

# Superfícies em $\mathbb{R}^3$ de Curvatura Média Constante Invariantes por Subgrupos a 1-Parâmetro de Isometrias

Gil F. de Souza<sup>1</sup>  
Susana C. Fornari<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Aluno de pós-graduação em Matemática UFMG, e-mail: gil@mat.ufmg.br

<sup>2</sup>Orientadora, e-mail: sfornari@mat.ufmg.br

# Sumário

<b>1</b>	<b>Isometrias e Grupos a um parâmetro</b>	<b>4</b>
1.1	Um pouco sobre transformações lineares ortogonais. . . . .	4
1.2	Isometrias . . . . .	5
1.3	O Grupo de Isometrias de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Curvas e Superfícies</b>	<b>11</b>
2.1	Curvas . . . . .	11
2.2	Superfícies . . . . .	12
2.3	Superfícies e Isometrias . . . . .	14
2.4	A Imagem da ação dos grupos $G_{\alpha,\beta}$ em pontos de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Superfícies Translacionais</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Superfícies Rotacionais</b>	<b>19</b>
4.1	As Roulettes das cônicas. . . . .	19
4.1.1	A Roulette da Parábola. . . . .	20
4.1.2	Roulettes em relação a uma reta . . . . .	23
4.1.3	A Ondulóide . . . . .	25
4.1.4	A Nodária . . . . .	28
4.2	As Curvaturas Médias do Catenóide, Ondulóide e Nodóide. . . . .	30
4.3	Superfícies Rotacionais de Curvatura Média Constante. . . . .	31
<b>5</b>	<b>Superfícies Helicoidais</b>	<b>34</b>
5.1	Parametrização Natural e o Lema de Bour. . . . .	34

## Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Susana pela paciência e tempo empreendido não somente no desenvolvimento deste trabalho como, também, durante a minha Iniciação científica sempre me apresentando belos temas. Agradeço aos professores do Dmat-Icex e amigos dos demais cursos. Em especial à Sônia pelas dicas valiosas que tanto me ajudaram na correção deste trabalho e o enriqueceram. Agradeço ao professor Alberto Sarmiento pelas sugestões e críticas, ao Michel pelas belas figuras em Cabri e ao meu amigo Aginaldo pela confecção da figura 5.1.

Agradeço à minha noiva, Cristiane e aos meus familiares pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis.

## Introdução

Neste trabalho estudamos as *superfícies em  $\mathbb{R}^3$  de curvatura média constante invariantes por subgrupos a 1-parâmetro de isometrias*.

No capítulo 1, revisamos alguns conceitos de Álgebra Linear e Teoria de Grupos. Identificamos ainda o grupo  $ISO(\mathbb{R}^3)$  das isometrias de  $\mathbb{R}^3$  com o subgrupo  $G(4)$  de matrizes  $4 \times 4$  da forma:

$$G(4) = \left\{ \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T \in O(3), a \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}), 0 \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \right\}$$

e mostramos que subgrupos a 1-parâmetro de  $G(4)$  são, a menos de conjugação, da forma

$$G_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\},$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  números reais.

No capítulo 2, revisamos alguns conceitos da Geometria das curvas e superfícies. Além de estudarmos a ação dos grupos  $G_{\alpha, \beta}$  sob pontos de  $\mathbb{R}^3$ . Grande parte dos capítulos 1 e 2 foi baseada em [8].

Se  $\alpha = 0$ , o grupo  $G_{0, \beta}$  contém as translações e é denominado *grupo de translação*; no caso em que  $\beta = 0$ ,  $G_{\alpha, 0}$  contém as rotações e é dito *grupo de rotação*; se  $\alpha$  e  $\beta$  são ambos não nulos,  $G_{\alpha, \beta}$  é chamado *grupo de movimentos helicoidais*. Uma superfície  $S$  tal que  $g(S) = S$  para todo  $g \in G_{\alpha, \beta}$  é dita  *$G_{\alpha, \beta}$ -invariante*. As superfícies invariantes pelos grupos  $G_{0, \beta}$ ,  $G_{\alpha, 0}$  e  $G_{\alpha, \beta}$  são chamadas superfícies translacionais, rotacionais e helicoidais, respectivamente.

No capítulo 3, estudamos as superfícies translacionais, concluindo que as únicas superfícies translacionais de curvatura média constante são o cilindro circular e o plano.

No capítulo 4, estudamos as superfícies rotacionais e mostramos um resultado devido a Ch, Delaunay: “Superfícies rotacionais de curvatura média constante são obtidas pela rotação das roulettes das cônicas.” Sendo roulette a trajetória descrita por um dos focos de uma cônica enquanto ela (a cônica) rola sobre uma reta sem deslizar. O conteúdo deste capítulo foi baseado no artigo [5] de J. Eells.

Seja:

$$\Sigma_H = \{\text{superfícies helicoidais em } \mathbb{R}^3 \text{ de curvatura média } H = \text{cte} \neq 0\}$$

e  $S^1$  o círculo unitário parametrizado por  $(\cos \theta, \text{sen} \theta)$  ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ). No capítulo 5, mostramos que existe uma aplicação diferenciável,  $2\pi$ -periódica e sobrejetiva

$$\phi(\theta, B_0) : S^1 \times [0, \infty) \rightarrow \Sigma_H,$$

tal que  $\phi(0, [0, \infty))$  são as superfícies rotacionais em  $\Sigma_H$ . Para a superfície rotacional  $S(B_0) = \phi(0, B_0)$  ( $B_0$  fixo),  $\phi(\theta, B_0)$  ( $\theta \in [0, 2\pi)$ ) é uma família de superfícies helicoidais associada a  $S(B_0)$  (no sentido de que cada superfície dessa família é isométrica a  $S(B_0)$ ). O conteúdo deste capítulo foi baseado no trabalho de Manfredo P. do Carmo e Marcos Dajczer ([3]).

# Capítulo 1

## Isometrias e Grupos a um parâmetro

Para dar início ao estudo das *superfícies invariantes por subgrupos a 1-parâmetro de isometrias*  $\mathbb{R}^3$ , faremos uma breve exposição sobre isometrias, grupos de isometrias e subgrupos a um parâmetro de isometrias.

### 1.1 Um pouco sobre transformações lineares ortogonais.

**Definição 1.1** Uma transformação ortogonal, é uma transformação linear  $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle Cv, Cw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todo par de vetores  $v$  e  $w \in \mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.2** Para cada transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a adjunta de  $T$  é a transformação  $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle,$$

para todo par  $u, v \in \mathbb{R}^3$ .

Segue naturalmente de [7] que se  $C$  é uma transformação ortogonal, então:

- (a)  $CC^* = C^*C = I$ , onde  $I$  é a identidade de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b)  $C^*$  é uma transformação ortogonal.
- (c)  $\det C = \pm 1$ .
- (d)  $C$  preserva a norma euclideana.

**Definição 1.3**  $O(3) = \{C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; CC^* = I\}$  é o conjunto das transformações ortogonais de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 1.1** O conjunto  $O(3)$ , em relação à operação de multiplicação de matrizes (ou composição de funções), é um grupo. ■

**Demonstração:**

- (1) Vejamos que  $O(3)$  é fechado em relação à operação. Sejam  $C$  e  $C' \in O(3)$ , então

$$\langle CC'u, CC'v \rangle = \langle C'u, C'v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Logo  $CC' \in O(3)$ .

- (2) Sabemos que a operação é associativa.  
(3) O elemento neutro é dado pela identidade  $I$  de  $\mathbb{R}^3$ .

(4) Pela definição de  $O(3)$ , o inverso de  $C \in O(3)$  é  $C^*$  logo  $O(3)$  é um grupo. ■

**Definição 1.4** Um subespaço  $V \subset \mathbb{R}^3$  é dito invariante por uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se  $T(V) = V$ .

**Proposição 1.2** Sejam  $C \in O(3)$  e  $V$  um subespaço invariante por  $C$ . Então o complemento ortogonal,  $V^\perp$ , de  $V$  é invariante por  $C$ .

**Demonstração:**

$C$  é bijetora, pois  $\det C = \pm 1 \neq 0$ . Sejam  $x \in V$  e  $y \in V^\perp$ . Como  $V$  é invariante por  $C$ ,  $Cx \in V$  e logo

$$\langle Cx, y \rangle = 0.$$

Como  $C$  é bijetora, existe  $y' \in \mathbb{R}^3$  tal que  $y = Cy'$ . Portanto

$$0 = \langle Cx, y \rangle = \langle Cx, Cy' \rangle = \langle x, y' \rangle$$

e logo  $y' \in V^\perp$ , ou seja,  $V^\perp$  é invariante por  $C$ . ■

**Proposição 1.3** Dada  $C \in O(3)$ , existe uma base ortonormal em que a representação de  $C$  é

$$C_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:**

O polinômio característico de  $C$   $p(\lambda) = \det(C - \lambda I)$  é um polinômio de coeficientes reais e grau três. Portanto  $p(\lambda)$  possui pelo menos uma raiz real  $\lambda_0$ . Então  $Cv = \lambda_0 v$ . Desde que  $C$  é transformação ortogonal o valor de  $\lambda_0$  é 1 ou -1, pois  $\|Cv\| = \|v\| = |\lambda_0| \|v\|$ . Suponhamos que  $C$  possua apenas um autovalor real e que esse autovalor é 1. Consideremos a base ortonormal  $\{v_1, v_2, v_3\}$  tal que  $v_3$  é autovetor associado a  $\lambda_0 = 1$  e os vetores  $v_1$  e  $v_2$  formam uma base (ortonormal) de  $\{v : Cv = v\}^\perp$ . Como  $C$  é transformação ortogonal e  $v_1 \perp v_2$ , resulta  $Cv_1 \perp Cv_2$ . Além disso,  $Cv_1$  e  $Cv_2$  são unitários e, por hipótese,  $\{v : Cv = v\}^\perp$  não possui nenhum subespaço de dimensão 1 deixado invariante por  $C$ . Portanto existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $Cv_1 = \cos \alpha v_1 - \operatorname{sen} \alpha v_2$  e  $Cv_2 = \operatorname{sen} \alpha v_1 + \cos \alpha v_2$ . Assim na base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  a representação de  $C$  é  $C_\alpha$ .

No caso em que todas as raízes de  $p(\lambda)$  são reais,  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como  $\mathbb{R}^3 = \{v : Cv = v\} \oplus \{v : Cv = -v\}$ . Nesse último caso, com a escolha de uma base ortonormal para esses dois subespaços, a representação matricial de  $C$  é  $C_\alpha$ , com  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$ , o que conclui a proposição. ■

## 1.2 Isometrias

**Definição 1.5** Uma função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\|g(u) - g(v)\| = \|u - v\|$  para todo par  $u, v$  em  $\mathbb{R}^3$  é dita uma isometria.

**Exemplo 1.1** Um exemplo trivial de isometria é a translação por um vetor  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $T_a(v) = a + v$ , pois

$$\begin{aligned} \|T_a(u) - T_a(v)\| &= \|a + u - (a + v)\| \\ &= \|u - v\|. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2** Um outro exemplo de isometria é uma transformação linear ortogonal  $C \in O(3)$ , pois

$$\begin{aligned} \|Cv - Cw\|^2 &= \langle Cv, Cv \rangle + \langle Cw, Cw \rangle - 2\langle Cv, Cw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle - 2\langle v, w \rangle \\ &= \|v - w\|^2. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3** Uma função definida por  $g(v) = a + Cv$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $C \in O(3)$  é uma isometria pelos exemplos anteriores.

Na próxima proposição mostraremos que toda isometria  $g$  é da forma  $g(v) = a + Cv$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $C \in O(3)$ .

**Proposição 1.4** Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma isometria. Então existem  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $C \in O(3)$  tais que

$$g(v) = a + Cv,$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^3$ .

**Demonstração:**

Começamos definindo  $a = g(0)$  e  $C(v) = g(v) - a$ . Mostraremos:

- (a)  $C$  preserva a norma,
- (b)  $C$  preserva o produto interno,
- (c)  $C$  é linear.

Prova de (a).  $\|C(v)\| = \|g(v) - a\| = \|g(v) - g(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$ . Logo  $C$  preserva a norma.

Prova de (b).

$$\begin{aligned} \langle C(v), C(w) \rangle &= \|C(v) - C(w)\|^2 - \|C(v)\|^2 - \|C(w)\|^2 \\ &= \|g(v) - g(w)\|^2 - \|C(v)\|^2 - \|C(w)\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Portanto  $C$  preserva o produto interno.

Prova de (c). Da definição de  $C$  temos  $C(0) = 0$ . Além disso, dos itens (a) e (b) obtemos

$$\begin{aligned} \|C(v+w) - C(v) - C(w)\|^2 &= \langle C(v+w) - C(v) - C(w), C(v+w) - C(v) - C(w) \rangle \\ &= \|C(v+w)\|^2 + \|C(v) + C(w)\|^2 - 2\langle C(v+w), C(v) \rangle \\ &\quad - 2\langle C(v+w), C(w) \rangle \\ &= \|C(v+w)\|^2 + \|C(v)\|^2 + \|C(w)\|^2 + 2\langle C(v), C(w) \rangle \\ &\quad - 2\langle C(v+w), C(v) \rangle - 2\langle C(v+w), C(w) \rangle \\ &= \|v+w\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \\ &\quad - 2\langle v+w, v \rangle - 2\langle v+w, w \rangle \\ &= \|v+w\|^2 + \|v+w\|^2 - 2\langle v+w, v+w \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $C(v+w) = C(v) + C(w)$  para todo par  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Juntando ao fato de que  $C(0) = 0$ , obtemos que  $C$  é linear.

Como  $C$  é linear e preserva produto interno, resulta que  $C$  é uma transformação ortogonal. O que conclui a proposição. ■

### 1.3 O Grupo de Isometrias de $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 1.5**  $ISO(\mathbb{R}^3) = \{\text{isometrias de } \mathbb{R}^3\}$  é um grupo com a operação de composição de funções.

**Demonstração:**

Se  $g, h \in k \in ISO(\mathbb{R}^3)$ , pela Proposição 1.4 existem  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  e  $T, S, R \in O(3)$  tais que,  $g(u) = a + Tu$ ,  $h(u) = b + Su$  e  $k(u) = c + Ru$ . Temos então que

- $gh \in ISO(\mathbb{R}^3)$ , pois  $gh(u) = a + T(b + Su) = (a + Tb) + TSu \in ISO(\mathbb{R}^3)$ , pois  $a + Tb \in \mathbb{R}^3$  e  $TS \in O(3)$ ;

- $g(hk) = (gh)k$ , pois

$$g(hk)(u) = g((b + Sc) + SRu) = (a + T(b + Sc)) + TSRu = (a + Tb + TSc) + TSRu$$

e

$$(gh)k(u) = (a + Tb) + TS(c + Ru) = (a + Tb + TSc) + TSRu;$$

- o elemento neutro de  $ISO(\mathbb{R}^3)$  é  $e(u) = u, \forall u \in \mathbb{R}^3$ ;
- o inverso de  $g$  é  $g^{-1}(u) = -T^{-1}a + T^{-1}u$ , pois  $gg^{-1}(u) = a + T(-T^{-1}a + T^{-1}u) = u$  e  $g^{-1}g(u) = -T^{-1}a + T^{-1}(a + Tu) = u$ .

