ESTIMATIVA ÓTIMA DO SEMIGRUPO DO CALOR VIA DESIGUALDADE DE SOBOLEV LOGARÍTMICA

Ezequiel Rodrigues Barbosa

Orientador: Marcos da Silva Montenegro

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Março - 2005

NO MEIO DO CAMINHO

No meio do caminho tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
tinha uma pedra
no meio do caminho tinha uma pedra.
Nunca me esquecerei desse acontecimento
na vida de minhas retinas tão fatigadas.
Nunca me esquecerei que no meio do caminho
tinha uma pedra
tinha uma pedra no meio do caminho
no meio do caminho tinha uma pedra.

Dedico este tabalho à minha mãe, Terezinha,
aos meus irmãos Samuel e Marta,
e à minha esposa Tatiane.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me capacita, fortalece e guia.

À minha mãe e aos meus irmãos, pelos ensinamentos e incentivos que sempre me deram. Sem eles eu jamais teria conquistado esta vitória.

Ao Prof. Marcos Montenegro, pelos conhecimentos que me transmitiu. Pela dedicação, amizade e confiança. Pelo respeito e paciência que sempre teve comigo. Enfim, agradeço pela verdadeira orientação que me deu.

À minha esposa pelo amor, carinho e companheirismo. Sua presença ao meu lado foi decisiva nos momentos difíceis.

Aos professores Paulo Caetano e Grey Ércole, pelas sugestões, comentários e críticas que muito contribuiram para a qualidade deste trabalho.

Aos meus amigos de Montes Claros, dentre os quais não poderia deixar de citar Rosivaldo Gonçalves, Narciso Lisboa, Catarina Mendes, Heloísa, Glaydson e Rogério.

Ao Prof. Paulo César Carrião, pelos valiosos ensinamentos, conselhos e incentivos.

Aos professores do departamento de matemática da UFMG. Em especial aos professores Fábio Brochero, Mário Jorge, Victor Guerasimov, Suzana Fornari, Rogério Mol, Antônio Zumpano, Márcio Soares e Fernado Figueiredo.

À Sandra, pela simpatia e eficiência.

Aos colegas da pós-graduação, pelas conversas enriquecedoras.

Aos meus familiares. Mesmo que distantes, estão todos em meu coração.

Ao CNPq, pela bolsa de estudos.

Sumário

RESUMO

Neste trabalho, determinamos uma estimativa ótima do semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$ a partir da desigualdade de Sobolev logarítmica ótima, e encontramos algumas funções extremais para a melhor constante nesta estimativa. Primeiramente, determinamos a melhor constante C_0 tal que a desigualdade

$$\|u\|_r \leq C_0 \|\nabla u\|_2^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}$$

é válida para toda função $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, onde $n > 2$, $2 < q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, $r = 2(q-1)$ e $\theta = \frac{n(q-2)}{(q-1)(2n-(n-2)q)}$. Como consequência deste resultado, mostramos que para toda função $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \log |u| dx \leq \frac{n}{4} \log \left(\frac{2}{\pi n e} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right),$$

e que esta desigualdade é ótima. Como aplicação desta última, determinamos uma estimativa ótima para o semigrupo do calor. Precisamente, para toda função $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\|e^{t\triangle} u\|_p \leq (C_q C_{p'})^n (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}} \|u\|_q$$

onde $1 < q < p < \infty$, $t > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $C_p = \left(\frac{p^{1/p}}{(p')^{1/p'}} \right)^{1/2}$ e $\left(e^{t\triangle}\right)_{t \geq 1}$ é o semigrupo do calor. Além disso, a igualdade ocorre para

$$u(x) = \alpha \left(\frac{\pi q'}{tl} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{q'}{4tl}|x-\overline{x}|^2},$$

onde $\alpha > 0$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

ABSTRACT

In this work, we find an optimal estimate for the heat-diffusion semigroup on $\mathbb{R}^n$ by using the optimal logarithmic Sobolev inequality, and we also find some extremal functions for the best constant in this estimate. At first, we obtain the best constant C_0 such that for all $u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_r \leq C_0 \|\nabla u\|_2^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta},$$

where $n > 2$, $2 < q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, $r = 2(q-1)$ and $\theta = \frac{n(q-2)}{(q-1)(2n-(n-2)q)}$. Next, we prove that for any function $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ with $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \log |u| dx \leq \frac{n}{4} \log \left(\frac{2}{\pi n e} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right),$$

and that this inequality is sharp. From this last inequality, we determine an optimal estimate for the heat-diffusion semigroup. Precisely, for any function $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\|e^{t\triangle} u\|_p \leq (C_q C_{p'})^n (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}} \|u\|_q,$$

where $1 < q < p < \infty$, $t > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $C_p = \left(\frac{p^{1/p}}{(p')^{1/p'}} \right)^{1/2}$ and $\left(e^{t\triangle}\right)_{t \geq 1}$ is the heat-diffusion semigroup. Moreover, equality holds for

$$u(x) = \alpha \left(\frac{\pi q'}{tl} \right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{q'}{4tl}|x-\overline{x}|^2},$$

where $\alpha > 0$ and $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

NOTAÇÕES

A seguir e ao longo desta dissertação adotaremos as seguintes notações:

- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n), \forall i = 1, ..., n\right\}$, $p \neq n$, onde $p^* = \frac{np}{n-p}$.

- $\|u\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Sobolev com a norma $\|.\|_{W^{1,p}}$ definida por $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p$.

- $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach com a norma $\|.\|_{2,q}$ definida por $\|u\|_{2,q} = \|\nabla u\|_2 + \|u\|_q$.

- $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, para $x > 0$, é a função gama.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO E PRINCIPAIS RESULTADOS

Os espaços de Sobolev representam um papel central na teoria das equações diferenciais parciais - EDP's (veja, por exemplo, [8] e [10]). Os teoremas de imersão destes espaços em espaços de Lebesgue se traduzem em desigualdades ditas desigualdades de Sobolev. Estas desigualdades são fundamentais na aplicação da análise funcional linear e não-linear à teoria das EDP's. Elas também estão relacionadas com um grande número de outras desigualdades tais como as desigualdades de Nash, as desigualdades de Moser e as desigualdades de Sobolev logarítmicas. As primeiras idéias sobre desigualdades de Sobolev foram introduzidas por S. L. Sobolev [18] no final dos anos 30. Mais tarde outros matemáticos trabalharam neste campo, especialmente E. Gagliardo [9] e L. Nirenberg [16] nos anos 50. Estes últimos estabeleceram desigualdades mais gerais conhecidas hoje como desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev as quais estendem a desigualdade clássica de Sobolev. O estudo de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev ótimas teve início em [3] motivado pelo problema de Yamabe, famoso problema da geometria.

Posteriormente, vários trabalhos trataram desta questão tais como [4], [20] e [13]. Desigualdades de Sobolev ótimas são utilizadas em estimativas de níveis críticos de certos funcionais de energia. Uma aplicação importante das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev ótimas é uma estimativa ótima do semigrupo do calor.

1.1 Generalidades

Nesta seção, apresentamos algumas noções básicas visando uma boa compreensão desta dissertação. Destacamos, entre outras, as desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e as desigualdades de Sobolev logarítmicas. Vamos ver, através de alguns exemplos, porque é importante estudar as melhores constantes em desigualdades funcionais. Também, definimos o semigrupo gerado pelo núcleo do calor em $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Desigualdades de Sobolev

Seja $p \geq 1$. Denotemos por $L^p(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções p-integráveis munido da norma

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

em relação a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$. Uma função $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ possui uma i-ésima derivada fraca se existe uma função mensurável g_i tal que, para toda função $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g_i \varphi dx\,.$$

Quando g_i existe, g_i está unicamente determinada fora de conjuntos de medida de Lebesgue nula. Assim, denotamos $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. O espaço de Sobolev $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n) : \exists\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \forall\, i = 1, ..., n \right\},$$

onde $p \neq n$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$. O espaço de Sobolev $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma $\|.\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$, definida por

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = \|\nabla u\|_p\,,$$

é um espaço de Banach. De acordo com o teorema de imersão de Sobolev, $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ continuamente. Assim, existe uma constante positiva C tal que, para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p\,. \tag{1.1}$$

Esta desigualdade está relacionada com um grande número de outras desigualdades. Em particular, quando $p = 2$, temos a desigualdade de Nash fraca

$$\|u\|_2^{1+\frac{2}{n}} \leq C\|\nabla u\|_2\|u\|_1^{\frac{2}{n}} \tag{1.2}$$

para todo $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Para verificar (1.2) basta usar (1.1) e a desigualdade de interpolação de Hölder

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_{2^*}^{\theta}\|u\|_1^{1-\theta},$$

onde $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{2^*} + 1 - \theta$. A desigualdade (1.2) foi utilizada por J. Nash em [15] na obtenção de estimativas a priori para equações elípticas e parabólicas. Posteriormente, J. Moser [14] utilizou a desigualdade

$$\|u\|_{2(1+\frac{2}{n})}^{1+\frac{2}{n}} \leq C\|\nabla u\|_2\|u\|_2^{\frac{2}{n}} \tag{1.3}$$

que segue de (1.1) e da desigualdade de Hölder, uma vez que $2 < 2(1 + \frac{2}{n}) < 2^*$ para $n > 2$. É interessante registrar que as desigualdades (1.1) para $p = 2$, (1.2) e (1.3) são equivalentes, veja [5]. As desigualdades que focalizaremos nesta dissertação são desigualdades que estendem (1.1), (1.2) e (1.3), conhecidas como desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

1.1.2 Desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Sobolev, obtemos:

Teorema 1.1. *Sejam $1 \leq p < n$, $1 \leq s < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Existe uma constante positiva C tal que para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^s(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_s^{1-\theta}\|\nabla u\|_p^{\theta} \tag{1.4}$$

onde $\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-\theta}{s}$.

