UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Folheações e a Grassmanniana de retas em $\mathbb{CP}^n$

Fábio Xavier Penna

Orientador: **Israel Vainsencher**

21 de março de 2005

A meus pais

Introdução

Neste trabalho estudamos o espaço das folheações holomorfas de codimensão 1 no espaço projetivo complexo $\mathbb{CP}^n$, induzidas por 1-formas a coeficientes lineares. Demonstramos o seguinte resultado:

Teorema: *Existe um isomorfismo natural entre o espaço das folheações de codimensão 1 em $\mathbb{CP}^n$, induzidas por 1-formas a coeficientes lineares, e a Grassmanniana das retas do espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1*})$.*

Trata-se de uma interessante relação da teoria geométrica das folheações holomorfas com a geometria algébrica.

Considere uma forma diferencial de grau 1 em $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\omega \;= \sum_{i=1}^{n+1} F_i dx_i,$$

onde os F_i's são polinômios homogêneos de mesmo grau. Se seus coeficientes satisfazem a condição de contração pelo campo radial,

$$\omega \;\lrcorner X = \sum_{i=1}^{n+1} F_i x_i = 0,$$

onde $X(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ é o campo em questão e $\lrcorner$ indica o produto interior, ela induz uma forma diferencial em $\mathbb{CP}^n$, mais precisamente, uma seção global do fibrado $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d+1)$, onde d é o grau dos polinômios $F_i's$.

No contexto da teoria das folheações, segundo o professor Márcio Gomes Soares, a quem agradeço por me haver ensinado os seguintes passos, o caso dos coeficientes $F_i's$ serem polinômios homogêneos de grau 1 é tratado como se segue. Se

$$\omega \ = \sum_{i=1}^{n+1} F_i dx_i,$$

então

$$dw = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Segue da condição de integrabilidade que

$$\omega \ \wedge d\omega \ = \sum_{k=1}^{n+1} F_k \left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_i = 0,$$

e como os F_i's são lineares, teremos

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0$$

resultando que $d\omega \ = 0$. Então conclui-se que ω é exata e possui uma integral primeira meromorfa, isto é, existem polinômios $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ tais que $d\left(\frac{f}{g}\right) = \omega$. As folhas da folheação induzida por ω serão as superfícies de nível da integral primeira de ω :

$$V(f - cg), \quad \text{para} \quad c \in \mathbb{C}.$$

Neste texto nossa abordagem é mais algébrica. Estudamos o caso a coeficientes lineares e observamos que o espaço destas 1-formas pode ser relacionado com o espaço $\bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*}$, identificado ao espaço das matrizes antissimétricas. Além disso, cada forma que satisfaz a condição de integrabilidade

$$\omega \ \wedge d\omega \ = 0$$

pode ser associada a um ponto da grassmanniana $\mathbb{G}(2, \mathbb{C}^{n+1*})$ de subespaços de dimensão 2 de $\mathbb{C}^{n+1*}$. Mostramos por fim que toda 1-forma nessas condições pode ser escrita como uma diferencial logarítmica,

$$\omega = fdg - gdf,$$

onde $f, g \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_{n+1}]$ são polinômios homogêneos lineares linearmente independentes, podendo relacionar, agora de forma natural, nossa forma ω ao subespaço de dimensão $n-2$ em $\mathbb{CP}^n$ dado pelas singularidades de ω , a saber, $f = g = 0$.

Outros problemas relacionados são o estudo de folheações em $\mathbb{CP}^n$ definidas por formas logarítmicas, tratado em [A], e a caracterização de espaços de folheações holomorfas em $\mathbb{CP}^n$. Neste trabalho, caracterizamos o espaço das folheações integráveis de codimensão 1, a coeficientes lineares. Jouanolou, por sua vez, trata folheações integráveis de codimensão 1 em $\mathbb{CP}^n$, a coeficientes quadráticos, em [J]. Em [CL] demonstra-se que o espaço das folheações holomorfas de codimensão 1, induzidas por 1-formas cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau 3, em $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 3$, possui seis componentes irredutíveis. Estes exemplos mostram que muito ainda há a ser feito nesta área.

Por fim, gostaria de agradecer ao Israel por haver proposto um problema tão interessante e pela paciência, atenção e suporte durante todo o trabalho. Agradeço também aos professores Daniel Levcovitz e Rogério Santos Mol, que com atenção leram este trabalho e o enriqueceram com muitas sugestões, ao professor Dan Avritzer, fundamental em minha formação em geometria algébrica, e à Flaviana, com quem discuti vários pontos desta dissertação. Aproveito a oportunidade para agradecer ao Hélder o apoio desde a graduação e ao Celestino a consultoria em L^AT_EX.

Sumário

Capítulo 1

Seqüências exatas de fibrados vetoriais

Neste capítulo trataremos a seqüência exata de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{CP}^n$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(d) \hookrightarrow \mathscr{O}(d+1)^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow T\mathbb{CP}^n(d) \longrightarrow 0.$$

Ela pode ser obtida tensorizando a seqüência

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \hookrightarrow \mathscr{O}(1)^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow T\mathbb{CP}^n \longrightarrow 0,$$

conhecida como Seqüência de Euler, com uma potência tensorial do fibrado hiperplano $\mathscr{O}(1)$ ou do fibrado tautológico $\mathscr{O}(-1)$. No entanto, motivados pelo fato de $\mathbb{CP}^n$ ser um quociente de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, obteremos a seqüência acima a partir de uma seqüência exata sobre esta variedade. Na seção 1.1 apresentaremos ao leitor os fibrados em retas sobre $\mathbb{CP}^n$, denotados $\mathscr{O}(d)$, e na seção 1.2, usando de convenientes ações de $\mathbb{C}^*$ em fibrados vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, obteremos a seqüência acima por um quociente.

Na seção 1.3 estudaremos esta seqüência tendo como base os feixes gerados pelas seções dos fibrados $\mathscr{O}(d)$. Discutiremos conceitos fundamentais da estrutura de feixes e, usando de um resultado básico de cohomologia, caracterizaremos as seções globais do fibrado cotangente de $\mathbb{CP}^n$ a valores em $\mathscr{O}(d)$, isto é, $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d) = Hom(T\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(d))$.

1.1 Fibrados em retas sobre $\mathbb{CP}^n$

Considere $\sigma : \mathbb{B} \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ a explosão de $\mathbb{C}^{n+1}$ na origem. Afirmamos que $\mathbb{B}$ possui uma estrutura de fibrado vetorial de posto 1 sobre $\mathbb{CP}^n$. De fato, fixando coordenadas $[x] = [x_1, \ldots, x_{n+1}]$ em $\mathbb{CP}^n$ e $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, $\mathbb{B}$ é a variedade algébrica determinada pelos zeros dos polinômios

$$x_i v_j = x_j v_i, \quad 1 \leq i, j \leq n+1.$$

Considerando $U_i \subset \mathbb{CP}^n$ o aberto padrão no qual $x_i \neq 0$, defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \sigma^{-1}(U_i) & \longrightarrow & U_i \times \mathbb{C} \\ & ([x], v) & \longmapsto & ([x], v_i) \end{array}.$$

Sua inversa pode ser obtida a partir dos polinômios que definem a explosão. Observando que

$$v_j = \frac{x_j}{x_i} v_i, \quad \text{temos} \quad v = v_i \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

e definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i^{-1} : & U_i \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \sigma^{-1}(U_i) \\ & ([x], z) & \longmapsto & ([x], z(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})). \end{array}$$

As aplicações φ_i são trivializações locais para o nosso fibrado. Além disso, se $U_{ij} = U_i \cap U_j$, temos

$$\begin{array}{ccccc} U_{ij} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} & \sigma^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\varphi_j} & U_{ij} \times \mathbb{C} \\ ([x], z) & \longmapsto & ([x], z(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i})) & \longmapsto & ([x], \frac{x_j}{x_i} z). \end{array}$$

Desta forma, definindo $\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $\varphi_{ij}([x]) = x_j x_i^{-1}$, temos que a coleção $\{(U_i, \varphi_{ij})\}$ trivializa o fibrado $\sigma : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$. Denotaremos este fibrado por $\mathscr{O}(-1)$.