Portanto  $ISO(\mathbb{R}^3)$  é um grupo. ■

**Definição 1.6** Definimos por  $G(4)$ , o subgrupo de matrizes  $4 \times 4$  com a forma

$$G(4) = \left\{ \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T \in O(3), a \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}), 0 = (0, 0, 0) \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \right\}. \quad (1.1)$$

**Proposição 1.6**  $ISO(\mathbb{R}^3)$  é isomorfo a  $G(4)$ .

**Demonstração:**

Recordemos que dois grupos  $G_1$  e  $G_2$ , são isomorfos quando existe uma função bijetora  $\psi : G_1 \rightarrow G_2$  tal que  $\psi(g.g') = \psi(g).\psi(g')$ , para todo  $g$  e  $g' \in G_1$ . Seja

$$\phi : ISO(\mathbb{R}^3) \longrightarrow G(4)$$

$$g(u) = a + Tu \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para  $g(u) = a + Tu$ ,  $h(u) = b + Su$  temos  $g.h = (a + Tb) + TSu$  e  $\phi(g) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\phi(h) = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Então

$$\phi(g).\phi(h) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TS & Tb + a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(gh).$$

Agora devemos mostrar que  $\phi$  é um isomorfismo, i.e, uma aplicação bijetora. Ora  $\phi$  é injetora, pois se  $\phi(g) = \phi(h)$  então  $T = S$  e  $a = b$ , portanto  $g = h$ . Para mostrar a sobrejetividade, seja

$$\begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(4),$$

então

$$\begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(g),$$

com  $g(u) = a + Tu$ . ■

**Definição 1.7** Dizemos que um subgrupo  $H$  de  $G$  é subgrupo a 1-parâmetro se existe uma aplicação contínua e sobrejetora  $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$  tal que  $\psi(r + s) = \psi(r).\psi(s)$  para todo  $r$  e  $s \in \mathbb{R}$ .

**Lema 1.0.1** Sejam  $H \subset G(4)$  um subgrupo a 1-parâmetro e  $h \in H$ . Então  $\det h = 1$ .

**Demonstração:**

Com efeito, seja  $h = \begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(4)$ . O determinante de  $h$  é dado por  $\det h = \det C = \pm 1$ . Como  $H$  é subgrupo a 1-parâmetro, existe um homomorfismo sobrejetivo  $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow H$  tal que  $\psi(1) = h$ . Mas  $\psi(1) = \psi(\frac{1}{2}).\psi(\frac{1}{2}) = (\psi(\frac{1}{2}))^2$ . Assim

$$\det h = \det \psi(1) = \det \left( \psi \left( \frac{1}{2} \right) \right)^2 = \left( \det \psi \left( \frac{1}{2} \right) \right)^2 > 0.$$

Logo  $\det h = 1$ . ■

**Definição 1.8**  $g_1$  e  $g_2 \in G$  são conjugados, se existe  $g \in G$  tal que  $g_2 = gg_1g^{-1}$ , analogamente dois subgrupos  $H_1$  e  $H_2$  de  $G$  são conjugados, se existe  $g \in G$  tal que  $H_2 = gH_1g^{-1}$ .

**Exemplo 1.4** Se  $C \in O(3)$ , da Proposição 1.3, existe uma base ortonormal  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  tal que a representação de  $C$  é  $C_\alpha$ . Denotemos por  $A$  a matriz de passagem da base ortonormal fixa para a base  $\mathcal{B}$ . Então  $C_\alpha = A^{-1}CA$ . Assim  $C$  e  $C_\alpha$  são conjugadas.

**Lema 1.0.2** Seja  $H \subset G(4)$  um subgrupo a 1-parâmetro Então todo

$$h = \begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$$

é conjugado, por elemento de  $G(4)$ , a uma matriz da forma

$$\phi_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & C_\alpha & & 0 \\ & & & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:**

Seja  $h = \begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$  e suponhamos que exista  $g = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(4)$  tal que  $h = g\phi_{\alpha,\beta}g^{-1}$ , i.e,  $hg = g\phi_{\alpha,\beta}$ , ou seja

$$\begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & C_\alpha & & 0 \\ & & & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

O que faremos é determinar  $S$ ,  $b$  e  $\beta$  satisfazendo a equação (1.2). Por igualdade de matrizes em (1.2), obtemos

$$CS = SC_\alpha, \tag{1.3}$$

$$Cb + a = S(0, 0, \beta) + b. \tag{1.4}$$

De (1.3) vemos que,  $S$  é a matriz de passagem da base canônica para a base formada por vetores ortonormais tal que a matriz de  $C$  tem a representação  $C_\alpha$ . Portanto  $S \in O(3)$ . Consideremos  $S = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ , sendo  $v_1, v_2$  e  $v_3$  vetores coluna de  $S$ . Além disto, de (1.3) temos que  $v_3$  é base do subespaço de dimensão 1 invariante por  $C$ . Temos então que

$$(C - I)b = \beta v_3 - a,$$

Assim, perguntamos: Para qual  $\beta$  o vetor  $\beta v_3 - a \in \text{Im}(C - I)$ ? Respondendo a esta pergunta encontraremos  $b$  e  $\beta$  e, finalmente, determinaremos  $g$ .

Pelo Lema 1.0.1,  $\det h = 1$ , pois  $h$  é um elemento de um subgrupo a 1-parâmetro. Logo o número de subespaços de dimensão 1 da forma  $\{v : Cv = v\}$  deixados invariantes por  $C$  é 1 ou 3. Além disso, o número de subespaços de dimensão 1 da forma  $\{v : Cv = -v\}$  é 0 ou 2, pois senão teríamos  $\det C = -1$ . Assim dividimos a pergunta acima em dois casos:

1º Caso)  $\dim \text{Im}(C - I) = 2$ : Nesse caso  $\dim \text{Nuc}(C - I) = 1$  e  $v_3$  é base de  $\text{Nuc}(C - I)$ , pois  $v_3$  é base de  $\{v : Cv = v\} = \text{Nuc}(C - I)$ . Como  $v_1, v_2$  e  $v_3$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  temos que

$$Cv_1 = (\cos \alpha)v_1 + (\text{sen} \alpha)v_2$$

e

$$Cv_2 = -(\text{sen} \alpha)v_1 + (\cos \alpha)v_2,$$

para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Temos então que

$$(C - I)v_1 = (\cos \alpha - 1)v_1 + (\text{sen} \alpha)v_2$$

e

$$(C - I)v_2 = -(\text{sen} \alpha)v_1 + (\cos \alpha - 1)v_2.$$

Logo  $\langle (C - I)v_1, (C - I)v_2 \rangle = (\cos \alpha - 1)\text{sen} \alpha - \text{sen} \alpha(\cos \alpha - 1) = 0$  e  $\{(C - I)v_1, (C - I)v_2\}$  é um conjunto linearmente independente que gera  $\text{Im}(C - I)$ , ou seja,  $\{(C - I)v_1, (C - I)v_2\}$  é base para  $\text{Im}(C - I)$ . Desde que  $(C - I)v_1$  e  $(C - I)v_2$  são escritos como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ , então podemos tomar  $\{v_1, v_2\}$  base para  $\text{Im}(C - I)$ . Além disso  $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(C - I) \oplus \text{Nuc}(C - I)$ . Então todo vetor de  $v \in \mathbb{R}^3$  pode ser escrito na forma

$$v = \tilde{v} + \tilde{\beta}v_3, \text{ com } \tilde{v} \in \text{Im}(C - I), v_3 \in \text{Nuc}(C - I) \text{ e } \tilde{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Assim, escrevemos

$$a = \underbrace{\langle a, v_1 \rangle v_1 + \langle a, v_2 \rangle v_2}_{\in \text{Im}(C - I)} + \underbrace{\langle a, v_3 \rangle v_3}_{\in \text{Nuc}(C - I)}.$$

Tomamos  $\beta = \langle a, v_3 \rangle$  e escolhemos  $b$  na imagem inversa do vetor  $\langle a, v_1 \rangle v_1 + \langle a, v_2 \rangle v_2$  por  $(C - I)$ . O que conclui a primeira parte.

2º Caso)  $\dim \text{Im}(C - I) = 0$ : Escolhemos uma nova base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  tal que a matriz de passagem para esta base seja dada por  $S = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ , com o vetor  $v_3$  que forma a terceira coluna de  $S$  sendo  $v_3 = \frac{a}{\|a\|}$  ( $a \neq 0$ ),  $\beta = \|a\|$  e  $b = 0$ , o que conclui o Lema. ■

**Teorema 1.1** *Todo subgrupo a 1-parâmetro de  $G(4)$  é conjugado (por elemento de  $G(4)$ ) a um subgrupo da forma*

$$G_{\alpha, \beta} = \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & C_{\alpha t} & & 0 \\ & & & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; t \in \mathbb{R} \right\}, \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \text{ fixos.}$$

**Demonstração do Teorema 1.1:**

Sejam  $e$   $H$  grupo a 1-parâmetro de  $G(4)$  e  $h \in H$ . Suponhamos que  $h$  tenha a representação abaixo,

$$h = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então existe um homomorfismo contínuo  $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow H$  tal que  $\psi(1) = h$ . Temos

$$\psi(n) = \psi^n(1) = h^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & \text{sen}(n\alpha) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente  $\psi(1/m) = \psi^m(1/m)$  sendo

$$\psi(1/m) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha/m) & \text{sen}(\alpha/m) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha/m) & \cos(\alpha/m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta/m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com  $n, m \neq 0 \in \mathbb{Z}$ . Então

$$\psi(n/m) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{n}{m}\alpha) & \text{sen}(\frac{n}{m}\alpha) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\frac{n}{m}\alpha) & \cos(\frac{n}{m}\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{n}{m}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $\psi$  é contínua, para  $t \in \mathbb{R}$  resulta

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e esta é a expressão do homomorfismo  $\psi$ .

Agora seja  $\tilde{H} \subset G(4)$  um subgrupo a 1-parâmetro qualquer. Então existe um homomorfismo contínuo  $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow \tilde{H}$  tal que

$$\tilde{\psi}(1) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} g^{-1},$$

com  $g$  dado pelo *Lema* 1.0.2. Repetindo o raciocínio anterior

$$\tilde{\psi}(t) = g \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} g^{-1},$$

portanto, um subgrupo  $H$  a 1-parâmetro de  $G(4)$  é conjugado a um  $G_{\alpha, \beta}$ . ■

O Teorema 1.1 afirma que podemos considerar apenas os grupos  $G_{\alpha, \beta}$  como subgrupos a 1-parâmetro de  $G(4)$ , ou  $ISO(\mathbb{R}^3)$ , pois se  $H$  é subgrupo a 1-parâmetro, podemos por mudança de coordenadas tomá-lo como um  $G_{\alpha, \beta}$ .

## Capítulo 2

# Curvas e Superfícies

### 2.1 Curvas

**Definição 2.1** Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^n$  formado pelos pontos  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ , é o traço de  $\alpha$ . A curva  $\alpha$  é regular se seu vetor tangente é não nulo para todo  $t \in I$ , ou seja,  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Neste trabalho estamos interessados apenas nos casos em que  $n = 2$  ou  $3$ .

**Exemplo 2.1**  $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma parametrização da reta de  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  na direção do vetor  $(a, b, c)$ .

**Exemplo 2.2**  $\beta(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t, z_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma parametrização de um círculo de centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r > 0$ .

**Exemplo 2.3**  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, \delta t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma parametrização da hélice circular de passo  $\delta$  e eixo  $z$ .

**Definição 2.2** Uma curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  se  $\|\alpha'(s)\| = 1$  para todo valor do parâmetro  $s$ . Ou seja, se  $\alpha: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , então  $\alpha$  é parametrizada pelo comprimento de arco se  $\alpha'(s)$  é unitário para todo  $s \in J$ .

**Exemplo 2.4** A curva  $\alpha(s) = (r \cos(\frac{s}{r}), r \sin(\frac{s}{r}))$  com  $s \in [0, 2\pi)$  e  $r > 0$  é parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$\|\alpha'(s)\| = \left\| \left( -\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right) \right\| = \sqrt{\sin^2\left(\frac{s}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)} = 1.$$

**Definição 2.3** A curvatura  $k(t)$  de uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  de  $\mathbb{R}^2$  é dada por

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad (2.1)$$

ou

$$k(s) = \frac{x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .

**Exemplo 2.5** A curva  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é a curva cujo traço é a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e sua curvatura é

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Observamos que a curvatura da elipse não se anula.

**Exemplo 2.6** A curva  $\alpha(t) = (a \cosh t, b \operatorname{senh} t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é a curva cujo traço é a hipérbole de equação  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  e sua curvatura é

$$k(t) = \frac{-ab}{(a^2 \operatorname{senh}^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}.$$

Observamos que a curvatura da hipérbole é não nula para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.4** Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em  $\mathbb{R}^2$  e seja  $\mathbf{n}(s)$  o vetor normal unitário à  $\alpha$  no ponto  $\alpha(s)$ . As Fórmulas de Frenet são:

$$\begin{cases} \alpha''(s) &= k(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -k(s)\alpha'(s) \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.2 Superfícies

**Definição 2.5** Uma superfície parametrizada regular é uma aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto, tal que

(a)  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ ;

(b) para todo par  $(u, v) \in U$ , temos  $X_u(u, v) \wedge X_v(u, v) \neq 0$ , onde  $X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)$  denota o produto vetorial de  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$ .

O subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos  $X(u, v)$  é o traço da aplicação  $X$ .

**Exemplo 2.7** O traço de  $X(u, v) = (r \cos u, r \operatorname{sen} u, v)$ , com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$ , é o cilindro de equação  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**Exemplo 2.8** O traço de  $X(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v)$ , com  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  é a esfera  $S^2$  de centro na origem e raio 1 menos um meridiano.

**Exemplo 2.9** Seja  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$  uma curva regular tal que  $g'(u) \neq 0$  para todo  $u$  do intervalo  $I$ . Então a superfície obtida pela rotação de  $\alpha(u)$  em torno do eixo  $z$  é uma superfície regular parametrizada por  $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$ ,  $v \in [0, 2\pi]$ .

**Exemplo 2.10** O traço de  $X(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ , com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , é chamado helicóide.

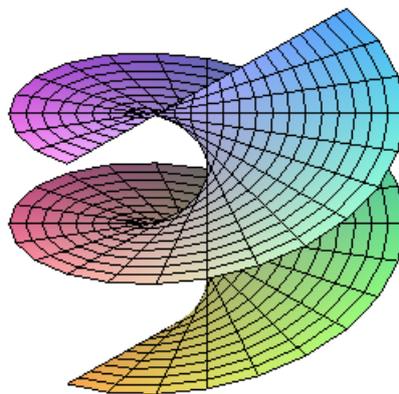


Figura 2.1: O traço do Helicóide

**Exemplo 2.11** Consideramos superfície obtida pela rotação de ângulo  $v$  em torno do eixo  $z$  seguida da elevação de  $\delta v$  da curva  $(2 + \cos u, 0, \text{senu})$ . Uma parametrização para tal superfície é  $X(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \text{senv}, \text{senu} + \delta v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , onde  $\delta$  é um número real e seu caso particular  $\delta = 0$ , a parametrização  $X(u, v)$  descreve o toro obtido pela rotação do círculo no plano  $xOz$  de raio 1 e centro  $(0, 2, 0)$ .

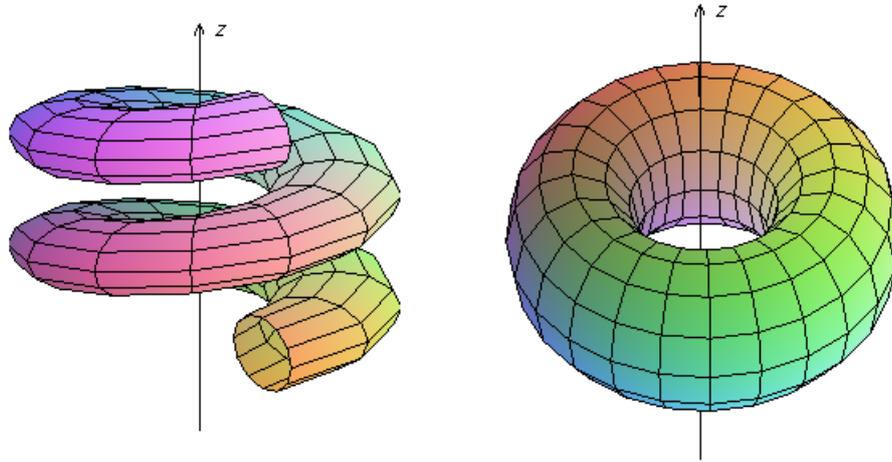


Figura 2.2: O traço das superfícies do exemplo 2.11

**Definição 2.6** A aplicação de Gauss  $N : U \rightarrow S^2$  de uma superfície  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)}{\|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)\|} = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|},$$

onde  $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$  e  $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ .

**Definição 2.7** A curvatura média  $H$  de uma superfície  $S$ , parametrizada por  $X(u, v)$  e a curvatura Gaussiana  $K$  são dadas respectivamente por

$$H = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \tag{2.4}$$

e

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \tag{2.5}$$

onde

$$\begin{cases} E = \langle X_s, X_s \rangle \\ F = \langle X_s, X_t \rangle \\ G = \langle X_t, X_t \rangle \end{cases}, \tag{2.6}$$

são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental e

$$\begin{cases} e = \langle X_{ss}, N \rangle \\ f = \langle X_{st}, N \rangle \\ g = \langle X_{tt}, N \rangle \end{cases}, \tag{2.7}$$

são os coeficientes da Segunda Forma Fundamental.

**Exemplo 2.12** As curvaturas média e gaussiana do cilindro circular reto do exemplo 2.7, com parametrização dada por  $X(u, v) = (r \cos u, r \operatorname{sen} u, v)$  são  $H = -\frac{1}{2r}$  e  $K = 0$ .

**Exemplo 2.13** Seja  $S$  a superfície obtida pela rotação da curva  $(x(u), y(u), 0)$ ,  $u \in I \subset \mathbb{R}$ , em torno do eixo  $x$ .  $S$  é parametrizada por

$$X(u, v) = (x(u), y(u) \cos v, y(u) \operatorname{sen} v), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$\begin{cases} X_u = (x'(u), y'(u) \cos v, y'(u) \operatorname{sen} v) & X_v = (0, y(u) \operatorname{sen} v, y(u) \cos v) \\ N(u, v) = \frac{1}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{1/2}} (-y'(u), x'(u) \cos v, x'(u) \operatorname{sen} v) & X_{uu} = (x''(u), y''(u) \cos v, y''(u) \operatorname{sen} v) \\ X_{uv} = (0, -y'(u) \operatorname{sen} v, y'(u) \cos v) & X_{vv} = (0, -y(u) \cos v, -y(u) \operatorname{sen} v) \end{cases} .$$

Assim

$$\begin{cases} E = x'(u)^2 + y'(u)^2 & F = 0 & G = y(u)^2 \\ e = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}} & f = 0 & g = -\frac{y(u)x'(u)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{1/2}} \end{cases} .$$

Portanto,

$$H = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)}{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}} - \frac{x'(u)}{y(u)(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{1/2}}. \quad (2.8)$$

Observemos que a primeira parcela de  $H$  em (2.8) é a curvatura da curva  $(x(u), y(u), 0)$  (da *curva geratriz* de  $S$ ).

### 2.3 Superfícies e Isometrias

Veremos que a curvatura média  $H$  de uma superfície  $S$  e a curvatura média  $\tilde{H}$  da superfície  $h(S)$ , onde  $h$  pertence a um subgrupo a 1-parâmetro de  $ISO(\mathbb{R}^3)$ , são iguais (i.e.  $H = \tilde{H}$ ).

**Proposição 2.1** *Sejam  $h \in G$ ,  $G$  subgrupo a 1-parâmetro de  $ISO(\mathbb{R}^3)$ ,  $S$  parametrizada por  $X(u, v)$  e  $h(S)$  parametrizada por  $h(X(u, v))$ . Então as curvaturas médias  $H$  e  $\tilde{H}$ , respectivamente, são iguais.*

**Demonstração:**

Mostraremos:

- (a) Os coeficientes  $E, F$  e  $G$  de  $S$  são iguais aos coeficientes  $\tilde{E}, \tilde{F}$  e  $\tilde{G}$  de  $h(S)$  são iguais.
- (b) Os coeficientes  $e, f$  e  $g$  de  $S$  são iguais aos coeficientes  $\tilde{e}, \tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  de  $h(S)$  são iguais.

Do capítulo 1, temos que se  $h \in ISO(\mathbb{R}^3)$ , então  $h(u) = a + Tu$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $T \in O(3)$ . Logo:  $z(u, v) = h(X(u, v)) = a + T(X(u, v))$ . Portanto

$$\begin{cases} z_u = TX_u \\ z_v = TX_v \end{cases} .$$

Então

$$\tilde{E} = \langle z_u, z_u \rangle = \langle TX_u, TX_u \rangle = E.$$

Analogamente temos que  $\tilde{F} = F$  e  $\tilde{G} = G$ .

Temos ainda;

$$\begin{cases} z_{uu} = TX_{uu} \\ z_{uv} = TX_{uv} \\ z_{vv} = TX_{vv} \end{cases} .$$

No vetor normal  $\tilde{N}(u, v) = \frac{z_u \times z_v}{\|z_u \times z_v\|} = \frac{TX_u \times TX_v}{\|TX_u \times TX_v\|}$ , podemos escrever  $\|TX_u \times TX_v\| = \|X_u \times X_v\|$ , pois pela *identidade de Lagrange*

$$\|TX_u \times TX_v\|^2 = \|TX_u\|^2 \|TX_v\|^2 - (\langle TX_u, TX_v \rangle)^2 = \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - (\langle X_u, X_v \rangle)^2 = \|X_u \times X_v\|^2 .$$

Assim

$$\tilde{N}(u, v) = \frac{TX_u \times TX_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

Calculando o coeficiente  $\tilde{e}$  da Segunda Forma Fundamental.

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \langle TX_{uu}, \tilde{N}(u, v) \rangle = \left\langle TX_{uu}, \frac{TX_u \times TX_v}{\|X_u \times X_v\|} \right\rangle = \frac{\det \begin{bmatrix} TX_{uu} \\ TX_u \\ TX_v \end{bmatrix}}{\|X_u \times X_v\|} \\ &= \frac{\det(h)}{\|X_u \times X_v\|} \det \begin{bmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{bmatrix} = \det(h) \langle X_{uu}, N(u, v) \rangle \\ &= \det(h).e. \end{aligned}$$

Sendo  $N(u, v)$  o vetor normal de  $X(u, v)$ . Pelo Lema 1.0.1,  $\det(h) = 1$ . Logo  $e = \tilde{e}$ . Analogamente,  $\tilde{f} = f$  e  $\tilde{g} = g$ . Juntando (a) e (b) com a expressão (2.4), obtemos  $H = \tilde{H}$ . ■

**Definição 2.8** Dizemos que uma superfície  $S$  é invariante por um subgrupo  $G \subset ISO(\mathbb{R}^3)$  ( $G$ -invariante) se  $h(S) = S$  para todo  $h \in G$ .

Unindo a Proposição 2.1 com o Teorema 1.1, vemos que para estudar as superfícies em  $\mathbb{R}^3$  de curvatura média constante invariantes por subgrupos a 1-parâmetro de  $ISO(\mathbb{R}^3)$ , basta estudar as superfícies de curvatura média constante invariantes pelos grupos  $G_{\alpha, \beta}$ . A nossa próxima seção se dedicará a descrever as formas que os grupos  $G_{\alpha, \beta}$  podem assumir e estudar a imagem da ação desses grupos.

## 2.4 A Imagem da ação dos grupos $G_{\alpha, \beta}$ em pontos de $\mathbb{R}^3$

No capítulo 1, vimos que o grupo  $ISO(\mathbb{R}^3)$  é isomorfo ao grupo  $G(4)$ . Além disso, todo subgrupo a 1-parâmetro de  $ISO(\mathbb{R}^3)$  é identificado, a menos de conjugação, com um subgrupo de  $G(4)$  da forma

$$G_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Primeiramente, veremos como  $G_{\alpha, \beta}$  age sobre pontos de  $\mathbb{R}^3$ . Recordemos que uma isometria  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  é da forma  $h(u) = a + Tu$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $T \in O(3)$ . Após a identificação com  $G(4)$ , temos  $\tilde{h} = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Observamos que  $\tilde{h}$  age

sobre  $\begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 1 \end{bmatrix}$  do mesmo modo que  $h$  age sobre o vetor  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ , pois

$$\tilde{h} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tu + a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $\tilde{h} \in G(4)$  age sobre vetores  $(u_1, u_2, u_3, 1) \in \mathbb{R}^4$  da mesma forma que  $h \in ISO(\mathbb{R}^3)$  age sobre  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Agora, estudaremos as formas de  $G_{\alpha, \beta}$  e sua ação em vetores  $(u_1, u_2, u_3)$  (estamos identificando  $(u_1, u_2, u_3, 1) \in \mathbb{R}^4$  com o vetor  $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ ).

O grupo  $G_{\alpha, \beta}$  assume três formas:

- (a)  $\alpha = 0$  e  $G_{0,\beta}$  contém translações na direção do eixo  $z$ . A imagem da ação de  $G_{0,\beta}$  sobre  $(x_0, y_0, z_0)$  é uma reta na direção do eixo  $z$ , pois

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + \beta t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (b)  $\beta = 0$  e  $G_{\alpha,0}$  contém as rotações em torno do eixo  $z$ . A imagem da ação de  $G_{\alpha,0}$  sobre  $(x_0, y_0, z_0)$  é um círculo de centro  $(0, 0, z_0)$  e raio  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\alpha t) - y_0 \text{sen}(\alpha t) \\ x_0 \text{sen}(\alpha t) + y_0 \cos(\alpha t) \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) No caso  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ , temos  $G_{\alpha,\beta} = G_{1,\delta}$ , onde  $\delta = \alpha/\beta$ , pois, seja

$$\phi_{\alpha t, \beta t} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & \text{sen}(\alpha t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_{\alpha,\beta}.$$

Então  $\phi_{\alpha t, \beta t} = \phi_{1, \alpha t, \beta, \delta t} \in G_{1,\delta}$ . Reciprocamente, temos  $\phi_{t, \delta t} = \phi_{\alpha, \frac{t}{\alpha}, \beta, \frac{t}{\alpha}} \in G_{\alpha,\beta}$ , logo  $G_{\alpha,\beta} = G_{1,\delta}$ .

Quanto à ação de  $G_{1,\delta}$  sobre um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ , temos

$$\begin{bmatrix} \cos t & \text{sent} & 0 & 0 \\ -\text{sent} & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \text{sent} \\ x_0 \text{sent} + y_0 \cos t \\ z_0 + \delta t \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, uma hélice circular de passo  $\delta$  e eixo  $z$ .

## Capítulo 3

# Superfícies Translacionais

*Superfícies Translacionais* são aquelas invariantes por translações em uma dada direção de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 3.1** O cilindro  $\alpha(t) + r\mathbf{w}$ , sendo  $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ ,  $t$  definida no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , é invariante pela translação de qualquer múltiplo de  $\mathbf{w}$ .

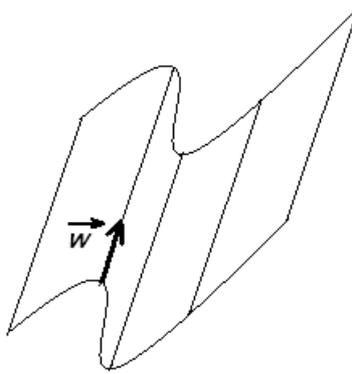


Figura 3.1: Um cilindro.

**Proposição 3.1** Seja  $S$  uma superfície translacional de curvatura média constante, então ou  $S$  é um plano, ou  $S$  é um cilindro.

### Demonstração:

Pelo Teorema 1.1, o subgrupo a 1-parâmetro das translações em uma dada direção é identificado, via mudança de coordenadas, com o subgrupo a um parâmetro  $G_{0,\beta}$ . As superfícies translacionais são então superfícies invariantes por  $G_{0,\beta}$ . Observamos que uma superfície  $G_{0,\beta}$ -invariante possui um ponto da forma  $(x, y, 0)$ , pois se  $(x, y, z) \in S$ , como  $S$  é  $G_{0,\beta}$ -invariante e a translação  $g$  dada por  $(0, 0, -z)$  pertence a  $G_{0,\beta}$ , resulta  $g(x, y, z) = (x, y, 0) \in S$ .

Se  $S$  uma superfície  $G_{0,\beta}$ -invariante parametrizada por  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ . Como para todo  $p \in S$  existe uma reta na direção de  $(0, 0, 1)$ , consideramos a parametrização de uma destas retas dada por  $X(u(t), v(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{dX}{dt} = X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt}$$

é um vetor na direção de  $(0, 0, 1)$ , portanto  $(0, 0, 1)$  pertence a todo plano tangente de  $S$ . Logo seu vetor normal em cada ponto é linearmente independente com o vetor  $(0, 0, 1)$  o que faz da intersecção de  $S$  com o plano  $xOy$  uma curva regular plana, denotemos esta curva por  $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ , já tomando-a com o parâmetro comprimento de arco  $s$ , então uma parametrização para  $S$  é  $\bar{X}(s, t) = (x(s), y(s), t)$ .

Então calculamos os vetores  $\bar{X}_s$  e  $\bar{X}_t$ , tangentes a  $S$ .

$$\bar{X}_s = (x'(s), y'(s), 0), \tag{3.1}$$

e

$$\bar{X}_t = (0, 0, 1). \tag{3.2}$$

Seu vetor normal é dado por,

$$\bar{X}_s \wedge \bar{X}_t = \beta(y'(s), -x'(s), 0).$$

Então a aplicação normal de  $S$  é  $N(s, t) = (y'(s), -x'(s), 0)$ , pois  $\|\bar{X}_s \wedge \bar{X}_t\| = 1$ .

Temos

$$\begin{cases} x_{ss} &= (x''(s), y''(s), 0) \\ x_{st} &= (0, 0, 0) \\ x_{tt} &= (0, 0, 0) \end{cases},$$

e

$$\begin{cases} e &= x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) \\ f &= 0 \\ g &= 0 \end{cases},$$

a expressão da curvatura média de  $S$  é,

$$2H = x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s). \tag{3.3}$$

A expressão obtida em (3.3) é a expressão da curvatura de  $\gamma$  a menos de sinal, portanto  $\gamma(s)$  é uma reta ou uma circunferência. Reciprocamente, se  $S$  é um cilindro circular reto de raio  $a > 0$ , sua curvatura média é  $H = \frac{1}{2a}$  ([2], pg 147); se  $S$  é um plano então  $H = 0$  ([2], pg 147). Portanto se  $S$  é uma superfície  $G_{0,\beta}$ -invariante de curvatura média constante, então  $S$  é um cilindro circular reto ou um plano. ■

## Capítulo 4

# Superfícies Rotacionais

Superfícies rotacionais são as superfícies que são invariantes por rotações em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, por rotações em relação a uma dada reta. Seu estudo se reduz ao estudo da *curva geratriz*, isto é, a curva descrita pela intersecção da superfície com um plano que contenha o eixo de rotação.

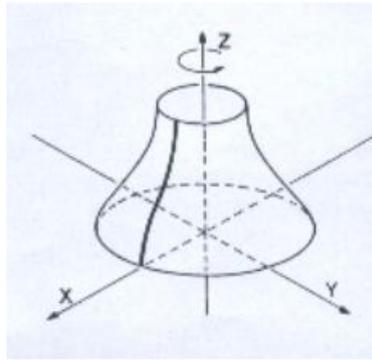


Figura 4.1: Uma superfície de rotação de eixo  $z$ .

Pelo Teorema 1.1, o subgrupo das rotações em relação a um determinado eixo é identificado, via mudança de coordenadas, com o subgrupo a um parâmetro  $G_{\alpha,0}$ . As superfícies rotacionais, são, então, superfícies invariantes por  $G_{\alpha,0}$ .

Neste capítulo mostraremos os seguinte resultado provado por C. Delaunay em 1841 [4]:

**Teorema 4.1** (Delaunay) *Uma superfície rotacional de curvatura média constante é obtida pela rotação da roulette de uma cônica.*

A demonstração apresentada se baseia no artigo de Eells [5] e segue as seguintes etapas:

- 1º) descreveremos as roulettes das cônicas;
- 2º) iremos calcular as curvaturas médias das superfícies obtidas pela rotação destas curvas;
- 3º) via expressão da curvatura média, demonstraremos que a curva geratriz de uma superfície de rotação de curvatura média constante não-nula satisfaz às equações das roulettes da elipse ou da hipérbole.

