

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**SOLUÇÕES RADIAIS POSITIVAS  
DO PROBLEMA DE DIRICHLET  
PARA O  $p$ -LAPLACIANO COM  
COEFICIENTE NÃO LOCAL**

**Wenderson Marques Ferreira**

Orientadores : Prof.HamiltonPradoBueno(orientador)  
Prof.GreyErcole(co – orientador)

BELO HORIZONTE, 10 DE FEVEREIRO DE 2006

*”O Dito dizia que o certo era a gente estar sempre  
brabo de alegre, alegre por dentro, mesmo com  
tudo que acontece, alegre nas profundas. Podia?  
Alegre era a gente viver devagarinho, miudinho,  
não se importando demais com coisa nenhuma.”*  
(João Guimarães Rosa - Miguilim)

## Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, que a cada dia se renova e, ao se renovar, nos dá a possibilidade de vivenciar novas ações e experiências, nos propicia a cada manhã a escolha entre chorar ou vender lenços e a cada noite nos faz ter mais casos pra contar.

Agradeço à vida pelas oportunidades que nos levam adiante e que fazem com que os caminhos tornem-se cada vez mais longos, as jornadas cada vez mais interessantes e os espíritos cada vez mais evoluídos.

Agradeço às oportunidades pelo aprendizado, que nos dá benefícios que nunca são perdidos, que nos ilumina por tantas vezes e que em tantas outras nos faz ser luz.

Agradeço a meus pais e a meu irmão pelo apoio e orações.

Aos amigos que já conhecia e àqueles que conheci nessa caminhada, agradeço pela torcida - agradeço aos que torceram de longe, aos que caminharam ao lado, aos que caminharam tão ao lado que em muitos momentos foi impossível distinguir os caminhos, bem como àqueles que tiveram mais pressa em se tornarem "encantados".

Deixo um agradecimento especial aos meus orientadores Grey e Hamilton pelo apoio e acolhida na Universidade Federal de Minas Gerais e também ao professor João Luiz, da Universidade Federal de Ouro Preto, pelo incentivo e orientação no início da caminhada.

Por fim, agradeço a todos os que disseram "vai e segue", pelo incentivo, e a todos os outros, por também incentivarem bastante.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 O Problema de Dirichlet com Coeficiente Não-local</b>	<b>7</b>
1.1 Considerações Iniciais . . . . .	7
1.2 Resultados Preliminares . . . . .	10
1.3 Existência e Localização de Soluções . . . . .	18
1.3.1 Considerações Acerca da Multiplicidade . . . . .	25
1.4 Considerações Sobre Alguns Operadores . . . . .	26
1.4.1 Coeficientes Não-locais Positivos . . . . .	26
1.4.2 Um exemplo para o caso $a(0) = 0$ . . . . .	27
<b>Apêndice</b>	<b>29</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>34</b>

# INTRODUÇÃO

Nesse trabalho vamos estudar problemas de valor de fronteira do tipo

$$\begin{cases} -A[u]\Delta_p u = q(|x|)f(u), & \text{em } B_1 \\ u = 0, & \text{em } \partial B_1 \end{cases} \quad (1)$$

em que:

- $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ , com  $n > 1$ ;
- $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  é o operador  $p$ -Laplaciano,  $p > 1$ ;
- as funções  $q : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas;
- $A[u]$  é um coeficiente não-local da forma

$$A[u] = a \left( \int_{B_1} |u| dx \right), \quad (2)$$

sendo  $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  contínua e não-decrescente, com

$$a(t) > 0, \quad \forall t > 0 \text{ e } a(0) \geq 0. \quad (3)$$

Problemas desse tipo têm sido objeto de crescente interesse nos últimos anos. Citamos, por exemplo, [1] e [4], que abordam o problema não-local para o Laplaciano, isto é, o caso em que  $p = 2$ . Nesse último artigo, o autor considerou  $A[u] = a \left( \int_{\Omega} |u|^\gamma dx \right)$ ,  $\gamma \geq 1$  e assumiu  $a$  não-decrescente e estritamente positiva. Para simplificar a exposição, optamos por apresentar nossos resultados para o caso  $\gamma = 1$ , mas esses também são válidos, com pequenas adaptações, para  $\gamma > 0$ . Exemplificaremos nossos resultados com o estudo da função  $a(t) = ct^\beta$ , em que  $c > 0$  e  $\beta > 0$ . Nesse caso (que satisfaz  $a(0) = 0$  e não é tratado nos artigos [1] e [4]) mostraremos, inclusive, que o problema pode admitir múltiplas soluções.

Os problemas de valor de fronteira como os estudados neste trabalho surgem em diversos modelos físicos e biológicos, sendo  $A[u]$  um coeficiente não-local que modela processos que dependem de toda a região estudada. Por exemplo,  $A[u]$  pode representar a densidade de uma dada população que vive na região considerada.

Os artigos [7] e [8] constituem a principal referência do presente trabalho. Em ambos, os autores estudam o problema em domínios radiais limitados

e ilimitados, mas não consideram o coeficiente não-local  $A[u]$ . O principal ponto em comum entre nosso trabalho e aqueles artigos consiste no método utilizado, em que limitações locais da não-linearidade  $f$  são suficientes para garantir a existência de soluções positivas, por meio da aplicação do teorema do ponto fixo de Schauder. Essas limitações locais sobre  $f$  significam que o gráfico desta função passa por um “túnel” adequado.

Na Seção (1.2) mostraremos resultados preliminares que serão utilizados na demonstração de nosso teorema. Tais resultados mostrarão que as possíveis soluções de (1) são funções não-crescentes em  $[0, 1]$ , obtidas como pontos fixos do operador  $T : Y \subset X \rightarrow X$  definido por

$$(Tu)(r) = \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

em que

$$Y = \{u \in X : 0 \leq u(r) \leq M; \delta \leq u(r) \text{ se } 0 \leq r \leq \alpha; u(1) = 0\}$$

é um subconjunto do espaço de Banach  $X = C([0, 1], \mathbb{R})$  das funções contínuas em  $[0, 1]$  com a norma do sup. Além disso, mostraremos que as soluções radiais positivas são de classe  $C^2([0, 1]; \mathbb{R})$ , se  $1 < p \leq 2$  (o que inclui o problema (1) no caso do Laplaciano); se  $p > 2$ , podemos garantir apenas que as soluções são de classe  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ .

A Seção (1.3) é devotada à verificação da invariância do operador  $T(u)$  no subconjunto  $Y$  e à aplicação do teorema do ponto fixo de Schauder, que garante a existência das soluções de (1). Em seguida, apresentamos um resultado sobre a localização da solução obtida.

Exemplificaremos nossos resultados na Seção (1.4), estudando a família de funções  $a(t) = ct^\beta$ , para  $c > 0$  e  $\beta > 0$ , caso em que podemos apresentar multiplicidade de soluções.

No apêndice, enunciamos alguns resultados básicos que utilizamos no decorrer do trabalho, tais como o teorema da convergência dominada, o teorema de Arzela-Áscoli e o teorema do ponto fixo de Schauder.

# Capítulo 1

## O Problema de Dirichlet com Coeficiente Não-local

### 1.1 Considerações Iniciais

Como vimos, utilizando as notações e hipóteses descritas na introdução, neste trabalho mostraremos um resultado sobre a existência de soluções radiais positivas para o seguinte problema

$$\begin{cases} -A[u]\Delta_p u = q(|x|)f(u), & \text{em } B_1 \\ u = 0, & \text{em } \partial B_1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Observamos que, se  $u = u(|x|)$ , então

$$A[u] = a \left( \int_{B_1} |u| dx \right) = a \left( n w_n \int_0^1 |u(r)| r^{n-1} dr \right),$$

em que  $w_n = \int_{B_1} dx$ .

