

Aplicações de Grau 1 do Círculo: Conjunto de  
Rotação e Entropia

Alessandra Mara Nébias

Orientador: Fernando Figueiredo de Oliveira Filho

Belo Horizonte - Janeiro de 2006

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos e amigos, que nunca me deixaram desistir. E em especial ao professor Michel Spira, que acreditou, incentivou e sempre esteve ao meu lado. Ao amigo Rodrigo Tomas Nogueira Cardoso, que muito me ajudou nesta caminhada. E a amiga Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, que com doçura me apoiou em várias batalhas.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar ao meu lado nas horas mais difíceis.

À minha família, pela paciência nos momentos mais duros.

Aos professores e amigos do Departamento de Matemática, em especial aos professores Michel Spira, Ana Cristina Vieira e Paulo César Carrião, pela ajuda e compreensão.

Aos meus amigos da turma de graduação, que mesmo distantes, me incentivaram, apoiaram e torceram por este trabalho.

Aos meus amigos da Caixa, em especial à minha gerente Maria Imaculada Guimarães Afonso Silva, pois sem o seu total e irrestrito apoio e incentivo eu não estaria apresentando este trabalho.

Aos colegas do mestrado, pelo convívio e apoio.

E com grande carinho, gostaria de eternizar o meu respeito, admiração e agradecimento, ao meu orientador Fernando, pela enorme paciência, disponibilidade constante, grande sabedoria e principalmente, pela amizade e ajuda ilimitadas. E também à Elaine, pela compreensão.

# Índice

1. Introdução .....	5
2. O Conjunto de Rotação .....	7
2.1. Conjunto de Rotação .....	8
2.2. Conjunto de Rotação Pontual .....	9
2.3. Propriedades dos Conjuntos de Rotação .....	11
3. Órbitas com Número de Rotação Irracional .....	14
4. Entropia Topológica .....	24
5. Um Exemplo .....	31
6. References .....	37

## 1. INTRODUÇÃO

O conceito de número de rotação de homeomorfismos que preservam orientação no círculo foi introduzido por Poincaré, e se mostrou uma ferramenta muito útil para se descrever a dinâmica de tais aplicações. Neste caso, a dinâmica é topologicamente muito simples e caracterizada pelo número de rotação. Quando este número é racional, sempre existem órbitas periódicas, todas com o mesmo período, e todas as órbitas são homoclínicas ou heteroclínicas às órbitas periódicas. Quando o número de rotação é irracional, não existem órbitas periódicas e todas as órbitas se "ordenam" como as órbitas de uma rotação irracional de mesmo número. Além disso, ou todas são densas, ou existem intervalos errantes e um conjunto minimal, onde todas as outras órbitas nascem e morrem.

As várias generalizações deste conceito se iniciaram na década de 70 com os trabalhos de Newhouse, Palis, Takens [4], e outros. Vários resultados foram estendidos a aplicações de grau 1 do círculo (não necessariamente inversíveis), e mais geralmente aos toros de dimensão mais alta.

Neste trabalho consideramos uma aplicação de grau 1 do círculo,  $f : S^1 \rightarrow S^1$ . A idéia fundamental é tomar um levantamento de  $f$ ,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e usá-lo para definir o deslocamento de um ponto  $y \in S^1$  no recobrimento. Para isto, tomamos um ponto  $x \in \mathbb{R}$  na fibra de  $y$  e consideramos o deslocamento  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi(y) = F(x) - x$ . No caso de homeomorfismos do círculo que preservam orientação, o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(y))$  existe, independe de  $x$  e  $F$ , e é chamado de número de rotação de  $f$ .

No capítulo 2 mostramos como este conceito é generalizado de duas maneiras diferentes.

Definimos o conjunto de rotação  $\rho(F) = \{v \in \mathbb{R}; v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, x_i \in [0, 1], n_i \rightarrow \infty\}$ , que não fixa o ponto inicial de uma órbita, e o conjunto de rotação pontual  $\rho_p(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \rho(F, x)$ , onde  $\rho(F, x)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da sequência  $\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)_{n \geq 1}$ .

Mostramos que  $\rho(F)$  e  $\rho(F, x)$ , com  $x$  fixo, são intervalos fechados, e que  $\rho_p(F) \subset \rho(F)$ . Em seguida provamos algumas propriedades básicas e a existência de órbitas periódicas com número de rotação  $\frac{p}{q}$ , caso este racional pertença a  $\rho(F)$ .

No capítulo 3 mostramos que  $\rho_p(F)$  é compacto e igual a  $\rho(F)$ . Do ponto de vista técnico, este é o resultado menos trivial. O que faremos é mostrar que se  $\alpha \in \rho(F)$ , então existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \alpha$ .

No capítulo 4 mostramos que se  $\rho(F)$  possui interior não vazio, então  $f$  possui entropia topológica positiva.

Finalmente, no capítulo 5 exibimos um exemplo não trivial, onde calculamos o conjunto de rotação, o conjunto de rotação de cada ponto e a entropia topológica.

## 2. O CONJUNTO DE ROTAÇÃO

Vamos identificar o círculo unitário  $S^1$  com  $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ . Sejam  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ;  $\pi(x) = x \bmod 1 = e^{2\pi i x}$  a *projeção canônica* e  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma aplicação contínua. Um *levantamento* de  $f$  é uma função contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f \circ \pi = \pi \circ F \quad (1)$$

ou seja, uma função que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Figure 1:  $f \circ \pi = \pi \circ F$

Temos ainda que

$$f^q \circ \pi = \pi \circ F^q \quad (2)$$

o que pode ser facilmente verificado por indução.

Uma tal função, não possui um único levantamento, pois se  $F$  for um levantamento e  $n$  um inteiro, temos que  $\pi \circ F = \pi \circ (F + n)$ . Algumas outras propriedades são:

**Proposição 1.** *Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma função contínua não necessariamente de grau*

1. *Então:*

1. Existe uma função contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \circ \pi = \pi \circ F$ .

2. Se  $F$  e  $G$  forem dois levantamentos de  $f$ , então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $G = F + k$ .
3. Se  $F$  for levantamento de  $f$ , então existe um único inteiro  $n$  tal que  $F(x+1) = F(x) + n$  para todo  $x$ .

O número  $n$  com tal propriedade, é chamado *grau de  $f$*  e denotado por  $gr(f)$ .

Consideraremos neste trabalho  $f : S^1 \rightarrow S^1$  uma aplicação contínua de grau 1 do círculo, salvo menção contrária.

**2.1. Conjunto de Rotação.** O conjunto de rotação leva em conta o deslocamento médio de todos os pontos no recobrimento. Este deslocamento médio é feito considerando-se partes finitas da órbita de um determinado ponto e depois tomando-se o limite. Portanto, não há razão especial para se fixar um ponto antes de tomarmos o limite, quando o número de iterados tende à infinito.

Este fato motiva a definição dada a seguir.

Seja  $f$  uma aplicação contínua de grau 1 de  $S^1$  e  $F$  um levantamento de  $f$ . O conjunto de rotação de  $F$ , denotado por  $\rho(F)$ , é

$$\rho(F) = \left\{ v \in \mathbb{R}; v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, x_i \in \mathbb{R}, n_i \rightarrow \infty \right\} \quad (3)$$

Esta definição se deve a Misiurewicz [3].

Seja  $\phi_F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\phi_F(x) = F(x) - x$  e  $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $\phi_n = \frac{1}{n}(F^n - Id)$ . Como  $F(x+1) = F(x) + 1$ , então podemos verificar facilmente que  $\phi_F$ ,  $(F^n - Id)$  e  $\phi_n$  são aplicações contínuas e periódicas de período 1. Logo,  $\rho(F)$  pode ser definido por



$$\rho(F) = \left\{ v \in \mathbb{R}; v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}, x_i \in [0, 1], n_i \rightarrow \infty \right\} \quad (4)$$

Sejam  $S = \max_{x \in \mathbb{R}} \phi_F(x)$  e  $I = \min_{x \in \mathbb{R}} \phi_F(x)$ .

O conjunto de rotação  $\rho(F)$  também pode ser definido como no lema a seguir.

Seja  $K_n(F) = \left\{ \frac{F^n(x) - x}{n}; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{F^n(x) - x}{n}; x \in [0, 1] \right\}$  e  $\Lambda_i = \overline{\cup_{n \geq i} K_n(F)}$ . Os conjuntos  $K_n(F)$  são intervalos compactos de  $\mathbb{R}$ , pois são a imagem do intervalo  $[0, 1]$  pela aplicação contínua  $\frac{1}{n}(F^n - Id)$ . Portanto,  $K_1(F) = [I, S]$  e  $K_{n+1}(F) \subseteq K_n(F) \subseteq K_1(F)$  para todo  $n$ . Logo,  $\Lambda_i \subseteq [I, S]$  para todo  $i \geq 1$ .  $\Lambda_i$  é um intervalo fechado.

**Lema 2.**  $\rho(F) = \cap_{i \geq 1} \Lambda_i$

### Demonstração:

Vejam os primeiramente que  $\cap_{i \geq 1} \Lambda_i \subset \rho(F)$ .

Seja  $v \in \cap_{i \geq 1} \Lambda_i$  então para todo  $i \geq 1$  temos que  $v \in \Lambda_i$  e portanto, existe  $v_i \in \cup_{n \geq i} K_n(F)$  tal que  $|v - v_i| < \frac{1}{i}$ .

Como  $v_i \in \cup_{n \geq i} K_n(F)$ , existem  $x_i \in [0, 1]$  e  $n_i \geq i$  tais que  $v_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$ . Logo,  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$  pois  $v_i \rightarrow v$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo,  $v \in \rho(F)$ .

Vejam agora que  $\rho(F) \subset \cap_{i \geq 1} \Lambda_i$ .

Seja  $v \in \rho(F)$ . Fixemos  $i \geq 1$ . Como  $v \in \rho(F)$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $n_i \geq i$  e  $x_i \in [0, 1]$  tais que  $|v - w_i| < \varepsilon$  onde  $w_i = \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$ . Por definição de  $K_n(F)$ , temos  $w_i \in K_{n_i}(F)$  e portanto  $w_i \in \cup_{n \geq i} K_n(F)$ , ou seja, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $w_i \in \cup_{n \geq i} K_n(F)$  tal que  $w_i \in (v - \varepsilon, v + \varepsilon)$ , e portanto  $v \in \overline{\cup_{n \geq i} K_n(F)}$ . Logo,  $v \in \Lambda_i$   $\forall i \geq 1$  e  $v \in \cap_{i \geq 1} \Lambda_i$ . ■

Segue imediatamente do lema anterior que  $\rho(F)$  é um intervalo fechado em  $[I, S]$ .