### 4.1 As Roulettes das cônicas.

Descreveremos as roulettes das cônicas.

### 4.1.1 A Roulette da Parábola.

Como ilustração, determinaremos, primeiro a roulette da parábola. Uma *parábola* de foco  $F$  e reta *diretriz*  $r$  é o conjunto  $\{K \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(K, F) = \text{dist}(K, r)\}$ . O ponto  $V$  da parábola com a menor distância a  $r$  é denominado *vértice da parábola*.  $V$  está na reta perpendicular a  $r$  que contém o foco  $F$  da parábola, pois a reta que é perpendicular a  $r$  e passa por  $F$  é a que dá a menor distância entre  $F$  e a diretriz, portanto a menor distância entre a parábola e a diretriz.

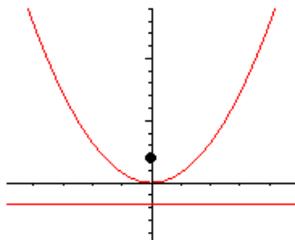


Figura 4.2: Parábola com foco  $F=(0,c)$ .

Tomando o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  em que  $V=(0,0)$  e o eixo  $x$  é paralelo à reta diretriz, sejam  $F = (0, c)$  o foco e  $y = -c$  a reta diretriz. A equação da parábola é

$$y = \frac{x^2}{4c}. \tag{4.1}$$

**Definição 4.1** A roulette do foco  $F$  em relação a uma reta tangente à parábola é a trajetória que  $F$  descreve enquanto a parábola rola sobre esta reta sem deslizar.

O objetivo desta seção é mostrar que esta roulette é uma catenária. Para tal vamos mostrar os seguintes lemas:

**Lema 4.1.1** Sejam  $t$  a reta tangente à parábola  $y = \frac{x^2}{4c}$  em um ponto  $K = (x_0, \frac{x_0^2}{4c})$  e  $P$  o ponto de intersecção de  $t$  com o eixo  $x$ . Então  $P = (\frac{x_0}{2}, 0)$ .

**Demonstração:**

A equação de  $t$  é  $y = \frac{x_0}{2c}x - \frac{x_0}{2c}x + \frac{x_0^2}{4c}$ . Logo, para  $y = 0$  temos  $P = (\frac{x_0}{2}, 0)$ . ■ Para determinar a coordenada  $y$  da roulette, encontraremos um ponto  $P'$  de  $t$  tal que  $P'F$  seja perpendicular a  $t$ . O próximo lema determinará  $P'$ .

**Lema 4.1.2** Com a notação do Lema 4.1.1,  $FP$  é perpendicular à reta  $t$ .

**Demonstração:**

Sejam  $m :=$  coeficiente angular da reta  $FP$  e  $m' :=$  coeficiente angular de  $t$ . Basta mostrar que  $m.m' = -1$ . Como  $m = \frac{-c}{x_0/2} = -\frac{2c}{x_0}$  e  $m' = \frac{x_0}{2c}$  e portanto,  $m.m' = -\frac{2c}{x_0} \cdot \frac{x_0}{2c} = -1$ . Logo  $FP \perp t$ . ■

A figura 4.3 representa dois instantes diferentes em que a parábola rola sem deslizar sobre o eixo  $x$ , que é a reta tangente do vértice.

- o primeiro instante (em linha cheia) representa o momento inicial do movimento em que a parábola é tangente ao eixo  $x$  em  $V = (0, 0)$  e o foco está em  $F = (0, c)$  e está representada também a reta tangente  $t$  em  $K$ ;
- o segundo instante (em linha tracejada) representa o momento em que a parábola rolou até o ponto  $K$ , agora representado por  $\tilde{K}$ , ser tangente ao eixo  $x$ . O lema seguinte determinará equações para as coordenadas da roulette da parábola.

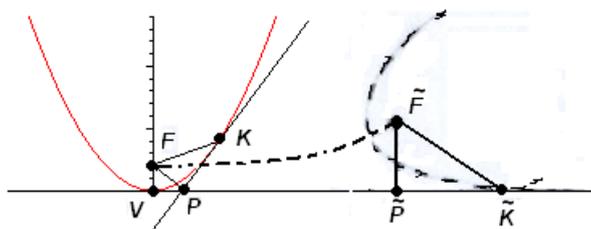


Figura 4.3: Parábola rolando.

**Lema 4.1.3** Uma parametrização em coordenadas cartesianas da roulette da parábola de equação  $y = \frac{x^2}{4c}$  é

$$\beta(x) = \left( \int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^2}{4c^2}} dr - \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}, c \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}} \right) \quad (4.2)$$

**Demonstração:**

A parábola de equação  $y = \frac{x^2}{4c}$  pode ser parametrizada por  $\alpha(x) = \left( x, \frac{x^2}{4c} \right)$ . Pelo Lema 4.1.1,  $P = \left( \frac{x}{2}, 0 \right)$  e logo  $|PF| = \left( c^2 + \frac{x^2}{4} \right)^{1/2} = c \left( 1 + \frac{x^2}{4c^2} \right)^{1/2}$ . Analisando o instante em que o ponto  $K = \left( x, \frac{x^2}{4c} \right)$  é tangente ao eixo  $x$ , as coordenadas do foco (agora representado por  $\tilde{F}$ ) são dadas por  $(|V\tilde{P}|, |\tilde{P}\tilde{F}|) = (|V\tilde{P}|, |PF|)$ . Ora

$$|V\tilde{P}| = |V\tilde{K}| - |\tilde{P}\tilde{K}|,$$

onde  $|V\tilde{K}|$  é o comprimento do arco da parábola de 0 até  $x$ , ou seja

$$|V\tilde{K}| = \int_0^x \left( 1 + \frac{r^2}{4c^2} \right)^{1/2} dr.$$

Por outro lado,

$$|PK| = \left( \left( x - \frac{x}{2} \right)^2 + \left( \frac{x^2}{4c} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{4c^2} \right)^{1/2}.$$

Logo

$$|V\tilde{P}| = \int_0^x \left( 1 + \frac{r^2}{4c^2} \right)^{1/2} dr - \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{4c^2} \right)^{1/2}.$$

■

**Lema 4.1.4** Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  a reparametrização por comprimento de arco da roulette da parábola dada por  $\beta(x) = (\bar{x}(x), \bar{y}(x))$  do Lema 4.1.3. Então

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{y(s)}. \quad (4.3)$$

**Demonstração:**

Ora

$$\bar{x}(x) = \int_0^x \left(1 + \frac{r^2}{4c^2}\right)^{1/2} dr - \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2}$$

e . Calculando a derivada de  $\bar{x}(x)$ , temos

$$\bar{y}(x) = c \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2}$$

$$\bar{x}'(x) = \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2} - \frac{x}{2} \frac{(2x)}{(4c^2)} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2}.$$

Calculando a derivada de  $\bar{y}(x)$ , temos

$$\bar{y}'(x) = c \frac{2x}{4c^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2} = \frac{x}{4c} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2}.$$

Logo

$$\bar{x}'(x)^2 + \bar{y}'(x)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1} + \frac{x^2}{16c^2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Como o parâmetro comprimento de arco  $s$  de  $\beta$  é dado por  $s(x) = \int_0^x |\beta'(r)| dr = \int_0^x \sqrt{\bar{x}'(r)^2 + \bar{y}'(r)^2} dr$ , temos  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\bar{x}'(x)^2 + \bar{y}'(x)^2}$ . Logo  $\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}'(x(s))^2 + \bar{y}'(x(s))^2}} = 2$ . Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{d\bar{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x(s)^2}{4c^2}\right)^{1/2} \cdot 2 = \frac{c}{y(x(s))} = \frac{c}{y(s)}.$$

■

**Proposição 4.1** *A roulette da parábola de equação  $y = \frac{x^2}{4c}$  é a catenária de equação  $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$*

**Demonstração:**

Pela equação (4.3)  $\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{c}{\bar{y}(s)}$ . Como  $\beta(x(s)) = \beta(s)$  é regular, temos que a roulette da parábola é (localmente)

o gráfico de uma função  $(x, y(x))$ . Além disso,  $\frac{ds}{dx} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \neq 0$ , portanto,

$$\frac{dx}{ds} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-1/2}.$$

Então reescrevemos (4.3) como,

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{c}{y}. \tag{4.4}$$

Logo,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{c^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left(\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1\right)^{1/2}.$$

Observando que  $z/c \geq 1$  ( $c$  é a menor distância do foco a parábola) e resolvendo a equação diferencial acima por separação de variáveis obtemos

$$y = y(x) = c \cosh \left( \pm \frac{x}{c} + \text{const.} \right).$$

Considerando  $y(0) = c$ , resulta  $\text{const.} = 0$ . Como  $\cosh$  é uma função par, obtemos

$$y(x) = c \cosh \left( \pm \frac{x}{c} \right) = c \cosh \left( \frac{x}{c} \right).$$

■

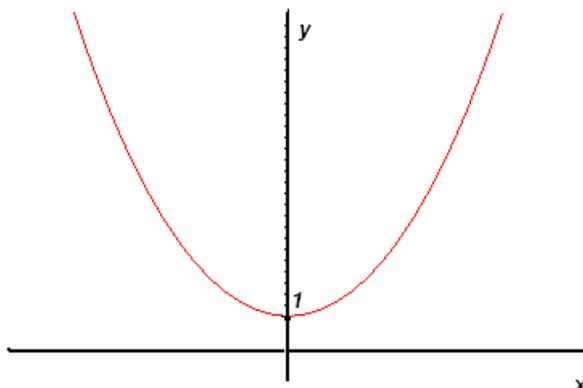


Figura 4.4: A Catenária.

### 4.1.2 Roulettes em relação a uma reta

A subseção anterior é a motivação desta subseção. Determinaremos propriedades úteis das roulettes em relação a uma reta.

**Definição 4.2** *A roulette de um ponto  $F$  associado a curva  $C$  em relação a uma reta tangente à  $C$  é a trajetória descrita por  $F$  enquanto  $C$  rola sobre esta reta tangente sem deslizar.*

**Proposição 4.2** *Sejam  $C$  uma curva regular com curvatura que não se anula e  $F$  um ponto que não pertence a  $C$ . Seja  $\beta$  a roulette de  $F$  associado a  $C$  em relação a uma reta tangente à  $C$ . Seja  $\tilde{F}$  um ponto de  $\beta$  e  $\tilde{K}$  o ponto de contato de  $C$  com o eixo  $x$  (nesse instante). Então a roulette de  $F$  em relação à reta tangente de  $C$  é uma curva regular, além disso a reta normal a roulette em  $\tilde{F}$  passa por  $\tilde{K}$ , ou seja o segmento  $\tilde{F}\tilde{K}$  é perpendicular à reta tangente à roulette em  $\tilde{F}$ .*

**Demonstração:**

Consideramos a roulette de  $F = (x_0, y_0)$  associada à curva  $C$  parametrizada por  $\alpha(\bar{s})$ , onde  $\bar{s}$  é o parâmetro comprimento de arco da curva  $C$ .

A figura 4.5 representa dois instantes diferentes:

- No primeiro instante, antes de  $C$  começar a rolar, estão indicados o ponto  $F = (x_0, y_0)$ , a reta  $t$ , tangente a  $C$  em  $K = \alpha(\bar{s})$ , o ponto  $P \in t$  tal que  $FP \perp t$  e os vetores tangente e normal à  $C$  ( $\alpha'(\bar{s}) = \alpha'$  e  $n(\bar{s}) = n$ );
- o segundo momento representa o instante em que  $C$  rolou sobre o eixo  $x$ , sem deslizar, até o ponto  $K$  (agora representado por  $\tilde{K}$ ) ser tangente ao eixo  $x$ .

A demonstração da proposição será feita em três etapas:

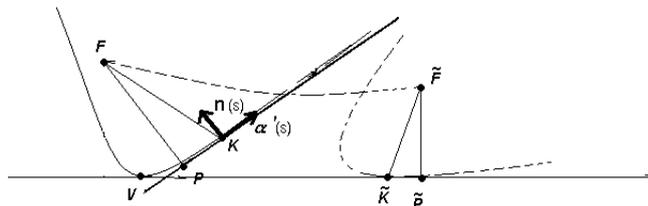


Figura 4.5: Uma roulette.

1. determinamos o vetor  $\overrightarrow{FK}$ ;
2. determinamos uma parametrização  $\beta(\bar{s})$  para a roulette;
3. calculamos  $\langle \overrightarrow{FK}, \alpha'(\bar{s}) \rangle$ , concluindo a proposição.

Suponhamos  $C$  orientada de tal modo que o vetor normal unitário  $n(\bar{s})$  em  $K = \alpha(\bar{s})$  aponte para “dentro” (fig. 4.5).

Temos  $\overrightarrow{FK} = \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle \alpha' + \langle \overrightarrow{FK}, n \rangle n = (|PK|)\alpha' - (|PF|)n$ .

No segundo instante,  $C$  rolou até  $K$  ser tangente ao eixo  $x$  ( $K$  agora é representado por  $\tilde{K}$ ). Nesse instante os vetores  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  desempenham o papel de vetores tangente e normal, respectivamente, à  $C$  em  $\tilde{K}$  e

$\tilde{F}\tilde{K} = (\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle) = (|PK|, -|PF|)$ .

As coordenadas de  $\tilde{F} = (\tilde{x}, \tilde{y})$  são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{x} = |V\tilde{K}| - |\tilde{P}\tilde{K}| = |V\tilde{K}| - |PK| \\ \tilde{y} = |\tilde{P}\tilde{F}| = |PF| \end{cases} \quad (4.5)$$

$|V\tilde{K}|$  é igual ao comprimento de arco de  $C$  entre  $V = \alpha(0)$  e  $K = \alpha(\bar{s})$ . Logo  $|V\tilde{K}| = \bar{s}$ , pois  $\bar{s}$  é o parâmetro comprimento de arco de  $C$ . Como  $|PK| = \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle$  e  $|PF| = -\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle$ , uma parametrização da roulette de  $F$  é

$$\beta(\bar{s}) = (\bar{s} - \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle). \quad (4.6)$$

O vetor  $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FK} = \alpha(\bar{s}) - F$  e logo  $\frac{d}{d\bar{s}} \overrightarrow{FK} = \alpha'$ . Então o vetor tangente de  $\beta(\bar{s})$  é

$$\begin{aligned}
 \beta'(\bar{s}) &= \left(1 - \frac{d}{d\bar{s}} \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, \frac{d}{d\bar{s}} \langle \overrightarrow{FK}, n \rangle\right) \\
 &= \left(1 - \left(\left\langle \frac{d}{d\bar{s}} \overrightarrow{FK}, \alpha' \right\rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle\right), \left\langle \frac{d}{d\bar{s}} \overrightarrow{FK}, n' \right\rangle + \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle\right) \\
 &= \left(1 - \left(\langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle\right), \langle \alpha', n \rangle + \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle\right) \\
 &= \left(-\langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle\right) \\
 &= k \left(-\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle\right) \\
 &= k \left(-|PF|, -|PK|\right),
 \end{aligned}$$

pois pelas fórmulas de Frenet,  $\alpha'' = kn$  e  $n' = -k\alpha'$ , onde  $k$  a curvatura de  $C$  em  $\alpha(\bar{s})$ . Portanto

$$\langle \overrightarrow{FK}, \overrightarrow{F}'(\bar{s}) \rangle = k \left(-|PK| \cdot |PF| + (-|PF|)(-|PK|)\right) = 0,$$

o que conclui a demonstração. A afirmação de que a roulette é uma curva regular é resultado imediato da equação  $\beta'(s) = k(-|PF|, -|PK|)$ , pois  $k \neq 0$ . ■

**Observação 4.1** Na demonstração da Proposição 4.2, para a deduzir uma equação para  $\beta(\bar{s})$  utilizamos a hipótese de que a reta  $t$ , tangente à  $C$ , tem inclinação positiva (figura 4.5). No entanto, se  $t$  tivesse inclinação negativa, com a mesma escolha de orientação em  $C$ , obteríamos a mesma parametrização  $\beta(\bar{s})$  para a roulette.