Este resultado foi demonstrado, independentemente, por E. Gagliardo e L. Nirenbeg, e usado no estudo das equações diferenciais elípticas. Observe que, quando $\theta = 1$, temos a desigualdade de Sobolev (1.1). Por isso, desigualdades do tipo (1.4) são denominadas desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Note também que (1.4) generaliza (1.2) e (1.3). Das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev derivamos as desigualdades de Sobolev logarítmicas.

1.1.3 Desigualdades de Sobolev logarítmicas

Sejam $1 \leq p < n$ e $p \leq s \leq p^*$. Da desigualdade de Hölder, segue que para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$

$$\|u\|_s \leq \|u\|_p^{\theta}\|u\|_{p^*}^{1-\theta}$$

com $\theta = \frac{p(p^*-s)}{s(p^*-p)}$. Tomando o logarítmo em ambos os lados desta desigualdade segue que

$$\log\left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_p}\right) + (\theta - 1)\log\left(\frac{\|u\|_{p^*}}{\|u\|_p}\right) \leq 0\,.$$

Defina $g(s) = \log\left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_p}\right) + (\theta - 1)\log\left(\frac{\|u\|_{p^*}}{\|u\|_p}\right)$ em $[p, p^*]$. Observando que $g(p) = 0$ e $g(s) \leq 0$, $\forall s \in [p, p^*]$, encontramos

$$\frac{d}{ds}\log\left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_p}\right)\Bigg|_{s=p} - \frac{p^*}{p(p^*-p)}\log\left(\frac{\|u\|_{p^*}}{\|u\|_p}\right) \leq 0\,.$$

Como $\frac{d}{ds}\log\left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_p}\right)\Bigg|_{s=p} = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^p}{\|u\|_p^p}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right)dx$ (veja apêndice B), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_p}\right)dx \leq \frac{p^*\|u\|_p^p}{p^*-p}\log\left(\frac{\|u\|_{p^*}}{\|u\|_p}\right) = \frac{n\|u\|_p^p}{p}\log\left(\frac{\|u\|_{p^*}}{\|u\|_p}\right).$$

Daí, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ com $\|u\|_p = 1$, temos $\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\log(|u|)\,dx \leq \frac{n}{p}\log(\|u\|_{p^*})$. Assim, da desigualdade de Sobolev, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\log(|u|)\,dx \leq \frac{n}{p^2}\log\left(C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p dx\right), \tag{1.5}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\|u\|_p = 1$. Desigualdades do tipo (1.5) são denominadas de desigualdades de Sobolev logarítmicas.

Observação 1.1. *Podemos também obter a desigualdade* (1.5) *usando as desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Basta colocar $s = p$ e fazer θ tender a zero em* (1.4).

A desigualdade de Sobolev logarítmica, publicada por L. Gross [11] em 1976 afirma que, para qualquer função $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\log|u|d\mu_n(x) \leq \|\nabla u\|^2 + \|u\|^2\log\|u\|,$$

onde $d\mu_n(x)$ é a medida Gaussiana

$$d\mu_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-|x|^2/2}dx$$

e $\|.\|$ denota a norma sobre o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_n(x))$,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n}|u|^2 d\mu_n(x).$$

Se $\|u\| = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^2\log|u|d\mu_n(x) \leq \|\nabla u\|^2.$$

Esta desigualdade tem importantes aplicações na teoria dos campos de quantum. Ela é equivalente a desigualdade (1.5) no caso $p = 2$ e $C = \frac{2}{\pi n e}$. Na mecânica estatística, por exemplo, a desigualdade de Sobolev logarítmica aparece como uma ferramenta de grande utilidade, veja [19]. Neste trabalho, vamos encontrar a melhor constante e algumas funções extremais para a desigualdade de Sobolev logarítmica (1.5) no caso $p = 2$, e usaremos estes resultados para encontrar uma estimativa ótima para o semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$. Vejamos, então, a noção de semigrupo do calor.

1.1.4 Semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$

O semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$ é a família de operadores $\left(e^{t\triangle}\right)_{t\geq 0}$ definidos da seguinte maneira:

$$\left(e^{0\triangle}u\right)(x) = u(x)$$

e

$$\left(e^{t\triangle}u\right)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)dy,\ t > 0\,.$$

Podemos verificar que o semigrupo do calor satisfaz:

a) $e^{0\triangle}u = u$;

b) $e^{(t+s)\triangle} = e^{t\triangle}\circ e^{s\triangle}$, $\forall t, s \geq 0$.

O semigrupo do calor está intimamente ligado à equação do calor

$$\begin{aligned} \partial_t u - \triangle u &= 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Precisamente, temos:

Teorema 1.2. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. *Então*

$$u(x,t) = \left(e^{t\triangle}f\right)(x)$$

satisfaz

$$\partial_t u - \triangle u = 0 \quad em\, \mathbb{R}^n \times (0, \infty)\,.$$

Se f é limitada e contínua então u é contínua sobre $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ e $u(x, 0) = f(x)$. Além disso, $u(., t)$ converge para f na norma $\|.\|_p$ quando $t \to 0$.

Neste trabalho, vamos encontrar uma estimativa ótima para o semigrupo do calor como uma aplicação de $L^q(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < q < p < \infty$.

1.1.5 Desigualdades ótimas

Muitos problemas da análise matemática têm suas origens na geometria e na física. Como um exemplo temos o importante problema de Yamabe da geometria diferencial. Yamabe procurou mostrar que sobre uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$ sempre existe uma métrica com curvatura escalar constante. Este é um problema de geometria que pode ser transformado num problema de EDP elíptica não-linear. Para solucionarmos alguns desses problemas, procuramos resolver problemas de minimização associados nos quais estão envolvidas as desigualdades de Sobolev ótimas. Assim, interessa-nos encontrar funções extremais e assim explicitar as melhores constantes para tais desigualdades. Tornemos isso mais preciso. Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma trasformação linear contínua. Assim, existe uma constante positiva C tal que

$$\|Tu\|_F \leq C\|u\|_E\,,\ \forall u \in E\,.$$

Seja C_0 a menor constante positiva tal que $\|Tu\|_F \leq C_0\|u\|_E\,,\ \forall u \in E$. Duas perguntas que surgem são as seguintes:

a) Existe $u \in E$ tal que $\|Tu\|_F = C_0\|u\|_E$?

b) Qual a forma explícita da melhor constante C_0?

A primeira questão é equivalente ao problema de minimização

$$C_1^{-1} = \inf\left\{\|u\|_E : u \in E \ e \ \|Tu\|_F = 1\right\} .$$

De fato, se este ínfimo é atingido para algum $u_1 \in E$ com $\|Tu_1\|_F = 1$, então

$$\|Tu_1\|_F = C_1\|u_1\|_E \quad \text{e} \quad C_0 = C_1.$$

Reciprocamente, se $u_1 \in E$ satisfaz $\|Tu_1\|_F = C_0\|u_1\|_E$ então

$$C_0^{-1} = \inf\left\{\|u\|_E : u \in E \ e \ \|Tu\|_F = 1\right\} .$$

No caso em que $E = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $F = L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < n$, temos

$$\|u\|_{p^*} \leq C_0\|\nabla u\|_p\,, \ \forall u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) .$$

Assim, o problema de minimização associado é

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx : u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)\, e \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx = 1\right\} .$$

Se existe $u \in E$ tal que $\|Tu\|_F = C_0\|u\|_E$, podemos responder a segunda questão colocando $C_0 = \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E}$.

As primeiras contribuições neste assunto foram dadas por T. Aubin [4] e G. Talenti [20]. Eles provaram, independentemente, o seguinte teorema:

Teorema 1.3. *Sejam* $1 \leq p < n$ *e* $p^* = \frac{np}{n-p}$. *Então:*
a) Para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{p^*} \leq K(n,p)\|\nabla u\|_p \tag{1.6}$$

$$\textit{onde} \quad K(n,p) = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(1+n-\frac{n}{p}\right)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

para $1 < p < n$, *e* $K(n,1) = \frac{(\Gamma(1+n/2))^{\frac{1}{n}}}{n\sqrt{\pi}}$.

b) $K(n,p)$ *é a melhor constante em* (1.6) *e, para* $1 < p < n$, *tem-se igualdade em* (1.6) *se, e somente se,* u *tem a forma*

$$u(x) = \left(a + b|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{n}{p}} \quad ,$$

onde a *e* b *são constantes positivas.*

Como as desigualdades de Sobolev são um caso particular das desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, é natural estudarmos as melhores constantes para as desigualdades do tipo Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

1.1.6 Organização da dissertação

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de melhores constantes de uma classe de desigualdes de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e da estimativa ótima para o semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$. Precisamente, estamos interessados em explicitar a melhor constante C_0 tal que a desigualdade

$$\|u\|_r \leq C_0 \|\nabla u\|_2^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta} \tag{1.7}$$

seja válida para toda função $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ (veja notações), onde $n > 2$, $2 < q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, $r = 2(q-1)$ e $\theta = \frac{n(q-2)}{(q-1)(2n-(n-2)q)}$.