O dual deste fibrado será denotado por $\mathscr{O}(1)$ e, se $d \in \mathbb{Z}^*$, definiremos

$$\mathscr{O}(d) := \mathscr{O}(1)^{\bigotimes d} \qquad \text{se} \qquad d > 0$$

e

$$\mathscr{O}(d) := \mathscr{O}(-1)^{\bigotimes -d} \qquad \text{se} \qquad d < 0.$$

Observe que a coleção $\{(U_i, \varphi_{ij}^{-d})\}$ trivializa o fibrado $\mathscr{O}(d)$, isto é, $\varphi_{ij}^{-d}([x]) := (\varphi_{ij}([x]))^{-d} = (x_i x_j^{-1})^d$ são as funções de transição do fibrado $\mathscr{O}(d)$. Além disso, se $d = 0$ as funções de transição serão a identidade e podemos definir $\mathscr{O} := \mathscr{O}(0)$ como o fibrado trivial dado pela projeção

$$\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{CP}^n.$$

Mostra-se que todo fibrado em retas sobre $\mathbb{CP}^n$ é da forma $\mathscr{O}(d)$. Este resultado pode ser encontrado na página 66 do volume 2 de [Shaf].

1.2 $\mathscr{O}(d)$ como quociente

Considere $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ a aplicação quociente e ϕ_d a ação de $\mathbb{C}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{array}{rccc} \phi_d : & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C} \\ & (t, v, z) & \longmapsto & (tv, t^d z) \end{array}.$$

Representaremos por ϕ_0 a ação de $\mathbb{C}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ pela qual obtemos o espaço projetivo $\mathbb{CP}^n$ como quociente e $\sim_{\phi_d}$ a relação de equivalência obtida em $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \times \mathbb{C}$ a partir das órbitas da ação ϕ_d.

Lema 1.1. *Seja* $\widetilde{\psi} : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ *o fibrado trivial de posto 1 sobre* $\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0$*. Então* $\widetilde{\psi}$ *é invariante pelas ações* ϕ_d *e* ϕ_0*, respectivamente, e o fibrado induzido pela passagem ao quociente é* $\mathscr{O}(d)$*.*

Demonstração: Para verificarmos que $\widetilde{\psi}$ é invariante pelas ações, basta observarmos que

$$\widetilde{\psi}(tv, t^d z) = tv$$

e, portanto, pontos que estão sobre a mesma órbita de ϕ_d em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C}$, são levados por $\widetilde{\psi}$ numa mesma órbita de ϕ_0 em $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$.
Denotando $\mathscr{L}_d := (\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \times \mathbb{C})/ \sim_{\phi_d}$, e considerando

$$\pi_d : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{L}_d$$

a aplicação quociente, $\widetilde{\psi}$ induz um fibrado $\psi : \mathscr{L}_d \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ que torna o diagrama abaixo comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \\ \pi_d \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathscr{L}_d & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{CP}^n \end{array} .$$

Para trivializarmos $\mathscr{L}_d$, observe que

$$\psi^{-1}(U_i) = \pi_d \circ \widetilde{\psi}^{-1} \circ \pi^{-1}(U_i) = \pi_d(\pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}) = (\pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{C})/ \sim_{\phi_d} .$$

Defina

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\psi_i} & U_i \times \mathbb{C} \\ (u, z) & \longmapsto & ([u], u_i^{-d} z) \end{array} .$$

ψ_i está bem definida pois

$$\psi_i(tu, t^d z) = ([tu], (tu_i)^{-d} t^d z) = ([u], u_i^{-d} z) = \psi_i(u, z).$$

Sua inversa é definida da seguinte forma. Considere o difeomorfismo dado pela carta de $\mathbb{CP}^n$

$$\begin{array}{cccc} \mu_i^{-1}: & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sim} & U_i \\ & (u_1,\dots,u_n) & \longmapsto & [u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n] \end{array}.$$

Tendo μ_i^{-1} em mente, defina

$$\begin{array}{ccc} U_i\times\mathbb{C} & \xrightarrow{\psi_i^{-1}} & \psi^{-1}(U_i) \\ ([u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n],z) & \longmapsto & ((u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n),z) \end{array}.$$

Calculando as funções de transição temos

$$\begin{array}{ccc} U_{ij}\times\mathbb{C} & \xrightarrow{\psi_i^{-1}} & \psi^{-1}(U_{ij}) \\ (u_i^{-1}[u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n],z) & \longmapsto & (u_i^{-1}(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n),z) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\psi_j} & U_{ij}\times\mathbb{C} \\ (u_i^{-1}(u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n),z) & \longmapsto & ([u_1,\dots,u_{i-1},1,u_i,\dots,u_n],(u_i^{-1}u_j)^{-d}z) \end{array}$$

donde vemos que $\psi_{ij}([u])=(u_iu_j^{-1})^d$ e concluímos que $\mathscr{L}_d=\mathscr{O}(d)$. $\square$

Definindo a ação

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\phi}_d: & \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C}^{n+1} \\ & (t,v,w) & \longmapsto & (tv,t^dw) \end{array}$$

e considerando o fibrado trivial de posto $n+1$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$

$$\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\},$$

usando o lema 1, o fibrado obtido pela passagem ao quociente pelas ações de $\widehat{\phi}_d$ e ϕ_0, respectivamente, é $\mathscr{O}(d)^{\bigoplus n+1}$.

Agora fixemos nossa atenção no seguinte homomorfismo de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$:

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\Phi}: & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & T\mathbb{C}^{n+1}|_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \\ & (v,z) & \longmapsto & D_{zv}(v) \end{array},$$

onde $D_w(v)=\sum_{i=1}^{n+1} w_i D_i(v)$ denota a derivada direcional no ponto v. Considerando o isomorfismo de fibrados

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^{n+1}|_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C}^{n+1} \\ D_w(v) & \longmapsto & (v,w) \end{array},$$

é claro que $\widetilde{\Phi}$ é invariante pelas ações de ϕ_d e $\widehat{\phi}_{d+1}$, respectivamente. Passando ao quociente e usando o lema anterior, encontramos o homomorfismo

$$\Phi:\mathscr{O}(d)\longrightarrow\mathscr{O}(d+1)^{\bigoplus n+1}$$

entre fibrados de $\mathbb{CP}^n$.

