

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**Assinatura de Grupos Fuchsianos Finitamente
Gerados e Aplicações**

Viviane Pardini Valério

Orientador: Francisco Dutenhefner

4 DE MAIO DE 2006

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

A Deus por tudo.

Ao professor Francisco Dutenhfner, por toda dedicação e paciência.

Aos meus familiares, por acreditarem sempre em mim.

Ao Paulo Antônio que foi meu maior incentivador.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Introdução	2
1 Transformações de Möbius	4
1.1 A esfera $\widehat{\mathbb{C}}$	4
1.2 Inversão em Círculos	6
1.3 Propriedades da Inversão no Círculo $\mathcal{C}(a, r)$	10
1.4 Classificação das transformações de Möbius	14
1.5 Círculos Isométricos	16
2 Grupos Descontínuos em $\widehat{\mathbb{C}}$	20
2.1 Grupos Descontínuos	20
2.2 Grupos Discretos	21
2.3 A Partição de $\widehat{\mathbb{C}}$	24
2.4 Domínio Fundamental	26
2.5 Domínio Fundamental de Ford	27
2.6 Grupos de Schottky	31
3 Superfícies de Riemann	35
3.1 Definições e Exemplos	35
4 Geometria Hiperbólica Plana	42
4.1 Modelos para o Plano Hiperbólico	42
4.2 Classificação das Isometrias	45
4.3 Polígono Fundamental Convexo	50
4.4 Classes de Conjugação em Grupos Fuchsianos	56
4.5 Assinatura de Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados	58
5 Aplicações	65
5.1 O Produto Inverso	65
5.2 Grupos Gerados por Três Elementos Elípticos de Ordem Dois	70
Anexo: Produto Livre Amalgamado	83
Referências Bibliográficas	85
Índice Remissivo	87

Introdução

O objetivo deste trabalho é compreender o que vem a ser a assinatura de grupos Fuchsianos finitamente gerados e calcular a assinatura de uma certa classe de grupos. As principais referências aqui utilizadas são os livros *The Geometry of Discrete Groups* de Allan Beardon e *Kleinian Groups* de Bernard Maskit. O conteúdo é dividido em cinco capítulos e um anexo.

No capítulo 1 estudamos as transformações de Möbius agindo na esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mostramos que o grupo de Möbius $M(\widehat{\mathbb{C}})$ e o grupo das transformações lineares fracionárias M^2 são idênticos, e classificamos um elemento de M^2 de duas maneiras: pela quantidade de seus pontos fixos e pelo traço de uma matriz que o representa em $SL(2, \mathbb{C})$. Encerramos o capítulo definindo o círculo isométrico de elementos pertencentes a M^2 e mostrando que todo elemento de M^2 se escreve como uma composição de uma inversão seguida de um movimento rígido.

No capítulo 2 apresentamos uma discussão sobre subgrupos de M^2 que agem descontinuamente em $\widehat{\mathbb{C}}$. Estabelecemos algumas definições como, por exemplo, conjunto regular livre, conjunto regular, grupo Kleiniano entre outras, todas envolvendo ações de grupos em $\widehat{\mathbb{C}}$. Em seguida demonstramos alguns resultados sobre grupos Kleinianos. Em particular demonstramos que se G é um grupo Kleiniano, então G é um subgrupo discreto de M^2 . Definimos também o conjunto limite de um subgrupo de M^2 e apresentamos teoremas que nos levam a concluir que, para um grupo Kleiniano G , a interseção entre seu conjunto regular e seu conjunto limite é vazia e que $\widehat{\mathbb{C}}$ é a união disjunta desses conjuntos. A parte principal desse capítulo é a que trata de domínio fundamental para um grupo visando compreender o espaço quociente com respeito à ações de G agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$. Nas duas últimas seções são apresentados, respectivamente, o conceito de domínio fundamental de Ford para um grupo Kleiniano com ∞ pertencente ao seu conjunto regular livre e a construção de grupos de Schottky.

No capítulo 3 estabelecemos o conceito de superfícies de Riemann e apresentamos alguns exemplos simples. Em seguida mostramos como construir superfícies de Riemann através do espaço quociente com respeito à ações de grupos descontínuos agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$.