Em 2003, Del Pino e Dolbeault [7] mostraram que as funções extremais para (1.7) são da forma

$$u(x) = \alpha\left(1 + \beta|x-\overline{x}|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, e que

$$C_0 = \left(\frac{q-2}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\theta} \left(\frac{2q}{n(q-2)}\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\delta}{2q}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)}\right)^{\frac{\theta}{n}} .$$

Como consequência deste resultado, eles mostraram que para toda função $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \log |u| dx \leq \frac{n}{4} \log \left(\frac{2}{\pi n e} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)$$

e que esta desigualdade é ótima. Como aplicação desta última desigualdade temos a estimativa ótima para o semigrupo do calor: para toda função $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\|e^{t\triangle} u\|_p \leq (C_q C_{p'})^n (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}} \|u\|_q$$

onde $1 < q < p < \infty$, $t > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $C_p = \left(\frac{p^{1/p}}{(p')^{1/p'}} \right)^{1/2}$ e $\left(e^{t\triangle}\right)_{t \geq 1}$ é o semigrupo do calor.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira:

No capítulo 2, vamos encontrar as constantes ótimas de uma família de desigualdades de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev que interpola de maneira ótima a desigualdade clássica de Sobolev e a desigualdade de Sobolev logarítmica. Para isso vamos definir um funcional J no espaço $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ o qual assume um mínimo sobre um conjunto admissível escolhido apropriadamente e usaremos métodos variacionais e concentração de compacidade para encontrarmos funções extremais. Finalizamos este capítulo explicitando a melhor constante usando as propriedades da função Gama.

No capítulo 3, faremos algumas aplicações do resultado demonstrado no capítulo 2. Encontraremos funções extremais para a desigualdade logarítmica de Sobolev e apresentaremos uma estimativa ótima para o semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$.

No apêndice A, apresentamos alguns resultados sobre simetrização de Schwarz. Usando a simetrização de Schwarz mostramos que o mínimo do funcional J é uma função radialmente simétrica e não-crescente.

Finalmente, demonstramos no apêndice B uma fórmula de diferenciação muito usada no Capítulo 3.

Capítulo 2

DESIGUALDADE DE GAGLIARDO-NIRENBERG-SOBOLEV ÓTIMA

Neste capítulo, estabeleceremos a validade de uma família de desigualdades ótimas de Gagliardo-Nirenbeg-Sobolev. Para isto, utilizaremos métodos variacionais, simetrização de Schwarz, unicidade de soluções radiais para equações quasilineares e um importante lema de concentração de compacidade devido a Strauss.

Denotemos por $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, $q > 1$, o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ munido da norma $\|.\|_{2,q}$ definida por $\|u\|_{2,q} = \|\nabla u\|_2 + \|u\|_q$. Este espaço é um espaço de Banach reflexivo. De fato, seja $n > 2$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$. O espaço

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

com o produto interno

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u . \nabla v dx$$

e a norma correspondente

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert. Sendo $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo. Assim, notando que $T : \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) \times L^q(\mathbb{R}^n)$ dada por $T(u) = (u, u)$ é uma isometria de $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ sobre $T(\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n))$, temos que $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo.

Observação 2.1. *Seja $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Então $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [2, 2^*]$. De fato, se $q \in [2, 2^*]$ então*

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{W^{1,2}}, \ \forall u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \, .$$

Assim, existe uma sequência $(u_k)_{k \geq 1}$ em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u_k - u\|_2 \to 0 \, , \ \|\nabla u_k - \nabla u\|_2 \to 0 \ e \ \|u_k - u\|_q \to 0 \, .$$

Donde, $\|u_k - u\|_{2,q} \to 0$ e, consequentemente, $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2.1. *Sejam $n > 2$ e $2 < q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$. Então para todo $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, tem-se*

$$\|u\|_r \leq C(n,q) \|\nabla u\|_2^\theta \|u\|_q^{1-\theta} \tag{2.1}$$

onde $r = 2(q-1)$ e $\theta = \frac{n(q-2)}{(q-1)(2n-(n-2)q)}$. Além disso, colocando $\delta = 2n - q(n-2) > 0$, a constante ótima $C(n,q)$ tem a forma explícita

$$C(n,q) = \left(\frac{q-2}{2\sqrt{\pi}} \right)^\theta \left(\frac{2q}{n(q-2)} \right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\delta}{2q} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)} \right)^{\frac{\theta}{n}}$$

e, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \alpha \left(1 + \beta |x - \overline{x}|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}$$

é função extremal.

Observe que quando $q = \frac{2(n-1)}{n-2}$ temos $\theta = 1$, $r = \frac{2n}{n-2} = 2^*$ e, de (2.1), obtemos a desigualdade clássica de Sobolev na sua forma ótima com a sua constante ótima $C(n,q) = K(n,2)$. Sendo assim, assumiremos na demosntração deste teorema que $q < \frac{2(n-1)}{n-2}$. A demonstração do Teorema 2.1 depende de dois lemas essenciais:

Lema 2.1 (lema de compacidade - Strauss). *Seja $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sequência limitada em $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < q < \infty$. Sejam $r \in (p,q)$ e $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_K |u_k - u|^r dx = 0$$

para qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que

$$\lim_{|x|\to\infty} (u_k - u)(x) = 0\,, \quad \textit{uniformemente em relação a } k\,. \tag{2.2}$$

Então $(u_k)_{k\geq 1}$ converge fortemente para u em $L^r(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração do Lema 2.1

Primeiramente, observe que

$$\lim_{s\to 0} \frac{|s|^r}{|s|^p + |s|^q} = 0\,.$$

Daí e da condição (2.2), dado $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$|u_k - u|^r \leq \epsilon\left(|u_k - u|^p + |u_k - u|^q\right)\,,\ \forall\, |x| > R_0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Donde

$$\int_{|x|>R_0} |u_k - u|^r dx \leq \epsilon\, C\,.$$

Por outro lado, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{|x|\leq R_0} |u_k - u|^r dx < \epsilon, \ \forall\, k \geq k_0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|^r dx < \epsilon + \epsilon\, C, \ \forall\, k \geq k_0.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u|^r dx = 0\,. \qquad \square$$

Sejam $n > 2$, $2 < q < 2\frac{n-1}{n-2}$ e $r = 2(q-1)$.

Lema 2.2. *Considere o funcional J definido em $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\ .$$

Dado $c > 0$, defina $c^* = \inf_{u \in M_c} J(u)$, onde

$$M_c = \left\{ u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx = c \right\}.$$

Então existe uma função não-negativa e radialmente simétrica $\overline{u} \in M_c$ tal que $J(\overline{u}) = c^* > 0$.

Demonstração do Lema 2.2

Seja $u \in M_c$. Então $u \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. Como $2 < q < 2\frac{n-1}{n-2}$ e $r = 2(q-1)$, temos que $q < r < 2^*$. Pela desigualdade de interpolação de Hölder[1],

$$\|u\|_r \leq \|u\|_q^{1-\theta}\|u\|_{2^*}^{\theta}\,,$$

[1] Seja $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r \in [p, q]$ e

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta},$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

onde $\theta = \frac{2^*}{r}\left(\frac{r-q}{2^*-q}\right)$. Assim, da desigualdade de Sobolev, temos

$$\|u\|_r \leq \|u\|_q^{1-\theta} C_1 \|\nabla u\|_2^{\theta}\,.$$

Tomando $s = \frac{2q}{2+\theta(q-2)}$, temos que

$$1 = \frac{s(1-\theta)}{q} + \frac{s\theta}{2}$$

e da desigualdade de Young[2], segue que

$$\frac{c^{s/r}}{sC_1^s} = \frac{\|u\|_r^s}{sC_1^s} \leq \frac{1-\theta}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx + \frac{\theta}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \leq J(u)\,,\ \forall u \in M_c\,.$$

Portanto, $c^* > 0$. Seja, agora, $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sequência minimizante para J em M_c, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = c^*.$$

Observe que $(|u_k|)_{k\geq 1}$ também é uma sequência minimizante para J em M_c. Seja $v_k = (|u_k|)^*$ o rearranjamento de $|u_k|$ (veja apêndice A). Temos, pelos Teoremas A1 e A3, que $v_k \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^r dx = c$ e

$$c^* \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^2 dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^q dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^q dx\,, \forall k \geq 1.$$

Logo, $(v_k)_{\geq 1}$ é uma sequência de funções não-negativas, radialmente simétricas e não-crescentes tal que

$$\lim_{k\to\infty} J(v_k) = c^*.$$

Pelo fato de $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ ser reflexivo, podemos assumir (passando a uma subsequência se necessário) que a sequência $(v_k)_{k\geq 1}$ converge fracamente para algum $\overline{u}$ em $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$. Da semicontinuidade inferior de J temos que

$$J(\overline{u}) \leq \liminf J(v_k) = c^*.$$

[2] Seja $1 < p < \infty$. Denotamos por p' o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Assim,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

para quaisquer $a, b \geq 0$.