Assumiremos, adicionalmente, que

$$0 < \int_0^1 q(s) ds < \infty \quad (1.2)$$

e que a função  $q$  não seja identicamente nula em qualquer subintervalo de  $[0, 1)$ .

Definimos, para  $0 \leq r \leq 1$  a função

$$\psi(r) = \int_r^1 \left( \int_0^r \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \quad (1.3)$$

Notamos que, além de contínua,  $\psi(r)$  é uma função não-negativa, não-identicamente nula e que  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ . Sendo assim, existe um ponto  $\alpha \in (0, 1)$  no qual a função  $\psi$  atinge seu máximo.

Para valores  $0 < \delta < M$ , definimos as constantes

$$k_1(\delta) := a(w_n \delta \alpha^n) \left[ \int_0^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \right]^{-(p-1)} \quad (1.4)$$

e

$$k_2(M) := a(w_n M) [\psi(\alpha)]^{-(p-1)} = a(w_n M) [\max_{0 \leq r \leq 1} \psi(r)]^{-(p-1)},$$

ou seja,

$$k_2(M) := a(w_n M) \left[ \int_\alpha^1 \left( \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \right]^{-(p-1)}. \quad (1.5)$$

Uma vez que  $q$  não se anula em qualquer subintervalo de  $[0, 1)$ , ambas as constantes são positivas.

Notamos que, dados  $0 < \delta \leq M$ , então vale

$$\frac{k_1(\delta)}{k_2(M)} = L \frac{a(w_n \delta \alpha^n)}{a(w_n M)}, \quad (1.6)$$

em que

$$\begin{aligned} L &= \left[ \frac{\int_\alpha^1 \left( \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta}{\int_0^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta} \right]^{p-1} \\ &< \left[ \frac{\int_\alpha^1 \left( \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta}{\int_\alpha^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta} \right]^{p-1} < 1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Portanto, de (1.7) e da monotonicidade de  $a(t)$ , podemos concluir que, para  $0 < \delta \leq M$  vale

$$k_1(\delta) < k_2(M).$$



Supomos ainda que a função não-linear  $f$  satisfaça

$$0 \leq f(u) \leq k_1(\delta)M^{p-1}, \text{ para } 0 \leq u \leq M, \quad (1.8)$$

e

$$f(u) \geq k_2(M)\delta^{p-1}, \text{ para } \delta \leq u \leq M. \quad (1.9)$$

As condições impostas sobre a função  $f$  correspondem à exigência geométrica de que seu gráfico tenha comportamento tal qual o esboçado na Figura 1.1

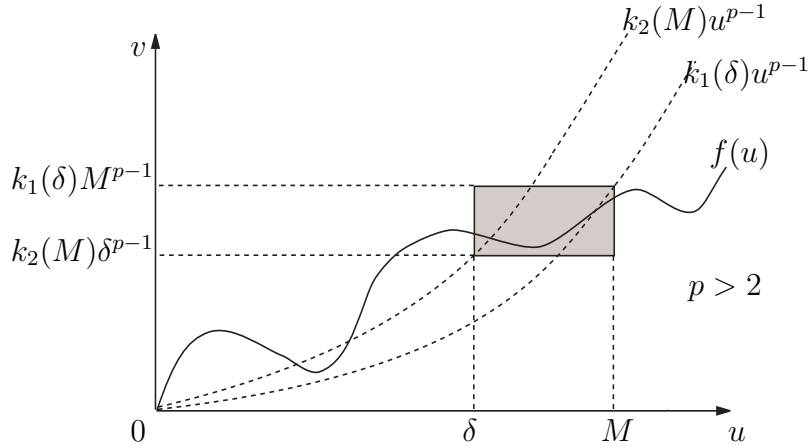


Figura 1.1: Gráfico de  $f$  passando por um túnel  $\Gamma$ .

Em termos puramente geométricos, a situação representada na Figura 1.1 corresponde à passagem de  $f$  por um “túnel”  $\Gamma$ , dado por

$$\Gamma = \{(u, v) : k_2(M)\delta^{p-1} \leq v \leq k_1(\delta)M^{p-1}, \delta \leq u \leq M\}.$$

O nível superior do túnel  $\Gamma$  é dado pela imagem de  $M$  pela função  $k_1(\delta)u^{p-1}$ . O nível inferior é determinado pela função  $k_2(M)u^{p-1}$  calculada em  $\delta < M$ .

Podemos notar também que, além de passar pelo túnel, o gráfico de  $f$  deverá permanecer abaixo da reta  $v \equiv k_1(\delta)M^{p-1}$  para  $0 \leq u \leq M$ .

Observamos que a existência do túnel  $\Gamma$  é determinada pela desigualdade

$$k_1(\delta)M^{p-1} \geq k_2(M)\delta^{p-1}$$

para  $0 < \delta < M$ . (No caso da igualdade o túnel é um segmento de reta e  $f(u)$  deve ser constante em  $[\delta, M]$ ).

Podemos notar que a relação anterior pode ser representada como

$$L \frac{a(w_n \delta \alpha^n)}{a(w_n M)} \geq \left( \frac{\delta}{M} \right)^{p-1}. \quad (1.10)$$

Portanto, a existência de um túnel  $\Gamma$  está estreitamente ligada ao coeficiente não-local  $a$ .

Nosso principal objetivo é mostrar que, toda vez que o gráfico da função  $f$  passar por um túnel  $\Gamma$ , existirá uma solução radial positiva de (1.1). Além disso, esta solução positiva é limitada por duas funções contínuas não-negativas e seu valor máximo encontra-se entre  $\delta$  e  $M$ .

Em outras palavras, nosso objetivo é demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema:** *Sejam  $q : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função contínua satisfazendo (1.2),  $f$  uma função contínua satisfazendo (1.8) e (1.9) e  $A[u]$  um coeficiente não-local contínuo e não-decrescente, com a forma (2) e satisfazendo (3). Então existe ao menos uma solução radial positiva  $u$  para (1.1), com  $\delta \leq u(|x|) \leq M$  se  $0 \leq r \leq 1$ .*

Esse teorema assemelha-se ao teorema obtido em [7], com as devidas adaptações necessárias à solução do problema 1.1 com coeficiente não local  $A[u]$ .

Entendemos por solução de (1.1) uma função  $u \in C^1(B_1; \mathbb{R}) \cap C(\overline{B_1}; \mathbb{R})$  para a qual exista  $\operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$ , se  $x \in B_1$ , e que satisfaça (1.1). Como estamos interessados em estudar a existência de soluções radiais, denotaremos  $u = u(r)$ , em que  $r = |x|$ .

## 1.2 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns lemas que serão importantes para a obtenção de soluções. No próximo lema, vamos assumir que  $A[u] \neq 0$ .

