e/ou translação. Em ambos os casos, segundo Polanyi, as compreensões de A12 e A16 da entidade integrada, expressas por meio de suas falas, correspondem aos significados que eles atribuíram a esses seus conhecimentos pessoais enquanto partes constituintes dessa entidade. Podemos dizer que, no caso do aluno A16, o significado de seus conhecimentos tácitos está associado ao ambiente matemático – o espaço tridimensional – no qual as figuras estão inseridas. O mesmo não podemos dizer de A12, pois a projeção de seus conhecimentos tácitos na entidade integrada restringiu-se aos aspectos imediatos ou superficiais das figuras.

Além disso, podemos interpretar que uma compreensão representada por uma fala exemplificativa da categoria dobradura está mais próxima dos conceitos matemáticos de figuras planas e figuras espaciais do que, por exemplo, uma compreensão representada por uma fala exemplificativa da categoria capacidade. De fato, se uma figura tem dobradura não sobre si mesma, então ela não é plana. Por outro lado, se uma figura é espacial não implica, necessariamente, que ela tenha capacidade ou possui volume.

Uma segunda observação a ser destacada é: se um único conhecimento tácito foi identificado na fala de um aluno, não significa, necessariamente, que ele mobilizou somente esse conhecimento. Tampouco que o ato de ocupação que ele realizou nas figuras do quadro classificatório restringiu-se, apenas, ao aspecto da entidade que, posteriormente, foi projetado. Ao fazer uma ocupação nas figuras observadas, um aluno cujo conhecimento tácito foi identificado como pertencendo a categoria C1, por exemplo, pode ter feito com que outros conhecimentos, tais como, profundidade, capacidade, etc, se tornassem termos proximais de seu conhecimento tácito. Se isso ocorreu, é possível que o aluno não os tenha conseguido integrar ou tenha monitorado (escolhido) com o auxílio de seus conhecimentos da linguagem, por exemplo, através de quais desses conhecimentos sua articulação seria mais facilmente projetada.

Uma terceira observação relaciona-se ao fato de que, em algumas falas, foi identificado mais de um conhecimento tácito mobilizado pelo aluno. Embora nessas falas as pistas que me levaram a identificar tais conhecimentos fossem dadas de maneira seqüencial (ou seja, o aluno inicia a fala dando pistas de um conhecimento C1, em seguida dá uma pista de um conhecimento C4, e assim por diante) não significa que a mobilização, pelo aluno, desses seus conhecimentos seguiu a mesma seqüência. Em outras palavras, o processo de inferência através do qual identificamos quais conhecimentos tácitos um aluno mobilizou para realizar uma tarefa não nos permite dizer como o aluno os mobilizou.

A segunda família de categorias é exibida na tabela 5. Essa tabela mostra as categorias E1,…,E5 que representam as articulações internas das compreensões produzidas pelos alunos em relação à entidade integrada. Tais categorias foram inferidas a partir da interpretação das falas dos alunos e, depois, caracterizadas tomando-se como base as três áreas de co-operação entre o tácito e o explícito – domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação – descritas por Polanyi (seção 8 do capítulo I). Mais precisamente, as categorias E1, E3 e E4 basearam-se nas áreas:

domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação, respectivamente. As categorias E1,…,E5 procuram, então, mostrar a relação entre pensamento e fala dos alunos, isto é, como o tácito (ou o pessoal) co-opera com o explícito (ou o formal) na compreensão da entidade integrada.

Tabela 5 - Articulações internas das compreensões produzidas

Código	**Denominação da categoria**	**Exemplo de falas resultantes das articulações**
E1	Predominância do tácito	"É a palavra que não sai" (Tarefa 1) ou "Igual folha, você vira ela, ela só tem isso" (Tarefa 2).
E2	Tácito na fronteira do explícito	"Olha aqui, todas as formas espaciais que tem volume dão exemplo de ser reais e para ser reais…E para ser reais …olha um prisma por exemplo de um hexágono. Você ligando um hexágono ao outro com retângulos dá um prisma (Tarefa 2)
E3	Tácito e explícito coincidentes	"Nós colocamos aqui que as figuras sem volume não ficam em pé e as figuras espaciais ficam em pé." (Tarefa 1)
E4	Tácito e explícito independentes	"As formas sem volume só podem ser vistas de uma maneira, são planas e chatas. E as formas volumosas podem ser vistas de várias maneiras, quase todas são sólidas e tem volume." (Tarefa 1)
E5	Explícito sob xeque	"Eu escrevi aqui, mas eu não sei se está certo." (Tarefa 1) ou "O quê que é isso? O hexágono tem a superfície que tem a base por, a base…" (Tarefa 1)

A categoria E1 – Predominância do tácito – corresponde a uma articulação interna que precede a produção de dois tipos de fala: a) o aluno <u>não articula externamente</u> uma compreensão da entidade integrada e explicita uma dificuldade em realizar a tarefa. Em outras palavras, o aluno demonstra não possuir, no momento em que foi solicitado a explicitar sua compreensão, uma representação da entidade que pode ser projetada no plano intersubjetivo; b) o aluno <u>articula externamente, porém, de maneira vaga, imprecisa e sofrida</u>, uma compreensão da entidade integrada. Nesse caso, as pistas dadas pelo aluno são extremamente vagas e cercadas de expressões imprecisas, o que demanda, por parte de uma segunda pessoa, grande esforço e benevolência em apreender e atribuir significado a essas pistas. Como conseqüência, a representação do aluno acerca da entidade no plano intersubjetivo possui as mesmas características, e vem acompanhada da sugestão de um certo 'sofrimento' de expressão: uma espécie de briga do aluno consigo mesmo para expressar sua compreensão. Diante disso, podemos dizer que, em ambos os casos, no momento do registro da sua fala, o aluno encontrava-se no domínio do inefável, ou seja, o tácito predominava a ponto da articulação projetada ser extremamente vaga, imprecisa e sofrida (caso b) ou até mesmo impossível (caso a).

Como vimos, os casos a) e b) podem ocorrer por duas razões que, a meu ver, é interessante reapresentar:

S1) Quando a pessoa tem ciência de seus conhecimentos tácitos de maneira subsidiária, isto é, quando ela os reconhece enquanto instrumentos, mas não consegue projetá-los porque os particulares desses seus conhecimentos não se encontram, ainda, numa forma especificável (isto é, prontos para serem projetados no plano intersubjetivo). Nesse caso, pode haver uma integração entre os particulares ainda que esses não se encontrem numa forma especificável. Em outras palavras, a entidade integrada pode ser compreendida, isto é, o sujeito pode articular uma representação interna, mas ele não pode falar sobre a entidade porque os aspectos que foram dela apreendidos e que a caracterizam não são, ainda, especificáveis.

S2) Quando a pessoa não consegue integrar os particulares de seus conhecimentos tácitos ainda que seus particulares possam ser especificados. Nesse sentido a pessoa não está ciente, ainda, de que possui tais conhecimentos de maneira subsidiária, instrumental: a entidade parece não ser compreendida integralmente, mas sim, em termos de alguns dos aspectos que a caracterizam.

Para ilustrar a categoria E1, vejamos os seguintes exemplos:

Caso (a): O aluno <u>não articula externamente</u> uma compreensão da entidade integrada.

> ‘Nada, até agora nada. Não quer sair nada.” (Tarefa 1)

Na medida em que o aluno não especifica nenhuma pista de seus conhecimentos matemáticos tácitos, sua situação está mais próxima de se encaixar em S1, pois estamos partindo do pressuposto de que ele, no nível de ensino em que se encontra, já trabalhou, de alguma maneira, com a identificação das principais figuras planas e figuras espaciais. Além disso, sua resposta refere-se à tarefa 1 o que pode estar indicando, também, que sua dificuldade em realizar a tarefa pode ser devida ao registro escrito da sua compreensão.

Caso (b): O aluno <u>articula externamente, porém, de maneira vaga e imprecisa</u>, uma sua compreensão da entidade integrada.

> "E esse aqui parece que tem tipo, um **lado** assim, e esse aqui não. Esse aqui parece que é **toda vazia**, e essa não, só parece que tem um **lado concreto**, tipo uma bola." (Tarefa 2)

Nessa fala, o aluno especifica três pistas relativas às categorias: C3 – Espessura (toda vazia), C1 – Superfície (lado) e C6 – Realidade tangível (lado concreto). Porém, no registro original, percebe-se uma dificuldade do aluno em elaborar uma compreensão coerente da entidade: ele inicia uma frase (E esse aqui parece que tem), depois, parece que desiste dela e tenta outra frase (tipo um lado assim). Sua situação, portanto, pode ser encaixada em S2. Essa fala é bom exemplo para ilustrar o fato de que a quantidade de pistas, dada pelo aluno, não está diretamente relacionada a uma boa projeção de seus conhecimentos tácitos na entidade integrada. Vejamos outros exemplos do caso b:

> "É, deixa eu ver, o **hexágono**, aqui tem o **prisma**." (Tarefa 2)

Nessa fala, o aluno especifica duas pistas relativas à categoria C1 – Superfície (hexágono e prisma) e sugere que se encontra, ainda, em processo de integração desse conhecimento: a fala sugere que o aluno está com dificuldades de se expressar. Isso me leva a interpretar que sua situação pode ser encaixada em S2.

> "...mas só pode **olhar de uma forma**, olha assim **você vê** a mesma coisa, você olha assim vai ser a mesma coisa." (Tarefa 2)

Nessa fala o aluno especifica duas pistas relativas à categoria C4 – Movimentos rígidos (olhar de uma forma e você vê). No registro original, o aluno demonstra uma dificuldade em integrar tais conhecimentos. Por essa razão interpreto que ele, também, se encontrava na situação S2.

> "Que essa daqui tem, vão supor que essa daqui é uma, ela tem **volume** prá você **pegar**, prá você **olhar tipo assim**. E essa daqui não, essa daqui é **fina**, é chata, é plana." (Tarefa 2)

Nessa fala, o aluno especifica quatro pistas relativas às categorias: C2 – Capacidade, C6 – Realidade tangível, C3 - Espessura e C4 – Movimentos rígidos. Ele, também, demonstra uma dificuldade de expressão da sua compreensão: note como ele inicia a frase, desiste dela e tenta outras frases. Isso me leva a interpretar que o aluno, no momento da fala, encontrava-se na situação S2.

A categoria E2 – Tácito na fronteira do explícito – corresponde a uma articulação interna que precede falas mais inteligíveis se comparadas com as da categoria E1, porém, não tão prontamente e bem articuladas externamente quanto as falas da categoria E3 que descreverei em seguida. Como conseqüência, as pistas contidas nas falas resultantes da categoria E2 são mais facilmente apreendidas e significadas por parte de uma segunda pessoa se comparadas com as da categoria E1. No caso da categoria E2, percebemos que o aluno luta com menor dificuldade para projetar seus conhecimentos tácitos no plano intersubjetivo do que aqueles alunos cujas falas originaram-se da categoria E1. Ainda, nesse caso, podemos dizer que o foco do aluno encontra-se no processo de integração dos particulares uma vez que ele especifica pistas desses particulares. Em termos de representação externa, isso significa que o aluno não a possui pronta e acabada. Em termos de consciência subsidiária de seus conhecimentos tácitos, o aluno não a possui completamente, pois esses não foram completamente integrados para serem projetados na entidade. Diante disso, entendo que essa categoria identifica-se a uma área muito próxima à ou mesmo na fronteira que separa as áreas: domínio do inefável e intermediária de co-operação entre o tácito e o explícito, descritas por Polanyi. O tácito parece estar próximo de coincidir com o explícito. Vejamos um outro exemplo dessa categoria:

> ‘Porque essas aqui podem, **elas têm volume**, então ela como é que fala? Podem **colocar algum material**, esses aqui não tem jeito porque ... ” (Tarefa 2)

O aluno inicia essa fala dando uma pista de que está mobilizando seus conhecimentos tácitos sobre volume dos sólidos. Em seguida, ele expressa uma dificuldade de projetá-los na entidade. Após uma rápida reflexão, talvez, ele dá pistas mais significativas desses seus conhecimentos e sugere que está preste a realizar a tarefa. Por essa razão, a fala desse aluno foi interpretada como resultante da categoria E2. Porém, no momento em que anuncia que vai completar a fala, ele foi interrompido por um colega.

As falas resultantes da categoria E3 – Tácito e explícito coincidentes – indicam que os conhecimentos subsidiários que o aluno utiliza para alcançar a compreensão da entidade estão bem estruturados e integrados a ponto de serem facilmente projetados por meio da expressão verbal. A prontidão, a clareza e a segurança com que o aluno expressa a fala representativa dessa categoria sugerem que o significado do explícito coincide ou promete coincidir exatamente com o tácito; o explícito é como uma extensão do tácito. Nesse sentido, podemos dizer que os conhecimentos subsidiários utilizados pelo aluno estão próximos de sua consciência. Em outras palavras, o aluno reconhece que possui tais conhecimentos de maneira subsidiária por meio de uma projeção fiel desses conhecimentos na entidade integrada. Por essa razão, a categoria E3 foi identificada com a área intermediária de co-operação entre o tácito e o explícito, descrita por Polanyi. Vejamos outros exemplos da categoria E3:

> "O que eu vi aqui foi que as chatas e planas parecem não ter fundo, parecem não ter muitos lados e nem superfícies. E as espaciais que podem ter volume parecem ter fundo, tem lado e parecem ser reais. Parece ter superfícies cobertas e fechadas." (Tarefa 1)

> "Esse aqui tem, é tipo oco por dentro, e as chatas, planas e sem volume não é oco por dentro." (Tarefa 2)

> "É que por exemplo: a pirâmide e o triângulo. Se pegar um triângulo desse e tirar ele do livro vai ser igual a folha. Você vira ela e tá igual a mesma coisa. Agora essa daqui (se referindo à pirâmide) vai ser igual um lápis, você vai virando ela, ela vai tendo outros ângulos de visão, eu acho que a principal diferença é essa." (Tarefa 2)

> "E a diferença entre as espaciais que podem ter volume e as planas sem volume é que elas podem conter algo dentro, podemos pegá-las e ocupam espaço." (Tarefa 1)

> "Tipo, a gente pega, a gente corta uma tirinha de um quadrado, só uma tirinha prá montar ele." "Aí é lisa, não tem jeito de você pôr nada dentro dele, porque se você pôr vai cair. E aí depois que você monta o quadrado e abre um dos pedaços dele você pode pôr alguma coisa lá dentro e fechar de novo." (Tarefa 2)

> "Professora, só de bater o olho você já sabe. É fácil." (Tarefa 1)

> "Consegui" (quando perguntado pela professora se ele conseguiu realizar a Tarefa 1)

A categoria E4 – Tácito e explícito independentes – difere da categoria E3 no que se refere à clareza das falas dos alunos resultantes de suas articulações internas. A expressão verbal do aluno resultante de E4, embora bem articulada, contem incoerências ou contradições. Em outras palavras, o aluno fala prontamente e demonstra segurança, mas parece não saber (ou sabe vagamente) sobre o que ele está falando. Isso pode estar indicando que, embora os conhecimentos subsidiários que ele utilize para alcançar a compreensão da entidade integrada possam estar estruturados e integrados, o significado do tácito não coincide com o explícito. Nesse caso, as pistas dadas pelo aluno para que uma segunda pessoa possa identificar seus conhecimentos subsidiários são cercadas de contradições. Os conhecimentos subsidiários utilizados pelo aluno estão próximos de sua consciência ainda que a projeção desses conhecimentos na entidade integrada não seja fiel: o explícito não é uma extensão do tácito. Segundo Polanyi, essa independência entre o tácito e o explícito pode ser devida a uma inaptidão da fala que obstrui o funcionamento tácito do pensamento; o aluno ainda não está pronto para aquela fala. Quando isso ocorre, o aluno, num outro momento, terá que decidir se confia mais no seu pensamento ou na aptidão da sua fala para reelaborar uma articulação verbal menos contraditória. Por essa razão, essa categoria foi caracterizada com base na área do domínio da sofisticação. Outros exemplos da categoria E4:

> "A base é, o hexágono é a superfície e a ba… tem a superfície e a base do prisma." (Tarefa 1)

> "Do volume, e a maioria das bases delas, sem ser a da pirâmide, a maioria das bases delas são redondas." (Tarefa 2)

Em relação à segunda fala, se observarmos o quadro classificatório (figura 1) veremos que essa afirmação não se verifica.

Finalmente, a categoria E5 – Explícito sob xeque – corresponde a uma articulação interna que precede dois tipos de fala: (a) o aluno realiza a tarefa 1, mas expressa uma incerteza quanto à adequação da maneira pela qual a realizou. Em outras palavras, o aluno coloca em dúvida sua explicitação da compreensão da entidade integrada, ou talvez, a fidelidade da projeção do tácito no explícito. Isso mostra que o aluno está consciente da sua aprendizagem (ou seja, ele mobiliza seus conhecimentos meta-cognitivos). Embora seus conhecimentos tácitos possam estar próximos de sua consciência na medida em que ele realizou a tarefa, o aluno sugere precisar de uma confirmação externa da adequação dos usos desses conhecimentos para assegurar-se de que os possui enquanto instrumentos; (b) o aluno também realiza a tarefa 1, porém, expressa um visível estranhamento, no ato da leitura, da projeção de conhecimentos tácitos na entidade integrada; da projeção do tácito no explícito. A fala do aluno, examinada na fita em áudio, mostra que ele parece levar um choque ao ler parte de sua resposta. Nesse caso tal estranhamento provoca, visivelmente, no aluno, uma paralisação de sua performance; uma mudança de foco da entidade integrada para os particulares dessa entidade. O fato de o aluno mostrar um estado de perplexidade diante da sua resposta, pode ser interpretado como o aluno não estar reconhecendo os particulares enquanto instrumentos e, portanto, ele volta sua atenção a esses particulares.

Cabe observar que essa categoria corresponde às articulações dos alunos oriundas: a) de uma consciência já adquirida ou da interiorização de que sua compreensão da entidade integrada é duvidosa e necessita, portanto, de uma confirmação externa (primeiro caso); b) de um processo de auto-conscientização provocado por uma súbita mudança de foco por parte do aluno (segundo caso). Em ambos os casos a categoria E5 corresponde às articulações resultantes da mobilização de conhecimentos meta-cognitivos, usados subsidiariamente para elaborar uma compreensão da entidade integrada, e não da compreensão da entidade *per se*. Mais do que isso, essa categoria capta tais articulações, num caso em sua forma concretizada, e num outro caso, em processo, no momento em que ela está sendo produzida. Diante disso, tal categoria não foi identificada com nenhuma das áreas de co-operação entre o tácito e o explícito, descritas por Polanyi. Nesse sentido, ela é anômala. Outros exemplos ilustrativos da categoria E5:

Caso (a):

> "Entre essas duas aqui eu fiquei um pouco em dúvida. Queria te perguntar se as figuras chatas elas ficam em pé ou elas ficam deitadas sobre as (inaudível). Elas ficam em pé?"

Caso (b):

> "O quê que é isso aqui!? O hexágono é uma superfície que tem a base por, a base (hesitação)"…"E as que tem (hesitação)"

Todas as categorias que constam da tabela 5, com exceção da categoria E5, foram identificadas tanto nas falas dos alunos que realizaram a tarefa 1, quanto nas falas dos alunos que realizaram a tarefa 2.

Tabela 6 - Intervenções da professora

Código	Denominação da categoria	Exemplo
I1	Comandos	"Eu vou dar dois minutinhos para que vocês observem bem as duas classificações; as duas categorias pra gente discutir, então, qual a diferença entre elas. (…) é só observando bem as formas que estão num quadro e que estão no outro que vocês vão pegar a diferença essencial delas, tá?" ou "(...) senta por favor (...) você já falou agora deixa eu ouvir o colega."
I2	Condução das falas	"Qual que você acha que é a principal diferença?"
I3	Esclarecimentos	"Não, isso daí não tem que tá certo. É uma percepção sua."
I4	Pedidos de esclarecimento	"Por exemplo, se eu chegar aqui atrás eu vejo, eu consigo ver alguma coisa? É isso que você está falando?"
I5	Problematização	"Tem outra, qual que é outra é a outra diferença?" ou "E esse que tá aqui, o quê que te chama atenção?"
I6	Escuta	"Humhum" ou "Ok. Deu para entender, isso mesmo."

A tabela 6 mostra os diferentes tipos de intervenções da professora realizadas ao longo do episódio. Tais intervenções foram interpretadas e denominadas a partir de suas falas. Em particular, as categorias exibidas nessa tabela mostram o papel fundamental da professora na orquestração da conversação promovida em sala de aula. Na categoria I1 – Comando – estão todas as intervenções da professora relacionadas a comandos de atividade ou de organização da sala de aula. A categoria I2 – Condução das falas – representa todas as intervenções da professora relacionadas à condução das falas dos alunos, mais precisamente, às mudanças de interlocutor. Na categoria I3 – Esclarecimentos – estão todas as intervenções da professora relacionadas a esclarecimentos dados aos alunos. A categoria I4 – Pedidos de esclarecimento – corresponde às intervenções da professora relacionadas a pedidos de esclarecimento aos alunos. Na categoria I5 – Problematização – estão todas as intervenções da professora relacionadas a uma problematização dirigida aos alunos. Finalmente, a categoria I6 – Escuta – corresponde às intervenções da professora que expressam uma escuta da fala do aluno. Vejamos outros exemplos dessas categorias:

I1 – Comando:

> "Então um só da dupla escreve, tá? A19 pode fazer aí junto com a A22, pode fazer isso com a A22."
>
> "Não, ninguém vai sair agora não."
>
> "A27 por favor, A27 guarda isso aí."

I2 – Condução das falas:

> "Quem é que sabe mas tá achando difícil escrever?"
>
> "Quê que vocês escreveram?"
>
> "Fala pra mim A16, a diferença. A principal diferença que você vê entre essas duas categorias aqui?"
>
> "E você A23, é isso mesmo ou quer completar?"

I3 – Esclarecimentos: único exemplo

> "Não, isso daí não tem que tá certo. É uma percepção sua."

I4 – Pedidos de esclarecimento:

> "O quê que significa, porque que você falou que parece ser real? Quê que você quis dizer com isso?"
>
> "Aqui parece ser um objeto concreto e aqui?"
>
> "Então resumindo, agora fala com suas palavras, qual é a diferença?"
>
> "Então agora ao invés de você ler, me mostra aí, por exemplo, duas figuras e me fala, me mostra a diferença que você quis dizer aqui nas figuras."

I5 – Problematização:

> "Quando você olha prá esse monte de figura que tá aqui, olha. E esse que tá aqui, o quê que te chama atenção?"

I6 – Escuta:

> "Ah tá."
>
> "Um desenho."
>
> "Então tá, por isso que eu vim aqui."
>
> "Sei."

Em relação às categorias exibidas na tabela 6, gostaria de observar que parto do pressuposto de que as falas da professora foram precedidas de atos de percepção e interpretação do que estava ocorrendo em sala de aula. Tais atos, por sua vez, envolveram deliberações sobre a atitude pedagógica mais adequada a ser tomada nos diversos momentos da conversação. Entretanto, como dito anteriormente, todas essas ações da professora que precederam suas falas não foram consideradas como elementos de análise desse episódio para diminuir os riscos de interpretação. Além disso, o foco da análise era a aprendizagem do aluno e não os processos de ensino.

Tabela 7 - Outros processos não diretamente observáveis identificados durante o episódio

Código	**Denominação**	**Descrição**
O	Concentração	No caso desse episódio, o ato de ocupação (*indwelling*), descrito por Polanyi, que está presente em todo ato do conhecer está sendo interpretado como o processo de concentração, mais ou menos intenso, realizado pelos alunos durante a observação do primeiro quadro classificatório.
MF	Mudança de foco (da entidade integrada para os particulares)	Nesse episódio, o processo mudança de foco, descrito por Polanyi, está sendo interpretado como uma paralisação momentânea da performance do aluno devido a um estranhamento do instrumento que ele ou outro aluno utilizou para realizar a tarefa.

Na tabela 7 são exibidas duas categorias que correspondem a dois outros processos não diretamente observáveis e de controle da atenção, identificados durante o episódio: um relaciona-se ao período de observação do quadro classificatório, pelos alunos, a saber, concentração, e o outro, ao processo mudança de foco da entidade integrada para os particulares.

4. CONSTRUÇÃO DOS GRÁFICOS REPRESENTATIVOS DA ESTRUTURA DAS AÇÕES PRODUZIDAS DURANTE O EVENTO

Através de minuciosos e recorrentes exames realizados tanto na transcrição da fita em áudio do episódio quanto no seu registro original procurei recompor a rede de significados produzida durante o evento através de uma variação do modelo gráfico-teórico desenvolvido por Strom e colaboradores (2001). Nos gráficos que apresento, a dinâmica e as coordenações entre as categorias: a) conhecimentos tácitos; b) articulações das compreensões produzidas; c) intervenções da professora; d) os processos: concentração e mudança de foco da entidade integrada para os particulares, são exibidas por meio de fluxos. Como veremos, tais fluxos representam tanto os aspectos observáveis (tais como, falas dos alunos e da professora) quanto aspectos não observáveis (como por exemplo, integrações dos conhecimentos tácitos mobilizados que resultaram em articulações, pelos alunos, das compreensões produzidas), identificados durante o evento. Além disso, a numeração dos fluxos possibilita o acompanhamento da evolução do evento na medida em que mostra como um código (categoria) foi seguido por outro na transcrição do registro em áudio.

Cinco gráficos foram construídos para representar os cinco segmentos seqüenciais, não necessariamente de tempos iguais, nos quais o episódio foi dividido[45]. Ao fazer tal divisão procurei contemplar um conjunto de falas que não comprometesse a legibilidade dos gráficos. A seqüência: gráfico 1, gráfico 2, …corresponde, portanto, a evolução das ações provocadas pela conversação conduzida pela professora em torno do processo de elaboração, pelos alunos, da compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e espaciais. A partir desses gráficos, os dados foram, então, re-analisados.

O gráfico 0 não representa nenhum segmento do episódio. Ele contem alguns fluxos do gráfico 1 e foi construído, apenas, com a finalidade de facilitar a leitura dos demais gráficos. A partir, então, do gráfico 0 temos em todos os gráficos:

- As categorias exibidas nas tabelas 4, 5, 6 e 7 encontram-se dispostas sob um círculo. Na posição mais alta do círculo encontra-se a categoria O – Concentração – que entendo, corresponde ao início do processo de mobilização dos conhecimentos tácitos dos alunos para realizar ambas as tarefas 1 e 2. A partir dessa categoria, em sentido anti-horário, encontram-se dispostas as demais categorias: C7,.., C1, E1,..,E5, MF e I1,..,I6, nesta ordem. A categoria I6 fecha, então, o círculo. A ordenação das categorias sob o círculo deveu-se, somente, ao critério de dar aos gráficos uma melhor legibilidade. Por exemplo, o arco do círculo que contem os códigos C7,.., C1, E1,..,E5, MF, corresponde aos atos mentais dos alunos. Já o arco que contem os códigos I1,..,I6, corresponde aos atos da professora.

[45] Inicialmente, foram construídos seis gráficos e, se considerado o gráfico 6, a duração do episódio se estenderia por mais dois minutos. Todavia, ao analisar o último segmento que correspondia ao gráfico 6 constatei o seguinte: 1) não ocorreu nesse segmento nenhum fato novo ou interessante; 2) não houve nenhuma mobilização de conhecimentos tácitos novos, ou seja, que não tinham sido mobilizados nos segmentos anteriores; 3) não foi gerada nenhuma articulação nova que não tinha sido gerada anteriormente; 4) a professora não produziu uma fala diferente daquelas que apareceram nos segmentos anteriores; 5) os alunos que participaram desse segmento já haviam participado dos segmentos anteriores mobiliando, no segmento 6, os mesmos conhecimentos tácitos que foram identificados nas suas primeiras participações. Diante disso, optei por terminar a análise do episódio no segmento 5 (gráfico 5) já que nenhum fato ocorrido no segmento 6 alteraria os resultados e discussão finais.

- Os fluxos indicativos das coordenações entre os códigos ou categorias são representados por arcos orientados. Por exemplo, no fluxo 38, que se encontra dentro do círculo entre os códigos E4 e MF, a orientação do arco, dada pela flecha, indica que a fala de um aluno, resultante de uma sua articulação do tipo E4, isto é, de uma articulação que ao ser projetada não foi fiel àquilo que ele articulou internamente, provocou nele ou em outro aluno, uma mudança de foco da entidade integrada para os particulares dessa entidade.