**Observação 4.2** A Proposição 4.2 foi demonstrada sob a hipótese de que a curvatura de  $C$  não se anula, o que garante que a trajetória de  $F$  é uma curva regular.

**Corolário 4.2.1** *Seja  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  a reparametrização de  $\beta(\bar{s})$  pelo parâmetro comprimento de arco  $s$ . Então, com a mesma notação da Proposição 4.2,*

$$|\tilde{F}\tilde{K}| = \pm |\tilde{P}\tilde{F}| \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1} = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}, \quad (4.7)$$

onde  $\tilde{K}$  é o ponto de contato de  $C$  com o eixo  $x$ .

**Demonstração:** Com efeito, como visto na proposição anterior,  $\beta'(\bar{s}) = k(-|PF|, -|PK|) = -k(|PF|, |PK|)$ , logo

$$\|\beta'(\bar{s})\| = |k| \sqrt{(|PF|)^2 + (|PK|)^2} = |k| \cdot |FK|.$$

Por hipótese  $k \neq 0$ , daí

$$\frac{\beta'(\bar{s})}{\|\beta'(\bar{s})\|} = \pm \left(\frac{|PF|}{|FK|}, \frac{|PK|}{|FK|}\right).$$

Como  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  é a reparametrização pelo comprimento, então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{|PF|}{|FK|} = \pm \frac{y(s)}{|FK|}.$$

■

### 4.1.3 A Ondulóide

A elipse de focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  é o conjunto dos pontos  $K \in \mathbb{R}^2$  tais que a soma dos comprimentos dos raios focais é constante, ou seja  $|F_1K| + |F_2K| = 2a > 0$ , onde  $a > c$  é o comprimento do semi-eixo maior e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  o comprimento do semi-eixo menor.

Do Exemplo 2.5 e pela Proposição 4.2 segue imediatamente que

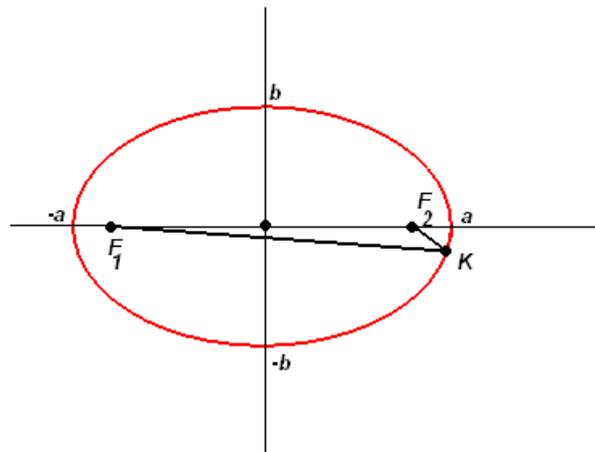


Figura 4.6: A Elipse.

**Proposição 4.3** *A roulette de um dos focos de uma elipse(ondulária) em relação a uma reta tangente é uma curva regular.*

Analogamente ao caso da parábola, faremos uso de propriedades da tangente  $t$ , para deduzir uma equação para a ondulíde.

**Proposição 4.4** *Seja  $\beta(s) = (x(s), y(s))$  a parametrização da ondulária pelo comprimento de arco. Então a função coordenada  $x(s)$  satisfaz*

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}, \quad (4.8)$$

sendo “ $a$ ”o semi-eixo maior e “ $b$ ”o semi-eixo menor da elipse.

**Demonstração:**

Vamos considerar a elipse de centro  $O$  e semi-eixos maior e menor dados por  $a$  e  $b$ . Consideramos ainda o círculo de centro  $O$  e raio  $a$ . Relativamente à elipse e o círculo, temos:

- O ângulo formado pelos raios focais e a tangente  $t$  são iguais (figura 4.7).
- Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  de intersecção de  $t$  com o círculo de centro  $O$  e raio  $a$ , são tais que  $P_1F_1 \perp t$  e  $P_2F_2 \perp t$ .
- $|P_1F_1| \cdot |P_2F_2| = b^2$ .

As duas últimas propriedades são menos conhecidas. Para uma demonstração das mesmas, ver [9], página 111. Na figura 4.8, consideramos a trajetória do foco  $F_2$  da elipse enquanto ela rola sem deslizar sobre o eixo  $x$ .

Os triângulos

$F_1P_1K$  e  $F_2P_2K$  são semelhantes. Logo

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|F_1K|}{|F_2K|}. \quad (4.9)$$

Manipulando (4.9),

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|P_1F_1| \cdot |P_2F_2|}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2}.$$

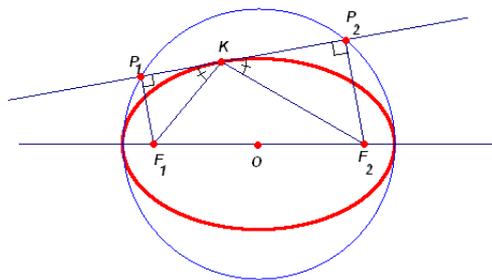


Figura 4.7: Segmentos ortogonais na elipse.

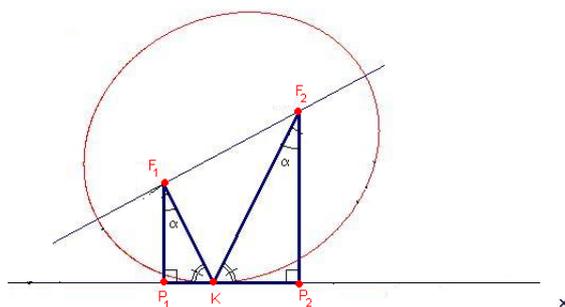


Figura 4.8: Elipse rolando.

Além disso

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{|F_1K| + |F_2K|}{|F_2K|} - \frac{|F_2K|}{|F_2K|} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1$$

e portanto

$$\frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1. \tag{4.10}$$

Pela *Proposição 4.3* a roulette de uma elipse é uma curva regular e portanto admite parametrização pelo comprimento de arco. O segmento  $|P_2F_2|$  é a coordenada  $y$  da roulette da elipse e pelo *Corolário 4.2.1*,  $|F_2K| = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}$  que ao ser substituída em (4.10) dá

$$\frac{b^2}{y(s)^2} = \pm \frac{2a}{y(s)} \frac{dx}{ds} - 1 \tag{4.11}$$

sendo  $s$  o parâmetro comprimento de arco da roulette. Então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)},$$

o que demonstra a *Proposição*. ■

Esta última equação possui solução em termos de funções

elípticas ( ver [4]).

**Observação 4.3** Considerações sobre a equação  $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}$ :

- a) No caso em que  $a = b$  a elipse é um círculo de raio  $a$  de “focos”  $F_1 = F_2$  e a roulette se reduz a uma reta da forma  $y = a$ ;
- b) no caso limite  $b = 0$  (i.e.,  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{dx}{ds}$ ) a elipse degenera-se em um segmento de reta de comprimento  $2a$  e  $F_2$  em um dos extremos do segmento. Nesse caso, a roulette é constituída por semi-círculos de raio  $2a$ .

#### 4.1.4 A Nodária

A *Hipérbole* de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $K$  do plano tais que

$$|F_1K| - |F_2K| = \pm 2a; \tag{4.12}$$

em que  $a < c$ . Sendo o *semi-eixo transverso* o valor  $a$  e  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  o *semi-eixo conjugado*. Os segmentos  $|F_1K|$  e  $|F_2K|$  são denominados por *raios focais* (fig. 3.12).

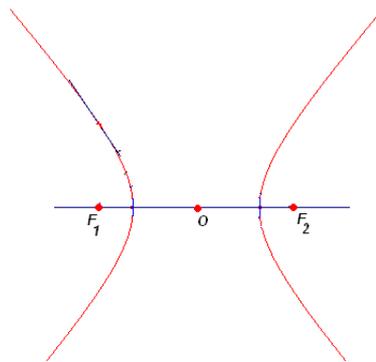


Figura 4.9: Hipérbole.

Segue da *Proposição 4.3* que

**Proposição 4.5** A roulette de um dos focos de uma hipérbole (nodária) em relação a uma reta tangente é uma curva regular.

Analogamente aos casos da parábola e da elipse, faremos uso de propriedades da tangente  $t$ , para de deduzir uma equação para a nodária.

**Proposição 4.6** Seja  $\beta(s) = (x(s), y(s))$  a parametrização da nodária pelo comprimento de arco. Então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 - b^2}{2ay(s)}, \tag{4.13}$$

sendo  $a$  e  $b$  os semi-eixos transverso e conjugado da hipérbole.

**Demonstração:**

Relativamente à hipérbole de semi-eixos  $a$  e  $b$ , centro  $O$  e focos  $F_1$  e  $F_2$ . Temos;

- Seja  $t$  a reta tangente à hipérbole em  $K$ , então  $t$  é a bissetriz do ângulo determinado pelos raios focais.

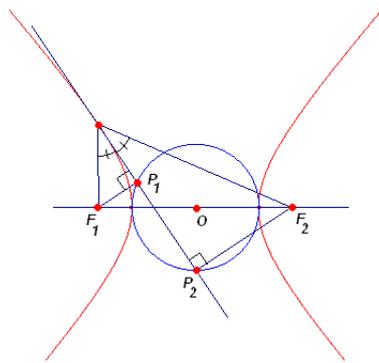


Figura 4.10: Segmentos ortogonais na hipérbole

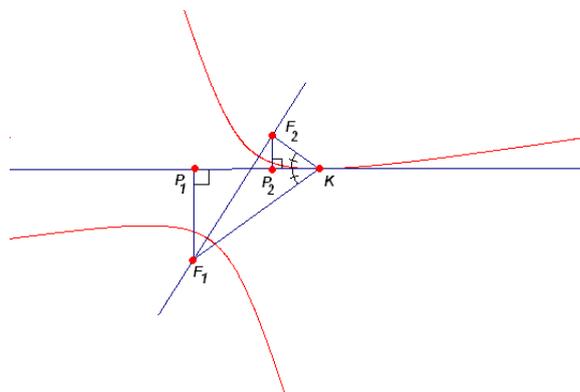


Figura 4.11: Hipérbole rolando.

- $t$  intercepta o círculo de raio  $a$  e centro  $O$ , em pontos  $P_1$  e  $P_2$  tais que  $P_1F_1 \perp t$  e  $P_2F_2 \perp t$ .  
item  $|P_1F_1| \cdot |P_2F_2| = b^2$ .

Na figura 4.11, consideramos a trajetória do foco  $F_2$  enquanto a hipérbole rola sobre o eixo  $x$ .

Como  $P_2\hat{K}P_1 = P_1\hat{K}F_2$  e  $F_1\hat{P}_1K = K\hat{P}_2F_2 = \frac{\pi}{2}$ , observamos que os triângulos  $F_1KP_1$  e  $F_2KP_2$  são semelhantes (três ângulos iguais), logo

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|F_1K|}{|F_2K|}. \tag{4.14}$$

Manipulando (4.14),

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|P_1F_1| \cdot |P_2F_2|}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2},$$

além disso,

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{|F_1K| - |F_2K|}{|F_2K|} + \frac{|F_2K|}{|F_2K|} = \pm \frac{2a}{|F_2K|} + 1,$$

portanto

$$\frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2} = \pm \frac{2a}{|F_2K|} + 1. \tag{4.15}$$

Pela *Proposição 4.5* a roulette da hipérbole

é uma curva regular. Pelo *Corolário 4.2.1*  $|F_2K| = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}$  que ao ser substituída em (4.15), mostra que a equação da roulette de  $F_2$  satisfaz

$$\frac{b^2}{y(s)^2} = \pm \frac{2a}{y(s)} \frac{dx}{ds} + 1, \tag{4.16}$$

sendo  $s$  o parâmetro comprimento de arco da roulette, então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 - b^2}{2ay(s)},$$

o que demonstra a Proposição. ■

Novamente, a equação anterior possui solução em termos de funções elípticas (veja [4]).

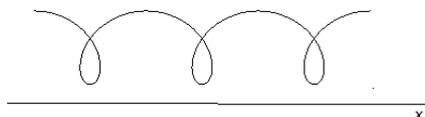


Figura 4.12: A Nodária.

## 4.2 As Curvaturas Médias do Catenóide, Ondulóide e Nodóide.

Nesta seção realizaremos o cálculo das curvaturas médias das superfícies obtidas pela rotação das roulettes, a *catenária*, a *ondulária* e a *nodária* que originam o *catenóide*, o *ondulóide* e o *nodóide*, respectivamente.

No Capítulo 2, observamos que uma superfície de rotação pode ser parametrizada por  $X(u, v) = (x(x), y(x) \cos v, y(x) \sin v)$  e que a expressão de sua curvatura média é dada por

$$H = \frac{x''(x)y'(x) - x'(x)y''(x)}{(x'(x)^2 + y'(x)^2)^{3/2}} - \frac{x'(x)}{y(x)(x'(x)^2 + y'(x)^2)^{1/2}}$$

ou

$$H = x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) - \frac{x'(s)}{y(s)} \tag{4.17}$$

se a curva geratriz da superfície está parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco.

**Lema 4.1.5** *Se a curva geratriz de uma superfície de rotação com eixo de rotação  $x$  está parametrizada e  $x'(s) = f(y(s))$ , então*

$$H = -\frac{1}{2} \left( f'(y) + \frac{f(y)}{y} \right). \tag{4.18}$$

**Demonstração:**

Se  $x'(s)$  é como acima, então

$$y'(s) = \pm(1 - f^2(y))^{1/2} \Rightarrow y'' = \mp(1 - f^2(z))^{-1/2} f f' y' = -f(y) f'(y),$$

enquanto

$$x'' = f'(y) y' \Rightarrow x'' y' = f'(y) (y')^2 = f'(y) (1 - f^2(y)).$$

Então pela equação (4.17),

$$H = -\frac{1}{2} \left( f^2(y) f'(y) + f'(y) (1 - f^2(y)) + \frac{f(y)}{y} \right) = -\frac{1}{2} \left( f'(y) + \frac{f(y)}{y} \right).$$

Pela equação (4.3)  $\frac{dx}{ds} = \frac{c}{y}$ , por (4.8)  $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay}$ , de (4.13)  $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay}$  e por (4.18) calculamos  $H$  das superfícies obtidas pela rotação das roulettes das cônicas: ■

\* **Catenóide;**  $f(y) = \frac{c}{y}$

$$H = -\frac{1}{2} \left( -\frac{c}{y^2} + \frac{c}{y^2} \right) = 0.$$

Pelos cálculos acima, a curvatura média do catenóide é  $H = 0$ , portanto o catenóide é uma superfície mínima, a única superfície mínima de revolução (ver [2]).

\* **Ondulóide, Cilindro e Esfera ;**

$$f(y) = \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay}$$

$$H = -\frac{1}{2} \left( \pm \frac{4ay^2 - (y^2 + b^2)2a}{4a^2y^2} \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay^2} \right) = \mp \frac{1}{2a}.$$

\* **Nodóide;**  $f(y) = \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay}$

$$H = -\frac{1}{2} \left( \pm \frac{4ay^2 - (y^2 - b^2)2a}{4a^2y^2} \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay^2} \right) = \mp \frac{1}{2a}.$$

### 4.3 Superfícies Rotacionais de Curvatura Média Constante.

Pelo que vimos anteriormente, se uma superfície rotacional  $S$  com curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco  $(x(s), y(s), 0)$  satisfaz

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)},$$

para constantes  $a$  e  $b$ , então a curvatura média de  $S$  é não nula.