**Lema 1** *As soluções radiais positivas de (1.1) também são soluções do sistema*

$$\begin{cases} |u'(r)|^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) \right] = -q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]}, \\ u'(0) = 0 = u(1), \quad u(r) > 0; \quad r \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.11)$$

**Demonstração:**

Verifiquemos apenas o caso em que  $u'(r) \leq 0$ , pois o caso  $u'(r) \geq 0$  é inteiramente análogo. Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( u \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \right) \right) = \frac{u'(r)}{r} x_i,$$

decorre que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u(r) &= -\operatorname{div} (|\nabla u(r)|^{p-2} \nabla u(r)) = -\operatorname{div} \left( \frac{|u'(r)|^{p-2} |x|^{p-2}}{r^{p-2}} \frac{u'(r)}{r} x \right) \\ &= -\operatorname{div} \left( (-u'(r))^{p-2} \frac{u'(r)}{r} x \right) = -\operatorname{div} \left( -\frac{(-u'(r))^{p-1}}{r} x \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (p-1)(-u'(r))^{p-2} (-u''(r)) \frac{x_i^2}{r^2} + (-u'(r))^{p-1} \left( \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \right] \\ &= -(p-1)(-u'(r))^{p-2} u''(r) + (-u'(r))^{p-1} \frac{n-1}{r} \\ &= -(-u'(r))^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + u'(r) \frac{n-1}{r} \right] \\ &= -|u'(r)|^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + u'(r) \frac{n-1}{r} \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$|u'(r)|^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + u'(r) \frac{n-1}{r} \right] = -q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]}, r \in (0, 1).$$

A condição de bordo é satisfeita se  $u(1) = 0$  e a condição  $u'(0) = 0$  é necessária para que exista a derivada da função radial  $u$  em  $x = 0$ .  $\square$

Para verificarmos a existência de soluções de (1.11), consideraremos o subconjunto

$$Y = \{u \in X : 0 \leq u(r) \leq M; \delta \leq u(r) \text{ se } 0 \leq r \leq \alpha; u(1) = 0\} \quad (1.12)$$

do espaço de Banach  $X = C([0, 1], \mathbb{R})$  das funções contínuas em  $[0, 1]$  com a norma do sup.

Sendo  $0 < \alpha < 1$ , percebemos que, se  $u \in Y$ , vale

$$A[u] \geq a \left( nw_n \int_0^\alpha |u| r^{n-1} dr \right) \geq a \left( nw_n \delta \int_0^\alpha r^{n-1} dr \right) = a(w_n \delta \alpha^n), \quad (1.13)$$

e dessa relação podemos concluir que o Lema 1 é válido em  $Y$ .

Além disso, como  $|u| \leq M$ , concluímos que

$$A[u] = a \left( nw_n \int_0^1 |u| r^{n-1} dr \right) \leq a \left( nw_n M \int_0^1 r^{n-1} dr \right) = a(w_n M). \quad (1.14)$$

Portanto, se  $u \in Y$ , as condições (1.8) e (1.13) implicam que

$$\frac{f(u)}{A[u]} \leq \frac{k_1(\delta) M^{p-1}}{a(w_n \delta \alpha^n)}. \quad (1.15)$$

Do mesmo modo, se  $0 \leq r \leq \alpha$ , de (1.9) e (1.14) concluímos que,

$$\frac{f(u)}{A[u]} \geq \frac{k_2(M) \delta^{p-1}}{a(w_n M)}. \quad (1.16)$$

O próximo resultado transforma o estudo de (1.11) em um problema de ponto fixo:

**Lema 2** *As possíveis soluções radiais positivas de (1.11) são funções não-crescentes.*

*Uma função  $u(r)$  em  $Y$  é solução positiva de (1.1) se, e só se, for ponto fixo do operador  $T : Y \subset X \rightarrow X$  definido por*

$$(Tu)(r) = \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \quad (1.17)$$

**Demonstração:**

Admitiremos inicialmente que  $u'(r) \leq 0$ . Nesse caso, temos

$$(-u'(r))^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) \right] = -q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]},$$

ou seja,

$$-(-u'(r))^{p-2}(p-1)u''(r) - \frac{n-1}{r}u'(r)(-u'(r))^{p-2} = q(r)\frac{f(u(r))}{A[u]},$$

de modo que

$$[(-u'(r))^{p-1}]' + \left(\frac{n-1}{r}\right)(-u'(r))^{p-1} = q(r)\frac{f(u(r))}{A[u]}.$$

Definindo  $w(r) = [-u'(r)]^{p-1}$ , a última equação toma a forma

$$w'(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)w(r) = q(r)\frac{f(u(r))}{A[u]}$$

e, portanto,

$$r^{n-1}w'(r) + \left(\frac{n-1}{r}\right)r^{n-1}w(r) = r^{n-1}q(r)\frac{f(u(r))}{A[u]},$$

isto é,

$$[(r^{n-1}w(r))]' = r^{n-1}q(r)\frac{f(u(r))}{A[u]}.$$

Integrando a última igualdade de 0 a  $r$  e considerando as condições iniciais, temos que

$$r^{n-1}w(r) = \int_0^r s^{n-1}q(s)\frac{f(u(s))}{A[u]}ds.$$

Assim,

$$w(r) = \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)\frac{f(u(s))}{A[u]}ds.$$

Como  $w(r) = [-u'(r)]^{p-1}$ , vem

$$-u'(r) = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)\frac{f(u(s))}{A[u]}ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Integrando de  $r$  a 1 e utilizando a condição de fronteira, obtemos

$$u(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)\frac{f(u(s))}{A[u]}ds\right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Mostramos, assim, que uma solução de (1.11) é dada como um ponto fixo do operador  $T$ , definido por (1.17). Vale notar que, para definirmos o operador  $T$ , não foi necessário supormos que a função  $q$  estivesse definida na origem.

Vejamos agora que, se supusermos  $u'(r) > 0$  em algum subintervalo de  $[0, 1]$ , obteremos uma contradição.

Provemos inicialmente que  $u$  não pode ser crescente em uma vizinhança da origem. Se efetuarmos os mesmos cálculos feitos no caso anterior obteremos

$$\left[ (u'(r))^{p-1} \right]' + \left( \frac{n-1}{r} \right) (u'(r))^{p-1} = -q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]}.$$

Como antes, definindo  $w(r) = [u'(r)]^{p-1}$ , temos que

$$\left[ r^{n-1}w(r) \right]' = -r^{n-1}q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]}. \quad (1.18)$$

Integrando a última relação de 0 a  $\theta$  obtemos

$$\theta^{n-1}w(\theta) = - \int_0^\theta s^{n-1}q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds,$$

o que constitui uma contradição, visto que o lado esquerdo da última expressão é positivo, enquanto o lado direito é negativo. Portanto, concluímos que a função  $u$  é não-crescente em uma vizinhança  $[0, \theta]$  da origem.

Suponhamos, agora, que  $u$  seja crescente em um subintervalo  $[\theta_1, \theta_2]$  de  $[0, 1]$ . Da continuidade de  $u$  e do fato de  $u$  não poder ser crescente numa vizinhança da origem, inferimos a existência de  $t_0 \in (0, 1]$  tal que  $u'(t_0) = 0$ .

Seja  $V$  uma vizinhança de  $t_0$ , tal que  $u'(r) > 0$  para cada  $r > t_0$ ,  $r \in V$ . Visto que a relação (1.18) permanece válida, podemos integrá-la de  $t_0$  a  $r \in V$ , obtendo

$$r^{n-1}w(r) - t_0^{n-1}w(t_0) = r^{n-1}w(r) = - \int_{t_0}^r s^{n-1}q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds,$$

o que constitui, como antes, uma contradição. Vale notar que nesse ponto é imprescindível que a função  $q$  não seja identicamente nula em nenhum subintervalo de  $[0, 1]$ .

Desse modo, concluímos que as possíveis soluções  $u$  de (1.11) são não-crescentes em  $[0, 1]$ .

Agora, provaremos que um ponto fixo  $v(r)$  do operador  $T$  dado por (1.17) é, de fato, uma solução do problema (1.1).