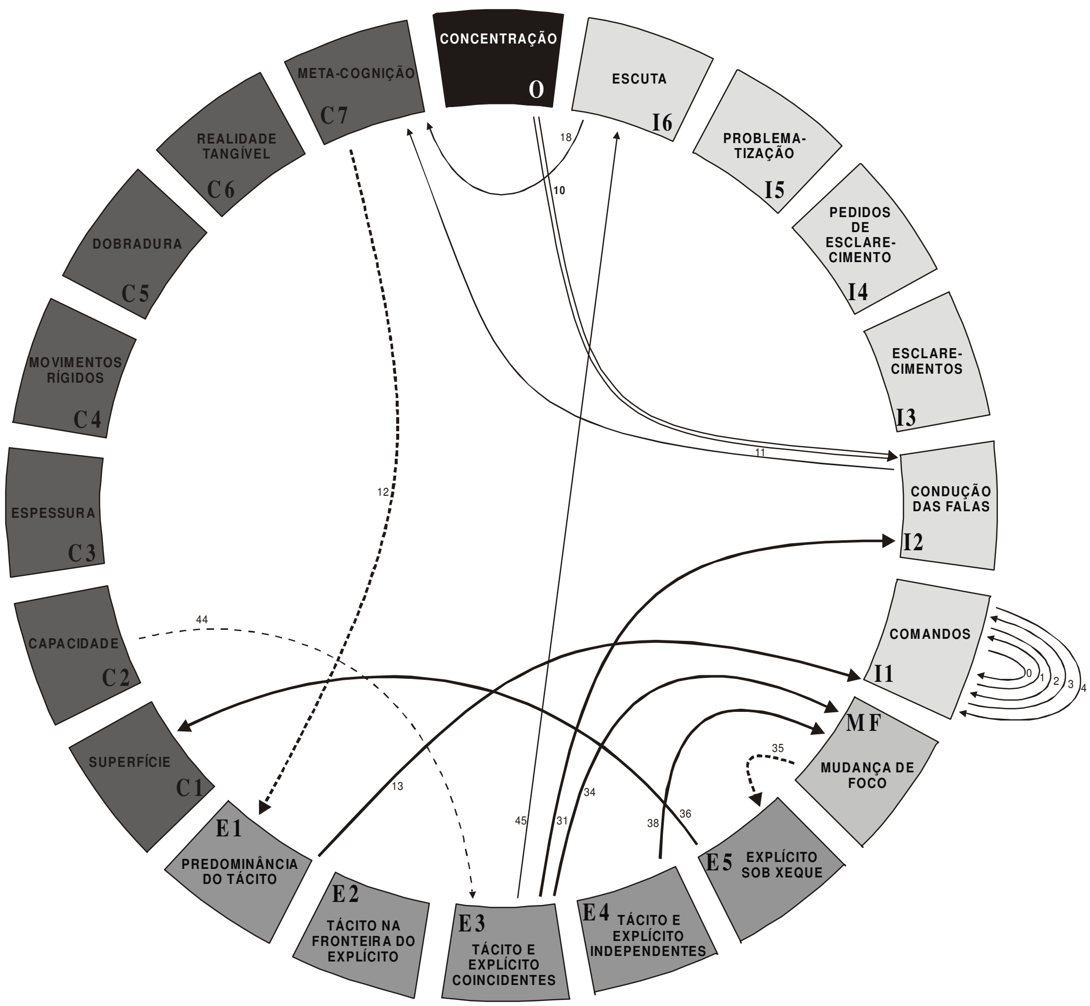


Gráfico 0 - Exemplo

- A numeração dos fluxos corresponde à seqüência cronológica da produção dos significados. Por exemplo, um fluxo cuja numeração associada é a 27 indica que, anterior a ele, foram produzidos 27 outros significados. A cada mudança de ação ocorrida durante o evento, um fluxo foi construído. Assim, um novo fluxo foi gerado quando: a) mudou-se o significado dentro da fala de um mesmo interlocutor;

b) mudou-se o interlocutor. Por exemplo, a concentração dos fluxos numerados de 0 a 4 na categoria I1 e que se encontram na região exterior ao círculo, indicam mudanças de significados dentro da fala de um mesmo interlocutor, no caso, da professora. Já o fluxo 31, que sai de E3 em direção à I2, indica uma mudança de interlocutor: de um aluno para a professora.

- Os fluxos traçados com linhas contínuas indicam a ocorrência dos aspectos observáveis do episódio. Mais precisamente, esses fluxos representam as interações verbais entre professor e alunos e entre alunos. Os fluxos traçados com linhas pontilhadas indicam a ocorrência dos seguintes aspectos não observáveis do episódio: a) integração dos conhecimentos tácitos que resultaram em articulações das compreensões produzidas pelos alunos; b) ações mentais dos alunos originadas das categorias Concentração (que se relaciona ao período de observação do quadro classificatório) e Mudança de Foco. Por exemplo, o fluxo 11 em linha contínua, que parte de I2 em direção a C7, corresponde a uma fala (aspecto observável) da professora dirigida a um aluno, e resultante de uma sua intervenção do tipo I2 – Condução das falas. Essa fala, por sua vez, provocou nesse aluno ou em outro aluno, a mobilização de seus conhecimentos tácitos do tipo C7. O fluxo seguinte, isto é, o fluxo 12 em linha pontilhada, indica que o aluno integrou e significou tais conhecimentos (aspecto não observável), produzindo uma articulação do tipo E1 – Predominância do tácito –, ou seja, uma articulação interna acerca de sua compreensão da entidade integrada que não será projetada na sua fala ou que será projetada na sua fala de maneira vaga e imprecisa. Essa fala (aspecto observável), resultante de E1, é representada pelo fluxo 13 em linha contínua. E assim por diante.

- Os fluxos mais escuros representam ações mentais e falas dos alunos relativas à tarefa 1. Por exemplo, o fluxo 34, que parte de E3 em direção a MF, corresponde à fala de um aluno resultante de uma sua articulação do tipo E3, ou seja, de uma articulação interna que será fielmente projetada na sua fala, e em resposta a tarefa 1, isto é, lendo a resposta que escreveu. Pela orientação do fluxo, pode-se ver que essa fala provocou nele ou num outro aluno, uma mudança de foco da entidade integrada (registro escrito da compreensão) para particulares (alguns aspectos do registro) dessa entidade. Em seguida, o fluxo 35 indica que tal mudança de foco levou o aluno a produzir uma articulação do tipo E5, ou seja, uma articulação interna cuja projeção colocará o explícito sob xeque. A fala resultante dessa articulação é representada pelo fluxo 36. Tudo isso, ainda, em relação a tarefa 1. Por outro lado, os fluxos mais claros representam: a) ações mentais e falas dos alunos relativas à tarefa 2, como por exemplo, os fluxos 44, que parte de C2 em direção à E3, e 45, que parte de E3 em direção à I6; b) falas da professora, tais como, o fluxo 18, que parte de I6 em direção à C7.

- Uma regularidade pode ser percebida: um fluxo saindo de qualquer C_i, i = 1, 2,..,7, chega, necessariamente, em um E_j, j = 1, 2,..,5. Isso significa que mobi lizações de conhecimentos tácitos resultam, necessariamente, em articulações que serão (ou não) projetadas na fala, ou ainda, que uma operação mental do tipo 'de-para-integração' resulta numa representação.

- No gráfico 0 (e, portanto, no gráfico 1), o fluxo 10, que parte de O em direção à I2, traçado com linhas contínuas duplas, é um fluxo especial e representa um aspecto observável, ocorrido durante o evento, sob o ponto de vista da pesquisa. Tal aspecto corresponde à uma inferência da professora que a levou realizar uma intervenção do tipo I2, a saber, a de que os alunos haviam terminado a observação do quadro classificatório, bem como a realização da tarefa 1, após um certo período de tempo. Portanto, esse fluxo não representa uma fala.

A partir da observação do comportamento dos fluxos, em cada gráfico, procurei compreender as características dos segmentos correspondentes. Quando percebia alguma regularidade ou comportamento interessante (como por exemplo, grande concentração de fluxos numa determinada categoria), voltava nos registros em áudio ou nas suas transcrições para interpretá-los mais sistematicamente.

5. COMENTÁRIOS

As duas principais diferenças entre os gráficos de Strom e colaboradores (2001) e os gráficos do meu estudo são: a) há uma distância maior entre os aspectos observáveis e não-observáveis de minhas categorias em relação às categorias desses autores: minhas inferências são de ordem mais alta, no sentido de me exigirem mais esforço interpretativo e julgamentos mais arriscados; b) os fluxos de minha análise representam mais do que indicadores da seqüência cronológica da produção de significados ocorrida durante o evento: os fluxos, à exceção, somente, do fluxo 10, representam, efetivamente, os portadores desses significados, a saber, as declarações dos alunos e da professora (aspectos observáveis).

Embora a metodologia – como representação gráfica direta da conversação em sala de aula – apresentada por Strom e colaboradores tenha sido desenvolvida com a finalidade de configurar um referencial teórico-metodológico para a análise do discurso, ela se revelou, através de uma variação, ter uma eficácia que ultrapassa os limites dessa área de investigação. De fato, ao contrário do modelo gráfico-teórico desses autores, os gráficos 1, 2,…,5 que desen volvi, exibem, sobretudo, a dinâmica e as coordenações entre aspectos não-observáveis (ou não completamente observáveis) ocorridos durante a conversação em torno do processo de elaboração, pelos alunos, de uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais.

Por meio dessa metodologia, foi possível mostrar, empiricamente, a adequação dos referenciais teóricos usados nessa pesquisa para explicar processos de aprendizagem matemática em contextos de conversação. Mais precisamente, em relação à tarefa matemática em questão, a metodologia utilizada permitiu expor: a) a mobilização, pelos alunos, de conhecimentos tácitos (no sentido funcional da teoria de Polanyi); b) como o tácito co-opera com o explícito na articulação produzida pelos alunos; c) evidências dos processos de concentração (ocupação), auto-conscientização (mudança de foco da entidade integrada para os particulares) e análise destrutiva (detalhamento dos particulares de um conhecimento tácito); d) que, dentre os conhecimentos tácitos usados pelos alunos para realizar a tarefa estão componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest do conhecimento matemático.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DO EPISÓDIO

No presente capítulo apresento, propriamente, a análise do episódio a partir das análises dos cinco segmentos nos quais ele foi dividido.

1. SEGMENTO 1

O segmento 1, representado pelo gráfico 1 (fluxos 0 até 46), corresponde aos dez primeiros minutos do episódio e iniciou com a professora dedicando um tempo da aula para propor e explicar a tarefa aos alunos, bem como para organizar a turma. Isso pode ser visto através da concentração dos fluxos 0 até 4 na categoria I1. Os fluxos seguintes de 5 até 10 indicam que aos alunos foi dado um período para a observação do quadro classificatório e, também, para a realização da tarefa 1: elaborar uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e espaciais e registrá-la por escrito. Em particular, o gráfico mostra que, durante esse período, um aluno expressou (fluxo 7) uma compreensão da entidade integrada que foi precedida de: a) uma mobilização de seus conhecimentos meta-cognitivos (fluxo 5), possivelmente, provocada pela sua observação do quadro classificatório (fluxo 5); b) uma articulação do tipo E3 (fluxo 6). Isso explica a bifurcação do fluxo 5 e a junção dos dois fluxos com a mesma numeração 6. Ao término do período de observação, a professora deu início à condução das falas dos alunos sobre suas respostas (fluxo 10).

Observando o gráfico 1 vemos que esse segmento foi marcado por uma grande concentração de fluxos escuros nas categorias I2, C7 e E1. Isso se deveu ao fato de que as primeiras declarações dos alunos em resposta à solicitação da professora expressaram uma dificuldade de realizar a tarefa por escrito. De fato, durante o segmento 1, foram identificados, apenas, dois conhecimentos matemáticos tácitos – superfícies e capacidade. É curioso observar que, enquanto as mobilizações dos conhecimentos tácitos sobre capacidade geraram falas resultantes do código E3 (fluxos 33 e 44), as mobilizações dos conhecimentos tácitos sobre superfícies geraram falas resultantes do código E4 (fluxos 37 e 41). Porém, uma interpretação para isso baseada, apenas, na análise desse segmento é, ainda, prematura.

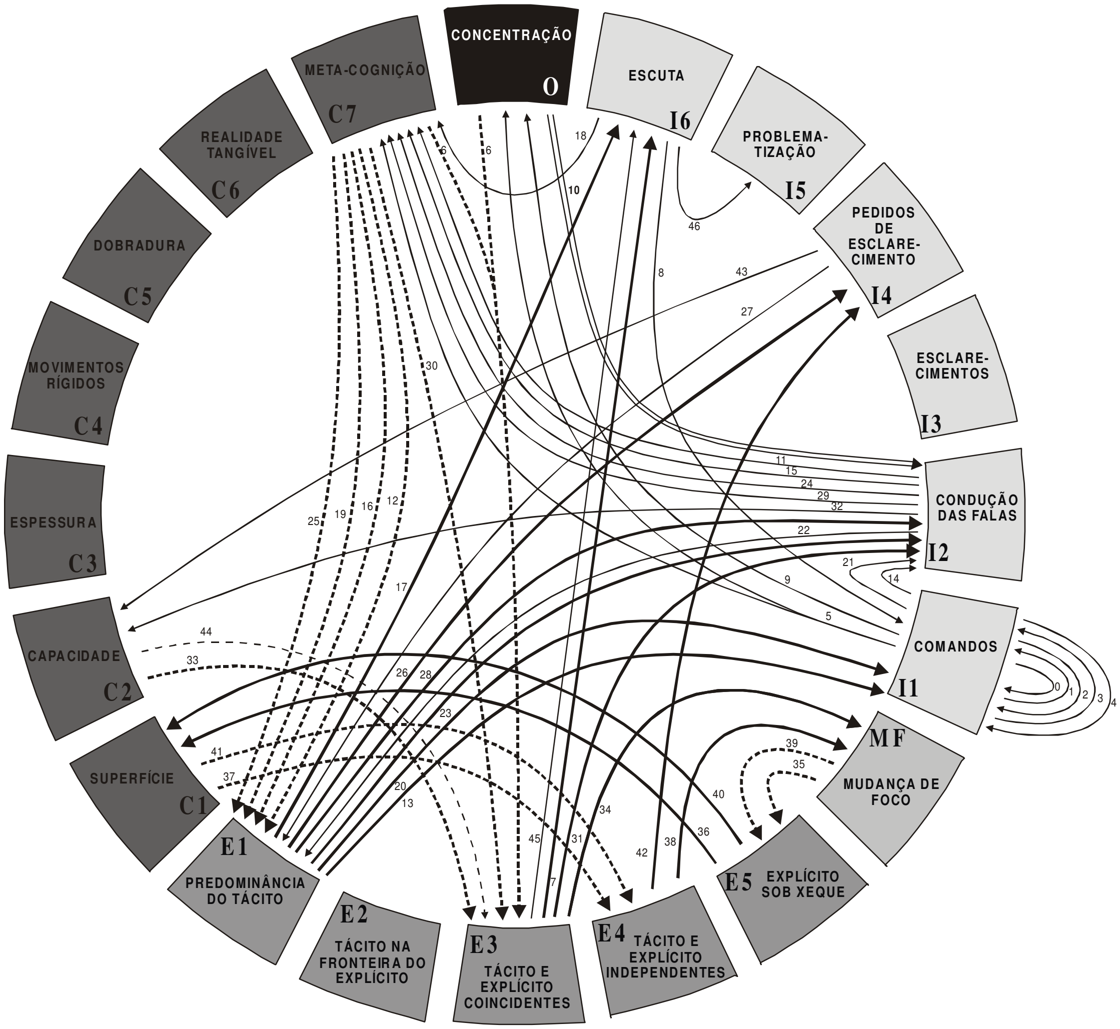


Gráfico 1 - Segmento 1

Um outro fato curioso relaciona-se à concentração dos fluxos 34, 35, 38 e 39 na categoria MF: mudança de foco. Mais especificamente, o fluxo 34 indica que houve uma mudança de foco provocada por uma fala resultante do código E3. Posteriormente, o fluxo 38 indica a ocorrência de uma segunda mudança de foco provocada, agora, por uma fala resultante do código E4. Esse fato pode ser explicado com o auxílio da transcrição da fita em áudio do episódio e do seu registro original. Através da análise desses instrumentos, percebe-se que a situação que provocou tais mudanças de foco iniciou-se no fluxo 32 e terminou no fluxo 45. A seguir, apresento o trecho da transcrição da fita relativo ao período que compreende esses fluxos, intercalado com comentários.

> Professora: O quê você conseguiu escrever? (fluxo 32)

A professora dirige uma fala resultante do código I2 ao aluno A26.

> A26: Aqui, nós colocamos assim: a diferença entre as chatas, planas e sem volume e as espaciais que podem ter volume é que as chatas não podem colocar material dentro e as que tem volume pode ter materiais por dentro. Exemplo. (fluxo 34)

> A26: O, quê que é isso aqui?! O hexágono é uma superfície que tem a base por (hesitação) a base (hesitação) (fluxo 36)

A primeira fala de A26 sugere uma compreensão segura e clara da entidade integrada em termos dos conhecimentos tácitos sobre capacidade ou volume dos sólidos. Por essa razão, a fala do aluno foi contemplada como resultante do código E3. Porém, no instante em que A26 anunciou um exemplo, ele pareceu entrar em apuros: o aluno demonstrou uma paralisação de sua performance sugerindo um estranhamento daquilo que estava sendo lido. Isso fez com que essa sua segunda fala fosse interpretada como resultante do código E5.

> A5: A base é, o hexágono é a superfície e a ba (palavra interrompida) tem a superfície e a base do prisma. (fluxo 38)

Essa fala mostra que tão logo percebeu que seu colega de dupla parecia ter tomado um choque com a frase que estava lendo, A5 decidiu ajudá-lo. A fala desse aluno foi interpretada como resultante do E4 por conter elementos contraditórios, ainda que dita com segurança e prontidão.

> A26: E, e as que tem (hesitação) (fluxo 40)

Vemos, aqui, que a ajuda de A5 parece não ter surtido efeito em A26, pois esse aluno continuou, ainda, num estado de paralisação. Tal estado foi interpretado como uma mudança de foco, desse aluno, da entidade integrada para alguns particulares dessa entidade. Em outras palavras, A26 parece não ter reconhecido os particulares sobre superfícies dos sólidos como instrumentos para compreender tal entidade. Isso pode ter ocorrido porque os conhecimentos tácitos sobre superfícies dos sólidos, projetados na frase que ele estava lendo, provavelmente, não eram seus, mas sim, de seu colega de dupla A5. Essa mudança de foco ocorrida com A26 sugere que, mesmo estando dispostos em dupla, ele e A5 mobilizaram e registraram conhecimentos tácitos distintos para realizar a tarefa 1.

> A5: Junto com o retângulo. (fluxo 42)

Notemos que A5 faz, ainda, mais uma tentativa para ajudar A26 a sair desse estado de perplexidade insistindo numa projeção de seus conhecimentos tácitos de superfície.

> Professora: Mas, então, qual foi a principal diferença que vocês falaram? (fluxo 43)

Ao perceber que a segunda fala de A5 considerada, ainda, como uma fala resultante de uma articulação do tipo E4 poderia piorar mais o estado de paralisação em que A26 se encontrava, a professora interviu com o objetivo de trazer esse aluno de volta ao foco original da tarefa.

> A26: É que as que não tem volume não podem ter material dentro e as que tem volume podem ter material dentro. (fluxo 45)

Essa ação da professora, parece que deu resultado: o aluno A26 recuperou o significado inicial que tinha dado a tarefa. Por essa razão, sua fala, nesse momento, foi interpretada como resultante do código E3. Essa recuperação de A26 reforça a hipótese de que ele, provavelmente, não mobilizou conhecimentos sobre superfícies dos sólidos para realizar a tarefa 1.

2. SEGMENTO 2

O segmento 2, representado pelo gráfico 2 (fluxos 47 até 83), corresponde aos dois minutos que se seguiram ao segmento anterior e iniciou com a professora problematizando uma questão para um aluno (fluxo 47). Nesse caso, vemos que os fluxos são, todos, mais claros se comparados com os fluxos do segmento 1. Isso deveu-se ao fato de que, diante da dificuldade manifestada por alguns alunos em realizar a tarefa por escrito, a professora decidiu conduzir a conversação de maneira mais livre, mais solta, ou seja, permitindo que os alunos verbalizassem, em tempo real, uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e espaciais. Assim sendo, ambas as falas dos alunos e as mobilizações de seus conhecimentos tácitos, produzidas e identificadas, respectivamente, durante o segmento 2, referem-se à tarefa 2: elaborar, em tempo real, uma verbalização acerca da diferença entre as figuras planas e espaciais. Através do gráfico, podemos ver que tal decisão da professora resultou num deslocamento das concentrações de fluxos nas categorias I2 e C7, características do segmento 1, para concentrações de fluxos nas categorias C4, C2, I4 e I6.

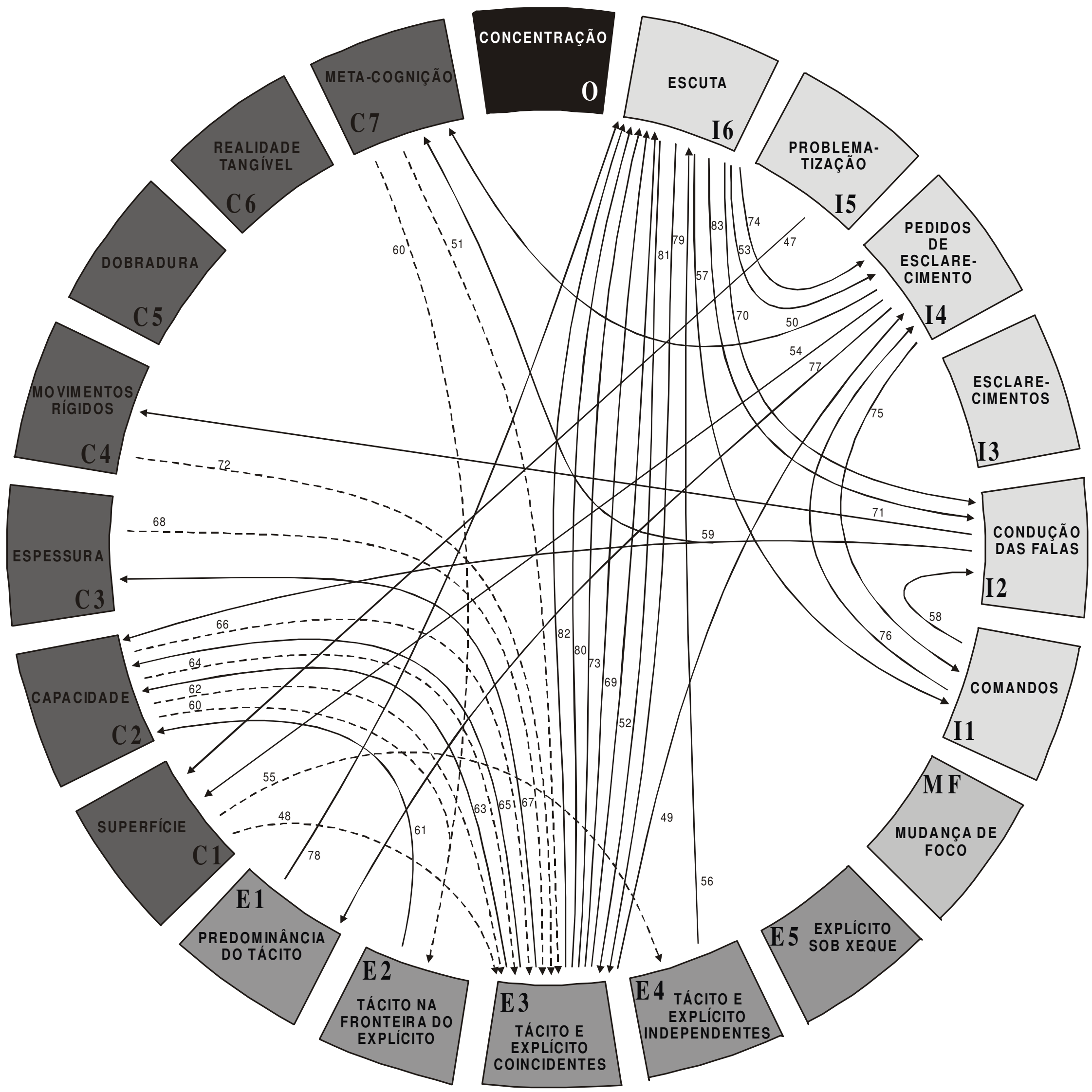


Gráfico 2 – Segmento 2

É interessante observar que as mobilizações, pelos alunos, de seus conhecimentos tácitos sobre capacidade (C2), movimentos rígidos (C4) e espessura (C3) geraram, na sua grande maioria, falas resultantes de articulações do tipo E3 (fluxos 62, 64, 66, 68 e 72). Somente uma das duas mobilizações dos conhecimentos tácitos dos alunos sobre superfície gerou uma fala, também, desse tipo (fluxo 48). Uma interpretação para isso pode ser devida ao fato de que os conhecimentos tácitos representados pelas categorias C2, C3 e C4 referem-se a aspectos mais gerais das figuras observadas no quadro classificatório. Em outras palavras, é mais difícil, a meu ver, explicitar a diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais a partir de aspectos relacionados à aparência direta ou fisionomia das figuras, uma vez que cada uma delas possui fisionomia própria.

Um outro fato interessante percebido nesse segmento relaciona-se com os fluxos 59 a 66. Mais especificamente, o fluxo 59 bifurca em direção aos códigos C7 e C2. Já os dois fluxos que saem, imediatamente, desses códigos possuem a mesma numeração 60, e se juntam em direção ao código E2. A mesma numeração dada a dois fluxos diferentes deveu-se a uma observação mencionada no capítulo anterior: o fato de pistas relativas aos conhecimentos C7 e C2 terem sido dadas na fala de um aluno, nesta seqüência, não significa que esse aluno os mobilizou na mesma ordem. Em seguida aos dois fluxos de numeração 60 podemos observar, no gráfico, um 'vai e volta' dos fluxos 61 até 66 entre os códigos C2 e E3. Vejamos com o auxílio do seguinte trecho da transcrição da fita em áudio uma explicação para esse fato:

> Professora: Qual que você acha que é a principal diferença? (fluxo 59)

A professora dirige uma fala resultante do código I2 ao aluno A28.

> A28: Porque essas aqui podem, elas têm volume, então ela, como é que fala? Podem colocar algum material, esses aqui não tem jeito porque (fluxo 61) (Nesse momento, o aluno foi interrompido por um colega.)

Essa fala indica que, ao mesmo tempo em que o aluno dá uma pista de que está mobilizando seus conhecimentos tácitos sobre volume dos sólidos, ele expressa uma dificuldade, inicial, de projetá-los no plano intersubjetivo. Tal expressão foi interpretada como um ato consciente do aluno em relação à sua dificuldade. Em outras palavras, ele demonstra, por um instante, ter, também, mobilizado seus conhecimentos meta-cognitivos. Em seguida, após uma rápida reflexão, talvez, ele consegue especificar pistas mais significativas de seus conhecimentos tácitos sobre capacidade dando indícios de que, a partir deles, a tarefa está preste a ser realizada com sucesso. Essa foi a razão pela qual sua fala foi interpretada como resultante do código E2. Resumindo: a fala da professora (fluxo 59) provocou nesse aluno a mobilização de dois de seus conhecimentos tácitos: C7 e C2. Tais conhecimentos integrados geraram, por sua vez, uma fala do aluno resultante da articulação do tipo E2. Isso explica a bifurcação do fluxo 59 e a junção, em direção à E2, dos dois fluxos de numeração 60.

A(?): Essas aqui são tipo linhas. (fluxo 63)

A fala desse aluno, que não consegui identificá-lo no registro em áudio, mostra que ele interrompeu A28 com o objetivo de compartilhar a resposta com o colega. Por isso, entendo que ele estava, no momento da sua fala, também, mobilizando seus conhecimentos tácitos de capacidade. Como a fala de A(?) foi segura e clara, ela foi interpretada como resultante do código E3.

A (?): É, esses aqui são tipo desenhos. (fluxo 65)

A (?): Tipo papel. (fluxo 67)

As duas falas acima são de alunos diferentes que, também, não consegui identificar. Essas falas mostram, também, uma disposição desses alunos em compartilhar a resposta da tarefa iniciada por A28. Ambas as falas, são claras e seguras. Daí, a interpretação delas serem resultantes, também, do código E3. Nesse trecho da transcrição da fita temos, então, uma resposta compartilhada por quatro alunos.

3. SEGMENTO 3

O segmento 3, representado pelo gráfico 3 (fluxos 84 até 120), corresponde aos três minutos que se seguiram ao segmento 2 e iniciou com a professora dando prosseguimento às falas dos alunos (fluxo 84).

Uma primeira característica desse segmento, relaciona-se à intensidade de interações entre a professora e os alunos. Uma segunda característica relaciona-se ao deslocamento da concentração de fluxos das categorias de conhecimentos tácitos se comparada com o segmento anterior. Ao contrário do segmento 2, vemos que as mobilizações dos conhecimentos tácitos, pelos alunos, geraram falas resultantes de códigos diferentes: E1(fluxos 114), E2 (fluxos 85) e E3 (fluxos 103). Uma terceira característica, relaciona-se ao fato de alunos terem mobilizado mais de um conhecimento tácito para realizar as tarefas 1 e 2. Isso pode ser visto através dos fluxos 84, 85, 102, 103, 113 e 114, por exemplo. Os fluxos mais escuros 103 e 104 indicam que um aluno expressou sua compreensão da entidade integrada lendo o que escreveu, ou seja, respondendo à tarefa 1. Vejamos através de trechos da transcrição da fita em áudio, como foram classificadas algumas falas geradas a partir da mobilização de mais de um conhecimento tácito pelos alunos.