**2.2. Conjunto de Rotação Pontual.** Seja  $f$  uma aplicação contínua de grau 1 de  $S^1$  e  $F$  um levantamento de  $f$ . Definimos como  $\rho(F, x)$  o conjunto dos pontos de aderência da sequência  $(\frac{F^n(x)-x}{n})_{n \geq 1}$ .

O conjunto de rotação pontual de  $F$ , denotado por  $\rho_p(F)$ , é definido como

$$\rho_p(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \rho(F, x) \quad (5)$$

Como  $F(x+1) = F(x) + 1$ , temos que  $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$  e  $\rho(F, x) = \rho(F, x+1)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\rho_p(F) = \bigcup_{x \in [0,1]} \rho(F, x)$  e  $\rho(F, x)$  depende apenas de  $y = \pi(x)$  e não do ponto  $x$  escolhido em  $\pi^{-1}(y)$ .

Segue diretamente da definição que  $\rho_p(F) \subset \rho(F)$ .

**Proposição 3.**  $\rho(F, x)$  é um intervalo fechado.

Para a demonstração, utilizaremos o seguinte lema:

**Lema 4.** Fixado  $x$  e  $\delta > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\left| \frac{F^{n_0}(x)-x}{n_0} - \frac{F^{n_0+1}(x)-x}{n_0+1} \right| < 2\delta$ ,

**Demonstração:**

Podemos supor que  $\delta < \max(I, S)$

Seja  $n_0 > \frac{\max\{|I|, |S|\} - \delta}{\delta}$ . Então temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{n_0+1}(x)-x}{n_0+1} - \frac{F^{n_0}(x)-x}{n_0} \right| &= \left| \frac{n_0 F^{n_0+1}(x) - n_0 x - (n_0+1) F^{n_0}(x) + (n_0+1)x}{(n_0+1)n_0} \right| \\ &= \left| \frac{n_0 F^{n_0+1}(x) - (n_0+1) F^{n_0}(x) + x}{(n_0+1)n_0} \right| \\ &= \left| \frac{n_0 (F^{n_0+1}(x) - F^{n_0}(x)) - (F^{n_0}(x) - x)}{(n_0+1)n_0} \right| \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{n_0}(F^{n_0} - Id)$  é contínua, temos que ela assume seu valor máximo  $S$  e mínimo  $I$  no intervalo  $[0, 1]$ , e portanto,  $n_0I \leq F^{n_0}(x) - x \leq n_0S$ . Então,  $|F^{n_0}(x) - x| \leq \max\{|I|, |S|\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^{n_0}(x) - x}{n_0} - \frac{F^{n_0+1}(x) - x}{n_0+1} \right| &= \left| \frac{n_0(F^{n_0+1}(x) - F^{n_0}(x)) - (F^{n_0}(x) - x)}{(n_0+1)n_0} \right| \\ &\leq \left| \frac{(F^{n_0+1}(x) - F^{n_0}(x))}{(n_0+1)} \right| + \left| \frac{(F^{n_0}(x) - x)}{(n_0+1)n_0} \right| \\ &\leq \frac{\max\{|I|, |S|\}}{n_0+1} + \frac{\max\{|I|, |S|\}}{n_0+1} \\ &= 2\delta \end{aligned}$$

Portanto, as médias dos deslocamentos estão cada vez mais próximas umas das outras. ■

### Demonstração da Proposição:

Sejam  $i = \inf_{x \in [0,1]} \rho(F, x)$  e  $s = \sup_{x \in [0,1]} \rho(F, x)$ . Suponhamos, por absurdo, que existe  $a \in ([i, s] - \rho(F, x))$ . Como  $\rho(F, x)$  é compacto, temos que existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \cap \rho(F, x) = \emptyset$ . Denotaremos por  $x_n = \frac{F^n(x) - x}{n}$ . Do lema anterior existe  $n_0$  tal que  $\forall n > n_0, |x_n - x_{n+1}| < \delta$ . Seja  $n_0$  tal que  $\left| \frac{F^{n_0}(x) - x}{n_0} - \frac{F^{n_0+1}(x) - x}{n_0+1} \right| < 2\delta$ . Então, os pontos limites da sequência  $x_n$  estão todos a direita ou todos a esquerda de  $(a - \delta, a + \delta)$ . Absurdo, pois  $\rho(F, x)$  acumula em  $i$  e  $s$ . Logo, temos que  $\rho(F, x)$  é um intervalo. ■

### 2.3. Propriedades dos Conjuntos de Rotação.

**Lema 5.** *Sejam  $F$  levantamento de  $f$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{N}$ . Então*

1.  $\rho(F^q - p) = q \cdot \rho(F) - p$
2.  $\rho(F^q - p, x) = q \cdot \rho(F, x) - p$
3.  $\rho_p(F^q - p) = q \cdot \rho_p(F) - p$

**Demonstração:**

Para demonstrar (1), devemos mostrar as inclusões  $\rho(F^q - p) \subseteq q\rho(F) - p$  e  $\rho(F^q - p) \supseteq q\rho(F) - p$ .

Para mostrar a primeira, considere  $v \in \rho(F^q - p)$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existem sequências  $(x_i)_{i \geq 1}$  e  $(n_i)_{i \geq 1}$  e existe  $n_0 > 0$  tais que para todo  $n \geq n_0$  então  $\left| \frac{(F^q - p)^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - v \right| < \epsilon$ . Mas,

$$\frac{(F^q - p)^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} - v = \frac{F^{qn_i}(x_i) - n_i p - x_i}{n_i} - v$$

Logo, multiplicando a igualdade acima por  $\frac{1}{q}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \left( \frac{F^{qn_i}(x_i) - n_i p - x_i}{n_i} - v \right) &= \frac{F^{qn_i}(x_i) - x_i}{qn_i} - \left( \frac{pn_i}{qn_i} + \frac{v}{q} \right) \\ &= \frac{F^{qn_i}(x_i) - x_i}{qn_i} - \frac{p+v}{q} \end{aligned}$$

Se denotamos  $qn_i$  por  $m_i$  e  $\frac{p+v}{q}$  por  $w$ , então  $\left| \frac{F^{m_i}(x_i) - x_i}{m_i} - w \right| < \frac{\epsilon}{q}$ , e portanto,  $w \in \rho(F)$ , ou seja,  $\frac{p+v}{q} \in \rho(F) \Rightarrow v \in q\rho(F) - p$ .

Agora, considere  $v \in q\rho(F) - p$ . Então,  $v = qw - p$  onde  $w \in \rho(F)$ , ou seja, existem  $(n_i)_{i \geq 1}$  e  $(x_i)_{i \geq 1}$  tais que  $w = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i}$ .

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , podemos escrever de modo único que  $n_i = m_i q + r_i$  com  $q \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r_i < q$ . Assim

$$q \left( \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right) - p = \frac{qm_i}{n_i} \left( \frac{(F^q)^{m_i}(F^{r_i}(x_i)) - F^{r_i}(x_i) + F^{r_i}(x_i) - x_i}{m_i} \right) - \frac{pn_i}{n_i}$$

Escolhendo  $x_i$  em  $[0, 1]$  e denotando  $F^{r_i}(x_i)$  por  $z_i$ , temos

$$q \left( \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right) - p = \frac{qm_i}{n_i} \left( \frac{(F^q)^{m_i}(z_i) - z_i - pm_i}{m_i} \right) - \frac{qm_i}{n_i} \left( \frac{z_i - x_i}{m_i} \right) - \frac{pr_i}{n_i}$$

Além disso,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{pr_i}{n_i} = 0$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{qm_i}{n_i} = 1$ , e pela compacidade de  $\bigcup_{j=0}^q F^j([0, 1])$ , temos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{z_i - x_i}{n_i} = 0$ . Logo, como  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{(F^q)^{m_i}(z_i) - z_i - pm_i}{m_i} \right) = \rho(F^q - p)$ , temos

$$\begin{aligned}
v &= q\rho(F) - p \\
&= q \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right) - p \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ q \left( \frac{F^{n_i}(x_i) - x_i}{n_i} \right) - p \right] \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \left[ \frac{qm_i}{n_i} \left( \frac{(F^q)^{m_i}(z_i) - z_i - pm_i}{m_i} \right) - \frac{qm_i}{m_i} \left( \frac{z_i - x_i}{n_i} \right) - \frac{pr_i}{n_i} \right]
\end{aligned}$$

Portanto,  $v \in \rho(F^q - p)$ , o que demonstra (1). Para demonstrar (2) basta considerar  $x$  no lugar de  $x_i$ , e verificar que todos os passos da demonstração são válidos; e conseqüentemente, vale (3). ■

Vamos agora analisar a relação do conjunto de rotação com a existência de órbitas periódicas.

Observe que se  $f^q(y) = y$  e  $\pi(x) = y$  então  $F^q(x) = x + p$  para algum  $p \in \mathbb{Z}$ .

Vejamos que  $y$  tem conjunto  $\rho(F, x) = \frac{p}{q}$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{p}{q}$ .

De fato, como  $n$  pode ser unicamente escrito como  $m_n q + r_n$ ;  $0 \leq r_n < q$ , temos

$$\frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{1}{n} (F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x) + F^{m_n q}(x) - x)$$

Mas  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x)) = 0$  pois  $|F^{r_n}(F^{m_n q}(x)) - F^{m_n q}(x)| \leq$

$\max_{0 \leq i < q} |\phi_{F^i}|$  que é limitado.

Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} &= \lim_{m_n \rightarrow \infty} \frac{m_n q}{m_n q + r_n} \frac{1}{m_n q} (F^{m_n q}(x) - x) \\
&= \lim_{m_n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n q} \cdot m_n p = \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

pois  $F^q(x) = x + p$  e portanto,  $F^{m q}(x) = x + mp$ .

