UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Curvas fechadas sem tangentes paralelas

Osvaldo Choucair Vaz da Silva

Orientadora: Susana Cândida Fornari

22 DE MARÇO DE 2006

Sumário

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças e conseguir alcançar mais uma meta em minha vida.

Agradeço de forma especial à minha orientador Professora Susana Cândida Fornari pela sua dedicação e ajuda.

Agradeço aos meus pais e aos meus irmãos Audrey e Farid.

Agradeço a minha esposa Alice e as minhas filhas Thaís e Bárbara.

Agradeço aos professores da UFMG: Cristina Maria Marques, Fernando Figueredo de Oliveira Filho, Hamilton Prado Bueno e Paulo César Carrião pela ajuda dentro e fora da sala de aula.

Agradeço aos colegas de profissão: Elizabeth Regina Monken, José Glicério Leão, Maria Luzia Pereira, Marlene Aparecida Pinto Rezende, Sebastião Daniel Guimarães Martins e ao Deputado Durval Ângelo.

Agradeço a Prefeitura Municipal de Belo Horizonte pela liberação do trabalho durante o curso.

Introdução

Uma *skew loop* é uma curva fechada de $\mathbb{R}^3$ sem vetores tangentes paralelos.

No plano não temos skew loops, pois toda curva fechada tem um par de vetores paralelos(veja Apêndice 1).

Durante uma palestra de Hugo Steinhaus(1887-1972) proferida na Universidade de Sussex, Inglaterra, em 1966, Beniamino Segre(1903-1977) refutou a conjectura de Steinhaus que propunha que toda curva de $\mathbb{R}^3$ tinha um par de tangentes paralelas. O trabalho de Segre foi publicado em 1968 provando a existência de skew loops e mostrando que estas curvas não poderiam estar em elipsóides, parabolóides e em certos cilindros simétricos(veja em [Se]). Mohammad Ghomi e Bruce Solomon em [GSo] adicionaram os hiperbolóides de duas folhas na lista de Segre e mostraram que os cilindros assimétricos admitem skew loops.

O objetivo desta dissertação é o estudo dos resultados obtidos por M. Ghomi e B. Solomon de 2002, publicado em [GSo]. O resultado principal deste trabalho é o Teorema A. Nesse Teorema as quádricas com um ponto de curvatura Gaussiana positiva são as únicas superfícies imersas de $\mathbb{R}^3$ que são caracterizadas pela ausência de skew loops.

Teorema A. *Seja* $\mathbb{M}$ *uma variedade diferenciável conexa de dimensão 2 e* $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma imersão isométrica de classe* C^2*. Suponha que* $\mathbb{M}$ *tenha um ponto de curvatura Gaussiana positiva. Então são equivalentes:*

(1) $F(\mathbb{M})$ *é parte de uma superfície quádrica.*

(2) $F(\mathbb{M})$ *não contém uma skew loop de classe* C^2*.*

No Apêndice 2 mostramos que a hipótese de um ponto de curvatura Gaussiana positiva de $\mathbb{M}$ não é supérflua. Nesse Apêndice mostramos que um cilindro circular reto sobre uma curva aberta não tem skew loops. Este cilindro não é parte de uma quádrica e não contém skew loops, mas tem curvatura Gaussiana igual a zero em todos os pontos.

As quádricas que têm um ponto de curvatura Gaussiana positiva são os elipsóides, parabolóides elípticos e os hiperbolóides de duas folhas. O cilindro reto sobre uma elipse e o cone têm curvatura Gaussiana nula em todos os pontos. O hiperbolóide de uma folha e o parabolóide hiperbólico são superfícies regradas, logo têm curvatura Gaussiana menor ou igual a zero em todos os pontos(veja [C1] pág. 228).

Uma superfície compacta sempre tem um ponto de curvatura Gaussiana positiva, portanto temos o seguinte corolário do Teorema A:

Corolário B *Elipsóides são as únicas superfíces compactas de classe* C^2 *em* $\mathbb{R}^3$ *que não têm skew loops.*

1 Preliminares

1.1 Variedades e Superfícies

Uma *variedade diferenciável de dimensão 2* é um conjunto $\mathbb{M}$ munido de uma família de aplicações bijetivas $X_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{M}$ de conjuntos abertos $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{M}$ tais que
1. $\cup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$.
2. Para cada par α,β com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, temos $X_\alpha^{-1}(W)$, $X_\beta^{-1}(W)$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$ e $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$, $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$ são aplicações diferenciáveis.

Uma *variedade riemanniana* é uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ onde em cada ponto p de $\mathbb{M}$ temos um produto interno $< \ , \ >_p$ no espaço tangente $T_p\mathbb{M}$. Este produto interno obedece a mais detalhes(veja [C2] pág. 38).

Seja $\mathbb{M}$ uma variedade riemanniana de dimensão 2. Uma aplicação $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *imersão isométrica de classe* C^2 se
1. $F \circ X_\alpha^{-1} : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é diferenciável e de classe C^2 para todo $\{X_\alpha, U_\alpha\}$,
2. A aplicação $dF_p : T_p\mathbb{M} \to T_p\mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $p \in \mathbb{M}$,
3. $< u, v >_p = < dF_p u, dF_p v >_{F(p)}$ para todo $u, v \in T_p\mathbb{M}$ e para todo $p \in \mathbb{M}$.
Como $\mathbb{R}^3$ tem uma estrutura riemanniana, então por (3) temos que a estrutura riemanniana de $\mathbb{M}$ é a induzida por $\mathbb{R}^3$. Chamaremos de $F(\mathbb{M})$ uma *superfície* de $\mathbb{R}^3$.

Toda imersão é localmente um mergulho (veja proposição 3.7 pág. 13 de [C2]), daí temos que uma superfície de $\mathbb{R}^3$ é localmente difeomorfa a um aberto do plano. O nosso conceito de superfície é mais geral que os conceitos de superfícies regulares e superfícies parametrizadas (veja pág. 61 e 92 de [C1]). Como $F \circ X_\alpha^{-1} : U_\alpha \to \mathbb{R}^3$ é uma superfície parametrizada contida em $\mathbb{R}^3$, usando a proposição 2 pág 93 de [C1] existe um aberto W_α de U_α onde $F(W_\alpha) \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular. Esta conclusão será de muita utilidade nesta dissertação.

1.2 Skew Loops e suas tantrices

Um *laço* γ *de classe* C^k em $\mathbb{R}^3$ é uma curva fechada γ:$[a, b] \to \mathbb{R}^3$ de classe C^k, $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, $\gamma''(a) = \gamma''(b), ..., \gamma^{(k-1)}(a) = \gamma^{(k-1)}(b)$ e $\gamma^{(k)}(a) = \gamma^{(k)}(b)$. Desde que $\mathbb{S}^1$ é difeomorfo a $\frac{\mathbb{R}}{\mathbf{2\pi}}$, podemos considerar um laço γ de classe C^k como uma função $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k.

Um laço γ é dito *regular* se o vetor velocidade $\gamma'(t)$ é diferente de zero para todo t.

Um laço regular γ de classe C^k é um *skew loop* se $k \geq 1$ e $\gamma'(t) \times \gamma'(s) \neq 0$ para todo $s, t \in \mathbb{S}^1$ com $s \neq t$, isto é, a curva γ não tem nenhum par de retas tangentes paralelas.

A *tantrix* do laço regular $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação $\tau : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$.

Uma consequência imediata das definições acima é que um laço regular $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com tantrix $\tau : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ é um skew loop se, e somente se, $\tau(t) \neq \pm\tau(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{S}^1$ com $s \neq t$.

A seguir relacionaremos resultados que serão utilizados na prova do teorema A. Dado um skew loop γ, a proposição seguinte diz que a imagem de γ por uma transformação linear, cuja matriz é diagonal e inversível, é também um skew loop.

Proposição 1.1. S*eja* $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *um skew loop com* $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$. *Então o laço regular* $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\overline{\gamma}(t) = (a\gamma_1(t), b\gamma_2(t), c\gamma_3(t))$ *sendo* a, b *e* c *números reais diferentes de zero, é também um skew loop.*

Prova.

Dados $t, s \in S^1$ temos que

$$\overline{\gamma}'(t) = (a\gamma_1'(t), b\gamma_2'(t), c\gamma_3'(t)),$$

$$\overline{\gamma}'(s) = (a\gamma_1'(s), b\gamma_2'(s), c\gamma_3'(s)).$$

Fazendo o produto vetorial de $\overline{\gamma}'(t)$ por $\overline{\gamma}'(s)$ obtemos

$$\overline{\gamma}'(t) \times \overline{\gamma}'(s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

sendo

$$\begin{aligned} x(t,s) &= bc(\gamma_2'(t)\gamma_3'(s) - \gamma_2'(s)\gamma_3'(t)), \\ y(t,s) &= ac(\gamma_1'(s)\gamma_3'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_3'(s)), \\ z(t,s) &= ab(\gamma_1'(t)\gamma_2'(s) - \gamma_1'(s)\gamma_2'(t)). \end{aligned}$$

Mas, as expressões entre parênteses em cada uma das igualdades acima são as componentes de $\gamma'(t) \times \gamma'(s)$, sendo pelo menos uma das três não nulas pois γ é um skew loop. Como a, b e c são não nulos logo temos que $\overline{\gamma}'(t) \times \overline{\gamma}'(s)$ tem pelo menos uma componente não nula, ou seja $\overline{\gamma}'(t) \times \overline{\gamma}'(s) \neq 0$ e daí concluímos que $\overline{\gamma}$ é um skew loop. □

Suponha γ um laço de classe C^2 parametrizado pelo comprimento de arco, então $\tau(t) = \gamma'(t)$ e a curvatura k_γ de γ é dada por $k_\gamma = |\tau'(t)|$.

Uma *homotopia* entre os laços α_1, α_2: $\mathbb{S}^1 \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação contínua $H : \mathbb{S}^1\text{x}[0,1] \longrightarrow A$ tal que $H(t,0) = \alpha_1(t)$, $H(t,1) = \alpha_2(t)$ e para todo $r \in (0,1)$ $H(t,r)$ é um laço em A.

Dois laços α_1, α_2: $\mathbb{S}^1 \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^3$ são *regularmente homotópicos*, $\alpha_1 \sim \alpha_2$, quando existe uma homotopia $H(t,r)$ entre α_1 e α_2 tal que para todo $r \in [0,1]$ $H(t,r)$ é um laço regular, isto é, $\frac{\partial H}{\partial t}(t,r) \neq 0$ para todo $t, r \in \mathbb{S}^1\text{x}[0,1]$.

Seja α :$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ um laço regular. O índice de rotação de α(veja [C1] pag 43) é o número de voltas que o vetor $\alpha'(t)$ dá em $\mathbb{S}^1$ quando t percorre $\mathbb{S}^1$. O índice de rotação de um laço muda de sinal quando mudamos a orientação desse laço e esse índice é positivo quando o laço tem orientação positiva.

O laço $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$(conjunto dos números complexos),

$$\gamma_0(e^{it}) = \cos t(1 + isent) \tag{1.1}$$

é chamado *figura-oito* e tem índice zero.(ver figura 1.1).

Figura 1-1. Figura-oito e a imagem da sua tantrix em $\mathbb{S}^1$.

Já o laço $\gamma_k : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\gamma_k(e^{it}) = e^{ikt} \quad , \quad k = \pm 1, \pm 2, ..., \tag{1.2}$$

tem índice k. Um teorema de H. Whitney, enunciado na pag. 279 de [W], diz que duas curvas planas regulares são regularmente homotópicas se, e somente se, têm o mesmo índice de rotação. Portanto em $\mathbb{R}^2$, todo laço é regularmente homotópico à figura-oito dada por (1.1), ou a um dos círculos com k voltas dado por (1.2).

S. Smale mostrou que em $\mathbb{S}^2$ temos duas classes de homotopia regular de curvas(veja pag. 507 de [Sm]). Em [So], pág. 31 e 37, B. Solomon mostra que estas classes podem ser representadas pelo equador ou pelo equador com duas voltas. Portanto qualquer laço regular em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópico ao equador, ou ao equador com duas voltas.

Lema 1.2. *Todo laço regular de classe C^2 em $\mathbb{S}^2$ é regularmente homotópico em $\mathbb{S}^2$ a sua tantrix.*
Prova.

Seja $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ um laço regular de classe C^2 parametrizado pelo comprimento de arco t e seja $\tau(t) = \sigma'(t)$ sua tantrix. A homotopia h de classe C^1, $h : [0, \pi/2]$ x $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$,

$$h(\theta, t) = \sigma(t) \cos\theta + \tau(t) \text{sen}\theta,$$

deforma, em $\mathbb{S}^2$, a curva regular σ na sua tantrix τ. Colocando $\nu := \sigma \times \tau$, temos que $\{\sigma, \tau, \nu\}$ formam um referencial ortonormal móvel com $\{\tau(t), \nu(t)\}$ uma base do plano tangente a $\mathbb{S}^2$ em $\sigma(t)$ para cada t. Sabemos que a curvatura geodésica k_g de uma curva σ em $\mathbb{S}^2$ é dada pela relação

$$\frac{D(\tau)}{dt} = k_g(N \times \tau),$$

sendo $\frac{D(\tau)}{dt}$ a derivada covariante de τ e $N(t)$ o vetor unitário normal a $\mathbb{S}^2$ no ponto $\sigma(t)$, portanto podemos considerar $N(t) = \sigma(t)$, obtendo:

$$k_g = \ < \frac{D(\tau)}{dt}, \sigma \times \tau > .$$

Da definição de derivada covariante em uma superfície de $\mathbb{R}^3$ segue que

$$\frac{D(\tau)}{dt} = \tau' - (\tau')^N,$$

onde $(\tau')^N$ é a componente de τ' normal a $\mathbb{S}^2$. Como $(\tau')^N$ é ortogonal a $\sigma \times \tau$, pois $\sigma \times \tau = \nu$ e ν está no plano tangente, podemos escrever

$$k_g = \ < \tau', \sigma \times \tau > \ = \ < \tau', \ \nu > .$$

A expressão de τ' no referencial ortononormal $\{\sigma, \tau, \nu\}$ é dada por

$$\tau' = \ < \tau', \sigma > \sigma \ + \ < \tau', \tau > \tau \ + \ < \tau', \nu > \nu.$$

Sabemos que $< \tau, \tau > = 1$, temos então que $< \tau', \tau > = 0$. Agora $(< \tau, \sigma >)' = 0$, o que leva a $< \tau', \sigma > + 1 = 0$ e portanto $< \tau', \sigma > = -1$. Podemos então expressar τ' por

$$\tau' = -\sigma + k_g \nu.$$

Colocando $\sigma_\theta(t) := h(\theta, t)$ e calculando a sua derivada com relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_\theta'(t) &= \sigma'(t) \cos\theta + \tau'(t) \mathrm{sen}\theta \\ &= \tau(t) \cos\theta + k_g \nu(t) \mathrm{sen}\theta - \sigma(t) \mathrm{sen}\theta. \end{aligned}$$

Sendo σ, τ, e ν vetores unitários ortonormais temos que $\sigma_\theta' \neq 0$. Portanto σ_θ é uma curva regular para todo valor de θ. $\square$

Observação 1.3. Uma curva σ em uma superfície $\mathbb{S}$ com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos tem curvatura não nula em todos os pontos, pois: sabe-se que

$$k_n = k(t) < n(t), N(t) >,$$

sendo que k_n denota a curvatura normal na direção de $\sigma'(t)$, $k(t)$ é a curvatura da curva σ no ponto $\sigma(t)$, $n(t)$ é o vetor unitário normal a curva $\sigma(t)$ e $N(t)$ é o vetor unitário normal a superfície $\mathbb{S}$ no ponto $\sigma(t)$. Como a curvatura Gaussiana é positiva, temos que a curvatura normal k_n é sempre não nula. Daí concluímos que $k(t)$ é sempre não nula.