O capítulo 4 trata de geometria hiperbólica de modo objetivo. Discutimos os modelos do semi-plano superior \mathbb{H}^2 e do disco unitário Δ e apresentamos seus respectivos grupos de isometrias. Definimos também os grupos Fuchsianos que, no restante do texto, serão considerados grupos discretos de isometrias conformes do plano hiperbólico. Em seguida apresentamos o conceito de domínio fundamental para um grupo Fuchsiano e enunciamos dois importantes teoremas: um de existência de um domínio fundamental para esse grupo e o teorema de Poincaré. Também demonstramos resultados que caracterizam as classes de conjugação de elementos de grupos Fuchsianos. Esses resultados são importantes pois implicam a existência da assinatura de um tal grupo. A **assinatura** de um grupo Fuchsiano finitamente gerado G é representada pelo símbolo

$$(g : m_1, \dots, m_r; s; t),$$

onde g é o gênero da superfície de Riemann $\frac{\Delta}{G}$, r o número de classes de conjugação de subgrupos elípticos maximais de G com ordem m_1, \dots, m_r , respectivamente, sendo $m_j \geq 2$, s o número de classe de conjugação de subgrupos cíclicos parabólicos maximais de G e t o número de classe de conjugação de subgrupos cíclicos hiperbólicos maximais de G . Finalizamos o capítulo demonstrando uma condição necessária e suficiente para a existência de um grupo Fuchsiano não elementar finitamente gerado com assinatura previamente estabelecida.

O objetivo do capítulo 5 é determinar condições para que o grupo gerado por três inversões em pontos do plano hiperbólico seja um grupo Fuchsiano e, nesse caso, determinar a assinatura desse grupo. Na análise desse grupo são aplicados todos os conceitos previamente estudados tais como: domínio fundamental e teorema de Poincaré, além do conceito de produto inverso de duas geodésicas no plano hiperbólico. A definição e as principais propriedades desse produto estão apresentadas na primeira seção deste capítulo.

Por fim, acrescentamos um anexo onde são dadas as definições de produto livre e produto livre amalgamado de dois grupos, a fim de fornecer um material de apoio para que leitores interessados em geometria hiperbólica, em particular no estudo dos Teoremas de Combinação, possam ter uma fonte para iniciarem seus estudos.

Capítulo 1

Transformações de Möbius

Neste capítulo iremos definir, caracterizar e classificar as transformações de Möbius no plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1.1 A esfera $\widehat{\mathbb{C}}$

Considere a esfera unitária $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Seja $N = (0, 0, 1)$

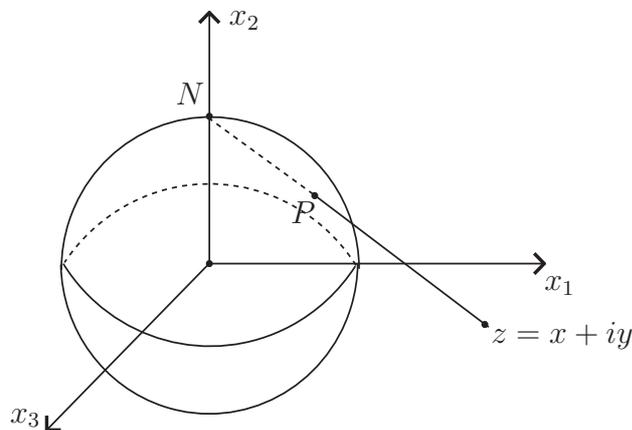


Figura 1.1: Projeção estereográfica

o pólo norte de S^2 e identifique o plano \mathbb{C} com o plano $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, que intercepta S^2 ao longo do equador $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Assim sendo, cada número complexo $z = x + iy$ está identificado ao ponto $(x_1, x_2, 0)$. Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$ considere a reta em \mathbb{R}^3 que passa por z e por N . Essa reta intercepta a esfera em exatamente um ponto $P \neq N$. Veja a figura 1.1.

Observe que, se $|z| < 1$ então P está no hemisfério sul, se $|z| = 1$ então $P = z$ e, se $|z| > 1$ então P está no hemisfério norte. Fazendo $z \mapsto \infty$ temos que o ponto P tende a N e, com isso em mente, chamamos N de ponto no infinito $\{\infty\}$ e identificamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com S^2 . Tal como dado, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é chamado também de esfera e denotado $\widehat{\mathbb{C}}$. Não entraremos em detalhe, mas $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ pode ser munido de uma estrutura complexa, com essa estrutura, passa a se chamar esfera de Riemann ou reta projetiva complexa.