Observando que a inclusão $\mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$ é contínua, podemos concluir que $(v_k)_{k\geq 1}$ converge fracamente para $\overline{u}$ em $L^r(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (veja [6]), temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_K |v_k - \overline{u}|^r dx = 0$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Temos, também, pelo Teorema A.4 do Apêndice A, que

$$(v_k - \overline{u})(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to +\infty,$$

uniformemente em relação à k. Assim, pelo Lema 2.1, $v_k \to \overline{u}$ em $L^r(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\overline{u} \in M_c$ e, consequentemente,

$$J(\overline{u}) = c^* . \qquad \square$$

Demonstração do Teorema 2.1

Para demonstrar o Teorema 2.1, utilizaremos o Lema 2.2 para uma escolha especial de c. Seja $\overline{u}$ o minimizador de J em M_c, dado pelo Lema 2.2. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange (veja [1]), existe $\lambda > 0$ tal que $\overline{u}$ satisfaz a equação

$$-\Delta\overline{u} + \overline{u}^{q-1} - \lambda\overline{u}^{r-1} = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n . \tag{2.3}$$

Assim, da teoria de regularidade elíptica, temos $\overline{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Do princípio do máximo forte, temos que $\overline{u} > 0$ em $\mathbb{R}^n$. Multiplicando $\lambda^{\frac{q-1}{r-q}}$ em ambos os lados de (2.3), obtemos

$$-\Delta w + w^{q-1} - w^{r-1} = 0,$$

onde $w(x) = \lambda^{\frac{1}{r-q}}\overline{u}\left(\lambda^{\frac{q-2}{2(r-q)}}x\right)$. Assim, w é uma solução radial positiva da equação elíptica quasilinear

$$-\Delta u + u^{q-1} - u^{r-1} = 0 \quad em \quad \mathbb{R}^n . \tag{2.4}$$

Mas a equação (2.4) tem uma solução explícita dada por

$$w_*(x) = \alpha \left(1 + \beta|x|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}$$

com

$$\alpha = \left(\frac{2(q-1)}{2(n-1) - q(n-2)}\right)^{\frac{1}{q-2}} \quad \text{e} \quad \beta = (q-1)\left(\frac{q-2}{2(n-1) - q(n-2)}\right)^2 .$$

Verifiquemos isto. Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned} -\triangle w_* &= \frac{2\alpha\beta}{q-2}\left(1+\beta|x|^2\right)^{\frac{1-q}{q-2}} + \frac{4\alpha\beta^2(1-q)}{(q-2)^2}|x|^2\left(1+\beta|x|^2\right)^{\frac{3-2q}{q-2}} \\ &= \frac{2\alpha\beta}{q-2}\left(n\left(1+\beta|x|^2\right)^{\frac{1-q}{q-2}} + \frac{2\beta|x|^2(1-q)}{q-2}\left(1+\beta|x|^2\right)^{\frac{3-2q}{q-2}}\right) . \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha\beta}{q-2} &= \left(\frac{2^{\frac{q-1}{q-2}}(q-1)(q-2)}{(2(n-1)-(n-2)q)^2}\right)\left(\frac{(q-1)^{\frac{1}{q-2}}}{(2(n-1)-(n-2)q)^{\frac{1}{q-2}}}\right) \\ &= \frac{2^{\frac{q-1}{q-2}}(q-1)^{\frac{q-1}{q-2}}(q-2)}{(2(n-1)-(n-2)q)^{\frac{2q-3}{q-2}}} \\ &= \frac{q-2}{(2(n-1)-(n-2)q)}\left[\left(\frac{2(q-1)}{2(n-1)-(n-2)q}\right)^{\frac{1}{q-2}}\right]^{q-1} \\ &= \alpha^{q-1}\frac{q-2}{2(n-1)-(n-2)q} , \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} -\triangle w_* &= w_*^{q-1}\frac{n(q-2)}{2(n-1)-(n-2)q} + \alpha^{q-1}\frac{2\beta|x|^2(1-q)}{2(n-1)-(n-2)q}\left(1+\beta|x|^2\right)^{\frac{3-2q}{q-2}} \\ &+ w_*^{q-1}\frac{2(q-1)}{2(n-1)-(n-2)q} - w_*^{q-1}\frac{2(q-1)}{2(n-1)-(n-2)q} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\triangle w_* &= -w_*^{q-1} + w_*^{q-1}\frac{2\beta|x|^2(1-q)}{2(n-1)-(n-2)q}\left(1+\beta|x|^2\right)^{-1} - w_*^{q-1}\frac{2(1-q)}{2(n-1)-(n-2)q} \\ &= -w_*^{q-1} - w_*^{q-1}\frac{2(1-q)}{2(n-1)-(n-2)q}\left(\frac{\beta|x|^2}{1+\beta|x|^2} - 1\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -w_*^{q-1} - w_*^{q-1}\frac{2(1-q)}{2(n-1)-(n-2)q}\left(1+\beta|x|^2\right)^{-1} \\
&= -w_*^{q-1} + w_*^{q-1}\frac{2(q-1)}{2(n-1)-(n-2)q}\left(1+\beta|x|^2\right)^{-1} \\
&= -w_*^{q-1} + w_*^{r-1}\,.
\end{aligned}
$$

Assim, w_* é solução da equação (2.4). Como a solução radial positiva da equação (2.4) é única (veja [17]), temos

$$
\begin{aligned}
w_*(x) &= w(x) \\
&= \lambda^{\frac{1}{r-q}}\overline{u}\left(\lambda^{\frac{q-2}{2(r-q)}}x\right)\,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\overline{u}(x) = \lambda^{-\frac{1}{r-q}}w_*\left(\lambda^{-\frac{(q-2)}{2(r-q)}}x\right).
$$

Veja que

$$
c = \int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}^r dx = \int_{\mathbb{R}^n}\lambda^{-\frac{r}{r-q}}w_*\left(\lambda^{-\frac{q-2}{2(r-q)}}x\right)^r dx = \lambda^{\frac{n(q-2)}{2(r-q)}-\frac{r}{r-q}}\int_{\mathbb{R}^n}w_*(x)^r dx.
$$

Neste ponto fazemos uma escolha conveniente de c na definição de M_c:

$$
c = \int_{\mathbb{R}^n}w_*(x)^r dx > 0.
$$

Assim, temos que $\lambda = 1$ e, consequentemente, $\overline{u}(x) = w_*(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Donde

$$
J(w_*) \leq J(u)\,,\ \forall\, u \in M_k.
$$

Seja $u \in M_c$. Defina, para $\lambda > 0$, $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{r}}u(\lambda x)$. Como

$$
\int_{\mathbb{R}^n}|u_\lambda|^r dx = \int_{\mathbb{R}^n}|u|^r dx = c\,,
$$

temos $u_\lambda \in M_c$. Daí, $J(w_*) \leq J(u_\lambda)$, isto é,

$$
J(w_*) \leq \lambda^{\frac{n-2}{r}\left(\frac{2n}{n-2}-r\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla u|^2}{2}dx + \lambda^{-n\left(1-\frac{q}{r}\right)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^q}{q}dx, \quad \forall\lambda > 0\,.
$$

Considere a função $f(\lambda) = a\lambda^{k_1} + b\lambda^{-k_2}$ com

$$a = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{2} \quad , \quad b = \frac{\|u\|_q^q}{q}$$

$$k_1 = \frac{n-2}{r}\left(\frac{2n}{n-2} - r\right) \quad \text{e} \quad k_2 = n\left(1 - \frac{q}{r}\right).$$

Minimizando f em $\lambda > 0$ (usando as derivadas da função f), obtemos

$$J(w_*) \leq C_0\left(\|u\|_q^{1-\theta}\|\nabla u\|_2^{\theta}\right)^{\overline{\delta}},$$

onde

$$C_0 = \frac{1}{2}\lambda_*^{\frac{2n(2-q)+2}{n(2-q)+4(q-1)}} + \frac{1}{q}\lambda_*^{\frac{n(2-q)}{n(2-q)+4(q-1)}}, \quad \lambda_* = \frac{n(q-2)}{q(n(2-q)+(q-1)2)},$$

$$\theta = \frac{n(q-2)}{(q-1)(2n-(n-2)q)} \quad \text{e} \quad \overline{\delta} = \frac{2(q-1)(2n-(n-2)q)}{2n-q(n-2)+2(q-2)}.$$

Assim,

$$\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta} \geq \left(\frac{J(w_*)}{C_0}\right)^{\frac{1}{\overline{\delta}}}\frac{\|u\|_r}{c^{\frac{1}{r}}}, \ \forall u \in M_c.$$

Donde

$$\|u\|_r \leq c^{\frac{1}{r}}\left(\frac{C_0}{J(w_*)}\right)^{\frac{1}{\overline{\delta}}}\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta},$$

e temos igualdade quando $u = w_*$.

Dado $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$, $u \neq 0$, tem-se $\frac{c^{\frac{1}{r}}}{\|u\|_r}u \in M_c$. Daí,

$$\frac{c^{\frac{1}{r}}}{\|u\|_r}\|u\|_r \leq C(n,q)\left(\frac{c^{\frac{1}{r}}}{\|u\|_r}\right)^{\theta}\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta}\left(\frac{c^{\frac{1}{r}}}{\|u\|_r}\right)^{1-\theta}$$

implica

$$\|u\|_r \leq C(n,q)\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta}.$$

Portanto, temos que

$$\|u\|_r \leq C(n,q)\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta}, \forall u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n),$$

onde $C(n,q)$ é a constante ótima

$$C(n,q) = c^{\frac{1}{r}} \left(\frac{C_0}{J(w_*)} \right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Como $\|w_*\|_r = C(n,q)\|\nabla w_*\|_2^{\theta}\|w_*\|_q^{1-\theta}$, podemos calcular $C(n,q)$ diretamente. De fato, observe que para quaisquer constantes α, $\beta > 0$, a função

$$\overline{w}_{\alpha,\beta}(x) = \alpha \left(1 + \beta|x|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}$$

satisfaz

$$\frac{\|\overline{w}_{\alpha,\beta}\|_r}{\|\nabla\overline{w}_{\alpha,\beta}\|_2^{\theta}\|\overline{w}_{\alpha,\beta}\|_q^{1-\theta}} = \frac{\|w_*\|_r}{\|\nabla w_*\|_2^{\theta}\|w_*\|_q^{1-\theta}}$$

pois a desigualdade (2.1) é invariante por dilatação, homotetia e translação. Desta maneira, fazendo $\alpha = \beta = 1$, temos

$$C(n,q) = \frac{\|\overline{w}_{1,1}\|_r}{\|\nabla\overline{w}_{1,1}\|_2^{\theta}\|\overline{w}_{1,1}\|_q^{1-\theta}}.$$