Por outro lado, definindo o homomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\Psi}: & T\mathbb{C}^{n+1}|_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times_\pi T\mathbb{CP}^n=\pi^*T\mathbb{CP}^n \\ & D_w(v) & \longmapsto & (v,\widetilde{D}_{d\pi_v(w)}([v])) \end{array}$$

ele é invariante pelas ações $\widehat{\phi}_d$ e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times_\pi T\mathbb{CP}^n & \xrightarrow{\rho_d} & \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times_\pi T\mathbb{CP}^n \\ (t,v,\widetilde{D}_w([v])) & \longmapsto & (tv,t^{d-1}\widetilde{D}_w([v])). \end{array}$$

Para isto, observe que se $v\in\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ é tal que $v_i\neq 0$ e $\mu_i:U_i\longrightarrow\mathbb{C}^n$ é uma carta, então

$$\mu_i\circ\pi(v_1,\ldots,v_{n+1})=\left(\frac{v_1}{v_i},\ldots,\frac{v_{i-1}}{v_i},\frac{v_{i+1}}{v_i},\ldots,\frac{v_{n+1}}{v_i}\right).$$

Calculando sua derivada, obtemos

$$(\mu_i\circ\pi)'(v)=\frac{1}{v_i}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\frac{v_1}{v_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{v_{i-1}}{v_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{v_{i+1}}{v_i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{v_{n+1}}{v_i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{v_i}S(v).$$

Então, $\widetilde{D}_{d\pi_v(w)}([v])=v_i^{-1}\widetilde{D}_{S(v)w}([v])$ e, como $S(v)=S(tv)$, segue que

$$\widetilde{\Psi}(D_{t^dw}(tv))=(tv,(tv_i)^{-1}\widetilde{D}_{S(tv)t^dw}([v]))=(tv,t^{d-1}v_i^{-1}\widetilde{D}_{S(v)w}([v])).$$

Se $d = 1$, temos $\widetilde{\Psi}(D_{tw}(tv)) = (tv, v_i^{-1}\widetilde{D}_{S(v)w}([v]))$. Lembrando a definição do pull-back $\pi^* T\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \times_\pi T\mathbb{C}\mathbb{P}^n & \xrightarrow{P_2} & T\mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ P_1 \downarrow & & \downarrow P \\ \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}\mathbb{P}^n \end{array}$$

onde P_1 e P_2 são projeções. P_1 é invariante pelas ações ρ_1 e ϕ_0, respectivamente, e a aplicação quociente induzida por P_1 é P. Portanto, passando $\widetilde{\Psi}$ ao quociente, obtemos o homomorfismo

$$\Psi : \mathscr{O}(1)^{\bigoplus\, n+1} \longrightarrow T\mathbb{C}\mathbb{P}^n,$$

e, se $d \in \mathbb{Z}$, passando $\widetilde{\Psi}$ ao quociente pelas ações $\widehat{\phi}_d$ e ρ_d temos

$$\Psi : \mathscr{O}(d)^{\bigoplus\, n+1} \longrightarrow T\mathbb{C}\mathbb{P}^n(d-1).$$

Teorema 1.1. *A seqüência*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times\mathbb{C} \overset{\widetilde{\Phi}}{\hookrightarrow} T\mathbb{C}^{n+1}|_{\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}} \overset{\widetilde{\Psi}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\times_\pi T\mathbb{C}\mathbb{P}^n \longrightarrow 0 \tag{1}$$

é uma sequência exata de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$.

Demonstração: Fixe $v \in \mathbb{C}^{n+1}$, $v \neq 0$. É claro que $\widetilde{\Phi}_v$ é injetiva. Além disso, como $d\pi_v : T_v\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow T_{[v]}\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é sobrejetiva, $\widetilde{\Psi}_v$ também será. Considere *Núcleo*$(\widetilde{\Psi}_v) = \{D_w(v) \in T_v\mathbb{C}^{n+1} : \widetilde{\Psi}_v(D_w(v)) = (v, 0)\}$. Então a seqüência

$$\textit{Núcleo}(\widetilde{\Psi}_v) \hookrightarrow T_v\mathbb{C}^{n+1} \overset{\widetilde{\Psi}_v}{\twoheadrightarrow} \{v\} \times_\pi T_{[v]}\mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

é exata. Como a dimensão do *Núcleo*$(\widetilde{\Psi}_v)) = 1$, basta mostrar que $\widetilde{\Phi}_v(\{v\} \times$

$\mathbb{C}) \subset Núcleo(\widetilde{\Psi}_v)$. De fato, calculando

$$d\pi_v(zv) = \frac{z}{v_i} S(v) v = \frac{z}{v_i} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\frac{v_1}{v_i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{v_{i-1}}{v_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{v_{i+1}}{v_i} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{v_{n+1}}{v_i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = 0,$$

e segue que $\widetilde{\Psi}_v(D_{zv}(v)) = \widetilde{D}_{d\pi_v(zv)}([v]) = 0$. De fato

$$\begin{array}{ccc} \{v\} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & Núcleo(\widetilde{\Psi}_v) \\ (v, z) & \longmapsto & D_{zv}(v) \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais e o teorema está provado. $\square$

Teorema 1.2. *A seqüência*

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}(d) \overset{\Phi}{\hookrightarrow} \mathscr{O}(d+1)^{\oplus n+1} \overset{\Psi}{\twoheadrightarrow} T\mathbb{CP}^n(d) \longrightarrow 0$$

de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{CP}^n$ é exata.

Demonstração: Usando o teorema 1.1, basta submetermos a seqüência (1) às ações $\phi_d, \widehat{\phi}_{d+1}$ e ρ_{d+1}, respectivamente, e verificarmos que a seqüência obtida é exata. Segue diretamente das definições que Ψ é sobrejetiva e que $\Psi \circ \Phi \equiv 0$. Para verificarmos que Φ é injetiva, observe que se $\Phi([v,a]) = [D_{av}(v)] = [D_{bu}(u)] = \Phi([u,b])$, então existe $t \in \mathbb{C}^*$ tal que $u = tv$ e $bu = t^{d+1}av$. Supondo que $v_i \neq 0$, temos $bu_i = btv_i = t^{d+1}av_i$, donde segue $b = t^d a$. Portanto $[v,a] = [u,b]$.

A fim de vermos que $Núcleo(\Psi) \subset Imagem(\Phi)$, observe que se $\Psi([D_w(v)]) = [D_{d\pi_v(w)}([v])] = 0$, então existe $t \in \mathbb{C}^*$ tal que $t^{d-1} d\pi_v(w) = d\pi_v(t^{d-1}w) = 0$. Logo, $t^{d-1}w = av$, para algum $a \in \mathbb{C}$ e concluímos que $[D_w(v)] = \Phi([v, \frac{a}{t^{d-1}}])$. $\square$

1.3 Seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)$

A partir de um fibrado vetorial $\mathscr{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ sobre um espaço topológico $\mathcal{M}$, podemos obter o feixe de seções de $\mathscr{L}$. Defina

$$\Gamma(V, \mathscr{L}) := \{S : V \longrightarrow \mathscr{L}\}$$

a coleção de seções locais contínuas definidas no aberto $V \subset \mathcal{M}$. Então a aplicação

$$V \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \Gamma(V, \mathscr{L})$$

é um feixe de módulos sobre $\mathscr{L}(V)$. Dado um aberto $V \subset \mathcal{M}$, as seções definidas neste aberto se relacionam com suas restrições da seguinte forma. Se $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é uma cobertura de V, defina

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \overset{F}{\longrightarrow} & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(V_\lambda) \\ S & \longmapsto & (S_\lambda) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}(V_\lambda) & \overset{G}{\longrightarrow} & \prod\limits_{\lambda,\beta\in\Lambda} \mathcal{F}(V_{\lambda\beta}) \\ (S_\lambda) & \longmapsto & (S_\lambda - S_\beta) \end{array},$$

onde $S_\lambda = S|_{V_\lambda}$ e $V_{\lambda\beta} = V_\lambda \cap V_\beta$. Portanto, se $S \in \mathcal{F}(V)$, então $G \circ F(S) = 0$. Além disso, se $G((S_\lambda)) = 0$, então existe uma única seção $S \in \mathcal{F}(V)$ tal que $F(S) = (S_\lambda)$. Isto mostra que $S_\lambda|_{V_{\lambda\beta}} = S_\beta|_{V_{\lambda\beta}}$.

O seguinte resultado estabelece a conhecida correspondência entre fibrados vetoriais e feixes localmente livres sobre uma variedade complexa $\mathcal{M}$. Nele usamos a notação $E \longrightarrow \mathcal{M}$ para representar um fibrado vetorial sobre $\mathcal{M}$ e $\mathscr{L}_E$ para o feixe de seções deste fibrado.