Derivando a igualdade

$$v(r) = \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

obtemos

$$v'(r) = - \left( \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right)^{1/(p-1)}. \quad (1.19)$$

A aplicação da regra de Leibniz produz

$$\begin{aligned} v''(r) &= -\frac{1}{p-1} \left( \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right) \\ &= -\frac{1}{p-1} \left( \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \\ &\quad \left[ q(r) \frac{f(v(r))}{A[v]} - \frac{n-1}{r} \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(v(s))}{A[v]} ds \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Substituindo as expressões dadas por (1.19) e (1.20) em

$$|u'(r)|^{p-2} \left[ (p-1)u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) \right],$$

nosso resultado é obtido após algumas manipulações algébricas.  $\square$

Notemos ainda que, se  $u = Tu$  for ponto fixo do operador (1.17), então  $u \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ . A única dificuldade desse fato consiste em verificar a existência da derivada em  $r = 0$ ; no entanto,  $(Tu)'(0) = 0$ , pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{T(u(r)) - T(u(0))}{r} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta}{r},$$

e como o limite anterior nos conduz a uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , podemos aplicar a regra de L'Hopital e obter

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{T(u(r)) - T(u(0))}{r} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)}}{1}$$

bastando, então, utilizarmos que  $\frac{s}{r} < 1$  e as relações (1.2) e (1.15) para concluirmos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{T(u(r)) - T(u(0))}{r} = 0.$$

Isso mostra que  $u \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  e  $u'(0) = 0$ .

No caso em que  $1 < p \leq 2$ , podemos garantir que os pontos fixos de (1.17) serão de classe  $C^2$ . De fato, como  $u'(r)$  e  $u''(r)$  são dados por (1.19) e (1.20), respectivamente, basta mostrarmos a continuidade de  $u''(r)$  em  $r = 0$ .

Para simplificar a notação, seja

$$F(s) = q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]}, \text{ se } s \in [0, 1].$$

Notemos que, como  $u'(0) = 0$ , temos que

$$u''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'(r) - u'(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u'(r)}{r} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left( \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} F(s) ds \right)^{1/(p-1)}}{r},$$

de modo que a regra de L'Hopital implica que

$$u''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} u''(r). \quad (1.21)$$

Por outro lado, afirmamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} F(s) ds = \frac{F(0)}{n}. \quad (1.22)$$

De fato, sendo  $F(r)$  contínua em 0, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|F(r) - F(0)| < \epsilon, \quad \text{se } 0 < r < \delta.$$

Assim sendo, se  $r \in (0, \delta)$ , temos



$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} F(s) ds - \frac{F(0)}{n} \right| &= \left| \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} [F(s) - F(0)] ds \right| \\
&\leq \frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} |F(s) - F(0)| ds \\
&< \frac{\epsilon}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} ds \\
&= \frac{\epsilon}{n},
\end{aligned}$$

donde inferimos a validade de (1.22).

Se for  $p = 2$ , então

$$u''(r) = - \left[ -\frac{n-1}{r} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} q(r) ds + q(r) \frac{f(u(r))}{A[u]} \right],$$

que claramente é uma função contínua para  $r \neq 0$ . Além disso, utilizando (1.21) e (1.22), concluimos que

$$u''(0) = \frac{n-1}{n} F(0) - F(0) = -\frac{F(0)}{n},$$

mostrando que, se  $p = 2$ , os pontos fixos de  $T$  são de classe  $C^2([0, 1]; \mathbb{R})$ .

Também no caso em que  $1 < p < 2$  podemos concluir que os pontos fixos de (1.17) são de classe  $C^2([0, 1]; \mathbb{R})$  e satisfazem  $u''(0) = 0$ . De fato, as relações (1.21) e (1.22) permanecem válidas e o expoente  $\frac{2-p}{p-1}$  em (1.20) é positivo. Além disso, como  $u'(0) = 0$ , temos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} F(s) ds = 0. \quad (1.23)$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow 0} u''(r) = 0,$$

provando que  $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

Finalmente, caso tenhamos  $p > 2$ , ocorrerá uma singularidade na origem, pois as relações (1.21) - (1.23) permanecerão válidas, enquanto o expoente  $\frac{2-p}{p-1}$  em (1.20) será negativo.

Pelo que vimos anteriormente, os pontos fixos do operador (1.17) são funções  $u \in C^1(B_1; \mathbb{R}) \cap C(\overline{B_1}; \mathbb{R})$ . Vejamos agora que, para tais pontos fixos, existe  $\operatorname{div}(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x))$  para  $x \in B_1$ .

Para tal, verifiquemos que existe  $\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u(r)|^{p-2} \nabla u(r))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Uma vez que os pontos fixos de (1.17) são funções não-crescentes, temos que, como visto na demonstração do Lema 1,

$$(|\nabla u(r)|^{p-2} \nabla u(r)) = -\frac{(-u'(r))^{p-1}}{r} x.$$

Podemos, então, utilizar a relação (1.19) e obtermos

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u(r)|^{p-2} \nabla u(r))_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} F(s) ds \right).$$

Portanto, se  $r \neq 0$ , essa última derivada existe. Afirmamos, agora, que ela também existe em  $r = 0$  e vale  $\frac{F(0)}{n}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . De fato, utilizando a relação (1.22) e a definição de derivada direcional, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{|t|} \int_0^{|t|} \left( \frac{s}{|t|} \right)^{n-1} F(s) ds}{t} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^r \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} F(s) ds}{r} = \frac{F(0)}{n}.$$

Sendo assim, se  $r = 0$ , provamos que

$$\operatorname{div}(|\nabla u(r)|^{p-2} \nabla u(r))|_0 = -F(0).$$

Isso permite-nos concluir que, se o operador (1.17) possuir um ponto fixo, o mesmo será solução do problema (1.1).

### 1.3 Existência e Localização de Soluções

Vamos aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder para mostrar a existência de soluções de (1.1).

**Lema 3** *O conjunto  $Y$  é não vazio, fechado, limitado e convexo.*

**Demonstração:**

O conjunto  $Y$  é claramente limitado; visto que qualquer função contínua decrescente que passe pelos pontos  $(0, M)$ ,  $(\alpha, \delta)$  e  $(1, 0)$  pertence a  $Y$  temos que  $Y \neq \emptyset$ .

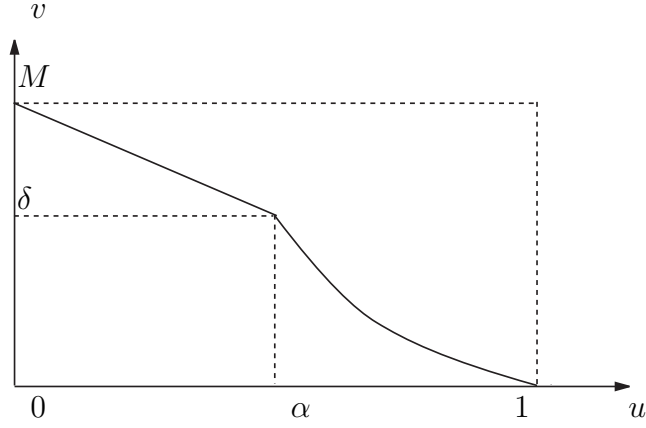


Figura 1.2: Exemplo de função pertencente ao conjunto  $Y$ .