O lema 1.2 implica que a tantrix de qualquer laço regular de classe C^2 em $\mathbb{S}^2$ é um laço regular. O lema seguinte generaliza este fato para superfícies com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos.

Lema 1.4. *Seja σ uma curva regular de classe C^2 numa superfície $\mathbb{M}$ de curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. Então a sua tantrix τ é uma curva regular em $\mathbb{S}^2$.*

Prova.

Parametrizando σ pelo comprimento de arco temos que $\tau = \sigma'$. A componente de τ' na direção normal a $\mathbb{M}$, $(\tau')^N$, é dada por

$$(\tau')^N = (\sigma'')^N = \ < \sigma'', N \ > N = k_n(\sigma')N,$$

sendo $k_n(\sigma')$ a curvatura normal na direção de σ'. Usando o fato que $\mathbb{M}$ tem curvatura Gaussiana positiva resulta que $k_n(\sigma') \neq 0$. Portanto τ' é sempre diferente de 0 e τ é uma curva regular em $\mathbb{S}^2$. □

Observação 1.5. Este lema nos permite dizer que um laço regular $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{M}$, $\mathbb{M}$ uma superfície com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, é um skew loop se, e somente se, τ é um mergulho e $\tau(\mathbb{S}^1)$ é disjunto da sua imagem antipodal.

Seja U uma vizinhança coordenada de uma superfície $\mathbb{M}$, onde U é a imagem de um disco aberto de $\mathbb{R}^2$ por um difeomorfismo Φ. Uma *figura oito* α de classe C^2 em $\mathbb{M}$ é um laço α de classe C^2 regularmente homotópico a um laço β, $\alpha \sim \beta$, sendo β laço contido em U e $\Phi^{-1} \circ \beta = \gamma_0$, onde γ_0 é a curva oito definida em (1.1). Segundo [So], pág. 37, os equadores com um número par de voltas e um laço regular com um único ponto de interseção em $\mathbb{S}^2$ são figuras oito em $\mathbb{S}^2$.

Ao investigar a existência de skew loops em superfícies com curvatura positiva em todos os pontos, a proposição abaixo reduz o estudo a laços simples regulares.

Proposição 1.6. *Seja $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de classe C^2 com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. Então a tantrix de qualquer figura oito em $\mathbb{M}$ é também uma figura oito em $\mathbb{S}^2$. Em particular $\mathbb{M}$ não admite skew loop tipo figura-oito.*

Prova.

Seja α uma figura oito em $\mathbb{M}$, segue da definição acima que α é regularmente homotópico a β_0, laço difeomorfo à figura oito contido numa vizinhança coordenada U. Considere $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{M}$ a homotopia regular entre α e β_0 , com $H(t,0) = \alpha$ e $H(t,1) = \beta_0$. Sabemos que $\frac{\partial H}{\partial t}(t,r) \neq 0$, assim podemos definir $F : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^2$,

$$F(t,r) = \frac{\frac{\partial H}{\partial t}(t,r)}{\mid \frac{\partial H}{\partial t}(t,r) \mid}.$$

Pelo lema 1.4 para cada r fixo $F(t,r)$ é uma laço regular em $\mathbb{S}^2$, pois $\mathbb{M}$ tem curvatura positiva em todos os pontos. Temos que $F(t,0)$ e $F(t,1)$ são, respectivamente as tantrices de α e β_0, τ_α e τ_{β_0} . Logo $F(t,r)$ é uma homotopia regular entre τ_α e τ_{β_0} , ou seja, $\tau_\alpha \sim \tau_{\beta_0}$ em $\mathbb{S}^2$. Portanto basta provar que τ_{β_0} é uma figura oito em $\mathbb{S}^2$. Para conseguir isto vamos deformar a vizinhança coordenada U, com $\beta_0 \subset U$, num hemisfério de $\mathbb{S}^2$ através de superfícies com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, em seguida utilizaremos os lemas 1.2 e 1.4.

Considere $p \in U$ como o ponto de interseção de β_0. Podemos supor $p = (0,0,0)$ e U é suficientemente pequeno de tal forma que U seja o gráfico de uma função h_0, $h_0{:}D^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, sendo D^2 um disco de T_pU (plano tangente a U em p) com centro em $(0,0)$.Temos então que β_0 é o gráfico da figura oito $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 :\to D^2$, ou seja

$$\beta_0(t) = \gamma_0(t) + h_0(\gamma_0(t))\mathbf{k},$$

sendo $\mathbf{k} := (0,0,1)$ e γ_0 é dada por (1.1).

Podemos considerar h_0 com $h_0(0,0) = 0$, $h_{0_x}(0,0) = 0$, $h_{0_y}(0,0) = 0$ e $h_{0_{xy}}(0,0) = 0$ ([C1] págs. 193 e 194). As curvaturas principais k_1 e k_2 em p são dadas respectivamente por

$$k_1(p) = h_{0_{xx}}(0,0) \quad \text{e} \quad k_2(p) = h_{0_{yy}}(0,0).$$

Como $p \in U$ e U tem curvatura Gaussiana positiva em p, então $k_1(p)$ e $k_2(p)$ podem ser consideradas positivas, desde que seja feita escolha apropriada da orientação do vetor normal. Além disso $k_1(p)$ e $k_2(p)$ podem ser considerados entre 0 e 1, pois se tivermos

$$a = max\{k_1(p), k_2(p)\} \geq 1,$$

trocamos a função h_0 pela função $\overline{h}_0$, onde $\overline{h}_0 : D^2 :\to R$ e $\overline{h}_0 = \frac{h_0}{a+1}$. Como $\overline{h}_0(0,0) = 0$, $\overline{h}_{0_x}(0,0) = 0$, $\overline{h}_{0_y}(0,0) = 0$ e $\overline{h}_{0_{xy}}(0,0) = 0$, as novas curvaturas principais seriam

$$\overline{k_1}(p) = \overline{h}_{0_{xx}}(0,0) = \frac{h_{0_{xx}}(0,0)}{a+1} = \frac{k_1(p)}{a+1} < \frac{a}{a+1} < 1$$

e analogamente $\overline{k_2}(p) < 1$.

Sendo h_0: $D^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, $0 < h_{0_{xx}}(0,0) < 1$, $0 < h_{0_{yy}}(0,0) < 1$ e $h_{0_{xy}}(0,0) = 0$ é possível considerar o disco D de tal forma que

$$\begin{aligned} 0 &< h_{0_{xx}}(x,y) < 1 \quad \forall\ (x,y) \in D, \\ 0 &< h_{0_{xx}}(x,y) < 1 \quad \forall\ (x,y) \in D, \\ |h_{0xy}(x,y)| &< \text{mínimo } \{h_{0_{xx}}(x,y), h_{0_{yy}}(x,y)\} \quad \forall\ (x,y) \in D \end{aligned} \tag{1.3}$$

A partir de agora fixemos o raio do disco D^2 como sendo 1. O hemisfério sul de S^2 é o gráfico da função: $h_1 : D^2 \to R$, $h_1(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$. Temos que:

$$\begin{aligned} h_{1_{xx}}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{x^2}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad h_{1_{xx}}(x,y) \geq 1, \\ h_{1_{yy}}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad h_{1_{yy}}(x,y) \geq 1, \\ h_{1_{xy}}(x,y) &= \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Para cada $\varepsilon \in [0,1]$ definimos a superfície S_ε como o gráfico da função $h_\varepsilon : D^2 :\to R$, sendo

$$h_\varepsilon(x,y) = h_0(x,y) + \varepsilon(h_1(x,y) - h_0(x,y)).$$

Logo $S_0 = U$ e S_1 é o hemisfério sul de $\mathbb{S}^2$. Variando ε entre 0 e 1, temos a deformação de U no hemisfério sul de $\mathbb{S}^2$ através das superfícies que são gráficos das funções h_ε. Observe que

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_{xx}}(x,y) &= h_{0_{xx}}(x,y) + \varepsilon(h_{1_{xx}}(x,y) - h_{0_{xx}}(x,y)) > 0, & (1.4)\\ h_{\varepsilon_{yy}}(x,y) &= h_{0_{yy}}(x,y) + \varepsilon(h_{1_{yy}}(x,y) - h_{0_{yy}}(x,y)) > 0, & (1.5)\\ h_{\varepsilon_{xy}}(x,y) &= h_{0_{xy}}(x,y) + \varepsilon(h_{1_{xy}}(x,y) - h_{0_{xy}}(x,y)). & (1.6) \end{aligned}$$

De acordo [C1] pág.193 a curvatura Gaussiana da superfície S_ε é

$$K_\varepsilon = \frac{h_{\varepsilon_{xx}} h_{\varepsilon_{yy}} - h^2_{\varepsilon_{xy}}}{(1 + h^2_{e_x} + h^2_{e_y})^2}.$$

Reescrevendo (1.4), (1.5) e (1.6) e omitindo o ponto (x,y) obtemos:

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_{xx}} &= (1-\varepsilon)h_{0_{xx}} + \varepsilon h_{1_{xx}} \quad ,\\ h_{\varepsilon_{yy}} &= (1-\varepsilon)h_{0_{yy}} + \varepsilon h_{1_{yy}} \quad ,\\ h_{\varepsilon_{xy}} &= (1-\varepsilon)h_{0_{xy}} + \varepsilon h_{1_{xy}} \quad . \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} h_{\varepsilon_{xx}} h_{\varepsilon_{yy}} - h^2_{\varepsilon_{xy}} &= (1-\varepsilon)^2 \; [h_{0_{xx}} h_{0_{yy}} - h^2_{0_{xy}}] & (1.7)\\ &\quad + \varepsilon^2 \; [h_{1_{xx}} h_{1_{yy}} - h^2_{1_{xy}}] \\ &\quad + \varepsilon(1-\varepsilon) \; [h_{0_{xx}} h_{1_{yy}} + h_{0_{yy}} h_{1_{xx}} - 2h_{0_{xy}} h_{1_{xy}}] \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} h_{0_{xx}} h_{0_{yy}} &> h^2_{0_{xy}}, & (1.8)\\ h_{1_{xx}} h_{1_{yy}} &> h^2_{1_{xy}}, & (1.9) \end{aligned}$$

pois U e o hemisfério sul de $\mathbb{S}^2$ têm curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. De (1.9) temos $\sqrt{h_{1_{xx}} h_{1_{yy}}} > \left|h_{1_{xy}}\right|$. Dessa desigualdade e da desigualdade entre a média aritmética e média geométrica de dois números positivos obtemos que $h_{1_{xx}} + h_{1_{yy}} > 2\left|h_{1_{xy}}\right|$. Multiplicando ambos os lados por $\left|h_{0_{xy}}\right|$, temos

$$h_{1_{xx}} \left|h_{0_{xy}}\right| + h_{1_{yy}} \left|h_{0_{xy}}\right| \geq 2 \left|h_{1_{xy}}\right| \left|h_{0_{xy}}\right|.$$

Usando (1.3) obtemos

$$h_{0_{xx}} h_{1_{yy}} + h_{0_{yy}} h_{1_{xx}} \geq 2 \left|h_{0_{xy}}\right| \left|h_{1_{xy}}\right|. \tag{1.10}$$

Colocando os resultados de (1.8), (1.9) e (1.10) em (1.7) chegamos a

$$h_{\varepsilon_{xx}} h_{\varepsilon_{yy}} - h^2_{\varepsilon_{xy}} > 0 \;\; \forall \; (x,y) \in D.$$

Portanto a curvatura Gaussiana K_ε da superfície S_ε é sempre positiva em todos os pontos, e a deformação de U no hemisfério sul de S^2 ocorre através de superfícies com curvatura Gaussiana positiva(figura 1.2).

.

Fig1-2. Deformação de U no hemisfério sul de $\mathbb{S}^2$.

De acordo com (1.1) γ_0 é um laço regular , dai segue que as figuras-oito

$$\beta_\varepsilon := \gamma_0(t) + h_\varepsilon(\gamma_0(t))\mathbf{k}$$

são laços regulares em cada superfície S_ε. Usando que S_ε tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos, o lema 1.4 afirma que as tantrices de β_ε, τ_{β_ε}, são laços regulares em $\mathbb{S}^2$. Portanto

$$\tau_{\beta_\varepsilon} = \frac{{\gamma_0}'(t) + (h_\varepsilon(\gamma_0(t))'\mathbf{k}}{|{\gamma_0}'(t) + (h_\varepsilon(\gamma_0(t))'\mathbf{k}|}$$

é um laço regular em $\mathbb{S}^2$. Considere a homotopia regular $G : \mathbb{S}^2\text{x}[0,1] \to \mathbb{S}^2$, sendo

$$G(t,\varepsilon) = \tau_{\beta_\varepsilon} = \frac{{\gamma_0}'(t) + (h_\varepsilon(\gamma_0(t))'\mathbf{k}}{|{\gamma_0}'(t) + (h_\varepsilon(\gamma_0(t))'\mathbf{k}|}$$

Dai obtemos que $\tau_{\beta_0} \sim \tau_{\beta_1}$ e pelo lema 1.2 $\tau_{\beta_1} \sim \beta_1$. Como β_1 é uma figura oito $\mathbb{S}^2$ temos τ_{β_0} também é uma figura-oito em $\mathbb{S}^2$.

Usando a obsevação 1.5 concluímos que $\mathbb{M}$ não admite skew-loop tipo figura-oito. $\square$

2 Quádricas com pelo menos um ponto de curvatura positiva não têm skew loops

2.1 Elipsóides não tem skew loops

Vamos inicialmente provar que $\mathbb{S}^2$ não tem skew loop de classe C^2, ou seja toda curva fechada regular de classe C^2 na esfera $\mathbb{S}^2$ não possui tangentes paralelas. Para isto vamos parametrizar $\mathbb{S}^2$ e definir um referencial $\{e^+, e^-\}$ em $T_p\mathbb{S}^2$. Em seguida, vamos definir a 1-forma de conexão w associada a este referencial. Através de um lema mostraremos que $\int_\tau w = 0$, sendo τ a tantrix de um skew loop σ de classe C^2 em $\mathbb{S}^2$. Isto dará uma contradição e então $\mathbb{S}^2$ não terá skew loop de classe C^2. Finalmente por uma transformação linear, cuja matriz é diagonal e inversível, concluiremos que os elipsóides não têm skew loop de classe C^2.