Proposição 1.1. *Fixada uma variedade $\mathcal{M}$ conexa, existe uma bijeção $E \longmapsto \mathscr{L}_E$ (a menos de isomorfismo) entre fibrados vetoriais e feixes localmente livres de posto finito sobre $\mathcal{M}$.*

De fato esta é uma equivalência de categorias. Sua demonstração pode ser encontrada na página 58 do volume 2 de [Shaf].

No restante desta seção exploraremos com mais detalhes a seqüência (2) ao nível de feixes, objetivando caracterizar as seções globais do fibrado cotangente torcido de $\mathbb{CP}^n$. Entenda por isto o fibrado cotangente de $\mathbb{CP}^n$ a valores em $\mathscr{O}(d)$. Na notação usual: $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d) = Hom(T\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(d))$. Para isto, precisaremos do seguinte fato, cuja demonstração está na página 66 de [Hart].

Proposição 1.2. *Se*

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}' \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{G}''$$

é uma sequência exata de feixes de grupos sobre um espaço topológico $\mathcal{M}$, então

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathscr{G}') \xrightarrow{F} \Gamma(\mathcal{M}, \mathscr{G}) \xrightarrow{G} \Gamma(\mathcal{M}, \mathscr{G}'')$$

é uma sequência exata de grupos.

Agora caracterizaremos as seções do feixe $\mathscr{O}(d)$. Para isto, considere o seguinte feixe de $\mathscr{O}$-módulos:

$$\mathcal{F}_d(U) := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{f}{g} : f \in P_j, g \in P_{j-d} \quad \text{e} \quad g(p) \neq 0, \forall p \in U \right\}$$

onde P_j é o espaço vetorial formado pelos polinômios homogêneos em $n+1$ variáveis de grau j, a coeficientes em $\mathbb{C}$. Num aberto padrão U_i, teremos

$$\mathcal{F}_d(U_i) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{f}{{x_i}^{j-d}} : f \in P_j \right\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{f}{{x_i}^{j}} x_i^d : f \in P_j \right\} = \mathscr{O}(U_i) x_i^d.$$

Para isto, observe que se $g(x) \neq 0$ para qualquer $x \in U_i$, então $V(g) \subset V(x_i)$. Segue pelo Teorema dos Zeros de Hilbert que $< x_i > \subset \sqrt{< g >}$. Portanto $g | x_i^k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e temos $g(x) = x_i^{j-d}$.

Isto sugere a trivialização para este feixe $\varphi_i : \mathcal{F}_d|_{U_i} \longrightarrow \mathscr{O}|_{U_i}$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{i,V}: & \mathcal{F}_d|_{U_i}(V) & \longrightarrow & \mathscr{O}|_{U_i}(V) \\ & \frac{f}{x_i^{j-d}} & \longmapsto & \frac{f}{x_i^j} \end{array},$$

donde surgem as transições $\varphi_{ij}([x]) = (x_i x_j^{-1})^d$ e temos que $\mathcal{F}_d = \mathscr{O}(d)$ pela Proposição 1.1. Também pela Proposição 1.1, $\mathscr{O}(d)$ é um feixe localmente livre de posto 1 e o feixe tangente de $\mathbb{CP}^n$ é localmente livre de posto n.

Agora retomaremos a seqüência (2) ao nível de feixes. Defina o homomorfismo de feixes de $\mathscr{O}$-módulos $\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{O}(1)^{\oplus n+1}$ por:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(U) & \longrightarrow & \mathscr{O}(1)(U)^{\oplus n+1} \\ 1 & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_{n+1}). \end{array}$$

Tensorizando por $\mathscr{O}$(d) teremos $\Phi : \mathscr{O}(d) \longrightarrow \mathscr{O}(d+1)^{\oplus n+1}$.
Lembrando que uma seção do feixe tangente a $\mathbb{CP}^n$ é uma derivação $D : \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, defina o homomorfismo $\Psi : \mathscr{O}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{CP}^n$ por:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathscr{O}(1)(U)^{\oplus n+1} & \xrightarrow{\Psi_U} & T\mathbb{CP}^n(U) & & & & \\ f/g = (\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_{n+1}}{g_{n+1}}) & \longmapsto & D_{f/g}: & \mathscr{O}(U) & \longrightarrow & \mathscr{O}(U) \\ & & & \frac{a}{b} & \longmapsto & \frac{bD_{f/g}a - aD_{f/g}b}{b^2} \end{array}$$

onde $D_{f/g}a := \nabla a \cdot f/g$. Observe que Ψ está bem definida, isto é:

i) Suponha que $grau(a) = grau(b) = k$ e $grau(f_i) = l_i = grau(g_i)+1$. Como $\nabla a = (\frac{\partial a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial x_{n+1}})$, onde $grau(\frac{\partial a}{\partial x_i}) = k-1$ ou $\frac{\partial a}{\partial x_i} = 0$, temos que $bD_{f/g}a = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b\frac{\partial a}{\partial x_i} f_i}{g_i}$, onde $grau(b\frac{\partial a}{\partial x_i} f_i) = 2k + l_i - 1$. Temos também que $grau(b^2 g_i) = 2k + l_i - 1$. Portanto $D_{f/g}\left(\frac{a}{b}\right)$ é a soma de quocientes de polinômios homogêneos de mesmo grau, e concluímos que $D_{f/g}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathscr{O}(U)$;

ii) $D_{f/g}$ é uma derivação:

$$D_{f/g}\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d}\right) = \frac{bd(aD_{f/g}c + cD_{f/g}a) - ac(bD_{f/g}d + dD_{f/g}b)}{(bd)^2} =$$

$$= \frac{cd(bD_{f/g}a - aD_{f/g}b)}{(bd)^2} + \frac{ab(dD_{f/g}c - cD_{f/g}d)}{(bd)^2} =$$

$$\frac{c}{d}D_{f/g}\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}D_{f/g}\left(\frac{c}{d}\right).$$

Novamente calculando o tensorial por $\mathscr{O}(d)$ e mantendo a notação, teremos o homomorfismo $\Psi : \mathscr{O}(d+1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T\mathbb{CP}^n(d)$ e segue da proposição 1.1 o

Teorema 1.3. *A sequência de feixes de $\mathscr{O}$-módulos localmente livres*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(d) \overset{\Phi}{\hookrightarrow} \mathscr{O}(d+1)^{\oplus n+1} \overset{\Psi}{\twoheadrightarrow} T\mathbb{CP}^n(d) \longrightarrow 0$$

é exata.

Agora podemos caracterizar as seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)$:

Teorema 1.4. *Existe um isomorfismo de espaços vetoriais*

$$\Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)) \longleftrightarrow \left\{ \omega \ = \sum_{i=1}^{n+1} f_i dx_i \quad | \quad f_i \in P_{d-1} \ e \ \sum_{i=1}^{n+1} f_i x_i = 0 \right\}.$$

A condição $\sum_{i=1}^{n+1} f_i x_i = 0$ é conhecida como Contração pelo Campo Radial, pois é equivalente à relação $\omega \lrcorner X = 0$, onde $X(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ é o referido campo.

Demonstração: Considere a sequência exata de feixes de $\mathscr{O}$-módulos localmente livres

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-d) \hookrightarrow \mathscr{O}(1-d)^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow T\mathbb{CP}^n(-d) \longrightarrow 0$$

obtida no teorema 1.3.