Também é fácil ver que  $Y$  é convexo. De fato, dadas funções  $u$  e  $v \in Y$ , temos que

$$0 \leq (1-t)u(r) + tv(r) \leq (1-t)M + tM = M,$$

$$(1-t)u(1) + tv(1) = 0$$

e

$$(1-t)u(r) + tv(r) \geq (1-t)\delta + t\delta = \delta, \quad \text{caso } 0 \leq r \leq \alpha.$$

Afirmamos que  $Y$  é fechado. De fato, seja  $\{u_n\}$  uma seqüência em  $Y$  com  $u_n \rightarrow u$ . Claramente vale  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r) = u(r) \leq M$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(1) = 0$  e, para  $0 \leq r \leq \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r) = u(r) \geq \delta$ , o que prova o afirmado.  $\square$

**Lema 4** *O operador definido em (1.17) deixa invariante o conjunto  $Y$ , ou seja,  $T(Y) \subset Y$ .*

**Demonstração:**

Denotando  $v(r) = (Tu)(r)$ , o operador (1.17) pode ser escrito como

$$v(r) = \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \quad (1.24)$$

em que  $u \in Y, r \in [0, 1]$ . Note que  $A[u] > 0$ , se  $u \in Y$ .

Afirmamos que  $v(r) \in Y$ . De fato, da própria definição de  $v(r)$  segue-se que  $v(1) = 0$ . Se  $u \in Y$ , podemos utilizar a relação (1.15) de modo a concluirmos que

$$\begin{aligned}
0 \leq v(r) &= \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\leq \int_0^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\leq \int_0^1 \left( \frac{k_1(\delta) M^{p-1}}{a(w_n \delta \alpha^n)} \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&= M,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_0^1 \left( \frac{k_1(\delta)}{a(w_n \delta \alpha^n)} \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = 1.$$

Por outro lado, se  $0 \leq r \leq \alpha$ , utilizamos (1.16) e deduzimos que

$$\begin{aligned}
v(r) &= \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\geq \int_\alpha^1 \left( \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\geq \int_\alpha^1 \left( \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\geq \int_\alpha^1 \left( \frac{k_2(M) \delta^{p-1}}{a(w_n M)} \int_0^\theta \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&= \delta,
\end{aligned}$$

visto que

$$\int_\alpha^1 \left( \frac{k_2(M)}{a(w_n M)} \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = 1.$$

Portanto,  $T(Y) \subset Y$ .  $\square$

**Lema 5** *O operador  $T$  definido em (1.17) é compacto em  $Y$ .*

### Demonstração:

Provemos primeiramente que  $(TY)$  é um conjunto relativamente compacto. Seja  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $Y$ .

Defina  $K = \sup_{|w| \leq M} \left| \frac{f(w)}{A[w]} \right|$ . A constante  $K$  está bem definida, pois  $1/A[u]$  é limitado em  $Y$ , enquanto a função  $f(u(r))$  é contínua e está definida em um compacto da reta. Seja  $v_m = Tu_m$ . Notando que  $\frac{s}{\theta} \leq 1$  vemos que

$$|v_m(r)| \leq K^{1/(p-1)} \int_0^1 \left( \int_0^\theta q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \quad r \in [0, 1]$$

Além disso,

$$v'_m(r) = - \left( \int_0^r \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \quad (1.25)$$

e, conseqüentemente,

$$|v'_m(r)| \leq K^{1/(p-1)} \left( \int_0^r q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \quad r \in [0, 1].$$

Desse modo, tanto  $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$  quanto  $(v'_m)_{m \in \mathbb{N}}$  são seqüências uniformemente limitadas e, em conseqüência do teorema de Arzela-Ascoli, existe uma subseqüência  $(v_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergindo uniformemente para uma função  $v \in Y$  no intervalo  $[0, 1]$ . Isso prova que  $TY$  é relativamente compacto.

Para provar a continuidade de  $T$ , seja  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  uma seqüência que converge uniformemente para  $u$  em  $[0, 1]$ .

Visto que  $TY$  é relativamente compacto, toda subseqüência de  $Tu_m$  possui subseqüência convergente, isto é, dada uma subseqüência  $Tu_{m_k}$  existe uma subseqüência (que também denotaremos por  $Tu_{m_k}$ ) tal que  $Tu_{m_k}$  converge uniformemente.

Verifiquemos então que  $v = Tu$ .

Temos que

$$\left| \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} \right| \leq \left| q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} \right| \leq Kq(s)$$

ou seja, o integrando em (1.25) é limitado por uma função integrável. Além disso, para cada  $s$  fixado temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} \right) = \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) \frac{f(u)}{A[u]}$$

pois  $f$  e  $a$  são funções contínuas e a convergência da sequência  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  é uniforme. Decorre então, do teorema da convergência dominada, que

$$\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} ds \rightarrow \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u)}{A[u]} ds$$

e, conseqüentemente, se definirmos

$$g_m(\theta) := \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} ds \right)^{1/(p-1)},$$

então

$$g_m(\theta) \rightarrow \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u)}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} := g(\theta).$$

Temos que  $g(\theta)$  é limitada para todo  $\theta$ , pois

$$\left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} ds \right)^{1/(p-1)} \leq K^{1/(p-1)} \left( \int_0^\theta q(s) ds \right)^{1/(p-1)} < \infty,$$

e também, para cada  $s$  fixado, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u_m)}{A[u_m]} ds \right)^{1/(p-1)} = \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u)}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)}.$$

Assim, uma nova aplicação do teorema da convergência dominada garante que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_r^1 g_m d\theta = \int_r^1 \lim_{m \rightarrow \infty} g_m d\theta = \int_r^1 g d\theta = Tu.$$

Isso quer dizer que provamos que  $Tu_m \rightarrow Tu$  pontualmente. Desse modo, como já vimos que toda subsequência de  $Tu$  possui subsequência convergindo para  $v$ , concluímos que  $v = Tu$  e, portanto,  $T$  é contínuo.

Concluimos, então, que  $T$  é compacto, já que  $T$  é contínuo e  $TY$  é relativamente compacto.  $\square$

Agora determinaremos a localização das soluções. Para tal, definimos duas funções auxiliares. Para  $0 \leq r \leq 1$ , definimos

$$\Phi_M(r) := \frac{M}{(a(w_n \delta \alpha^n))^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( k_1(\delta) \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \quad (1.26)$$

Para  $0 \leq r < \alpha$ , definimos  $\Psi_\delta(r) \equiv \delta$  e, para  $\alpha \leq r \leq 1$ , definimos

$$\Psi_\delta(r) := \frac{\delta}{(a(w_n M))^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \quad (1.27)$$

Afirmamos que a função  $\Psi_\delta(r)$  é contínua em  $\alpha$ . De fato,

$$\begin{aligned} \Psi_\delta(\alpha) &= \frac{\delta}{a(w_n M)^{1/(p-1)}} \int_\alpha^1 \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \frac{\delta k_2(M)^{1/(p-1)}}{a(w_n M)^{1/(p-1)}} \int_\alpha^1 \left( \int_0^\alpha \left( \frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \delta. \end{aligned}$$

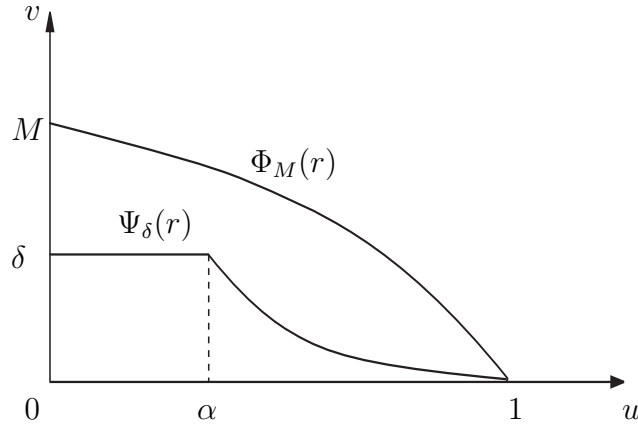


Figura 1.3: Possível gráfico das funções  $\Psi_\delta(r)$  e  $\Phi_M(r)$ .