Seja $X(u,v) = (\cos v \cos u, \cos v \text{sen} u, \text{sen} v), -\pi < u < \pi \ e -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ uma parametrização de $\mathbb{S}^2$. Temos que X cobre todo S^2 menos os dois polos $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ e o semi-círculo que passa por esses dois polos e $(-1,0,0)$. Fazendo alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned}
X_u &= (-\cos v senu, \cos v \cos u, 0), \\
X_v &= (-senv \cos u, -senv senu, \cos v), \\
E &= < X_u, X_u > \ = cos^2 v, \\
F &= < X_u, X_v > \ = 0, \\
G &= < X_u, X_v > \ = 1.
\end{aligned}$$

Vamos chamar de e^+ e e^- vetores em cada T_pS^2 definidos por

$$e^+ = \frac{X_u}{\cos v} \quad , \quad e^- = X_v.$$

Como $< e^+, e^+ >= 1$, $< e^+, e^- >= 0$, $< e^-, e^- >= 1$, temos que $\{e^+, e^-\}$ formam um referencial ortonormal em T_pS^2(veja figura 2.1).

Chamaremos de $\nabla_z e^+$ a derivada covariante em $\mathbb{S}^2$ do campo de vetores e^+ em relação ao vetor z de T_pS^2. Sabemos que $\nabla_z e^+$ pertence a T_pS^2 e assim definimos w a 1-forma de conexão associada ao referencial $\{e^+, e^-\}$ dada por

$$w(z) = \ < \nabla_z e^+, e^- > \quad \forall\ z \in T_pS^2. \tag{2.1}$$

Vamos escrever w em função de du e dv, respectivamente os duais de X_u e X_v. Temos então

$$\begin{aligned}
w &= w(X_u)du + w(X_v)dv \\
w &= \ < \nabla_{X_u} e^+,\ e^- > du \ + \ < \nabla_{X_v} e^+,\ e^- > dv \\
w &= \ < \nabla_{X_u} \frac{X_u}{\cos v},\ X_v > du \ + \ < \nabla_{X_v} \frac{X_u}{\cos v},\ X_v > dv \\
w &= \frac{1}{\cos v} < \nabla_{X_u} X_u,\ X_v > du \ + \ \frac{1}{\cos v} < \nabla_{X_v} X_u,\ X_v > dv.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_u} X_u &= X_{\text{uu}} = (-\cos v \cos u, -\cos v \text{sen} u, 0), \\
\nabla_{X_v} X_u &= X_{\text{uv}} = (\text{sen} v \text{sen} u, -\text{sen} v \cos u, 0).
\end{aligned}$$

Portanto, $w =$

$$\frac{1}{\cos v} < (-\cos v \cos u, -\cos v \text{sen} u, 0), (-\text{sen} v \cos u, -\text{sen} v \text{sen} u, \cos v) > du$$

$$+\frac{1}{\cos v} < (\text{sen} v \text{sen} u, -\text{sen} v \cos u, 0), (-\text{sen} v \cos u, -\text{sen} v \text{sen} u, \cos v) > dv,$$

logo

$$w = \text{sen} v du.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
< \ e^+, e^+ >= 1 \quad &\Rightarrow \quad < \nabla_z e^+, e^+ >= 0 \\
< \ e^-, e^- >= 1 \quad &\Rightarrow \quad < \nabla_z e^-, e^- >= 0 \\
< \ e^+, e^- >= 0 \quad &\Rightarrow \quad < \nabla_z e^+, e^- > + < \nabla_z e^-, e^+ >= 0
\end{aligned}$$

Escrevendo $\nabla_z e^+$ e $\nabla_z e^-$ no referencial $\{e^+, e^-\}$ e usando (2.1) temos

$$\nabla_z e^+ = \ < \nabla_z e^+, e^+ > e^+ + \ < \nabla_z e^+, e^- > e^- = \ w(z)e^-, \tag{2.2}$$
$$\nabla_z e^- = \ < \nabla_z e^-, e^+ > e^+ + \ < \nabla_z e^-, e^- > e^- = -w(z)e^+. \tag{2.3}$$

Lema 2.1. *Seja σ, τ laços em $\mathbb{S}^2$, sendo τ é a tantrix de σ. Considere σ de classe C^2 então $\int_\tau w = 0$.*

Prova.

Como $< \sigma(t), \sigma(t) > = 1$, temos que $< \sigma'(t), \sigma(t) > = 0$. Dai segue que $< \sigma'(t)/\left|\sigma'(t)\right|, \sigma(t) > = 0$, ou seja $< \tau(t), \sigma(t) > = 0$. Logo $\sigma(t)$ é um campo tangente de classe C^2 em $\mathbb{S}^2$ sobre $\tau(t)$. Isto é devido ao vetor posição $\tau(t)$ ser também o vetor unitário normal em $T_{\tau(t)}\mathbb{S}^2$. Seja $\theta(t)$ o ângulo orientado entre e^- e o campo $\sigma(t)$, logo podemos escrever σ no referencial $\{e^+, e^-\}$ da seguinte forma

$$\sigma(t) = \text{sen}\theta(t)e^+ + \cos\theta(t)e^- \tag{2.4}$$

Podemos afirmar que $\theta(t)$ é uma função de classe C^2 porque $\sigma(t)$ é classe C^2. Como $\sigma(t)$ é uma curva fechada, temos que $\theta(t)$ é L-periodíca, o mesmo é válido para sua tantrix $\tau(t)$. Tomando a derivada covariante em relação a τ'em ambos lados de (2.4) e usando (2.2) e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\tau'}\sigma &= (\cos\theta)\theta' e^+ - (\text{sen}\theta)\theta' e^- + \text{sen}\theta\nabla_{\tau'}e^+ + \cos\theta\nabla_{\tau'}e^- \\ &= (\cos\theta)\theta' e^+ - (\text{sen}\theta)\theta' e^- + (\text{sen}\theta)w(\tau')e^- - (\cos\theta)w(\tau')e^+ \\ &= (\theta' - w(\tau'))(cos\theta e^+ - \text{sen}\theta e^-)\end{aligned}$$

Mas $\nabla_{\tau'}\sigma$ é a componente tangente de σ', que é a derivada tradicional de $\mathbb{R}^3$. Assim temos

$$\nabla_{\tau'}\sigma = (\sigma')^T = (\tau)^T = 0.$$

Dai segue que $\theta' = w(\tau')$. concluimos que:

$$\int_\tau w = \int_0^L w(\tau') = \int_0^L \theta' = \theta(L) - \theta(0) = 0$$

□

Proposição 2.2. *$\mathbb{S}^2$não tem skew loops de classe C^2.*
Prova

Suponha por contradição, que exista um skew loop $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2$ de classe C^2, seja τ a sua tantrix. Como a esfera tem curvatura positiva, pela Proposição 1.6 ela não tem skew loop tipo figura-oito. Portanto τ é um laço regular simples. Temos então que τ é bordo de uma região Ω contida em $\mathbb{S}^2$. Usando o Teorema de Stokes obtemos

$$\int_\Omega dw = \int_\tau w.$$

Utilizando o lema 2.1 temos que

$$\int_\Omega dw = 0.$$

Como $w =$senvdu então $dw = \cos v du dv$. A forma que dá o elemento de área de uma superfície é $\overline{w} = \sqrt{EG - F^2}dudv$. Usando o descrito acima, temos então que

$$\overline{w} = \sqrt{cos^2 v\ .1 - 0}dudv = \cos v dudv,$$

e $cosv > 0$. Dai temos que dw é o elemento de área de $\mathbb{S}^2$. A questão agora são os polos norte e sul e o semi-círculo que passa por esses dois pontos que contêm $(-1, 0, 0)$, pois v não está definido para $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ e $u \neq \pi$. Isto não é problema, porque esse semi-círculo que contêm esses dois polos tem medida tem medida nula de área em $\mathbb{S}^2$. Assim se chamarmos $\overline{\Omega} = \Omega - A$, onde A é o semi-círculo acima, temos

$$\int_\Omega dw = \int_{\overline{\Omega}} dw > 0$$

Portanto teremos a área de Ω igual a zero, o que é um absurdo. Concluímos que $\mathbb{S}^2$ não tem skew loops de classe C^2. □

Proposição 2.3 *Elipsóides não tem skew loops de classe C^2.*

Prova.

Seja $\mathbb{M}$ um elipsóide em $\mathbb{R}^3$. Sabemos que existe um sistema de coordenadas onde $\mathbb{M}$ é o conjunto dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Seja $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{M}$ um skew loop de classe C^2. Considere o difeomorfismo $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dado por $F(x, y, z) = (\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y, \frac{1}{c}z)$. Assim teremos que

$$F(\gamma(t)) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (\frac{1}{a}\gamma_1(t), \frac{1}{b}\gamma_2(t), \frac{1}{c}\gamma_3(t)).$$

Pela proposição 1.1 $F(\gamma(t))$ é um skew loop de classe C^2 em $\mathbb{S}^2$. Isto é uma contradição pela proposição 2.2. Portanto nos elipsóides não temos skew loops de classe C^2. □

2.2 Paraboloídes elípticos não têm skew loops

Seja $C^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$, $k = 0, 1, 2...$, o conjunto das aplicações de classe C^k de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^3$. De acordo [H], pág. 35, $C^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$ é um espaço topológico com a topologia C^k de Whitney.

Considere $\varepsilon > 0$, duas aplicações γ, $\overline{\gamma} \in C^k(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$ estão *ε-próximas na topologia C^k de Whitney* se

$$\begin{aligned}
|\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| &< \varepsilon \ , \\
|\gamma'(t) - \overline{\gamma}'(t)| &< \varepsilon \ , \\
&\ldots \\
\left|\gamma^{(k-1)}(t) - \overline{\gamma}^{(k-1)}(t)\right| &< \varepsilon \ , \\
\left|\gamma^{(k)}(t) - \overline{\gamma}^{(k)}(t)\right| &< \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{S}^1$.

Lema 2.4. *O conjunto de skew loops em R^3 ,de classe C^2, com curvatura não nula em todos os pontos, forma um conjunto aberto do espaço $C^2(S^1, R^3)$ com a topologia C^2 de Whitney.*

Prova.

Seja γ um skew loop de classe C^2 com tantrix τ e curvatura não nula. Podemos reparametrizar γ pelo comprimento de arco, $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^3$. Daí temos que τ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e $\tau'(s) \neq 0$ para todo $s \in [0, a]$. Logo τ é mergulho de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^2$.

Como γ' e γ'' estão definidas num conjunto compacto e são não nulas em todos pontos, podemos afirmar que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $|\gamma'(s)| > \varepsilon_1$ e $|\gamma''(s)| > \varepsilon_1$ para todo s. Suponha que $\overline{\gamma}$ seja um laço de classe C^2 ε_1-próximo de γ no sentido da métrica do espaço $C^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^2 de Whitney. Podemos reparametrizar $\overline{\gamma}$ também pelo comprimento de arco e teremos $\overline{\gamma} : [0, a] \to \mathbb{R}^3$.Temos então

$$|\gamma'(s) - \overline{\gamma}'(s)| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\gamma'(s)| - |\overline{\gamma}'(s)| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\overline{\gamma}'(s)| > 0 \ \forall \ s, \quad (2.5)$$
$$|\gamma''(s) - \overline{\gamma}''(s)| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\gamma''(s)| - |\overline{\gamma}''(s)| < \varepsilon_1 \Rightarrow |\overline{\gamma}''(s)| > 0 \ \forall \ s, \quad (2.6)$$

por (2.5) garantimos que $\overline{\gamma}$ é um laço regular por (2.6) temos que a curvatura de $\overline{\gamma}$ é não nula em todos os pontos. Dai segue que $\overline{\gamma}$ tem uma tantrix $\overline{\tau}$ com $\overline{\tau}'(s) \neq 0$ para todo $s \in [0, a]$. Além disto $\overline{\tau}$ é ε_1-próximo de τ na métrica da métrica do espaço $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$ com a topologia C^1 de Whitney.

O teorema da pág 34 de [H] diz que o conjunto dos mergulhos é um aberto de $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)$ com a topologia C^1de Whitney. Como τ é um mergulho, tomando um ε_1 ainda menor se necessário, temos $\overline{\tau}$ é um mergulho.de $[0, a]$ em $\mathbb{R}^3$

Sabemos que $\tau(s) \neq -\ \tau(t)$ para todo $s, t \in [0, a]$. Dai segue que $|\tau(s) + \tau(t)| > 0$ para todo $s, t \in [0, a]$. Considere

$$F : [0, a] \text{ x } [0, a] \to \mathbb{R} \ \ , \ \ F(s, t) = |\tau(s) + \tau(t)| \, .$$

Como $[0, a]$ x $[0, a]$ é um conjunto compacto, F atinge um mínimo nesse conjunto. Chamando esse mínimo de ε, temos que $\varepsilon > 0$ e $|\tau(s) + \tau(t)| \geq \varepsilon$ para todo $s, t \in [0, a]$. Considerando $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ e usando que $\gamma'(s) = \tau(s)$, $\overline{\gamma}'(s) = \overline{\tau}(s)$, $\gamma'(t) = \tau(t)$, $\overline{\gamma}'(t) = \overline{\tau}(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\tau(s) - \overline{\tau}(s)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\tau(t) - \overline{\tau}(t)| &< \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

para todo $s, t \in [0, a]$. Somando as últimas duas desigualdades e usando propriedades dos módulos obtemos

$$\begin{aligned} |\tau(s) - \overline{\tau}(s)| + |\tau(t) - \overline{\tau}(t)| &< \varepsilon, \\ |(\tau(s) + \tau(t)) - (\overline{\tau}(s) + \overline{\tau}(t))| &< \varepsilon, \\ |\tau(s) + \tau(t)| - |\overline{\tau}(s) + \overline{\tau}(t)| &< \varepsilon, \\ \varepsilon - |\overline{\tau}(s) + \overline{\tau}(t)| &< \varepsilon \\ |\overline{\tau}(s) + \overline{\tau}(t)| &> 0 \end{aligned}$$

Como $|\overline{\tau}(s) + \overline{\tau}(t)| > 0$ para todo $s, t \in [0, a]$,temos que $\overline{\tau}(s) \neq -\ \overline{\tau}(s)$ para todo $s, t \in [0, a]$.