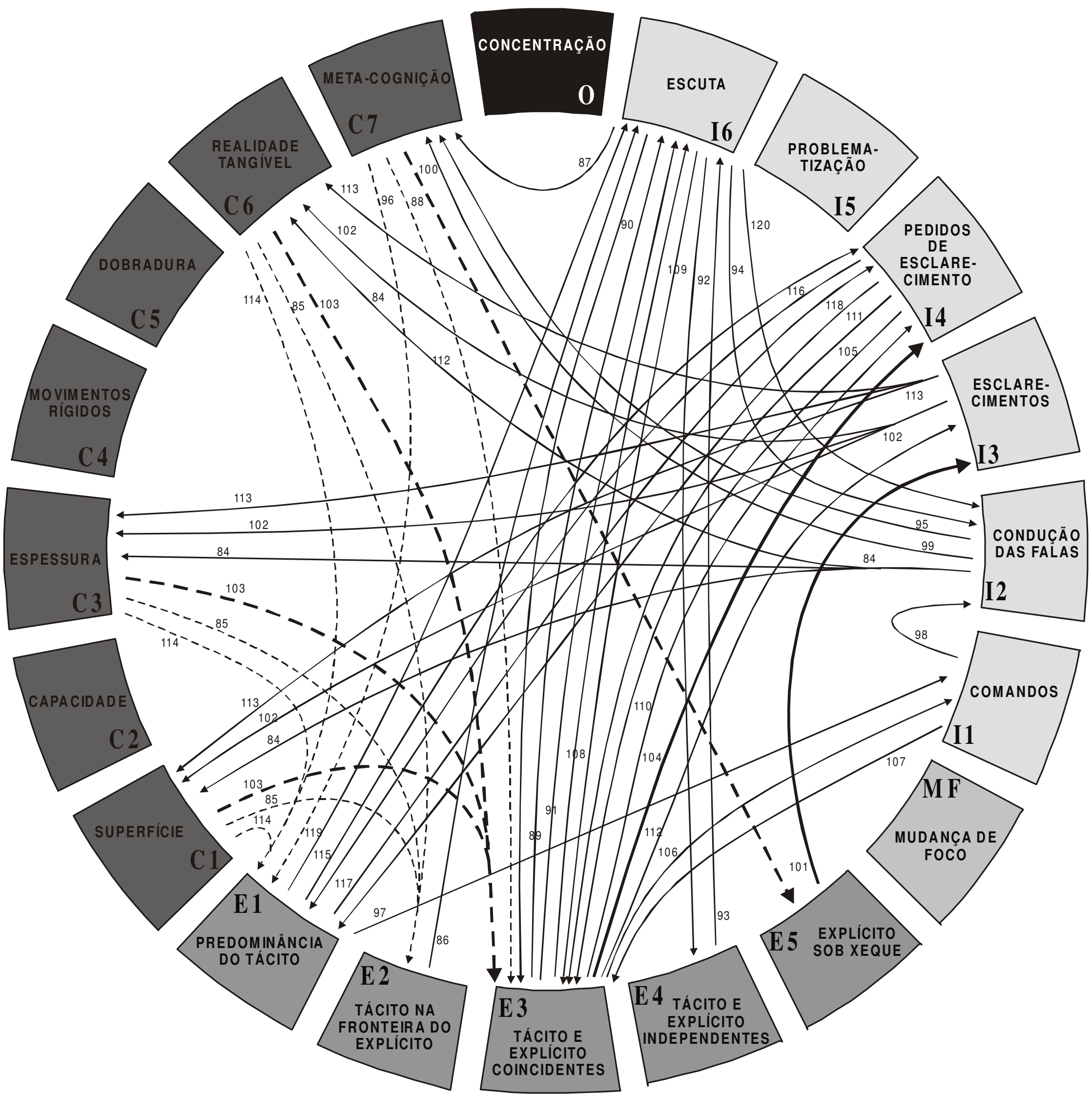


Gráfico 3 – Segmento 3

- Trecho relativo aos fluxos 84 até 93:

> Professora: Vai lá A4, fala prá mim as principais diferenças ou a principal diferença que você vê entre uma e outra. (fluxo 84)

A professora dirige uma fala resultante do código I2 à A4.

> A4: Olha aqui, todas as formas espaciais que tem volume dão exemplo de ser reais e para ser reais, o quê, olha eu senti uma coisa. Um prisma por exemplo de um hexágono. Você ligando um hexágono ao outro com, com retângulos dá um prisma. (fluxo 86)

A fala de A4 dá pistas de que ele mobilizou seus conhecimentos tácitos de realidade tangível (C6), superfície (C1) e espessura – "...ligando um...com outro" – (C3). Percebemos, nessa fala, que o aluno demonstra, ainda, uma certa dificuldade em projetar tais conhecimentos na entidade integrada, mas não a ponto de impedir que uma segunda pessoa possa apreender e atribuir significado a tais pistas. Por essa razão, a fala do aluno foi interpretada como resultante do código E2.

> Professora: Hunrum. (fluxo 87)

> A4: Só que eu queria explicar isso, mas não tem palavras. Por exemplo, uma, um círculo ligado de uma ponta a outra dá um cilindro. (fluxo 89)

Observe que A4 muda sua representação se comparada com a representação anterior: por um momento, A4 faz uma declaração indicando que ele está mobilizando, também, seus conhecimentos meta-cognitivos. Em seguida, sua fala torna-se mais segura e clara sugerindo que, dentre os conhecimentos tácitos que ele mobilizou, inicialmente, aqueles que se referem à espessura de alguns sólidos parecem ser os que foram escolhidos para dar significado à entidade integrada. Por essa razão, essa sua fala, agora, já foi interpretada como resultante do código E3. Nesse caso, podemos ver o desenvolvimento da compreensão de A4 partindo de uma articulação do tipo E2 em direção a uma articulação do tipo E3.

> Professora: Hanram. (fluxo 90)

> A4: Eu queria.Todas, eu acho que todas as formas espaciais ainda é que, que tem volume são ligadas de uma forma tendo. (fluxo 91)

De fato, parece que a compreensão de A4 acerca da entidade integrada corresponderá ao significado de seus conhecimentos sobre espessura dos sólidos. Notemos que aqui, ele ensaia uma generalização de seus conhecimentos de espessura de alguns sólidos para todos os sólidos. No meu entender, essa sua fala expressou bem seu pensamento, o que me levou a interpretá-la, ainda, como resultante do código tipo E3.

> Professora: Hanram. (fluxo 92)
>
> A4: E essas outras aqui são todas do tipo, são só desenhos finos assim, se você conseguir alguma aí ela será fina, ela será tipo uma esfera, é redonda uma bola. Se conseguir um círculo ela é fininha assim, só uma coisinha. (fluxo 93)

No entanto, ao insistir num maior detalhamento de seus conhecimentos tácitos sobre espessura, A4 perde, inevitavelmente, o significado que estava atribuindo a eles enquanto partes constituintes da entidade integrada (como já vimos, de acordo com Polanyi, tal detalhamento é uma das maneiras de dispersar os significados dos particulares de um conhecimento tácito). Sua fala, torna-se, portanto, contraditória, o que a levou ser interpretada, nesse momento, como resultante do código E4. Em outras palavras, ao tentar detalhar particulares de seus conhecimentos tácitos sobre espessura, A4 muda sua representação, mais uma vez, provocando uma fala que, parece, não coincide com seu pensamento. No caso desse aluno, é interessante observar o movimento de participação do tácito no processo de sua articulação da compreensão da entidade integrada: E2 $\rightarrow$ E3 $\rightarrow$ E4.

- Trecho relativo aos fluxos 99 a 112:

> Professora: Não, eu quero primeiro que antes você fale o seguinte. Qual que você acha A7, que caracteriza a principal diferença disso daí? Você pode até ter escrito, vamos ver se você escreveu e se quiser falar. O que você acha? Primeiro, você acha difícil dizer, escrever, a diferença? (fluxo 99)

A professora dirige uma fala resultante do código I2 à A7.

> A7: Eu escrevi aqui, mas eu não sei se está certo. (fluxo 101)

Essa fala mostra que A7 coloca sob xeque aquilo que escreveu. Por essa razão sua fala foi interpretada como resultante do código E5.

> Professora: Não, isso daí não tem que tá certo. É uma percepção sua. (fluxo 102)

A professora, então, faz um esclarecimento ao aluno.

> A7: O que eu vi aqui foi que as chatas e planas parecem não ter fundo, parecem não ter muitos lados e nem superfícies. E as espaciais que podem ter volume parecem ter fundo, tem lado e parecem ser reais. Parece ter superfícies cobertas e fechadas. (fluxo 104)

Em primeiro lugar, com o auxílio do registro original da fita, percebemos que A7 realizou a tarefa 1, ou seja, o que ele fala corresponde àquilo que ele registrou por escrito. Em segundo lugar, sua fala dá pistas de que ele mobilizou conhecimentos tácitos de espessura (C3), superfície (C1) e realidade tangível (C6). Como sua fala foi segura, clara e inteligível, ela foi interpretada como resultante do código E3.

> Professora: Tá, mas o quê que significa, porque que você falou que parece ser real? O quê que você quis dizer com isso? (fluxo 105)

A professora pede um esclarecimento à A7.

> A7: Tipo isso daqui oh. (fluxo 106)

A partir dessa fala, foi considerado que A7 estava realizando a tarefa 2. Sua fala sugere que ele se volta ao quadro classificatório para responder à professora. A fala, também, mostra segurança naquilo que ele vai explicar, por isso foi interpretada como resultante do código E3.

> Professora: Fala mais alto. (fluxo 107)
>
> A7: Isso aqui parece ser um ovo. (fluxo 108)
>
> Professora: Ah tá. (fluxo 109)
>
> A7: Isso daqui parece ser tipo um desenho. (fluxo 110)

As duas falas de A7, acima, sugerem que figuras espaciais são reais porque são concretas, tangíveis, e que figuras planas não são reais porque são representações. Essa fala continuou sendo interpretada como resultante do código E3.

> Professora: Ah tá e aqui parece ser um objeto concreto e aqui? (fluxo 111)

A professora insiste por mais um esclarecimento.

> A7: Não. (fluxo 112)

De fato, parece que figuras planas para A7 não são reais porque não são concretas, tangíveis. Ele parece convicto disso pela firmeza com que respondeu à professora. Daí essa sua fala ter sido, ainda, interpretada como resultante do código E3. É interessante observar que, embora A4 e A7 estivessem trabalhando em dupla, cada um procurou elaborar sua própria compreensão da entidade integrada. Porém, ambos mostraram mobilizar os conhecimentos tácitos C7, C6 e C3.

4. SEGMENTO 4

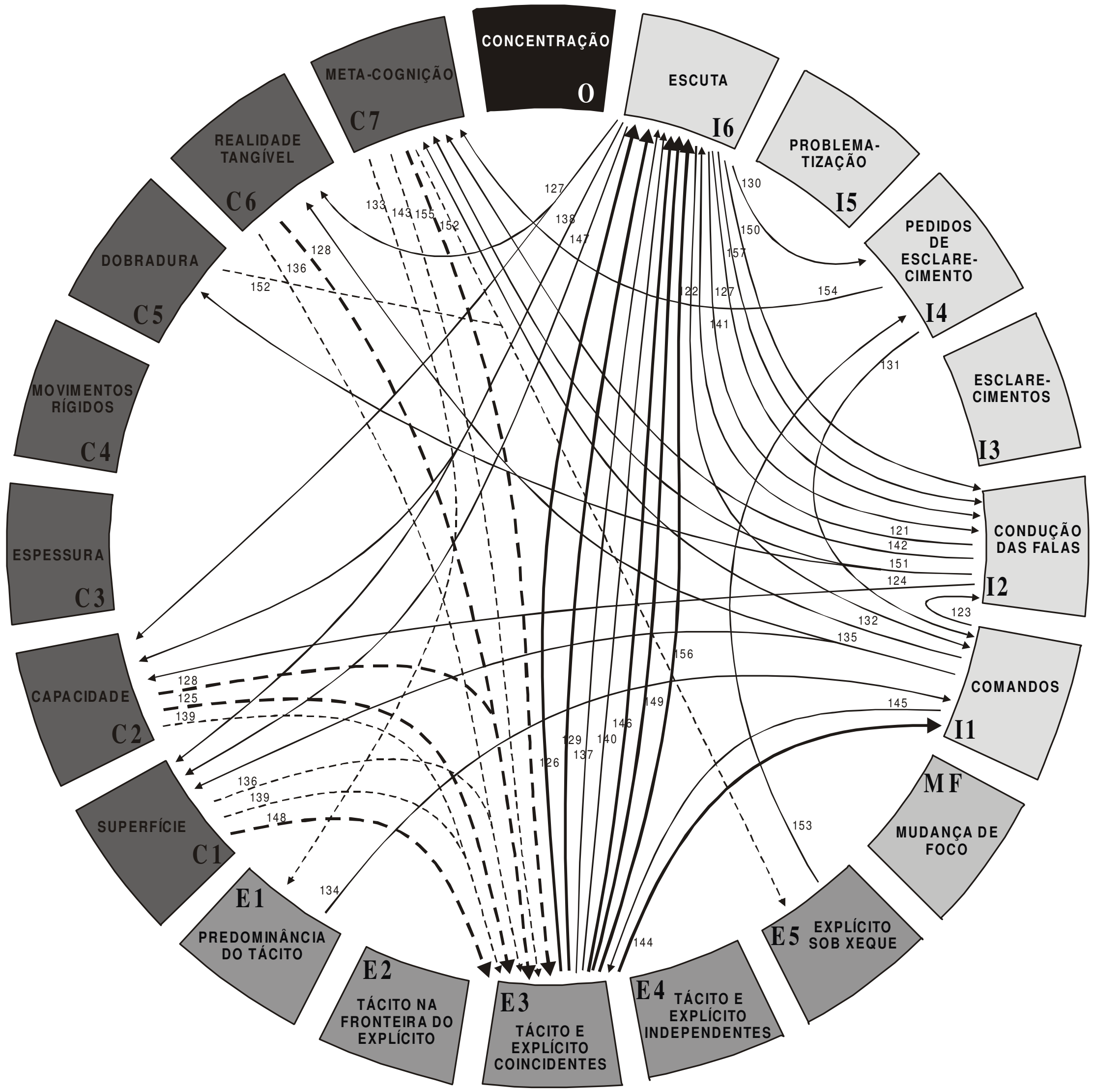


Gráfico 4 – Segmento 4

O segmento 4, representado pelo gráfico 4 (fluxos 121 até 157), corresponde aos 3 minutos do episódio que se seguiram ao segmento 3, e inicia com a professora conduzindo as falas dos alunos (fluxo 121).

O gráfico 4 mostra que, nesse segmento, apareceu, pela primeira vez, uma mobilização de conhecimentos tácitos sobre dobradura. Podemos ver, também, que houve mobilizações de mais de um conhecimento tácito pelos alunos (fluxos 128, 136, 139 e 152). Alguns alunos que participaram desse segmento elaboraram suas compreensões respondendo à tarefa 1, ou seja, lendo o que escreveram (fluxos escuros 126, 129, 146, 149 e 156). Isso é interessante, pois parece que esses alunos não foram influenciados pelas falas anteriores (a não ser que eles escreveram suas respostas durante essas falas. Porém, isso não deve ser o caso do aluno que mobilizou seus conhecimentos tácitos sobre dobradura (fluxo 152) e que produziu a fala representada pelo fluxo 153).

Se comparado com o segmento 3, os conhecimentos matemáticos tácitos: C1, C2, C5 e C6, mobilizados no segmento 4 geraram, todos, articulações do tipo E3, isto é, articulações que quando projetadas foram fiéis às representações internas dos alunos. Nesse segmento, não há ocorrência de conhecimentos do tipo C1 gerando falas resultantes de E4, como ocorreu nos segmentos 1 e 2. Vejamos a fala da aluna que mobilizou conhecimentos C1 e que provocou uma articulação interna que quando foi projetada na fala coincidiu com sua compreensão:

> A12: As semelhanças eu coloquei assim: em algumas figuras aparecem algumas formas chatas que formam uma figura com volume. Exemplo, o cilindro tem duas faces com a forma de um círculo, o prisma tem duas faces de um hexágono e duas de um retângulo. (fluxo 149)

Em primeiro lugar, percebe-se, com facilidade, no registro em áudio que a aluna estava lendo o que tinha escrito. Em segundo lugar, sua fala é segura, clara e inteligível. Note que ao contrário de outros alunos que procuraram descrever a diferença entre figuras planas e figuras espaciais através de aspectos gerais das faces dos sólidos que, em alguns casos, gerou uma articulação do tipo E4, ela obtém sucesso na medida em que procura exemplificar tais aspectos caso a caso. Além disso, ela sugere que diferenciar figuras planas das figuras espaciais através das faces dos sólidos, só é possível em alguns casos. Foi por essa razão que sua fala foi interpretada como resultante do código E3.

Até o momento, o segmento 4 e o segmento 2 foram os segmentos onde as falas expressaram melhor as compreensões dos alunos.

5. SEGMENTO 5

O segmento 5, representado pelo gráfico 5 (fluxos 158 a 183), corresponde aos 2 minutos finais do episódio e inicia com a professora conduzindo as falas dos alunos (fluxo 158).

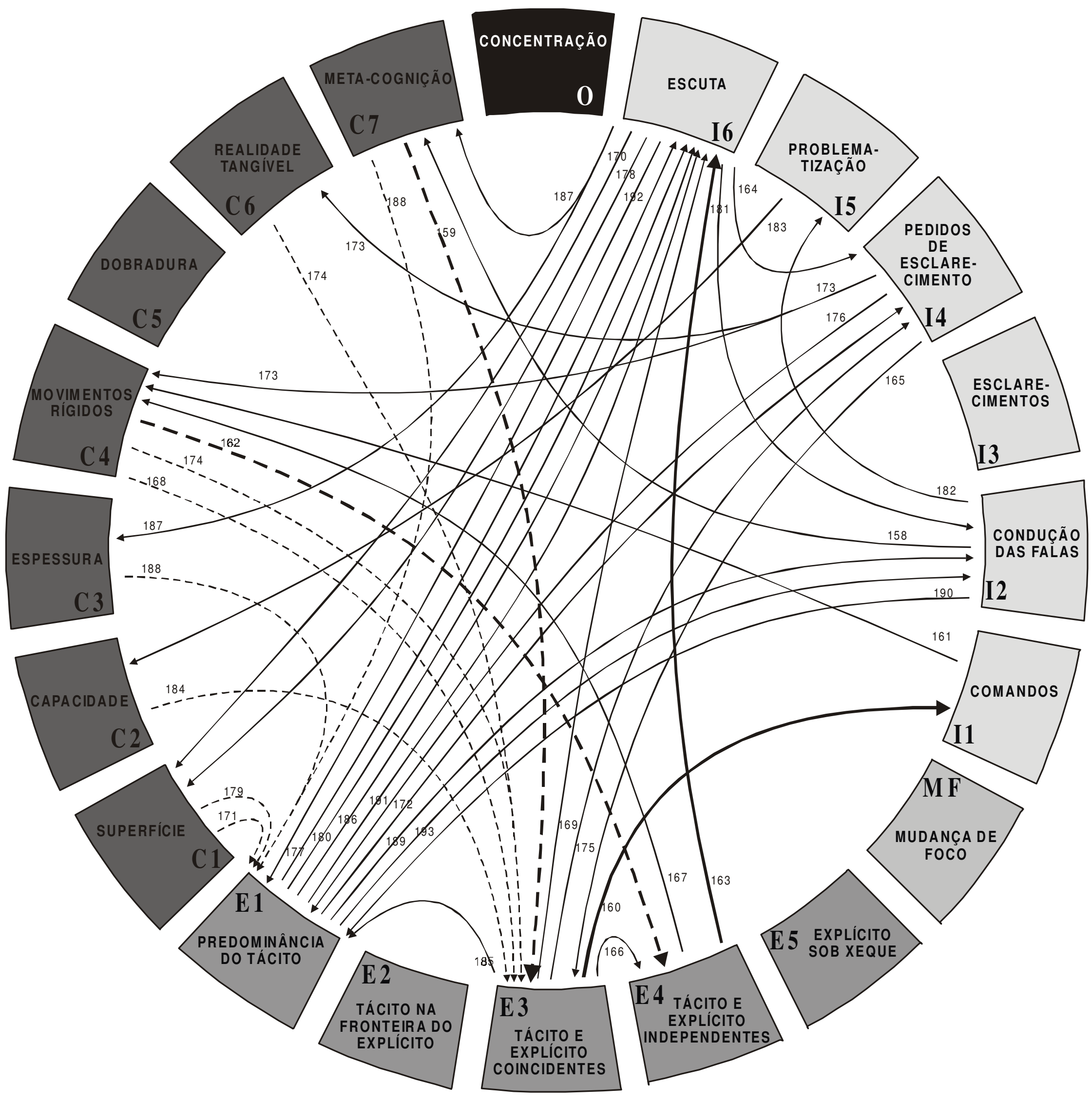


Gráfico 5 – Segmento 5

Através do gráfico 5 podemos ver uma grande concentração de fluxos nos códigos E1 e I6. Em outras palavras, esse segmento teve como uma característica falas dos alunos oriundas de uma articulação do tipo E1. Uma outra característica que mantém uma regularidade dos segmentos anteriores é a de que as mobilizações de conhecimentos tácitos sobre movimentos rígidos e capacidade, geraram articulações do tipo E3. Nesse segmento podemos ver que mobilizações dos conhecimentos tácitos sobre superfícies geraram articulações do tipo E1. O gráfico 5 mostra, ainda, que um aluno (ou alunos) respondeu (responderam) a solicitação da professora lendo a resposta que escreveu. Isso pode ser visto pelos fluxos mais escuros 160, 162 e 163. Nesse segmento temos, também, a mobilização de mais de um conhecimento tácito pelos alunos (fluxos 174 e 188). Um fato interessante que aparece pela primeira vez no segmento 5 relaciona-se a uma coordenação entre os códigos E3 e E1, representada pelo fluxo 185. Até o momento, isso não tinha acontecido. Vejamos, através do trecho da fita em áudio, o que provocou tal ação:

> Professora**:** Quando você olha prá esse monte de figura que tá aqui, oh. E esse que tá aqui o quê que te chama atenção? (fluxo 183)

A professora digire ao aluno A21 uma fala do tipo I5.

> A21**:** Essa daqui pode ter alguma coisa dentro delas ou então não. (fluxo 184)

> A21**:** Essas daqui são simples, não tem nada, não tem a forma assim oh. Tipo assim, essa daqui oh. Se for comparar essa daqui com essa daqui oh. (fluxo 186)

Analisando o registro em áudio, vê-se que entre uma fala e outra do aluno A21, descritas acima, não aparece uma terceira fala. Tampouco não ocorre uma hesitação do aluno entre uma fala e outra. Ou seja, essas duas falas de A21 poderiam ter sido consideradas uma mesma fala. Porém, ela foi partida em duas porque, entendi que, na mesma fala, o aluno mudou sua representação interna. De fato, note que a primeira frase do aluno, em resposta à professora, contém pistas de que ele mobilizou seus conhecimentos tácitos de capacidade. Como a frase foi clara, precisa e inteligível, eu a interpretei como resultante do código E3. Já a partir da segunda frase, o aluno mostra uma tentativa de detalhar aspectos particulares desses seus conhecimentos o que provoca uma dificuldade do aluno em se expressar. Nesse momento, percebe-se uma certa luta do aluno consigo mesmo para colocar seu pensamento em palavras. Isso me levou a interpretar que ele estava, nesse momento, numa articulação do tipo E1. Resumindo, o aluno começa se expressando bem, porém quando muda a representação, ele faz um detalhamento de aspectos particulares de seus conhecimentos que o leva, inevitavelmente, segundo Polanyi, a uma articulação interna na qual o tácito predomina sobre o explícito. Essa foi a razão da partição da fala do aluno. Só para lembrar, como dito no capítulo de metodologia, um fluxo foi gerado quando: (a) mudou-se o significado dentro da fala de um mesmo interlocutor; (b) mudou-se o interlocutor. O caso que estamos tratando é, então, o caso a.

6. DISCUSSÃO

Essa análise partiu da hipótese epistemológica de Polanyi de que todo conhecimento proposicional é construído a partir de conhecimentos tácitos. Isso pode ser evidenciado nos gráficos pela observação de que os fluxos pontilhados e originados dos códigos C1,.., C7 chegam, necessariamente, em algum código E1,..,E4 antes que ocorra a projeção dessas articulações. Em outras palavras, toda fala do aluno foi precedida de operações mentais do tipo 'de-para-integração, isto é, operações mentais através das quais os conhecimentos usados subsidiariamente quando integrados foram projetados na entidade integrada – a diferença entre figuras planas e figuras espaciais – e em termos daquilo que seus significados contribuíram para a compreensão da entidade. Mais especificamente, a estrutura, proposta por Polanyi, do ato tácito do conhecer pode ser evidenciada em todos os seus aspectos: funcional, fenomênico, semântico e ontológico. De fato, quanto ao aspecto funcional, os conhecimentos que eles usaram para elaborar suas compreensões acerca da diferença entre figuras plansa e figuras espaciais funcionaram como instrumentos intelectuais para a realização dessa tarefa. Quanto ao aspecto fenomênico, esses conhecimentos são parte de um todo, a saber, da compreensão elaborada. No que se refere ao aspecto semântico, os conhecimentos usados de maneira instrumental correspondem aos significados projetados, pelos alunos, na compreensão. Finalmente, a referência ontológica que os alunos fazem à diferença entre tais figuras indica que uma entidade foi construída.

Em relação às falas produzidas pelos alunos, a análise evidenciou, de maneira consistente, uma relação entre elas e os pensamentos dos alunos. Como vimos, a partir dessas falas foram identificadas as articulações integradas que, supostamente, precederam suas projeções. Três dessas representações, a saber, as codificadas por E1, E3 e E4 foram identificadas com as áreas de co-operação entre o tácito (pessoal) e o explícito (formal), descritas por Polanyi: domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação, respectivamente. Em relação à articulação codificada por E2 – Tácito na fronteira do explícito – vimos, por exemplo, no segmento 3, o desenvolvimento da articulação de um aluno iniciando-se em E2, passando por E3 – Tácito e explícito coincidentes – e culminando numa numa articulação do tipo E4 – Tácito e explícito independentes. O movimento E3 → E4 foi interpretado como sendo uma tentativa do aluno de detalhar particulares de seus conhecimentos. Tal ato, também, pode ser evidenciado no segmento 5, porém, o movimento da articulação do aluno foi E3 → E1. Com relação ao código E5 – Explícito sob xeque – vimos, no segmento 1, a ocorrência de uma mudança de foco, em processo, do tipo auto-conscientização que resultou numa paralisação momentânea da performance de um aluno.

No que se refere aos tipos de conhecimentos tácitos mobilizados pelos alunos para realizar a tarefa de elaborar uma compreensão acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais, essa análise permitiu evidenciar que, dentre eles, estão componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest do conhecimento matemático. Mais especificamente, evidenciaram-se os seguintes componentes sendo usados de maneira subsidiária ou instrumental: (a) afirmações e proposições (em relação à superfícies dos sólidos, por exemplo) que é principalmente explícito; (b) visão meta-matemática (concepção ontológica dos entes matemáticos) e aspectos da linguagem matemática (linguagem oral) que são principalmente tácitos. Não foram identificados, nesse episódio os demais componentes.

Algumas especulações relacionadas com a aprendizagem dos alunos podem ser esboçadas a partir da análise. Em primeiro lugar, o segmento 1 mostra que alguns alunos tiveram dificuldade de expressar suas compreensões por escrito. Mas, a medida em que a aula se desenvolveu de maneira mais livre, solta, sem a imposição de registrar a tarefa por escrito, os alunos tenderam a produzir articulações que, ao serem projetadas, se aproximaram, de uma maneira ou de outra, do que eles estavam pensando. Pelo fato de que a escrita exige maior reflexão e é mais lenta que a fala, é possível que esses alunos não tenham se esforçado o bastante para escrever. Outra possibilidade é a de que eles, realmente, possuem dificuldade de se expressar por escrito. Em segundo lugar, pareceu que houve uma tendência de que mobilizações de conhecimentos tácitos de superfície geraram articulações que não coincidiram com o pensamento dos alunos. Como dito na análise do segmento 2, isso pode ser devido ao fato de que parece ser mais difícil explicitar a diferenciação entre figuras planas e espaciais a partir de aspectos relacionados à aparência direta ou fisionomia das figuras, uma vez que cada uma delas possui fisionomia própria. Em terceiro lugar, o fato de os alunos estarem dispostos em dupla, isso parece não ter significado que os alunos que formavam as duplas mobilizaram os mesmos conhecimentos tácitos e da mesma maneira. Tampouco pareceu que um aluno que elaborou uma declaração foi influenciado pela declaração imediatamente anterior de um outro aluno. Finalmente, a relação entre pensamento e fala dos alunos mostrou-se um processo dinâmico sem um padrão definido: numa mesma fala pode-se identificar mais de um tipo de representação.