Vamos descrever a aplicação $z \mapsto P$ em coordenadas. Defina $\pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ do seguinte modo: $\pi(z)$ é a interseção da reta que liga z ao pólo N com S^2 e $\pi(\infty) = N$. Note que π é uma bijeção.

A equação da reta passando por z e N é $\{tN + (1-t)z : t \in \mathbb{R}\}$. Como $z = x + iy = (x, y, 0)$, essa equação fica $\{((1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R}\}$. O ponto P determinado por z é o ponto dessa reta que está na esfera e, para obtê-lo, precisamos calcular o valor de t que nos dá um ponto em S^2 . Um ponto dessa reta está em S^2 quando

$$(1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = 1,$$

ou seja, $(1-t)^2(x^2 + y^2) = 1 - t^2$, o que equivale a $(1-t)^2|z|^2 = 1 - t^2$. Como $t \neq 1$, pois sabemos que $P \neq N$, essa última igualdade é o mesmo que $(1-t)|z|^2 = 1+t$ e então $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$. Substituindo esse valor de t na equação da reta, obtemos o ponto

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2.$$

Observe que fica clara a afirmativa: $z \rightarrow \infty$, então $P \rightarrow N$. Como essa aplicação é uma bijeção, ela tem uma inversa facilmente calculada a partir do ponto $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$ simplesmente fazendo $t = x_3$ na equação da reta. Isso fornece $z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ e fica muito bem explicado que $P \rightarrow N$, então $z \rightarrow \infty$. Essa aplicação inversa é conhecida pelo nome de **projeção estereográfica**.

Assim sendo, obtemos a bijeção $\pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$, definida por

$$\pi(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \quad e \quad \pi(\infty) = N, \quad (1.1)$$

sendo $z = x + iy$, cuja inversa π^{-1} é $\pi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$, $\pi^{-1}(N) = \infty$.

Enunciaremos algumas propriedades da aplicação π sem demonstrá-las. Para mais detalhes, veja [5].

- (1) Se L é uma reta euclidiana em \mathbb{C} , então $\pi(L)$ é uma círculo em S^2 passando por N .
- (2) Se \mathcal{C} é um círculo euclidiano em \mathbb{C} , então $\pi(\mathcal{C})$ é um círculo em S^2 que não passa pelo pólo norte.
- (3) Vale a recíproca das propriedades (1) e (2).
- (4) A projeção estereográfica preserva ângulo.

Agora definiremos a **métrica da corda em $\widehat{\mathbb{C}}$** :

Sejam z e z' dois pontos em $\widehat{\mathbb{C}}$. A distância d entre z e z' é definida por:

$$d(z, z') = |\pi(z) - \pi(z')|,$$

sendo $|\cdot|$ a norma Euclidiana em \mathbb{R}^3 . Assim,

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)]^{1/2}}, \quad z, z' \in \mathbb{C};$$

$$d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Na esfera S^2 induzimos a métrica 1 a 1 do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Daí as bolas da esfera são interseções das bolas de \mathbb{R}^3 com a esfera S^2 . Assim, um aberto contendo um ponto $z \in \mathbb{C}$ é um aberto da topologia usual de \mathbb{C} . Por outro lado, um aberto contendo o ponto ideal ∞ é o complementar de um compacto de \mathbb{C} .

1.2 Inversão em Círculos

Seja $\mathcal{C}(a, r)$ um círculo em \mathbb{C} de centro a e raio r . Para todo ponto $z \in \mathbb{C} - \{a\}$, o inverso de z em relação ao círculo $\mathcal{C}(a, r)$ é definido como o único ponto z' na semi-reta de origem a e que passa por z tal que $|\vec{az}| \cdot |\vec{az}'| = r^2$. Em coordenadas, $z' = a + \vec{az}'$.