Se tomarmos $\overline{\gamma}$ o laço que tem como tantrix $\overline{\tau}$, $\overline{\gamma}$ ε_1-próximo de γ, temos que γ é uma skew loop em $\mathbb{R}^3$, pois garantimos $\overline{\tau}$ é um mergulho de $[0, a]$ em $\mathbb{S}^2$ e $\overline{\tau}([0, a]) \cap -\overline{\tau}([0, a]) = \emptyset$. □

Proposição 2.5. *O paraboloíde elíptico N, que é o conjunto dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação $z = x^2 + y^2$, não possui skew loops de classe C^2.*

Prova.

Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{N}$ um skew loop de classe C^2. A fórmula que dá a curvatura de uma superfície que é gráfico de uma função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é

$$K = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2},$$

veja [C1] pág 193. Como $h(x, y) = x^2 + y^2$, temos que $h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2 = 4$. Portanto o parabolóide elíptico $\mathbb{N}$ tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. Pela observação 1.3 γ tem curvatura não nula em todos os pontos, logo podemos utilizar o lema 2.4. Portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ é um laço de classe C^2 com

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \overline{\gamma}(t)| &< \varepsilon \ , \\ |\gamma'(t) - \overline{\gamma}'(t)| &< \varepsilon \ , \\ |\gamma''(t) - \overline{\gamma}''(t)| &< \varepsilon \ , \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{S}^1$, $\overline{\gamma}$ será um skew loop.

Podemos aproximar a parábola $y = x^2$ pelas elipses $x^2 + \frac{(y-2r^2)^2}{4r^2} = r^2$ fazendo r tender a infinito. Podemos também aproximar o paraboloíde $z = x^2 + y^2$ por elipsóides dados por 2.7(veja figura 2.2).A idéia é contruir um laço que esteja num elipsóide e seja ε-próximo de γ na topologia C^2 de Whitney. Daí esse laço seria um skew loop e teremos uma contradição.

Figura 2-2 Elipsóide no interior do paraboloíde

Dado $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$, seja E_r o elípsoide

$$x^2 + y^2 + (\frac{z}{2r} - r)^2 = r^2. \tag{2.7}$$

Este elípsoide também pode ser representado por

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{1}{4r^4}(z - 2r^2)^2 = 1$$

Considere o conjunto compacto $A_r = \{(x, y, z) \in E_r \ ; \ z \leq r\}$(ver figura 2.3).

.

Figura 2-3. Elipsóide E_r, $r > 1$ e A_r é a parte riscada.

Podemos escrever A_r como o gráfico da função $f : \overline{D}^2 \to \mathbb{R}$, onde $\overline{D}^2$ é o disco fechado de centro na origem de $\mathbb{R}^2$ e raio r. De (2.7) temos que

$$f(x, y) = 2r(r - \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$$

Como γ é um laço em $\mathbb{N}$ então $\gamma(t) = (x(t),\ y(t),\ x^2(t)\ + y^2(t))$. Se tomarmos $r > x^2(t)\ + y^2(t)\ \forall t$, então o laço

$$\gamma_r(t) = (x(t),\ y(t),\ 2r(r - \sqrt{r^2 - (x^2(t) + y^2(t))})$$

é um laço em A_r. Chamando $z(t) = 2r(r - \sqrt{r^2 - (x^2(t) + y^2(t))}$, obtemos

$$x^2(t) + y^2(t) + (\frac{z(t)}{2r} - r)^2 = r^2.$$

Ou seja,

$$x^2(t) + y^2(t) + \frac{z^2(t)}{4r^2} - z(t) = 0.$$

Fazendo $r \to \infty$ na igualdade acima, chegamos

$$\begin{aligned} z(t) &\to x^2(t) + y^2(t), \\ z'(t) &\to (x^2(t) + y^2(t))', \\ z''(t) &\to (x^2(t) + y^2(t))''. \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{S}^1$. Isto significa que

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma_r(t)| &< \varepsilon\ , \\ |\gamma'(t) - \gamma_r'(t)| &< \varepsilon\ , \\ |\gamma''(t) - \gamma_r''(t)| &< \varepsilon\ , \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{S}^1$ sendo r suficientemente grande. Portanto a partir de certo valor de r, γ_r passa a ser um skew loop de classe C^2 no elipsóide E_r, o que é um aburdo. $\square$

Proposição 2.6 *Paraboloídes elípticos não tem skew loops de classe C^2.*
Prova.

Seja $\mathbb{M}$ um paraboloíde elíptico em $\mathbb{R}^3$. Sabemos que existe um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^3$ onde $\mathbb{M}$ é o conjunto dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Seja $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{M}$ um skew loop de classe C^2. Considere o difeomorfismo $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}$ dado por $F(x, y, z) = (\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y, z)$. Assim teremos que

$$F(\gamma(t)) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (\frac{1}{a}\gamma_1(t), \frac{1}{b}\gamma_2(t), \gamma_3(t)).$$

Pela proposição 1.1 $F(\gamma(t))$ será uma skew loop de classe C^2 em $\mathbb{N}$. Isto é uma contradição pela proposição 2.5. Portanto nos paraboloídes elípticos não temos skew loops de classe C^2. $\square$

2.3 Hiperboloíde de duas folhas não têm skew loops

Sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $Q{:}\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma bilinear simétrica dada por

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3. \tag{2.8}$$

Se $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a forma quádratica associada a Q é portanto

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x^2 + y^2 - z^2. \tag{2.9}$$

Considere

$$\begin{aligned} \Sigma \quad &: \quad = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1, \ z > 0\}, \\ \overline{\Sigma} \quad &: \quad = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1\}. \end{aligned}$$

Σ é uma componente conexa do hiperboloíde de duas folhas dado por $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -1$ e e $\overline{\Sigma}$ é um hiperbolóide de uma folha (veja figura 2.4).

Lema 2.7. *Seja $\sigma(t)$ uma curva em Σ(ou $\overline{\Sigma}$) então $Q(\sigma(t), \sigma'(t)) = 0$ para todo t.*
Prova.

Seja $\sigma(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ uma curva em Σ (ou $\overline{\Sigma}$). De acordo com (2.9), temos
$$Q(\sigma(t), \sigma(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - x_3^2(t).$$
Como $\sigma'(t) = ({x_1}'(t), {x_2}'(t), {x_3}'(t))$, usando (2.8) obtemos
$$\begin{aligned} Q(\sigma(t), \sigma'(t)) &= x_1(t)\ {x_1}'(t) + x_2(t)\ {x_2}'(t) - x_3(t)\ {x_3}'(t) \\ &= \frac{(Q(\sigma(t), \sigma(t)))'}{2} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$
□

Sabemos que o vetor posição de um ponto de $\mathbb{S}^2$ é normal a $\mathbb{S}^2$ com o produto interno usual. Procuraremos fazer uma analogia com os pontos de Σ e $\overline{\Sigma}$. Se $p \in \Sigma$ e $\alpha(t)$ é uma curva em Σ com $\alpha(0) = p$ então o lema 2.7 diz que $Q(p, \alpha'(0)) = 0$, isto é, p é *Q-normal* a Σ, $\forall\ p \in \Sigma$. Analogamente se $p \in \overline{\Sigma}$, p é *Q-normal a* $\overline{\Sigma}$.

Vamos parametrizar Σ e $\overline{\Sigma}$ por $X : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ e $\overline{X} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ respectivamente, sendo
$$\begin{aligned} X\ (u, v) &= (\cos u \text{ senh} v,\ \text{sen} u \text{ senh} v,\ \text{cosh} v), \\ \overline{X}\ (u, v) &= (\cos u \text{ cosh} v,\ \text{sen} u \text{ cosh} v,\ \text{senh} v). \end{aligned} \tag{2.11}$$
Calculando X_u e X_v obtemos
$$\begin{aligned} X_u &= (\text{-sen} u \text{ senh} v,\ \cos u \text{ senh} v,\ 0), \\ X_v &= (\cos u \text{ cosh} v,\ \text{sen} u \text{ cosh} v,\ \text{senh} v). \end{aligned}$$
Logo $Q(X_u, X_u) = \text{senh}^2 v > 0$, $Q(X_v, X_v) = \text{cosh}^2 v + \text{senh}^2 v > 0$ e $Q(X_u, X_v) = 0$. Com isto Q induz uma métrica Riemanniana em Σ, que é conhecida como a métrica hiperbólica em Σ.

Seja $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \Sigma$ um laço regular. A *Q-tantrix* de σ é o laço uma laço $\tau_Q : \mathbb{S}^1 \to \overline{\Sigma}$ dado por
$$\tau_Q(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}}. \tag{2.12}$$

$\tau_Q(t)$ realmente pertence a $\overline{\Sigma}$, pois para todo $t \in \mathbb{S}^1$ temos
$$\begin{aligned} Q\ (\tau_Q(t), \tau_Q(t)) &= Q\left(\frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}},\ \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Observação 2.8. Seja σ um skew loop em Σ. De forma similar à tantrix usual τ(veja observação 1.5), a Q-tantrix τ_Q de σ é um mergulho de $\mathbb{S}^1$ em $\overline{\Sigma}$ e

$\tau_Q(\mathbb{S}^1) \cap \{-\tau_Q(\mathbb{S}^1)\} = \emptyset$, isto é, $\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ não intercepta a sua imagem antipodal em $\overline{\Sigma}$. De fato, a tantrix de σ é $\tau(t) = \frac{\sigma'(t)}{|\sigma'(t)|}$, logo para cada $t \in \mathbb{S}^1$ os vetores $\tau(t)$ e $\tau_Q(t)$ têm a mesma direção e sentido. Portanto τ_Q, que é um laço de $\overline{\Sigma}$, é a projeção radial de τ, que é um laço em $\mathbb{S}^2$. Sabemos que τ é um mergulho em $\mathbb{S}^2$, dai segue que sua Q-tantrix, τ_Q, é também um mergulho em $\overline{\Sigma}$, pois se não fosse teriamos $\tau_Q(t_1) = \tau_Q(t_2), t_1$ e $t_2 \in \mathbb{S}^1$ com $t_1 \neq t_2$, isto levaria $\tau(t_1)$ e $\tau(t_2)$ terem a mesma direção e sentido em $\mathbb{S}^2$. O hiperboloíde de uma follha $\overline{\Sigma}$ é simétrico com relação a origem, isto leva que $-\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ também é um laço de $\overline{\Sigma}$. Se $\tau_Q(\mathbb{S}^1) \cap -\tau_Q(\mathbb{S}^1) \neq \emptyset$, existem $s, t \in \mathbb{S}^1$onde $\tau_Q(s) = -\tau_Q(t)$. Isto leva a $\tau(s) = -\tau(t)$, o que não é verdade. Portanto $\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ é disjunto de $-\tau_Q(\mathbb{S}^1)$.

Vamos mostrar que $(\overline{\Sigma}, Q)$ é uma variedade semi-riemanniana. Uma *variedade semi-riemanniana* $(\mathbb{M}, b)$ é uma variedade diferenciável $\mathbb{M}$ com uma forma bilinear simétrica não degenerada b, sendo que $b : T_p\mathbb{M}$ x $T_p\mathbb{M} \to \mathbb{R}$, para cada $p \in \mathbb{M}$. Se b é definida positiva então (M, b) é uma variedade riemanniana.

Uma forma bilinear simétrica $b : T_p\mathbb{M}$ x $T_p\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ é *não degenerada* se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in T_p\mathbb{M}$ implica que $v = 0$. Uma forma bilinear simétrica de $T_p\mathbb{M}$ x $T_p\mathbb{M}$ em $\mathbb{R}$ é não degenerada se, e somente se, a matriz relativa a uma base(e portanto a qualquer base) é inversível (veja [O1] , lema 19 pág 47).

Calculando $\overline{X}_u$ e $\overline{X}_v$ em (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \overline{X}_u &= (-\text{sen}u \cosh v,\ \cos u \cosh v,\ 0) \\ \overline{X}_v &= (\cos u\ \text{senh}v,\ \text{sen}u\ \text{senh}v,\ \cosh v) \end{aligned}$$

Seja e^+ e e^- definidos por

$$e^+ = \frac{\overline{X}_u}{\cosh v} \quad , \quad e^- = \overline{X}_v. \tag{2.13}$$

Logo $\{e^+, e^-\}$ formam um referencial em $T_p\overline{\Sigma}$. Seja $Q : T_p\overline{\Sigma}$ x $T_p\overline{\Sigma} \to \mathbb{R}$, sendo Q a forma bilinear simétrica definida em (2.8). Temos que

$$Q(e^+, e^+) = 1 \quad , \quad Q(e^-, e^-) = -1 \quad , \quad Q(e^+, e^-) = 0. \tag{2.14}$$

A matriz de Q nesse referencial é

$$\begin{bmatrix} Q(e^+, e^+) & Q(e^+, e^-) \\ Q(e^-, e^+) & Q(e^-, e^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo esta matriz é inversível, Q é não degenerada. Portanto $(\overline{\Sigma}, Q)$ é uma variedade semi-riemanniana.

Numa variedade semi-riemanniana $(\mathbb{M}, Q)$ existe uma única conexão D, chamada conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{M}, Q)$ tal que

$$\begin{aligned} [V, W] &= D_V W - D_W V, \\ X(Q(V, W)) &= Q(D_X V, W) + Q(V, D_X W), \end{aligned}$$

para todo X, V, W campos vetoriais em $\mathbb{M}$ (Teorema 11 pág. 61de [O1]). $[V, W]$ denota o colchete entre os campos V e W. Se $\mathbb{M} = \mathbb{R}^3$ e a estrutura semi-riemanniana é dada pela forma bilinear Q, então $D = \nabla$, sendo ∇ a derivada covariante usual de $\mathbb{R}^3$(veja pág. 62 de [O1]).