**Proposição 4.7** *Uma superfície rotacional  $S$  possui curvatura média constante  $H \neq 0$  se, e só se, a curva geratriz de  $S$  satisfaz*

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0, \text{ } a \text{ e } b \text{ constantes.} \tag{4.19}$$

**Demonstração:**

Como  $S$  é uma superfície parametrizada regular podemos supor que localmente a sua curva geratriz é o gráfico de uma função, i.e, sua curva geratriz pode ser parametrizada por  $(x, \tilde{y}(x), 0)$ . Logo,

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right). \tag{4.20}$$

Como  $S$  é de

curvatura média constante, escrevemos  $H = \frac{1}{2a} > 0$ . Logo

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right) &= \frac{1}{a} \\ a \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} &= 1, \\ a \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \tilde{y}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros desta última expressão por  $2\tilde{y}'(x)$ , obtemos

$$2a\tilde{y}'(x) \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - 2\tilde{y}(x)\tilde{y}'(x) = 0. \quad (4.21)$$

A expressão (4.21), pode ser integrada em  $x$ . E assim,

$$-\frac{2a\tilde{y}(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} - \tilde{y}(x)^2 = \pm b^2, \quad (4.22)$$

sendo  $b^2$  uma constante. Agora, reparametrizando pelo parâmetro comprimento de arco  $s = \int_0^x \sqrt{1 + \tilde{y}'(t)^2} dt$ , obtemos

$$-2ay(s) \frac{dx}{ds} - y(s)^2 = \pm b^2, \quad (4.23)$$

pois  $\frac{dx}{ds} = (1 + \tilde{y}'(x)^2)^{-1/2}$ . Isolando  $\frac{dx}{ds}$  em (4.23), resulta

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)}.$$

Considerando também o caso  $a < 0$ , obtemos

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)}.$$

Considerando, também, o caso em que  $H = 0$  e já tomando da curva geratriz da superfície parametrizada pelo comprimento de arco, obtemos

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right).$$

Fazendo  $H = 0$  em (2.8) obtemos

$$\frac{\tilde{y}''(x)}{1 + \tilde{y}'(x)^2} = \frac{1}{\tilde{y}(x)}.$$

Definindo  $u(x) = \tilde{y}'(x)$ , obtemos  $\tilde{y}''(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\tilde{y}} \tilde{y}'(x) = \frac{du}{d\tilde{y}} u$ . Substituindo este resultado na última equação, obtemos

$$\frac{\frac{du}{d\tilde{y}} u}{1 + \tilde{u}^2} = \frac{1}{\tilde{y}},$$

que possui  $y = c(1 + u^2)$  como solução, onde  $c \neq 0$  é uma constante. Daí  $\tilde{y}' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$ , cuja solução é  $y = c \cosh\left(\frac{x}{c} + \tilde{c}\right)$ , ou seja, a catenária. Reciprocamente, se a curva geratriz de uma superfície rotacional  $S$  satisfaz (4.19) ou é uma catenária, pelos cálculos da seção anterior concluímos que  $S$  possui curvatura média constante. ■

Juntando as Proposições 4.1, 4.4, 4.6 e 4.7 concluímos o *Teorema 4.1 de Delaunay*.

As superfícies rotacionais de curvatura média constante não nula são ditas *Superfícies de Delaunay*.

0

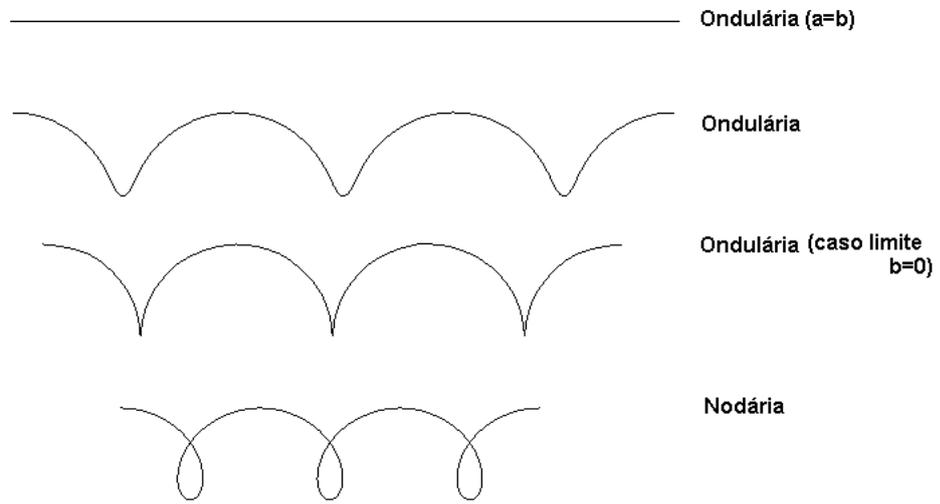


Figura 4.13: As roulettes de Delaunay.

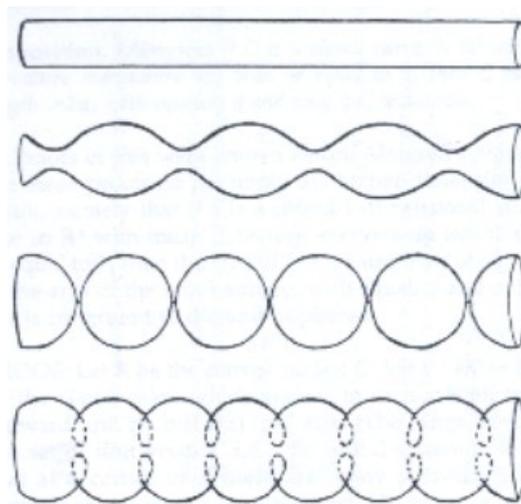


Figura 4.14: As superfícies de Delaunay com  $H \neq 0$ .

## Capítulo 5

# Superfícies Helicoidais

Superfícies Helicoidais são aquelas invariantes por movimentos helicoidais em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, por movimentos helicoidais em relação a uma dada reta. Pelo que vimos no capítulo 2, um exemplo de superfície helicoidal é dado pela superfície parametrizada por  $X(u, v) = (x(u) \cos(\alpha v) + y(u) \sin(\alpha v), -x(u) \sin(\alpha v) + y(u) \cos(\alpha v), z(u) + \beta v)$ .

Como vimos, pelo Teorema 1.1, o subgrupo a 1-parâmetro de movimentos helicoidais em relação a um determinado eixo é identificado, via mudança de coordenadas, com o subgrupo a 1-parâmetro  $G_{1,\delta}$ . As *superfícies helicoidais de passo  $\delta$*  são então superfícies invariantes por  $G_{1,\delta}$ .

Nos exemplos 2.10 e 2.11 são descritas duas superfícies helicoidais.

O objetivo deste capítulo é encontrar uma representação para as superfícies helicoidais de Curvatura Média constante não nula. Esta representação é uma generalização do resultado obtido por K. Kenmotsu no artigo [6]. O Lema de Bour e O Teorema de Lawson são peças chaves para a obtenção dessa representação.

### 5.1 Parametrização Natural e o Lema de Bour.

Seja  $W \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $X: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização tal que  $X(W)$  é o traço de uma superfície helicoidal de passo  $\delta$ . Suponhamos que para um aberto  $V \subset W$ , a intersecção de  $X(V)$  com um plano  $\Pi \supset \{\text{eixo } z\}$ , seja localmente o gráfico de uma função  $\lambda(\rho)$  com  $\rho \in \Pi \cap \{z = 0\}$ .

Renomeando eixos podemos supor  $\Pi \cap \{z = 0\} = \text{eixo } x$ . Então uma parametrização para  $X(V) \cap \Pi$  é  $\beta(\rho) = (\rho, 0, \lambda(\rho))$ . Rodando  $\beta(\rho)$  em torno do eixo  $z$  de um ângulo  $\varphi \in \mathbb{R}$  simultaneamente com uma elevação de  $\delta_0 \varphi$  ( $\delta_0 = cte$ ) obtemos a seguinte parametrização para  $X(V)$

$$X(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda(\rho) + \delta_0 \varphi), \rho \in \Pi \cap \{z = 0\}, \varphi \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Seja  $Imm(W, \mathbb{R}^3) = \{\text{parametrizações de } W \text{ em } \mathbb{R}^3\}$ . Dado  $H \in \mathbb{R}$  consideremos

$$\Sigma_H = \{X \in Imm(W, \mathbb{R}^3) : X \text{ é superfície helicoidal de curvatura média constante } H \neq 0\}.$$

**Definição 5.1** *Seja  $X(s, t) : W \rightarrow \mathbb{R}^3 \in Imm(W, \mathbb{R}^3)$  uma superfície helicoidal parametrizada por parâmetros  $(s, t)$  tais que as  $s$ -curvas ( $t = cte$ ) são parametrizadas pelo comprimento de arco e as  $t$ -curvas ( $s = cte$ ) são hélices ortogonais às  $s$ -curvas, então os parâmetros  $(s, t)$  são ditos parâmetros naturais.*

**Observação 5.1** Pela definição, a Primeira Forma Fundamental de uma superfície helicoidal parametrizada por parâmetros naturais  $(s, t)$  é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + U^2(s) dt^2. \quad (5.2)$$

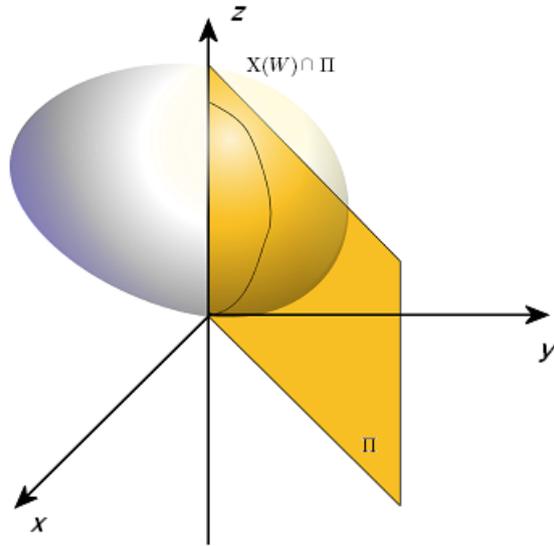


Figura 5.1: A intersecção de  $X(W)$  com  $\Pi$ .

**Exemplo 5.1** Para o helicóide do Exemplo 2.10 parametrizado por

$$(u \cos v, u \sin v, v), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

a Primeira Forma Fundamental é:

$$d\sigma^2 = du^2 + (1 + u^2)dv^2.$$

As  $v$ -curvas são hélices, sendo estas ortogonais às  $u$ -curvas. Fazendo a mudança de coordenadas  $u(s, t) = s$  e  $v(s, t) = t$ , a Primeira Forma Fundamental do helicóide será,

$$d\sigma^2 = ds^2 + (1 + s^2)dt^2.$$

Então para o helicóide, a função  $U(s)$  é definida por  $U(s)^2 = 1 + s^2$ .

**Lema 5.0.6** (Bour) Seja  $S$  uma superfície helicoidal de passo  $\delta_0$  parametrizada por,

$$X(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda(\rho) + \delta_0 \varphi), (\rho, \varphi) \in U \subset \mathbb{R}^2$$

então  $S$  admite reparametrização por parâmetros naturais  $(s, t)$ . Além disso, existe uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais isométricas a  $S$  e tal família contém uma superfície de rotação.

**Demonstração:**

Para a superfície  $S$  a Primeira Forma Fundamental é dada por

$$d\sigma^2 = (1 + \lambda'^2)d\rho^2 + 2\delta_0\lambda'd\rho d\varphi + (\rho^2 + \delta_0^2)d\varphi^2 = \left(1 + \frac{\rho^2\lambda'^2}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)d\rho^2 + (\rho^2 + \delta_0^2)\left(d\varphi + \frac{\delta_0\lambda'}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)^2. \quad (5.3)$$

Definamos novas variáveis  $s = s(\rho, \varphi)$  e  $t = t(\rho, \varphi)$  pelas relações,

$$ds = \left(1 + \frac{\rho^2\lambda'^2}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)^{1/2} d\rho, \quad (5.4)$$

$$dt = d\varphi + \frac{\delta_0 \lambda'}{\rho^2 + \delta_0^2} d\rho. \quad (5.5)$$

A matriz jacobiana dessa mudança é,

$$J = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\rho^2 \lambda'^2}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)^{1/2} & 0 \\ \frac{\delta_0 \lambda'}{\rho^2 + \delta_0^2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $\det J \neq 0$ , podemos fazer uma mudança de variáveis. Pelo *Teorema da função inversa* e a *Regra da Cadeia* a matriz jacobiana da mudança  $\rho = \rho(s, t)$  e  $\varphi = \varphi(s, t)$  é

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\rho^2 + \lambda'^2}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)^{-1/2} & 0 \\ \frac{\delta \lambda'}{\rho^2 + \delta_0^2} \left(1 + \frac{\rho^2 + \lambda'^2}{\rho^2 + \delta_0^2}\right)^{-1/2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial s} & \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{bmatrix},$$

portanto  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , logo  $\rho(s, t) = \rho(s)$ .  $\lambda = \lambda(s)$ , pois  $\lambda$  é função de  $\rho$ . Para concluirmos que  $(s, t)$  é uma parametrização natural em  $V \subset W$ , definamos  $U(s)^2 = \rho(s)^2 + \delta_0^2$ . Então, substituindo (5.4) e (5.5) em (5.3), obtemos  $d\sigma^2 = ds^2 + U(s)^2 dt^2$ .

A conclusão da segunda parte do enunciado do Lema de Bour vem da resposta dada a seguinte pergunta: - “Dada uma função  $U = U(s) > 0$ , existe superfície helicoidal da forma  $X(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda(\rho) + \delta \varphi)$  parametrizada por *parâmetros naturais*  $(s, t)$  e primeira forma dada por  $d\sigma^2 = ds^2 + U(s)^2 dt^2$ ?” Dito de outro modo: o objetivo é encontrar funções  $\rho, \varphi$  e  $\lambda$  de  $(s, t)$  para valores arbitrários de  $\delta$ , satisfazendo,

$$ds^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2}{\rho^2 + \delta^2} d\lambda^2, \quad (5.6)$$

e

$$U dt = \pm (\rho^2 + \delta^2)^{1/2} \left( d\varphi + \frac{\delta}{\rho^2 + \delta^2} d\lambda \right). \quad (5.7)$$

Pelas expressões de  $\rho$  e  $\lambda$  em (5.6),  $\rho$  e  $\lambda$  não dependem de  $t$ . Já de (5.7),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\delta \lambda'}{\rho^2 + \delta^2} \quad (5.8)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm \frac{U}{\rho^2 + \delta^2}. \quad (5.9)$$

Por (5.8),  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} = 0$ , o que quer dizer que  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  não depende da variável  $s$ , mas por (5.9)  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  é escrito como função de  $\rho(s)$  e  $\lambda(s)$ , logo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm \frac{U}{(\rho^2 + \delta^2)^{1/2}} = \frac{1}{m}, \quad (5.10)$$

sendo  $m \neq 0$  uma constante. Portanto, reformulamos (5.7) por

$$d\varphi = \frac{1}{m} dt - \frac{\delta}{\rho^2 + \delta^2} d\lambda. \quad (5.11)$$

Por (5.10),  $m^2 U^2 = \rho^2 + \delta^2$  e derivando-a relação a  $s$ , obtemos

$$\begin{aligned} m^2 U \dot{U} &= \rho \dot{\rho}, \\ \frac{m^2 U \dot{U}}{\rho} &= \dot{\rho}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da última expressão temos

$$\dot{\rho}^2 = \frac{m^4 U^2 \dot{U}^2}{m^2 U^2 - \delta^2}, \quad (5.12)$$

pois por (5.10),  $\rho^2 = m^2 U^2 - \delta^2$ . O ponto em (5.12) denota derivação em relação a  $s$ . Então aplicando os resultados acima a (5.6) obtemos

$$d\lambda^2 = \frac{m^2 U^2}{(m^2 U^2 - \delta^2)^2} (m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2) ds^2. \quad (5.13)$$

Integrando em  $s$  obtemos, a menos de sinal,

$$\lambda = \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - \delta^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2} ds + c_1.$$

Eliminamos a constante  $c_1$  por uma translação no eixo  $z$ . Pela equação (5.11),

$$\varphi = \frac{1}{m} \int dt - \int \frac{\delta \lambda'}{\rho^2 + \delta^2} d\lambda + c_2$$

e fazendo  $\tilde{t} := t + mc_2$ , eliminamos a constante  $c_2$ , logo,

$$\begin{cases} \rho &= (m^2 U^2 - \delta^2)^{1/2} \\ \lambda &= \int \frac{mU}{(m^2 U^2 - \delta^2)} (m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2} ds \\ \varphi &= \int \frac{1}{m} dt - \frac{\delta}{m} \int \frac{(m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2}}{U(m^2 U^2 - \delta^2)} ds \end{cases}. \quad (5.14)$$

Substituindo  $m = 1$  e  $\delta = \delta_0$  em (5.14) encontramos a parametrização da superfície  $S$  do enunciado do *Lema de Bour* em parâmetros naturais, já a escolha de  $\delta = 0$  fornece uma superfície de rotação isométrica a  $S$ . Portanto as expressões em (5.14) dão uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais isométricas a superfície  $S$  e a família (5.14) é denominada por *Família de Bour*. ■

**Observação 5.2** O *Lema de Bour* foi demonstrado sob a hipótese de que superfícies helicoidais possam ser escritas da forma  $x(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda(\rho) + \delta \varphi)$  em um aberto  $V \subset W$ . No entanto, se observamos a relação da primeira das equações de (5.14) com as duas últimas, vemos que a família de Bour está bem definida para superfícies tais que  $\rho(s) \neq 0$ .