**Lema 6.** Se  $0 \in \rho(F)$  (ou  $\rho_p(F)$ ), então  $F$  tem ponto fixo.

**Demonstração:**

Suponhamos por contradição que  $F(x) \neq x \forall x \in \mathbb{R}$ . Como  $F$  é contínua e periódica, então  $|F(x) - x| \geq \delta \forall x \in \mathbb{R}$ . Por continuidade, ou  $F(x) - x \geq \delta, \forall x \in \mathbb{R}$

ou  $F(x) - x \leq \delta, \forall x \in \mathbb{R}$ . Se  $F(x) - x \geq \delta$ , então  $\frac{1}{n}(F^n(x) - x) \geq \delta, \forall x$  e portanto,  $\rho(F) \subset [\delta, +\infty)$ , o que é um absurdo, pois  $0 \in \rho(F)$ . Do modo análogo, se  $F(x) - x \leq \delta$ , temos que  $\rho(F) \subset (-\infty, \delta]$ . Logo,  $F$  tem ponto fixo. ■

**Teorema 7.** Se  $\frac{p}{q} \in \rho(F)$  (ou  $\rho_p(F)$ ), então existe  $x$  tal que  $F^q(x) = x + p$ .

**Demonstração:**

Se  $\frac{p}{q} \in \rho(F)$  então  $p \in q\rho(F)$  e  $0 \in q\rho(F) - p = \rho(F^q - p)$ . Logo, pelo lema anterior, temos que existe  $x$  tal que  $x$  é ponto fixo de  $F^q - p$ . Portanto,  $(F^q - p)(x) = x$  e  $F^q(x) - p = x$ . ■

### 3. ÓRBITAS COM NÚMERO DE ROTAÇÃO IRRACIONAL

Neste capítulo vamos provar o seguinte resultado:

**Teorema 8.** *Dado  $\alpha \in \rho(F)$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \alpha$*

O resultado acima diz que se  $\alpha \in \rho(F)$  então existe  $x$  tal que  $\rho(F, x) = \{\alpha\}$  e portanto  $\alpha \in \rho_p(F)$ . Temos então o seguinte resultado:

**Teorema 9. Corolário 10.**  $\rho_p(F) = \rho(F)$

Vamos então iniciar a demonstração do teorema 8. Isto será feito através de uma sequência de lemas.

**Lema 11.** *Existem sequências  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  tais que:*

1.  $a_n \in \mathbb{Z}$  e  $b_n \in \mathbb{N}$
2.  $b_{n+1} > b_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$
4.  $\frac{a_n - 1}{b_n} \in \rho(F)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$
5.  $\frac{a_n + 1}{b_n} \in \rho(F)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$

#### **Demonstração:**

De fato, como  $\alpha \in \rho(F)$  e este é não-trivial, podemos construir uma sequência de racionais  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$  em  $\rho(F)$  tal que  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \alpha$ , escolhendo  $a_n \in \mathbb{Z}$  e  $b_n \in \mathbb{N}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, podemos supor  $(b_n)_{n \geq 1}$  crescente, passando a uma subsequência se necessário.

Para verificar (4) e (5), analisaremos os casos:

- $\alpha \in \text{int}\rho(F)$

Se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \alpha$  então  $\frac{a_n-1}{b_n}$  e  $\frac{a_n+1}{b_n}$  também convergem para  $\alpha$ , pois distam  $\left|\frac{1}{b_n}\right|$  de  $\frac{a_n}{b_n}$ .

Logo,  $\frac{a_n-1}{b_n}$ ,  $\frac{a_n+1}{b_n}$  estão em  $\rho(F)$  para todo  $n$  suficientemente grande.

- $\alpha$  é extremo de  $\rho(F)$

Suponha, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  é o extremo inferior de  $\rho(F)$ . Então existe  $\frac{c_n}{b_n} \rightarrow \alpha$ , pela direita. Denotando  $c_n$  por  $a_n - 1$ , temos que  $\frac{a_n}{b_n}$  e  $\frac{a_n+1}{b_n}$  convergem para  $\alpha$  para  $n$  suficientemente grande; e além disso,  $\frac{a_n}{b_n}$ ,  $\frac{a_n-1}{b_n}$  e  $\frac{a_n+1}{b_n}$  estão em  $\rho(F)$  para  $n$  suficientemente grande. Portanto, passando a uma subsequência, se necessário, obtemos sequências  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  que satisfazem as 5 condições do lema. ■

**Lema 12.** *Existem sequências  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $(y_n)_{n \geq 1}$  com  $0 \leq x_n < 1$  e  $0 \leq y_n < 1$  tais que  $F^{b_n}(x_n) = x_n + a_n - 1$  e  $F^{b_n}(y_n) = y_n + a_n + 1$*

### Demonstração:

Como, para cada  $n$  temos que  $\frac{a_n-1}{b_n} \in \rho(F)$ , então pelo teorema 7, existe  $x_n \in I$  tal que  $F^{b_n}(x_n) = x_n + a_n - 1$  e de modo análogo, para cada  $n$  temos que  $\frac{a_n+1}{b_n} \in \rho(F)$  implica que existe  $y_n \in I$  tal que  $F^{b_n}(y_n) = y_n + a_n + 1$ . Logo, obtemos duas sequências  $(x_n)_{n \geq 1}$  e  $(y_n)_{n \geq 1}$  tais que  $F^{b_n}(x_n) = x_n + a_n - 1$  e  $F^{b_n}(y_n) = y_n + a_n + 1$ . ■

**Lema 13.** *Seja  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|$ . Então existe sequência  $(k_n)_{n \geq 1}$ ;  $k_n \in \mathbb{N}$  tal que:*

1.  $\max \left\{ \frac{k_n a_n + b_{n+1} M}{k_n b_n}, \frac{k_n a_n + b_{n+1} M}{k_n b_n + b_{n+1}} \right\} < \frac{a_n + 1}{b_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
2.  $\min \left\{ \frac{k_n a_n - b_{n+1} M}{k_n b_n}, \frac{k_n a_n - b_{n+1} M}{k_n b_n + b_{n+1}} \right\} > \frac{a_n - 1}{b_n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$



**Demonstração:**

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  a desigualdade  $\frac{a_n-1}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_n+1}{b_n}$  é válida, se  $a_n > 0$ . Além disso,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xa_n \pm b_{n+1}M}{xb_n} = \frac{a_n}{b_n}$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xa_n \pm b_{n+1}M}{xb_n + b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$ .

De modo análogo, se  $a_n < 0$ , então  $\frac{a_n+1}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_n-1}{b_n}$  e conseqüentemente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xa_n \pm b_{n+1}M}{xb_n} = \frac{a_n}{b_n}$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xa_n \pm b_{n+1}M}{xb_n + b_{n+1}} = \frac{a_n}{b_n}$ .

Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos escolher um inteiro positivo  $k_n$  de modo que

$$\frac{a_n-1}{b_n} < \frac{k_n a_n - b_{n+1}M}{k_n b_n} < \frac{k_n a_n + b_{n+1}M}{k_n b_n} < \frac{a_n+1}{b_n}$$

e

$$\frac{a_n-1}{b_n} < \frac{k_n a_n - b_{n+1}M}{x b_n + b_{n+1}} < \frac{k_n a_n + b_{n+1}M}{x b_n + b_{n+1}} < \frac{a_n+1}{b_n}$$

Portanto, existe uma seqüência de inteiros positivos  $(k_n)_{n \geq 1}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  temos

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{k_n a_n + b_{n+1}M}{k_n b_n}, \frac{k_n a_n + b_{n+1}M}{k_n b_n + b_{n+1}} \right\} &< \frac{a_n+1}{b_n} \text{ e,} \\ \min \left\{ \frac{k_n a_n - b_{n+1}M}{k_n b_n}, \frac{k_n a_n - b_{n+1}M}{k_n b_n + b_{n+1}} \right\} &> \frac{a_n-1}{b_n} \blacksquare \end{aligned}$$

Como propriedade do levantamento de  $F$ , observando-se que o grau de  $f$  é 1, pode ser facilmente verificado que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$F(I + n) = F(I) + n \tag{6}$$

e que para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para cada  $q \in \mathbb{Z}$  vale

$$F^q(I + n) = F^q(I) + n, \tag{7}$$

onde  $I$  é o intervalo  $[0, 1]$ .

Além disso, como  $F$  é uma função contínua, e como  $[a_n, a_n + 1] \subseteq F^{b_n}([x_n, y_n])$  (ou  $F^{b_n}([y_n, x_n])$ ) para cada  $n \in \mathbb{N}$ , então  $[a_n, a_n + 1] \subseteq F^{b_n}(I)$ .

**Lema 14.** Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , temos que  $F^{jb_i}(I) \supset ja_i + I$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Demonstração:**

Vamos demonstrar por indução sobre  $j$ .

Para  $j = 1$ , temos:

$F^{b_i}(I) \supset a_i + I$  é uma consequência imediata do lema 12.

Supondo que para  $j$  vale  $F^{jb_i}(I) \supset ja_i + I$ , então para  $j + 1$ , temos

$F^{(j+1)b_i}(I) = F^{b_i}(F^{jb_i}(I)) \supset F^{b_i}(ja_i + I)$  pela hipótese de indução.

Então, pela equação (7), temos

$$F^{(j+1)b_i}(I) \supset F^{b_i}(ja_i + I) = ja_i + F^{b_i}(I)$$

E, novamente pelo lema 12, temos

$$F^{(j+1)b_i}(I) \supset ja_i + F^{b_i}(I) \supset ja_i + a_i + I = (j + 1)a_i + I.$$

Logo, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , temos que  $F^{jb_i}(I) \supset ja_i + I$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ . ■

A fim de não carregar muito a notação, denotaremos o número  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i a_i + ja_n$  por  $c(n, j)$  e o número  $\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_i + jb_n$  por  $d(n, j)$ .

**Lema 15.** Para  $(a_n)_{n \geq 1}$ ;  $(b_n)_{n \geq 1}$ ;  $(k_n)_{n \geq 1}$  como definidos anteriormente, temos que  $F^{d(n,j)}(I) \supset c(n, j) + I$  para todo  $n \geq 1$  e  $j \geq 1$ .

**Demonstração:**

Faremos indução em  $n$ .

Para  $n = 1$ , temos  $d(1, j) = jb_1$  e  $c(1, j) = ja_1$ , e o resultado segue do lema 14.

Para  $n = 2$ , usando o lema 14 duas vezes, temos

$$F^{d(2,j)}(I) = F^{k_1 b_1} (F^{jb_2}(I)) \supset F^{k_1 b_1} (ja_2 + I) = ja_2 + F^{k_1 b_1} (I) \supset ja_2 + k_1 a_1 + I = c(2, j)$$

Então, supondo verdadeiro para  $n$  que  $F^{d(n,j)}(I) \supset c(n,j) + I$  para cada  $j \geq 1$ , então para  $n + 1$  temos pelo lema 14 que

$$F^{d(n+1,j)}(I) = F^{\sum_{i=1}^n k_i b_i + j b_{n+1}}(I) = F^{\sum_{i=1}^n k_i b_i}(F^{j b_{n+1}}(I)) \supset F^{\sum_{i=1}^n k_i b_i}(j a_{n+1} + I)$$

Logo,

$$F^{d(n+1,j)}(I) \supset j a_{n+1} + F^{\sum_{i=1}^n k_i b_i}(I)$$

Fazendo  $j = k_n$  na hipótese de indução, temos  $d(n, k_n) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i b_i + k_n b_n = \sum_{i=1}^n k_i b_i$ . Logo,

$$F^{d(n+1,j)}(I) \supset j a_{n+1} + c(n, k_n) + I = c(n+1, j) + I$$

Deste modo, demonstramos o lema. ■

Definimos  $I(n, j) = I \cap (F^{d(n,j)})^{-1}(c(n, j) + I)$ .