Dualizando esta sequência, teremos

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{CP}^n}(d) \overset{\Psi^*}{\hookrightarrow} \mathscr{O}(d-1)^{\oplus n+1} \overset{\Phi^*}{\twoheadrightarrow} \mathscr{O}(d) \longrightarrow 0,$$

onde, num aberto distinguido U_i,

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)(U_i) & \overset{\Psi^*}{\hookrightarrow} & \mathscr{O}(d-1)(U_i)^{\oplus n+1} \\ \mathrm{d}\frac{\mathrm{x_j}}{\mathrm{x_i}} & \longmapsto & \frac{1}{x_i}\mathrm{dx_j} - \frac{\mathrm{x_j}}{\mathrm{x_i^2}}\mathrm{dx_i} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}(d-1)(U_i)^{\oplus n+1} & \overset{\Phi^*}{\twoheadrightarrow} & \mathscr{O}(d)(U_i) \\ \left(\frac{f_1}{x_i^{k_1}}, \ldots, \frac{f_{n+1}}{x_i^{k_{n+1}}}\right) & \longmapsto & \sum\limits_{j=1}^{n+1} \frac{f_j x_j}{x_i^{k_j}} \end{array}.$$

Mas, da exatidão da seqüência (3) e usando a proposição 1.2, vemos que

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(d-1))^{\oplus n+1} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(d))$$

é exata. Sabemos que as seções globais de $\mathscr{O}(d-1)$ são polinômios homogêneos de grau $d-1$. Desta forma, a seqüência (4) associa a cada seção global de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(d)$ uma 1-forma $\omega = \sum\limits_{j=1}^{n+1} f_j dx_j$, cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $d-1$. Portanto, a cada seção $S \in \Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}(d))$ podemos identificar uma forma $\omega = \sum\limits_{j=1}^{n+1} f_j dx_j$ contraída pelo campo radial, estabelecendo o isomorfismo desejado. $\square$

Capítulo 2

Formas diferenciais lineares em $\mathbb{CP}^n$

Introduziremos neste capítulo a noção de *folheação* de uma variedade complexa, com ênfase em folheações geradas por campos de hiperplanos induzidos por formas diferenciais de grau 1. Em seguida, no intuito de introduzir a discussão objeto do Capítulo 3, mostraremos que a condição de integrabilidade advinda do Teorema de Frobenius, a saber,

$$\omega \wedge d\omega = 0,$$

com ω em $\Omega_{\mathbb{CP}^3}(2)$, é equivalente à relação quadrática que determina a grassmanniana de retas de $\mathbb{CP}^3$.

2.1 Folheações de codimensão 1

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa de dimensão n. Segundo [LS], uma *folheação holomorfa* de dimensão k em $\mathcal{M}$ é uma decomposição $\mathscr{F}$ de $\mathcal{M}$ em subvariedades complexas (chamadas *folhas de* $\mathscr{F}$) de dimensão k, imersas biunivocamente, com as seguintes propriedades:

(i) Dado $p \in \mathcal{M}$, existe uma única folha L_p da decomposição que passa por p;
(ii) Dado $p \in \mathcal{M}$, existe uma carta holomorfa de $\mathcal{M}$ (φ, U) (chamada carta distinguida de $\mathscr{F}$), onde $p \in U$ e $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$, tal que $\varphi(U) = P \times Q$, onde P e Q são polidiscos abertos em $\mathbb{C}^k$ e $\mathbb{C}^{n-k}$ respectivamente;
(iii) Se L é uma folha de $\mathscr{F}$ tal que $L \cap U \neq \emptyset$, então $L \cap U = \bigcup_{q \in D_{L,U}} \varphi^{-1}(P \times \{q\})$, onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q.

Observe que uma folheação $\mathscr{F}$ de dimensão k, em $\mathcal{M}$, induz um campo de $k-$planos denotado por $T\mathscr{F}$ e definido por

$$T_p\mathscr{F} := T_p(L_p).$$

$T\mathscr{F}$ é chamado fibrado tangente à folheação $\mathscr{F}$.

Considere ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em $\mathcal{M}$. Seja $S = \{p \in \mathcal{M} : \omega_p = 0\}$ o conjunto singular de ω. Neste caso, ω induz um campo de hiperplanos Λ no aberto $\mathcal{N} = \mathcal{M} \backslash S$ definido por:

$$\Lambda_p = \textit{Núcleo}(\omega_p) = \{v \in T_p\mathcal{M} : \omega_p(v) = 0\}.$$

Dizemos que ω é *integrável* se existe uma folheação holomorfa $\mathscr{F}$ em $\mathcal{N}$ tal que $T\mathscr{F} = \Lambda$, ou seja, se o espaço tangente em p à folha de $\mathscr{F}$ que passa por p, é Λ_p. Segundo o Teorema de Frobenius, uma forma diferencial de grau 1 é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$. Este resultado, assim como sua demonstração, podem ser encontrados na página 219 de [CL]. Neste caso, como temos um campo de hiperplanos, cada folha de $\mathscr{F}$ será uma variedade de codimensão 1, gerando uma folheação de codimensão 1.

Note que, se η é outra 1-forma tal que $\eta = f\omega$, onde f é uma função holomorfa que não se anula em $\mathcal{N}$, então o campo de hiperplanos induzidos por η em $\mathcal{N}$ coincide com Λ. De fato, se Σ é o campo de hiperplanos induzido por η, então $\Lambda_p = \{v \in T_p\mathcal{M} : \omega_p(v) = 0\} \subset \{v \in T_p\mathcal{M} : f(p)\omega_p(v) = 0\} = \Sigma_p$. Logo, a dimensão de Σ_p é, no mínimo, $n-1$. Mas sabemos que $\eta_p \neq 0$ em $\mathcal{N}$, portanto a dimensão da imagem de η_p é 1 e segue que $\Lambda_p = \Sigma_p$ para qualquer p em $\mathcal{N}$. Concluímos que η também será integrável e as folheações geradas por η e ω serão as mesmas.

Interessa mais geralmente o fato de que o campo de hiperplanos definido por uma forma diferencial não nula ω não se altera pela multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Deste modo, o espaço destas distribuições de hiperplanos é um espaço projetivo complexo, mais precisamente, a projetivização do espaço das formas.

Usando os resultados do capítulo anterior, podemos encontrar as seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}$. Temos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}) \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(-1))^{\oplus n+1} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}).$$

Mas o fibrado $\mathscr{O}(-1)$ não possui seções globais não nulas, portanto

$$\Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(-1))^{\oplus n+1} = \{(0, \ldots, 0)\}$$

e segue que $\Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}) = \{0\}$.

Da mesma forma podemos encontrar as seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(1)$. Neste caso teremos:

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}(1)) \hookrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O})^{\oplus n+1} \longrightarrow \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(1)).$$

Contudo $\Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(1))$ é isomorfo a $\mathbb{C}^{n+1*}$. Para isto basta observar que uma seção global de $\mathscr{O}(1)$ corresponde a um funcional linear $p : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, isto é, uma forma linear homogênea, o que nos leva a $\Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(1)) = \mathbb{C}^{n+1*}$. Segue que:

$$\Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O})^{\oplus n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{CP}^n, \mathscr{O}(1)),$$

é um isomorfismo e, da sequência exata, $\Gamma(\mathbb{CP}^n, \Omega_{\mathbb{CP}^n}(1)) = \{0\}$.

O caso em que o valor de d é 2 desperta maior interesse. O fibrado $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(2)$ terá seções globais não triviais, que corresponderão a campos de hiperplanos originados de 1-formas diferenciais lineares em $\mathbb{CP}^n$. O restante deste trabalho demonstrará a existência de um isomorfismo natural entre o conjunto das folheações integráveis de codimensão 1, a coeficientes lineares, geradas a partir de campos integráveis, com a variedade de Grassmann das retas projetivas de $\mathbb{C}^{n+1*}$.