Podemos também notar que, se  $\alpha \leq r \leq 1$ , então

$$\Psi'_\delta(r) = -\frac{\delta}{a(w_n M)^{1/(p-1)}} \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} < 0$$

e

$$\Psi''_\delta(r) = -\frac{\delta(1-n)}{r(p-1)a(w_n M)^{1/(p-1)}} \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left( \frac{s}{r} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} \geq 0.$$

Conseqüentemente, a função  $\Psi_\delta(r)$  é decrescente e côncava para cima no intervalo  $(\alpha, 1)$ .

Cálculos análogos mostram que, se  $0 \leq r \leq 1$ , então

$$\Phi'_M(r) = -\frac{\delta}{a(w_n \delta \alpha^n)^{1/(p-1)}} \left( k_1(\delta) \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} < 0.$$

Assim sendo, a função  $\Phi_M(r)$  é decrescente em  $[0, 1]$ .

**Lema 6** *As funções  $\Phi_M$  e  $\Psi_\delta$  definidas por (1.26) e (1.27) (respectivamente), satisfazem a desigualdade*

$$0 \leq \Psi_\delta(r) \leq (Tu)(r) \leq \Phi_M(r). \quad (1.28)$$

**Demonstração:**

Inicialmente provemos que  $0 \leq \Psi_\delta(r) \leq (Tu)(r)$ . Caso  $\alpha \leq r \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} (Tu)(r) &= \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{1}{(A[u])^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{1}{(A[u])^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( k_2(M) \delta^{p-1} \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{\delta}{(a(w_n M))^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \Psi_\delta(r), \end{aligned}$$

e, caso  $0 \leq r \leq \alpha$ , temos

$$\begin{aligned} (Tu)(r) &= \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{1}{(A[u])^{1/(p-1)}} \int_\alpha^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{1}{(A[u])^{1/(p-1)}} \int_\alpha^1 \left( k_2(M) \delta^{p-1} \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \frac{\delta}{(a(w_n M))^{1/(p-1)}} \int_\alpha^1 \left( k_2(M) \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \delta = \Psi_\delta(r). \end{aligned}$$



A desigualdade  $(Tu)(r) \leq \Phi_M(r)$  também é válida pois

$$\begin{aligned} (Tu)(r) &= \int_r^1 \left( \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) \frac{f(u(s))}{A[u]} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\leq \frac{M}{a(w_n \delta \alpha^n)^{1/(p-1)}} \int_r^1 \left( k_1(\delta) \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \Phi_M(r). \end{aligned}$$

Isso mostra as desigualdades afirmadas.  $\square$

Com base nos resultados anteriores, resulta da aplicação do teorema do ponto fixo de Schauder o seguinte resultado, que permite-nos garantir a existência e localização das soluções do problema (1.1):

**Teorema 7** *Sejam  $q : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função contínua satisfazendo (1.2),  $f$  uma função contínua satisfazendo (1.8) e (1.9) e  $A[u]$  um coeficiente não-local contínuo e não-decrescente, com a forma (2) e satisfazendo (3). Então existe ao menos uma solução radial positiva  $u$  para (1.1), com  $\Psi_\delta(|x|) \leq u(|x|) \leq \Phi_M(|x|)$  se  $0 \leq r \leq 1$ .*

### 1.3.1 Considerações Acerca da Multiplicidade

Podemos notar que o teorema acima é capaz de nos dar, em alguns casos, informações sobre a multiplicidade de soluções do problema (1.1).

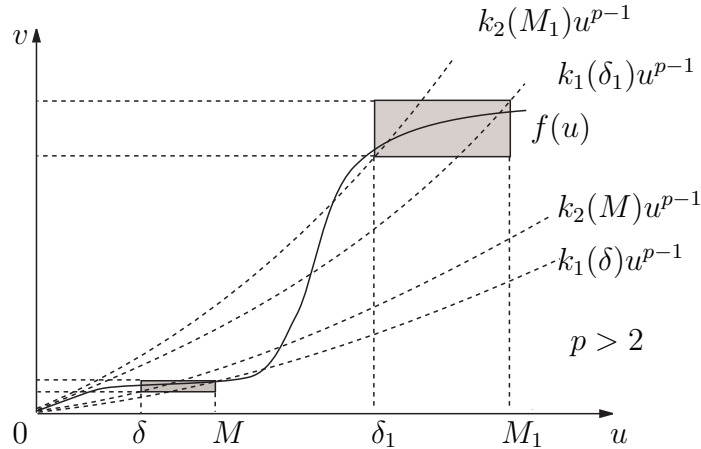


Figura 1.4: Gráfico de  $f$  passando por dois túneis.

Uma das condições suficientes para que obtenhamos mais de uma solução é que existam  $\delta_1$  e  $M_1$  distintos de  $\delta$  e  $M$  (respectivamente), para os quais as relações (1.8) e (1.9) sejam válidas, com  $\delta < M < \delta_1 < M_1$  e com  $k_2(M_1)\delta_1^{p-1} > k_1(\delta)M^{p-1}$ . (Notamos também que, sendo  $a$  não-decrescente, os valores  $\delta_1$  e  $M_1$  produzirão novas constantes  $k_1(\delta_1)$  e  $k_2(M_1)$  tais que  $k_1(\delta_1) \geq k_1(\delta)$  e  $k_2(M_1) \geq k_2(M)$ ).

Nesse caso, as soluções são claramente distintas, já que não há interseção entre os conjuntos  $Y$  e  $Y_1$ .

De fato, consideremos as funções  $\Phi_{M_1}(r)$  e  $\Psi_{\delta_1}(r)$  obtidas utilizando os valores  $\delta_1$  e  $M_1$  em (1.26) e em (1.27), respectivamente. Com as condições anteriores é possível perceber que não há interseção entre as regiões

$$U_1 = \{\Psi_{\delta}(r) \leq u(r) \leq \Phi_M(r), 0 \leq r \leq \alpha\}$$

e

$$U_2 = \{\Psi_{\delta_1}(r) \leq u(r) \leq \Phi_{M_1}(r), 0 \leq r \leq \alpha\},$$

o que acarreta na existência de soluções distintas para o nosso problema.

A situação que acabamos de descrever é ilustrada na seguinte figura:

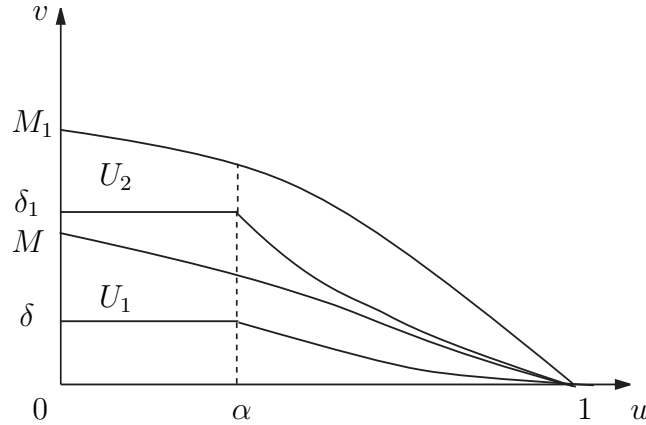


Figura 1.5: Uma situação em que existem duas soluções radiais positivas distintas.

## 1.4 Considerações Sobre Alguns Operadores

### 1.4.1 Coeficientes Não-locais Positivos

Caso tenhamos  $a_0 = \inf a(t) > 0$ , podemos garantir a existência de um túnel  $\Gamma$  para cada  $M > 0$ .