Calculemos algumas integrais :

a)

$$\begin{aligned} \|\overline{w}_{1,1}\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}}dx &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B[0,t]} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}} dS \right) dt \\ &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}}dt \\ &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{n-2}{2}}}{(1+u)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}}du \\ &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2(q-1)}{q-2} - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2(q-1)}{q-2}\right)} \\ &= \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\delta}{2q} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)}; \end{aligned}$$

b)

$$\|\overline{w}_{1,1}\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{q}{q-2}}}dx = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{n-2}{2}}}{(1+u)^{\frac{q}{q-2}}}du$$

$$= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{q-2}-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)}$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)};$$

c)

$$\begin{aligned}
\|\nabla \overline{w}_{1,1}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}} dx &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^\infty \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}} dt \\
&= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{n}{2}}}{(1+u)^{\frac{2(q-1)}{q-2}}} du \\
&= \frac{n(q-2)\pi^{\frac{n}{2}}}{2q} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)};
\end{aligned}$$

onde $\delta = 2n - q(n-2)$ e Γ é a função Gama (veja [2] para propriedades da função Gama). Usando a relação $\frac{1}{r} - \frac{1-\theta}{q} - \frac{\theta}{2} = -\frac{\theta}{n}$ e os cálculos das integrais em a), b) e c), encontramos

$$C(n,q) = \left(\frac{q-2}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\theta} \left(\frac{2q}{n(q-2)}\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{\delta}{2q}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{q}{q-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2(q-2)}\right)}\right)^{\frac{\theta}{n}}. \qquad \square$$

Observação 2.2. *Vimos, na demonstração do Teorema 2.1, que as funções da forma*

$$u(x) = \alpha\left(1+\beta|x-\overline{x}|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

são funções extremais para a constante ótima $C(n,q)$. Podemos mostrar, também, que se uma função $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ é extremal para $C(n,q)$, então para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, algum $\beta > 0$ e algum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \alpha\left(1+\beta|x-\overline{x}|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

veja os detalhes em [7].

Capítulo 3

DEMONSTRAÇÃO DOS PRINCIPAIS RESULTADOS

3.1 Desigualdade de Sobolev logarítmica ótima

Usando o Teorema 2.1, vamos mostrar que quando q se aproxima de 2, a desigualdade limite é a desigualdade de Sobolev logarítmica na sua forma ótima.

Teorema 3.1. *Seja* $n > 2$. *Então, para qualquer* $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \log |u| dx \leq \frac{n}{4} \log \left(\frac{2}{\pi n e} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right). \tag{3.1}$$

A desigualdade (3.1) *é ótima e, para* $\sigma > 0$ *e* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$u(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \sigma^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

é função extremal.

Demonstração do Teorema 3.1

Seja $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$. Então $u \in \mathcal{D}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $q \in [2\,, 2^*]$. Pelo Teorema 2.1, temos

$$\|u\|_r \leq C(n,q)\|\nabla u\|_2^{\theta}\|u\|_q^{1-\theta},$$

onde $2 < q \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$ e $r = 2(q-1)$. Daí

$$\log\|u\|_r \leq \log\left(\|\nabla u\|_2^{\theta}\right) + \log\left(C(n,q)\|u\|_q^{1-\theta}\right)$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) - \frac{1}{\theta}\log C(n,q) \leq \log\left(\frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_q}\right). \tag{3.2}$$

Notando que

$$\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) = \frac{(q-1)(2n-(n-2)q)}{n(q-2)}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right),$$

temos

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) = \frac{4}{n}\left(\frac{d}{dq}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right)\Big|_{q=2}\right).$$

Do Teorema B.4 e da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dq}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right)\Big|_{q=2} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{\|u\|_2^2}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_2}\right)dx\,.$$

Donde

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|u\|_r}{\|u\|_q}\right) = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{\|u\|_2^2}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_2}\right)dx\,.$$

Assim, de (3.2) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{\|u\|_2^2}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_2}\right)dx - \lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log C(n,q) \leq \log\left(\frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}\right). \tag{3.3}$$

Vamos, agora, calcular $\lim\limits_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log C(n,q)$.

Escolha, para $C(n,q)$, a função extremal

$$w_q(x) = \left(1 + (q-2)|x|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}}\,.$$

Colocando $q-2=\frac{1}{k}$ temos

$$\lim_{q\downarrow 2}\left(1+(q-2)|x|^2\right)^{-\frac{1}{q-2}} = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{|x|^2}{k}\right)^{-k} = e^{-|x|^2},$$

pois $\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{y}{k}\right)^k = e^y$. Considere a função $w(x)=e^{-|x|^2}$. Sendo w_q uma função extremal para $C(n,q)$, temos

$$\frac{1}{\theta}\log C(n,q) = -\log\left(\frac{\|\nabla w_q\|_2}{\|w_q\|_q}\right)+\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)$$

ou seja

$$\frac{1}{\theta}\log C(n,q) = -\log\left(\frac{\|\nabla w_q\|_2}{\|w_q\|_q}\right)+\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)+\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right)-\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log C(n,q) &= -\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right)+\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)+\\ &+\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right)-\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right),\end{aligned}$$

já que

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|\nabla w_q\|_2}{\|w_q\|_q}\right) = \log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right).$$

Como $\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right) = \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|w|^2}{\|w\|_2^2}\log\left(\frac{|w|}{\|w\|_2}\right)dx$, encontramos

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log C(n,q) = -\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|w|^2}{\|w\|_2^2}\log\left(\frac{|w|^2}{\|w\|_2^2}\right)dx+4Q$$

onde $Q=\left(\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)-\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right)\right)$.
Note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right) &= \frac{1}{2(q-2)}\log\left(\frac{\|w_q\|_r^r\|w_q\|_r^{2-r}}{\|w_q\|_q^q\|w_q\|_q^{2-q}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\|w_q\|_q\|w_q\|_r^{-2}\right)+\frac{1}{2(q-2)}\log\left(\frac{\|w_q\|_r^r}{\|w_q\|_q^q}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|w\|_2}\right)+ \tag{3.4}$$
$$+\quad \frac{1}{2}\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\left[\log\left(\|w_q\|_r^r\right)-\log\left(\|w_q\|_q^q\right)\right].$$

Usando o Teorema B.5 e a regra da cadeia, encontramos

$$\begin{aligned}\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\left[\log\left(\|w_q\|_r^r\right)-\log\left(\|w_q\|_q^q\right)\right] &= \frac{d}{dq}\left[r\log\left(\|w_q\|_r\right)-q\log\left(\|w_q\|_q\right)\right]\Big|_{q=2}\\ &= \frac{1}{\|w\|_2^2}\int_{\mathbb{R}^n}|w|^2\log|w|dx.\end{aligned}$$

Portanto, (3.4) se reduz à

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w_q\|_r}{\|w_q\|_q}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{2\|w\|_2^2}\int_{\mathbb{R}^n}|w|^2\log|w|dx.$$

Também temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right) &= \frac{1}{2(q-2)}\log\left(\frac{\|w\|_r^r\|w\|_r^{2-r}}{\|w\|_q^q\|w\|_q^{2-q}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\|w\|_q\|w\|_r^{-2}\right)+\frac{1}{2(q-2)}\left[\log\left(\|w\|_r^r\right)-\log\left(\|w\|_q^q\right)\right]\end{aligned}$$

e, daí,

$$\begin{aligned}\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\log\left(\frac{\|w\|_r}{\|w\|_q}\right) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{q-2}\left[\log\left(\|w\|_r^r\right)-\log\left(\|w\|_q^q\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dq}\left[r\log\left(\|w\|_r\right)-q\log\left(\|w\|_q\right)\right]\Big|_{q=2}\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{2\|w\|_2^2}\int_{\mathbb{R}^n}|w|^2\log|w|dx.\end{aligned}$$

Portanto, $Q=0$ e

$$\lim_{q\downarrow 2}\frac{1}{\theta}\log C(n,q)=-\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right)+\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\log\left(\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\right)dx.$$

Observe que

$$\|\nabla w\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^n}4|x|^2e^{-2|x|^2}dx \quad \text{e} \quad \|w\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2|x|^2}dx\,.$$

Assim, usando que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx = \pi^{\frac{n}{2}}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2}dx = \frac{n}{2}\pi^{\frac{n}{2}}$, tem-se $\frac{\|w\|_2^2}{\|\nabla w\|_2^2} = \frac{1}{n}$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\|w\|_2^2} \log\left(\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \log\left(\frac{e^{-2|x|^2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-2|x|^2 w^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} dx - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \log\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx \\
&= -\frac{n}{2} - \frac{\log\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2|x|^2} dx \\
&= -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\log\left(\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
-\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2^2}{\|w\|_2^2}\right) + \frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\|w\|_2^2} \log\left(\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\right) dx &= \log\left(\frac{1}{n} e^{-1-\log\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) \\
&= \log\left(\frac{2}{\pi n e}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{q \downarrow 2} \frac{1}{\theta} \log C(n,q) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\right).$$

Desta forma, a desigualdade (3.3) é

$$\frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{\|u\|_2^2} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_2}\right) dx - \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\right) \le \log\left(\frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}\right).$$

Portanto, para qualquer função $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$,

$$\frac{2}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \log|u| dx \le \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\right) + \log\|\nabla u\|_2 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right).$$

Finalizando, sejam $\sigma > 0$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Escolha para $C(n,q)$ a função extremal

$$w_q(x) = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{n/2} \left(1 + (q-2)\frac{|x-\overline{x}|^2}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{q-2}}.$$

Usando que $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{y}{k}\right)^k = e^y$ encontramos que

$$\lim_{q\downarrow 2} w_q(x) = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^2}.$$

Coloque $w(x) = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^2}$. Como w_q é uma função extremal para $C(n,q)$,

$$\lim_{q \downarrow 2} \frac{1}{\theta} \log C(n,q) = -\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right) + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\|w\|_2^2} \log\left(\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\right) dx\,.$$

Mas, vimos que $\lim\limits_{q \downarrow 2} \frac{1}{\theta} \log C(n,q) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\right)$. Daí,

$$-\log\left(\frac{\|\nabla w\|_2}{\|w\|_2}\right) + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{w^2}{\|w\|_2^2} \log\left(\frac{w^2}{\|w\|_2^2}\right) dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\right),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w|^2 \log|w| dx = \frac{n}{4}\log\left(\frac{2}{\pi n e}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w|^2 dx\right). \qquad \square$$

Assim, a desigualdade (3.1) é ótima.