2.2 O caso particular $\mathbb{CP}^3$

2.2.1 Grassmanniana de retas em $\mathbb{CP}^3$

A Grassmanniana de retas em $\mathbb{CP}^3$ é a variedade algébrica que parametriza as retas de $\mathbb{CP}^3$. Ela pode ser definida como uma subvariedade do espaço projetivo $\mathbb{CP}^5$. Sabemos que retas em $\mathbb{CP}^3$ correspondem a subespaços bidimensionais de $\mathbb{C}^4$. Considere o espaço vetorial $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ dos bivetores de $\mathbb{C}^4$. A cada subespaço bidimensional W de $\mathbb{C}^4$ podemos associar o bivetor $w_1 \wedge w_2$, onde w_1 e w_2 geram W. Se v_1 e v_2 são outros dois vetores que geram W, então existe um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $w_1 \wedge w_2 = \lambda v_1 \wedge v_2$. Isto mostra que o subespaço W corresponde a um ponto de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4\right)$.

No entanto, nem todo ponto de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4\right)$ corresponde a um subespaço bidimensional de $\mathbb{C}^4$, mas sim aqueles que zeram a relação quadrática

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23},$$

onde fixamos coordenadas $[a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}]$ em $\mathbb{P}\left(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4\right)$.Grassmannianas em geral serão melhor tratadas na primeira seção do capítulo 3.

2.2.2 Seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^3}(2)$ e integrabilidade

Considere uma 1-forma ω correspondente a uma seção global de $\Omega_{\mathbb{CP}^3}(2)$:

$$\omega \ = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j\right) dx_i.$$

Como ω é contraída pelo campo radial, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j\right) x_i = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i}(a_{ij}+a_{ji})x_jx_i$$

de onde concluímos que

$$a_{ji} = -a_{ij}, \quad \text{se} \quad j \geq i.$$

Com estas relações, a 1-forma ω torna-se

$$\omega \ = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i} a_{ij}(x_jdx_i - x_idx_j)$$

e temos um isomorfismo entre o espaço vetorial das formas diferenciais, a coeficientes lineares, contraídas pelo campo radial e o espaço vetorial das matrizes antissimétricas dado por

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j>i} a_{ij}(x_jdx_i - x_idx_j) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora veremos como as relações obtidas acima se refletem na condição de integrabilidade. Calculando a diferencial exterior de ω temos

$$d\omega = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}dx_j\right)\wedge dx_i = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i}(a_{ji}-a_{ij})dx_i\wedge dx_j$$

e substituindo as relações obtidas a partir da contração pelo campo radial

$$d\omega = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i} -2a_{ij}dx_i\wedge dx_j.$$

Como trabalharemos com $\omega \wedge d\omega = 0$, consideraremos $-\frac{1}{2}d\omega$. Calculando o produto exterior

$$\omega \wedge d\omega = \left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i} a_{ij}(x_j dx_i - x_i dx_j)\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{j\geq i} a_{ij}dx_i\wedge dx_j\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34})\, x_4 dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\
&+ (a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34})\, x_3 dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4 \\
&+ (a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34})\, x_2 dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4 \\
&+ (a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}+a_{12}a_{34})\, x_1 dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4
\end{aligned}$$

e podemos observar que os coeficientes dos termos

$$x_i dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge dx_{j_3}$$

são trivialmente nulos se $i = j_k$, para algum $1 \leq k \leq 3$. Nos outros casos, os coeficientes são funções polinomiais correspondentes à relação quadrática que define a grassmanniana de retas de $\mathbb{CP}^3$. Isto leva-nos a procurar uma relação entre as seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^3}(2)$ integráveis e a grassmanniana de retas de $\mathbb{CP}^3$. Faremos isto no próximo capítulo para o caso geral $\mathbb{CP}^n$.

Capítulo 3

Grassmanniana de retas e folheações

Concluiremos o trabalho demonstrando a existência de um isomorfismo natural entre o espaço das folheações em $\mathbb{CP}^n$ de codimensão 1, induzidas por 1-formas a coeficientes lineares, e a grassmanniana das retas do espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1*})$. Para isto, consideraremos o espaço vetorial das formas diferenciais lineares em $\mathbb{CP}^n$, denotado Ξ, e veremos que, dada uma mudança de coordenadas $\Phi : \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^n$, a maneira como o pull-back Φ^* age em Ξ é a mesma de como o isomorfismo

$$\bigwedge^2 \Phi^T : \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*} \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*}$$

age em seu domínio. A partir de um isomorfismo de espaços vetoriais

$$\Psi : \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*} \longrightarrow \Xi,$$

veremos que a imagem da restrição de Ψ ao cone sobre a grassmanniana é exatamente a variedade algébrica definida em Ξ pela condição de integrabilidade,

$$\omega \ \wedge d\omega \ = 0,$$

de onde obteremos o resultado desejado.

Para isto, na seção 3.1 teremos uma breve apresentação das variedades algébricas grassmannianas, enfatizando as relações quadráticas que as definem em cada caso. Já na seção 3.2, utilizando a caracterização das seções globais de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(2)$ obtida no capítulo 1, a partir do conceito de 1-forma integrável e usando da contração pelo campo radial, demonstraremos uma interessante relação entre a condição de integrabilidade e as relações quadráticas que definem a grasmanniana dos subespaços bidimensionais dum espaço vetorial V.

3.1 Grassmannianas

Grassmannianas são as variedades algébricas que parametrizam os subespaços de dimensão k de um espaço vetorial V de dimensão finita ou, equivalentemente, os $(k-1)$-planos de $\mathbb{P}(V)$. Denotamos a Grassmanniana dos k-subespaços de V por $\mathbb{G}(k, V)$. As variedades Grassmannianas podem ser definidas de várias formas. No entanto, adotando uma posição mais pragmática, definiremos $\mathbb{G}(k, V)$ como uma subvariedade de um espaço projetivo $\mathbb{P}^N$, onde

$$N = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - 1.$$

Isto é feito da seguinte forma. Considere o $(N+1)-$espaço vetorial $\bigwedge^k V$ dos k-vetores de V. Tome W um k-plano de V gerado pelos vetores $w_1, \ldots, w_k$. Podemos associar W ao multivetor

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_k \in \bigwedge^k V.$$

Se

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & \dots & w_{kn} \end{pmatrix} = (C_1 \dots C_n),$$

temos

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k = (\cdots, det(C_{j_1} \dots C_{j_k}), \cdots),$$

onde $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Observe que, se $v_1, \dots, v_k$ é outra base de W, existe uma matriz A não singular tal que $[v_{ij}] = A[w_{ij}]$, e segue que

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = det(A) w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k$$

donde vemos que o subespaço W corresponde a um ponto legítimo de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right)$. Estas coordenadas são chamadas coordenadas de Plücker de W.
No entanto, nem todo ponto de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right)$ vem de um k-plano de V. De fato, como pode ser visto em [Harris], existe uma bijeção natural entre os k-planos de V e os pontos de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) = [\dots, a(j_1 \cdots j_k), \dots]$, onde $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, cujas coordenadas satisfazem as relações quadráticas

$$\sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^{\lambda+1} a(j_1 \cdots j_{k-1} l_\lambda) a(l_1 \cdots \widehat{l_\lambda} \dots l_{k+1}) = 0, \quad \text{onde} \quad 1 \leq j_\beta, l_\gamma \leq n$$

considerando as coordenadas $a(j_1 \cdots j_k)$ funções alternadas dos índices $j_1, \dots, j_k$.