Seja w a 1-forma de conexão associada ao referencial $\{e^+, \, e^-\}$ dada por

$$w(z) = Q(\nabla_z e^+, e^-) \quad , \quad \text{para todo } z \in T_p\overline{\Sigma}. \tag{2.15}$$

Escrevendo w em função de du e dv, utilizidando (2.15) e (2.14) obtemos

$$\begin{aligned}
w(z) &= w(\overline{X}_u)\, du + w(\overline{X}_v)\, dv \\
&= Q(\nabla_{\overline{X}_u} e^+, e^-)\, du + Q(\nabla_{\overline{X}_v} e^+, e^-)\, dv. \\
&= Q(\nabla_{\overline{X}_u} \frac{\overline{X}_u}{\cosh v}, \, \overline{X}_v)\, du + Q(\nabla_{\overline{X}_v} \frac{\overline{X}_u}{\cosh v}, \, \overline{X}_v)\, dv. \\
&= \frac{1}{\cosh v} Q(\nabla_{\overline{X}_u} \overline{X}_u, \, \overline{X}_v)\, du + \frac{1}{\cosh v} Q(\nabla_{\overline{X}_v} \overline{X}_u, \, \overline{X}_v)\, dv \qquad (2.16) \\
&\quad - \frac{\text{senh} v}{\cosh^2 v} Q(\overline{X}_u, \overline{X}_v).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{X}_u} \overline{X}_u &= \overline{X}_{uu} = (-\cos u \, \cosh v, \text{ -sen} u \, \cosh v, \, 0), \\
\nabla_{\overline{X}_v} \overline{X}_u &= \overline{X}_{uv} = (-\text{sen} u \, \text{senh} v, \, \cos u \, \text{senh} v, \, 0).
\end{aligned}$$

Usando que $Q(\overline{X}_u, \overline{X}_v) = 0$, podemos escrever (2.16) como

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{\cosh v}(-\cos^2 u \, \text{senh} v \cosh v - \text{sen}^2 u \text{senh} v \cosh v) du \\
&\quad + \frac{1}{\cosh v}(-\text{sen} u \, \cos u \, \text{senh}^2 v + \text{sen} u \, \cos u \, \text{senh}^2 v) dv \\
&= -\text{senh} v \, du \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
Q(e^+, e^+) &= 1 \quad \Rightarrow \quad Q(\nabla_z e^+, e^+) = 0, \\
Q(e^-, e^-) &= -1 \quad \Rightarrow \quad Q(\nabla_z e^-, e^-) = 0, \\
Q(e^+, e^-) &= 0 \quad \Rightarrow \quad Q(\nabla_z e^+, e^-) + Q(\nabla_z e^-, e^+) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, escrevendo $\nabla_z e^+$ e $\nabla_z e^-$ no referencial $\{e^+, e^-\}$ e usando (2.17) temos

$$\begin{aligned}
\nabla_z e^+ &= Q(\nabla_z e^+, e^+)\, e^+ - Q(\nabla_z e^+, e^-)\, e^- \qquad (2.18) \\
&= -w(z)\, e^-. \\
\nabla_z e^- &= Q(\nabla_z e^-, e^+)\, e^+ - Q(\nabla_z e^-, e^-)\, e^- \\
&= -w(z)\, e^+. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Lema 2.9. *Se um laço α em $\overline{\Sigma}$ é a Q-tantrix de um laço de classe C^2 em Σ, então $\int_\alpha w = 0$.*

Prova.

Seja $\alpha = \tau_Q$, a Q-tantrix de um laço regular σ em Σ. De acordo com (2.12) τ_Q é múltiplo de σ' e em (2.10) $Q(\sigma', \sigma) = 0$, isto implica que $Q(\tau_Q, \sigma) = 0$. Logo $\sigma(t)$ é um campo tangente em $\overline{\Sigma}$ sobre $\tau_{Q(t)}$, pois $\tau_{Q(t)}$ é Q-normal a $\overline{\Sigma}$. Podemos então expandir σ no referencial $\{e^+, e^-\}$ dado por (2.13). Logo

$$\sigma(t) = a(t)\, e^+ + b(t)\, e^-,$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções de classe C^2 de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$. Desde que $Q(\sigma(t),\sigma(t)) = -1$, então

$$Q(a(t)\ e^+ + b(t)\ e^-,\ a(t)\ e^+ + b(t)\ e^-) = -1.$$

Portanto $a^2(t) - b^2(t) = 1$. Chamando $a(t) = \text{senh}\theta(t)$ e $b(t) = \cosh\theta(t)$, podemos escrever

$$\sigma(t) = \text{senh}\theta(t)\ e^+ + \cosh\theta(t)\ e^-,$$

onde $\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Diferenciando em relação a t e usando (2.18),(2.19) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\tau'_Q}\sigma &= \cosh\theta\ \theta'\ e^+ + \text{senh}\theta\ \theta'\ e^- + \text{senh}\theta\ \nabla_{\tau'_Q} e^+ + \cosh\theta\ \nabla_{\tau'_Q} e^- \\ &= (\theta' - w(\tau'_Q))\ (\cosh\theta\ e^+ + \text{senh}\theta\ e^-). \end{aligned}$$

A derivada covariante ∇ é a componente tangente da derivada usual de $\mathbb{R}^3$

$$\nabla_{\tau'_Q(t)}\sigma(t) = (\sigma'(t))^T.$$

De 2.12 obtemos que

$$\sigma'(t) = \sqrt{Q(\sigma'(t),\sigma'(t))}\ \tau_Q(t),$$

logo

$$\nabla_{\tau'_Q(t)}\sigma(t) = (\sqrt{Q(\sigma'(t),\sigma'(t))}\ \tau_Q(t))^T.$$

Como $\tau_{Q(t)}$ é Q-normal a $\overline{\Sigma}$, temos

$$\nabla_{\tau'_Q(t)}\sigma(t) = 0$$

Portanto $\theta' \equiv w(\tau'_Q)$ sobre τ_Q. Mas a integral de θ' é nula sobre τ_Q pois θ é classe C^2 e τ_Q é um laço. Consequentemente $\int_{\tau_Q} w = 0$. $\square$

Proposição 2.10. *O Hiperbolóide de duas folhas N, que é o conjunto dos pontos (x,y,z) em R^3 que satisfazem a equação $x^2+y^2-z^2=-1$, não possui skew loops de classe C^2.*

Prova.

Sabemos que $\Sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\ ;\ Q(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -1,\ z>0\}$ é a componente conexa superior de $\mathbb{N}$. Logo basta provar que Σ não tem skew loop, pois se a outra componente conexa de $\mathbb{N}$ tiver um skew loop $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \gamma_3(t))$, a proposição 1.1 garante que $\overline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ -\gamma_3(t))$ será um skew loop, mas $\overline{\gamma}(t) \subset \Sigma$.

Vamos mostrar inicialmente que Σ tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. De acordo com [O2] pág 229,230, a curvatura Gaussiana de Σ é dada por

$$K(x,y,z) = \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\text{grad}\ g(x,y,z)\right|^2}$$

onde grad $g(x,y,z)$ é o gradiente da função $g : \Sigma \to \mathbb{R}$, sendo $g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. Fazendo os cálculos e substituindo z^2 por x^2+y^2+1 obtemos

$$K(x,y) = \frac{1}{(2x^2+2y^2+1)^2}.$$

Vamos supor que exista um skew loop $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \Sigma$ de classe C^2. Como Σ tem curvatura positiva, pela proposição 1.6 σ não é uma figura-oito. Sem muitas dificuldades vemos que $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ com $\varphi(x, y, z) = (x, y, 0)$ é um difeomorfismo. Logo $\varphi(\sigma)$ é uma curva regular no plano xy e não é uma figura-oito. Chamando $\varphi(\sigma) = c_k$, pelo teorema de Whitney temos que c_k é regularmente homotópico a um círculo unitário com k voltas em torno do centro da origem do plano xy.

Sabemos que σ e c_k são laços regulares. Vamos mostrar que existe uma homotopia regular em $\mathbb{R}^3$ entre σ e c_k. Seja $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$ e $c_k(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), 0)$. Considere

$$H : \mathbb{S}^1 \text{x } [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad H(t, r) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), r\ \sigma_3(t)).$$

Temos que $H(t, 1) = \sigma(t)$ e $H(t, 0) = c_k(t)$. Assim para r fixo, chegamos a

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, r) = (\sigma_1{}'(t), \sigma_2{}'(t), r\ \sigma_3{}'(t) \neq 0,$$

pois c_k é regular. Portanto σ e c_k são regularmente homotópicos, que na nossa notação escrevemos $\sigma \sim c_k$.

Sejam τ_Q e τ_k respectivamente as Q-tantrix de σ e c_k. Logo

$$\tau_Q(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sqrt{Q(\sigma'(t), \sigma'(t))}} \qquad , \qquad \tau_k(t) = \frac{c_k{}'(t)}{\sqrt{Q(c_k{}'(t), c_k{}'(t))}}.$$

Não há problemas na definição de τ_k, pois $Q(c_k{}', c_k{}') = (\sigma_1{}')^2 + (\sigma_2{}')^2 > 0$. Como c_k dá k voltas, então $\tau_k(t)$ dá k voltas em $\overline{\Sigma}$. Temos que τ_Q e τ_k são laços regulares em $\overline{\Sigma}$(ver lema 1.4). Vamos mostrar que τ_Q e τ_k são regularmente homotópicos em $\overline{\Sigma}$. Seja

$$F : \mathbb{S}^1 \text{x } [0, 1] \to \overline{\Sigma} \qquad , \qquad F(t, r) = \frac{\frac{\partial H}{\partial t}(t, r)}{\sqrt{Q(\frac{\partial H}{\partial t}(t, r), \frac{\partial H}{\partial t}(t, r))}}.$$

Temos que $F(t, 1) = \tau_Q(t)$ e $F(t, 0) = \tau_k(t)$. Como já vimos para cada r fixo $\frac{\partial H}{\partial t}(t, r)$ é um laço regular.e

$$Q(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}) = (\sigma_1{}')^2 + (\sigma_2{}')^2 - r^2(\ \sigma_3{}')^2 > 0,$$

pois $(\sigma_1{}')^2 + (\sigma_2{}')^2 - (\sigma_3{}')^2 > 0$. Portanto $\tau_Q \sim \tau_k$.

Pela observação 2.8 τ_Q é um mergulho em $\overline{\Sigma}$, isto leva que k=1. Sendo τ_Q disjunto da sua imagem antipodal, significa que $-\tau_Q(\mathbb{S}^1) \cup \tau_Q(\mathbb{S}^1)$ são bordo de um anel $\Omega \subset \overline{\Sigma}$, cujo bordo é de classe C^1.(Ver figura 2.5)
Usando o teorema de Stokes e o lema 2.9, obtemos

$$\int_\Omega dw = \int_{\partial\Omega} w = 0.$$

Por (2.17) $w = -$senh$v\ du$, logo $dw =$cosh$v\ dudv$. Assim dw é uma 2-forma que não se anula em Ω. Como a integral de dw é nula então temos uma contradição. Concluimos que o hiperboloíde $\mathbb{N}$ não têm skew loops de classe C^2. $\square$

.

Figura 2-5. $\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ e $-\tau_Q(\mathbb{S}^1)$ em $\overline{\Sigma}$.

Proposição 2.11 *Hiperbolóide de duas folhas não tem skew loops de classe C^2.*
Prova.

Seja $\mathbb{M}$ um hiperbolóide de duas folhas em $\mathbb{R}^3$. Sabemos que existe um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^3$ onde $\mathbb{M}$ é o conjunto dos pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que satisfazem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Seja $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{M}$ um skew loop de classe C^2. Considere o difeomorfismo $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{N}$ dado por $F(x, y, z) = (\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y, \frac{1}{c}z)$. Assim teremos que

$$F(\gamma(t)) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = (\frac{1}{a}\gamma_1(t), \frac{1}{b}\gamma_2(t), \frac{1}{c}\gamma_3(t)).$$

Pela proposição 1.1 $F(\gamma(t))$ será um skew loop de classe C^2 em $\mathbb{N}$. Isto é uma contradição pela proposição 2.10. Portanto nos hiperbolóides de duas folhas não temos skew loops de classe C^2. $\square$

2.4 Quádricas com pelo menos um ponto de curvatura positiva não têm skew loops

Com o descrito nas seções 2.1, 2.2 e 2.3 já temos condições de demonstrar (1) $\Rightarrow$ (2) no Teorema A.

Teorema A. *Seja M uma variedade conexa de dimensão 2 e $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica de classe C^2. Suponha que $\mathbb{M}$ tenha um ponto de curvatura Gaussiana positiva. Então são equivalentes:*

(1) *$F(\mathbb{M})$ é parte de uma superfície quádrica.*

(2) *$F(\mathbb{M})$ não contém um skew loop de classe C^2.*

Prova (1) $\Rightarrow$ (2)

$F(\mathbb{M})$ tem um ponto de curvatura positiva, pois $\mathbb{M}$ tem um ponto de curvatura positiva e $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica. Como $F(\mathbb{M})$ é parte de uma superfície quádrica*,* $F(\mathbb{M})$ não poder ser parte de:

-um cilindro ou cone (estas superfícies tem curvatura Gaussiana igual a zero em todos os pontos).

-um parabolóide hiperbólico ou hiperbolóide de uma folha(essas superfícies são superfícies regradas e de acordo com [C1] pág. 228 a curvatura Gaussiana é menor ou igual a zero em todos os pontos).

Logo $F(\mathbb{M})$ poderá ser parte de um elípsoide, de um parabolóide elíptico ou de um hiperbolóide de duas folhas. As proposições 2.3, 2.6 e 2.11 afirmam respectivamente que elípsoide, paraboloíde elíptico e hiperboloíde de duas folhas não têm skew loop de classe C^2. Portanto (1) $\Rightarrow$ (2). $\square$

3 A Existência de skew loops em cilindros convexos assimétricos

Seja $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um laço regular de classe C^k. Dizemos que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é um *oval* se $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é bordo de uma região convexa de $\mathbb{R}^2$. Definimos o oval $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ como (centralmente) *simétrico* quando $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é invariante pela reflexão relativa a um ponto de $\mathbb{R}^2$, isto é, a reflexão de qualquer ponto de $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ sobre um ponto fixo de $\mathbb{R}^2$ é também um ponto de $\Gamma(\mathbb{S}^1)$. Caso contrário, dizemos que o oval $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é *assimétrico.* Se Γ for de classe C^2 e tiver curvatura não nula em todos os pontos o oval $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é chamado de *estritamente convexo.* Como exemplo de ovais estritamente convexos temos os círculos e a elipses. De acordo com o lema 2, que veremos mais adiante, o traço do laço abaixo , cuja parametrização é

$$\gamma(t) = (-\cos(t) - \frac{1}{20}\cos(4t) + \frac{1}{10}\cos(2t), sen(t) + \frac{1}{10}sen(2t) + \frac{1}{20}sen(4t))$$

é um oval estritamente convexo assimétrico(ver figura 3.1).

Figura 3-1. Traço da curva $\gamma(t)$ é um oval assimétrico.

O resultado mais importante desta seção é a proposição abaixo.

Proposição 3.1. *Considere um cilindro reto sobre um laço regular Γ de classe C^2, $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é um oval estritamente convexo assimétrico. Então esse cilindro contém um skew loop de classe C^2 com curvatura não nula em todos os pontos.*

Para provar a proposição acima vamos definir parametrização suporte e parte par e parte impar de função. Entre essas definições demostraremos três lemas.

O primeiro, lema 3.2, diz que um laço $\Gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ com oval $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ estritamente convexo tem a norma da velocidade da parametrização suporte sempre diferente de zero. Além disso mostra a equivalência entre $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ ser simétrico e a norma da parametrização suporte ser π-periódica. O segundo lema, 3.3, mostra como construir um skew loop em um cilindro reto sobre um laço regular $\Gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é um oval estritamente convexo. Esta construção depende fundamentalmente da existência de uma função altura z, onde a parte par e a parte ímpar da sua derivada juntamente com a parte par e parte ímpar da velocidade da norma da parametrização suporte satisfazem certas condições. O terceiro lema, 3.4, exibe uma maneira de conseguir a parte par da derivada da função altura.