Por outro lado, tal como ocorreu no trabalho de Strom e colaboradores (2001), a metodologia usada nesse episódio permitiu visualizar: (a) o alto grau de participação dos alunos na tarefa; (b) o importante papel exercido pela professora na participação dos alunos levando-os a compartilhar seus conhecimentos pessoais em sala de aula. O alto grau de engajamento dos alunos pode ser interpretado como resultante da maneira pela qual a professora conduziu as aulas que deram origem a esse episódio: inicialmente, ela deixa bem claro aos alunos no que consiste a tarefa. Ela, também, gasta um certo tempo para organizar a turma antes que a tarefa seja executada. A professora muda a prática ao perceber que os alunos estavam com dificuldades de realizar a tarefa por escrito. Ou seja, a experiência dos alunos foi absorvida pela professora na medida em que ela permitiu que eles realizassem a tarefa verbalmente, em tempo real. A prática foi adaptada conforme a experiência dos alunos. Nesse sentido, podemos dizer que as aulas relativas ao episódio tiveram características de uma comunidade de prática: engajamento mútuo, participação coletiva para atingir um propósito comum (a realização da tarefa) e compartilhamento de linguagem e conhecimentos pessoais.

Sob o ponto de vista educacional, a análise desse episódio está indicando que, aquilo que o aluno sabe ou não sabe não deve ser entendido, apenas, com base naquilo que ele explicita. Como vimos, pode ocorrer que aquilo que o aluno está explicitando não corresponde, necessariamente, a sua compreensão original. Nesse caso, ou o tácito ainda predomina sobre sua compreensão ou as operações simbólicas ainda não dão conta de expressar essa compreensão. Além disso, o fato de um aluno usar ou não determinados conhecimentos matemáticos que já foram trabalhados, anteriormente, em sala de aula para realizar uma tarefa que, supostamente, necessita do uso desses conhecimentos, pode ser um indicador de que o aluno possui ou não possui tais conhecimentos interiorizados. Em outras palavras, a performance do aluno precisa ser melhor avaliada em termos daquilo que ele usou ou não usou para realizar uma tarefa. Em vez de focar sua atenção, somente, na resposta do aluno, o professor pode obter informações sobre a interiorização de certos conhecimentos através dos conhecimentos que os alunos usam ou não usam de maneira subsidiária.

CAPÍTULO VII

ESTUDO DE CASO DE UMA DUPLA DE ALUNOS

1. INTRODUÇÃO E METODOLOGIA

No capítulo anterior foi apresentada a análise de um episódio enfocando-se um contexto bastante específico: o de uma conversação interpessoal acerca da diferenciação entre figuras planas e figuras espaciais. Apesar dessa especificidade, a análise nos deu elementos para identificar, dentre outros aspectos, como componentes matemáticos principalmente explícitos e principalmente tácitos do modelo de Ernest – afirmações, linguagem e visões meta-matemáticas, por exemplo – manifestam-se em processos de aprendizagem (no sentido do aspecto funcional da teoria de Polanyi). No presente capítulo investigo o desenvolvimento desses e de outros componentes do modelo em relação, agora, ao conhecimento de áreas e medidas da dupla de alunos A4 e A7. Nesse caso, focaliza-se o trabalho com o tema de maneira geral e ao longo das duas fases de pesquisa. A opção pelo estudo de caso da dupla de alunos A4 e A7 deveu-se ao fato de que ela foi a única dupla que se manteve fixa durante todo o período de realização da pesquisa. Isso não significou, no entanto, que não levei em consideração a investigação da aprendizagem de outros alunos e mesmo da turma como um todo para orientar-me na análise dos dados.

A estratégia metodológica adotada no estudo que apresento consistiu na criação de episódios temporalmente seqüenciais que permitissem retratar processos ou estados dos desenvolvimentos dos alunos A4 e A7 ao longo dos dois períodos em que o tema 'áreas e medidas' foi trabalhado em sala de aula. A partir de um processo cuidadoso de leitura e análise dos dados, examinados nos seus diversos instrumentos de coleta (ver seção 5 do capítulo IV), foram escolhidos eventos para gerarem os episódios. Tais eventos, por sua vez, emergiram da minha percepção sobre indicadores de progressos, dificuldades, questionamentos e outros aspectos observados no curso das aprendizagens de A4 e A7 que considerei interessantes ou relevantes de serem destacados. Uma vez criados os episódios, procurei, em cada um deles, identificar os componentes do conhecimento matemático dos alunos, bem como os domínios de co-operação entre o tácito e o explícito eles estavam operando no momento da fala.

Cabe observar que a seqüência de episódios não está, necessariamente, em correspondência estrita com a seqüência de aulas do trabalho com o tema. Por exemplo, um mesmo episódio pode estar relatando um evento que estendeu-se para além de uma aula. Alternativamente, uma determinada aula pode não ter gerado nenhum episódio. Os episódios de 1 até 9 correspondem à primeira fase de pesquisa. Os demais episódios correspondem à segunda fase. Entre a primeira fase de pesquisa e a segunda passaram-se, aproximadamente, quatro meses.

2. EPISÓDIO 1: A4 e A7 constroem um conceito matemático de área e descobrem que o cálculo de área está associado a uma contagem.

Nas aulas 1 e 2 a professora aplicou um questionário-diagnóstico cujo objetivo foi o de identificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de áreas e medidas. Ao responder o que a palavra 'área' significava, os alunos A4 e A7 escreveram o seguinte:

> A4: A palavra área significa uma certa localização ou um terreno, um espaço.
>
> A7: Para mim a palavra área é um espaço que representa algo ex: A área onde fica a UFMG é muito bonita.

Com base nas escritas, cima, podemos interpretar que ambos os alunos possuem uma concepção ontológica da entidade 'área' como sendo um espaço físico geográfico: uma entidade tangível, pertencente ao mundo real; concreto. Influenciados, possivelmente, pelas discussões coletivas que se seguiram à aplicação do questionário e à leitura do texto 'Noção de área' do livro didático, A4 e A7 re-elaboraram suas respostas, associando, agora, a palavra 'área' a uma medida:

A4: A palavra área significa uma unidade de medidas de comprimentos iguais.

A7: Para mim a palavra área representa o espaço de alguma coisa ex: o pátio que é medido com lajotas.

As mudanças nas respostas de A4 e A7 indicam alterações conceituais na entidade. No caso de A4, a mudança radical em sua forma de expressão (se comparada com a resposta anterior) sugere uma alteração ontológica radical da entidade: área não é mais uma entidade tangível, mas sim, abstrata. Note como a expressão 'medidas de comprimentos iguais', usada por A4, é contraditória sob o ponto de vista da disciplina. Por exemplo, será que ele usou a expressão 'comprimentos iguais' para se referir a quadrados – que tem lados iguais – como unidade de medida? No caso de A7, tal alteração contem elementos da linguagem anterior, porém, sugere um deslocamento da entidade como sendo algo, somente, concreto, tangível, em direção a uma entidade que é uma representação. Resumindo, para A7, a entidade 'área' passou a ser uma representação de um espaço físico geográfico, e que essa representação está associada a uma medida. Considerando-se ambos os casos, podemos dizer que, a partir das discussões coletivas, A4 e A7 construíram um componente principalmente explícito do conhecimento de áreas – conceito – com certa rapidez, pouco esforço mental, ainda que, no caso de A4, a explicitação tenha sido matematicamente contraditória. Esse componente, por sua vez, está sendo interpretado como que traduzindo a criação, pelos alunos, de uma realidade para a entidade 'área'.

Ainda no questionário diagnóstico, quando foi solicitado que calculassem a área de um retângulo quadriculado onde cada quadradinho era uma unidade de medida de área, tanto A4 quanto A7 acertaram a resposta (61,5% dos 26 alunos que responderam ao questionário, também, acertaram a resposta). Vejamos os seguintes protocolos (registro em áudio) da entrevista conduzida pela professora acerca do acerto de suas respostas:

<u>Professora e A4:</u>

Professora: (…) você já tinha calculado área alguma vez?

A4: Não.

Professora: E como é que você acertou, o quê que você fez para encontrar esse número 18.

A4: É só por causa que eu somei todos os quadradinhos.

Professora: Você contou.

A4: Os quadradinhos.

Professora: Aí deu 18 quadradinhos.

A4: É, por causa que estava falando que cada um desses quadradinhos eram … significava uma área.

Professora e A7:

Professora: (…) E como que você achou esse 18? (…)

A7: Eu peguei um, um quadrado que é uma unidade de medida e contei cada um. (...)

A7: Cada um, deu 18.

Professora: (…) Você já tinha calculado área alguma vez?

A7: Não.

Professora: E como é que você acertou essa? O quê que você lembrou na hora aí para você calcular?

A7: Ah, porque eu lembrei que cada quadradinho é uma unidade de medida.

Os registros, descritos acima, mostram que mesmo não tendo trabalhado com o tema em séries anteriores, os alunos foram capazes de estender seus conhecimentos de contagem a uma situação-problema nova: o cálculo de áreas. Nesse sentido, podemos dizer que houve uma produção de conhecimento pelos alunos a partir da mobilização de um componente principalmente tácito: métodos, procedimentos, ... Entendo que nesse caso eles fizeram o uso de uma analogia com a contagem de unidades de medida de comprimento. Portanto, o componente ‘raciocínios’, também, foi identificado: ele é a justificação dessa analogia, dada na entrevista. A explicitação inteligível dos raciocínios dos alunos indica que o tácito coincidiu com o explícito no momento em que foram produzidas as falas.

Em resumo, nesse episódio foram identificados (1) os componentes: afirmações (conceito de área); métodos, procedimentos…(uma analogia) e raciocínios (justificativa da analogia); (2) a articulação interna: E3.

3. EPISÓDIO 2: A4 confunde-se numa contagem e A7 descobre a multiplicação ‘comprimento × largura’.

Ainda nas aulas 1 e 2, durante a confecção, em dupla, dos exercícios do livro, A4 e A7 tentavam calcular o número de lajotas que cobriam o piso de uma sala retangular. O livro apresentava um desenho dessa sala o que facilitava para os alunos realizar a contagem das lajotas. Enquanto A4 encontra números sem sentido, A7 descobre a multiplicação ‘comprimento × largura’. Vejamos o ocorrido no protocolo (registro em áudio) abaixo:

> A7**:** (...) Quanto que deu?
>
> A4**:** 71 e 57.
>
> A4**:** 178. (...)
>
> <u>A7: 15, 1, 2, 3...15 vezes 12. 170? Porque aqui oh 1, 2, 3 ... 16.</u> (...) (A7 erra a multiplicação 15 × 12 = 180)
>
> <u>A7: 1, 2, 3... 16. 16 vezes 12. 192</u>. (...)
>
> A7: É 16. 1, 2...16.
>
> <u>A7: Dá 192, não é não? Porque aqui oh, 16, tem que contar com os ladrilhos é de largura</u>. (...)
>
> *A4: 178*
>
> *A7: 178?*
>
> *A4: Então põe aí 178. (...) há 178. 178 lajotas no piso.*
>
> A7: No piso, no piso.

Nas falas sublinhadas, vemos que A7 em vez de contar, um a um, o número de lajotas que recobriam o piso, usa a multiplicação ‘número de lajotas em cada fileira vezes o número de lajotas em cada coluna’. Porém, as falas em itálico sugerem que A7 abandona esse procedimento, provavelmente, influenciado por A4. Na tentativa de entender melhor os cálculos que A4 estava fazendo, os registros escritos dos exercícios dos dois alunos foram analisados. Ambos escreveram a resposta: “178 lajotas” e não registraram nenhuma conta e nem o raciocínio usado.

As falas de A7 são boas representações externas de seu pensamento enquanto ele resolvia o problema, ou seja, podemos inferir sobre o raciocínio que ele usou para resolver o problema. O mesmo não ocorre com A4. Por exemplo, quando A4 se refere aos números 71 e 57 que ele obteve, é praticamente impossível levantar hipóteses sobre o que o aluno estava pensando e de onde ele tirou esses números. Nesse caso, parece que o tácito predominou sobre o explícito: as dicas da sua articulação interna foram extremamente vagas para levantar alguma hipótese sobre seu raciocínio.

Resumindo, esse episódio registra um momento de escolha de estratégia (componente 'métodos, procedimentos, ...') por parte do aluno A7. É possível que ao decidir usar a multiplicação 'comprimento × largura' ele o tenha feito porque percebeu que esse procedimento era mais 'econômico' (mais rápido) do que contar o número de lajotas uma a uma. Ao registrar essa estratégia, o componente 'provas e raciocínios' foi identificado: a computação da multiplicação. As articulações identificadas foram: E3 para o aluno A7 e E1 para o aluno A4.

4. EPISÓDIO 3: A4 e A7 usam uma informação e concluem, para um caso particular, que a comparação entre figuras planas independe da unidade de medida de área utilizada.

Durante a aula 3, A4 e A7 resolviam um exercício do livro que apresentava dois polígonos A e B quadriculados com quadrados de tamanhos diferentes. O livro informava através de uma frase seguida de uma figura a equivalência entre as unidades de medida de área dos dois polígonos: "Cada grupo de 4 quadradinhos do polígono A forma um dos quadradinhos do polígono B". Uma das perguntas propostas no exercício consistia em responder qual o polígono de maior área. Vejamos, no protocolo abaixo, como os alunos responderam à esse exercício (registro em áudio):

> A7**:** (…), afinal, quem tem a maior área? A ou B?
>
> A7: B, a letra B.
>
> *A4: Pois, pois ela possui...*
>
> <u>A7: Pois usando o quadradinho menor como unidade de medida ela tem mais, e usando o quadrado maior …</u> <u>De qualquer jeito ela tem mais.</u>
>
> *A4: Possuem mais quadrados.*
>
> A7: A letra B possui mais quadrados...
>
> *A4: Mais quadrados…em menor ou maior tamanho.*

A7: Em menor ou maior tamanho.

A4: Tamanho em quadrado, tamanho em quadrado.

O registro acima indica que A4 e A7 usaram corretamente a informação do livro para concluir que o polígono B possuía maior área independentemente da unidade de medida de área utilizada. A prontidão e segurança das falas dos alunos indicam que as falas coincidiram com o que eles pensaram. Observando a resposta escrita desses alunos, vemos que ambos escreveram: "A letra b pois ela possui mais quadrados em menor ou maior tamanho em quadrados" (esperava-se que eles dissessem: O polígono B, pois ele possui…). Nesse caso, um componente principalmente explícito – raciocínio – foi identificado (veja as frases sublinhadas de A7 e em itálico de A4).

Resumindo, nesse episódio encontramos uma evidência da mobilização do componente 'raciocínios'. A articulação identificada nos dois alunos foi do tipo E3.

5. EPISÓDIO 4: A4 e A7 parecem não ver significado nas fórmulas de áreas de retângulos e de quadrados e confundem área com perímetro.

Na aula 6 foi pedido aos alunos que lessem e discutissem, em dupla, o texto 'Área de Retângulos' do livro didático e que, após a leitura, respondessem ao questionário 'Conversando sobre o texto' e alguns exercícios, propostos pelo livro. O objetivo dessa atividade era o de identificar o quanto os alunos podiam compreender um texto matemático sem a mediação, *a priori*, da professora.

Analisando o registro em áudio desse episódio vemos que A7 iniciou a leitura do texto, em voz baixa, e logo a dupla passou para o questionário sem demonstrar, externamente, nenhuma reflexão sobre o texto. A primeira pergunta do questionário pedia que se respondesse porque o quadrado é um tipo especial de retângulo (a resposta a essa pergunta estava explicitada no texto). A segunda, pedia que se calculasse as áreas de quadrados de lados 5 cm, de lados 9 cm e de lados 6 cm (a fórmula, seguida de um desenho, também, estava explicitada no texto).

Ao se depararem com a primeira pergunta, os alunos mostraram não saber a resposta. Eles voltaram ao texto, releram novamente as informações, voltaram à leitura da pergunta, ensaiaram algumas respostas sem sentido, discutiram, voltaram ao texto e, por fim, decidiram tirar a dúvida com a professora. Vejamos parte do ocorrido (transcrição do registro em áudio e registro original):

> <u>A7**:** Tá falando que …o quadrado é um retângulo com dois lados iguais</u> .
>
> *A4: Eu sei, porque se a largura e o comprimento tiverem medidas em centímetros elas estão em centímetros quadrados. Será que é isso?* (...)
>
> <u>A7: Porque um quadrado é um tipo especial de retângulo? Aqui oh, o quadrado é um retângulo com todos os lados iguais, por isso a fórmula fica diferente.</u>
>
> A4: Ah sei, agora entendi.
>
> A7: Entendeu?
>
> *A4: O retângulo também pode se medir alguma área em forma de quadrado.*
>
> (…)
>
> A7**:** Porque...
>
> A4: Porque o quê?
>
> A7: A pergunta. Quem pode explicar porque o quadrado é um tipo especial de retângulo? Porque...
>
> A4: Eu. Eu vou colocar. Deixa eu explicar, eu posso porque eu sei.
>
> A7: Porque o retângulo também serve para...
>
> *A4**:** Porque o retângulo é um quadrilátero? Retângulo é um quadrilátero, ele tem 4 lados igual ao quadrado.*
>
> <u>A7**:** A fórmula da área do retângulo também serve para obter a área do quadrado. Porque a fórmula de área do retângulo serve para obter a área do quadrado</u>? (A7 volta ao texto)
>
> A7: Vão perguntar ela (se referindo à professora).
>
> A4: Professora?

As duas primeiras falas sublinhadas de A7 indicam que, num certo momento, ele parece que encontra a resposta no livro do porquê o quadrado ser um tipo especial de retângulo. Já a primeira frase em itálico de A4 sugere que, no momento da formulação da pergunta, ele encontrava-se operando no domínio da sofisticação (E4): a fala é confusa e imprecisa, apesar da prontidão e segurança com que ele a formula. Em seguida, o aluno anuncia que entendeu a pergunta e expressa, novamente, uma fala (segunda frase em itálico) resultante de uma articulação do tipo E4. A partir daí, percebe-se uma insistência por parte de A4 em dizer que já sabia a resposta, o que pareceu provocar em A7 uma mudança de foco. Observe na última fala sublinhada desse aluno que ele voltou ao texto para responder a pergunta que ele mesmo já estava anunciando responder. As falas que se seguem mostram que A7 encontrava-se confuso e decidiu tirar a dúvida com a professora. No registro original, vemos que a professora esclareceu para os alunos a diferença entre retângulos e quadrados; o que caracteriza ambos os quadriláteros. Após esse esclarecimento, vejamos no protocolo abaixo (transcrição do registro em áudio) a discussão que se seguiu entre os alunos:

> <u>A7**:** Agora sim, porque…Porque o quadrado, porque o quadrado além de ter os ângulos iguais a 90º, tem os lados iguais que a professora falou.</u>
>
> *A4: Não, mas isso é um caso especial, e é um retângulo porque ele tem os 4 lados, 4 lados.*
>
> A7: Igual a 90º.
>
> *A4: Não, espera. 4 lados...*
>
> A4A7[46]: Com os ângulos iguais a 90º.
>
> *A4: E uma coisa que ele tem de diferente é que os 4 ângulos são iguais. Por isso que ele é um quadrado especial. É.*
>
> A7: Porque o quadrado tem ângulos de 90º, 4 lados, 4 lados, 4 lados…
>
> *A4: e 4 lados, mas a diferença…*
>
> A7: 4 lados mas ele é especial porque, mas é especial... (A7 está escrevendo a resposta)
>
> A7: Tem que explicar.
>
> A4A7: 4 lados.
>
> <u>A7: Mas porém com seus lados são iguais. Eu que pus isso, agora já era, é tudo a mesma coisa. É especial porque possui seus lados iguais. Eu consegui uma pergunta de conversando sobre o texto</u> (Aqui, o aluno está se referindo ao questionário 'Conversando sobre o texto', proposto pelo livro didático. Note que A7 não dá atenção à dúvida de A4 e passa para a leitura da segunda pergunta do questionário).
>
> A7: Qual é a área de um quadrado com 5 centímetros de área? E com 9 centímetros de lado? E com 2 centímetros de lado?

As falas sublinhadas de A7 sugerem que ele compreendeu a explicação dada pela professora, como também construiu uma definição do quadrado que é um componente principalmente explícito. O mesmo parece não ter ocorrido com A4: ele continuou confuso; suas explicitações continuaram contraditórias (veja falas em itálico). Isso pode ser devido ao fato de que sua representação interna de retângulos e de quadrados não estava completamente integrada ou formada no momento da fala. A

46 O símbolo A4A7 representa uma convenção que adotei sempre que os alunos falaram ao mesmo tempo.

entidade ‘quadrado’ não estava pronta ainda para ser descrita em palavras (domínio da sofisticação).

Ao analisar o registro escrito de suas respostas, vemos que ambos escreveram que o quadrado era um tipo especial de retângulo porque o quadrado tinha ângulos de 90º e seus lados eram iguais. Comparando a discussão dos alunos e suas respostas escritas, podemos interpretar que, nesse caso, A4 foi influenciado por A7: o entendimento de A7 predominou no registro escrito sobre a dúvida de A4.

Com relação à segunda pergunta do questionário, os alunos calcularam o perímetro dos quadrados em vez da área, muito rápida e seguramente e registraram a resposta por escrito. Sequer mencionaram a área do quadrado que foi apresentada no texto e lida por eles várias vezes. No entanto, quando passaram para um exercício do livro que pedia que se calculassem a área e o perímetro de um retângulo de lados 18m e 9 cm, eles calcularam corretamente o perímetro (54 cm) e explicitaram que estavam calculando essa medida. Quando, porém, foram calcular a área, eles se atrapalharam e erraram a resposta. Há uma indicação de A4 para A7 de que a área iria ser calculada contando-se os quadradinhos: ‘Deixa eu pensar. Vai fazendo os quadradinhos e deixa eu pensar .” Ambos os alunos explicitaram alguns números sem sentido e deram como resposta 162. Porém, no registro escrito da resposta, A4 escreveu: ‘É igual a 54 de área e de perímetro…’. No registro em áudio vemos que a aula terminou e a professora pediu aos alunos que entregassem os exercícios mesmo sem terminar. Deve ter sido por essa razão que a frase de A4 ficou incompleta e que A7 não escreveu sua resposta. De qualquer maneira, a área do retângulo não era 54. Esse valor era o seu perímetro.

Fica claro, nesse episódio que, de maneira geral, A4 e A7 não demonstraram uma autonomia em relação à leitura do texto. No caso das fórmulas lidas, essas não foram mencionadas enquanto eles resolviam os exercícios. Isso pode estar relacionado ao componente ‘linguagem e simbolismo’ matemáticos da seguinte maneira: segundo Polanyi, compreendemos um texto somente se possuímos um conhecimento tácito da linguagem, ou seja, se as palavras ou símbolos projetados no texto possuem um significado para nós. Nesse sentido, podemos dizer que os alunos não atribuíram significado às fórmulas. Isso pode explicar porque os alunos calcularam o perímetro em vez da área.

É interessante mencionar que tal fato não ocorreu com todos os alunos. Vejamos, abaixo (transcrição do registro em áudio), a discussão de uma dupla de alunas em relação à segunda pergunta do questionário:

> A23: Qual é a área de um quadrado com 5 cm de lado?
>
> A23: Se um quadrado tem os lados iguais, cada lado vai ter que ter 5 cm de lado.
>
> A14: Então, vai ter 5 aqui, 5 aqui, 5 aqui e 5 aqui.
>
> A23: Então, mas não é o perímetro que você está querendo saber, é a área você lembra?
>
> A23: (Inaudível) 5 com mais 5 com mais 5 com mais 5. Isso daqui é o perímetro. E 5 vezes 5 é 25.
>
> A14: E aqui e aqui?
>
> A23: Tem 5 cm de lado. Olha, 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm não tem aqui? Olha. 1, 2, 3 aqui, não tem? Aqui também tem, olha 1, 2, 3, 4, 5 cm também, não tem?
>
> A14: Hamhan
>
> A23: Se eu multiplicar esse vezes esse quanto que vai dar?
>
> A14: 25!
>
> A23: Então?
>
> A14: E porque você não conta nem aqui nem aqui? (aqui vemos a confusão que essa aluna está fazendo)
>
> <u>A23: Porque se eu for contar aqui, vai ser o perímetro. Vai ser o perímetro todo se eu somar. Mas se eu multiplicar, vai estar multiplicando um lado pelo outro que nem falou lá em cima (no livro texto), comprimento pela largura.</u>
>
> A14: E o 9 vai dar quanto, 81?
>
> A23: É.
>
> A14: E o 2 vai dar…
>
> A23: Se você quiser pode até contar 1, 2, …24, 25
>
> A14: Ah tá! E o 9 vai dar 81 e o 2 vai dar 4. (a aluna ao usar a fórmula aqui mostra que compreendeu o argumento da sua colega)
>
> A23: É

O protocoloco, descrito acima, pode ser visto como uma evidência de que A23 demonstrou ter autonomia de leitura do texto, isto é, que refletiu sobre o texto (veja frase sublinhada) e usou a fórmula para calcular as áreas dos quadrados. O mesmo não ocorreu com A14. Isso pode ter levado a aluna a confundir área com perímetro. Vemos que a aluna A23 procurou esclarecer a dúvida da colega, expondo seu raciocínio com facilidade e, ao final, A14 mostrou que compreendeu o argumento de A23.

Resumindo, nesse episódio foram identificados: um processo mudança de foco (tentativa de compreensão do retângulo e do quadrado), a construção de um componente principalmente explícito (definição de quadrado por A7), uma ausência de conhecimentos tácitos da linguagem e simbolismo (não uso da fórmula do quadrado devido, provavelmente, a uma não atribuição de significado a ela através da leitura do texto). Além disso, esse episódio é marcado pela presença do domínio de operação E4 pelo aluno A4.

6. EPISÓDIO 5: A7 parece já não mais confundir área com perímetro e A4 tem dúvidas de que o perímetro não determina a área.

Na aula 8 estava sendo corrigido, coletivamente, um exercício que pedia que se calculasse o perímetro e a área de dois quadrados: um de lado 3 cm e, outro, de lado 6 cm. Vejamos, abaixo, a resposta de A7 quando solicitado pela professora para resolver esse exercício:

> Professora: (...) tá pedindo o seguinte: calcule o perímetro do quadrado A e do quadrado B. A7 antes de calcular o perímetro me fala o quê que é o perímetro?
>
> A7**:** O que fica em volta.
>
> Professora: O que fica em volta. Como é que eu falo isso melhor (...)?
>
> A (?) : É o contorno.
>
> A (?): É a soma dos lados.
>
> Professora: É a soma dos lados, tá?…Então vai lá.
>
> A7 : O perímetro do quadradão é 12.
>
> Professora: É 12. Como é que você fez?
>
> A7 : 3+ 3 + 3+ 3.
>
> Professora: ..Qual unidade? Você está medindo o quê?
>
> A7: Centímetro.
>
> (…)
>
> Professora**:** … Calcule o perímetro e a área dos dois quadrados..Quanto que deu o perímetro de B, A7? Fala, quanto que deu?
>
> A7**:** 24.
>
> Professora: 24 o quê?
>
> A7 : Centímetros.

(...)

Professora: Tá. Agora vamos lá (...) A área de A é igual a quanto? (...)

Inaudível.

Professora: Quê que você fez?

A7 : 3 vezes 3.

Professora: Tá bom. Dá 9, unidade de medida, da nove o quê?

A7 : Centímetros quadrados.

Professora: Centímetros quadrados. E a área de B?

A7 : 36.

Professora: 36 ?

A7 : Centímetros quadrados.

Professora: Tá. A7, antes de passar para as outras letras (...) eu só quero saber o seguinte (...) Quando eu digo que a área de A vale ou é igual a 9 centímetros quadr ados, o quê que está significando esse 9 aqui? E esse centímetros quadrados? O quê está indicando esse número? O quê esse número quer dizer? (...) Quando eu falo 9 laranjas você sabe o quê que é, não sabe? Quando eu falo 9 centímetros quadrados, o quê significa isso? (...).

A7: Eu acho que é 9 quadradinhos.

Professora: 9 quadradinhos de quê?

A7: De área.

A primeira fala sublinhada de A7 indica que, para ele, o perímetro é uma entidade física ou geométrica diferente da entidade 'área'. As demais frases sublinhad as são indicações de que o aluno já não mais confunde o cálculo de áreas com o cálculo de perímetros. As duas últimas frases de A7: "Eu acho que é 9 quadradinhos" e "De área" sugerem que ele soube interpretar que o número obtido para a área, através da fórmula, é o número de quadradinhos que recobrem a figura. Em outras palavras, o aluno estabeleceu uma relação entre duas formas diferentes de se calcular áreas. E o estabelecimento de relações está sendo interpretado como um elemento do componente 'métodos, procedimentos, ...'. O fato de ter identificado esse elemento não me permite dizer se o aluno o possuía já interiorizado ou se o mesmo foi construído no momento da fala.

Em resumo, foram identificados: um componente principalmente explícito (conceito de perímetro) que traduz uma referência ontológica a entidade 'perímetro', um elemento do componente 'método, procedimentos,...' (estabelecimento de relações entre formas diferentes de se calcular áreas), uma interiorização de um conhecimento principalmente explícito, a saber, o uso correto da fórmula de áreas.

Com relação ao aluno A4, ao término da discussão do exercício, acima mencionado, ele fez o seguinte questionamento à professora:

> A4**:** Professora, eu só estou confundindo um coisa.
>
> Professora: Espera aí A (?). (a professora pede a um aluno que estava dialogando com ela para aguardar)
>
> A4: Como é que pode o perímetro ser maior que a área?