De fato, para cada  $M > 0$  fixado, consideremos a função

$$\phi(\delta) := \left(\frac{\delta}{M}\right)^{p-1} - L \frac{a(w_n \delta \alpha^n)}{a(w_n M)}, \quad 0 \leq \delta \leq M.$$

Notemos que  $\phi(\delta)$  é uma função contínua,

$$\phi(M) = 1 - L \frac{a(w_n M \alpha^n)}{a(w_n M)} > 0$$

e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi(\delta) = -L \frac{a_0}{a(w_n M)} < 0,$$

de modo que existe  $\delta \in (0, M)$  tal que  $\phi(\delta) \leq 0$ , ou seja, temos  $0 < \delta < M$  satisfazendo (1.10).

Dessa forma, se o coeficiente não-local  $A[u]$  for dado por uma função  $a$  não-decrescente estritamente positiva e o gráfico de  $f$  passar por um túnel  $\Gamma$  (cuja existência é garantida), sempre conseguiremos obter soluções radiais positivas para (1.1).

Vale a pena ressaltar que, ao variarmos  $M$ , não se pode garantir que os túneis correspondentes sejam disjuntos, uma vez que  $\delta$  pode decrescer quando  $M$  aumenta.

### 1.4.2 Um exemplo para o caso $a(0) = 0$

O coeficiente não-local dado por uma função do tipo  $a(t) = ct^\beta$ ,  $c > 0$ , com  $\beta > 0$  satisfaz  $a(t) = 0$ , caso não abordado pelas referências [1] e [4]. Se, adicionalmente,  $\beta \leq p - 1$  é possível construir um túnel  $\Gamma$  para cada  $M > 0$  dado.

De fato, nesse caso temos

$$L \frac{a(w_n \delta \alpha^n)}{a(w_n M)} = L \alpha^{n\beta} \left(\frac{\delta}{M}\right)^\beta,$$

e, se considerarmos  $\delta = \theta M$  para algum  $\theta \in [0, 1]$ , podemos perceber que, para que (1.10) seja válida, basta resolvermos a inequação

$$L \alpha^{n\beta} \geq \theta^{p-1-\beta}$$

com  $\theta \in [0, 1]$ . Sendo assim, basta considerarmos

$$0 < \theta \leq \theta_* := (L \alpha^{n\beta})^{1/(p-1-\beta)} \quad (1.29)$$

(tal  $\theta$  pertence a  $(0, 1)$  pois as constantes positivas  $L$  e  $\alpha$  são menores que 1).

Desse modo, temos que os coeficientes do tipo  $a(t) = ct^\beta$ , com  $c > 0$  e  $p - 1 > \beta > 0$ , correspondem a uma família de coeficientes tais que  $a(0) = 0$  e que ainda possibilitam a aplicação do teorema 7, que garante a existência de soluções radiais positivas para o problema (1.1).

Podemos notar, também, que tal família de coeficientes nos fornece exemplos para os quais é possível obtermos mais de uma solução para o problema (1.1).

Como vimos anteriormente, dado  $M_1 > 0$ , é possível obtermos  $\delta_1$  de modo que a relação (1.10) seja válida e, conseqüentemente, produza um túnel  $\Gamma_1$ . Desse modo, existirá uma solução  $u_1$  radial positiva para nosso problema, desde que o gráfico de  $f$  passe por tal túnel e que (1.8) seja válida. Para tal solução, temos  $\delta_1 < |u_1| < M_1$ .

Basta, então, considerarmos  $M_2$  tal que  $M_1 < \delta_2 := \theta_* M_2$  para obtermos um túnel  $\Gamma_2$ , distinto de  $\Gamma_1$ ; se a relação (1.8) for válida e o gráfico de  $f$  passar por tal túnel, obteremos uma nova solução para nosso problema com  $\delta_2 < |u_2| < M_2$ .

Na verdade, com o mesmo raciocínio, podemos construir uma seqüência  $\Gamma_k$  de túneis disjuntos, obtidos a partir da relação  $\delta_k < \theta_* M_k$ . Se uma função não-linear  $f$  tiver seu gráfico passando por esses túneis e se a relação (1.8) for válida para cada  $\Gamma_k$ , então o teorema 7 poderá ser aplicado para produzir soluções radiais positivas distintas para o problema (1.1).

# Apêndice

Vamos iniciar apresentando as definições que utilizamos em nosso trabalho:

## 1. Definições

**Definição:** Um subconjunto  $\Omega$  de um espaço métrico  $X$  é **relativamente compacto**, se  $\overline{\Omega}$  for compacto. Um espaço vetorial normado completo é um **espaço de Banach**. Se  $X, Y$  denotam espaços métricos, uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é **compacta**, se  $T$  for contínuo e  $TX$  for relativamente compacto em  $Y$ . Uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  é **completamente contínua**, se  $T$  for contínua e se as imagens de subconjuntos limitados de  $X$  forem relativamente compactas em  $Y$ .

Equivalentemente, uma aplicação completamente contínua é tal que, se  $(u_n)$  for uma seqüência limitada no espaço métrico  $X$ , então  $Tu_n$  admite subsequência convergente no espaço métrico  $\overline{Y}$ .

É fácil ver que toda aplicação compacta  $T : X \rightarrow Y$  entre espaços métricos é completamente contínua, já que, se  $T : X \rightarrow Y$  for compacta e  $Z \subset X$  for limitado, então  $TZ \subset TX$  é relativamente compacto em  $Y$ , pois  $\overline{TZ} \subset \overline{TX}$ ; como um subconjunto fechado contido em um compacto é também compacto, ocorre que  $\overline{TZ}$  é compacto em  $Y$ .

Por outro lado, se  $X$  for um subconjunto limitado de um espaço métrico, podemos afirmar que as definições de aplicação compacta e aplicação completamente contínua são equivalentes, já que, se  $T : X \rightarrow Y$  for completamente contínua e  $X$  limitado tem-se que  $TX$  é relativamente compacto em  $Y$  e portanto  $T$  é compacta.

Enunciaremos agora o conhecido teorema do ponto fixo de Brouwer. Apesar de não o utilizarmos diretamente em nosso trabalho, ele e seu corolário

são úteis na demonstração do teorema do ponto fixo de Schauder, que será apresentada na próxima seção.

## 2. O teorema do ponto fixo de Brouwer

**Teorema 8 (Brouwer)** *Sejam  $B_1$  a bola fechada unitária com centro em 0 e  $f : B_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B_1$  uma aplicação contínua. Então  $f$  possui um ponto fixo, isto é, existe um ponto  $x \in B_1$  tal que  $f(x)=x$ .*

Como conseqüência desse teorema, podemos ainda obter o seguinte

**Corolário 9** *Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  for um conjunto convexo e compacto, então toda aplicação contínua de  $K$  em  $K$  possui ponto fixo.*

A demonstração desses fatos pode ser encontrada em [6].

## 3. O teorema do ponto fixo de Schauder

O próximo resultado é a base do método que empregamos para garantir a existência de soluções radiais positivas para o problema (1.1).

**Teorema 10 (Schauder)** *Sejam  $X$  um espaço de Banach real e  $Y \subset X$  um conjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo. Se  $f : Y \rightarrow Y$  for uma aplicação compacta, então  $f$  possui ponto fixo.*

**Demonstração:**

Visto que  $f$  é compacta,  $\overline{f(Y)}$  é compacto. Desta forma, conseguimos obter uma subcobertura finita para  $\overline{f(Y)}$ . Sendo assim, dado  $\epsilon > 0$ , existem elementos  $x_i \in Y$  tais que

$$\overline{f(Y)} \subset \bigcup_{i=1}^{n=n(\epsilon)} B_\epsilon(f(z_i)) = \bigcup_{i=1}^{n=n(\epsilon)} B_\epsilon(x_i)$$

Sejam  $E_Y$  o espaço gerado por  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e

$$K_\epsilon := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Se  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K_\epsilon$  e  $v = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i x_i \in K_\epsilon$ , temos que

$$(1-t)u + tv = \sum_{i=1}^n \left( (1-t)\lambda_i + t\tilde{\lambda}_i \right) x_i.$$

Como

$$0 \leq (1-t)\lambda_i + t\tilde{\lambda}_i \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \left( (1-t)\lambda_i + t\tilde{\lambda}_i \right) = 1,$$

provamos que  $K_\epsilon$  é convexo. (O conjunto  $K_\epsilon$  é chamado envoltória convexa dos pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .)