Seja $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um laço regular, de classe C^2 e $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ um oval estritamente convexo. Vamos mostrar que existe uma bijeção n que associa a cada ponto de $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ o seu vetor unitário normal em $\mathbb{S}^1$. Podemos reparametrizar Γ pelo comprimento de arco. Logo o número de voltas que vetor unitário tangente $t(s)$ dá em S^1 é $\pm$ 1(veja [C1] Teorema 2 pág 476) . Como o vetor unitário tangente percorre todo $\mathbb{S}^1$, o mesmo é válido para o vetor unitário normal $n(s)$. Portanto n é sobrejetiva. Seja $\varphi(s)$ o ângulo orientado que $t(s)$ faz com a parte positiva do eixo x. Temos que $\varphi(s)$ é de classe C^1 e podemos escrever

$$\begin{aligned} t(s) &= (cos\varphi(s), sen\varphi(s)), \\ n(s) &= (-sen\varphi(s), cos\varphi(s)), \\ t'(s) &= \varphi'(s)(-sen\varphi(s), cos\varphi(s)) \end{aligned}$$

Como

$$t'(s) = k(s)n(s) \quad \Rightarrow \quad k(s) = < t'(s), n(s) > = \varphi'(s)$$

Como a curvatura de Γ é não nula em todos os pontos, podemos supor $k(s) > 0$ ou $k(s) < 0$ para todo s. Supondo $k(s) > 0$, temos que $\varphi'(s) > 0$, assim φ é uma função estritamente crescente e portando injetiva. Portanto $n(s)$ é injetiva. Sendo $|n(s)| = 1$, $n(s)$ é o vetor unitário normal. Se $\varphi'(s) < 0$ o resultado é análogo. Portanto temos uma bijeção $n : \Gamma(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$, ou seja existe $n^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{S}^1)$.

A *parametrização suporte* de Γ é definida como a função $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\gamma(t) = n^{-1}(e^{it}) \tag{3.1}$$

Assim ao exigirmos que Γ seja de classe C^2 temos que γ é de classe C^1.

Lema 3.2. *Seja $\Gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um laço regular, de classe C^2 e $\Gamma(S^1)$ um oval estritamente convexo. Considere $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização suporte de Γ, então $v(t) = |\gamma'(t)| \neq 0$ para todo $t \in S^1$. Além disso $\Gamma(S^1)$ é simétrico se, e somente se, v é π-peridódica.*

Prova.

Inicialmente vamos definir o produto interno $< z, w >$ onde z e w são números complexos. Este produto interno é definido como em $\mathbb{R}^2$, ou seja $z = a + bi = (a, b)$ e $w = c + di = (c, d)$ temos que $< z, w > = ac + bd$.

Definimos uma função suporte de Γ por $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(t) = \ < e^{it}, \gamma(t) > . \tag{3.2}$$

Fazendo a expansão ortonormal de γ na base ortonormal $\{e^{it}, ie^{it}\}$, temos

$$\gamma(t) = < e^{it}, \gamma(t) > \ e^{it} \ + \ < ie^{it}, \gamma(t) > \ ie^{it}.$$

Seja a função $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu(t) = < ie^{it}, \gamma(t) >$, logo obtemos

$$\gamma(t) = (h(t) + i\mu(t))e^{it}. \tag{3.3}$$

Como $\gamma(t) = n^{-1}(e^{it})$, temos que $n_{(\gamma(t))} = e^{it}$. Assim e^{it} é o vetor normal no ponto $\gamma(t)$ de $\Gamma(\mathbb{S}^1)$. Isto significa que a componente de $\gamma'(t)$ na base $\{e^{it}, ie^{it}\}$ é um múltiplo de ie^{it}, que sabemos que é $\upsilon(t)$. Logo teremos

$$\gamma'(t) = \upsilon(t)ie^{it} \tag{3.4}$$

Agora, diferenciando (3.3) temos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (h'(t) + i\mu'(t))e^{it} \quad + \quad (h(t) + i\mu(t))ie^{it} \\ &= (h'(t) - \mu(t))e^{it} \quad + \quad (h(t) + \mu'(t))ie^{it} \end{aligned}$$

Comparando com (3.4) temos $\mu = h'$ e

$$\gamma(t) = (h(t) + ih'(t))e^{it} \tag{3.5}$$

Como γ é de classe C^1, temos que h é de classe C^2. Agora diferenciando (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (h'(t) + ih''(t))e^{it} \quad + \quad (h(t) + ih'(t))ie^{it} \\ &= (h''(t) + h(t))ie^{it}, \end{aligned}$$

Comparando esse resultado com (3.4) chegamos a

$$\upsilon = h'' + h$$

A fórmula que dá a curvatura de uma curva plana α de classe C^2, onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, t um parâmetro qualquer é dada por

$$k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

veja [C1] pág 30. Considerando $\mathbb{R}^2$ como o conjunto dos números complexos, podemos deduzir da fórmula acima que a curvatura da curva γ é

$$k(t) = \frac{< \gamma'', i\gamma' >}{|\gamma'(t)|^3}.$$

Supondo Γ de classe C^3 , sabemos que γ é de classe C^2 e assim poderemos diferenciar (3.4) e teremos

$$\gamma''(t) = \upsilon'(t)ie^{it} \ - \ \upsilon(t)e^{it}.$$

Agora, calculando a curvatura temos

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{< \upsilon'(t)ie^{it} \ - \ \upsilon(t)e^{it} \ , \ -\upsilon(t)e^{it} >}{| \ \upsilon \ |^3}, \\ &= \frac{| \ \upsilon \ |^2}{| \ \upsilon \ |^3} = \frac{1}{\upsilon}. \end{aligned}$$

Como $k(t) \neq 0 \Rightarrow \upsilon(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$ quando Γ é de classe C^3.

A hipótese do nosso lema diz que Γ é de classe C^2. Sendo $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{R}^2$ variedades de classe C^3, então o conjunto das aplicações $C^3(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ é um conjunto denso no conjunto das aplicações $C^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ na topologia C^2 de Whitney (veja [H] pág 49 Teorema 2). Logo podemos aproximar Γ em $C^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ por uma sequência Γ_l em C^3 $(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^3)$ na topologia C^2 de Whitney. A parametrização suporte de cada Γ_l é de classe C^2, logo teremos $k_l = \frac{1}{\upsilon_l}$. A curvatura k_l depende de ${\gamma_l}''$ e ${\gamma_l}'$, como estamos na topologia C^2 de Whitney temos que k_l converge uniformemente para k . Analogamente concluímos que υ_l converge uniformemente para υ.. Sendo $k_l = \frac{1}{\upsilon_l}$, tomando o limite temos $k = \frac{1}{\upsilon}$, daí $\upsilon(t) = \| \gamma'(t) \| \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Seja $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ simétrico, vamos provar que υ é π-periódica. Por ser $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ simétrico existe um ponto de $\mathbb{R}^2$ onde Γ é invariante por uma reflexão. Podemos considerar esse ponto como a origem num novo sistema de coordenadas. Reparametrizando Γ pelo comprimento de arco temos $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$. O vetor unitário normal no ponto $(x(s), y(s))$ é $(-y'(s), x'(s))$. Já o vetor unitário normal no ponto $(-x(s), -y(s))$ é $(y'(s), -x'(s))$. Chamando $e^{it} = (-y'(s), x'(s))$, onde t depende de s temos

$$\begin{aligned} n^{-1}(e^{it}) &= (x(s), y(s)), \\ -n^{-1}(-e^{it}) &= -(-x(s), -y(s)) = (x(s), y(s)). \end{aligned}$$

Logo

$$n^{-1}(-e^{it}) = -n^{-1}(e^{it})$$

Agora temos que

$$\begin{aligned} \gamma(t+\pi) &= n^{-1}(e^{i(t+\pi)}) \\ &= n^{-1}(-e^{it}) \\ &= -n^{-1}(e^{it}) \\ &= -\gamma(t) \end{aligned}$$

Sendo $h(t) = < e^{it}, \gamma(t) >$, temos que

$$\begin{aligned} h(t+\pi) &= < e^{i(t+\pi)}, \gamma(t+\pi) > \\ &= < -e^{it}, -\gamma(t) > \\ &= h(t) \end{aligned}$$

Portanto h é π-periódica e sendo $\upsilon = h' + h''$ obtemos que υ é π-periódica .

Reciprocamente seja υ π-periódica, vamos mostrar que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é simétrico. Expressando υ como uma série de Fourier temos

$$\upsilon(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2kt \ + b_k \mathrm{sen} 2kt)$$

Sendo h 2π-periódica , a série de Fourier nos dá

$$\begin{aligned}
h(t) &= c_0 + c_1 \cos t + d_1 \mathrm{sen} t + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos kt \ + \ d_k \mathrm{sen} kt), \\
h''(t) &= -c_1 \cos t - d_1 sent - \sum_{k=2}^{\infty} k^2 (c_k \cos kt \ + d_k \mathrm{sen} kt), \\
h(t) + h''(t) &= c_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(1-k^2)(c_k \cos kt \ + d_k \mathrm{sen} kt).
\end{aligned}$$

Como $h(t) + h''(t) = v(t)$, pela unicidade da série de Fourier chegamos a $c_k = d_k = 0$ para $k = 3, 5, 7....$ Poderemos escrever então

$$h(t) = c_0 + c_1 \cos t + d_1 \mathrm{sen} t + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos 2kt \ + d_k \mathrm{sen} 2kt)$$

Seja $w = (c_1, d_1)$ e considere $\widetilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widetilde{h}(t) = h(t) - < e^{it}, w >$. Portanto

$$\widetilde{h}(t) = c_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(c_k \cos 2kt \ + d_k \mathrm{sen} 2kt),$$

logo $\widetilde{h}$ é π-periódica. Mas $\widetilde{h}(t)$ é a função suporte de $\widetilde{\Gamma}$ que é igual a $\Gamma - w$ e cuja parametrização suporte é $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - w$.

Para provar que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é simétrico basta mostrar que $\widetilde{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$ é simétrico. Em (3.5) trocando γ e h respectivamente por $\widetilde{\gamma}$ e $\widetilde{h}$ temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(t) &= (\widetilde{h}(t) + i\widetilde{h}'(t))e^{it}, \\
\widetilde{\gamma}(t+\pi) &= (\widetilde{h}(t+\pi) + i\widetilde{h}'(t+\pi))e^{i(t+\pi)}, \\
&= -\widetilde{\gamma}(t).
\end{aligned}$$

Logo quando $\widetilde{\gamma}(t)$ é um ponto de $\widetilde{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$ temos que $-\widetilde{\gamma}(t)$ é também um ponto de $\widetilde{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$. Asim $\widetilde{\Gamma}(\mathbb{S}^1)$ é simétrico. $\square$

A *parte par* e a *parte ímpar* de uma função $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas respectivamente por

$$\begin{aligned}
f_+(t) &= \frac{f(t) \ + \ f(t+\pi)}{2} \\
f_-(t) &= \frac{f(t) \ - \ f(t+\pi)}{2}
\end{aligned}$$

Para qualquer função $f : S^1 \longrightarrow \mathbf{R}$ temos as identidades abaixo.

$$f(t) = f_+(t) + f_-(t) \tag{3.6}$$
$$f(t+\pi) = f_+(t) - f_-(t) \tag{3.7}$$
$$f_+(t+\pi) = f_+(t) \tag{3.8}$$
$$f_-(t+\pi) = -f_-(t) \tag{3.9}$$

Vamos identificar novamente $\mathbb{S}^1$ com $\mathbb{R}/\mathbf{2\pi}$ via $e^{it} \longleftrightarrow t$. Usando essas notações, o lema abaixo dá uma simples condição para obtermos um skew loop num cilindro reto sobre um laço regular $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2, sendo $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ um oval estritamente convexo.

Lema 3.3. *Seja $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um laço regular, de classe C^2 e $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ um oval estritamente convexo. Considere $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a parametrização suporte de Γ, $\upsilon(t) = \| \gamma'(t) \|$, $z : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Então $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + z(t)\mathbf{k}$ é um skew loop se, e somente se , para todo $t \in \mathbb{R}$ nós tivermos:*

$$\upsilon_+(t)z_+'(t) - \upsilon_-(t)z_-'(t) \neq 0$$

Além disso, se z é classe C^2, então $\widetilde{\gamma}$ tem curvatura não nula em todos os pontos.

Prova.

Por (3.4) temos que $\gamma'(t) = \upsilon(t)ie^{it}$ e sem muitas dificuldades podemos provar a identidade $ie^{i\tau}$ x $\mathbf{k} = e^{i\tau}$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(t) \text{ x } \widetilde{\gamma}'(s) &= (\gamma'(t) + z'(t)\mathbf{k}) \text{ x } (\gamma'(s) + z'(s)\mathbf{k}) \\
&= \gamma'(t) \text{ x } \gamma'(s) + \gamma'(t) \text{ x } z'(s)\mathbf{k} + z'(t)\mathbf{k} \text{ x } \gamma'(s) \\
&= \gamma'(t) \text{ x } \gamma'(s) + (\gamma'(t)z'(s) - z'(t)\gamma'(s)) \text{ x } \mathbf{k} \\
&= \upsilon(t)ie^{it} \text{ x } \upsilon(s)ie^{is} + (\upsilon(t)ie^{it}z'(s) - \upsilon(s)ie^{is}z'(t)) \text{ x } \mathbf{k} \\
&= \upsilon(t)\upsilon(s)e^{it} \text{ x } e^{is} + \upsilon(t)z'(s)e^{it} - \upsilon(s)z'(t)e^{is} \\
&= \upsilon(t)\upsilon(s)sen(s-t)\mathbf{k} + \upsilon(t)z'(s)e^{it} - \upsilon(s)z'(t)e^{is} \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Para $\widetilde{\gamma}$ ser um skew loop devemos ter $\widetilde{\gamma}'(t)$ x $\widetilde{\gamma}'(s) \neq 0$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ com $s \neq t \bmod 2\pi$. A componte de $\mathbf{k}$ é nula se, e somente se, $s = (t+\pi) \bmod 2\pi$. Isto indica que devemos observar apenas esses termos em (3.10) para $\widetilde{\gamma}$ ser um skew loop. Assim $\widetilde{\gamma}$ será um skew loop se, e somente se,

$$\upsilon(t)z'(t+\pi)e^{it} - \upsilon(t+\pi)z'(t)e^{i(t+\pi)} \neq 0.$$

O que é equivalente a

$$\upsilon(t)z'(t+\pi) + \upsilon(t+\pi)z'(t) \neq 0.$$

Aplicando as identidades (3.6) e (3.7) para υ e z' e suprimindo a variável t obtemos

$$(\upsilon_+ + \upsilon_-)(z_+' - z_-') + (\upsilon_+ - \upsilon_-)(z_+' - z_-') \neq 0.$$

Multiplicando e eliminando algumas parcelas chegamos a

$$\upsilon_+(t)z_+'(t) - \upsilon_-(t)z_-'(t) \neq 0.$$

Finalmente, sendo γ estritamente convexo temos que a curvatura de k_γ é diferente de zero para todo $t \in \mathbb{R}$. Dai temos que $|\gamma''(t)| \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois $k_\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma''(t) = 0$. Então se z é de classe C^2 temos

$$\widetilde{\gamma}''(t) = \gamma''(t) + z''(t)\mathbf{k}$$

Como $\gamma''(t)$ e $z''(t)\mathbf{k}$ são linearmente independentes temos $\widetilde{\gamma}''(t) \neq 0$ o que leva a $\widetilde{\gamma}$ ter curvatura não nula em todos os pontos. $\square$

Lema 3.4. *Sejam $f, g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas que são par e ímpar respectivamente. Suponha que g não seja a função identicamente nula e que $f(t) + g(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Então existe uma função contínua $\mu : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$(1) \int_{S^1} \mu = 0, \qquad (2)\ \mu \text{ é par}, \qquad (3)\ f\mu > -g^2.$$

Prova.