Verificando o registro dessa discussão, vemos que a professora procurou esclarecer A4 se remetendo a um exercício já discutido anteriormente no qual apresentava-se vários polígonos sobre uma malha quadriculada e pedia-se que observasse quais desses polígonos tinham áreas iguais e perímetros diferentes, e quais tinham áreas diferentes e perímetros iguais. Além disso, a professora chamou à atenção do aluno sobre a diferença entre unidades de medidas de comprimento e de área. Após o esclarecimento da professora, A4 não fez nenhum comentário.

O registro em áudio da aula seguinte à aula 8 mostra que a professora ainda reforçou o fato de o perímetro não determinar a área. Para enfatizar isso, ela entregou a cada dupla de alunos um pedaço de barbante amarrado nas pontas e pediu-lhes que obtivessem, manipulando o barbante com as próprias mãos, retângulos mais gordinhos (maior área) e mais fininhos (menor área). Ela mostrou também que, com o mesmo perímetro, poderíamos obter polígonos diferentes (triângulos, pentágonos, hexágonos, etc). Analisando o registro em vídeo dessa aula, vemos o aluno bastante engajado na atividade. Isso pode ser um indício de que sua dúvida tenha sido esclarecida.

A pergunta do aluno A4 à professora é muito interessante sob o ponto de vista matemático. Tal pergunta, a meu ver, mostra a sutileza com que o aluno estava buscando compreender o exercício: só um aluno curioso com o que se escondia atrás do exercício poderia formulá-la. Interpretada assim, essa pergunta está, aparentemente, associada com motivação, interesse na aprendizagem e, portanto, relacionada, de alguma maneira, com o componente estética e valores.

7. EPISÓDIO 6: A7 mostra estar melhor interiorizando alguns conhecimentos de áreas e medidas do que A4.

Nas aulas 9 e 10 a professora entregou aos alunos uma lista de 4 problemas para serem resolvidos em dupla. Foi pedido aos alunos que procurassem representar os dados e informações dos problemas através de desenhos. De maneira geral, o registro em áudio da discussão dos alunos mostrou que eles gastaram muito tempo fazendo as contas . Os alunos A4 e A7 erraram as contas várias vezes, mostraram muitas dúvidas nas operações com decimais e solicitaram esclarecimentos à professora. Apesar disso, eles conseguiram voltar o foco de suas atenções para os problemas com certa facilidade. A dificuldade mostrada pelos alunos para operar com decimais pode estar indicando que tais operações ainda não estão bem interiorizadas por eles; esses instrumentos não estão sendo usados, ainda, com facilidade.

Em relação ao segundo problema da lista, o registro em áudio da discussão dos alunos mostrou que A4 ainda não estava conseguindo usar a fórmula 'comprimento × largura'. Por exemplo, num dado momento, ele teria que calcular a área de uma porta de dimensões 2,1m e 0,8m. A4 disse: "... somar, 21 mais 8, 29." Mais adiante, ele deveria calcular a área de uma janela 1m por 1,2m. Novamente, ele somou essas medidas. Ao perceber o erro de A4, A7 procurou esclarecê-lo: "Quando a gente soma é o perímetro." E A4 concordou com ele: "Ah é, está certo." Como as falas de A4 são inteligíveis e, portanto, isso pode estar indicando que ele se encontrava no domínio de operação E3, a confusão que ele fez entre área e perímetro pode ser explicada em termos da integração de seus conhecimentos tácitos: o aluno integrou conhecimentos incorporando um erro.

No caso do problema 3, esse pedia que se calculasse o perímetro de um terreno retangular com área igual a $450m^2$ e 25m de comprimento. Através do registro em áudio vemos que A7 rapidamente descobriu como deveria proceder para encontrar a solução:

"Agora a gente tem que descobrir que número é esse. O comprimento é 25, a gente já sabe. E aqui é quanto?…25 vezes 20…Espera aí entendi. 25 vezes 21. Ah, ah não meu Deus, passou." Essa última frase de A7 dá uma boa pista de que o raciocínio usado por ele foi o seguinte: A7 fixou o comprimento do terreno e foi tentando encontrar um número para sua largura que multiplicado por 25 dava 450. Ele tentou o número 20, e quando tentou o número 21 ele viu que a área ultrapassou 450. Geometricamente, é como que A7 estivesse tentando completar a área do terreno com retângulos de comprimento 25 e largura variável até alcançar o valor de 450 para a área. Essa solução criativa de A7 é uma evidência do quanto a fórmula de área de retângulos estava por ele interiorizada (ou seja, a que ponto ele estava usando a fórmula como um instrumento). Em outras palavras, ele desenvolveu um *know how*; uma estratégia pessoal para resolver o problema. E esse *know how* foi possível de ser facilmente identificado porque o aluno conseguiu produzir uma articulação interna do tipo E3, ou seja, uma articulação que ao ser projetada na fala coincidiu com o explícito. Por outro lado, A4 deu sinais de que não entendeu o problema ou o que A7 estava fazendo, e decidiu pedir ajuda: "Vamos pedir ajuda". Isso pode estar indicando que o aluno, nesse momento, estava no domínio de operação mental no qual o tácito predominava sobre o explícito. Vejamos no protocolo abaixo a interação dos alunos com a professora:

> <u>A4: Professora, professora?</u>
>
> <u>A7: Eu entendi A4, eu entendi.</u>
>
> <u>A4: Entendeu?</u>
>
> <u>A7: Eu entendi.</u>
>
> <u>A4: Professora?</u>
>
> (...)
>
> <u>A4: Nós não entendemos a explicação aqui.</u>
>
> <u>A7: Eu entendi.</u>
>
> *A4: Quê que é para fazer?*
>
> *A7: É para descobrir o perímetro do terreno. A área é 450, não é? É 25 vezes…*
>
> *A4: Vou fazer o 4. (A4 parece que desiste e quer passar para o problema 4)*
>
> *A7: É facinho gente é só você pensar.*
>
> (...)
>
> *A7: É multiplicar A4. Entendeu?* (...) *Olha o comprimento 25 metros.*
>
> *A4: Comprimento é o de baixo ou o de cima?*
>
> *A7: O de baixo.*

A4: Esse aqui e esse daqui?

A7: É, esse aqui. O comprimento é 25 metros, quanto que 25 vezes, 25 vezes quanto vai dar?

Professora: Oi.

A4: Aqui, nós não entendemos a pergunta.

A7: Não, eu entendi.

Professora: Você tem a área, muito bem.

A4: É um retângulo não é?

(...).

A7: Tem que descobrir o outro lado.

(...)

Professora: Exatamente.(...)

(...)

Professora: (...) E como é que você faz para descobrir esse?

A7: Aí eu tenho que...

A4: Dividir esse por esse. (com a ajuda da professora ele vai acertando)

Professora: Muito bem, pronto.

A4: Por isso! Agora que eu entendi. Tá vendo A7, você falou que entendeu.

A7: Eu falei que entendi mesmo.

A4: Nada. Você não entendeu foi nada.

A7: Ah não? Eu não falei que tinha que descobrir o lado não?

A4: Falou, mas não sabia o que tinha que fazer para descobrir.

A7: 450 divido por 25.

Em primeiro lugar, as falas sublinhadas sugerem que, num primeiro momento, A4 não deu atenção à A7 quando ele disse que tinha compreendido o problema; A4 insistiu no esclarecimento com a professora e não com o colega. Num segundo momento, descrito pelas frases em itálico, A4 deu indícios de que se renderia à explicação do colega. Todavia, com a chegada da professora, A4 se dirige a ela. Notemos que A7 continuou insistindo que tinha compreendido o problema. A mediação da professora parece ter levado A4 a compreender que a 'chave' da solução do problema consistia em dividir o resultado da multiplicação pela parcela conhecida. Em segundo lugar, a última frase de A7 – "450 dividido por 25" – sugere que ele percebeu que havia uma outra maneira de resolver o problema. O interessante é que no registro escrito do problema ele prefere registrar essa segunda solução em vez da sua solução por tentativa, que a meu ver, foi mais criativa. Talvez ele tenha achado a segunda solução mais rápida ou mais correta na medida em que era a solução sugerida pela professora. Em terceiro lugar, as últimas falas de A4: "Nada. Você não entendeu foi nada." e "Falou, mas não sabia o que tinha que fazer para descobrir.", pode estar indicando que ele não estava conseguindo acompanhar a solução por tentativas de A7 e, portanto, achou que o colega estava fazendo errado.

Finalmente, o problema 4 dizia que um mural de 2,30m de altura por 8,76m de comprimento havia sido construído com pastilhas quadradas de lados iguais a 2cm. A pergunta consistia em calcular quantas pastilhas tinha o mural. A professora se dirigiu à turma pedindo que os alunos observassem com atenção o fato de que as unidades de medidas do mural e das pastilhas eram diferentes e, portanto, eles deveriam trabalhar ou só com metro ou só com centímetros. Ela, ainda, sugeriu que eles trabalhassem com centímetros: "Vai andar para direita, vai sumir (a vírgula). Você não prefere trabalhar sem vírgula? Então é preferível passar esses dois aqui para centímetros, não? (...) E aí fazer normalmente." Seguindo na análise do registro, percebe-se que a observação da professora levou os alunos A4 e A7 a uma grande discussão sobre as contas:

> A7**:** Falou (se referindo à professora) que tem que dividir. Aí a vírgula vai andar e tirar as duas vírgulas, 876 mais 876. Dá 1752 porque tem que tirar a vírgula.
>
> A4**:** Ô A7, não tem vírgula não.
>
> A7**:** Tem sim, você não viu ela falando que a vírgula vai sumir.
>
> *A4**:** Eu somei esse com 4,6.*
>
> A7**:** Com o quê?
>
> *A4**:** 4,60.*
>
> A7**:** Como?
>
> *A4**:** 4,60. É o dobro.*
>
> A7**:** Ah entendi. Não tem vírgula, tira a vírgula, a professora já falou. Tem que transformar de centímetros para metros.
>
> *A4**:** Espera A7, depois que soma tudo, depois tira a vírgula.*
>
> A7**:** Ela falou assim, melhor já transformar de centímetros prá metros e tirar a vírgula, aí você trabalha normalmente.
>
> *A4**:** A7, tem que tirar a vírgula, você vai tirar assim sem saber a quantidade?*
>
> **(...)**
>
> A7**:** O que você fez aqui? Mais ou dividir ou multiplicar?
>
> (...)

As falas de A7, descritas acima, indicam que ele parece ter compreendido os esclarecimentos da professora relativos à transformação de unidades de medida. Isso não fica claro no caso de A4. As falas de A4 em itálico já contém pistas muitos vagas para fazermos inferências sobre o que ele estava pensando. Isso está sendo interpretado como que sua articulação interna era do tipo E1 no momento da fala. A frase sublinhada de A7 indica que ele percebeu, de alguma maneira que A4 estava fazendo confusão; A7 não entendeu as operações que seu colega estava fazendo. Logo em seguida, a aula terminou e a professora solicitou aos alunos que entregassem a folha contendo os problemas e disse-lhes que na aula seguinte ela daria um tempo a eles para que terminassem os problemas.

Na aula seguinte, a professora deu à turma vinte minutos para que eles terminassem os problemas. Vejamos abaixo como A4 e A7 iniciaram a discussão:

> A7**:** Você lembra na aula passada o que a professora falou?..(inaudível)..Ela falou, se você multiplicar por cem e tirar a vírgula, aí transforma tudo em centímetro, não é melhor não? Ela falou assim prá mim…
>
> A4**:** Quê que é prá fazer?
>
> <u>A7**:** A gente não usou esses 2 cm aqui.</u>
>
> *A4: Se a gente fizer duas vezes...*
>
> <u>A7**:** A gente não usou centímetros, nós pulamos ele. Só usamos esses dois aqui oh.</u>
>
> *A4: Não é mais fácil a gente fazer só a conta final? Só a conta final é a primeira coisa.*
>
> <u>A7**:** Vão desmanchar e começar tudo.</u>
>
> A4**:** É isso, é melhor.
>
> A7**:** Aí a gente começa, fica melhor.

As duas primeiras frases sublinhadas de A7 mostram que ele, provavelmente refletindo sobre o que havia feito na aula anterior, percebeu que não tinha usado uma informação dada no problema: a de que as pastilhas tinham 2cm de lado. Isso pode ser interpretado como uma mobilização de um conhecimento meta-matemático: a visão do aluno de como os problemas matemáticos escolares são apresentados, ou seja, se num problema é dada uma informação, então, ela deve ser usada. Observe que a primeira frase de A4 em itálico dá pistas de que ele quis usar essa informação para multiplicar alguma coisa por 2. Sua segunda frase dá pistas de que algum descompasso entre o que ele estava pensando e o que A7 estava pensando está ocorrendo. Porém, A4 concordou com A7 que o melhor seria começar tudo de novo. Dentre outras, uma possibilidade de interpretação para a intenção dos alunos de começar tudo é a de associar tal atitude a um elemento do componente 'estética': a apresentação matemática que eles fizeram do problema não estava correta ou apresentável. Por isso eles deveriam apagar o que já estava escrito e começar tudo de novo. No registro em áudio, vemos que as contas continuaram a desviar a atenção dos alunos. Eles discutiram ainda sobre elas, aproximadamente, 10 minutos. Vejamos no protocolo (transcrição do registro em áudio) abaixo o que ocorreu após esse período:

> A7**:** 876 vezes 100, deu 876. A gente fez 230 vezes dois.
>
> A4**:** Dividido.
>
> A7**:** Dividido por 2 deu 115. 876 divido por 2, deu 438.
>
> A4**:** Por esses dois centímetros, mas já era tudo centímetro.
>
> A7**:** Aí a gente fez 438 mais 115, aí por a gente multiplicou tem que compensar não tem?

O protocolo, descrito acima, mostra que os alunos transformaram os lados do mural para centímetros e que dividiram cada um desses lados por 2. Eles tinham que fazer alguma operação com esse 2 e escolheram isso. É difícil interpretar se eles estavam pensando alguma coisa mais elaborada ou se fizeram essa divisão por 2, apenas por fazer. Vejamos o que aconteceu em seguida:

> *A4: Eu acho que essa conta está errada, a gente devia fazer 230 vezes 876 vezes dois, não é? Porque aqui A7, faz um desenho. Aqui tem um tantão de ladrilho, aí a gente tem que fazer esses dois, depois esses dois lados que sobraram, não é? Não é só o perímetro, é a área toda.*
>
> Professora**:** É, nós estamos mexendo com a área aí.
>
> A4: Então, a área toda.
>
> Professora: Não é?
>
> A4: Então, a área toda
>
> Professora: E aqui olha, as pastilhas são quadradas de lados igual a 2. Você começou pensando legal olha, calcular a área disso aqui tudo, né?
>
> A4: A área é o resultado, não é?
>
> Professora: A área de tudo isso aqui que você pensou, certo? Agora pensa como que você vai encontrar quantas pastilhas tem aqui.
>
> A4: Multiplicando 30... multiplicando 230 vezes 8,76. É.
>
> Professora: Aí você vai encontrar a área.
>
> *A4: É, aí nós vamos é dividir por 2, certo?*

Professora: Por dois?

A4: O ladrilho, pelos ladrilhos

Professora: Mas aí você está trabalhando com duas unidades diferentes. Você está trabalhando com uma unidade de área e uma de comprimento. E tá na mesma unidade, de área e área.

A4: Não tô entendo mais.

A7: Assim tá certo?

Professora: O caminho que ele começou tá legal.

A4: Mas a gente, depois que gente multiplica os outros prá saber a área, como é que a gente vai fazer?

Professora: Pensa, pensa no que você vai fazer? Você tá tirando essa informação aqui oh. Elas são quadradas de lados igual a 2.

A4: É (inaudível) então.

A7: Quadrado.

A4: É o quadrado.

A primeira frase em itálico de A4 indica que ele vai, corretamente, calcular a área do mural em centímetros quadrados e que o resultado dessa multiplicação é que deve ser multiplicado por 2. A palavra perímetro que ele usou, sugere que ele ainda estava fazendo confusão com perímetro e área. Já na frase em itálico: *É, aí nós vamos é dividir por 2, certo?* ele parece mudar sua compreensão sobre o que deve ser feito com o número 2, após uma mediação da professora. Mas, ela chama a atenção do aluno dizendo que se isso fosse feito ele estaria trabalhando com medidas diferentes. A4 mostrou que com essa observação, ele já não entende mais o que fazer. Nesse momento, A7 mostrou para a professora o que ele havia feito. Ela disse que o caminho que A7 escolheu estava correto. A professora continuou o diálogo com os alunos chamando a atenção de que as pastilhas eram quadradas de lado 2. As duas últimas frases de A7 e A4, respectivamente, podem ser pistas de que eles entenderam que tinham não que dividir por dois, mas sim, pela área da pastilha. De fato, parece que eles perceberam isso. Os registros escritos de ambos os alunos mostraram que eles calcularam a área do mural em m^2. A4 ainda registrou a divisão do valor dessa área por 4. Porém, ele não fez as transformações de unidades de medidas. Já A7, não indicou essa divisão. Analisando, novamente, o registro em áudio percebe-se que a professora pediu que eles interrompessem a resolução do problema para que ela iniciasse a correção coletiva. Gostaria de observar que esse problema era similar, sob o ponto de vista matemático, a um exercício já discutido em sala. Porém, os cenários de apresentação do problema eram distintos.

O que interpreto nesse episódio é que, apesar das dificuldades na resolução do último problema, A7 estava interiorizando com maior facilidade os conhecimentos de áreas e medidas do que A4. Esse aluno mostrou precisar da mediação da professora ou do próprio colega. O interessante é que essa interiorização pareceu estar muito relacionada com as falas dos alunos. As falas de A7, por exemplo, foram mais inteligíveis ou significativas; as pistas foram mais evidentes; o tácito coincidiu com o explícito na maioria das vezes. Já as pistas contidas nas falas de A4, foram mais escusas, vagas, muitas vezes contraditórias o que indica que o aluno tinha grande dificuldade de expressar seu pensamento. Outra sugestão interessante é como A7 pareceu ter apreendido com mais facilidade do que A4 os esclarecimentos da professora.

Em relação aos conhecimentos tácitos, foram identificados: dificuldades de operar com números decimais (não completa interiorização), simbolismo (fórmula de área, unidades de medida, desenhos representativos das informações dos problemas), raciocínios (computações dos problemas); métodos, procedimentos... (*know-how* desenvolvido pelo aluno A7, por exemplo, no problema 3), um elemento da visão meta-matemática (se uma informação é dada num problema, então é para ela ser usada) e, possivelmente, um elemento da estética matemática (apagar uma apresentação que não está boa e começar tudo de novo).

8. **EPISÓDIO 7:** A4 e A7 mobilizam seus conhecimentos metacognitivos durante a correção coletiva dos problemas.

Nas aulas 11 e 12 a professora promoveu a correção coletiva dos problemas. Em relação ao problema 1, as participações de A4 e A7 foram as seguintes:

> A4**:** Nós erramos no...
>
> Professora: Espera aí, espera aí

A7: Na conta 2,8 vezes 6,5.

Professora: 2,8 vezes 6,5, quê que você fez?

A4: Nós fizemos 2,8 mais 6,5.

Professora: Mais? Você estava tentando achar o perímetro ao invés da área?

A4: É, os dois, isso. Também.

A4: Confundimos.

Em relação ao problema dois, A4 disse:

A4**:** (...) só deu 2 erros. Eu dei o.. É que primeiro eu multipliquei a área, então a área de todas as paredes e multipliquei a área da porta e da janela. E vai depois eu somei a área da, de todas as áreas deu um resultado e da, da janela e da porta deu certo. Mas na hora que eu fui fazer a área da janela deu errado. Eu coloquei 1, 16,8 e não 1,68. Aí vai, depois eu fiz a conta e fui fazendo e deu errado.

No primeiro protocolo, descrito acima, as falas dos alunos indicam que eles confundiram área com perímetro. No segundo protocolo, foi identificado o componente 'raciocínio'. A articulação externa desse, embora contenha incoerências, possui certa fluidez e prontidão. Isso pode estar indicando que, no momento dessa fala, o aluno encontrava-se no domínio da sofisticação (tácito e explícito independentes). Em relação ao problema 4, tivemos uma participação de A7:

Professora**:** (…) Eu tenho que dividir por 2 ou pela área da pastilha?

A7**:** Eu acho que é por 4.

Professora**:** Eu tenho que dividir é por 4.

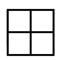
A7**:** Por que 2 vezes 2 é 4.

As falas de A7 esclarecem uma dúvida levantada no episódio anterior: a de que não se sabia se ele havia percebido que deveria dividir a área do mural pela área da pastilha. Pelas respostas dadas à professora, parece que sim.

Nesse episódio podemos dizer que os alunos refletiram sobre sua aprendizagem na medida em que foram capazes de identificar seus erros ou dúvidas nos problemas.

9. EPISÓDIO 8: A4 e A7 explicitam a visão geral que construíram do tema ao longo da primeira fase de pesquisa.

Na aula 12 foi pedido aos alunos que elaborassem uma produção escrita sobre o tema estudado. Para elaborarem tal produção partiu-se da hipótese de que os alunos precisariam mobilizar seus conhecimentos meta-matemáticos (visão geral do tema), dentre outros. Vejamos abaixo o que A4 escreveu:

> "Área e medida
> A área serve para calcular formas como quadrados e retângulos, toda área tem seu perímetro. O perímetro é o contorno do quadrado, retângulo, etc... Ex:  2cm × 2 = Área ou 4 e o 2 × 4 = Perímetro. Área serve para calcular um espaço fechado ou livre, serve para comparar tamanhos."

O registro acima indica que A4 desenvolveu, ao longo do processo, um certo conhecimento teórico sobre o tema. Ele fez um uso razoável da linguagem escrita, embora ela contenha algumas incoerências: "A área serve para calcular formas (...)" e "Área serve para calcular um espaço fechado ou livre (...)". Apesar disso podemos inferir, a partir de sua fala que ele: a) já não mais confundia área com perímetro; b) a entidade perímetro era ao mesmo tempo uma figura geométrica e uma medida; c) área era uma medida que permite comparar tamanhos. Pelo roteiro que lhe foi dado para elaborar a produção, o texto do aluno foi considerado incompleto. Por essa razão, a professora solicitou-lhe uma entrevista. Vejamos, no protocolo abaixo, um trecho dessa entrevista:

> Professora**:** (...) eu só queria te fazer algumas perguntas, tá? (...) quando eu peguei (o texto do aluno) para ler, eu pensei (...): acho que A4 trabalhou tanto e escreveu tão pouco. Porque?
>
> A4**:** É por causa que eu não tinha lembrado na hora.
>
> **(...)**
>
> Professora**:** Você não tinha lembrado ou você teve dificuldade de expressar ou as duas coisas juntas, você lembra?
>
> A4**:** Mais ou menos, um pouquinho de cada, eu não sei assim tirar uma área de um polígono ou uma coisa irregular.

Professora**:** Ah, então tá. Mas por exemplo (...) Quando a gente fala área (...) qual é a primeira coisa que vem na sua cabeça?

A4:Um espaço, um lugar.

Professora**:**Um espaço, um lugar pois é, aí com você não escreveu aqui, eu fiquei sem saber o que significava isso, né? Agora se a área é um espaço ou lugar, você disse que ela serve prá calcular. Então como é que é esse negócio de calcular um espaço? (...)

A4: Ah, assim prá saber o tamanho dele, prá ter informações sobre ele.

Professora**:** Hanram e as fórmulas você lembra?

A4**:** As fórmulas...

Professora**:**Que você usou uma fórmula, eu acho até que você usou fórmula da área do quadrado aqui. Mas a única maneira de calcular área é usando a fórmula? (...)

A4**:**Eu acho que sim, não, não, não. A única forma não, de calcular a área.

(…)

Professora**:** (…) dá uma olhada nesse chão aí, por exemplo, como é que você acha que eu posso calcular a área desse chão.

A4: Tem jeito de somar dois perímetros, um de largura e um de comprimento e multiplicar um pelo outro.

Professora: Hunrum.

A4: Ou contando todos os quadradinhos que tem.

Professora: Ah, então você já encontrou as duas maneiras de calcular a área. Uma é multiplicando o comprimento e a largura. E a outra é fazendo o quê?

A4: Somando os quadrados.

Professora: (...) Agora olha para esse chão da sala que você falou que ele é um espaço que pode calcular a área. Ele é exatamente um retângulo ou um quadrado?

A4: Exatamente não.

Professora: Então ele é uma figura, ele é uma coisa irregular, um espaço irregular.

A4: Como se fosse...

Professora: Então você pode ou não pode calcular a área de uma figura que é irregular.

A4: Pode.

Professora: (...) Como, nesse caso?

A4: O jeito mais fácil é separar em quadrados ou em retângulos e multiplicar.

Professora: Ah então tá.

A4: Eu corto aquela parte ali assim e faço a área dela e depois do outro. E depois que der o resultado dos dois eu somo.

Em primeiro lugar, as falas iniciais de A4 sugerem que ele escreveu pouco porque ou não foi capaz de se lembrar de algumas coisas que aprendeu ou teve dificuldades de se expressar através da escrita. Mas, com o auxílio da professora, ele mostrou ter construído mais conhecimentos teóricos sobre áreas do que escreveu. De fato, as fala em itálico de A4 dão pistas de que: a) que a entidade área para ele era algo tangível; um espaço físico geográfico (‘Um espaço, um lugar”), mas que a esse espaço estava associada uma medida ("Ah, assim prá saber o tamanho dele, prá ter informações sobre ele."); b) que a área pode ser calculada tanto por meio de contagem quanto por meio da multiplicação ; c) que o cálculo de área de uma figura irregular consiste em decompor essa figura em figuras de áreas conhecidas e depois somá-las. Note que, ainda, em algumas situações, o aluno encontrou dificuldades de aproximar o tácito do explícito: 'Tem jeito de somar dois perímetros, um de largura e um de comprimento e multiplicar um pelo outro."

Já A7 escreveu um texto bem mais completo em relação ao roteiro que lhe foi sugerido:

> "A área
>
> A área representa um espaço ou um lugar. Quando calculamos a área, como disse, quero calcular o tamanho de um lugar ou um espaço. O cálculo de área é muito útil para podermos descobrir o tamanho de certa coisa. Quando estou em um salão de festas e quero saber o seu tamanho uso a área. Que é um número × um outro número. As formas de calcular a área de um quadrado e de um retângulo servem para representar um certo espaço. Sabendo o comprimento e a largura de um retângulo fica fácil calcular a área. E os lados do quadrado também. Para eu calcular a área de um terreno como eu disse basta multiplicar o comprimento pela largura e uma certa coisa de lados iguais basta multiplicar lado × lado. A área representa um certo espaço, o perímetro é o contorno da área, é o que fica em volta da área e o volume representa uma certa quantidade como no caso de uma piscina. Isso tudo é uma forma de calcular. Só queria acrescentar o quadrado tem 4 lados, o retângulo também, porém o quadrado é um retângulo só que especial pois seus lados são iguais."

O texto de A7 indica que: a) a entidade área era uma representação de um espaço ou lugar, associada a uma medida que servia para nos informar sobre seu tamanho; b) ele sabia diferenciar área, perímetro e volume; c) a entidade perímetro também era algo geométrico que tinha uma medida; d) a entidade volume era uma quantidade; um número; e) o quadrado era um retângulo especial. No entanto, ao ser solicitado pela professora numa entrevista sobre como ele poderia calcular a área de uma figura irregular, o aluno mostrou-se confuso com as perguntas da professora e não conseguiu responder. No registro em áudio dessa entrevista percebe-se uma grande timidez do aluno. Percebe-se também que o aluno ficou num estado de desconforto com a entrevista. É provável que isso tenha feito com que ele não tenha conseguido responder às perguntas da professora.

A escrita de A7 é bem inteligível – o tácito coincidiu com o explícito – e indica que ele adquiriu um amplo conhecimento teórico do tema. Se comparado com A4, A7 conseguiu expressar com mais riqueza de detalhes e clareza seus conhecimentos através da linguagem escrita. Se partimos da hipótese de que a linguagem está associada ao desenvolvimento do aluno, podemos dizer que ambos desenvolveram conhecimentos teóricos sobre o tema, sendo que a linguagem de A7 indica um desenvolvimento mais acentuado do que A4. Gostaria de observar que as produções escritas dos alunos e suas falas não significam que eles expressaram todos os seus conhecimentos sobre o tema.

10. **EPISÓDIO 9:** A4 e A7 mostram – através do teste individual e escrito – terem desenvolvido um *know-how*.

No teste escrito, aplicado nas aulas 13 e 14, A4 e A7 acertaram, aproximadamente, 70% das questões. Isso é interessante, pois os episódios anteriores mostram que os dois alunos tiveram diferentes ritmos de aprendizagem. Em relação à primeira questão do teste eles acertaram e erraram as mesmas coisas. Na segunda questão, A4 errou um cálculo de área e A7 acertou todos. Na terceira, ambos cometeram o erro de não considerar um lado do polígono irregular no cálculo do seu perímetro. Talvez porque a medida desse lado não estava explícita; eles tinham que calculá-la. O aluno A4 acertou a quarta questão enquanto que A7 a acertou parcialmente. Na quinta questão, ambos erraram o posicionamento da vírgula no resultado de uma multiplicação de decimais. Além disso, A4 concluiu corretamente o problema e A7 o deixou incompleto. Tal como no problema 4 – do mural e das pastilhas – eles deveriam efetuar uma divisão de áreas. A7 não registrou essa divisão no teste.