Nos argumentos que se seguem, vamos sempre nos recorrer ao seguinte resultado:

Se  $g : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua e sobrejetiva, então dado um intervalo  $Y' \subset Y$  existe um intervalo  $X' \subset X$  tal que  $g(X') = Y'$ .

Desejamos mostrar que a interseção  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{1 \leq j \leq k_n} I(n, j)$  é não vazia para cada número  $n \in \mathbb{N}$ .

Para isto precisamos do seguinte lema:

**Lema 16.** *Existe uma sequência de intervalos  $L_{n,j}$  contidos em  $I$  que satisfaz:*

1.  $L_{n,1} \supset L_{n,2} \supset \dots \supset L_{n,k_n} \supset L_{n+1,1}$ , para todo  $n \geq 1$ .
2.  $F^{d(n,j)}(L_{n,j}) = c(n, j) + I$ , para todo  $n \geq 1$  e  $1 \leq j \leq k_n$ .

**Demonstração:**

Utilizaremos indução sobre  $n$ .

Primeiramente fixemos  $n = 1$ .

Para  $j = 1$ , temos  $d(1, 1) = b_1$  e  $c(1, 1) = a_1$ .

Como  $F^{b_1}(I) \supset (a_1 + I)$ , então existe  $L_{1,1} \subset I$  tal que  $F^{b_1}(L_{1,1}) = a_1 + I$ .

Para  $j = 2$ , temos  $d(1, 2) = 2b_1$  e  $c(1, 2) = 2a_1$ .

Então,

$F^{d(1,2)}(L_{1,1}) = F^{b_1}(F^{b_1}(L_{1,1})) = F^{b_1}(a_1 + I)$  pelo item anterior. Logo, por (7) e

pelo lema 14, temos

$F^{d(1,2)}(L_{1,1}) = a_1 + F^{b_1}(I) \supset a_1 + (a_1 + I) = 2a_1 + I = c(1, 2) + I$ , então existe  $L_{1,2} \subseteq L_{1,1}$  tal que  $F^{d(1,2)}(L_{1,2}) = c(1, 2) + I$ .

Fazendo indução em  $j$ , suponhamos que para  $j < k_1$  temos intervalos  $I \supseteq L_{1,1} \supseteq \dots \supseteq L_{1,j-1} \supseteq L_{1,j}$  tais que  $F^{d(1,s)}(L_{1,s}) = c(1, s) + I$ ;  $1 \leq s \leq j$ . Temos então que  $d(1, j+1) = (j+1)b_1$  e  $c(1, j+1) = (j+1)a_1$ .

Logo,  $F^{d(1,j+1)}(L_{1,j}) = F^{b_1}(F^{jb_1}(L_{1,j})) = F^{b_1}(F^{d(1,j)}(L_{1,j})) = F^{b_1}(c(1, j) + I)$

pela hipótese de indução. Logo, por (7) e pelo lema 14, temos

$F^{d(1,j+1)}(L_{1,j}) = c(1, j) + F^{b_1}(I) \supset c(1, j) + (a_1 + I) = c(1, j+1) + I$ , então existe  $L_{1,j+1} \subseteq L_{1,j}$  tal que  $F^{d(1,j+1)}(L_{1,j+1}) = c(1, j+1) + I$ .

Além disso,  $F^{d(2,1)}(L_{1,k_1}) = F^{k_1 b_1 + b_2}(L_{1,k_1}) = F^{b_2}(F^{d(1,k_1)}(L_{1,k_1})) = F^{b_2}(c(1, k_1) + I)$ ,

pelo item anterior. Então, (7) e pelo lema 14 temos  $F^{d(2,1)}(L_{1,k_1}) = c(1, k_1) + F^{b_2}(I) \supset c(1, k_1) + a_2 + I = c(2, 1) + I$ , então existe  $L_{2,1} \subseteq L_{1,k_1}$  tal que  $F^{d(2,1)}(L_{2,1}) = c(2, 1) + I$ .

Construídos  $L_{r,j}$ ,  $1 \leq r \leq n$ ,  $1 \leq j \leq k_n$ , tal que 1) e 2) valem, vejamos como construir os intervalos  $L_{n+1,j}$ ,  $1 \leq j \leq k_{n+1}$ , satisfazendo 1) e 2) do lema.

Para  $j = 1$

Temos  $F^{d(n,k_n)}(L_{n,k_n}) = c(n, k_n) + I$ .

Logo,  $F^{d(n+1,1)}(L_{n,k_n}) = F^{d(n,k_n)+b_{n+1}}(L_{n,k_n}) = F^{b_{n+1}}(F^{d(n,k_n)}(L_{n,k_n})) = F^{b_{n+1}}(c(n, k_n) +$

$I)$ . Então, temos

$$F^{d(n+1,1)}(L_{n,k_n}) = c(n, k_n) + F^{b_{n+1}}(I) \supset c(n, k_n) + a_{n+1} + I = c(n+1, 1) + I.$$

Logo, existe  $L_{n+1,1} \subset L_{n,k_n}$  tal que  $F^{d(n+1,1)}(L_{n+1,1}) = c(n+1, 1) + I$ .

Fazendo indução em  $j$ , suponhamos que para  $j < k_n$  temos intervalos  $I \supseteq L_{n,1} \supseteq \dots \supseteq L_{n,j-1} \supseteq L_{n,j}$  tais que  $F^{d(n,s)}(L_{n,s}) = c(n, s) + I$ ;  $1 \leq s \leq j$ . Temos então que  $d(n, j+1) = d(n, j) + b_n$  e  $c(n, j+1) = c(n, j) + a_n$ .

Logo,  $F^{d(n,j+1)}(L_{n,j}) = F^{b_n}(F^{d(n,j)}(L_{n,j})) = F^{b_n}(c(n, j) + I) = c(n, j) + F^{b_n}(I) \supset c(n, j) + (a_n + I) = c(n, j+1) + I$ . Então existe  $L_{n,j+1} \subseteq L_{n,j}$  tal que  $F^{d(n,j+1)}(L_{n,j+1}) = c(n, j+1) + I$ .

Além disso,  $d(n+1, 1) = d(n, k_n) + b_{n+1}$  e  $c(n+1, 1) = c(n, k_n) + a_{n+1}$ . Logo,  $F^{d(n+1,1)}(L_{n,k_n}) = F^{d(n,k_n)+b_{n+1}}(L_{n,k_n}) = F^{b_{n+1}}(F^{d(n,k_n)}(L_{n,k_n})) = F^{b_{n+1}}(c(n, k_n) + I)$ , pelo item anterior. Então, por (7) e pelo lema 14 temos  $F^{d(n+1,1)}(L_{n,k_n}) = c(n, k_n) + F^{b_{n+1}}(I) \supset c(n, k_n) + a_{n+1} + I = c(n+1, 1) + I$ , então existe  $L_{n+1,1} \subseteq L_{n,k_n}$  tal que  $F^{d(n+1,1)}(L_{n+1,1}) = c(n+1, 1) + I$ .

Contudo, demonstramos o lema. ■

Portanto,  $L_{n,k_n} \subset \bigcap_{1 \leq j \leq k_n}^n I(n, j)$ . Logo, pela propriedade da interseção finita, temos que  $\bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{1 \leq j \leq k_n} I(n, j)$  é não vazia.

**Lema 17.** *Sejam  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{1 \leq j \leq k_n} I(n, j)$  e  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|$ . Se  $c \leq x \leq c+1$  então  $c - lM \leq F^l(x) \leq c+1 + lM$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}$ .*

Demonstração:

Temos que  $|F^l(x) - x| = \left| \sum_{j=0}^{l-1} \phi(f^j(y)) \right| \leq lM$ , pela desigualdade triangular.

Logo,

$$-lM \leq F^l(x) - x \leq lM$$

e,

$$c - lM \leq F^l(x) \leq c + 1 + lM. \blacksquare$$

### Demonstração do teorema 8:

Consideremos  $\alpha$ ,  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ ,  $(k_n)_{n \geq 1}$  e  $I(n, j)$  como definidos anteriormente.

Seja  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{1 \leq j \leq k_n} I(n, j)$ .

Vamos mostrar que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(x) - x}{m} = \alpha$

Se  $m \in \mathbb{N}$  escolha  $n = n(m)$  tal que:

$$d(n, k_n) = \sum_{i=1}^n k_i b_i \leq m < \sum_{i=1}^{n+1} k_i b_i = d(n+1, k_{n+1}); \quad n = n(m), \quad l = l(m), \quad j = j(m),$$

então  $m$  pode ser unicamente escrito como

$$m = \sum_{i=1}^n k_i b_i + j b_{n+1} + l \tag{8}$$

$$m = d(n+1, j) + l, \tag{9}$$

onde  $j = j(m)$  e  $l = l(m)$  e  $0 \leq j \leq k_{n+1} - 1$  e  $0 \leq l \leq b_{n+1} - 1$ , e nesta representação, temos que quando  $m \rightarrow \infty$  então  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $F^{d(n+1, j)}(x) \in c(n+1, j) + I$ , e como  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|$ , então

$$c(n+1, j) \leq y = F^{d(n+1, j)}(x) \leq c(n+1, j) + 1$$

e aplicando  $F^l$  a desigualdade, temos pelo lema anterior que

$$c(n+1, j) - lM \leq F^l(y) \leq c(n+1, j) + 1 + lM.$$

Além disso, como  $0 \leq l \leq b_{n+1} - 1$  e  $M \geq 1$ , então

$$Ml + x \leq M(b_{n+1} - 1) + x = Mb_{n+1} - M + x \leq Mb_{n+1} \quad e$$

$$Ml + 1 - x \leq M(b_{n+1} - 1) + 1 - x = Mb_{n+1} - M + 1 - x \leq Mb_{n+1}.$$

Logo, temos

$$c(n+1, j) - Ml - x \leq F^m(x) - x \leq c(n+1, j) + Ml + 1 - x$$

implica em

$$c(n+1, j) - Mb_{n+1} \leq F^m(x) - x \leq c(n+1, j) + Mb_{n+1}.$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \frac{F^m(x) - x}{m} &\leq \frac{c(n+1, j) + Mb_{n+1}}{m} \\ &\leq \max \left\{ \frac{c(n+1, j) + Mb_{n+1}}{m-l}, \frac{c(n+1, j) + Mb_{n+1}}{m-l+b_{n+1}} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i + j a_{n+1} + b_{n+1} M}{\sum_{i=1}^n k_i b_i + j b_{n+1}}, \frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i + j a_{n+1} + b_{n+1} M}{\sum_{i=1}^n k_i b_i + (j+1) b_{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{F^m(x) - x}{m} &\geq \frac{c(n+1, j) - Mb_{n+1}}{m} \\ &\geq \min \left\{ \frac{c(n+1, j) - Mb_{n+1}}{m-l}, \frac{c(n+1, j) - Mb_{n+1}}{m-l+b_{n+1}} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i + j a_{n+1} - b_{n+1} M}{\sum_{i=1}^n k_i b_i + j b_{n+1}}, \frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i + j a_{n+1} - b_{n+1} M}{\sum_{i=1}^n k_i b_i + (j+1) b_{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

Agora, podemos observar que cada um dos quatro termos que aparecem do lado direito das desigualdades tende a  $\alpha$  quando  $n$  tende ao infinito. Para tanto, utilizaremos os dois lemas abaixo.