Vamos identificar $\mathbb{S}^1$ como $\mathbb{R}/\mathbf{2\pi}$ como usualmente. Para provar o lema nós vamos construir uma função contínua $\mu : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ com

$$(1') \int_0^\pi \mu = 0, \qquad (2')\ \mu(t) = \mu(0), \qquad (3')\ f\mu > -g^2 \text{ em } [0, \pi].$$

Uma extensão par para todo $\mathbb{S}^1$ satisfaz as propriedades $(1), (2)$ e (3). Vamos a procura dessa μ.

Para começar vamos mostrar que que $f(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$. Vamos supor que exista $t_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(t_0) \leq 0$. Como f é par segue-se que $f(t_0) = f(-t_0) \leq 0$. Sendo $f(t) + g(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{S}^1$ chegamos a $f(t_0) + g(t_0) > 0$ e $f(-t_0) + g(-t_0) > 0$. Logo $g(t_0)$ e $g(-t_0)$ são números positivos, o que é um absurdo pois g é ímpar.

Seja

$$\tau := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{g^2(t)}{1 + f(t)} \right) dt.$$

Como g não é identicamente nula e g é ímpar temos $\tau > 0$. Usando novamente que g é ímpar e 2π-periódica temos $g(0) = g(\pi) = 0$. Podemos então definir $\mu : [0, \pi] \longrightarrow \mathbf{R}$ como

$$\mu(t) = \tau - \frac{g(t)^2}{1 + f(t)}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mu(t)dt &= \tau(\pi - 0) - \pi\tau = 0, \\
\mu(0) &= \mu(\pi) = \tau, \\
f(t)\mu(t) &= f(t)\tau - \frac{f(t)}{1 + f(t)} g(t)^2 > -\left(\frac{f(t)}{1 + f(t)} \right) g^2(t) > -g^2(t).
\end{aligned}$$

Logo $\mu : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $(1'), (2')$, $(3')$ e o lema está provado. $\square$

Tendo feito as demonstrações dos lemas 3.2, 3.3, e 3.4, vamos enunciar novamente e demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Proposição 3.1. *Considere um cilindro reto sobre um laço regular Γ de classe C^2, $\Gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é um oval estritamente convexo assimétrico. Então esse cilindro contém um skew loop de classe C^2 com curvatura não nula em todos os pontos.*

Prova.

Pelo lema 3.3 é suficiente produzir uma função altura $z : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\upsilon_+(t){z_+}'(t) > \upsilon_-(t){z_-}'(t), \tag{3.11}$$

onde υ é a velocidade da parametrização suporte de Γ. Pelo lema 3.2, como $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ é assimétrico temos que $\upsilon : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ não é $\pi-$periódica. Logo existe $t_0 \in \mathbb{S}^1$ onde $\upsilon(t_0) \neq \upsilon(t_0 + \pi)$. Isto torna a função υ_- uma função que não é identicamente nula, pois $\upsilon_- = \frac{\upsilon(t)-\upsilon(t+\pi)}{2}$. Mais ainda υ_- é contínua e ímpar.

Seja $z_- : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$z_-(s) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \upsilon_-(t)(t)dt \quad - \quad \int_0^{s} \upsilon_-(t)(t)dt. \tag{3.12}$$

Vamos calcular $z_-(s+\pi)$ e mostrar que z_- é uma função ímpar não trivial.

$$\begin{aligned} z_-(s+\pi) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \upsilon_-(t)dt \quad - \quad \int_0^{s+\pi} \upsilon_-(t)dt, \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \upsilon_-(t)dt \quad - \quad \int_0^{\pi} \upsilon_-(t)dt - \quad \int_{\pi}^{\pi+s} \upsilon_-(t)dt, \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \upsilon_-(t)dt \quad + \quad \int_0^{s} \upsilon_-(t)dt, \end{aligned}$$

pois υ_- sendo ímpar e contínua

$$\int_{\pi}^{\pi+s} \upsilon_-(t)dt = -\int_0^{s} \upsilon_-(t)dt.$$

Portanto

$$z_-(s+\pi) = -z_-(s)$$

Além disso z_- não é uma função identicamente nula, pois se fosse tomando $s = \pi$ em (3.12) teríamos $\int_0^{\pi} \upsilon_-(t)dt = 0$, o que é um absurdo pois υ_- é ímpar e contínua e não é identicamente nula.

Como $z_-'(t) = -\upsilon_-(t)$, resolver a questão em (3.11) é equivalente a encontrar ${z_+}'$ que satisfaz a desigualdade abaixo.

$$\upsilon_+(t){z_+}'(t) > -(\upsilon_-(t))^2$$

Mas encontrar essa função ${z_+}'$ é um convite para a utilização do lema 3.4. Chamando $f = \upsilon_+$, $g = \upsilon_-$, vamos confirmar as hipóteses dessa lema. Temos que υ_+ é uma função par e contínua de S^1 em $\mathbb{R}$. Note que υ_- é uma função contínua ímpar não trivial de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}$. Ainda $\upsilon_+ + \upsilon_- = \upsilon$ que é maior que zero pelo lema 3.2. A proposição então está provada tomando $z_+' = \mu$ como no lema 3.4.

$\square$

4 Superfícies com pelo menos um ponto de curvatura positiva e sem skew loops são quádricas

Nessa seção provaremos a implicação (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema A, ou seja se $\mathbb{M}$ é uma variedade conexa de dimensão 2 , $F : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica de classe C^2 , $\mathbb{M}$ tem um ponto de curvatura Gaussiana positiva e $F(\mathbb{M})$ não contém skew loops então $F(\mathbb{M})$ é parte de uma superfície quádrica. A prova é baseada no lema 4.1 e no Teorema de Blaschke. O lema 4.1 utiliza a existência de skew loops em cilindros convexos assimétricos para mostrar que a interseção de um plano com uma superfície sem skew loops é simétrica. O Teorema de Blaschke diz que a vizinhança de um ponto $p \in \partial\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo convexo, é parte de uma quádrica quando a interseção de um plano com o corpo $\partial\mathbb{K}$ é simétrica.

Lema 4.1. *Seja $\mathbb{S}$ uma superfície de classe C^2 mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e sem skew loops. Suponha que exista um plano $\mathbb{H}$ que corta $\mathbb{S}$ transversalmente tal que $\Gamma = \mathbb{S} \cap \mathbb{H}$ é uma curva estritamente convexa e a curvatura Gaussiana de $\mathbb{S}$ positiva em Γ. Então Γ é (centralmente) simétrico.*
Prova.

Sem perda de generalidade podemos supor um sistema de coordenadas xyz em $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{H}$ seja o plano $z = 0$. Mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que
1) A componente conexa do conjunto

$$\mathbb{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S};\ \ |z| < \varepsilon\}$$

que contém Γ é um anel com curvatura positiva. A partir de agora identificaremos por S' esta componente conexa.
2) Seja $\mathbb{H}_z$ o plano paralelo ao plano $z = 0$ com $|z| < \varepsilon$ na altura z. Então $\Gamma_z = \mathbb{H}_z \cap \mathbb{S}'$ é um laço regular, simples, de classe C^2 e com curvatura não nula. Portanto é uma curva estritamente convexa (veja pág. 478 de [C1]).

Seja p um ponto de $\Gamma = \mathbb{S} \cap \mathbb{H}$. Como $\mathbb{H}$ é transversal a $\mathbb{S}$, temos que $\mathbb{H} \neq T_p\mathbb{S}$. Sendo o vetor normal de $\mathbb{H} = \pm\, e_3$, $e_3 = (0, 0, 1)$, temos que $N_p \neq \pm\, e_3$, onde N_p é o vetor normal de $T_p\mathbb{S}$. Como $\mathbb{S}$ é uma superfície de classe C^2 então a aplicação normal é de classe C^1. Isto garante que o vetor normal de $\mathbb{S}$ é diferente de $\pm\, e_3$ numa vizinhança de cada ponto $p \in \mathbb{S}$. Essas vizinhanças podem ser dadas por $V_p = C_p \cap \mathbb{S}$, onde C_p é um cubo aberto de $\mathbb{R}^3$ cujo centro é $p \in \Gamma$ e o lado $2\varepsilon_p$. Por Γ ser um conjunto compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue dada uma cobertura de Γ então Γ tem uma subcobertura finita. Seja $V_{p_1} \cup ... \cup V_{p_k}$ essa subcobertura e considere $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_{p_1}, ..., \varepsilon_{p_k}\}$. Como o vetor normal do plano $\mathbb{H}_z$ onde $-\varepsilon_1 < z < \varepsilon_1$, é também $\pm\, e_3$, temos que $\mathbb{H}_z$ é transversal a $\mathbb{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S};\, |z| < \varepsilon\}$, considerando $\varepsilon \leq \varepsilon_1$e por [C1] pág. 107 $\Gamma_z = \mathbb{H}_z \cap \mathbb{S}'$ é uma curva regular.

A função curvatura Gaussiana é contínua em $\mathbb{S}$ e sabemos que a curvatura Gaussiana é positiva em Γ. Usando o mesmo raciocínio anterior, consideramos $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\mathbb{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}; \mid z \mid < \varepsilon\}$, com $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ tem curvatura Gaussiana positiva.

Agora seja q um ponto interior de Γ. A função distância

$$d : \Gamma \to \mathbb{R} \quad , \quad d(t) = |\Gamma(t) - q|^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

assume um mínimo em Γ. Considere $\varepsilon_3 > 0$ esse mínimo e seja o eixo z a reta ortogonal ao plano xy passando por q. Novamente repetindo o processo anterior, temos que $\mathbb{S}' = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}; \mid z \mid < \varepsilon\}$, com $\varepsilon \leq \varepsilon_3$ não intercepta o eixo z.

Considere ε =min$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$.

Vamos mostrar que podemos considerar esse $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $\Gamma_z = \mathbb{H}_z \cap \mathbb{S}'$ com $-\varepsilon < z < \varepsilon$, é uma curva fechada. Caso não exista esse $\varepsilon > 0$, então teremos uma sequência de curvas abertas $\Gamma_{1/n}, n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, onde cada $\Gamma_{1/n}$ tem um ponto p_n tem um ponto pertencente ao seu bordo, onde p_n converge para um ponto p de Γ. Isto leva que existe uma vizinhança coordenada de p que não é homeomorfa a uma bola aberta de $\mathbb{R}^2$, pois para n suficientemente grande $p_n \notin \mathbb{S}'$, o que é um absurdo.

Provaremos agora que Γ_z é uma curva simples. Vamos supor que exista alguma Γ_z que tenha uma auto interseção num ponto p. Como os abertos de $\mathbb{S}$ podem ser dados pela interseção de bolas abertas de $\mathbb{R}^3$ com $\mathbb{S}$, uma vizinhança coordenada de p terá duas componentes conexas. O que é também um absurdo, pois $\mathbb{S}$ está mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Naturalmente Γ_z é de classe C^2 pois $\Gamma_z \subset \mathbb{S}'$.

De acordo com a observação 1.3 temos que Γ_z tem curvatura não nula em todos os pontos, pois $\mathbb{S}'$ tem curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos.

Pelo visto acima Γ_z é estritamente convexa. e $\mathbb{S}'$ é um anel transversal a H com $\partial\mathbb{S}' \cap \mathbb{H} = \emptyset$ (ver figura 4.1).

Figura 4-1. Anel $\mathbb{S}'$, plano $\mathbb{H}$ e a curva fechada Γ_z.

Seja C o cilindro perpendicular a $\mathbb{H}$ com base Γ. Considere uma vizinhança $\mathbb{A}$ aberta de Γ contida em C, $\mathbb{A}$ delimitada pelos planos $z = -\varepsilon$ e $z = \varepsilon$. Toda semireta partindo do eixo z paralela ao eixo plano xy intercepta $\mathbb{A}$ e $\mathbb{S}'$ somente uma vez. Isto é devido que Γ e Γ_z, $-\varepsilon < z < \varepsilon$, serem curvas planas convexas e que temos em cada nível z de A a curva Γ. Dai temos uma bijeção entre $\mathbb{A}$ e $\mathbb{S}'$, que leva os pontos das interseções das semiretas em $\mathbb{A}$ aos pontos de das interseções dessas semireta com $\mathbb{S}'$(veja figura 4.2).

Figura 4-2. Bijeção entre o anel $\mathbb{S}'$ e o cilindro $\mathbb{A}$.

Considere θ o ângulo que essas semiretas fazem com o eixo x, logo um ponto $a \in \mathbb{A}$ pode ser dado por $a = (\Gamma(\theta), z)$. A bijeção acima leva cada ponto $a \in \mathbb{A}$ no ponto $(\rho(\theta, z), z) \in \mathbb{S}'$. Essas semiretas também definem um campo unitário de vetores no bordo de $\mathbb{A}$ apontados para fora, $\upsilon(a)$, $a \in \mathbb{A}$, cuja direção é a mesma de cada semireta. Sendo a distância de um ponto $a \in \mathbb{A}$ ao eixo z igual a $\mid \Gamma(\theta) \mid$ e a distância da imagem de a pela bijeção acima $\mid \rho(\theta, z) \mid$, podemos escrever que um ponto de $\mathbb{S}'$ é da forma

$$(\Gamma(\theta), z) + (\mid \rho(\theta, z) \mid - \mid \Gamma(\theta) \mid)\upsilon(\Gamma(\theta), z),$$

Seja $g : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $g(\Gamma(\theta), z) = \mid \rho(\theta, z) \mid - \mid \Gamma(\theta) \mid$. Logo g é uma função de classe C^2 e todo ponto de $\mathbb{S}'$ é da forma $a + g(a)\upsilon(a)$, $a \in \mathbb{A}$.