Mais particularmente, todas as questões do teste, com exceção da segunda e da quinta questões, demandavam dos alunos a criação de estratégias não padronizadas para resolvê-las. Por exemplo, a primeira questão poderia ser resolvida achando-se, inicialmente, a área da figura por meio de qualquer uma das unidades de medidas apresentadas. Isso feito, comparava-se a área obtida em relação as demais unidades. Outra solução era não fazer tal comparação e contar diretamente cada uma das unidades de medida para ver quantas dessas unidades cobriam a figura. Como os alunos deram, somente, a resposta, não temos informações suficientes para dizer qual a estratégia que eles usaram. De qualquer modo, eles escolheram uma.

Como dito anteriormente, em relação à terceira questão, tanto A4 como A7 erraram, apenas, o cálculo do perímetro do polígono irregular porque não consideraram um de seus lados. No que se refere à área, essa poderia ser calculada decompondo o polígono de maneiras diferentes. Os alunos não só registraram suas contas como deixaram outras pistas – linha traçada na figura – no teste indicando que eles partiram o polígono em dois retângulos. Os dois alunos fizeram a mesma decomposição.

No caso da quarta questão, os alunos a resolveram de maneiras diferentes. A4 calculou a área do quadrado maior, em seguida calculou a área do quadrado menor e, por fim, subtraiu a segunda área da primeira para achar a área da região pontilhada. Já A7, decompôs a figura pontilhada em dois retângulos e, a partir das informações numéricas dadas no enunciado do problema, calculou a área de cada um deles. Ao final, ele somou as áreas obtidas. A7 acertou essa questão parcialmente porque errou no cálculo de um dos lados desses retângulos.

As estratégias que os alunos usaram nas questões, relatadas nos três parágrafos acima, indicam que eles desenvolveram um *know how* próprio ou pessoal para resolvê-las na medida em que tais questões não tinham uma única maneira de serem resolvidas. E esse *know how* está sendo identificado nesse trabalho com um conhecimento de como e quando uma certa estratégia ou procedimento se aplica a uma situação. Cabe esclarecer que o registro dos alunos que permitiu identificar seus raciocínios e estratégias em duas questões é um componente principalmente explícito do modelo de Ernest, a saber, provas e raciocínios. Já esse *know how* é um conhecimento principalmente tácito e está incluído no componente 'métodos, técnicas, ...', do modelo.
As performances dos alunos – nesse caso, refletidas no teste explícito – permitiram inferir que eles desenvolveram esse *know how*. Por exemplo, se eles não tivessem

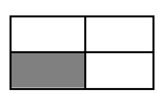
resolvido as questões não poderíamos saber se alguma estratégia foi tentada. Gostaria de observar que, sob o ponto de vista matemático, algumas questões do teste eram similares a questões já trabalhadas em sala de aula, porém, os cenários de apresentação das questões eram distintos.

Quatro meses depois …

11. EPISÓDIO 10: A7 mostra ter construído, ao longo da primeira fase de pesquisa, um conhecimento de áreas e medidas mais estável do que A4.

Com o objetivo de identificar o conhecimento de áreas e medidas dos alunos a professora aplicou, nas aulas 3 e 4 da segunda fase de pesquisa, um questionário-diagnóstico. Tal questionário foi similar ao questionário-diagnóstico aplicado na primeira fase de pesquisa. Vejamos, no protocolo abaixo, o que A4 e A7 responderam ao serem solicitados a escrever o que a palavra ‘área’ em matemática significava para eles:

> A4 (antes da discussão coletiva)**:** Área é um local onde é usado um espaço que pode ser demarcado para utilidade de cálculos.
>
> A4 (após a discussão coletiva): Área é uma forma de calcular um local ou espaço onde pode conter volume (quantidade) para descobrir o quanto pode ser preenchido no seu terreno. Ex:



1 área

> A7 (antes da discussão coletiva): Eu lembro que área representa um certo espaço ou lugar. Com base nisso podemos descobrir que área serve para calcular um tamanho de um espaço ou um certo lugar. Com o exemplo de um terreno, quantos m^2 ele tem. Esse já é um jeito de usarmos área como medida.

Com base nas falas de A4, descritas acima, podemos interpretar que o conceito de área do aluno não sofreu alterações profundas entre uma fase de pesquisa e outra: a entidade ‘área’ continuava sendo um espaço físico-geográfico que pode ser medido. Nesse caso, encontramos algumas imprecisões em suas falas: “..demarcado para utilidade de cálculos” ou “..pode conter volume (quantidade)”. Mas, a julgar pelo desenho que ele fez, podemos interpretar que o aluno compreendeu que o conceito de área está associado a uma figura plana, por exemplo, um retângulo. Em segundo lugar, ao ter quadriculado o retângulo e destacado uma unidade de medida de área, A4 poderia estar querendo comunicar que ele sabia calcular a área de um retângulo por meio de contagem. Observe que há uma significativa alteração na forma com que A4 expressou seu conceito, após a discussão coletiva. Já A7 parece não ter sido influenciado por essa discussão: ele não reelaborou sua resposta. A escrita do aluno é clara e bastante inteligível. Eu conceito de área parece, também, não ter sofrido alterações significativas entre uma fase e outra de pesquisa: área é uma representação que nos informa sobre o tamanho de um espaço ou lugar.

Quando solicitados para decidir quais de duas figuras planas (uma oval e um polígono não convexo) tinha maior área (era esperado que eles marcassem a oval) e explicar o porquê, A4 errou a resposta e escreveu: "Não me lembro porquê." (70% dos alunos acertaram esse item com uma justificativa plausível). Já A7, marcou corretamente a figura de maior área e explicou: "Eu fiz essa resposta com base no que lembro, a área pra ser maior tem que ter um certo espaço mais aberto ou mais largo." Aqui, vemos que o componente 'raciocínio' foi mobilizado.

Em relação ao item 4, esse apresentava duas estrelas, uma dentro da outra, e pedia-se que calculasse a área da região compreendida entre elas conhecendo-se a área de cada uma delas. A4 acertou o cálculo de áreas por meio de uma subtração. Já A7 não respondeu a questão. No entanto, após a discussão coletiva ele acertou a resposta. Ambos os alunos acertaram o item 5 que demandava o cálculo de áreas por meio de contagens.

Quando perguntado sobre como um jardineiro podia fazer para calcular a quantidade de grama necessária para recobrir um terreno retangular, A4 respondeu: "Calculando o seu terreno para ser coberto de grama". Uma resposta sem sentido se ele quis dizer com isso que o jardineiro tinha que calcular a área. As pistas foram imprecisas para se inferir sobre o seu raciocínio. Já A7, apresentou uma resposta bem inteligível, apesar de expressar uma dúvida: "Teria que descobrir o tamanho, ou seja, a medida dos lados e multiplicar os lados, eu não tenho certeza."

Após a correção coletiva do questionário, A4 reelaborou sua resposta e escreveu: 'Ele teria que saber o comprimento e a largura para multiplicar os dois." Isso é uma indicação de que o aluno estava atento à correção. Observe como sua fala foi inteligível. O aluno A7 não reelaborou sua resposta.

Finalmente, com relação ao item 7, A4 não o fez. Após a discussão coletiva, entretanto, ele elaborou uma resposta acertando-a. Já A7, acertou esse item antes da discussão coletiva cometendo, apenas, o erro de calcular os perímetros de dois quadrados em vez da área.

Diante do exposto, podemos interpretar que A7 interiorizou seus conhecimentos de áreas e medidas, ao longo da primeira fase de pesquisa, com mais estabilidade do que A4. Fica claro nesse episódio que parte do conhecimento desse aluno sobre o tema emergiu ou foi lembrado com a ajuda de uma mediação, no caso, de uma discussão coletiva.

No que se refere aos componentes do conhecimento dos alunos, foram identificados: afirmações (conceito de área), raciocínios (justificativa de A7 do porque de uma figura ter maior área do que a outra, subtração de áreas), provas (contas).

12. EPISÓDIO 11: A4 e A7 justificam o porquê do conceito de área estar envolvido ou não numa situação-problema.

Nas aulas 5 e 6 a professora promoveu uma discussão coletiva do questionário-diagnóstico. Em relação ao item 2, esse pedia que se marcasse, dentre algumas alternativas, aquelas nas quais o conceito de área estava envolvido. Analisando o registro em áudio dessas aulas encontramos participações dos alunos A4 e A7 justificando suas marcações. Por exemplo, ao discutir se o conceito de área estava envolvido no cálculo da distância entre suas casas e a padaria mais próxima, as respostas de A4 e A7 foram as seguintes:

Professora: (...) Será que o conceito de área está envolvido quando eu tenho que medir a distância entre sua casa, no caso minha casa, e a padaria mais próxima? (...)

A7: Eu achei que tinha... que para medir a distância da minha casa até a padaria era área que estava envolvida.

Professora: (...) Porque que você acha que está ? (...)

A7: Eu achei que estava porque é a área está envolvida em metros quadrados, aí eu...

Professora: Tá. E distância a gente mede com o quê? Qual é a unidade de medida? Metros e quilômetros. Então prá você medir a distância da casa até o lugar você precisa de área?

(...)

Professora: **(...)** A4, o que você pensou (...)?

A4: Quase a mesma coisa.

(...)

A4: Sabe porque? Se você dividir o local, tipo se você tem o a distância de metros da sua casa da padaria. Aí você divide ela em áreas.

Professora: Sei.

A4: Como você divide os metros lá em área.

Professora:Tipo assim, em quarteirões por exemplo?

A4: É isso. Aí dá prá você saber quantas áreas. Tipo, você fala assim prá pessoa, você fala assim daqui 3 áreas que significa daqui 5 em 5 metros é uma área. Você fala assim, daqui 3 áreas você chega na padaria, vai lá prá mim e compra essa coisa. Sabe assim?

Notemos que a frase sublinhada de A7, embora tenha sido segura, contem elementos imprecisos: "...a área está envolvida em metros quadrados...". Isso pode estar indicando que, no momento da fala, o aluno se encontrava no domínio da sofisticação (E4). No registro original percebe-se uma certa dificuldade de A4 para se expressar; para achar as palavras. No entanto, as pistas contidas nas suas falas são significativas o bastante para compreendermos o seu raciocínio. É possível que, no momento da fala, a articulação de A4 encontrava-se na fronteira do tácito com o explícito. Seu raciocínio é plausível e pode estar indicando o porque de 63% dos alunos, dentre os quais ele e A7, terem marcado essa alternativa. As explicações de A4, no protocolo acima, sugerem que eles poderiam estar pensando na distância medida em quarteirões, por exemplo.

Nesse episódio os alunos foram motivados a expressarem seus raciocínios oralmente. No caso do aluno A4, o raciocínio foi razoavelmente identificado através de uma suposta articulação do tipo E2.

13. EPISÓDIO 12: A7 e A4 avançam nas operações com números decimais para transformarem unidades de medidas de área.

A transformação de unidades de medida de área foi introduzida nas aulas 9 e 10 a partir de exercícios propostos no livro texto. O exercício que introduzia o assunto apresentava as figuras de dois quadrados A e B de mesmo tamanho. No quadrado A estava indicado que o lado media 1 metro. O quadrado B estava quadriculado em 100 quadradinhos iguais de 1 centímetro quadrado cada e havia uma indicação de que o lado do quadrado B media 100 centímetros. A primeira parte do exercício pedia que se calculasse as áreas dos quadrados A e B. A segunda parte, pedia que se respondesse quantos centímetros quadrados equivalem a um metro quadrado.

Vejamos abaixo como A4 e A7 iniciam esse exercício:

> A7**:** (…)Aqui tá falando que essas figuras não estão em seus tamanhos verdadeiro. A área da letra (quadrado A) A em metros quadrados e a letra B (quadrado B) área em centímetros quadrados. Vão prá letra a, qual a área desses quadrados?
>
> A4: A área de A é um. A área de A, 4 metros quadrados.
>
> A4: E a área de B?
>
> A7: 400 centímetros quadrados. Não, mas...

Vemos, aqui, que ambos os alunos calcularam o perímetro até que A7 parece ter percebido ('Não, mas…') que alguma estava errada: ele hesita e decide solicitar a presença da professora. Isso é um indício de que o aluno estranhou o instrumento que estava sendo usado para resolver a questão. Como foi interpretada no capítulo V, essa hesitação identifica-se a uma mudança de foco: o aluno estranha o instrumento, volta sua atenção à ele e tende a paralisar sua performance. Eles decidiram pedir a ajuda da professora que os lembrou como se calcula a área de um quadrado. Feito isso, os alunos retomaram o problema e concluíram o resultado com a ajuda da professora:

> A7**:** (...) Então quer dizer...
>
> Professora: (...) então um metro quadrado equivale a...
>
> A7: 10.000 centímetros quadrados.
>
> Professora: Exatamente.

A partir daí, os alunos passaram para o exercício seguinte que consistia numa lista de medidas dadas em metros quadrados e pedia que se transformassem essas medidas para centímetros quadrados e vice-versa. Analisando o registro em áudio da discussão dos alunos, há uma indicação de que A7 parece ter compreendido o que fazer antes de A4, e que A7 ajudou A4 a conquistar essa compreensão. Para isso, A7 teve que expor seu raciocínio. Após essa discussão, os alunos prosseguiram na confecção dos exercícios. Pela análise do registro em áudio das interações dos alunos percebe-se uma dificuldade do aluno A4 em se expressar. Porém, num certo momento, A4 explicitou de maneira inteligível seu conceito de ordem em relação aos números decimais: "A7, é questão de zero. Quanto mais zeros maior o número, quanto menos zeros menor é o número. E se já for abaixo de zero é menor ainda." Isso pode ser visto como uma mobilização do componente 'afirmações'. A equivalência entre quilômetro quadrado e metro quadrado também foi introduzida nos exercícios. Por vezes A4 e A7 solicitaram a presença da professora para esclarecer suas dúvidas. Ao final, eles registraram, por escrito, correta e organizadamente suas respostas.

Esse episódio apresenta uma evidência de que os alunos A4 e A7 encontravam-se num processo de interiorização de transformação de unidades de medidas de área.

14. EPISÓDIO 13: A4 e A7 não percebem que a área de um *tangram* construído sob um quadrado é preservada quando suas peças são re-arranjadas para formar um hexágono.

Nas aulas 13 e 14 os alunos estavam resolvendo, em dupla, alguns exercícios do livro que demandavam o uso do *tangram*. O primeiro exercício mostrava a figura de um *tangram* construído com um quadrado de 20 centímetros de lado. O exercício pedia que se calculasse o perímetro e a área do quadrado. Analisando ambos a fita em áudio do trabalho, em dupla, de A4 e A7 e os registros escritos de seus exercícios, vemos que eles calcularam corretamente essas medidas e passaram logo para a confecção do exercício seguinte. Esse apresentava a figura de um hexágono e dizia que ele havia sido construído com o *tangram* do exercício anterior. Com base nisso, pedia-se que calculasse a área do hexágono. Vejamos, abaixo, como A4 e A7 resolveram esse exercício e o registraram por escrito:

> A7**:** Com o *tangram* do exercício anterior foi feito o hexágono da figura. Letra a, qual é a área do hexágono?
>
> A7: Área desse hexágono aqui.
>
> *A4: O quadrado é um.*
>
> A7: Aqui tem dois pequenos, não.
>
> (…)
>
> A4: Aqui vai dar 1, 2, 3, 4, 5, 6.
>
> A4: Espera, espera, espera. Tá tudo errado, não vai dar isso não. Vai dar 1, 2, 3 ...15, 16.
>
> (...)
>
> A7**:** Um, dois desse vale um quadrado. Um quadrado vale um. Então aqui vai dar um. Esse aqui é dois, mas esses dois é dois. Esse aqui é três, três. Aqui é dois, quatro. Então é seis.

O diálogo, descrito acima, mostra que os alunos leram o enunciado do exercício, mas não perceberam a relação entre a área do hexágono e a área do quadrado do exercício anterior. Por outro lado, eles escolheram uma estratégia – contagem – para calcular a área do hexágono: eles escolheram a peça quadrada como a unidade de medida de área (veja fala em itálico de A4). A partir daí, eles calcularam a área do hexágono corretamente contando quantas dessas peças quadradas cabiam no hexágono. É interessante observar como A4 e A7 passaram longe de usar a informação do exercício para descobrir a área do hexágono. Essa ação, no entanto, não ocorreu com todos os alunos como mostra o protocolo abaixo, relativo ao registro escrito do exercício:

> A12 e A18: A área do hexágono é de 400 cm. Pois só mudou as figuras de lugar.
>
> A9 e A28: 400 cm, por usar as mesmas peças que usou no quadrado.
>
> A5 e A26: 400 cm^2. Porque o hexágono foi feito com as mesmas peças do ex anterior.
>
> A8 e A17: A área do hexágono é de 400 cm^2, porque só mudou as peças do *tangram* do lugar.
>
> A15 e A19: de 400 cm^2 porque o *tangram* do exercício 9 é igual a esse exercício.

Embora algumas das falas acima apresentem incoerências ("...400 cm.") elas mostram que esses alunos usaram corretamente a informação do exercício para calcular a área do hexágono. Nesse caso, os alunos justificaram suas respostas com base na preservação de áreas.

15. **EPISÓDIO 14:** A4 e A7 não reconhecem a aplicação de um procedimento padrão numa situação 'nova'.

Nas aulas 15 e 16, os alunos continuaram trabalhando, em dupla, nos exercícios propostos pelo livro. O penúltimo exercício constava de um problema padrão que já havia sido trabalhado por mais de uma vez na primeira fase de pesquisa: um mural de 2,30 metros de altura por 8,76 metros de comprimento fora construído com pastilhas quadradas de lados iguais a 2 centímetros. Pedia-se que calculasse quantas pastilhas havia no mural. Analisando o registro escrito do problema, pela dupla A4 e A7, vemos que eles inicialmente calcularam a área do mural, depois calcularam a área de cada pastilha e, por fim, dividiram a primeira área pela segunda, justificando da seguinte maneira: "Nós fizemos descobrindo a área do mur al; que foi comprimento vezes largura, e a pastilha foi lado × lado e tivemos o resultado. E depois dividimos a área do mural e a da pastilha." Porém, eles se esqueceram de que as medidas do mural e das pastilhas estavam em unidades diferentes.

No registro em áudio dessa discussão observa-se um fato interessante: o aluno A4 que vinha apresentando, ao longo de sua aprendizagem, dificuldade de se expressar oralmente, deu uma pista de que está consciente do seu entendimento do problema: "Tá, agora você vê quantas vezes esse cabe nesse, esse cabe nesse." Num certo momento, ele produz uma justificativa oral do raciocínio usado para resolvê-lo bastante inteligível:

> A4**:** No exercício 19 nós descobrimos que a área do mural é... multiplicamos comprimento vezes largura e para descobrir a área da pastilha nós multiplicamos lado por lado. E depois do resultado dos dois, nós dividimos a área do mural pela área da pastilha. O resultado foi 403 vírgula (inaudível).

Isso é uma indicação de que o tácito coincidiu com o explícito após a interiorização de um conhecimento: o procedimento usado no problema. Por outro lado, A4 e A7 não reconheceram que esse procedimento poderia se aplicar no exercício seguinte. O problema que se seguia ao problema das pastilhas mostrava um retrato de uma caixa de azulejos em forma de paralelepípedo retângulo. No rótulo dessa caixa estavam indicadas a metragem de 1,5 m^2 e as dimensões dos azulejos: 15 cm $\times$ 15 cm. O problema pedia que se dissesse quantos azulejos, aproximadamente, havia na caixa. Alguns alunos mostraram ter percebido que a área de 1,5 m^2 correspondia à área coberta pelos azulejos que estavam na caixa. Por exemplo, a justificativa escrita da solução desse problema pela dupla de alunas A8 e A17 foi a seguinte: "Nós passamos 1,5 m^2 para cm^2 e encontramos 15000 cm^2. Depois multiplicamos 15 cm $\times$ 15 cm. Que deu 225. No final dividimos 15000 por 225. Obs: Deu uma conta infinita." A dupla A12 e A18 registrou: "Primeiro achei a área dos azulejos, depois achei a metragem, depois dividi os dois e deu a quantidade de azulejos que há na caixa." Outras duplas, por exemplo, A9/A28, A11/A20 e A15/A19 registraram as contas: $1{,}5 \times 10000 = 15000$; $15 \times 15 = 225$ e $15000 \div 225 = 66$ mas não justificaram suas respostas.

Já os alunos A4 e A7 registraram por escrito o seguinte: $15 \times 15 = 225.000$ azulejos. Além disso, eles escreveram: "Nós fizemos a transformação de m^2 para cm^2 e multiplicamos." Vejamos abaixo o registro em áudio da interação dos alunos:

> A7**:** Observe o rótulo da caixa de azulejo. Quantos azulejos que você acha que há na caixa?
>
> (...)
>
> A7: 15 mil. Aqui é 1,5 metros quadrados.
>
> A4 : A área...
>
> *A7: 1 metro quadrado não é igual a área de 10.000 centímetros quadrados, né? 1,5 metros quadrados, então vai dar 1,5 vezes 1,5. 15.000, 15, 15.000 azulejos.*
>
> A4: 15.000 azulejos?
>
> A7: Ou a cerâmica, sei lá. Azulejos aqui oh. 1,5 em metros, em centímetros vai ser 1,5 vezes 1,5. 1,5 vezes 1,5.
>
> A4: 15
>
> A7: É 15?
>
> A4: Vai dar 15.000
>
> A7: Quanto deu?
>
> A4: 15.

A7: Aí nós transformamos em metros por centímetros que deu 15.000. 15.000 vezes 15.000 deu 225.000 azulejos. A gente fez a transformação de metros quadrados para centímetros quadrados e depois multiplicou.

Em primeiro lugar, comparando-se as falas em itálico de A7 podemos interpretar que ao falar "...15.000 azulejos" a fala do aluno não coincidiu com seu pensamento. Em segundo lugar, o protocolo, descrito acima, indica que nem A4 e nem A7 refletiram sobre o fato de que esse problema era similar ao problema das pastilhas: eles não se deram conta de que 1,5 m^2 já era a área a ser recoberta pelos azulejos. É possível que eles tenham pensado em calcular a área dos azulejos. Analisando o restante do registro em áudio relativo a esse protocolo percebe-se que os alunos estavam com pressa de acabar os exercícios. Talvez a falta de reflexão dos alunos se deva a esse fato. De qualquer maneira, podemos dizer que o uso de um procedimento ou estratégia padrões não foi reconhecido, aqui, por A4 e A7.

Resumindo, esse episódio mostra que os alunos interiorizaram um procedimento padrão para resolver um certo tipo de problema. Mas não tiveram um certo conhecimento, relativo ao componente 'métodos, procedimentos,...', para relacionar duas situações matemáticas similares. Ou ainda, eles não conseguiram ver que esse procedimento padrão poderia ser aplicado em ambas as situações.

16. EPISÓDIO 15: A4 e A7 explicitam a visão geral que construíram da entidade 'área' ao final da pesquisa.

Na aula 19 os alunos elaboraram uma produção escrita e individual sobre o tema estudado. Vejamos abaixo o que A4 escreveu:

"Área

Área para mim é um local ou espaço que pode ser utilizado de vários jeitos.
Os objetos são tijolos, ladrilhos, piso e coisas que têm forma geométrica, e também figuras com quadrados, triângulos, etc...
Para se obter uma área em cm^2 devemos multiplicar lado $\times$ lado.
Ex:

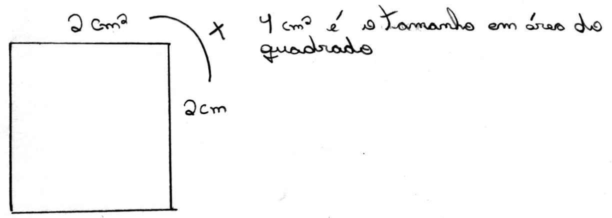


Figura 2 - Área

Área serve para calcular o tamanho de um local ou espaço.
Já o perímetro é a borda da área. Para se obter um perímetro é só somar os lados.

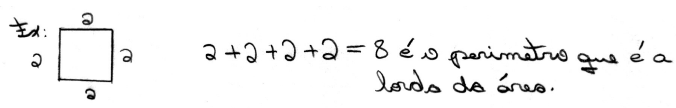


Figura 3 - Perímetro

Para calcular área de uma figura irregular é só dividir por alguma figura geométrica.
Ex:

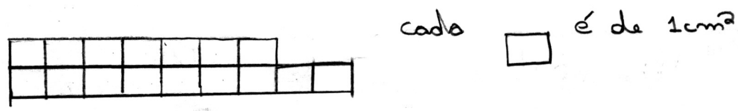


Figura 4 – Área de uma figura irregular

Volume é a quantidade em massa."

Analisemos o texto de A4 quando comparado com o texto produzido na primeira fase de pesquisa e cuja análise encontra-se no episódio 8. Notemos que o conceito de área de A4 parece não ter sofrido mudanças significativas: área, para o aluno, parece, continuou sendo um espaço físico geográfico ao qual está associada uma medida que diz respeito ao seu tamanho. O mesmo podemos dizer em relação ao perímetro: o perímetro é uma entidade física – borda da área – a qual está associada uma medida, a saber, a soma dos lados. No caso do volume, a frase: "Volume é a quantidade em massa" sugere que uma entidade foi construída se comparado com o texto anterior. E essa entidade é um número que está relacionado a algo tangível – massa.

A primeira frase do texto de A4, apresenta uma imprecisão: "...que pode ser utilizado de vários jeitos." Outra imprecisão também é encontrada na segunda frase do texto: "Os objetos ... e coisas que têm forma geométrica, e também figuras ..." É possível que essa frase esteja querendo transmitir quais objetos ou figuras o conceito de área se aplica. A imprecisão desaparece quando o aluno, de maneira bem inteligível e com o auxílio de um desenho, diz como se obtém a área de um quadrado utilizando-se a fórmula. Uma interpretação similar vale para o perímetro. É interessante observar que os exemplos dados pelo aluno para ilustrar a área e o perímetro de um quadrado são, exatamente, os mesmos do texto anterior. Quanto a uma figura irregular, a frase que se refere a ela contem uma imprecisão: "..é só dividir por alguma figura geométrica." Todavia, o desenho que o aluno faz logo em seguida é uma pista inteligível para expressar o que ele estava querendo dizer com isso.

Se comparado com o texto produzido no episódio 8, vemos que há uma evolução da linguagem e simbolismo matemáticos por parte de A4: ele incorpora palavras, tais como, figuras, figuras geométricas e objetos para expressar seus conhecimentos teóricos. Finalmente, o texto é uma indicação da visão teórica geral que o aluno desenvolveu sobre o tema: o que é área, para que serve, como calcular uma área e diferença entre comprimento, área e volume.

Já A7 escreveu o seguinte texto:

"Área

- Área significa ou representa um espaço ou lugar. Podemos usar área em certos objetos como guarda-chuva, em figuras geométricas como:
- quadrado, retângulo, hexágono e outros.

Podemos também usar área para calcular o tamanho ou espaço de um terreno, sala, quarto, piso, etc. Como eu disse calcular área é o mesmo de calcular um espaço ou lugar. A área é medida ou calculada quando multiplicamos lado × lado no caso do quadrado, comprimento × largura no caso do retângulo, e quando não há nenhum dos dois podemos usar o quadrado como área de medida, ou no caso do piso que se for feito por quadrado podemos usar como área de medida, e em figuras geométricas também pode ser usado o quadrado, retângulo ou triângulo.

- Então o cálculo de área ajuda a descobrirmos um certo espaço ou lugar de uma determinada coisa, por isso área é importante. O perímetro é a soma de todos os lados que indica o que está em volta como o exemplo de um arame cercando um terreno.

Área é a representação de um espaço ou lugar e volume indica uma certa quantidade como o exemplo da água, quantos litros uma piscina tem.

> Então todos três nos ajudam muito a calcular uma certa quantidade, um certo lugar ou espaço determinado e certas coisas que são o contorno de outras igual o exemplo que dei de um arame cercando um terreno.
> Há vários exemplos de coisas que se pode usar área como medida:
> - se eu quero cobrir um terreno com plantações eu posso descobrir a área do terreno multiplicando seu lado × o outro ou seu comprimento × largura, sabendo á área do terreno eu posso calcular o número de plantações que cabem no terreno."

O texto acima sugere que, ao contrário de A4, o conceito de área de A7 permaneceu sendo uma 'representação' de um espaço ou lugar, talvez, um número. A entidade 'perímetro', parece, ter sofrido alterações conceituais: perímetro já não é mais o "contorno da área" e, sim, um número que é igual a soma dos lados. O volume continua sendo um número; uma certa quantidade, como por exemplo, de água numa piscina. Algumas imprecisões podem ser identificadas no texto de A7, como por exemplo, "... e quando não há nenhum dos dois..." e ..."área de medida...". Apesar disso a escrita do aluno mostra-se mais inteligível, rica e desenvolvida do que a de A4. A linguagem de A7 incorpora novas entidades: hexágono, figuras geométricas, área de medida, em relação ao texto anterior. Podemos concluir que a visão geral ou os conhecimentos teóricos que A7 construiu sobre o tema evoluiu na medida em que novos conhecimentos foram incorporados no presente texto.