**Lema 18.** Se  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \alpha$  e  $k_n \in \mathbb{N}$ , temos que  $\frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i}{\sum_{i=1}^n k_i b_i} \rightarrow \alpha$

**Demonstração:**

Para que  $\left| \frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i}{\sum_{i=1}^n k_i b_i} - \alpha \right| < \epsilon$  para  $n \geq n_0$  basta verificar que  $\sum_{i=1}^n k_i |a_i - \alpha b_i| < \epsilon \sum_{i=1}^n k_i b_i$  para  $n \geq n_0$ , isto é, existe  $n_0 > 0$  tal que para todo  $n \geq n_0$  temos  $\sum_{i=1}^n k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) > 0$ .

De fato, como  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \alpha$  então existe  $n_1 > 0$  tal que para todo  $i \geq n_1$  temos  $\left| \frac{a_i}{b_i} - \alpha \right| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |a_i - \alpha b_i| < \frac{\epsilon}{2} b_i$  se  $i \geq n_1$ . Então,  $\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i| < \epsilon b_i - \frac{\epsilon}{2} b_i = \frac{\epsilon}{2} b_i$  se  $i \geq n_1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) &= \sum_{i=1}^{n_1-1} k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) + \sum_{i=n_1}^n k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) \\ &> \sum_{i=1}^{n_1-1} k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) + \sum_{i=n_1}^n k_i \frac{\epsilon}{2} b_i \end{aligned}$$

Portanto, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_i b_i = \infty$  então existe  $n_0 > n_1$  tal que

$$\sum_{i=n_1}^n k_i \frac{\epsilon}{2} b_i > \sum_{i=1}^{n_1-1} k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|),$$

pois este é limitado. Logo,  $\sum_{i=1}^n k_i (\epsilon b_i - |a_i - \alpha b_i|) > 0$  e conseqüentemente,  $\frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i}{\sum_{i=1}^n k_i b_i} \rightarrow \alpha$ . ■

**Lema 19.** Se  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$  e  $\frac{r_n}{s_n} \rightarrow \alpha$ ;  $q_n, s_n > 0$  então  $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} \rightarrow \alpha$ .

**Demonstração:**

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 > 0$  tal que  $|p_n - \alpha q_n| < \epsilon q_n$  e  $|r_n - \alpha s_n| < \epsilon s_n$  se  $n \geq n_0$ .

Logo,

$$|(p_n - \alpha q_n) + (r_n - \alpha s_n)| \leq |(p_n - \alpha q_n)| + |(r_n - \alpha s_n)| < \epsilon(q_n + s_n) \text{ se } n \geq n_0.$$

Portanto,

$$|(p_n - \alpha q_n) + (r_n - \alpha s_n)| = |(p_n + r_n) - \alpha(q_n + s_n)| < \epsilon(q_n + s_n) \Rightarrow \left| \frac{p_n + r_n}{q_n + s_n} - \alpha \right| < \epsilon$$

■



Além dos lemas acima, podemos observar que  $\frac{ja_{n+1}}{jb_{n+1}} \rightarrow \alpha$  quando  $n \rightarrow \infty$  se  $j \neq 0$  e que pelo lema 13,  $\frac{k_n a_n + b_{n+1} M}{k_n b_n} \rightarrow \alpha$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, pelos lemas

acima, temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n k_i a_i + j a_{n+1} + b_{n+1} M}{\sum_{i=1}^n k_i b_i + j b_{n+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i a_i + j a_{n+1} + (k_n a_n + b_{n+1} M)}{\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_i + (k_n b_n + j b_{n+1})} \rightarrow \alpha.$$

Similarmente podemos analisar os outros três termos e verificar que ambos convergem para  $\alpha$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} (F^m(x) - x) = \alpha, \text{ ou seja, o conjunto de rotação pontual é fechado. } \blacksquare$$

A demonstração do teorema 8 se deve a Ito [2].

## 4. ENTROPIA TOPOLÓGICA

Neste capítulo vamos definir o conceito de entropia topológica e enunciar algumas de suas propriedades. Estes resultados podem ser encontrados em [1].

Vamos também mostrar que se  $\rho(F)$  tem interior não vazio, então  $f$  possui entropia topológica positiva.

Consideremos  $(X, d)$  é um espaço métrico compacto, e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y))$

$d_n$  mede a distância máxima entre os iterados de  $x$  e  $y$  num trecho de órbita de tamanho  $n$ . Definida deste modo, cada  $d_n$  é uma métrica em  $X$  e induzem a mesma topologia em  $X$ .

Fixe  $\epsilon > 0$ .

Seja  $cov(n, \epsilon, f)$  a cardinalidade mínima de uma cobertura de  $X$  por conjuntos de *diâmetro* menor que  $\epsilon$  na métrica  $d_n$ . Então, por compacidade,  $cov(n, \epsilon, f)$  é finito.

Definimos a *entropia topológica* como sendo  $h_{top} = h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h_\epsilon(f)$ , onde  $h_\epsilon(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(cov(n, \epsilon, f))$ .

Na próxima proposição enunciamos algumas propriedades básicas.

**Proposição 20.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto  $X$ .*

1.  $h(f^m) = m \cdot h(f)$  para  $m \in \mathbb{N}$
2. Se  $f$  é inversível, então  $h(f^{-1}) = h(f)$ . Portanto,  $h(f^m) = |m| \cdot h(f)$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$
3. Se  $g$  é semi-conjugado a  $f$  então  $h(f) \geq h(g)$ .

4. Se  $\epsilon$  diminui, então  $h_\epsilon$  aumenta.

Um exemplo interessante de aplicação com entropia topológica positiva é o shift unilateral em dois símbolos.

Seja  $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  o conjunto das sequências  $j = (j_k)_{k \geq 1}$  onde  $j_k = 0$  ou  $1$  para todo  $k \geq 1$ .

Se  $j$  e  $j' \in \Sigma$  com  $j \neq j'$ , seja  $l = \min\{k \in \mathbb{N}; j_k \neq j'_k\}$ . Então  $d(j, j') = 2^{-l}$  define uma métrica que torna  $\Sigma$  um espaço métrico compacto.

Seja  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  definida por  $\sigma(j) = j'$  onde  $j'_k = j_{k+1}$ ,  $k \geq 1$ . A aplicação  $\sigma$  é Lipschitz com constante  $\frac{1}{2}$

Vamos mostrar agora que  $h(\sigma) = \log 2$ .

Seja  $C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)} = \{j' \in \Sigma; j'_i = j_i, 1 \leq i \leq n+k\}$ , isto é, o conjunto das sequências de  $\Sigma$  que têm os  $(n+k)$  primeiros símbolos iguais.  $C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)}$  é dito um cilindro de  $\Sigma$ .

Denotaremos por  $diam_n$  o diâmetro de um cilindro na métrica  $d_n$ . Então,  $diam C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)} = \frac{1}{2^{n+k+1}}$ , pois  $j = j_1 j_2 \dots j_{n+k} 111 \dots \in C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)}$ ,  $j' = j_1 j_2 \dots j_{n+k} 000 \dots \in C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)}$ , e  $d(j, j') = 2^{-(n+k+1)}$ .

Temos ainda, que  $\sigma^{n-1}(C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)}) = C_{j_n j_{n+1} \dots j_{n+k}}^{n(n+1) \dots (n+k)}$ . Então,  $diam C_{j_n j_{n+1} \dots j_{n+k}}^{n(n+1) \dots (n+k)} = \frac{1}{2^{n+k+1}} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2^{k+2}}$  o que implica em  $diam_n C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)} = \frac{1}{2^{k+2}}$ .

Seja  $\epsilon_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ . Então,  $cov(n, \epsilon_k) \leq 2^{n+k}$ , pois  $\Sigma = \bigcup_{(j_1 \dots j_{n+k}) \in \{0,1\}^{n+k}} C_{j_n j_{n+1} \dots j_{n+k}}^{n(n+1) \dots (n+k)}$  e  $diam_n C_{j_1 j_2 \dots j_{n+k}}^{12 \dots (n+k)} = \frac{1}{2^{k+2}} < \epsilon_k$ .

Por outro lado, seja  $J = \{j_1 \dots j_{n+k} 000 \dots; j_i = 0 \text{ ou } 1, 1 \leq i \leq n+k\}$ . Se  $j \neq j'$  em  $J$ , então  $d(j, j') \geq \frac{1}{2^{n+k}}$ . Temos ainda, que  $\sigma^{n-1}(J) = \{j_n \dots j_{n+k} 000 \dots; j_i = 0 \text{ ou } 1, n \leq i \leq n+k\}$ . Então,  $d_n(j, j') \geq \frac{1}{2^{n+k}} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Logo, qualquer cobertura de  $\Sigma$  na métrica  $d_n$  por conjuntos com diâmetro menor

que  $\frac{1}{2^{k+1}}$  tem pelo menos  $2^{n+k}$  elementos, pois cada conjunto da cobertura contém no máximo uma sequência  $j_1 \dots j_{n+k} 000 \dots$ . Portanto,  $\text{cov}(n, \epsilon_k) \geq 2^{n+k}$ .

Contudo, temos que  $\text{cov}(n, \epsilon_k) = 2^{n+k}$ , o que implica em

$$\begin{aligned} h(\sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(\sigma) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{cov}(n, \epsilon_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^{n+k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \log 2 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

O resultado principal deste capítulo é o seguinte.

**Teorema 21.** *Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  contínua de grau 1 e  $F$  um levantamento de  $f$ . Se  $\rho(F)$  possui mais de um ponto, então  $h_{\text{top}}(f) > 0$ .*

**Demonstração:**

Basta considerar o caso em que 0 e 1 pertencem a  $\rho(F)$ .