O vetor unitário na direção de \vec{az}' é o vetor $\frac{\vec{az}}{|\vec{az}|}$.

$$\text{Daí,} \quad \vec{az}' = \frac{r^2}{|\vec{az}|} \cdot \frac{\vec{az}}{|\vec{az}|} \quad \text{e} \quad z' = a + \frac{r^2}{|\vec{az}|^2} \cdot \vec{az}.$$

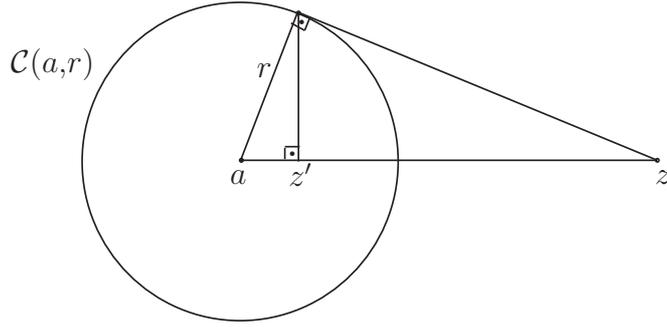


Figura 1.2: Inversão de z em $\mathcal{C}(a, r)$

Portanto a **inversão em $\mathcal{C}(a, r)$** será o homeomorfismo $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definido por

$$\Phi(z) = a + \frac{r^2}{|z - a|^2}(z - a) \quad e \quad \Phi(a) = \infty. \quad (1.2)$$

No caso especial de $\mathcal{C}(0, 1)$, a inversão se reduz a $\Phi(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Uma reta em \mathbb{C} pode ser vista como um círculo em $\widehat{\mathbb{C}}$ passando por ∞ . Se L é uma reta passando por z_0 com inclinação α , a **inversão em L** (reflexão em L) se escreve como $\Phi_L(z) = e^{2i\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0$.

Note que tanto Φ quanto Φ_L podem ser escritas da forma $z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. Portanto são aplicações anti-holomorfas, conseqüentemente invertem a orientação do plano complexo.

Pode-se demonstrar que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \frac{r^2}{|x - a||y - a|}|x - y| \quad e \quad |\Phi_L(x) - \Phi_L(y)| = |x - y| \quad (1.3)$$

com $x, y \in \mathbb{C}$, e que as inversões em círculos e retas são aplicações anti-conformes (preservam ângulos mas invertem orientação).

Uma **transformação de Möbius** agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$ é definida como um número finito de composições de inversões em círculos e retas.

O grupo das transformação de Möbius, com a operação de composição, agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$ é chamado de **grupo geral de Möbius** que denotaremos por $GM(\widehat{\mathbb{C}})$.

O **grupo de Möbius**, denotado por $M(\widehat{\mathbb{C}})$, é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{C}})$ constituído de todas transformações que preservam orientação em $GM(\widehat{\mathbb{C}})$, ou seja, é o conjunto das composições de um número par de inversões em círculos ou retas.

Uma **transformação linear fracionária** g é um homeomorfismo em $\widehat{\mathbb{C}}$ da forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

É fácil observar que o conjunto das transformações lineares fracionárias é um grupo com a operação de composição. Seja M^2 o **grupo das transformações lineares fracionárias**. Note também que a composição de um número par de inversões em círculos e retas está em M^2 . Daí, $M(\widehat{\mathbb{C}}) \subset M^2$.

Para termos a inclusão $M^2 \subset M(\widehat{\mathbb{C}})$, precisamos de dois lemas:

Lema 1.1 *O grupo M^2 é gerado por translações ($z \mapsto z + a, a \in \mathbb{C}$), dilatações ($z \mapsto kz, k > 0$), rotações ($z \mapsto e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$) e pela aplicação $\left(z \mapsto \frac{1}{z}\right)$.*

Prova: Seja $g \in M^2$ tal que $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

- Se $c = 0$, então $g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Tome a translação $T(z) = z + \frac{b}{d}$ e $H(z) = \frac{a}{d}z$ (H é uma composta de uma dilatação com uma rotação). Segue que $g(z) = T \circ H(z)$.

- Se agora $c \neq 0$, escreva $g(z)$ como se segue:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\left(\frac{bc - ad}{c}\right)}{cz + d} + \frac{a}{c}.$$

Considere a composição de uma dilatação com uma rotação $H_1(z) = cz$, a translação $T_1(z) = z + d$, a aplicação $S(z) = \frac{1}{z}$, uma outra composição de uma dilatação com uma rotação $H_2(z) = \frac{bc - ad}{c}z$ e finalmente a translação $T_2(z) = z + \frac{a}{c}$. Segue que $g(z) = T_2 \circ H_2 \circ S \circ T_1 \circ H_1(z)$. Assim g é uma composição de transformações citadas no enunciado do lema. ■

Lema 1.2 Cada um dos geradores de M^2 é uma composição de duas inversões em círculos ou retas.