Observação 3.1. *Vimos, na demonstração do Teorema 3.1, que as funções da forma*

$$u(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \sigma^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

são funções extremais para a melhor constante $\frac{2}{\pi n e}$. Por outro lado, pode-se mostrar que se uma função $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ com $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1$ é função extremal para $\frac{2}{\pi n e}$ então, para algum $\sigma > 0$ e algum $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$u(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \sigma^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{\sigma}|x-\overline{x}|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Veja M. Del Pino e J. Dolbeault [7].

3.2 Estimativa ótima para o semigrupo do calor em $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, vamos estudar a conexão entre a desigualdade logarítmica de Sobolev e o controle da norma do semigrupo do calor.

Teorema 3.2. *Sejam $n > 2$ e $1 < q < \infty$. Então, para todo $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|e^{t\triangle}u\|_p \leq (C_q C_{p'})^n (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}} \|u\|_q$$

onde $1 < q < p < \infty$, $t > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $C_p = \left(\frac{p^{1/p}}{(p')^{1/p'}}\right)^{1/2}$ e $\left(e^{t\triangle}\right)_{t\geq 1}$ é o semigrupo do calor. Além disso, a constante $(C_q C_{p'})^n (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}}$ é ótima e, para $\alpha > 0$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, a função $u(x) = \alpha (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sigma}{4}|x-\overline{x}|^2}$, com $\sigma = \frac{q'}{tl}$, é uma função extremal.

Vamos, primeiramente, utilizar a desigualdade de Sobolev logarítmica para estabelecermos um lema que será usado na demonstração do teorema 3.2.

Lema 3.1. *Sejam $n > 2$ e $1 < q < \infty$. Então, para todo $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ tal que $u \geq 0$,*

$$(3.5) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^q}{\|u\|_q^q} \log|u| dx \leq \frac{n}{2q} \log\left(\frac{q^2}{2\pi n e(q-1)} \frac{\langle -\triangle u, u^{q-1}\rangle}{\|u\|_q^q}\right) + \log\|u\|_q$$

onde $\triangle$ é o operador laplaciano e $\langle -\triangle u, u^{q-1}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(-\triangle u)u^{q-1}dx$.

Demonstração do Lema 3.1

Seja $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ tal que $u \geq 0$. Assim, $u^{\frac{q}{2}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ e $u^{\frac{q}{2}} \geq 0$ pois $u^{\frac{q}{2}}$ é a composição de duas funções $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $u^{\frac{q}{2}}(x) = 0$ se, e somente se, $u(x) = 0$. Pelo Teorema 3.1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(u^{q/2}\right)^2}{\|u^{q/2}\|_2^2} \log\left(u^{q/2}\right) dx \leq \frac{n}{4} \log\left(\frac{2}{\pi n e} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^{q/2}|^2 dx}{\|u^{q/2}\|_2^2}\right) + \log\left(\|u^{q/2}\|_2\right).$$

Como $\log\left(\|u^{q/2}\|_2\right) = \frac{q}{2}\log\left(\|u\|_q\right)$, $\|u^{q/2}\|_2^2 = \|u\|_q^q$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^{q/2}|^2 dx = \frac{q^2}{4(q-1)} \int_{\mathbb{R}^n}(-\triangle u)u^{q-1}dx = \frac{q^2}{4(q-1)}\langle -\triangle u, u^{q-1}\rangle$, temos a seguinte desigualdade

$$\frac{q}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^q}{\|u\|_q^q} \log|u| dx \leq \frac{n}{4} \log\left(\frac{q^2}{2\pi n e(q-1)} \frac{\langle -\triangle u, u^{q-1}\rangle}{\|u\|_q^q}\right) + \frac{q}{2}\log\|u\|_q,$$

a qual implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^q}{\|u\|_q^q} \log|u| dx \leq \frac{n}{2q} \log\left(\frac{q^2}{2\pi n e(q-1)} \frac{\langle -\triangle u, u^{q-1}\rangle}{\|u\|_q^q}\right) + \log\|u\|_q. \qquad \square$$

Observação 3.2. *Se* $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $u \geq 0$, *então* $e^{t\triangle}u$ *satisfaz a desigualdade* (3.5). *De fato, seja* $(\rho_k)_{k\geq 1}$ *uma sequência de funções em* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ *satsfazendo:*

a) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k(x) = 1$ *se* $|x| \leq k$;

b) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k(x) = 0$ *se* $|x| \geq k+1$;

c) $(|\nabla\rho_k|)_{k\geq 1}$ *e* $(|\triangle\rho_k|)_{k\geq 1}$ *são sequências uniformimente limitadas em* k *e* x.

Como $e^{t\triangle}u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ *e* $e^{t\triangle}u \geq 0$ *(pois* $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ *e* $u \geq 0$*), temos que* $\rho_k e^{t\triangle}u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. *Assim, colocando* $\rho_k e^{t\triangle}u$ *no lugar de* u *em* (3.5) *e fazendo* $k \to \infty$, *obtemos o resultado desejado.*

Demonstração do Teorema 3.2

Sejam $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ com $u \geq 0$, $1 < q < p < \infty$ e $T > 0$. Sejam I um intervalo aberto tal que $[0,T] \subset I$ e $\sigma : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ com $\sigma(0) = q$, $\sigma(T) = p$ e $\frac{d\sigma}{dt} > 0$ em $[0,T]$ (uma escolha explícita de σ será feita mais tarde). Pelo Teorema B.5 e propriedades de semigrupo segue que $\|e^{t\triangle}u\|_{\sigma(t)}$ é continuamente diferenciável sobre $[0,T]$ e

$$\frac{d}{dt}\log\left(\|e^{t\triangle}u\|_{\sigma(t)}\right) = \frac{\left\langle \left(\triangle e^{t\triangle}u\right), \left(e^{t\triangle}u\right)^{\sigma(t)-1}\right\rangle}{\|e^{t\triangle}u\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \tag{3.6}$$
$$+ \quad \frac{1}{\sigma(t)}\frac{d\sigma(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial s}\log\left(\|e^{t\triangle}u\|_s^s\right)\Bigg|_{s=\sigma(t)} - \log\left(\|e^{t\triangle}u\|_{\sigma(t)}\right)\right).$$

Temos, pelo Lema 3.1 e observação 3.2, que (3.5) é satisfeita quando substituimos q por $\sigma(t)$ e u por $e^{t\triangle}u$, $\forall t \in [0,T]$. Coloque $e^{t\triangle}u = u_1$. Considere, agora, a seguinte função definida em $(0,\infty)$

$$g(\gamma) = \frac{\sigma(t)}{\gamma}\frac{\langle -\triangle u_1, u_1^{\sigma(t)-1}\rangle}{\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} + (n/2\sigma(t))\log\left(\frac{\gamma}{4\pi e^2(\sigma(t)-1)}\right) + \log\left(\|u_1\|_{\sigma(t)}\right).$$

Minimizando g obtemos que

$$\gamma_0 = \frac{2\sigma(t)^2\langle -\triangle u_1, u_1^{\sigma(t)-1}\rangle}{n\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}}$$

é o mínimo absoluto de g e

$$g(\gamma_0) = \frac{n}{2\sigma(t)} \log \left(\frac{\sigma(t)^2}{2\pi n e(\sigma(t)-1)} \frac{\langle -\triangle u_1, u_1^{\sigma(t)-1} \rangle}{\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \right) + \log \|u_1\|_{\sigma(t)} .$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_1|^{\sigma(t)}}{\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \log |u_1| dx \leq \frac{n}{2\sigma(t)} \log \left(\frac{\sigma(t)^2}{2\pi n e(\sigma(t)-1)} \frac{\langle -\triangle u_1, u_1^{\sigma(t)-1} \rangle}{\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \right) + \log \|u_1\|_{\sigma(t)} ,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u_1|^{\sigma(t)}}{\|u_1\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \log |u_1| dx \leq g(\gamma) , \quad \forall \gamma > 0 .$$

Em particular, para todo $t \in [0, T]$,

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \left(\|e^{t\triangle} u\|_s^s \right) \Big|_{s=\sigma(t)} \leq g \left(\frac{d\sigma(t)}{dt} \right) ,$$

já que

$$\frac{\partial}{\partial s} \log \left(\|e^{t\triangle} u\|_s^s \right) \Big|_{s=\sigma(t)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{t\triangle} u|^{\sigma(t)}}{\|e^{t\triangle} u\|_{\sigma(t)}^{\sigma(t)}} \log |e^{t\triangle} u| dx$$

e

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} > 0 .$$

Assim, por (3.6), para todo $t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} \log \left(\|e^{t\triangle} u\|_{\sigma(t)} \right) \leq \left(\frac{n}{2\sigma(t)^2} \right) \frac{d\sigma(t)}{dt} \log \left(\frac{d\sigma(t)}{dt} \frac{1}{4\pi e^2 (\sigma(t)-1)} \right) . \tag{3.7}$$