Pelo *Lema de Bour*, uma superfície da família a 2-parâmetros é determinada por uma função  $U(s) > 0$  e constantes  $m$  e  $\delta$ .

Para encontrarmos elementos da família de Bour com curvatura média constante não nula, precisaremos encontrar a expressão da curvatura média  $H$  da superfície helicoidal  $[U, m, \delta]$  (determinada por  $U(s)$ ,  $m$  e  $\delta$ ). De modo que a seguir, precisaremos calcular a expressão da curvatura média de  $[U, m, \delta]$ . Então formulamos seguinte a proposição:

**Proposição 5.1**  $[U, m, \delta]$  é uma superfície de curvatura média constante  $H$  se, e só se, satisfaz

$$m^2 U \ddot{U} + m^2 \dot{U}^2 - 1 = 2H \left( m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2 \right)^{1/2}. \quad (5.15)$$

**Demonstração:**

Para calcular  $H$ , determinaremos os coeficientes da Segunda Forma Fundamental. Logo, necessitaremos das expressões dos vetores  $X_\rho$ ,  $X_\varphi$ ,  $X_{\rho\rho}$ ,  $X_{\rho\varphi}$ ,  $X_{\varphi\varphi}$  e  $X_\varphi \wedge X_\rho$ , descritos abaixo,

$$\begin{aligned} X_\rho &= (\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda'(\rho)), & X_\varphi &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, \delta), \\ X_{\rho\rho} &= (0, 0, \lambda''(\rho)), & X_{\rho\varphi} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), & X_{\varphi\varphi} &= (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, 0) \end{aligned}$$

e

$$X_\varphi \wedge X_\rho = (-\delta \sin \varphi + \rho \lambda'(\rho) \cos \varphi, \delta \cos \varphi + \rho \lambda'(\rho) \sin \varphi, -\rho),$$

onde  $X_\rho = \frac{\partial X}{\partial \rho}$ , idem para  $X_\varphi$ , enquanto  $X_{\rho\rho}$ ,  $X_{\rho\varphi}$  e  $X_{\varphi\varphi}$  indicam as derivadas de segunda ordem de  $x$ .

Também é interessante termos em mãos as expressões

$$\begin{cases} \langle X_{\varphi\varphi}, X_\varphi \wedge X_\rho \rangle &= -\rho^2 \lambda'(\rho) \\ \langle X_{\rho\varphi}, X_\varphi \wedge X_\rho \rangle &= \delta \end{cases} \quad (5.16)$$

Como  $X=X(\rho(s), \varphi(s, t))$ , pela regra da cadeia, os vetores tangentes de  $X$  podem ser escritos como abaixo,

$$X_s = X_\rho \dot{\rho} + X_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \text{e} \quad X_t = X_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Pela equação (5.11),  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{m}$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\delta \lambda'}{\rho^2 + \delta^2}$  por (5.8), assim

$$X_t = \frac{1}{m} X_\varphi, \quad X_{tt} = \frac{1}{m^2} X_{\varphi\varphi} \quad \text{e} \quad X_{st} = \frac{1}{m} \dot{\rho} X_{\varphi\rho} + \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} X_{\varphi\varphi}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle X_{tt}, X_t \wedge X_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{m^2} X_{\varphi\varphi}, \frac{1}{m} X_\varphi \wedge \left( X_\rho \dot{\rho} + X_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{m^2} X_{\varphi\varphi}, \frac{1}{m} X_\varphi \wedge X_\rho \dot{\rho} \right\rangle = \\ &= \frac{\dot{\rho}}{m^3} \langle X_{\varphi\varphi}, X_\varphi \wedge X_\rho \rangle. \end{aligned}$$

Pela primeira equação de (5.16) e pela regra da cadeia, reescrevemos esta última expressão como,

$$\langle X_{tt}, X_t \wedge X_s \rangle = -\frac{\rho^2 \lambda'(\rho) \dot{\rho}}{m^3} = -\frac{\rho^2 \dot{\lambda}}{m^3}. \quad (5.17)$$

Calculando,

$$\begin{aligned} \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{m} \dot{\rho} X_{\varphi\rho} + \frac{1}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial s} X_{\varphi\varphi}, \frac{1}{m} X_\varphi \wedge X_\rho \dot{\rho} \right\rangle = \\ &= \frac{\dot{\rho}^2}{m^2} \langle X_{\varphi\rho}, X_\varphi \wedge X_\rho \rangle + \frac{\dot{\rho}}{m^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \langle X_{\varphi\varphi}, X_\varphi \wedge X_\rho \rangle \end{aligned}$$

e fazendo uso das equações em (5.16) e a regra da cadeia, resulta

$$\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \rangle = \frac{1}{m^2} \left( \delta \dot{\rho}^2 - \dot{\lambda} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right). \quad (5.18)$$

Por (5.12),  $\dot{\rho}^2 = \frac{m^4 U^2 \dot{U}^2}{m^2 U^2 - \delta^2}$  e por (5.8),  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\delta \lambda'}{\rho^2 + \delta^2}$ . Portanto, desenvolvemos a equação (5.18) em

$$\begin{aligned} \langle X_{st}, X_t \wedge X_s \rangle &= \frac{1}{m^2} \left( \delta \frac{m^4 U^2 \dot{U}^2}{m^2 U^2 - \delta^2} + \frac{\delta m U (m^2 U^2 - \delta^2)}{(m^2 U^2 - \delta^2)^2 m U} (m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2) \right) = \\ &= \frac{\delta}{m^2} \left( \frac{m^4 U^2 \dot{U}^2}{m^2 U^2 - \delta^2} + \frac{(m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2)}{m^2 U^2 - \delta^2} \right), \end{aligned}$$

daí,

$$\langle X_{st}, X_t \wedge X_s \rangle = \frac{\delta}{m^2}. \quad (5.19)$$

Determinaremos o valor de  $\| X_s \wedge X_t \|$ . Utilizando a fórmula dada para  $\| X_s \wedge X_t \|$  na página 98 de [2],

$$\| X_s \wedge X_t \| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 \cdot U^2 - 0^2} = U. \quad (5.20)$$

Calculando os coeficientes  $f$  e  $g$  da Segunda Forma, pelas equações em (2.7), observamos que

$$f = \langle X_{st}, N(s, t) \rangle = \left\langle X_{st}, \frac{X_s \wedge X_t}{\| X_s \wedge X_t \|} \right\rangle = \frac{1}{\| X_s \wedge X_t \|} \langle X_{st}, X_s \wedge X_t \rangle$$

e

$$g = \langle X_{tt}, N(s, t) \rangle = \left\langle X_{tt}, \frac{X_s \wedge X_t}{\| X_s \wedge X_t \|} \right\rangle = \frac{1}{\| X_s \wedge X_t \|} \langle X_{tt}, X_s \wedge X_t \rangle,$$

portanto, por (5.18), (5.19) e (5.20), obtemos os seguintes valores para  $f$  e  $g$ ,

$$f = \frac{\delta}{m^2 U}, \quad (5.21)$$

e

$$g = -\frac{\rho^2 \dot{\lambda}}{m^3 U}. \quad (5.22)$$

Para determinar o coeficiente  $e$  da Segunda Forma Fundamental, teremos um pouco mais de “trabalho”. Recordemos da seguinte expressão da curvatura gaussiana, para superfícies tais que  $F = 0$  ([2], pág. 237).

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{G_s}{\sqrt{EG}} \right)_s + \left( \frac{E_t}{\sqrt{EG}} \right)_t \right) \quad (5.23)$$

e como a superfície helicoidal  $S$  está parametrizada por parâmetros naturais, temos

$$E = 1 \quad \Rightarrow \quad E_t = 0,$$

$$G = U^2(s) \quad \Rightarrow \quad G_s = 2U\dot{U},$$

então

$$\left( \frac{G_s}{\sqrt{EG}} \right)_s = 2 \left( \frac{U\dot{U}}{U} \right)_s = 2\ddot{U}$$

logo,

$$K = -\frac{2\ddot{U}}{2U} = -\frac{\ddot{U}}{U}. \quad (5.24)$$

Por (2.5), a fórmula da curvatura gaussiana de uma superfície qualquer é dada por  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ . Observado que  $F = 0$ , esta última expressão se reduz a equação abaixo,

$$K = \frac{eg - f^2}{U^2}. \quad (5.25)$$

Substituindo (5.21), (5.22) e (5.24) em (5.25),

$$-\frac{\ddot{U}}{U} = \frac{e \left( -\rho^2 \dot{\lambda} / (mU) \right) - (\delta / (m^2 U))^2}{U}$$

e obtemos

$$e = \frac{m^4 U^3 \ddot{U} - \delta^2}{m^2 U^2 (m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2}}. \quad (5.26)$$

Como a superfície  $S$  está parametrizada por parâmetros naturais, a expressão para a curvatura média dada por (2.4) é  $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ , que podemos reescrever como

$$2H = e + \frac{g}{U^2}$$

e utilizando (5.26) nesta última expressão, obtemos

$$m^2 U \ddot{U} + m^2 \dot{U}^2 - 1 = 2H \left( m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2 \right)^{1/2},$$

ou seja, a expressão (5.15). Portanto, um elemento  $[U, m, \delta]$  da família de Bour, possui curvatura média  $H = cte \neq 0$  se, e só se, satisfaz à equação (5.15). ■

A seguir determinaremos expressões explícitas para as superfícies helicoidais da família de Bour com curvatura média constante  $H \neq 0$ . No entanto, durante a determinação dessas expressões explícitas, surge um novo parâmetro, mostrando que tais superfícies estão em uma família maior. Então superfícies helicoidais de curvatura média constante pertencem a uma família a 3-parâmetros. Além disso, as superfícies da família a 3-parâmetros não são isométricas.

Dada uma superfície  $[U, m, \delta]$  da família de Bour, pela Proposição 5.1, se  $[U, m, \delta]$  possui curvatura média constante, então  $[U, m, \delta]$  satisfaz a equação

$$m^2 U \ddot{U} + m^2 \dot{U}^2 - 1 = 2H \left( m^2 U^2 (1 - m^2 \dot{U}^2) - \delta^2 \right)^{1/2}.$$

Fazendo  $x = mU$  nessa última expressão, resulta

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 - 1 = 2H \left( x^2 (1 - \dot{x}^2) - \delta^2 \right)^{1/2}, \quad (5.27)$$

definindo  $y = (x^2 - x^2 \dot{x}^2 - \delta^2)^{1/2}$  em (5.27), obtemos

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 - 1 = 2Hy.$$

Além disso,

$$\dot{y} = (x^2 - x^2 \dot{x}^2 - \delta^2)^{-1/2} (x\dot{x} - x\dot{x}^3 - x^2 \dot{x}\ddot{x}) = y^{-1} x\dot{x} (1 - \dot{x}^2 - x\ddot{x}),$$

portanto

$$-y\dot{y} (x\dot{x})^{-1} = x\ddot{x} + \dot{x}^2 - 1,$$

logo

$$-y\dot{y} (x\dot{x})^{-1} = 2Hy.$$

Daí

$$\dot{y} = -2Hx\dot{x}. \quad (5.28)$$

Integrando (5.28),

$$y = -Hx^2 + a, \quad a = \text{constante}. \quad (5.29)$$

Como

$$(x^2 - x^2 \dot{x}^2 - \delta^2)^{1/2} = -Hx^2 + a \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{x^2 - \delta^2 - (Hx^2 - a)^2}{x^2},$$

definindo  $z = x^2$  e supondo  $H \neq 0$ ,

$$\frac{1}{4} \dot{z}^2 = z - \delta^2 - (Hz - a)^2 \quad (5.30)$$

Manipulando esta última expressão,

$$z - \delta^2 - (Hz - a)^2 = \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) - \left( Hz - \frac{(2Ha + 1)}{2H} \right)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \dot{z}^2 &= \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) - \left( Hz - \frac{(2Ha + 1)}{2H} \right)^2, \\ \dot{z} &= 2 \left( \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) - \left( Hz - \frac{(2Ha + 1)}{2H} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

fazendo separação de variáveis, temos

$$\frac{dz}{\left( \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) - \left( Hz - \frac{(2Ha + 1)}{2H} \right)^2 \right)^{1/2}} = 2ds,$$

que ao ser integrada, dá

$$2Hs = \text{sen}^{-1} \left( \frac{Hz - \frac{2Ha + 1}{2H}}{\left( \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) \right)^{1/2}} \right) + c.$$

Removemos a constante de integração por reajuste do parâmetro  $s$ , logo

$$\text{sen}(2Hs) = \frac{Hz - \frac{2Ha + 1}{2H}}{\left( \frac{(2Ha + 1)^2}{4H^2} - (a^2 + \delta^2) \right)^{1/2}},$$

daí

$$z = \frac{1}{2H^2} \left( 2Ha + 1 + (1 - 4H^2\delta^2 + 4Ha)^{1/2} \text{sen}(2Hs) \right).$$

No entanto  $z = m^2U^2$ , logo

$$m^2U^2 = \frac{1}{2H^2} \left( 2Ha + 1 + (1 + 4Ha - 4H^2\delta^2)^{1/2} \text{sen}(2Hs) \right). \quad (5.31)$$

A equação (5.31) fornece uma família de funções  $U_a$  (o que mostra que, embora as superfícies dessa família estejam em parâmetros naturais, não são isométricas), para simplificar a notação, seja

$$B = (1 + 4Ha - 4H^2\delta^2)^{1/2} \quad (5.32)$$

e supondo  $B \neq 0$ , reescrevemos (5.31) como

$$m^2U^2 = \frac{1}{2H^2} (2Ha + 1 + B \text{sen}(2Hs)). \quad (5.33)$$

Derivando (5.33) em relação a  $s$ ,

$$2m^2U\dot{U} = \frac{B\text{sen}(2Hs)}{2H^2}2H.$$

Logo,

$$m^2\dot{U} = \frac{B}{2HU} \cos(2Hs). \quad (5.34)$$

Agora serão necessárias as expressões de  $m^2U^2 - \delta^2$  e  $m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2$  para que sejam feitas suas respectivas substituições em (5.14), escrita abaixo

$$\begin{cases} \rho = (m^2U^2 - \delta^2)^{1/2} \\ \lambda = \int \frac{mU}{(m^2U^2 - \delta^2)} (m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2} ds \\ \varphi = \int \frac{1}{m} dt - \frac{\delta}{m} \int \frac{(m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2}}{U(m^2U^2 - \delta^2)} ds \end{cases}.$$

Pelas equações (5.33) e (5.34),

$$m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) = \frac{1}{2H^2} (2Ha + 1 + B\text{sen}(2Hs)) - \frac{B^2}{4H^2} \cos^2(2Hs),$$

$$m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) = \frac{4Ha + 1 - B^2}{4H^2} + \frac{1}{4H^2} (1 + B\text{sen}(2Hs))^2,$$

mas por (5.32), o valor de  $\delta^2$  é

$$\delta^2 = \frac{4Ha + 1 - B^2}{4H^2}.$$

Logo

$$m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) = \delta^2 + \frac{1}{4H^2} (1 + B\text{sen}(2Hs))^2,$$

$$m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2 = \frac{1}{4H^2} (1 + B\text{sen}(2Hs))^2. \quad (5.35)$$

Já por (5.31) e (5.32), determinamos  $m^2U^2 - \delta^2$ ,

$$m^2U^2 - \delta^2 = \frac{1}{2H^2} (2Ha + 1 + B\text{sen}(2Hs)) - \frac{1 + 4Ha - B^2}{4H^2},$$

portanto

$$m^2U^2 - \delta^2 = \frac{1}{4H^2} (1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs)). \quad (5.36)$$

Substituindo (5.33), (5.34), (5.35) e (5.36) em

$$\begin{cases} \rho = (m^2U^2 - \delta^2)^{1/2} \\ \lambda = \int \frac{mU}{(m^2U^2 - \delta^2)} (m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2} ds \\ \varphi = \int \frac{1}{m} dt - \frac{\delta}{m} \int \frac{(m^2U^2(1 - m^2\dot{U}^2) - \delta^2)^{1/2}}{U(m^2U^2 - \delta^2)} ds \end{cases},$$

obtemos assim que uma superfície helicoidal possui curvatura média constante  $H \neq 0$  se, e somente se, satisfaz (5.37) escrita abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{2H} (1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2} \\ \lambda = \int \frac{(1 + 4H^2\delta^2 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2}(1 + B\text{sen}(2Hs))ds}{(1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))} \\ \varphi = \frac{t}{m} - 4H^2\delta \int \frac{1 + B\text{sen}(2Hs)}{(1 + 4H^2\delta^2 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2} (1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))} ds \end{array} \right.$$

sendo  $B$  definido pela relação (5.32). A superfície com parametrização dada no Lema 5.0.6 (com  $m = 1$  e  $\delta = \delta_0$ ) está incluída na família a 3-parâmetros, para ver isto, basta substituir  $m = 1$  e  $\delta = \delta_0$  em (5.37) e esta superfície possui  $H \neq 0$  se, e só se, as funções  $\rho(s)$ ,  $\varphi(s, t)$  e  $\lambda(s)$  são dadas por (5.37), obtidas pela substituição de  $m = 1$  e  $\delta = \delta_0$ .