3.2 Contração pelo campo radial e integrabilidade

Considere uma 1-forma ω correspondente a uma seção global de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(2)$. Como vimos no Capítulo 1, ω é contraída pelo campo radial. Desta forma, se

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} L_i dx_i, \quad \text{onde} \quad L_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j$$

temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} L_i x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j \right) x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j \geq i} (a_{ij} + a_{ji}) x_j x_i$$

e, substituindo $a_{ji} = -a_{ij}$ sempre que $j \geq i$, ω torna-se

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} (a_{ij} x_j dx_i + a_{ji} x_i dx_j) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} a_{ij} (x_j dx_i - x_i dx_j).$$

Nosso próximo passo será estabelecer a condição de integrabilidade em função dos coeficientes dos polinômios $L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Para isto, precisamos da seguinte

Proposição 3.1. *Seja ω uma 1-forma diferencial correspondente a uma seção global de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(2)$. Então a condição de integrabilidade é dada por*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} \left(\sum_{j<i} a_{ji} - \sum_{j>i} a_{ij} \right) dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right] x_i = 0.$$

Demonstração: Já sabemos que ω é contraída pelo campo radial e, portanto,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} a_{ij} (x_j dx_i - x_i dx_j).$$

Calculando $d\omega$ teremos

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} a_{ij} (dx_j \wedge dx_i - dx_i \wedge dx_j) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} -2 a_{ij} dx_i \wedge dx_j,$$

mas, como nosso objetivo é fazer $\omega \wedge d\omega = 0$, trabalharemos com $-\frac{1}{2} d\omega$. Logo

$$\omega \wedge d\omega = \left[\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} a_{ij} (x_j dx_i - x_i dx_j) \right] \wedge \left[\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} dx_k \wedge dx_l \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl}(x_j dx_i - x_i dx_j) \wedge dx_k \wedge dx_l =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl}(x_j dx_i \wedge dx_k \wedge dx_l - x_i dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l)$$

Considerando $A_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_l$, temos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl} dx_i \wedge dx_k \wedge dx_l \right) x_j = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} A_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j<i} A_{ji} \right) x_i.$$

Da mesma forma, se

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right) x_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} (B_{ij}) x_i$$

teremos:

$$\omega \ \wedge d\omega \ = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j<i} A_{ji} - \sum_{j>i} B_{ij} \right) x_i.$$

Mas observe que:

$$\sum_{j<i} A_{ji} - \sum_{j>i} B_{ij} =$$

$$= \sum_{j<i} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ji}a_{kl} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right) - \sum_{j>i} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{ij}a_{kl} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} \left(\sum_{j<i} a_{ji} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} \left(\sum_{j>i} a_{ij} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} \left(\sum_{j<i} a_{ji} - \sum_{j>i} a_{ij} \right) dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l.$$

Finalmente:

$$\omega \ \wedge d\omega \ = \sum_{i=1}^{n+1} \left[\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{l>k} a_{kl} \left(\sum_{j<i} a_{ji} - \sum_{j>i} a_{ij} \right) dx_j \wedge dx_k \wedge dx_l \right] x_i. \quad \square$$

A relação obtida na proposição 3.1 sugere as relações quadráticas que definem $\mathbb{G}(2,V)$. Neste caso as equações tornam-se

$$\sum_{\lambda=1}^{3}(-1)^{\lambda+1}a(jl_\lambda)a(l_1 \overset{\wedge}{l_\lambda} l_3)$$

onde $1 \leq j, l_\lambda \leq n$. Deveras, como veremos no próximo teorema, as relações quadráticas surgem como coeficientes da forma $\omega \wedge d\omega$. Antes, no entanto, adaptaremos nossa notação. Na proposição 3.1 vimos que

$$\omega \wedge d\omega = \sum_{i=1}^{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}a_{kl}\left(\sum_{j<i}a_{ji}-\sum_{j>i}a_{ij}\right)dx_j\wedge dx_k\wedge dx_l\right]x_i.$$

Porém, tendo em vista o que desejamos, é interessante expressar os coeficientes a_{ij} como funções alternadas dos seus índices. Para isto, basta observar que, como k é sempre menor que l nesta expressão, podemos definir $a(kl) := a_{kl}$. Da mesma forma, definindo a função alternada $a(ji) := a_{ji}$, se $j < i$, e $a(ji) := -a_{ij}$, se $i < j$, seremos coerentes com a relação acima. Portanto, temos que

$$\omega \wedge d\omega = \sum_{i=1}^{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}a(kl)\sum_{j=1}^{n}a(ji)dx_j\wedge dx_k\wedge dx_l\right]x_i.$$

Proposição 3.2. *Seja ω uma 1-forma diferencial correspondente a uma seção global de $\Omega_{\mathbb{CP}^n}(2)$. Suponha que $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} L_i dx_i$, onde $L_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j$. Então o coeficiente do termo $x_j dx_{l_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{l_3}$ na forma diferencial $\omega \wedge d\omega$, é a função polinomial*

$$\sum_{\lambda=1}^{3}(-1)^{\lambda+1}a(jl_\lambda)a(l_1 \overset{\wedge}{l_\lambda} l_3).$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos considerar $l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Pela proposição 3.1, para encontrarmos o coeficiente do termo $x_j dx_{l_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{l_3}$ basta considerarmos a soma

$$a(jl_1)a(l_2l_3)dx_{l_1}\wedge dx_{l_2}\wedge dx_{l_3} + a(jl_2)a(l_1l_3)dx_{l_2}\wedge dx_{l_1}\wedge dx_{l_3} +$$

$$+a(jl_3)a(l_1l_2)dx_{l_3} \wedge dx_{l_1} \wedge dx_{l_2} =$$

$$[-a(jl_1)a(l_2l_3) + a(jl_2)a(l_1l_3) - a(jl_3)a(l_1l_2)]dx_{l_1} \wedge dx_{l_2} \wedge dx_{l_3}$$

donde obtemos o resultado desejado. $\square$

3.3 Grassmanniana de retas

O espaço vetorial das 1-formas diferenciais lineares é isomorfo ao espaço das matrizes $(n+1) \times (n+1)$, via a aplicação

$$x_i dx_j \longmapsto E_{ij}.$$

Definindo

$$\Xi = \left\{ \omega \ = \sum_{i=1}^{n+1} L_i dx_i \quad | \quad \omega \lrcorner X = 0 \right\},$$

teremos que Ξ é o subespaço correspondente às matrizes antissimétricas. De fato, segue pela linearidade que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} a_{ij}(x_j dx_i - x_i dx_j) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n+1} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n+1} & -a_{2n+1} & -a_{3n+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Já o espaço das matrizes antissimétricas $(n+1) \times (n+1)$ é isomorfo ao espaço vetorial dos bivetores de V, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão $n+1$. Isso nos induz a procurar alguma relação entre as 1-formas com as quais estamos trabalhando e a grassmanniana dos subespaços de codimensão 2 de V.

Uma mudança de coordenadas $\Phi : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ pode ser representada por um isomorfismo linear $\Phi : V \longrightarrow V$, ou seja,

$$\Phi(v) = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n+1} \\ & \vdots & \\ c_{i1} & \dots & c_{in+1} \\ & \vdots & \\ c_{n+11} & \dots & c_{n+1n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n+1} c_{1j}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1j}v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(v) \\ \vdots \\ \Phi_i(v) \\ \vdots \\ \Phi_{n+1}(v) \end{bmatrix},$$

onde $det[c_{ij}] \neq 0$.