Afirmamos que  $K_\epsilon \subset Y$ . Para demonstrar esse fato, aplicamos indução no número de termos  $n$  na definição de  $K_\epsilon$ , os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  sendo óbvios.

Como hipótese de indução, admitamos como válido que, se  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  e

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 1, \quad \text{então} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \in Y.$$

Suponhamos agora que  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , com  $\lambda_n \neq 1$ . Como

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \left( \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n x_n,$$

a hipótese de indução garante que o termo entre parênteses está em  $Y$ . A convexidade de  $Y$  então garante que o lado direito da igualdade está em  $Y$ , provando a nossa afirmação. Como  $Y$  é limitado,  $K_\epsilon$  é limitado.

Agora provemos que  $K_\epsilon$  é fechado. Seja  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em

$K_\epsilon$ , com  $u_m \rightarrow u$ . Por definição,  $u_m = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,m} x_i$ , com  $\sum_{i=1}^n \lambda_{i,m} = 1$  e  $0 \leq$

$\lambda_{i,m} \leq 1$ . Passando a subsequências, se necessário, podemos supor que, para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , cada seqüência  $\{\lambda_{i,m}\}$  converge para um  $\lambda_i \in [0, 1]$ . Dessa

forma, obtemos que  $u_m \rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  e, portanto,  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in K_\epsilon$ , provando

que  $K_\epsilon$  é fechado.

Vamos agora definir, para  $1 \leq i \leq n$

$$g_i(x) := \begin{cases} \epsilon - \|x - x_i\| & , \text{ se } \|x - x_i\| < \epsilon \\ 0 & , \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e também

$$\pi_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}.$$

(Podemos notar que o denominador é não-nulo pois  $x \in Y$  pertence ao menos a uma das bolas abertas  $B_\epsilon(x_i)$  da subcobertura, e nesse caso  $g_i(x) \in (0, \epsilon]$ .)

Também temos que  $\pi_\epsilon(Y) \in K_\epsilon$ , o que resulta ao considerarmos  $\lambda_i = \frac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}$ .

Além disso,  $\pi_\epsilon$  é contínua, por ser composta de funções contínuas.

Em conseqüência de nossas definições, temos também que

$$\|\pi_\epsilon(x) - x\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \right\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \right\| < \epsilon, \quad (*)$$

Agora vamos definir  $f_\epsilon : K_\epsilon \rightarrow K_\epsilon$  por

$$f_\epsilon = \pi_\epsilon \circ f \circ i,$$

em que  $i : K_\epsilon \rightarrow Y$  denota a inclusão canônica.

Notemos que  $K_\epsilon$  está contido no subespaço de  $Y$ , que é gerado por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como  $K_\epsilon$  é fechado e limitado, segue-se daí que  $K_\epsilon$  é compacto. Dessa forma, sendo  $f_\epsilon$  contínua, decorre do teorema do ponto fixo de Brouwer que  $f_\epsilon$  possui um ponto fixo  $x_\epsilon$ . Além disso, pela desigualdade (\*), temos

$$\|f(x_\epsilon) - x_\epsilon\| = \|f(x_\epsilon) - \pi_\epsilon(f(x_\epsilon))\| < \epsilon.$$

Consideremos então uma seqüência  $\epsilon_j \rightarrow 0$  e a seqüência dos respectivos pontos fixos  $(x_{\epsilon_j})$  dos operadores  $f_{\epsilon_j}(x)$ . Como  $Y$  é compacto, a seqüência  $\{x_{\epsilon_j}\}_1^\infty$  admite uma subsequência convergente  $x_{\epsilon_j} \rightarrow x \in Y$ .

Afirmamos que  $x$  é ponto fixo de  $f$ . De fato, temos que

$$\|f(x_{\epsilon_j}) - x_{\epsilon_j}\| < \epsilon_j,$$



e, sendo  $f$  contínua, temos que  $f(x_{\epsilon_j}) \rightarrow f(x)$  quando  $\epsilon_j \rightarrow 0$ , de modo que  $f(x) = x$ .  $\square$

Uma versão um pouco mais geral do teorema do ponto fixo de Schauder pode ser encontrada em [2].

#### 4. Alguns resultados importantes

Os três próximos resultados são utilizados para verificarmos a compacidade do operador  $T$ , demonstrada no Lema 5. O primeiro deles é um resultado sobre seqüências e séries e os dois seguintes são os conhecidos teoremas de Arzelá-Ascoli e da Convergência Dominada.

**Lema 11** *Seja  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em um espaço de Banach  $X$  tal que toda subseqüência contenha uma subseqüência convergindo para o mesmo limite  $u$ . Então  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  também converge para  $u$ .*

##### Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  não convirja para  $u$ . Dessa forma, existem  $\epsilon_0$  e uma subseqüência  $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  tais que  $d(u_{n_j}, u) > \epsilon_0$ .

Consideremos, então, a subseqüência  $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ . Por hipótese, existe uma subseqüência (que também denotaremos por  $(u_{n_j})$ ) tal que  $(u_{n_j}) \rightarrow u$ , o que é uma contradição pois, para todo  $j \in \mathbb{N}$ , é válido que  $d(u_{n_j}, u) > \epsilon_0$ .  $\square$

**Teorema 12 (Arzelá-Ascoli)** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja  $F$  uma família equicontínua de funções  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que, se  $\|x - y\| < \delta$ , então  $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \epsilon$  para toda  $\Phi \in F$ . Se  $F$  for uniformemente limitada (isto é, se existe  $M > 0$  tal que  $\|\Phi\| < M$  para todo  $\Phi \in F$ ), então toda seqüência  $\{\Phi_n\}$  de elementos de  $F$  possui uma subseqüência  $\{\Phi_{n_k}\}$  uniformemente convergente em  $X$ .*

A demonstração desse teorema pode ser vista em [9].

**Teorema 13 (Convergência Dominada)** *Seja  $(f_n)$  uma seqüência de funções integráveis, que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável. Se existir uma função integrável  $g$ , tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , então  $f$  é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

A demonstração do teorema da convergência dominada pode ser encontrada em [3].

# Referências Bibliográficas

- [1] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa e T.F. Ma, *Positive solutions for a quasi-linear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comp. Math. Appl. **49**, 85-93, Exeter, (2005).
- [2] H. Amann, *Lectures on some fixed point theorems*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1973).
- [3] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York, (1966).
- [4] F.J.S.A. Corrêa, *On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems*, Nonlinear Analysis **59**, 1147-1155, Exeter, (2004).
- [5] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, (1985).
- [6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Rhode Island, (1998).
- [7] G. Ercole and A. Zumpano, *Existence of positive radial solutions for the  $n$ -dimensional  $p$ -Laplacian*, Nonlinear Analysis **44**, 335-360, Exeter, (2001).
- [8] G. Ercole and A. Zumpano, *Positive solutions for the  $p$ -Laplacian in  $annuli$* , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **132A**, 595-610, Edimburgo, (2002).
- [9] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).