Suponha agora que Γ não seja simétrica. A proposição 3.1 diz que C tem um skew loop $\gamma : \mathrm{S}^1 \to C$ com curvatura não nula. Dividindo a terceira componte de γ por um número suficientemente grande , chamando essa curva também de γ, temos que γ será um skew loop(proposição 1.1) e $\gamma(\mathbb{S}^1) \subset A$.

Colocamos $\gamma(t) = (\Gamma(\theta(t)), z(t))$ e para cada $c \leq 1$ definimos o laço

$$\gamma_c(t) = \gamma(t) + g(\Gamma(\theta(t)), cz(t))\upsilon(\gamma(t)). \tag{4.1}$$

Evidentemente quando $c = 1$, $\gamma_c(t)$ é um laço de $\mathbb{S}'$.

Seja $\mu_c : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{B}$ um aberto de $\mathbb{R}^3$, onde $\mu_c(x, y, z) = (x, y, cz)$. Afirmamos que para cada $c \leq 1$, o laço $\mu_c(\gamma_c(t))$ pertence a $\mathbb{S}'$. De fato, aplicando μ_c em (4.1) temos

$$\mu_c(\gamma_c(t)) = (\Gamma(\theta(t)), cz(t)) + g(\Gamma(\theta(t)), cz(t))v(\Gamma(\theta(t)), z(t)).$$

pois $g(\Gamma(\theta(t)), cz(t))v(\Gamma(\theta(t)), z(t))$ é um vetor paralelo ao eixo xy. Temos que $v(\Gamma(\theta(t)), z(t)) = v(\Gamma(\theta(t)), cz(t))$, pois o campo unitário normal só depende $\Gamma(\theta(t)$. Podemos escrever então

$$\mu_c(\gamma_c(t)) = (\Gamma(\theta(t)), cz(t)) + g(\Gamma(\theta(t)), cz(t))v(\Gamma(\theta(t)), cz(t)),$$

que é um laço de $\mathbb{S}'$.

Sabemos que g é uma função de classe C^2 e que

$$g(\Gamma(\theta(t)), 0) = \mid \rho(\theta, 0) \mid - \mid \Gamma(\theta) \mid = 0,$$

pois $\Gamma(\theta) = \rho(\theta, 0)$. Quando $c \to 0$ em (4.1) temos que $\gamma_c(t) \to \gamma(t)$, para cada t pertencente a $\mathbb{S}^1$.

Derivando (4.1) com relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_c'(t) &= \gamma'(t) + (\frac{\partial g}{\partial \theta}(\Gamma(\theta(t)), cz(t))\Gamma'(\theta(t) \\ &\quad + c\frac{\partial g}{\partial z}(\Gamma(\theta(t)), cz(t))z'(t))v(\gamma(t)) + g(\Gamma(\theta(t)), cz(t))\frac{d}{dt}(v(\gamma(t))) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto quando $c \to 0$ temos que $\gamma_c'(t) \to \gamma'(t)$ para cada t em S^1.

Vamos derivar (4.2) com relação a t e em seguida tomar o limite quando $c \to 0$. Logo já podemos omitir as últimas duas parcelas de (4.2), que claramente tende para zero após a derivação. Teremos então

$$\begin{aligned} \gamma_c''(t) &= \gamma''(t) + (\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\Gamma(\theta(t)), cz(t))\Gamma'(\theta(t)) \\ &\quad + c\frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial z}(\Gamma(\theta(t)), cz(t))z'(t))\Gamma'(\theta(t) + (\frac{\partial g}{\partial \theta}(\Gamma(\theta(t)), cz(t))\Gamma''(\theta(t) \end{aligned}$$

Portanto quando $c \to 0$ temos que $\gamma_c''(t) \to \gamma''(t)$ para cada t em S^1

Como $\gamma_c(t) \to \gamma(t)$, $\gamma'(t) \to \gamma'(t)$, $\gamma_c''(t) \to \gamma''(t)$ para cada t em S^1 pelo lema 2.4 para c suficientemente pequeno γ_c é um skew loop. Mas então $\mu_c(\gamma_c)$ será também um skew loop, o que é um absurdo pois $\mu_c(\gamma_c) \in \mathbb{S}'$. □

Um *corpo convexo* $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto compacto convexo que tem o interior não vazio. Nós dizemos que os planos P_1 e P_2 são ε-próximos se podem ser representados por equações lineares $< n_1, x >= h_1$ e $< n_2, x >= h_2$, com $\mid n_1 - n_2 \mid^2 + \mid h_1 - h_2 \mid^2 < \varepsilon$.

O teorena abaixo é de W. Blaschke e sua demonstração encontra-se em [B].

Teorema 7.2(Blaschke). *Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$ um corpo convexo tal que seu bordo, $\partial\mathbb{K}$, seja de classe C^2 numa vizinhança de um ponto $p \in \partial\mathbb{K}$. Suponha que* *planos suficientemente pertos de $T_p\partial\mathbb{K}$ intersectam $\partial\mathbb{K}$ numa curva centralmente simétrica. Então existe uma vizinhança de p em $\partial\mathbb{K}$ que é parte de uma quádrica.*

Com o descrito nos capítulos 1, 2, 3 e 4 já temos condições de demonstrar (2) $\Rightarrow$ (1) no Teorema A.

Teorema A. *Seja M uma variedade conexa de dimensão 2 e $F : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão isométrica de classe C^2. Suponha que $\mathbb{M}$ tenha um ponto de curvatura Gaussiana positiva. Então são equivalentes:*

(1) *$F(\mathbb{M})$ é parte de uma superfície quádrica.*

(2) *$F(\mathbb{M})$ não contém um skew loop de classe C^2.*

Prova (2) $\Rightarrow$ (1)

Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{M}$ o maior subconjunto aberto de $\mathbb{M}$ cuja imagem $F(\mathbb{X})$ é parte de uma superfície quádrica descrita pelo conjunto $\varphi^{-1}(0)$, sendo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J$, onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ são números reais fixos.

Desde que φ é contínua $\varphi^{-1}(0)$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{X}$ também é fechado pois se $p_n \in \mathbb{X}$, $p_n \to p_0 \in \mathbb{M}$, $\varphi(F(p_n)) = 0$, $\varphi(F(p_0)) = 0$. Suponha que $p_0 \notin \mathbb{X}$, então existe uma vizinhança aberta $\mathbb{V}$ de $F(p_0)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $F^{-1}(F(\mathbb{X}) \cup (\mathbb{V} \cap \varphi^{-1}(0))$ é um aberto de $\mathbb{M}$ que contém $\mathbb{X}$ e $F(\mathbb{X}) \cup (\mathbb{V} \cap \varphi^{-1}(0) \subset \varphi^{-1}(0)$. Isto contradiz o fato que X é o maior conjunto aberto onde $F(X)$ é uma superfície quádrica. Logo $p_0 \in X$, portanto X é fechado em $\mathbb{M}$. Como $\mathbb{M}$ é conexa e os únicos conjuntos abertos e fechados são $\mathbb{M}$ e o vazio, basta provar que $X \neq \emptyset$.

Seja $p \in \mathbb{M}$ o ponto de curvatura Gaussiana positiva. Como já vimos no capítulo 1 seção 1.1 existe um aberto $\mathbb{W}$, com $p \in \mathbb{W}$, onde $F(\mathbb{W})$ é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Temos que $F(p)$ tem curvatura positiva, pois F é uma isometria. Logo tomando $\mathbb{W}$ suficientemente pequeno temos que $\mathbb{S} = F(\mathbb{W})$ é uma superfície com curvatura Gaussiana positiva em todos os pontos. De acordo com [C1] pág. 207 $\mathbb{S}$ faz parte do bordo de um corpo convexo $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^3$.

O plano tangente $T_{F(p)}\mathbb{S}$ intercepta $\mathbb{K}$ somente em $F(p)$. Isto dá que todo plano $\mathbb{H}$ transversal a $\mathbb{S}$ e paralelo a $T_{F(p)}\mathbb{S}$ a interseção $\Gamma = \mathbb{H} \cap \mathbb{S}$ é um oval estritamente convexo, pois $\mathbb{S}$ tem curvatura positiva em todos os pontos(veja observação 1.3).

Todas as hipóteses do lema 4.1 são verificadas, logo podemos afirmar que Γ é centralmente simétrico.

Conside $\mathbb{H}$ e suficientemente próximo de $T_{F(p)}\partial\mathbb{K}$. Se $\mathbb{H}$ é paralelo $T_{F(p)}\partial\mathbb{K}$ então $\Gamma = \mathbb{H} \cap \mathbb{S}$ é centralmente simétrico. Se $\mathbb{H}$ é não é paralelo $T_{F(p)}\partial\mathbb{K}$ existe $F(q) \in \mathbb{S}$ onde $\mathbb{H}$ é paralelo $T_{F(q)}\partial\mathbb{K}$, logo $\Gamma = \mathbb{H} \cap \mathbb{S}$ é centralmente simétrica. Todas as hipóteses do Teorema de Blaschke são válidas logo temos uma vizinhança $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{S}$ em $F(p)$ que é parte de uma quádrica. Considere $\mathbb{X} = F^{-1}(\mathbb{Z})$, temos que $\mathbb{X} \neq \emptyset$ que finalmente completa a prova. $\square$

Apêndice 1

A não existência de skew loops no plano

Proposição 5.1. *Seja* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ *uma curva fechada diferenciável com* $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ *e não constante. Então* α *não é um skew loop, mais ainda dada uma reta em* R^2 *existem pelo menos dois pontos distintos de* α *com retas tangentes paralelas à reta dada.*

Prova.

Considere uma reta r e v um vetor unitário na direção ortogonal a r. Seja a função

$$h : [a, b] \to \mathbb{R} \quad , \quad h(t) = < \alpha(t), v >,$$

Como $\alpha : [a, b] \to R^2$ é uma curva fechada diferenciável existe $\alpha'(t)$ para todo $t \in [a, b]$.Temos que h está definida num conjunto compacto e é diferenciável, logo atinge um mínimo e um máximo globais nos pontos t_1 e t_2 de $[a, b]$ (veja figura A).

Figura A

Os pontos t_1 e t_2 são pontos críticos de h, ou seja

$$< \alpha'(t_1), v > \; = \; < \alpha'(t_2), v > \; = 0.$$

Logo $\alpha'(t_1)$ e $\alpha'(t_2)$ são vetores tangentes à curva α e ambos são ortogonais a v, portanto eles têm a direção da reta r. Desde que α é uma curva não constante segue que os pontos $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ são distintos. Concluímos então que α não é um skew loop. $\square$

Apêndice 2

Superfícies sem skew loops que não são quádricas

A hipótese de um ponto de curvatura Gaussiana positiva de M não pode ser retirada do Teorema A.

Seja C o cilindro reto sobre a curva no plano xy, $y = x^3$ com $0 < x < 1$. Como os pontos de $\mathbb{C}$ satisfazem a equação $x^3 - y = 0$, então $\mathbb{C}$ não é parte de uma quádrica. Sabemos que a curvatura Gaussiana de $\mathbb{C}$ é identicamente nula. Podemos parametrizar $\mathbb{C}$ por

$$X(u,v) = (u^3, u, v) \quad , \quad 0 < u < 1 \quad \text{e} \quad v \in \mathbb{R}.$$

Considere α um laço de classe C^2 em $\mathbb{C}$, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ com $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ e $\alpha''(a) = \alpha''(b)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Afirmamos que α tem pelo menos um par de vetores tangentes verticais (veja figura B).

Figura B

Considere o vetor $e_1 = (1,0,0)$ e a função $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = < \alpha(t), e_1 > .$$

Temos que h está definida num conjunto compacto, portanto ela atinge um máximo e um mínimo, respectivamente nos pontos t_1 e t_2. Estes máximo e mínimo podem ocorrer inclusive nos pontos a e b pois existem $\alpha'(a)$ e $\alpha'(b)$.

Sabemos que esses pontos são pontos críticos da função h, logo derivando h temos

$$< \alpha'(t_1), e_1 >= 0 \qquad e \qquad < \alpha'(t_2), e_1 >= 0 \ .$$

Portanto $\alpha'(t_1)$ e $\alpha'(t_2)$ pertencem ao plano $x = 0$.

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} X_u &= \left(3u^2, 1, 0\right), \\ X_v &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Desde que $\alpha'(t_1)$ pertence ao plano tangente à $\mathbb{C}$ no ponto $X(u(t_1), v(t_1)$, temos que $\alpha'(t_1)$ é combinação linear de X_u e X_v nesse ponto, isto é

$$\alpha'(t_1) = A\left(3u^2(t_1), 1, 0\right) + B(0, 0, 1).$$

Mas como $\alpha'(t_1)$ está no plano $x = 0$ resulta $3Au^2(t_1) = 0$, logo $A = 0$ desde que $u(t_1) > 0$ pela definição de $\mathbb{C}$. Assim $\alpha'(t_1)$ é um múltiplo de $(0, 0, 1)$, isto é, é um vetor vertical. De forma análoga se prova que $\alpha'(t_2)$ é um vetor vertical.

Se $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ a questão já está provada. Agora se $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ significa que h é uma função constante. Portanto $< \alpha(t), e_1 > = cte$ e α é um laço num plano, pelo Apêndice 1 α não é um skew loop.

Consideranto F como a função identidade, temos $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica de classe C^2, $F(C) = C$ é uma superfície sem skew loops e $F(\mathbb{C})$ não é parte de uma quádrica. Portanto a hipótese de $F(\mathbb{M})$ ter um ponto de curvatura positiva não pode ser retirada do teorema A.

Bibliografia

[B] Blaschke,W. , *Gesammelle Werke, Band 4, Affine Differentialgeometric. Differentialgeometric der Kreis- und Kugelgruppen*, editado por Burau, S.S. Chern, K. LeichtweiB, H. R. Muller, L. A. Santaló, U. Simon and K. Strubecker, Thales-Verlag, Essem, 1985

[C1] do Carmo, M.P. ,*Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.

[C2] do Carma, M.P. , *Geometria Riemanniana*, Impa, Rio de Janeiro, 1988.

[GSo] Ghomi, M. e Solomon, B. , *Skew loops and quadric surfaces*, Commentarii Mathematici Helvetici 77: 767-782, 2002.

[H] Hirsch, M.W. , *Differential Topology, Springer-Verlag,* New York, 1976.

[O1] O'Neil, B. , *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[O2] O'Neil, B. , *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, San Diego, 1997.

[Se] Segre, B. , *Sulle coppie di tangenti fra ioro paralleli relative ad una curve chuisa sghemba, Hommage au Professeur Lucien Godeaux, 141-147*, Libraire Universitaire, 1968.

[Sm] Smale, S. , *Regular curves on Riemannian manifolds,* Trans. Amer. Match Soc. 87, 492-512, 1958.

[So] Solomon, B. , *Tantrices of spherical curves*, American Math. Monthly 103, 30-39, 1996.

[W] Whitney, H. , *On regular closed curves in the plane,* Compositio Math. 4, 1937, 276-284.