Prova:

- (1) Considere a translação $T(z) = z + a, a \in \mathbb{C}$. No plano complexo, seja l a reta que passa pela origem e é perpendicular ao vetor a . Seja r a reta perpendicular ao vetor a e que passa pelo seu ponto médio. Temos que a translação $T(z) = z + a$ é a composição da inversão na reta l, i_l , seguida da inversão na reta r, i_r .

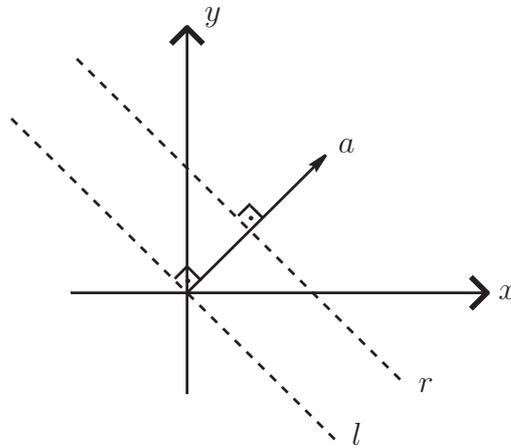


Figura 1.3: $T = i_r \circ i_l$

- (2) A rotação $R(z) = e^{i\theta}z$ é a composição da inversão no eixo x seguida da inversão na reta que passa pela origem e faz ângulo $\frac{\theta}{2}$ com o eixo x .
- (3) A dilatação $H(z) = kz, k > 0$ é a composição da inversão no círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{k}}$ seguida da inversão no círculo de raio 1, ambos centrados na origem.
- (4) A aplicação $S(z) = \frac{1}{z}$ é a composição da inversão no eixo x com a inversão no círculo de raio 1 centrado na origem. ■

Portanto, $M^2 = M(\widehat{\mathbb{C}})$, ou seja, toda transformação linear fracionária é uma composição de um número par de inversões em círculos ou retas.

1.3 Propriedades da Inversão no Círculo $\mathcal{C}(a, r)$

Seja $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ a inversão em $\mathcal{C}(a, r)$ definida em (1.2), então:

- (1) $z \in \mathcal{C}(a, r)$ se, e somente se, $\Phi(z) = z$;
- (2) $(\Phi)^2 = id$;
- (3) A imagem por Φ do exterior de $\mathcal{C}(a, r)$ é o interior de $\mathcal{C}(a, r)$ e vice-versa;

Estas três propriedades são imediatas pela definição de Φ .

Agora vamos mostrar que a inversão num círculo transforma cada reta e círculo em uma reta ou um círculo. Para isto vamos relacionar a inversão no círculo $\mathcal{C}(a, r)$ com a projeção estereográfica inversa da aplicação $\pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow S(a, r)$, sendo $S(a, r)$ a esfera de centro a e raio r e \mathbb{C} o plano equatorial desta esfera. Veja a figura 1.4. Como já vimos, o inverso de z em relação ao círculo $\mathcal{C}(a, r)$ é definido como o único ponto z' na semi-reta de origem a e que passa por z tal que $|\vec{az}| \cdot |\vec{az}'| = r^2$

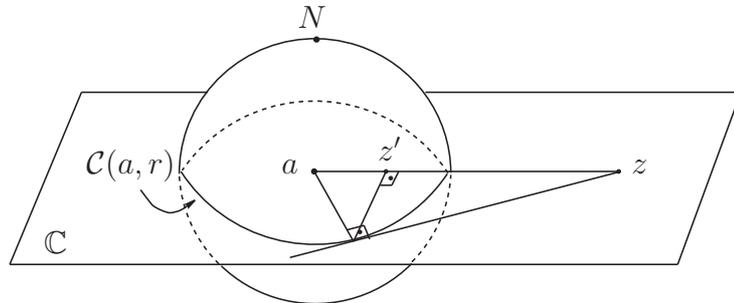


Figura 1.4: Esfera $S(a, r)$ com plano equatorial \mathbb{C}

Pergunta: Se p e p' são pontos antípodas na esfera $S(a, r)$, qual a relação entre $\pi^{-1}(p)$ e $\pi^{-1}(p')$?