Neste ponto definimos $\sigma(t)$ por

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{\sigma(t)} = \frac{t}{lT} ,$$

onde $\frac{1}{l} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Daí, a desigualdade (3.7) torna-se

$$\frac{d}{dt} \log \left(\|e^{t\triangle} u\|_{\sigma(t)} \right) \leq \left(\frac{n}{2lT} \right) \log \left(\frac{\sigma(t)^2}{4\pi T l e^2 (\sigma(t)-1)} \right) .$$

Pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$\log \left(\|e^{T\triangle} u\|_{\sigma(T)} \right) - \log \left(\|e^{0\triangle} u\|_{\sigma(0)} \right) \leq \int_0^T \left(\frac{n}{2lT} \right) \log \left(\frac{\sigma(t)^2}{4\pi T l e^2 (\sigma(t)-1)} \right) dt ,$$

ou seja,

$$\|e^{T\triangle}u\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi Tl)^{-\frac{n}{2l}}\, e^{\int_0^T \left(\frac{n}{2lT}\right)\log\left(\frac{\sigma(t)^2}{e^2(\sigma(t)-1)}\right)dt}\,.$$

Fazendo a mudança de variável $s=\frac{1}{\sigma(t)}$ e colocando $K=e^2$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\frac{n}{2lT}\right)\log\left(\frac{\sigma(t)^2}{e^2(\sigma(t)-1)}\right)dt &= \frac{n}{2}\int_{\frac{1}{q}}^{\frac{1}{p}} \log\left(\frac{1}{s(1-s)K}\right)ds \\
&= -\frac{n}{2}\int_{\frac{1}{q}}^{\frac{1}{p}} \log\left(s(1-s)K\right)ds \\
&= -\frac{n}{2}\left(\log\left(\frac{K^{-l}\,(1/p)^{1/p}}{(1/q)^{1/q}}\frac{(1/p')^{-1/p'}}{(1/q')^{-1/q'}}\right)+2l\right) \\
&= \log\left(K^{\frac{nl}{2}}\left(C_qC_{p'}\right)^n\right)-nl\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$e^{\int_0^T \left(\frac{n}{2lT}\right)\log\left(\frac{\sigma(t)^2}{e^2(\sigma(t)-1)}\right)dt} = e^{-nl}K^{\frac{nl}{2}}\left(C_qC_{p'}\right)^n = \left(C_qC_{p'}\right)^n\,,$$

implicando a desigualdade

$$\|e^{T\triangle}u\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi Tl)^{-\frac{n}{2l}}\left(C_qC_{p'}\right)^n\,.$$

Como $T>0$ é arbitrário, para cada $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ com $u\geq 0$,

$$\|e^{t\triangle}u\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\left(C_qC_{p'}\right)^n\,,\quad \forall\, t>0\,.$$

Dada $u\in L^q(\mathbb{R}^n)$, $u\geq 0$, existe uma sequência de funções não negativas em $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ que converge para u em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\|e^{t\triangle}u\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\left(C_qC_{p'}\right)^n\,,\quad \forall\, t>0\,.$$

Agora, dada $u\in L^q(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$|e^{t\triangle}u| \leq e^{t\triangle}|u|$$

e, consequentemente,

$$\|e^{t\triangle}u\|_p \leq \|e^{t\triangle}|u|\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\,(C_q C_{p'})^n \ , \quad \forall\, t>0\,.$$

Portanto, para todo $u \in L^q\,(\mathbb{R}^n)$,

$$\|e^{t\triangle}u\|_p \leq \|u\|_q \,(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\,(C_q C_{p'})^n \ , \quad \forall\, t>0\,.$$

Mostremos que a constante $(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\,(C_q C_{p'})^n$ é ótima. Para isso tome a função gaussiana $u(x) = (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{\sigma}{4}|x|^2}$, onde $\sigma = \frac{q'}{tl} > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left(e^{t\triangle}u\right)(x) &= \frac{(\pi\sigma)^{-n/2}}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,e^{-\frac{\sigma}{4}|y|^2}dy \\
&= \frac{(\pi\sigma)^{-n/2}}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\sigma}{4(1+t\sigma)}|x|^2}\left(\frac{4t}{1+t\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}} \\
&= (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{1+t\sigma}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sigma}{4(1+t\sigma)}|x|^2}\,.
\end{aligned}$$

Donde

$$\|e^{t\triangle}u\|_p = (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{1+t\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{4\pi(1+t\sigma)}{p\sigma}\right)^{\frac{n}{2p}}\,.$$

Temos, também, que

$$\begin{aligned}
\|u\|_q &= (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{q\sigma}{4}|x|^2}dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{4\pi}{q\sigma}\right)^{\frac{n}{2q}}\,.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\|e^{t\triangle}u\|_p}{\|u\|_q} = (C_q C_{p'})^n\,(4\pi tl)^{-\frac{n}{2l}}\left(\frac{(q')^{n/2q'}\,(lt\sigma)^{n/2l}}{(p'(1+t\sigma))^{n/2p'}}\right)\,.$$

Como $\sigma = \frac{q'}{tl}$, segue que

$$\left(\frac{(q')^{n/2q'}\,(lt\sigma)^{n/2l}}{(p'(1+t\sigma))^{n/2p'}}\right) = 1$$

e, consequentemente,

$$\frac{\|e^{t\triangle}u\|_p}{\|u\|_q} = (C_q C_{p'})^n \, (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}} \ . \qquad \square$$

Veja que, para $\alpha > 0$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, a função

$$u_\alpha(x) = \alpha \, (\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} \, e^{-\frac{|x-\overline{x}|^2}{\sigma}} \ , \quad \text{onde } \sigma = \frac{q'}{tl} \, ,$$

é função extremal para a melhor constante $(C_q C_{p'})^n \, (4\pi t l)^{-\frac{n}{2l}}$.

Observação 3.3. *É importante registrar que a desigualdade de Sobolev logarítmica ótima é equivalente à estimativa ótima do semigrupo do calor fornecida no Teorema 3.2. Para ver a demonstração deste fato consulte [21].*

Apêndice A

SIMETRIZAÇÃO DE SCHWARZ

Vamos colocar aqui alguns resultados sobre simetrização de Schwarz e referências para as demonstrações. Façamos, primeiramente, algumas definições.

Definição A.1. *Sejam $A_1, \ldots, A_k$ subconjuntos borelianos de $\mathbb{R}^n$, dois a dois disjuntos e com medida finita, e $0 < a_k < a_{k-1} < \ldots < a_1$ números reais. Considere a função simples $f = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$. Definimos o rearranjamento da função f por*

$$f^* = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{[R_{i-1} \leq |x| < R_i]} \,,$$

onde $R_0 := 0$ e $R_i \geq R_{i-1}$ são dados pela relação $m\left([R_{i-1} \leq |x| < R_i]\right) = m\left(A_i\right)$ ($m :=$ medida de Lebesgue).

O teorema seguinte nos permite definir o rearranjamento de uma função p-integrável positiva qualquer.

Teorema A.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ uma função positiva. Existe uma única função positiva $f^* \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$ tal que, para todo $\lambda > 0$,*

$$m\left([f \geq \lambda]\right) = m\left([f^* \geq \lambda]\right) \,,$$

onde o conjunto $[f^* \geq \lambda]$ *é uma bola* $B(0, R_\lambda)$. *Alem disso, a função* f^* *é radial, não-crescente e, para toda função contínua e crescente* $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *com* $G(0) = 0$, *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(f)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} G(f^*)\, dx\,.$$

Definição A.2. *A função* f^* *chama-se o rearranjamento não-crescente (ou a simetrização de Schwarz) da função* f.

Resultados fundamentais sobre simetrização de Schwarz:

Teorema A.2 (Desigualdade de Riesz). *Sejam* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *funções positivas. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} fg dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^* g^* dx\,.$$

Teorema A.3. *Seja* $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *uma função positiva. Então, o seu rearranjamento* u^* *pertence ao espaço* $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\,.$$

Teorema A.4. *Seja* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, *uma função positiva. Então,*

$$|u^*(x)| \leq |x|^{-\frac{n}{p}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}} \right)^{1/p} \|u^*\|_p\,, \textit{ para todo } x \neq 0\,.$$

Demonstração:

Basta observar que $0 \leq u^*(x) \leq u^*(y)$ se $|x| \geq |y|$ e, colocando $r = |x|$,

$$\|u^*\|_p^p \geq \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^r u^*(s)^p s^{n-1} ds \geq \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} u^*(r)^p \left(\frac{r^n}{n}\right)\,. \qquad \square$$

Observação A.1. *Suponha que* $(u_k)_{k\geq 1}$ *seja uma sequência limitada em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *de funções positivas. Naturalmente,* $(u_k^*)_{k\geq 1}$ *é uma sequência limitada em* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *digamos* $\|u_k^*\|_p \leq B$. *Assim, do Teorema A.4,*

$$|u_k^*(x)| \leq C|x|^{-\frac{n}{p}}\,, \textit{ para todo}\, x \neq 0\,,$$

com $C = B\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}}\right)^{1/p}$ *independente de* k*. Donde* $u_k^*(x) \to 0$ *quando* $|x| \to \infty$ *uniformemente em relação a* k*.*

Para ver as demonstrações dos resultados deste apêndice consulte [12] e [20].