Considerando a aplicação

$$\bigwedge^2 \Phi^T : \bigwedge^2 V \longrightarrow \bigwedge^2 V$$

definida no espaço vetorial dos bivetores de V por

$$\bigwedge^2 \Phi^T(v \wedge u) = \Phi^T(v) \wedge \Phi^T(u),$$

temos que

$$\Phi^T(e_i) = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik}e_k.$$

Portanto

$$\bigwedge^2 \Phi^T(e_i \wedge e_j) = \Phi^T(e_i) \wedge \Phi^T(e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} c_{ik}e_k\right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{n+1} c_{jl}e_l\right) =$$
$$\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} c_{ik}c_{jl}e_k \wedge e_l = \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}(c_{ik}c_{jl} - c_{il}c_{jk})e_k \wedge e_l.$$

e segue que

$$\bigwedge^2 \Phi^T\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}e_i \wedge e_j\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}(c_{ik}c_{jl} - c_{il}c_{jk})e_k \wedge e_l\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}\begin{vmatrix} c_{ik} & c_{il} \\ c_{jk} & c_{jl} \end{vmatrix} e_k \wedge e_l\right].$$

Por outro lado, considerando $V = \mathbb{C}^{n+1}$, se ω é uma 1-forma que contraída pelo campo radial, calculando o pull-back de ω induzido por Φ temos

$$\Phi^*(\omega\ ) = \Phi^*\left(\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}(x_j dx_i - x_i dx_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}(\Phi_j d\Phi_i - \Phi_i d\Phi_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} c_{jk}x_k\right) d\left(\sum_{l=1}^{n+1} c_{il}x_l\right) - \left(\sum_{l=1}^{n+1} c_{il}x_l\right) d\left(\sum_{k=1}^{n+1} c_{jk}x_k\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1} c_{jk}x_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n+1} c_{il}dx_l\right) - \left(\sum_{l=1}^{n+1} c_{il}x_l\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} c_{jk}dx_k\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} c_{jk}c_{il}x_k dx_l - \sum_{l=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} c_{il}c_{jk}x_l dx_k\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} c_{jk}c_{il}(x_k dx_l - x_l dx_k)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}(c_{jl}c_{ik} - c_{jk}c_{il})(x_l dx_k - x_k dx_l)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j>i} a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{l>k}\begin{vmatrix} c_{ik} & c_{il} \\ c_{jk} & c_{jl}\end{vmatrix}(x_l dx_k - x_k dx_l)\right].$$

Observando que $B = \{x_j dx_i - x_i dx_j | i < j\}$ é uma base de Ξ, e definindo

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*} & \longrightarrow & \Xi \\ & f \wedge g & \longmapsto & gdf - fdg \end{array}$$

temos que Ψ é um isomorfismo de espaços vetoriais que, dada uma mudança de coordenadas $\Phi : \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^n$, produz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*} & \overset{\Psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \Xi & \\ \bigwedge^2 \Phi^T & \downarrow & & \downarrow & \Phi^* \\ & \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*} & \overset{\Psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \Xi & \end{array}$$

Este diagrama mostra que o modo como Φ^* age nas 1-formas é equivalente à maneira como $\bigwedge^2 \Phi^T$ age em $\bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*}$.

Lema 3.1. *Sejam L_0 e $L \subset \mathbb{C}^{n+1*}$ subespaços bidimensionais associados aos pontos p_0 e $p \in \mathbb{G}(2, \mathbb{C}^{n+1*})$, respectivamente. Se $\Phi^T : \mathbb{C}^{n+1*} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1*}$ é um isomorfismo tal que $\Phi^T(L_0) = L$, então $\bigwedge^2 \Phi^T(p_0) = p$.*

Demonstração: Considere $\Phi = (c_{ij})$. Suponha $L_0 =< e_1, e_2 >$ e $L =< v_1, v_2 >$, onde $\Phi^T(e_i) = v_i = \sum_{k=1}^{n+1} c_{ik} e_k$. Desta forma,

$$p_0 = (\ldots, det(A_i A_j), \ldots), \quad i < j \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = [A_1, \ldots, A_{n+1}],$$

ou seja, $p_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+1*}$.

Agora temos que

$$\bigwedge^2 \Phi^T(p_0) = \bigwedge^2 \Phi^T(e_1 \wedge e_2) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j>i} (c_{1i}c_{2j} - c_{1j}c_{2i}) e_i \wedge e_j = \left(\ldots, det \begin{bmatrix} c_{1i} & c_{1j} \\ c_{2i} & c_{2j} \end{bmatrix}, \ldots \right) = p,$$

pois $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. $\square$

Corolário 3.1. *Sejam L_0 e $L \subset \mathbb{C}^{n+1*}$ subespaços bidimensionais associados às 1-formas ω_0 e $\omega \in \Xi$, respectivamente. Se $\Phi^T : \mathbb{C}^{n+1*} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1*}$ é um isomorfismo tal que $\Phi^T(L_0) = L$, então $\Phi^*(\omega_0) = \omega$.*

Agora estamos preparados para demonstrar o

Teorema 3.1. *Existe um isomorfismo natural entre o espaço das folheações em $\mathbb{CP}^n$ de codimensão 1, induzidas por 1-formas a coeficientes lineares, e a Grassmanniana das retas do espaço $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1*})$.*

Demonstração: Considere $\mathbb{P}(\Xi)$ a projetivização do espaço vetorial Ξ, e seja $\mathcal{M}$ a variedade algébrica definida por $\omega \wedge d\omega = 0$. $\mathcal{M}$ está bem definida pois sabemos, pela proposição 3.1, que esta condição equivale à anulação de certos polinômios homogêneos de grau 2. Afirmamos que $\Psi(\mathbb{G}(2, \mathbb{C}^{n+1*})) = \mathcal{M}$. Para isto, basta verificarmos que, se ω é uma 1-forma contraída pelo campo radial e que satisfaz a condição de integrabilidade, então $\omega = fdg - gdf$, onde f e $g \in \mathbb{C}^{n+1*}$. Tome $\omega_0 = x_2dx_1 - x_1dx_2 \in \Xi$. Pela proposição 3.1, as coordenadas de ω e ω_0 satisfazem as relações quadráticas e, conseqüentemente, estão relacionadas a subespaços bidimensionais L e L_0 contidos em $\mathbb{C}^{n+1*}$, respectivamente. Seja $\Phi^T : \mathbb{C}^{n+1*} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1*}$ um isomorfismo tal que $\Phi^T(L_0) = L$. Pelo corolário 3.1, $\Phi^*(\omega_0) = \omega$. Logo

$$\omega = \Phi^*(\omega_0) = \Phi^*(x_2dx_1 - x_1dx_2) =$$

$$= \Phi^*(x_2)d\Phi^*(x_1) - \Phi^*(x_1)d\Phi^*(x_2) = \Phi_2 d\Phi_1 - \Phi_1 d\Phi_2,$$

pois $\Phi^*(x_i) = x_i \circ \Phi$. Concluímos que $\mathcal{M}$ é uma variedade algébrica isomorfa a $\mathbb{G}(2, \mathbb{C}^{n+1*})$. $\square$

Corolário 3.2. *Seja $\mathscr{F}$ uma folheação em $\mathbb{CP}^n$ nas condições do teorema anterior. Então $\mathscr{F}$ é induzida por uma forma diferencial de grau 1*

$$\omega = fdg - gdf,$$

onde f e g são polinômios homogêneos de grau 1.

Referências Bibliográficas

[LS] A.L.Neto e B.A.Scárdua, *Folheações algébricas complexas*, IMPA, 1997.

[CL] C.Camacho e A.L.Neto, *Teoria geométrica das folheações*, IMPA, 1979.

[CL] D.Cerveau e A.L.Neto, *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in* $\mathbb{CP}^n, n \geq 3$, Annals of Mathematics (1996), no. 143, 577–612.

[Shaf] I.Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, vol. 1,2, Springer-Verlag, 1977.

[Harris] J.Harris, *Algebraic geometry - a first course*, Springer-Verlag, 1992.

[A] J.O.C.Andrade, *Persistência de folheações definidas pos formas logarítmicas*, IMPA, 1990.

[J] J.P.Jouanolou, *Equations de Pfaff algébriques*, Springer-Verlag, 1979.

[Hart] R.Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.