17. EPISÓDIO 16: A4 e A7 interiorizaram conhecimentos matemáticos principalmente tácitos e principalmente explícitos sobre áreas e medidas.

No teste individual e escrito aplicado na aula 20, A4 e A7 acertaram 70% das questões. Em relação à primeira questão, A4 a acertou completamente enquanto que A7 errou a área do quadrado que formava o *tangram*. Ele não adicionou a área de algumas peças. Ambos os alunos acertaram a segunda questão. Na terceira questão, A4 e A7 raciocinaram corretamente e mostraram estar atentos ao fato de que deviam operar com unidades de medidas iguais. Eles só não acertaram completamente a questão devido a erros de conta com números decimais.

No caso da quarta questão, A4 não a acertou e A7 a acertou completamente. A4 calculou corretamente (exceto por um erro de conta) as áreas de um terreno e de uma piscina. A pergunta consistia em calcular a área do terreno que sobrou após a construção da piscina. Em vez de subtrair as áreas, A4 dividiu a área do terreno pela área da piscina. A quinta questão mostrava a planta baixa de um apartamento e pedia-se que calculasse o seu perímetro e a área de cada um de seus cômodos. A4 não acertou a quinta questão enquanto que A7 a acertou parcialmente. Em relação a um perímetro a ser calculado, ambos os alunos cometeram o erro de não considerar alguns lados do polígono irregular que representava a planta de um apartamento. Salvo alguns erros nas operações com decimais, A7 acertou o cálculo das áreas dos cômodos do apartamento. A4, no entanto, após ter encontrado o perímetro, dividiu esse por quatro e em seguida, multiplicou o resultado dessa divisão pelo mesmo indicando que o então resultado dessa multiplicação era a área do apartamento. Por alguma razão, A4 ignorou o contorno irregular da planta e o tratou como se fosse um quadrado. Se isso ocorreu, ele deve ter entendido que era mais econômico (mais rápido) calcular a área do apartamento considerando-se a medida de seus lados em vez de calcular a área de cada cômodo e depois somá-las todas. De qualquer modo, vemos aqui uma estratégia pessoal usada pelo aluno A4 para resolver a questão.

Todas as questões já haviam sido trabalhadas, de uma maneira ou de outra, em sala de aula tanto na primeira quanto na segunda fase de pesquisa. Por exemplo, a primeira questão apresentava o mesmo *tangram* do teste individual e escrito da primeira fase de pesquisa. Porém, o que se pedia para responder era diferente nos dois testes. A terceira questão consistia no padronizado problema do mural e das pastilhas. A quarta questão era similar, sob o ponto de vista matemático, da, também, quarta questão do teste anterior. É interessante observar que nesse teste anterior o aluno A4 acertou a questão, mas errou a questão quatro do presente teste. Ou seja, mudou-se o cenário e A4 não foi capaz de fazer uma relação entre eles. Já A7 que havia acertado parcialmente a questão quatro no teste anterior, acertou completamente a questão quatro do presente teste. Quanto à quinta questão, essa era similar ao problema 3 da lista de problemas aplicada na primeira fase de pesquisa. Finalmente, a última questão era, praticamente, a mesma segunda questão do teste da primeira fase.

De maneira geral, o resultado do teste dos alunos A4 e A7 mostra que eles interiorizaram conhecimentos teóricos e tácitos. Em relação aos últimos, os alunos mostraram que interiorizaram, por exemplo, alguns procedimentos padrões para o cálculo de áreas. Em outras palavras, eles usaram procedimentos já conhecidos em situações-problemas similares. Alguns desses procedimentos não haviam sido interiorizados por eles em momentos anteriores, como por exemplo, operar com as mesmas unidades de medida.

CAPÍTULO VIII

SÍNTESE DO ESTUDO DE CASO

No presente capitulo apresento uma síntese do desenvolvimento do conhecimento de áreas e medidas dos alunos A4 e A7, segundo seus componentes principalmente explícitos (PE) e principalmente tácitos (PT). Ao final do capítulo promovo uma discussão geral da análise.

1. AFIRMAÇÕES E PROPOSIÇÕES (PE)

Em relação ao aluno A4, o episódio 1 indica que o aluno iniciou a primeira fase de pesquisa com um conceito prévio de área como sendo um espaço físico geográfico. Ainda nesse episódio, após uma discussão coletiva, o aluno reelaborou esse conceito relacionado-o, agora, com "unidades de medidas iguais". Passado um certo período da aprendizagem – episódio 8 – A4 mostrou, em entrevista dada à professora, que seu conceito de área desenvolveu incorporando ambos os conceitos mencionados por ele anteriormente. Podemos dizer que, ao término dessa fase de pesquisa, o conceito de área de A4 era o de um espaço ou lugar ao qual está associada uma medida que nos informa sobre o tamanho desse espaço ou lugar. No caso do perímetro, esse, também, era uma entidade física ou geométrica – "contorno do quadrado, retângulo, etc" (episódio 8) – a qual está associada uma medida, a saber, a soma dos lados.

O episódio 10 mostra que, ao iniciar a segunda fase de pesquisa, o aluno A4 possuía, parcialmente, o conceito de área que construiu ao final da primeira fase: "Área é um local... que pode ser demarcado para utilidade de cálculos". Após uma discussão coletiva, ainda nesse episódio, o aluno reformulou seu conceito sugerindo, agora, que área é um cálculo: "Área é uma forma de calcular um local ou espaço". Ao final da segunda fase de pesquisa, o episódio 15 mostra que o conceito de área de A4 incorporou esses dois conceitos: "Área para mim é um local ou espaço.. para calcular o tamanho de um local ou espaço". Em outras palavras, área para o aluno continuou a ser um espaço físico geográfico, associado a uma medida. O conceito de perímetro do aluno, parece, não sofreu alterações significativas entre a primeira e a segunda fase de pesquisa. O aluno expressou esse conceito como sendo uma entidade física ou geométrica que, também, está associada a uma medida: "O perímetro é a borda da área... Para se obter um perímetro é só somar os lados" (episódio 15). No que se refere ao volume, o mesmo episódio 15 mostra uma referência ontológica a essa entidade: "Volume é a quantidade em massa."; algo que pertence à realidade. E essa entidade é algo que pertence á realidade concreta, tangível, pois está relacionada à massa. No episódio 12 foi identificado um conceito de ordem de A4 em relação aos números decimais: "Quanto mais zeros maior o número, quanto menos zeros menor é o número. E se já for abaixo de zero é menor ainda".

Os episódios 1, 8, 10 e 15 indicam que, ao longo da primeira fase de pesquisa, um movimento diferente ao de A4 ocorreu com o conceito de área de A7. A diferença está na discussão coletiva do episódio 1, mencionada no primeiro parágrafo dessa seção. Após a discussão, A7 já incorpora ao seu conceito prévio de área – um espaço físico geográfico – a palavra representação para expressar uma medida. A partir daí, podemos dizer que o conceito de área de A7 não sofre alterações significativas até o final da primeira fase de pesquisa como mostra o episódio 8. Nesse mesmo episódio vemos que, para o aluno, o perímetro é, apenas, uma entidade física ou geométrica: "o contorno da área". Já o volume é uma quantidade ou um número. Os episódios 4 e 8 mostram que, ao final da aprendizagem relativa à primeira fase de pesquisa, A7 construiu o conceito de quadrado: "O quadrado é um retângulo com todos os lados iguais" (episódio 4).

O episódio 10 sugere que, entre a primeira e a segunda fase de pesquisa, o conceito de área de A7 permaneceu praticamente o mesmo: área é uma representação que, parece, ser uma medida: "...área representa um certo espaço ou lugar... área serve para calcular um tamanho de um espaço ou lugar. Com o exemplo de um terreno, quantos m^2 ele tem. Esse já é um jeito de usarmos área como medida". O episódio 15 mostra que tal conceito não sofreu alterações significativas até o final dessa fase de pesquisa e que a representação que o aluno se refere, parece, ser de fato uma medida, um número: "Área é a representação de um espaço ou lugar... Há vários exemplos de coisas que se pode usar área como medida". O mesmo episódio 15 indica que o conceito de perímetro de A7 desenvolveu de, somente, um espaço físico geográfico para um número; uma medida: "O perímetro é a soma de todos os lados que indica o que está em volta…" O volume continuou, como na primeira fase de pesquisa, sendo um número; uma quantidade, como por exemplo, de água numa piscina.

No que se refere às proposições, essas não foram identificadas nas falas ou escritas de A4 e A7 nos episódios considerados nessa análise. Isso não significa que proposições não foram discutidas em sala de aula ou que não apareceram nas falas de outros alunos. Vejamos o seguinte protocolo relativo à aula 8 da primeira fase de pesquisa, na qual corrigia-se uma lista de exercícios de Para Casa:

> Professora**:** …se eu pego o quadrado…
>
> (…)
>
> Professora**:** e dobro o lado desse quadrado, quer dizer, o primeiro quadrado era 3 e passou prá 6, quê que aconteceu com o perímetro se eu dobrei o lado?
>
> A5 **:** Aumentou?
>
> Professora**:** É, aumentou ele aumentou. Mas aumentou como? O perímetro era 12 e passou para 24.
>
> A5 **:** É dobrou.
>
> Professora**:** Dobrou também, tá? Mas a área dobrou quando eu dobro o lado do quadrado? Quê que aconteceu com a área?
>
> A5 **:** A área ela...
>
> Professora**:** De 9 para 36 o que aconteceu com ela?
>
> A5 **:** Ela multiplicou 4 vezes.
>
> Professora**:** Multiplicou 4 vezes, como é que a gente fala isso? Quadruplicou, tá certo? Então se eu dobro o lado do quadrado … o perímetro do outro vai ser o dobro do primeiro. Agora se eu dobro o lado, a área não fica o dobro não, ela fica 4 vezes maior…
>
> (…)
>
> Professora**:** …A3, lê prá mim.
>
> A3 **:** O lado do quadrado B é o triplo do lado quadrado C. A área do quadrado D é quantas vezes a área do quadrado C? Dê um exemplo.
>
> (…)
>
> A3 **:** Eu fiz assim, eu fiz assim. Minha mãe me ajudou nesse exercício também porque eu não estava entendendo…
>
> Professora**:** Tudo bem. Gente, é importante a mãe ajudar, sabe porque? Se a mãe tá ajudando você está aprendendo também, tá? Vamos ouvir.
>
> A3 **:** Aí eu fiz assim, eu coloquei dois quadradinhos pequenos.
>
> (…)
>
> A3 **:** Um como se tivesse a área 2 e o outro, o C. Não.
>
> Professora**:** O lado.

A3 **:** É o lado dele 2 e o D é 6.

(...)

A3 **:** Aí eu vi que a área do quadrado ...C era igual a 4 e a do quadrado D é igual 36, que seriam 9 vezes maior. Aí depois minha mãe me deu outro exemplo de que tanto fazia, só que precisava do número ser o triplo, ela colocou aqui depois, o lado 3 e a área 9. No outro 9, quer dizer 9 de lado é 81, é a mesma coisa.

O registro acima mostra que se estava discutindo, para casos particulares, a seguinte proposição: Se multiplicarmos os lados de um retângulo por K ($K \geq 1$) , então seu perímetro aumenta K vezes e sua área aumenta K^2 vezes. Por exemplo, a última fala da aluna A3 indica que ela estava expressando essa proposição para o caso em que K = 3. Em outras palavras, não importava o valor que se desse ao lado do quadrado. Se o lado fosse multiplicado por 3, então, sua área seria multiplicada por 9.

2. PROVAS E RACIOCÍNIOS (PE)

De maneira geral, em todos os episódios nos quais os alunos registraram contas ou outras computações, foi identificado o componente 'provas'. Por exemplo, ao longo dos primeiros nove episódios percebe-se um desenvolvimento desse componente por parte de ambos os alunos A4 e A7. De fato, eles iniciam os cálculos de áreas contando as unidades de medida de área (episódio 1). Num estágio posterior eles descobrem, ainda que em tempos diferentes (A7 no episódio 2 e A4, possivelmente, através das interações com A7) que tal contagem relaciona-se a uma multiplicação: comprimento × largura. Num terceiro estágio (episódio 6, por exemplo), eles passam a usar essa multiplicação como uma fórmula. Porém, ao mesmo tempo em que percebemos tal desenvolvimento, não percebemos uma evolução significativa nas operações envolvendo números decimais. A dificuldade em operar com esses números aparece em quase todos os episódios. Uma subtração de áreas, por parte do aluno A4, foi identificada no episódio 10. No episódio 12 encontramos os alunos num processo de iniciação de novas operações com números decimais: transformação de unidades de medidas de área.

Com relação aos raciocínios, esses foram identificados, mais ou menos diretamente, em vários episódios. Por exemplo, no episódio 1, durante as entrevistas dadas, pelos alunos, à professora sobre o acerto de uma questão do questionário-diagnóstico, vimos que tanto A4 quanto A7 justificam uma analogia que fizeram com unidades de medidas de comprimento. No episódio 3 encontramos os alunos justificando o porquê do polígono B possuir maior área. Outro exemplo, foi identificado no episódio 7 numa fala de A4 justificando para a professora como havia resolvido o problema dois. No episódio 8, identifica-se um raciocínio de A4 ao justificar, na entrevista dada à professora, como ele calcularia a área de uma certa figura irregular. No episódio 10 encontramos uma justificativa de A7 do porquê de ele ter afirmado que a área de uma figura era maior que a área de outra figura: "Eu fiz essa resposta com base no que me lembro, a área para ser maior tem que ter um certo espaço mais aberto ou mais largo". No episódio 11 o aluno A4 justifica o porquê de ter marcado no questionário-diagnóstico a alternativa que versava sobre o conceito de área estar envolvido no cálculo da distância entre uma casa e a padaria mais próxima. O episódio 12 mostra um raciocínio proporcional justificado por A7: "...Uma dessa dá 10.000 dessa, duas dessa dá 20.000 dessa." No episódio 14 foi identificado o seguinte raciocínio por parte de A4: "...multiplicamos comprimento vezes largura e para descobrir a área da pastilha nós multiplicamos lado por lado. E depois do resultado dos dois, nós dividimos a área do mural pela área da pastilha. O resultado foi...". Nesse mesmo episódio encontramos A7 justificando como resolveu o problema da caixa de azulejos.

Em muitos casos, embora os alunos tivessem resolvido exercícios ou problemas, seus raciocínios não foram identificados através da explicitação por meio da linguagem escrita ou falada. Por exemplo, nos problemas relatados no episódio 6, se verificarmos os registros escritos dos alunos não há explicitações dos raciocínios usados. Eles puderam ser, apenas, inferidos através de computações, contas ou pistas apreendidas e significadas a partir das transcrições das fitas em áudio e de seus registros originais. De maneira geral, percebe-se que as pistas dadas por A7 foram mais inteligíveis do que as dadas por A4. Isso pode ser evidenciado, por exemplo, nos episódios 2, 4, 6, 7, 8 e 11. O fato de podermos inferir sobre muitos dos raciocínios usados pelos alunos não nos permite avaliar sobre como eles os justificariam caso fossem solicitados a justificá-los. Em outras palavras, uma coisa é inferir sobre um raciocínio, outra coisa é identificar como o raciocínio foi justificado.

3. LINGUAGEM E SIMBOLISMO (PT)

Na medida em que novos conceitos e procedimentos foram construídos pelos alunos é natural supor que a linguagem matemática dos mesmos tenha se desenvolvido para poder expressar esses conceitos e procedimentos. Por exemplo, nos episódios 1 e 10, vimos que A4 mudou radicalmente, após as discussões coletivas, a forma de expressar seu conceito de área. Os episódios 8 e 15 mostram que ele incorporou ao seu conceito de área ambos os conceitos expressos antes e após as discussões coletivas referentes aos episódios 1 e 10, respectivamente. Já A7, no episódio 1, após a discussão coletiva, mudou sua expressão do o conceito, porém, preservando elementos da linguagem anterior. No episódio 10, vemos que sua linguagem incorpora a palavra 'representação'.

Em relação ao componente 'simbolismo', o episódio 6, por exemplo, mostra que A4 e A7 usaram desenhos e símbolos novos (para eles) para abreviar os dados dos enunciados de alguns problemas. No episódio 8, A4 usou mais uma vez desenhos e símbolos para produzir seu texto. Comparando os textos produzidos pelo aluno nos episódios 8 e 15 vemos que há uma evolução da linguagem matemática por parte de A4: ele incorpora no texto do episódio 15 palavras como figuras, figuras geométricas e objetos para expressar seus conhecimentos teóricos. Nesse mesmo episódio, a linguagem de A7 se comparada com a linguagem usada no texto do episódio 8, incorpora palavras para expressar novas entidades, tais como, hexágono, figuras geométricas e "área de medida".

O uso das fórmulas de áreas de retângulos e de quadrados, de maneira geral, é uma evidência de que a linguagem simbólica dos alunos evoluiu para contemplar as operações envolvidas com a entidade 'área'. Por outro lado, é interessante observar que, embora elementos da linguagem dos alunos tenham evoluído para expressar essa entidade, ao longo dos episódios percebe-se que A4 tem mais dificuldade de expor seus pensamentos através da fala do que A7.

4. VISÕES META-MATEMÁTICAS (PT)

Nos episódios 1, 8, 10 e 15 os relatos dos alunos sobre seus conceitos de área correspondem à visão (ou parte da visão) que os alunos construíram sobre o tema 'áreas e medidas'. Essa visão resulta de uma reflexão da aprendizagem e inclui implícita ou explicitamente: a) o conhecimento de medidas como um conhecimento integrador dos conhecimentos de números e geometria; b) o conhecimento da distinção entre os conceitos e medidas de comprimento, área e volume; c) a relação entre o cálculo de área por meio de contagem e de multiplicação; d) situações nas quais o conceito de área se aplica. Mais do que isso, a partir desses episódios foi inferido que os alunos deram ao conceito 'área' um *status* de entidade. Inicialmente, para ambos os alunos A4 e A7 essa entidade era, somente, tangível; concreta e, portanto, pertencente ao mundo real (material). Depois, ambos os alunos passaram a vê-la como uma entidade ao mesmo tempo tangível e/ou abstrata na medida em que um número está a ela associada. Ao final da segunda fase de pesquisa, vemos que a entidade 'área' para A4 se consolidou diferentemente da entidade 'área' de A7. No entanto, para ambos os alunos, essa entidade mostrou-se ser uma boa representação de situações específicas do cotidiano. O mesmo podemos interpretar para o perímetro e o volume.

Em vários episódios (episódios 4, 6, 7, 8, 12, por exemplo) temos evidências dos alunos refletindo sobre sua aprendizagem. No episódio 5, temos uma indicação de que A7 tem uma certa visão de como funciona a estrutura da matemática. Num certo momento ele percebe que não tinha usado um dado do problema: "A gente não usou esses 2 centímetros aqui…nós pulamos ele…". Ainda que A4 usasse esse dado de maneira equivocada, isso pode ser visto como uma evidência de que ele tem um certo conhecimento sobre o padrão de enunciados de problemas matemáticos escolares. Os episódios 9 e 16 mostram que, ao final das duas fases de pesquisa, os conhecimentos meta-matemáticos construídos por A4 e A7 deram-lhes condições de coordenarem os vários tipos de conhecimentos teóricos e tácitos que adquiriram para obterem um bom desempenho no teste.

5. MÉTODOS, PROCEDIMENTOS, TÉCNICAS, ESTRATÉGIAS (PT)

No episódio 1 foi interpretado que os alunos fizeram uma analogia com a contagem de unidade de medidas de comprimento para calcularem a área de um retângulo quadriculado cuja unidade de medida era cada um dos retângulos que compunham esse quadriculado. Nos episódios 2, 6 e 9 foi discutido, em detalhes, o desenvolvimento de um *know how* pelos alunos, isto é, um conhecimento tácito ou pessoal de como e quando usar um certo procedimento ou estratégia para resolver um problema. No caso do aluno A4, tal desenvolvimento fica evidente se compararmos sua performance na resolução dos problemas (episódio 6) e no teste escrito (episódio 9), por exemplo. Em relação a A7, o episódio 6 mostra como o aluno desenvolveu uma estratégia pessoal para resolver o problema 3. O episódio 16 mostra a estratégia que A4 escolheu para resolver uma questão: essa questão apresentava a planta de um apartamento e pedia que se calculasse as áreas de cada cômodo e, ao final, a área total do apartamento. O aluno preferiu encontrar as dimensões do apartamento como um todo e calcular sua área em vez de somar as áreas de cada cômodo.

6. ESTÉTICA E VALORES

No caso dos alunos, esse componente pode ser dito um macro componente do modelo de Ernest no sentido de que a apreciação da estética e valores relacionados à matemática envolve componentes afetivos – curiosidade, interesse, motivação, participação – que, como dito anteriormente, funcionam como condição para o desenvolvimento dos demais componentes. Em todos aqueles episódios que envolvem conversação interpessoal, percebe-se uma grande interação entre os alunos A4 e A7 e, em muitos casos, entre esses alunos e a professora. Isso indica uma disposição favorável dos alunos para trabalhar coletivamente. No episódio 6 quando da discussão, pelos alunos, do último problema vimos que, num certo momento, eles decidem abandonar o que já haviam feito e começar tudo de novo. Uma possibilidade para explicar essa atitude dos alunos foi construída: a sensibilidade dos alunos pelo cuidado e precisão da apresentação de uma tarefa matemática. No episódio 5 temos uma questão de A4 colocada para a professora relacionada ao fato de que perímetro não determina a área.

Isso foi interpretado com uma curiosidade ou interesse do aluno em aprender sobre o tema.

No caso particular do aluno A7, ocorreu um fato interessante, que pode estar associado ao componente 'estética e valores': nas duas produções escritas em que o aluno expressou seus conhecimentos de área, foram dados exemplos nos quais a pessoa do aluno está presente. Por exemplo, no episódio 8 o aluno escreve o seguinte: "O cálculo de área é muito útil para podermos descobrir o tamanho de certa coisa. Quando **estou** em um salão de festas e quero saber o seu tamanho uso a área.". No episódio 15, numa certa hora, ele registra: "...se **eu** quero cobrir um terreno com plantações...". Isso pode estar sugerindo que o aluno, não só, construiu uma visão pessoal do tema, mas também, que reconhece que medidas de área é um conhecimento importante para ele transmitir informações precisas do mundo a sua volta. Se interpretado assim, vimos, no capítulo 4, que tal reconhecimento pode ser uma expressão de um valor que o aluno atribui a esse conhecimento matemático específico.

7. DISCUSSÃO

Nessa seção discuto o desenvolvimento do conhecimento de áreas e medidas dos alunos A4 e A7 conforme as duas abordagens de desenvolvimento presentes nesse trabalho de tese. A primeira abordagem relaciona-se com a concepção de desenvolvimento de Polanyi. A segunda, diz respeito ao desenvolvimento dos componentes do modelo de Ernest adaptado para os alunos.

Penso estar devidamente evidenciada a construção da entidade matemática 'área', pelos alunos A4 e A7, ao longo da aprendizagem com o tema nas duas fases de pesquisa. Como vimos, no capítulo 1, tal processo identifica-se com o mecanismo fundamental de desenvolvimento – emergência – da teoria de Polanyi, e relaciona-se com a aprendizagem – integração consecutiva de significados – da seguinte maneira: a busca pela compreensão de uma entidade resulta numa referência ontológica a ela (Polanyi 1983, p.33). Por outro lado, os episódios analisados nesse estudo de caso apresentaram evidências de que os alunos interiorizaram (ou estavam interiorizando), de uma maneira ou de outra, particulares ou aspectos – conceito, fórmula do cálculo de áreas, cálculo de áreas por meio de subtração, dentre outros – dessa entidade, cujos significados foram integrados na tentativa de construir ou reconstruir outras entidades: perímetro, volume, provas, raciocínios, exercícios e problemas. Portanto, podemos dizer que houve aprendizagem e desenvolvimento do conhecimento matemático de áreas e medidas dos alunos, no sentido de Polanyi, uma vez que os alunos A4 e A7 criaram novas entidades matemáticas ou, ainda, recriaram entidades já conhecidas.

O conceito de emergência, no entanto, nos informa pouco sobre a maneira pela qual se deu o processo de aprendizagem desses alunos. Uma maneira de compreendermos tal processo é através das categorias de articulações internas nas quais os alunos operavam no momento das falas capturadas pelos episódios. Ao longo da análise percebe-se, claramente, que os alunos A4 e A7 não aprenderam da mesma forma. Tampouco parecem ter desenvolvido seus conhecimentos da mesma maneira. Os episódios nos quais foram identificadas articulações do aluno A4 do tipo E4 (domínio da sofisticação) sugerem que sua aprendizagem se deu de maneira 'mais sofrida' do que a aprendizagem de A7 no seguinte sentido: enquanto a aprendizagem de A7 pareceu ocorrer de modo 'quase linear', sem muitos obstáculos, com o aluno demonstrando facilidade de compreender rapidamente as explicações da professora, a aprendizagem de A4, ao contrário, mostrou-se irregular, isto é, com muitos movimentos de ida e vinda.

Em relação ao modelo de Ernest adaptado para os alunos, a análise mostrou que os componentes foram identificados, todos, com maior ou menor visibilidade. Mais do que isso, a análise revelou que alguns componentes do modelo predominaram sobre outros ao longo da aprendizagem dos alunos A4 e A7. Os componentes: afirmações, provas e raciocínios, linguagem e simbolismo, métodos, procedimentos, estratégias, foram identificados em maior quantidade e com maior visibilidade do que, por exemplo, os componentes proposições e estética e valores. No caso das proposições, é possível que esse componente não tenha se destacado na análise em função do tratamento que foi dado ao estudo de áreas e medidas nas duas fases de pesquisa. Em outras palavras, nos níveis de escolarização considerados na pesquisa não era objetivo de ensino dar ênfase nesse componente. No caso do componente estética e valores, sua identificação demandou maior reflexão e esforço de interpretação, muito provavelmente, porque que esse componente tem a característica 'macro', descrita na seção anterior. Por outro lado, pelo critério de escolha (motivação, interesse, alto grau de interação, dentre outros) das duplas a serem pesquisadas, partiu-se do pressuposto de os alunos que formavam essas duplas já demonstravam possuir uma identidade de participantes da prática matemática escolar e, portanto, eles, supostamente, já possuíam um gosto pela matemática, incluindo um certo senso de estética, bem como alguns valores favoráveis para com a disciplina ou com alguns de seus aspectos.

Para explicar o desenvolvimento dos componentes principalmente explícitos e principalmente tácitos do conhecimento de áreas e medidas dos alunos, identificado nesse estudo de caso, podemos nos basear no desenvolvimento da prática matemática, segundo Kitcher (1984). Em primeiro lugar, vimos que vários episódios apresentaram evidências de que os alunos A4 e A7 construíram novas afirmações ou reconstruíram afirmações já conhecidas. Para o autor, isso resulta em desenvolvimento ou mudança na linguagem e simbolismo matemáticos. Na seção anterior, mostrei que isso ocorreu de fato. No caso do componente provas e raciocínios, Kitcher diz que ele desenvolve ou muda, por exemplo, através de adicionamento de novos raciocínios. Na medida em que foram identificados, em vários episódios, provas e raciocínios que os alunos tiveram que construir para trabalhar um novo tema, podemos dizer que A4 e A7 desenvolveram esse componente, de maneira geral. Porém, foi mais difícil identificar se um mesmo raciocínio se desenvolveu pelo fato de que esse componente se manifestou, na análise, de maneira bastante situada, ou seja, cada tarefa demandou um raciocínio que ou foi análogo a outros já conhecidos ou não foi. Ainda assim, os episódios 1 e 9 mostram que o aluno A4 desenvolveu um mesmo raciocínio, a saber, divisão de medidas de área para resolver o problema do mural e das pastilhas. De fato, no episódio 1, vemos a dificuldade do aluno em resolver o problema. Já no episódio 9 o aluno consegue resolver o problema no teste individual e escrito. Apesar de ter sido identificado o desenvolvimento do componente 'métodos, técnicas, procedimentos...' em vários episódios, não ficou claro como os demais componentes o afetam. Isso pode ser devido ao fato de que esse componente é o 'mais tácito' no sentido de que não temos acesso privilegiado aos processos de como nossa mente funciona para saber quando ou como uma técnica ou estratégia é escolhida.

No que se refere ao componente visões meta-matemáticas, Kitcher argumenta que mudanças nessa visão estão atreladas com mudanças em outros componentes. Em outras palavras, desenvolvimento de afirmações, proposições, provas, raciocínios, métodos, procedimentos, estratégias, linguagem e simbolismo resulta, necessariamente, no desenvolvimento da visão que se tem da matemática como um todo, bem como de seu escopo. A análise do episódio 15 mostrou como os alunos desenvolveram a visão que construíram sobre áreas e medidas ao longo das duas fases de pesquisa. Quanto ao componente estética e valores, a análise apresentou limitações no que se refere ao quanto os demais componentes estão a ele atrelados. O que tenho enfatizado é que o componente estética e valores envolve componentes afetivos e, portanto, influencia o desenvolvimento dos demais componentes do modelo. E esses componentes afetivos, certamente, dependem de fatores externos à matemática *per se*. Por exemplo, Boaler e Greeno (2000) mostram como a forma através da qual são conduzidas as aulas de matemática por parte do professor influencia a identidade matemática dos alunos. Uma vez que essa identidade está sendo interpretada como atrelada ao componente estética e valores, então, tal influência deve afetar o desenvolvimento desse e dos demais componentes do modelo, com maior ou menor intensidade.