Para responder esta pergunta, vamos examinar o plano que corta $S(a, r)$ passando por N , p , p' e a . Veja a figura 1.5. É fácil observar que o triângulo de vértices a , p' e $\pi^{-1}(p')$ e o de vértice a , $\pi^{-1}(p)$ e p são semelhantes. Daí,

$$\frac{|a - \pi^{-1}(p')|}{r} = \frac{r}{|a - \pi^{-1}(p)|}.$$

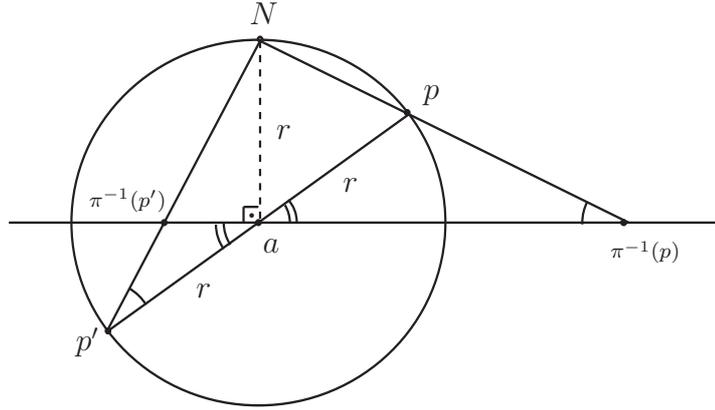


Figura 1.5: Plano cortando $S(a, r)$ passando por N, p, p' e a

Portanto, $|a - \pi^{-1}(p)| \cdot |a - \pi^{-1}(p')| = r^2$. Observe que esta é uma relação semelhante a que foi utilizada na definição de inversão no círculo $\mathcal{C}(a, r)$. Se $i_a : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ é a inversão no ponto a (isometria Euclidiana), então podemos escrever a inversão $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ em $\mathcal{C}(a, r)$ da seguinte maneira: $\Phi = i_a \circ \pi^{-1} \circ i_a \circ \pi$. Desta expressão e das propriedades da projeção estereográfica podemos demonstrar as seguintes propriedades da inversão Φ no círculo $\mathcal{C}(a, r)$:

- (4) Φ preserva ângulo;
- (5) Φ transforma retas e círculos em retas ou círculos;
- (6) se Σ é uma reta ou um círculo em $\widehat{\mathbb{C}}$, então $\Phi(\Sigma)$ é uma reta se, e somente se, Σ passa pelo ponto a ;
- (7) se L é uma reta, então $\Phi(L) = L$ se, e somente se, L e $\mathcal{C}(a, r)$ são ortogonais.

Teorema 1.3 *Seja $f \in M^2$ e seja Σ uma reta ou um círculo em $\widehat{\mathbb{C}}$. Então $f(\Sigma)$ é uma reta ou um círculo.*

Prova: Pelo lema 1.2 e pela propriedade (5) acima, segue a demonstração. ■

Teorema 1.4 *Seja $f \in GM(\widehat{\mathbb{C}})$ e seja Σ uma reta ou um círculo em $\widehat{\mathbb{C}}$. Se $f(z) = z$ para todo $z \in \Sigma$ então $f = id$ ou f é a inversão em Σ .*

Prova: Antes de começarmos a demonstrar o teorema, vamos fazer a seguinte observação:

Se $V = (x_1, y_2)$ e $W = (x_2, y_2)$ são vetores no plano \mathbb{R}^2 , o produto escalar de V e W será denotado por

$$\langle V, W \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Da correspondência usual $x + iy \mapsto (x, y)$ entre o plano complexo \mathbb{C} e o plano real \mathbb{R}^2 , vemos que esses vetores definem números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Daí $z_1\bar{z}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - y_2x_1)$. Assim o produto escalar usual em \mathbb{R}^2 também pode ser expresso como $Re(z_1\bar{z}_2) = x_1x_2 + y_1y_2$. Em qualquer um dos casos acima, usaremos a mesma notação para representar esse produto escalar:

$$\langle V, W \rangle = Re(z_1\bar{z}_2) = \langle z_1, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Suponha que Σ é o eixo x . Seja C um círculo qualquer centrado em Σ . Como $f(\infty) = \infty$, pela propriedade (5) concluímos que $f(C)$ é um círculo. Como f preserva ângulo, $f(C)$ é um círculo ortogonal à $f(\Sigma) = \Sigma$. Portanto, $f(C)$ é um círculo centrado no eixo x . Como f fixa os pontos $C \cap \Sigma$, concluímos que $f(C) = C$. Agora seja X um ponto qualquer tal que $X \notin \Sigma$. Seja A um ponto qualquer em Σ . Seja C o círculo de centro A e raio $r = |A - X|$. Como $f(C) = C$, $f(X) \in C$ e assim