Apêndice B

UMA FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO

Vamos demonstrar neste apêndice um resultado de diferenciação (Teorema B.5), o qual foi usado no capítulo 3.

Teorema B.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Se $u_k \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, existem uma subsequência $(u_{k_i})_{i\geq 1}$ de $(u_k)_{k\geq 1}$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

a) $u_{k_i}(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω;

b) $|u(x)|$, $|u_{k_i}(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω .

Demonstração:

Podemos assumir (passando a uma subsequência se necessário) que $u_k(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Assim, existe uma subseqência $(u_{k_i})_{i\geq 1}$ de $(u_k)_{k\geq 1}$ tal que

$$\|u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\|_p \leq 2^{-i}\,, \quad \forall i \geq 1\,.$$

Defina $g(x) = |u_{k_1}(x)| + \Sigma_{i=1}^{\infty}|u_{k_{i+1}}(x) - u_{k_i}(x)|$. Daí,

$$|u_{k_i}(x)| \leq g(x) \quad \text{q.t.p. em } \;\Omega\,.$$

Donde $|u(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω. $\square$

Teorema B.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto com medida de Lebesgue finita. Sejam $1 \leq p, r < \infty$, $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ e $|f(x,u)| \leq c\left(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\right)$, onde c é uma constante positiva. Então, para todo $u \in L^p(\Omega)$, $f(.,u) \in L^r(\Omega)$ e o operador $A : L^p(\Omega) \to L^r(\Omega)$ dado por*

$$A(u) = f(.,u)$$

é contínuo.

Demonstração:

Suponha que $u \in L^p(\Omega)$. Já que $c^r\left(1 + |u|^{\frac{p}{r}}\right)^r \in L^1(\Omega)$, segue que $f(.,u) \in L^r(\Omega)$. Seja, agora, $(u_k)_{k \geq 1}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$. Considere uma subsequência $(w_k)_{k \geq 1}$ de $(u_k)_{k \geq 1}$. Sejam $(u_{k_i})_{i \geq 1}$ e g dados pelo Teorema B.1. Como

$$|f(x,u_{k_i}) - f(x,u)|^r \leq 2^r c^r \left(1 + |g|^{\frac{p}{r}}\right)^r$$

e

$$2^r c^r \left(1 + |g|^{\frac{p}{r}}\right)^r \in L^1(\Omega)$$

segue do Teorema da convergência dominada que $Au_{k_i} \to Au$ em $L^r(\Omega)$. $\square$

Teorema B.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $2 < p < \infty$. Então o funcional*

$$\psi(u) = \int_\Omega |u|^p dx$$

é de classe $\mathcal{C}^1\left(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}\right)$ e $\langle \psi'(u), h \rangle = p \int_\Omega u|u|^{p-2} h dx$.

Demonstração:

Sejam $u, h \in L^p(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do valor médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\Big| |u(x) + th(x)|^p - |u(x)|^p \Big|}{|t|} \leq p\left(|u(x)| + \lambda |h(x)|\right)^{p-1} |h(x)|.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$(|u(x)| + |h(x)|)^{p-1} |h(x)| \in L^1(\Omega) \;.$$

Assim, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\langle \psi'(u), h \rangle = p \int_\Omega u|u|^{p-2} h dx \,.$$

Logo, ψ é Gateaux diferenciável. Defina, agora, $f(u) = pu|u|^{p-2}$. Seja $(u_k)_{k\geq 1}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $L^p(\Omega)$. Do Teorema B.2 segue que $f(u_k) \to f(u)$ em $L^q(\Omega)$ quando $q = \frac{p}{p-1}$. Novamente pela desigualdade de Hölder,

$$|\langle \psi'(u_k) - \psi'(u), h \rangle| \leq \|f(u_k) - f(u)\|_q \|h\|_p$$

Donde

$$\|\psi'(u_k) - \psi'(u)\| \leq \|f(u_k) - f(u)\|_q$$

e, consequentemente, ψ' é contínua. $\square$

Observação B.1. *Podemos monstrar que o funcional ψ é um funcional de classe $\mathcal{C}^2(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Veja [22].*

Teorema B.4. *Suponha que $u \in L^s(\Omega)$ para todo $s \in (q,p)$, $1 < q < p < \infty$. Então a função $\varphi(s) = \|u\|_s^s$ é diferenciável e*

$$\frac{d}{ds}\|u\|_s^s = \int_\Omega |u|^s \log|u| dx \,.$$

Demonstração:

Temos que

$$\Bigg| \log|u| \Bigg| \leq (e\alpha)^{-1} \left(|u|^\alpha + |u|^{-\alpha}\right) \,, \forall \alpha > 0 \,.$$

Assim, pelo Teorema da convergência dominada,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\|u\|_s^s &= \int_\Omega \frac{d}{ds}|u|^s dx \\ &= \int_\Omega |u|^s \log|u| dx \,. \qquad \square \end{aligned}$$

Agora, como consequência dos resultados anteriores, podemos estabelecer uma fórmula de diferenciação para o funcional $F(t,s) = \|\phi_t\|_s$.

Teorema B.5. *Suponha que* $1 < p < q < \infty$ *e* $a < b$. *Para cada* $t \in (a,b)$, *seja* ϕ_t *uma função real sobre* $\mathbb{R}^n$ *(não identicamente nula) tal que a transformação* $t \mapsto \phi_t$, *de* (a,b) *em* $L^s(\mathbb{R}^n)$, *é continuamente diferenciável para cada* $s \in (p,q)$, *com derivada* ϕ_t'. *Então a função* $F(t,s) = \|\phi_t\|_s$ *é diferenciável sobre* $(a,b) \times (p,q)$ *com derivadas parciais:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = \|\phi_t\|_s^{1-s} \int \phi_t' \phi_t |\phi_t|^{s-2} dx$$
$$\frac{\partial F}{\partial s}(t,s) = s^{-1}\|\phi_t\|_s^{1-s} \int |\phi_t|^s \log|\phi_t| dx - s^{-1}\|\phi_t\|_s \log\|\phi_t\|_s$$

onde assumimos que $0^s \log 0 = 0$.

Demonstração:

Basta usar os teoremas B.3 e B.4, e a regra da cadeia. □

Teorema B.6. *Suponha que* $u \in L^s(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $s \in (q,p)$, $1 < q < p < \infty$. *Então a função convexa* $s \mapsto \log(\|u\|_s)$ *é diferenciável em* (q,p) *e*

$$\frac{d}{ds}\log(\|u\|_s) = \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^s}{\|u\|_s^s} \log\left(\frac{|u|}{\|u\|_s}\right) dx.$$

Demonstração:

A função convexa $s \mapsto \log(\|u\|_s)$ é diferenciável porque ela é a composta de outras duas funções diferenciáveis. Como $\log(\|u\|_s) = \frac{1}{s}\log(\|u\|_s^s)$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\log(\|u\|_s) &= \frac{d}{ds}\frac{1}{s}\log(\|u\|_s^s) \\
&= -\frac{1}{s^2}\log(\|u\|_s^s) + \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{\|u\|_s^s}\log|u| dx \\
&= \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^s}{\|u\|_s^s}\log|u| dx - \frac{1}{s}\log(\|u\|_s)\frac{\int_{\mathbb{R}^n}|u|^s dx}{\|u\|_s^s} \\
&= \frac{1}{s}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^s}{\|u\|_s^s}\log\left(\frac{|u|}{\|u\|_s}\right) dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] T. Arbogastand and J. Bona - *Methods of Applied Mathematics*, The University of Texas at Austin, 2004.

[2] E. Artin - *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[3] T. Aubin - *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernat la courbure scalaire*, J. Math. Pure Appl., 55 (1976) 269-296.

[4] T. Aubin - *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geometry, 11 (1976) 573-598.

[5] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux, L. Saloff-coste - *Sobolev inequalities in disguise*, Indiana Univ. Math. J., 44 (4) (1995) 1033-1074.

[6] H. Brezis - *Analyse fonctionelle*, Masson, Paris, 1983.

[7] M. Del Pino and J. Dolbeault - *The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal., 197 (2003), 151-161.

[8] L. Evans - *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[9] E. Gagliardo - *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche de Mat., 7 (1958), 102-137; 8 (1959), 24-51.

[10] D. Gilbarg and N. S. Trudinger - *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.

[11] L. Gross - *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), 1061-1083.

[12] O. Kavian - *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlg France, Paris, 1993.

[13] H. A. Levine - *An estimate for the best constant in a Sobolev inequality involving three integral norms*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 124 (1980) 181-197.

[14] J. Moser - *On Harnak's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 577-591.

[15] J. Nash - *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math., 80 (1958), 931-954.

[16] L Nirenberg - *On elliptic partial differential equations*, Annali Sc. Normale Sup. Pisa, 13 (1959), 115-162.

[17] J. Serrin and M. Tang - *Uniqueness for ground states of quasilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., 49 (2000), 897-923.

[18] S. L. Sobolev - *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle*, Mat. Sb. 45 (1938) 471-496.

[19] D. Stroock and B. Zegarlinski - *The logarithmic Sobolev inequality for continuous spin systems on a lattice*, J. Funct. Anal. 104 (1992), 299-326.

[20] G. Talenti - *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl.,110 (1976), 353-372.

[21] F. B. Weissler - *Logarithmic Sobolev inequalities for the healt-diffusion semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. 237 (1978) 255-269.

[22] M. Willem - *Minimax Theorems*, Birkhauser, 1st edition (1996).