De fato, sejam  $p$  e  $q$  tais que  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p+1}{q}$  pertencem a  $\rho(F)$ . Pelo lema 5, 0 e 1 pertencem a  $\rho(F^q - p)$ . Pela proposição 20  $h(f^q) = qh(f)$ , e supondo  $h(f^q) > 0$  temos  $h(f) > 0$ .

Suponhamos que 0 e 1 pertençam  $\rho(F)$ .

Então, existem  $a, b \in [0, 1]$  tais que  $F(a) = a$  e  $F(b) = b + 1$ . Podemos supor  $a < b$ . Deste modo,  $F([a, b]) \supset [a, b + 1]$  e com isto,  $F|_{[a, b]}$  é sobre  $[a, b + 1]$ .

Observe que no círculo a imagem de  $[a, b]$  por  $f$  cobre o intervalo  $[a, b]$  duas vezes.

Vamos mostrar que existe um subconjunto compacto  $K \subset [a, b]$  tal que  $f$  restrito a  $K$  é semi-conjugado ao shift unilateral em 2 símbolos.

$K$  será obtido como uma interseção encaixante de conjuntos compactos  $F_n$ , onde cada  $F_n$  é uma união finita de intervalos.

Como  $F$  é contínua e  $[a, b]$  e  $[a + 1, b + 1]$  estão contidos em  $[a, b + 1]$ , existem intervalos compactos disjuntos  $I_0$  e  $I_1$  em  $[a, b]$  tais que  $F(I_0) = [a, b]$  e  $F(I_1) = [a + 1, b + 1]$ .

Seja  $F_1 = I_0 \cup I_1$ . Veja a figura 2.

A segunda etapa da construção é a seguinte:

Como  $F(I_0) \supset I_0$  então existe  $I_{00} \subset I_0$  tal que  $F(I_{00}) = 0 + I_0$ . Analogamente, como  $F(I_0) \supset I_1$ ,  $F(I_1) \supset 1 + I_0$  e  $F(I_1) \supset 1 + I_1$ , então existem  $I_{01} \subset I_0$ ,  $I_{10} \subset I_1$  e  $I_{11} \subset I_1$  tais que  $F(I_{01}) = 0 + I_1$ ,  $F(I_{10}) = 1 + I_0$  e  $F(I_{11}) = 1 + I_1$ , respectivamente.

Seja  $F_2 = \bigcup_{(j_1 j_2) \in \{0,1\}^2} I_{j_1 j_2}$ .

Vamos construir uma sequência de intervalos  $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$ ,  $(j_1 j_2 \dots j_k) \in \{0, 1\}^k$ ,  $k \geq 1$ , que satisfazem as seguintes condições.

1.  $I_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_k} \subset I_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} \quad \forall k \geq 2$ .
2. os intervalos  $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$  são disjuntos para um mesmo valor de  $k$ .
3. para todo  $k \geq 2$ ,  $F(I_{j_1 j_2 \dots j_k}) = j_1 + I_{j_2 j_3 \dots j_k}$ .

Veja a figura 3.

$I_0, I_1, I_{00}, I_{01}, I_{10}$  e  $I_{11}$  foram construídos acima e satisfazem as condições 1), 2) e 3).

Suponhamos definidos intervalos  $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$  em  $k$  etapas com as propriedades acima.

Vamos então definir os intervalos da  $(k + 1)$  –ésima etapa:

Por 3) temos  $F(I_{j_1 j_2 \dots j_k}) = j_1 + I_{j_2 \dots j_k}$ .

Por 2) temos  $I_{j_2 \dots j_k} \supset I_{j_2 \dots j_k 0}$  e  $I_{j_2 \dots j_k} \supset I_{j_2 \dots j_k 1}$ .

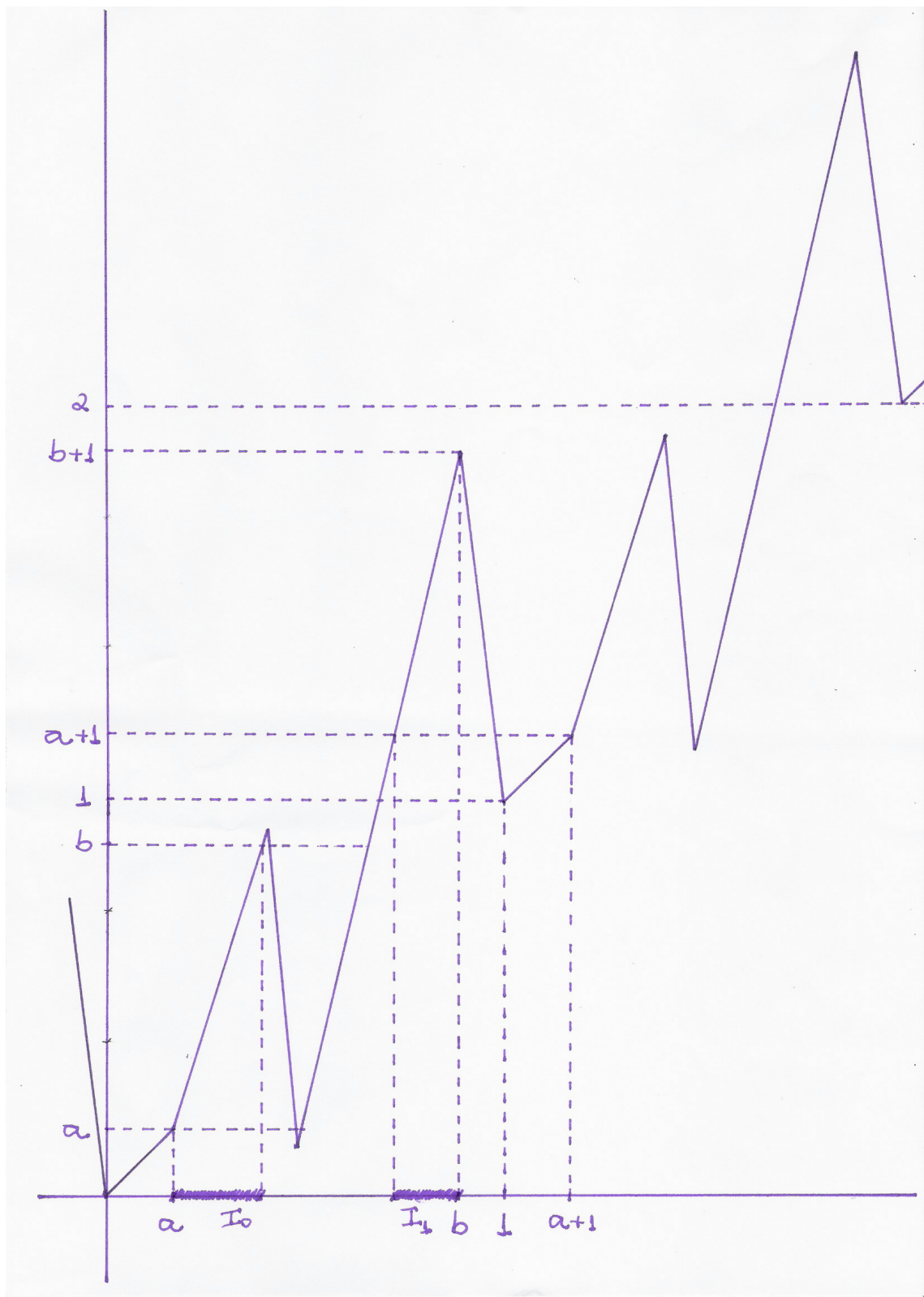


Figure 2: .

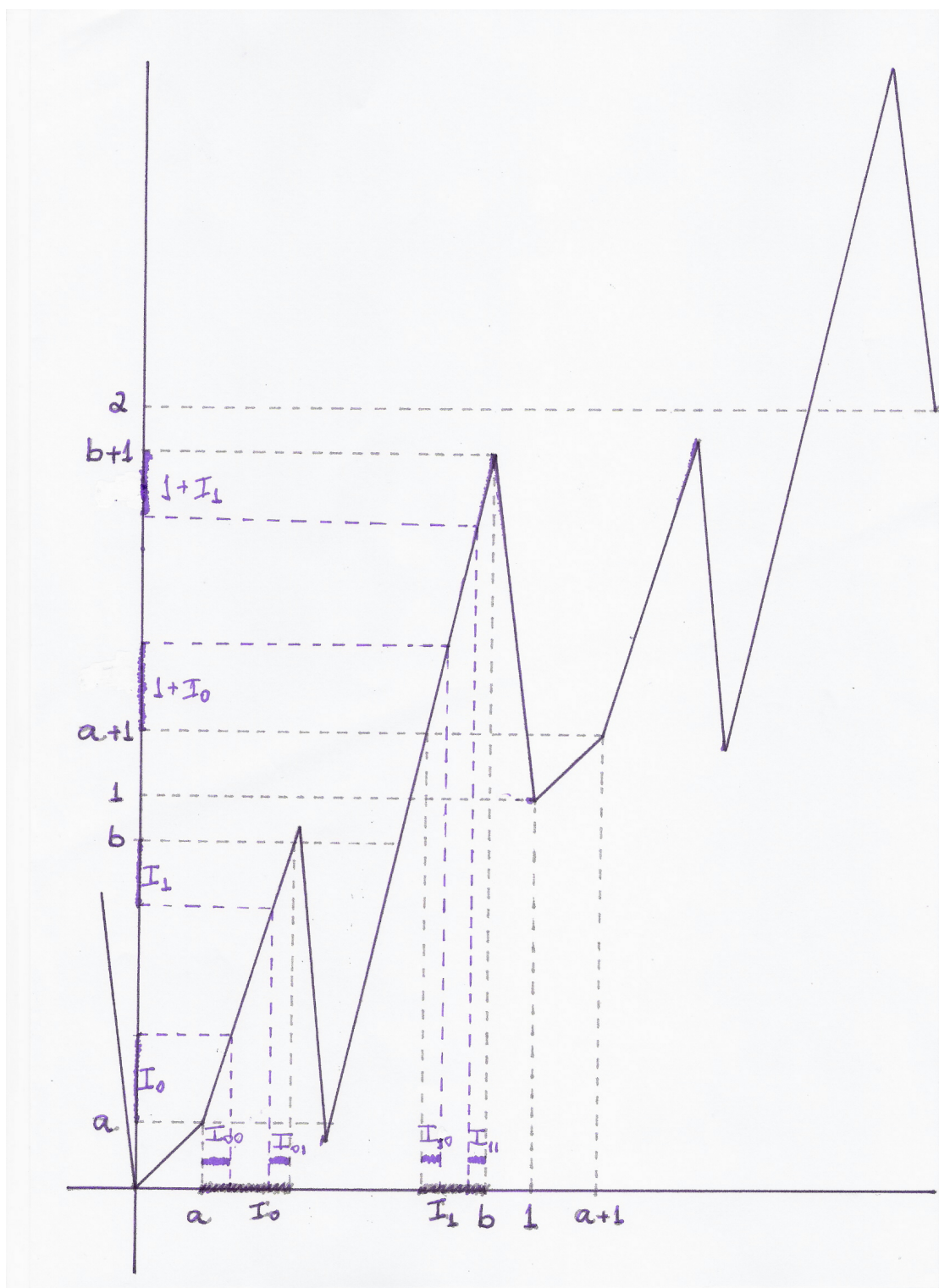


Figure 3: .