Um outro resultado que, parece, emergiu da análise é o seguinte: ainda que o desenvolvimento de alguns componentes provocasse o desenvolvimento de outros, o desenvolvimento dos componentes como um todo não ocorreu em completa harmonia. Isso pode ser observado num fato interessante, já mencionado anteriormente, ocorrido com o aluno A4. Vimos que em grande parte dos episódios o aluno apresenta dificuldades de expressar seus pensamentos através da fala. Em tais episódios foi identificado falas de A4 originadas de articulações do tipo 'tácito e explícito independentes' (ou domínio da sofisticação). Apesar disso, ele conseguiu desenvolver conhecimentos tácitos sobre o tema, tais como, bom uso da fórmula de área e *know how* para resolver alguns problemas. Isso pode estar indicando que um elemento da linguagem matemática, a saber, a comunicação social desenvolve com uma certa independência do 'saber-fazer'.

Podemos resumir o desenvolvimento do conhecimento matemático de áreas e medidas dos alunos A4 e A7, segundo seus componentes principalmente tácitos e principalmente explícitos da seguinte maneira: o desenvolvimento do componente afirmações resultou no desenvolvimento de alguns aspectos da linguagem e simbolismo matemáticos. Esses dois componentes, por sua vez, dão condições para que os alunos desenvolvam, de alguma maneira, os componentes: provas, raciocínios, métodos, procedimentos e estratégias. O 'saber fazer', expresso no componente métodos, procedimentos e estratégias mostrou-se ter uma certa independência de um elemento da linguagem: a comunicação social. Por outro lado, atrelado ao desenvolvimento de todos os componentes temos, então, o desenvolvimento do componente visão meta-matemática. A análise se revelou limitada com relação ao desenvolvimento do componente estética e valores.

Sob o ponto de vista educacional podemos dizer que, a partir do modelo de Ernest, esse estudo de caso contribui para re-significar a aprendizagem matemática como sendo principalmente tácita. Em outras palavras, na medida em que: a) identificou-se todos os componentes do modelo de Ernest adaptado para os alunos nesse estudo de caso; b) quatro dos seis componentes são principalmente tácitos, podemos concluir que grande parte do conhecimento matemático não pode ser ensinada nem aprendida por meio da transmissão explícita.

Em relação a essa questão, tal como Polanyi (1983), Schön (1987) enfatiza que um conhecimento principalmente tácito pode ser aprendido, mas não pode ser ensinado no sentido tradicional da palavra ensinar, ou seja, por meio da declaração ou explicitação de um conhecimento que o professor possui. Schön, ao analisar o ensino de projetos arquitetônicos, sugere que o ato de ensinar um conhecimento tácito está estritamente vinculado às ações públicas do professor enquanto esse enfrenta questões autênticas, ou seja, quando ele se encontra envolvido numa situação que lhe exija o uso de seu próprio conhecimento tácito. Isso significa, por exemplo, que o ato do professor de resolver, no quadro negro, exercícios padrões ou problemas que não são, de fato, desafios para ele, não corresponde a esse tipo de prática. Interpretando a sugestão de Schön, no caso da aprendizagem dos componentes matemáticos principalmente tácitos, os alunos teriam que passar por algumas experiências que lhes permitam 'ver' seu professor usando esses conhecimentos. O mesmo vale para o professor em relação aos conhecimentos tácitos dos alunos. Nesse caso, o professor precisa esforçar-se para desenvolver uma sensibilidade para apreender as dicas dadas por seus alunos, bem como, como elas se manifestam conforme eles estejam mobilizando componentes matemáticos principalmente explícitos ou principalmente tácitos do conhecimento matemático.

Daí, pode-se prever as profundas repercussões para o ensino de matemática quando se identifica, como se identificou nessa análise, que a aprendizagem matemática é principalmente tácita. Mas há um aspecto ainda não enfatizado que julgo ser igualmente relevante e cujas repercussões na prática em sala de aula são do mesmo calibre. Trata-se do reconhecimento de que a maioria das práticas de avaliação escolar da aprendizagem matemática está baseada na suposição de que o conhecimento matemático é de natureza ou completamente explícita ou passível de explicitação em toda a sua extensão (Greeno, 1997, p.10; MEC, 1998, p.24-26; Romberg 2001). Desta forma, fica evidente que tais práticas têm um potencial de inadequação como práticas avaliativas de um entendimento do conhecimento matemático dos alunos como sendo principalmente tácito. Uma reflexão sobre suas experiências anteriores de avaliação da aprendizagem pode levar o professor a compreender que a dificuldade do aluno em apreender os componentes tácitos do conhecimento matemático é da mesma natureza, e talvez de intensidade similar ou superior, à dificuldade que o professor sente em apreender os conhecimentos tácitos desenvolvidos por seus alunos. Em seu ofício profissional, dificilmente o professor poderá abdicar de exercer sua faculdade de avaliar e julgar a aprendizagem dos conhecimentos de seus alunos. Compromissar-se com uma compreensão do conhecimento matemático na linha do modelo de Ernest e exercer adequadamente o imperativo profissional de avaliar o progresso dos alunos, demanda do professor um compromisso tanto com o desenvolvimento de novas formas de avaliação, quanto com o despertar e o sintonizar de sua sensibilidade.

Para que essa compreensão possa ser implementada com eficácia nos currículos da disciplina é necessário que tanto a formação inicial, quanto a formação continuada dos professores sofram transformações em sua natureza, em seus conteúdos curriculares e nos processos de ensino e aprendizagem. Tais transformações devem buscar sintonizar esses processos formativos com as metas de ensino e aprendizagem dos componentes tácitos do conhecimento matemático e com a formação do professor reflexivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho de tese foi dedicado ao estudo do desenvolvimento, pelos alunos, da aprendizagem de um determinado conhecimento matemático, segundo seus componentes tácitos e explícitos, durante o período em que esse conhecimento foi trabalhado em sala de aula. Sua resolução resultou da convergência de duas vertentes de investigação: uma de natureza teórica e outra de natureza empírica. Com relação à primeira vertente, foram configurados elementos teóricos para fundamentar em bases sólidas o estudo do conhecimento matemático e da aprendizagem matemática como sendo principalmente tácitos. Esses elementos foram buscados na teoria de Polanyi sobre conhecimento tácito (capítulo I), na visão construtivista social de Ernest do conhecimento matemático (capítulo II) e nas teorias de aprendizagem situada ou comunidades de prática de Lave e Wenger (capítulo III). Os elementos da teoria de Polanyi usados para tal fundamentação foram: os aspectos funcional, fenomênico, semântico e ontológico da estrutura de um conhecimento tácito, os domínios de co-operação do tácito com o explícito no processo de articulação, o papel do social na construção do conhecimento pessoal, dentre outros. No caso de Ernest, destaco os elementos: a prática de produção do conhecimento matemático como uma prática social e o modelo do conhecimento matemático. Por fim, as teorias de Lave e Wenger foram apresentadas como teorias de aprendizagem que podem dar conta de explicar o desenvolvimento de conhecimentos tácitos na prática matemática escolar.

No que se refere à vertente empírica, uma investigação foi realizada em uma sala de aula de matemática de uma escola pública do ensino fundamental (capítulo IV). Mais especificamente, o desenvolvimento dos componentes tácitos e explícitos do conhecimento de áreas e medidas de uma dupla de alunos, durante dois momentos distintos de seus percursos escolares, foi investigado. O processo de investigação empírica constou, inicialmente, da análise de um episódio (capítulos V e VI) cujo objetivo foi o de identificar como tais componentes se manifestam em processos de aprendizagem. Nesse caso, todos os alunos de uma turma foram envolvidos. Isso feito, um estudo de caso de uma dupla de alunos (capítulos VII e VIII) dessa turma foi realizado para investigar, propriamente, o desenvolvimento dos componentes.

A metodologia de análise empregada no episódio exibiu uma rica dinâmica entre o tácito e o explícito durante um contexto de conversação coletiva em sala de aula acerca da diferença entre figuras planas e figuras espaciais. Em particular, a análise mostrou como o tácito participa no processo de articulação das compreensões produzidas pelos alunos. Cinco categorias de articulações internas foram identificadas. Três dessas categorias corresponderam aos domínios de co-operação entre o tácito e o explícito, descritos por Polanyi: domínio do inefável, domínio intermediário e domínio da sofisticação. A partir das sete categorias criadas para representar os conhecimentos que os alunos usaram de maneira subsidiária para realizar a tarefa de elaborar uma compreensão acerca da diferença entre tais figuras, foram identificados os seguintes componentes do modelo de Ernest adaptado para os alunos: a) afirmações, que é principalmente explícito; b) elementos da visão meta-matemática, que é principalmente tácito; c) aspectos da linguagem matemática oral, que é principalmente tácito. Além disso, os processos de controle e atenção da mente – concentração (ocupação), mudança de foco (da entidade integrada para seus particulares) e análise destrutiva (detalhamento dos particulares de um conhecimento tácito) –, descritos por Polanyi, puderam ser observados.

Um resultado relevante que, pareceu, emergir da análise está relacionado ao fato de que aquilo que o aluno diz literalmente quando está realizando uma tarefa não deve ser entendido, sempre, como uma expressão direta de seu pensamento. A análise sugeriu que, ao realizar uma tarefa oral, a resposta do aluno pode, aparentemente, estar equivocada sob o ponto da disciplina. Mas, isso não quer dizer, necessariamente, que o aluno não sabe a resposta, ou que não interiorizou certos conhecimentos. O suposto erro ou a suposta não-interiorização podem estar indicando que, no momento da verbalização, o aluno encontrava-se no domínio do inefável ou no domínio da sofisticação. No primeiro caso, o tácito ainda estava sob construção e, portanto, predominava sobre o explícito. Como vimos, isso resulta numa fala 'sofrida' com dicas bastante vagas para inferirmos sobre a compreensão do aluno. No segundo caso, uma obstrução do funcionamento tácito do seu pensamento ocorria devido a uma inaptidão da fala. Aqui, a fala resultante é cercada de imprecisões ou contradições, embora seja segura e sem hesitações. Desenvolver uma sensibilidade para capturar os modos de operar do aluno, através das categorias de articulações criadas nesse episódio, pode ajudar o professor a identificar em que estágio da aprendizagem – tácito predominando sobre o explícito, tácito e explícito coincidentes e tácito e explicito independentes - o aluno se encontra. Dependendo do estágio identificado, o professor pode desenvolver suportes pedagógicos que auxiliem o aluno a aproximar, ao máximo possível, sua articulação externa do domínio no qual o tácito e o explícito coincidem. Isso é fundamental nos processos de formalização e comunicação social dos conhecimentos matemáticos do aluno.

Todas as categorias criadas nesse episódio foram baseadas num número pequeno de alunos: uma única turma de 6ª série do ensino fundamental, e numa escola específica: uma escola pública. Portanto, maiores informações precisariam ser coletadas a fim de que outras hipóteses possam ser levantadas. Uma pesquisa interessante seria investigar o quanto tais categorias se reproduzem ou não em ambientes sociais com características similares àqueles considerados na pesquisa. Comparações entre turmas de um mesmo professor e de professores distintos, submetidas à mesma tarefa matemática, poderiam ampliar ou reforçar os resultados sugeridos na presente pesquisa.

Em relação ao estudo de caso, nele foram identificados todos os componentes do modelo de Ernest adaptado para os alunos com maior ou menor intensidade e visibilidade, ao longo de duas fases distintas (5ª e 6ª séries) em que se trabalhou o tema 'áreas e medidas' em sala de aula. Ainda que tenha investigado mais sistematicamente, a aprendizagem de, apenas, uma dupla de alunos, a análise sugeriu que o desenvolvimento dos componentes não ocorre em completa harmonia: alguns componentes – afirmações, provas e raciocínios, linguagem e simbolismo, por exemplo – predominaram sobre outros – proposições e estética e valores. Mais do que isso, o desenvolvimento de alguns componentes mostrou afetar mais diretamente o desenvolvimento de certos componentes do que o de outros. Por exemplo, a análise indicou que um elemento da linguagem matemática oral, a saber, a comunicação social de um conhecimento matemático, parece se desenvolver com uma certa independência do componente 'métodos, procedimentos,...' que expressa o 'saber fazer'. Alguns podem dizer que tal indicação é evidente e que não prejudica a performance escolar do aluno. Isso pode ser verdade quando se acredita que o saber comunicar socialmente não é um componente do conhecimento matemático. Mas, por tudo o que foi discutido nesse trabalho, esse elemento do conhecimento matemático é fundamental, se assumimos que a prática de produção do conhecimento matemático escolar é uma prática social.

Portanto, aqui, mais uma vez, o professor pode exercer um importante papel no desenvolvimento desse componente, pelo aluno, incentivando práticas de conversação.

Se compararmos a análise do episódio e o estudo de caso veremos que os conhecimentos tácitos usados pelos alunos mostraram-se dependentes das tarefas. Ou seja, tarefas distintas resultaram em mobilizações de conhecimentos tácitos distintos. Porém, as articulações internas dos alunos pareceram não seguir o mesmo comportamento: elas se mostraram independentes da tarefa. Em resumo, a mobilização de conhecimentos tácitos mostrou-se situada; dependente do contexto. Já as categorias de articulações, aparentemente, não se mostraram de forma tão situada, pois foi possível identificá-las em tarefas distintas.

A metodologia empregada no estudo de caso mostrou-se limitada no que se refere à identificação e, conseqüente, desenvolvimento do componente 'estética e valores'. Nesse caso específico acredito que uma análise do componente feita à luz das perspectivas de aprendizagem situada ou comunidades de prática pode ser frutífera. Isso porque, foi argumentado nesse trabalho de tese, que tal componente está estritamente relacionado com a identidade matemática dos alunos; com a relação dos alunos com seus conhecimentos matemáticos. Mas, investigar essas identidades ou o componente 'estética e valores' sob a luz de tais perspectivas demanda uma mudança de paradigma adotando-se um referencial epistemológico interpretativo distinto daquele que foi adotado nessa tese. De fato, nas teorias de aprendizagem situada os elementos: aprendizagem, significado, identidade e desenvolvimento, por exemplo, estão atrelados à participação do sujeito numa determinada prática e não aos seus atributos individuais. No caso dessa pesquisa, os sujeitos são os alunos e a prática é a matemática escolar. Essa foi uma razão pela qual não explorei de maneira sistemática a análise dos dados com base no capítulo III. Uma outra razão foi que o critério de escolha das duplas a serem pesquisadas já partia do pressuposto de que esses alunos possuíam uma certa identidade de participantes nas aulas de matemática.

Apesar das limitações desse trabalho de tese, ele se mostrou frutífero no que diz respeito à abertura de, pelo menos, duas novas vertentes de investigação na área de educação matemática:

- Investigar como o componente ‘estética e valores’ e as identidades matemáticas dos alunos se relacionam, se manifestam e se desenvolvem em termos de participação na prática matemática escolar, ou ainda, em interações em sala de aula.

- Investigar como e em que extensão o ensino e aprendizagem de matemática consiste em adotar uma tradição de uma arte socio-culturalmente estabelecida – a investigação matemática, como diz Polanyi – ou compartilhar jogos de linguagem inseridos em uma forma de vida, como diz Ernest.

Gostaria de encerrar esse trabalho dizendo que, se ele não surpreendeu em termos de resultados mais gerais, seu mérito reside, especialmente, na contribuição para uma nova compreensão do conhecimento matemático dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADLER, Jill. 1998. Ligths and Limits: Recontextualising Lave and Wenger to theorize knowledge of teaching and of learning school mathematics, *Situated Cognition and the Learning of Mathematics.* Ed. by Anne Watson, Oxford: University of Oxford Department of Educational Studies, Chapter 11, 161-177.

ADLER, Jill; LERMAN, Stephen. 2001. Ethical practice in mathematics education research: Getting the description right and making it count. http://www.sbu.ac.uk/~lermans/PME25paper.html (01/11/2002)

BATURO, Annete; NASON, Rod. 1996. Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.

BAUMANN, James F.; DUFFY, Ann M. 2001. Teacher-Researcher Methodology: Themes, Variations, and Possibilities. *Reading Teacher*; v54, n6., 608-15.

BOALER, Jo. 2000a. Introduction: Intricacies of Knowledge, Practice, and Theory in *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. by Jo Boaler, London: Ablex Publishing.

BOALER, Jo, Ed. 2000b. *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. London: Ablex Publishing.

BOALER, Jo. 2002. Exploring the Nature of Mathematical Activity: Using theory, Research and 'Working Hypotheses' to Broaden Conceptions of Mathematics Knowing. *Educational Studies in Mathematics*, v51, n1-2, 3-21.

BOALER, Jo; GREENO, James G. 2000. Identity, Agency, and Knowing in Mathematics Worlds in *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. by Jo Boaler, London: Ablex Publishing.

BRENNAM, John. 1977. Polanyi´s transcendence of the distinction between objectivity and subjectivity, especially as applied to the philosophy of science. *Journal of the British Society for Phenomenology*, v8, n3, 141-152.

CASH. 1996. http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi/guide/3pprs.htm (01/11/2002)

COBB, Paul; BOWERS, Janet. 1999. Cognitive and Situated Learning Perspectives in Theory and Practice. *Educational Researcher*, v28, n2, 4-15.

COCHRAN-SMITH, Marilyn; LYTLE, Susan L. 1990. Research on Teaching and Teacher Research: The Issues that Divide. *Educational Researcher*; v19, n2, 2-10.

CONFREY, Jere. 1981. Conceptual Change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum, *Curriculum Inquiry* 11:3, 243-257.

CZARNOCHA, Bronislaw. 2002. The Teaching Experiment and The Teacher Researcher. Emancipation of the Concept, *Abstract of ICTM2*, Hersonissos (Crete), 1-6 July, p. 108.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. 1985. *A Experiência Matemática*, Rio de Janeiro: Francisco Alves.

DEEPSIGHT. 2002. http://www.deepsight.org/articles/polanyi.htm#A

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. 1989. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 387-424.

ERNEST, Paul. 1990. Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics: Radical Constructivism Rehabilitated?, Poster paper, *PME 14 Conference*, Mexico, July.

ERNEST, Paul. 1991. *The Philosophy of Mathematics Education*, London: Falmer.

ERNEST, Paul. 1994. What is Social Construtivism in the Psychology of Mathematics Education? in Ponte, J. P. da, and Matos, J. F. *Eds Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal: University of Lisbon, v2, 304-311.

ERNEST, Paul. 1998a. *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany: SUNY.

ERNEST, Paul. 1998b. Mathematical Knowledge and Context, *Situated Cognition and the Learning of Mathematics* (Ed. by Anne Watson), Oxford: University of Oxford Department of Educational Studies, Chapter 1, 13-29.

FISCHBEIN, Efraim, 1989. Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics* 9, 2, 9-14.

FRADE, Cristina; BORGES, Oto. 2001. Componentes Tácitos e Explícitos do Conhecimento Matemático nas Orientações Curriculares para o Ensino de Matemática. *Anais 2001 Anped.*

FRADE, Cristina; BORGES, Oto. 2002. Tacit Knowledge in Curricular Goals in Mathematics. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level),* Hersonissos, Greece, 1-6 July.

GRAVEN, Mellony; LERMAN, Stephen. (in press). Review of Wenger, E. (1998), *Journal of Mathematics Teacher Education*.

GREENO, James G. 1997. On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 25(1), 5-17.

HARRÉ, R.; KRAUSZ, M. 1996. *Varieties of Relativism*. Oxford: Blackawell.

HÉRAUD, Bernard. 1897. Conceptions of area units by 8-9 year old children. In J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME Conference*, v3, 299-304, Montreal.

HIEBERT, James; LEFEVRE, Patricia. 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis*, (Ed. by James Hiebert), Hillsdale (NJ), Chapter 1, 1-27.

HINO, Keiko. 2002. Acquiring new use of multiplication through classroom teaching: an exploratory study. *Journal of Mathematical Behavior*, 106. 1-26.

ISCID 2002. http://www.iscid.org/polanyi.php (01/11/2002)

JACOBS, Struan. 2002. Polanyi's presagement of the incommensurability concept, *Studies in History and Philosophy of Science*, v33, 105-120.

JBSP. 1977. The Philosophy of Michael Polanyi. *The Journal of the British Society for Phenomenology* (October, v8, n3)

JHA, Stefania R. 1995. Michael Polanyi's Integrative Philosophy, *Thesis of Doctor of Education,* School of Education, Harvard University, Chapter 2.

JHA, Stefania R. 1997. A New Interpretation of Michael Polanyi's Theory of Tacit Knowing: Integrative Philosophy with 'Intellectual Passions', *Studies in History and Philosophy of Science*, v28, n4, 611-631.

KILPATRICK, Jeremy. 1987. What Cosntructivism Might Be in Mathematics Education, *Proceedings of PME11*, 4.

KITCHER, Philip. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

KORDAKI, Maria; POTARI, Despina. 1998. Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(3), 303-316.

KUHN, Thomas S. 1998. *A estrutura das revoluções científicas,* 5.ed., São Paulo: Perspectiva.

LAKATOS, Imre. 1982. *Pruebas y refutaciones – La lógica del descubrimiento matemático*, 2.ed., Madrid: Alianza Editorial.

LAKATOS, Imre. 1986. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics? *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Ed. by Thomas Tymoczko. Boston: Birkhauser, Part I, 29-48.

LAKOFF, George; NÚÑEZ, Rafael E. 2000. *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

LAVE, Jean. 1988. *Cognition in Practice: Mind, mathematics and culture in every life*, New York: Cambridge University Press.

LAVE, Jean. 1993. The Practice of Learning. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds). *Understanding Practice: Perspectives on Activity and Context*. New York: Cambridge University Press, 3-32.

LAVE, Jean. 1996. Teaching, as learning, in Practice. *Mind, Culture, and Activity*, v3, n3, 149-161.

LAVE, Jean. 1997. The Culture of Acquisition and the Practice of Understanding. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.) *Situated Cognition: Social, Semiotic, and Psychological Perspectives*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

LAVE, Jean; WENGER, Etienne 1991. *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press.

LERMAN, Stephen. 1990. The Role of Research in the Practice of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics,* v10, n2, 25-28.

LERMAN, Stephen. 1998. A Moment in the Zoom of a Lens: Towards a Discursive Psychology of Mathematics Teaching and Learning in Olivier, A. and Newstead, K. *Proceedings of the Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosch, South Africa, vI, 66-81.

LERMAN, Stephen. 2000. The Social Turn in Mathematics Education in *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. by Jo Boaler, London: Ablex Publishing.

LERMAN, Stephen. 2001. Getting used to mathematics: alternative ways of speaking about becoming mathematical. *Ways of Knowing Journal*, v1, n1, 47-52.

LERMAN, Stephen. 2002. Cultural, discursive psychology: A socialcultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v 46, 87-113.

LOMAS, Dennis. 1999. Assessing Paul Ernest's Application of Social Constructivism to Mathematics and Mathematics Education. *Philosophy of Education*.

http://www.ed.uiuc.edu/EPS/PES-Yearbook/1999/lomas_fn.asp (10/11/02)

MATTHEUS, Michael R. 1999. Social Constructivism and Mathematics Education: Some Comments, *Philosophy of Education*.

http://www.ed.uiuc.edu/EPS/PES-Yearbook/1999/matthews_fn.asp (10/11/02)

MEC. 1998. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

MELLIN-OLSEN, Stieg. 1981. Instrumentalism as an Educational Concept, *Educational Studies in Mathematics*, v12, 351-367.

MILES, B. Matthew; Huberman, A. Michael. 1994. *Qualitative Data Analysis: an expanded sourcebook*. 2nd ed., London: SAGE, Chapter 10, 245-286.

NÚÑEZ, Rafael E. 2000. Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics, *Proceedings of PME 24*. Hiroshima, Japan, v1, 3-22.

PERRY, W. G. 1970. *Forms of Intellectual and Ethical Development in the College Years: A Scheme*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

PIAGET, Jean; INHELDER, Babel; SZEMINSKA, Alina. 1960. *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Keagan Paul.

POLANYI SOCIETY 2002. http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi/ (01/11/2002)

POLANYI, Michael. 1962. *Personal Knowledge*. London: Routledge & Kegan Paul.

POLANYI, Michael. 1952. The Stability Of Beliefs. *British Journal for the Philosophy of Science.* http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi/mp-stability.htm (01/11/2002)

POLANYI, Michael. 1975. *Meaning*. London: The University of Chicago Press Ltd.

POLANYI, Michael. 1983. *The Tacit Dimension.* Gloucester (Mass): Peter Smith.

POLANYI, Michael. 1965. The Structure of Consciousness. *Brain.* http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi/mp-structure.htm (01/11/2002)

POLANYI, Michael. 1969a. *Knowing and Being*. Ed. by M. Grene. Chicago: Chicago University Press.

POLANYI, Michael. 1969b. On Body and Mind. *The New Scholasticism.*

http://www.mwsc.edu/orgs/polanyi/mp-body-and-mind.htm

PROSCH, Harry. 1986. *Michael Polanyi: A Critical Exposition*. Albany: SUNY Press.

PUTNAN, Hilary. 1986. What Is Mathematical Truth?, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Ed. by Thomas Tymoczko, Boston: Birkhauser, Part I, 49-65.

ROMBERG, Thomas A. 1992. Problematic features of the school mathematics curriculum, *Handbook for Research on Curriculum* (Philip W. Jackson, Ed.), New York: MacMillan, Chapter 27, 749-788.

ROMBERG, Thomas A. 2001. Mathematics Goals and Achievement in the United States. In *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* v1, Utrecht, Freudenthal Institute, 180-185.

RYLE, G. 1949. *The Concept of Mind*. London: Hutchinson.

SCHOENFELD, Alan H. 1992. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.), New York: MacMillan, Chapter 15, 334-370.

SELDEN, Annie; SELDEN, John 1996. Of what does mathematical knowledge consist? <http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_1.html> (13/11/2001)

SCHÖN, Donald A. 1987. *Educating the Reflective Practitioner,* San Francisco, Jossey-Bass.

SKEMP, Richard R. 1976. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, n77, 20-26.

STERNBERG, Robert J. 1995. Theory and Measurement of Tacit Knowledge as a Part of Practical Intelligence. *Zeitschrift für Psychologie* 203, 319-334.

STROM, Dolores; KEMENY, Vera; LEHRER, Richard; FORMAN, Ellice. 2001. Visualizing the emergent structure of children's mathematical argument. *Cognitive Science*. 25: 733-773.

SVEIBY, Karl E. 1997. Tacit Knowledge.
http://www.it-consultancy.com/extern/sveiby-tacit.html (18/07/2002)

TIROSH, Dina, Ed. 1994. *Implicit and Explicit Knowledge: An Educational Approach*, Norwood (NJ): Ablex Publishing Co.

TYMOCZKO, Thomas, Ed. 1986. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston: Birkhauser.

VON GLASERSFELD, Ernst. 1984. An Introduction to Radical Constructivism. *The Invented Reality*. Ed. by P. Watzlawick, New York: Norton.

VON GLASERSFELD, Ernst. 1992. Aspects of Radical Constructivism and its Educational Recommendations, *ICME-7*, Quebec.

VYGOTSKY, Lev S. 1984. *A Formação Social da Mente*, São Paulo: Martins Fontes.

VYGOTSKY, Lev S. 1987. *Pensamento e Linguagem*, São Paulo: Martins Fontes.

WALKERDINE, Valerie. 1988. *The mastery of reason*. London: Routledge.

WATSON, Anne, Ed. 1998. *Situated Cognition and the Learning of Mathematics*. Oxford: Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford.

WENGER, Etienne. 1998. *Communities of Practice*: *Learning, Meaning and Identity*. Cambridge: UK, Cambridge University Press.

WIGNER, E.P; HODGKIN, R.A.. 1997. "Michael Polanyi" in *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, v23, London: The Royal Society, Nov. 1977: 413-438.

WINBOURNE, Peter. 2002. Looking for learning in practice: how can this inform teaching? *Ways of Knowing Journal*, v2, n2, 3-18.

WINBOURNE, Peter; WATSON, Anne. 1998. Participating in Learning Mathematics through Shared Local Practices in Classrooms. *Situated Cognition and the Learning of*

Mathematics. Ed. by Anne Watson. Oxford: Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford. Chapter 7, 93-104.

WITTGENSTEIN, Ludwig. 1995a. *Tratado Lógico-Filosófico. Investigações Filosóficas*. Tradução de M.S. Loureiro. 2a edição revista. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

WITTGENSTEIN, Ludwig. 1995b. *Ludwig Wittgenstein – Cours sur les fondements des mathèmatiques – Cambridge, 1939.* Établis par Cora Diamond (Traduits de l'anglais par Élisabeth Rigal), Mauvezin: T.E.R.