Pelo que acabamos de calcular demonstramos a

**Proposição 5.2** *As superfícies helicoidais dadas por (5.1), i.e, as superfícies de parametrização  $X(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \text{sen} \varphi, \lambda(\rho) + \delta \varphi)$ , que possuem curvatura média constante  $H \neq 0$  constituem uma família a 3-parâmetros, sendo  $B$ ,  $\delta$  e  $m$  os parâmetros. Cada superfície dessa família (i.e,  $B$ ,  $\delta$  e  $m$  fixos), é parametrizada de forma natural pela substituição de  $\rho, \lambda$ , e  $\varphi$  em (5.1) pelas suas respectivas expressões obtidas abaixo,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{2H} (1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2} \\ \lambda = \int \frac{(1 + 4H^2\delta^2 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2}(1 + B\text{sen}(2Hs))ds}{(1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))} \\ \varphi = \frac{t}{m} - 4H^2\delta \int \frac{1 + B\text{sen}(2Hs)}{(1 + 4H^2\delta^2 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))^{1/2} (1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs))} ds \end{array} \right. \quad (5.37)$$

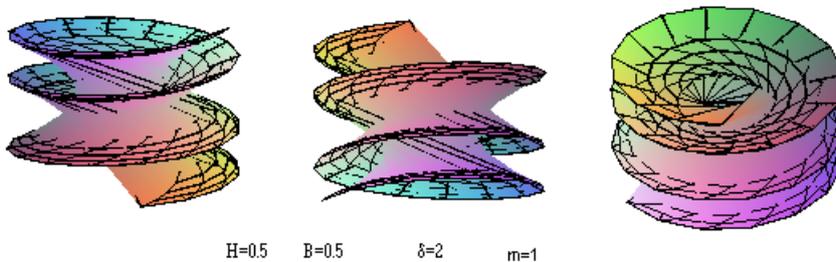


Figura 5.2: Uma superfície da família a 3-parâmetros.

**Observação 5.3** Considerações sobre a representação (5.37)

1. O parâmetro  $m$  não é efetivamente importante, pois os diferentes valores de  $m$ , apenas mudam a parametrização da superfície, enquanto a imagem permanece inalterada. Portanto podemos definir uma nova variável  $\tilde{t} := \frac{t}{m}$  em (5.37). (O parâmetro  $m$  apenas muda a velocidade de  $\varphi$ .)
2. Segue das expressões em (5.37) que, exceto quando  $B = \pm 1$ , temos  $\rho(s) \neq 0$ . Mesmo quando  $B = \pm 1$ ,  $\rho(s) = 0$  apenas para valores de  $s$  tais que  $\text{sen}(2Hs) = \pm 1$ .
3. Se permitimos  $B = 0$ , então os cilindros estão incluídos na representação dada por (5.37)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>No caso em que  $B = 0$ , a representação dada por (5.37) fornece,

4. Para  $B \neq 1$  fixo e  $\delta$  arbitrário, obtemos da representação (5.37), que as superfícies helicoidais de curvatura média constante que possuem mesmo valor de  $B$  estão todas contidas entre dois cilindros pois,

$$\frac{(1 - B)}{2H} \leq \rho(s) \leq \frac{1 + B}{2H}.$$

Para ver isto, observamos que

$$(1 - B)^2 = 1 + B^2 - 2B \leq 1 + B^2 + 2B\text{sen}(2Hs) \leq 1 + B^2 + 2B = (1 + B)^2.$$

Uma superfície delimitada por dois cilindros é dita *cilindricamente delimitada*.

5. As superfícies dadas por (5.37) estão definidas para todos os valores dos parâmetros  $(s, t)$ , o que dá uma parametrização global por parâmetros naturais.

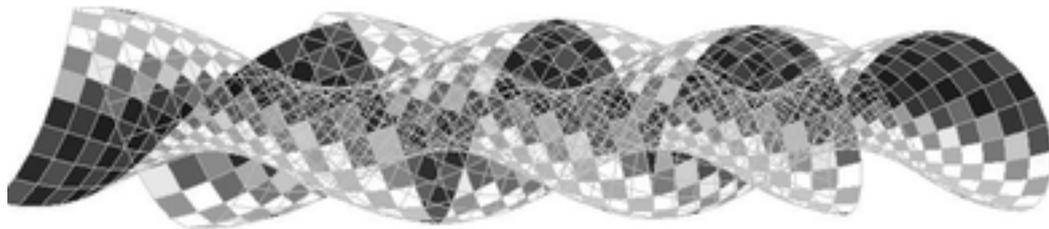


Figura 5.3: Uma superfície helicoidal cilíndricamente delimitada.

**Observação 5.4** Antes do resultado principal, devemos fazer algumas considerações de sinais:

- Como  $H \neq 0$ , podemos considerar  $H > 0$ ,
- Do modo como  $B$  é definido, resulta  $B \geq 0$ ,

$$\begin{cases} \rho &= \frac{1}{2H} \\ \lambda &= \frac{(1 + 4H^2\delta^2)s}{m} \\ \varphi &= \frac{t}{m} - \frac{4H^2\delta s}{1 + 4H^2\delta^2} \end{cases},$$

observamos que as curvas  $s = cte$  e  $t = cte$  são hélices que preenchem o cilindro de raio  $\frac{1}{2H}$ .

- Como visto anteriormente, para diferentes valores de  $m$  em (5.37), com  $B$  e  $\delta$  fixos, existem parametrizações com mesma imagem, então podemos considerar  $m > 0$ .

Deste ponto em diante sempre consideraremos  $H$  e  $m$  positivos.

**Teorema 5.1** *Existe uma aplicação sobrejetiva  $\phi : S^1 \times [0, \infty) \rightarrow \Sigma_H$ , tal que  $\phi(0, [0, \infty))$  são as superfícies de rotação em  $\Sigma_H$  e  $\phi(\theta, B_0)$ ,  $B_0 \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , é a família associada à superfície de rotação  $\phi(0, B_0)$  (no sentido de que cada elemento da família é isométrico a  $\phi(0, B_0)$ ). Além disso, exceto para  $(\theta, 1)$ ,  $\phi(\theta, B_0) = X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dada explicitamente em uma parametrização global em parâmetros naturais.*

**Demonstração:**

A demonstração completa se encontra em [3]. Aqui, daremos apenas um roteiro. Seja  $U(a, \delta, m)$  a expressão para  $U$  obtida por (5.31),

$$m^2 U^2 = \frac{1}{2H^2} \left( 2Ha + 1 + (1 + 4Ha - 4H^2\delta^2)^{1/2} \text{sen}(2Hs) \right),$$

ou seja

$$U(a, \delta, m)^2 = \frac{1}{2m^2 H^2} (2Ha + 1 + B \text{sen}(2Hs)). \quad (5.38)$$

Para encontrar uma família a 2-parâmetros de superfícies helicoidais de  $H = cte$  isométricas a uma superfície de rotação com mesmo  $H$ , introduzimos novos parâmetros  $(a_0, \theta)$  definidos por,

$$\begin{aligned} a(a_0, \theta) &= \frac{a_0 \cos \theta}{1 + 2a_0 H (1 - \cos \theta)}, \\ \delta(a_0, \theta) &= \frac{a_0 \text{sen} \theta}{1 + 2a_0 H (1 - \cos \theta)}, \quad a_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]. \\ m(a_0, \theta)^2 &= \frac{1}{1 + 2a_0 H (1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

$U(a_0, 0, m)$  é o coeficiente  $G$  de uma superfície de rotação da família a 3-parâmetros, denotemos por  $X(a_0)$  esta superfície. Então, devemos mostrar com o auxílio das equações em (5.39), que

$$U(a, \delta, m) = U(a_0, 0, 1).$$

Antes de prosseguir, enunciamos uma versão “adaptada” do *Teorema de Lawson* que é de vital importância para a demonstração do Teorema 5.1. A demonstração deste teorema pode ser vista em [1], página 21.

**Teorema 5.2** (Lawson) *Sejam  $W \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $S$  uma superfície com curvatura média constante  $H$  parametrizada por  $X : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Então existe uma família diferenciável,  $2\pi$ -periódica de superfícies  $X_\theta : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $X_0 = X$ , com a mesma métrica induzida e com curvatura média  $H$ . Além disso, a família  $X_\theta$  contém todas as (extensões de) superfícies localmente isométricas a  $S$  com  $H$  dado.*

Juntando  $U(a, \delta, m) = U(a_0, 0, 1)$ , com o Teorema 5.2, obtemos que a família  $X_\theta(a_0)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  é a família associada a  $X(a_0)$ . Para ver que dada uma superfície helicoidal  $\bar{X}$  da família (5.37) com parâmetros  $\bar{a}$ ,  $\bar{\delta}$  e  $\bar{m}$  existe uma superfície de rotação  $X(a_0)$  (5.37) e um número  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que  $\bar{X} = X_\theta(a_0)$ , devemos considerar a expressão de  $U(\bar{a}, \bar{\delta}, \bar{m})$  e encontrar uma superfície de rotação  $X(\tilde{a}_0)$  tal que  $U(\bar{a}, \bar{\delta}, \bar{m}) = U(\tilde{a}_0, 0, 1)$ . Para mostrar que  $U(\bar{a}, \bar{\delta}, \bar{m}) = U(\tilde{a}_0, 0, 1)$ , devemos trabalhar a hipótese de que  $X$  e  $X(\tilde{a}_0)$  possuem mesma curvatura média constante  $H$  e relacionar os coeficientes da segunda forma  $e$ ,  $f$  e  $g$  de  $X$  e  $e_0$ ,  $f_0$  e  $g_0$  de  $X(a_0)$ . Demonstrada essa segunda parte, será conveniente expressar a família a 3-parâmetros da Proposição 5.2 em termos de  $(\theta, a_0)$ . Como

$$B(\theta, a_0) = (1 + 4a_0 H)^{1/2} (1 + 2a_0 H (1 - \cos \theta))^{-1}. \quad (5.40)$$

Então definimos  $B_0 = B(0, a_0)$  e portanto

$$B_0^2 = 1 + 4a_0H. \quad (5.41)$$

Isolando  $a_0$  em (5.41)

$$a_0 = (B_0^2 - 1)/(4H)$$

e substituindo  $a_0$  em (5.39),

$$\begin{aligned} B(\theta, B_0) &= \frac{2B_0}{2 + (B_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \\ \delta(\theta, B_0) &= \frac{(B_0^2 - 1)\text{sen} \theta}{2H(2 + (B_0^2 - 1)(1 - \cos \theta))} \quad , \\ m^2(\theta, B_0) &= \frac{2}{2 + (B_0^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \end{aligned} \quad (5.42)$$

o que prova a primeira parte do Teorema 5.1. O problema é quando  $B = 1$ . A superfície de rotação da família associada, i.e,  $\theta = 0$ , é dada por  $B_0 = 1$ . Assim  $m^2(\theta, 1) = 1 = B(\theta, 1)$  e  $\delta(\theta, 1) = 0$  para todo  $\theta$ . Então,  $B_0 = 1$  corresponde à esfera<sup>2</sup> e a família associada à esfera é a própria esfera. Neste caso a parametrização natural possui uma singularidade em exatamente dois pontos, justificando a exceção feita no Teorema 5.1.

Se  $\delta = 0$  e  $B_0 = 0$ , por (5.42) obtemos  $B(\theta, 0) = 0$  para todo valor de  $\theta$ , além disso  $\rho(s) = \frac{1}{2H}$ , portanto temos um cilindro circular reto o que mostra que a família associada ao cilindro é o próprio cilindro. ■

---

<sup>2</sup>De  $B_0 = 1$ , resulta  $a_0 = 0$  (veja (5.41)), então

$U(a_0, 0, 1) = U(0, 0, 1) = (2H)^{-1}\text{sen}(2Hs)$  e  $\tilde{U}(0, 0, 1) = -2H\text{sen}(2Hs)$ .

Para uma superfície helicoidal parametrizada por parâmetros naturais, a expressão da curvatura gaussiana é  $K = -\ddot{U}U^{-1}$ , então  $K = -\ddot{U}(0, 0, 1)U(0, 0, 1)^{-1} = 2H\text{sen}(2Hs) ((2H)^{-1}\text{sen}(2Hs))^{-1} = 4H^2$ , daí suponha que a curvatura média de  $U(0, 0, 1)$  seja  $H = (2a)^{-1} > 0$ , então a curvatura gaussiana de  $U(0, 0, 1)$  será  $K = 4(2a)^{-2} = a^{-2}$ , ou seja  $U(0, 0, 1)$  é uma esfera.

# Referências Bibliográficas

- [1] Barrientos, Javier O., *Superfícies Helicoidais com Curvatura Constante no Espaço de Formas Tridimensional*. Tese de Doutorado, Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1995.
- [2] do Carmo, Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, (1976).
- [3] do Carmo, Manfredo P. e Dajczer, Marcos, *Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*. Tôhoku Math. Journal n° 34, (1982), 425-435.
- [4] Delaunay, Charles; *Sur la Surface de Revolution dont la Courbure Moyenne est Constante*, Journal de Mathematiques Pures e Appliquées, (1841), 309-320, Paris.
- [5] Eells, James, *The Surfaces of Delaunay*. The Math. Int. vol. 9, n°1, Springer-Verlag New York, (1987), 53-57.
- [6] Kenmotsu, K., *Surfaces of Revolution with prescribed mean curvature*. Tôhoku Math. J. 32(1980),147-153.
- [7] Lima, Elon Lages ; *Álgebra Linear, terceira edição*. SBM, Coleção Matemática Universitária, (1998).
- [8] Ripoll, J. B. & Medeiros, Nubem ; *Hipersuperfícies Invariantes de Curvatura Média Constante*. Matemática Universitária n°13, junho de 1991, 39-63.
- [9] Zwikker, , *The Advanced Geometry o Plane Curves and their Applications*. Dover, Publications, Inc., New York (1963).