Então,  $j_1 + I_{j_2 \dots j_k}$  contém  $j_1 + I_{j_2 \dots j_k 0}$  e  $j_1 + I_{j_2 \dots j_k}$  contém  $j_1 + I_{j_2 \dots j_k 1}$ .

Logo, existem intervalos disjuntos  $I_{j_1 j_2 \dots j_k 0}$  e  $I_{j_1 j_2 \dots j_k 1}$  contidos em  $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$  tais que  $F(I_{j_1 j_2 \dots j_k 0}) = j_1 + I_{j_2 \dots j_k 0}$  e  $F(I_{j_1 j_2 \dots j_k 1}) = j_1 + I_{j_2 \dots j_k 1}$ , o que termina a definição.

Tomando a imagem destes intervalos pela aplicação de recobrimento  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  e usando a mesma notação, temos uma sequência de intervalos em  $S^1$  tais que:

- 1<sup>o</sup>  $I_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_k} \subset I_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} \quad \forall k \geq 2$ .
- 2<sup>o</sup> os intervalos  $I_{j_1 j_2 \dots j_k}$  são disjuntos para um mesmo valor de  $k$ .
- 3<sup>o</sup> para todo  $k \geq 2$ ,  $f(I_{j_1 j_2 \dots j_k}) = I_{j_2 j_3 \dots j_k}$ .

Sejam  $F_k = \bigcup_{(j_1 \dots j_k) \in \{0,1\}^k} I_{j_1 \dots j_k}$  e  $K = \bigcap_{k \geq 1} F_k$ .

Observe que se  $y \in K$  então, existe uma única sequência  $(j_k)_{k \geq 1}$  tal que  $y \in I_{j_1 j_2 \dots j_k} \quad \forall k \geq 1$ . Definimos  $g : K \rightarrow \Sigma$  por  $g(y) = j = (j_k)_{k \geq 1}$ .

Vejamos que  $g$  é contínua.

Dados  $\epsilon > 0$  e  $a \in K$ , seja  $l \geq 1$  tal que  $2^{-l} < \epsilon$  e  $j_1 \dots j_l$  tal que  $a \in I_{j_1 \dots j_l}$ . O intervalo  $I_{j_1 \dots j_l}$  é uma vizinhança aberta de  $a$ . Logo, se  $y \in I_{j_1 \dots j_l}$ , então  $(g(y))_i = (g(a))_i$  se  $1 \leq i \leq l$  e  $d(g(y), g(a)) < 2^{-l} < \epsilon$ . Temos ainda, que  $g$  é claramente sobrejetiva.

Para provarmos que  $g$  é uma semi-conjugação, resta ver que  $g \circ f = \sigma \circ g$ .

Se  $y \in K$ , então  $g(y) = j = (j_k)_{k \geq 1}$  definida como a sequência tal que  $y \in I_{j_1 \dots j_k}$ ,  $\forall k \geq 1$ .

Portanto  $\sigma(g(y)) = j_2 j_3 \dots j_k \dots$

Por outro lado, a condição 3<sup>o</sup>) implica que  $f(y) \in I_{j_2 \dots j_k \dots}$ ,  $\forall k \geq 2$ . Logo,  $g(f(y)) = j_2 j_3 \dots j_k \dots$ .

Como  $h(\sigma) = \log 2$ , segue da proposição 20 que  $h(f) > 0$ . ■



## 5. UM EXEMPLO

Neste capítulo vamos mostrar um exemplo onde vários dos conceitos anteriores são ilustrados.

Calculamos seu conjunto de rotação, o conjunto de rotação de cada ponto e sua entropia topológica.

Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por

$$f(y) = \begin{cases} 3y & \text{se } y \in [0, \frac{1}{3}) \\ 3y - 1 & \text{se } y \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 3 - 3y & \text{se } y \in [\frac{2}{3}, 1) \end{cases}$$

e  $\bar{F} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 4 - 3x & \text{se } x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Definidas desta maneira, temos que  $f$  é um endomorfismo do círculo de grau 1.  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = \bar{F}(x \pmod{1}) + [x]$  uma extensão contínua de  $\bar{F}$  e um levantamento de  $f$ , onde  $[x]$  é a parte inteira de  $x$ .

Além disso, a função deslocamento  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} 2(x - [x]) & \text{se } x \in [k, k + \frac{2}{3}); & k \in \mathbb{Z} \\ 4 - 4(x - [x]) & \text{se } x \in (k + \frac{2}{3}, k + 1); & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Veja as figuras 4, 5 e 6.

Vejam algumas propriedades de  $f$ .

**Proposição 22.**  $\rho(F) = [0, 1]$

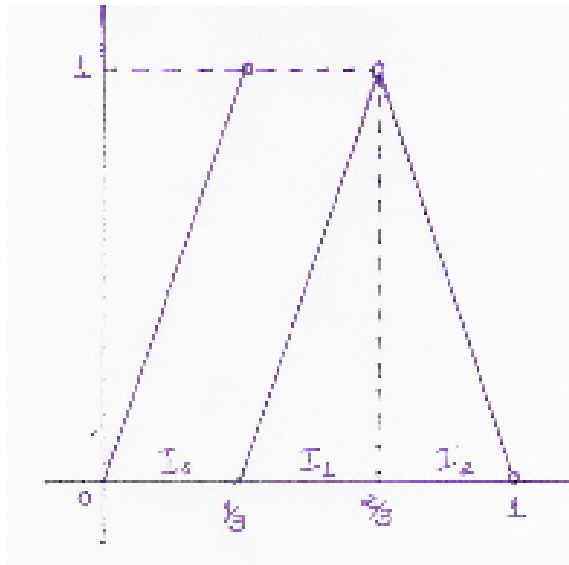


Figure 4: .

**Demonstração:**

Temos claramente, que  $F([0, n]) = [0, n + 1]$  e  $F^n([0, 1]) = [0, n + 1]$ . Então, o conjunto de rotação  $\rho(F) = [0, 1]$ . De fato, pois  $F^n([0, 1]) = [0, n + 1]$  implica em  $0 \leq F^n(x) \leq n + 1$ . Logo,  $-1 \leq F^n(x) - x \leq n + 1$  e  $\frac{-1}{n} \leq \frac{F^n(x) - x}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ . Portanto, os pontos limites da sequência  $\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)_{n \geq 1}$  pertencem ao intervalo  $[0, 1]$ . Sabemos que  $\rho(F)$  é um intervalo fechado e que 0 e 1 pertencem a  $\rho(F)$ . Logo,  $\rho(F) = [0, 1]$ .

■

Vejamos agora como descrever o intervalo de rotação de cada ponto.

Para isto, consideremos a partição de  $S^1$  dada por  $I_0 = [0, \frac{1}{3})$ ,  $I_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $I_2 = [\frac{2}{3}, 1)$ .

Dado  $y \in S^1$ , definimos a sequência  $(v_k)_{k \geq 0}$  de visitas de  $y$  aos intervalos  $I_k$ , por  $v_k = j$  se e somente se  $f^k(y) \in I_j$ .

Além disso, seja  $d_n$  a sequência definida por  $d_n = \text{card}\{k \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \text{ tal que } v_k = 1 \text{ ou } v_k = 2\}$ , isto é, a sequência dada pelo número de vezes que o ponto  $y$

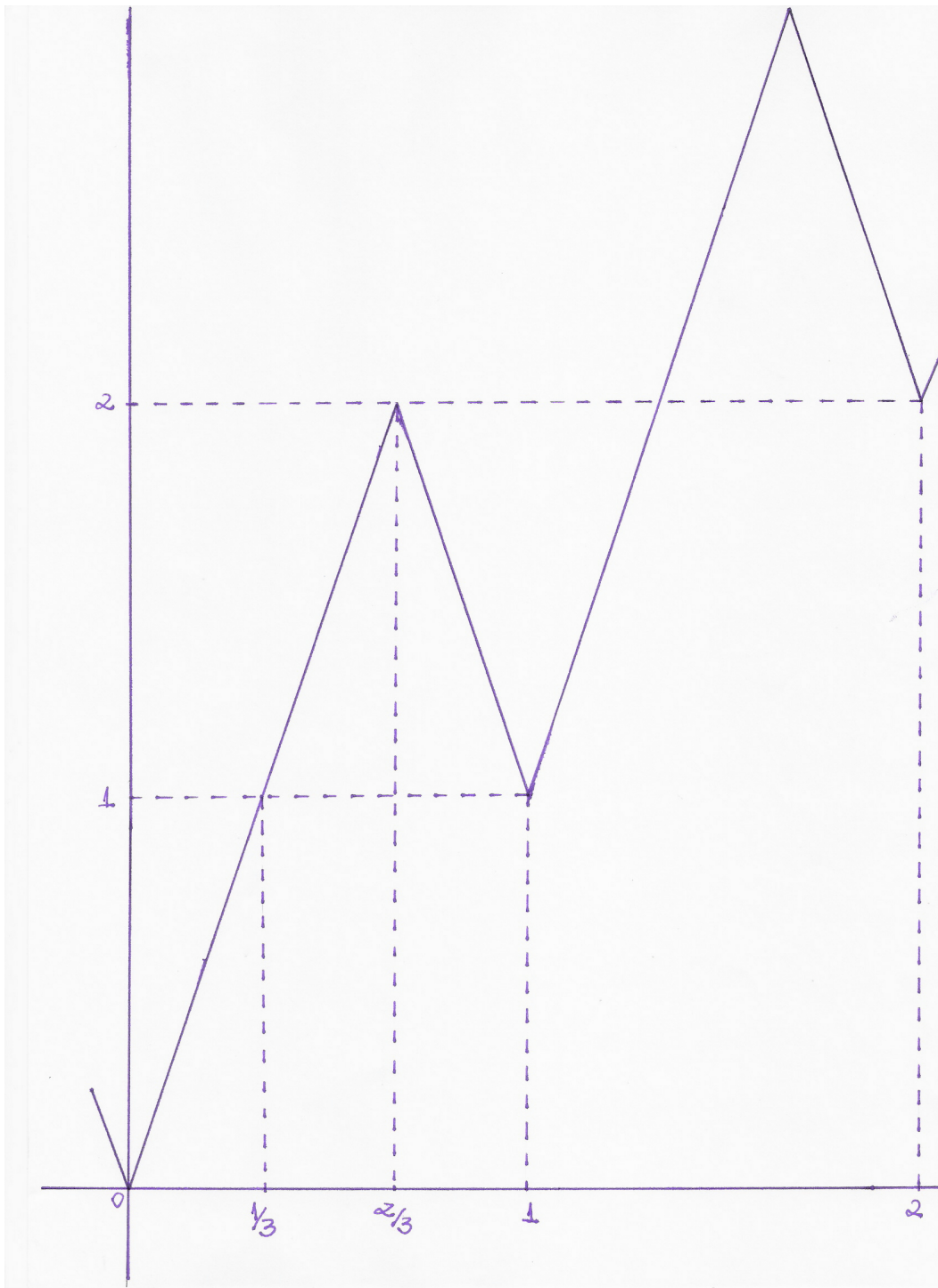


Figure 5: .

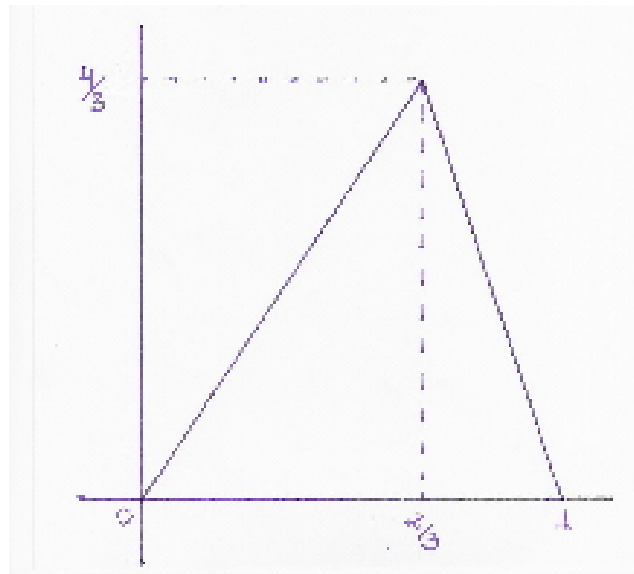


Figure 6: .

visitou os intervalos  $I_1$  ou  $I_2$  num trecho da órbita de tamanho  $n$ .

**Proposição 23.**  $\rho(F, x) = [\liminf \frac{d_n}{n}, \limsup \frac{d_n}{n}]$ .

**Demonstração:**

Primeiramente, vamos verificar que se  $x \in [0, 1]$ , então  $F^n(x) \in [d_n, d_n + 1]$ .

De fato,

Para  $n = 1$  temos que

Se  $d_1 = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \Rightarrow y \in I_0 \Rightarrow 0 \leq F(x) \leq 1 \Rightarrow F^1(x) \in [d_1, d_1 + 1] = [0, 1]$

Se  $d_1 = 1 \Rightarrow v_0 = 1$  ou  $2 \Rightarrow y \in I_1 \cup I_2 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq F(x) \leq 2 \Rightarrow F(x) \in [d_1, d_1 + 1] = [1, 2]$

Suponhamos que  $F^n(x) \in [d_n, d_n + 1]$ , então temos duas possibilidades.

Se  $f^n(y) \in I_0$ , então  $v_n = 0$  e  $F^n(x) \in [d_n, d_n + \frac{1}{3}]$ . Logo  $d_{n+1} = d_n$  e  $F^{n+1}(x) \in [d_n, d_n + 1] = [d_{n+1}, d_{n+1} + 1]$ .

Agora, se  $f^n(y) \in I_1 \cup I_2$ , então  $v_n = 1$  ou  $v_n = 2$  e,  $F^n(x) \in [d_n + \frac{1}{3}, d_n + 1]$ .

Logo,  $d_{n+1} = d_n + 1$  e  $F^{n+1}(x) \in [d_n + 1, d_n + 2] = [d_{n+1}, d_{n+1} + 1]$ .

Portanto, podemos concluir que se  $x \in [0, 1]$ , então  $F^n(x) \in [d_n, d_n + 1]$ .

Agora, vejamos que as sequências  $\left(\frac{F^n(x)-x}{n}\right)_{n \geq 1}$  e  $\left(\frac{d_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  possuem os mesmos pontos limites.

De fato, como  $0 \leq x \leq 1$  e como  $d_n \leq F^n(x) \leq d_n + 1$ , então

$$d_n - 1 \leq F^n(x) - x \leq d_n + 1$$

$$\frac{d_n}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{F^n(x)-x}{n} \leq \frac{d_n}{n} + \frac{1}{n}$$

Logo, como sabemos que  $\rho(F, x)$  é um intervalo e como  $\liminf \frac{F^n(x)-x}{n} = \liminf \frac{d_n}{n}$  e que  $\limsup \frac{F^n(x)-x}{n} = \limsup \frac{d_n}{n}$ , então

$$\rho(F, x) = \left[ \liminf \frac{d_n}{n}, \limsup \frac{d_n}{n} \right] \blacksquare$$

Considerando a sequência de partições de  $S^1$ ,  $P_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ ,  $P_2 = f^{-1}P_1 = \{0, \frac{1}{9}, \dots, \frac{8}{9}\}$ ,  $P_k = f^{-1}P_{k-1} = \{\frac{i}{3^k} \in \mathbb{Q}; 0 \leq i \leq 3^k - 1\}$ , é possível mostrar que dada uma sequência  $(v_k)_{k \geq 0}$ ,  $v_k \in \{0, 1, 2\}$ , existe  $y \in S^1$  tal que  $f^k(y) \in I_{v_k}, \forall k \geq 1$ . Em outras palavras, toda sequência de visitas é realizada por algum ponto  $y$ .

Além disso, dado  $[a, b] \subset [0, 1]$ , fazendo uma escolha adequada da sequência  $(v_k)_{k \geq 0}$ , é possível encontrar  $y \in S^1$  tal que  $\rho(F, x) = [a, b]$ ,  $\pi(x) = y$ .

Finalmente vamos calcular a entropia de  $f$ . Vamos mostrar que  $3^{n+k-1} \leq cov(n, 3^{-k}) \leq 3^{n+k}$ . Como  $h_\epsilon(f)$  é monótona em  $\epsilon$ , tomando  $\epsilon = 3^{-k}$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$ , temos  $h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log cov(n, 3^{-k}) = \log 3$ .

**Proposição 24.**  $h_{top}(f) = \log 3$ .

Denotaremos por  $diam_n$  o diâmetro de um conjunto na métrica  $d_n$ . Então  $diam_n\left[\frac{s}{3^{n+k}}, \frac{s+1}{3^{n+k}}\right] = \frac{3^{n-1}}{3^{n+k}} = 3^{-k-1}$  para todo  $n \geq 1$  e  $k \geq 1$ .

Fixemos  $k \geq 1$  e  $n \geq 1$ .

A coleção  $\{[\frac{s}{3^{n+k}}, \frac{s+1}{3^{n+k}}]; 0 \leq s \leq 3^{n+k} - 1\}$  é uma cobertura de  $S^1$  por conjuntos com  $diam_n$  igual a  $3^{-k-1}$ , portanto menor que  $3^{-k}$ . Como esta coleção possui  $3^{n+k}$  elementos, temos que  $cov(n, 3^{-k}) \leq 3^{n+k}$ .

Por outro lado, considere  $A_1, \dots, A_r$  uma cobertura de  $S^1$  por conjuntos com diâmetro na métrica  $d_n$  menor que  $3^{-k}$ .

Mostraremos que existe uma função injetiva  $\varphi : \{0, \dots, 3^{n+k-1} - 1\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  que relaciona o elemento  $\frac{s}{3^{n+k-1}} \in S^1$  com o conjunto  $A_{\varphi(s)}$  da cobertura que o contém.

De fato, temos que  $diam_n[\frac{s}{3^{n+k-1}}, \frac{s+1}{3^{n+k-1}}] = \frac{3^{n-1}}{3^{n+k-1}} = 3^{-k} > diam_n(A_i)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Deste modo, cada  $A_i$  contém no máximo um elemento da forma  $\frac{s}{3^{n+k-1}}$ . Então, a função  $\varphi : \{0, \dots, 3^{n+k-1} - 1\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  tal que  $\frac{s}{3^{n+k-1}} \in A_{\varphi(s)}$  é injetiva. Logo, a cardinalidade do conjunto  $\{1, \dots, r\}$  é maior ou igual a cardinalidade do conjunto  $\{0, \dots, 3^{n+k-1} - 1\} = 3^{n+k-1}$ , o que implica em  $r \geq 3^{n+k-1}$ . Portanto,  $cov(n, 3^{-k}) \geq 3^{n+k-1}$ .

Contudo, temos que  $3^{n+k-1} \leq cov(n, 3^{-k}) \leq 3^{n+k}$  o que implica em  $h(f) = \log 3$ , pois

$$3^{n+k-1} \leq cov(n, 3^{-k}) \leq 3^{n+k}$$

$$\log 3^{n+k-1} \leq \log cov(n, 3^{-k}) \leq \log 3^{n+k}, \text{ pois } 3^{n+k-1} > 1$$

$$(n+k-1) \log 3 \leq \log cov(n, 3^{-k}) \leq (n+k) \log 3$$

$$(1 + \frac{k}{n} - \frac{1}{n}) \log 3 \leq \frac{1}{n} \log cov(n, 3^{-k}) \leq (1 + \frac{k}{n}) \log 3$$

Como  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{k}{n} - \frac{1}{n}) \log 3 = \log 3$  e  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{k}{n}) \log 3 = \log 3$  para todo  $k \geq 1$ , temos que  $h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_\epsilon(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log cov(n, 3^{-k}) = \log 3$ .

■

## REFERENCES

- [1] Brin, M. and Stuck, G. Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. 2002.
- [2] ITO, Ryuichi. Rotation Sets Are Closed. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1981), 89-107. Printed in Great Britain.
- [3] MISIUREWICZ, M. ZIEMIAN, K. Rotation Sets for Maps of Tori. J. London Math. Soc. (2) 40. 1989, 490-506.
- [4] NEWHOUSE, S., PALIS, J. e TAKENS, F. Stable Families of Dynamical System I: Diffeomorphisms. Preprint, I.M.P.A., Rio, Brasil.