$$|A - X|^2 = |A - f(X)|^2,$$

Daí,

$$|A|^2 - 2\langle A, X \rangle + |X|^2 = |A|^2 - 2\langle A, f(X) \rangle + |f(X)|^2,$$

para todo $A \in \Sigma$. Se A é a origem então $|X| = |f(X)|$. Então, $\langle A, X \rangle = \langle A, f(X) \rangle$, para todo $A \in \Sigma$. Logo, se $X = (a, b)$ e $f(X) = (c, d)$, concluímos que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. E para $A = (1, 0)$, $a = c$, logo $b = \pm d$. Portanto, $f(a, b) = (a, b)$ ou $f(a, b) = (a, -b)$ e assim $f = id$ ou $f = \Phi_\Sigma$ (inversão em Σ).

Seja agora Σ uma reta ou um círculo e seja Σ_0 o eixo x de inversão Φ_0 . Seja g uma transformação de Möbius tal que $g(\Sigma) = \Sigma_0$. Pela hipótese, seja f uma transformação de Möbius tal que $f(X) = X$, para todo $X \in \Sigma$. Seja Φ a inversão em Σ . Temos que gfg^{-1} fixa todos os pontos do eixo x , e se f não for identidade, do que acabamos de demonstrar, concluímos que $gfg^{-1} = \Phi_0$. Por outro lado, $g\Phi g^{-1} = \Phi_0$. Daí, $gfg^{-1} = g\phi g^{-1}$, então $f = \phi$. ■

Vamos agora representar cada elemento de M^2 por uma matriz cujo determinante é não nulo da seguinte maneira:

$$\text{Se } g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ representamos } g(z) \text{ pela matriz } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Uma conta simples mostra que composição de elementos de M^2 é o mesmo que multiplicação de matrizes em $GL(2, \mathbb{C}) = \{ \text{matrizes } 2 \times 2 \text{ com entradas complexas e determinante } \neq 0 \}$. Isto implica que

$$\Psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

é um homomorfismo de grupos. A aplicação Ψ é claramente sobrejetiva, porém $GL(2, \mathbb{C})$ não é isomorfo a M^2 , pois como elementos de M^2 , para $t \neq 0$,

$$\Psi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \text{ e } \Psi \left(\begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix} \right)$$

são iguais. O núcleo de Ψ é o conjunto

$$\text{Ker}(\Psi) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}); t \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}.$$

Logo, pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\tilde{\Psi} : \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\text{Ker}(\Psi)} \rightarrow M^2$$

define um isomorfismo de grupos.

Notação: $PGL(2, \mathbb{C}) = \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\text{Ker}(\Psi)}$ é o **grupo projetivo linear geral**.

Observe também que dada uma matriz M tal que $\det(M) \neq 0$, sempre existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\det(\lambda M) = 1$. Daí, podemos definir um homomorfismo sobrejetivo

$$\varphi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

sendo $SL(2, \mathbb{C}) = \{ \text{matrizes } 2 \times 2 \text{ com entradas complexas e determinante } 1 \}$. O núcleo de φ é o conjunto

$$Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Novamente pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\tilde{\varphi} : \frac{SL(2, \mathbb{C})}{Ker(\varphi)} \rightarrow M^2$$

define um isomorfismo de grupos.

Notação: $PSL(2, \mathbb{C}) = \frac{SL(2, \mathbb{C})}{Ker(\varphi)}$ é o **grupo projetivo linear especial**.

Assim todo elemento de M^2 pode ser representado por uma matriz

$$M_g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

com determinante 1.

Finalmente podemos afirmar que $M(\widehat{\mathbb{C}}) = M^2 \simeq PSL(2, \mathbb{C})$.

Observação: Na maioria dos casos, as propriedades geométricas relevantes de um subgrupo H de M^2 são preservadas pela conjugação por uma transformação linear fracionária, isto é, não haverá distinção entre um subgrupo H de M^2 e qualquer conjugado de H , gHg^{-1} , sendo g um elemento de M^2 .

1.4 Classificação das transformações de Möbius

Primeiro classificaremos um elemento de M^2 pela quantidade de seus pontos fixos e depois pelo traço de uma matriz que o representa em $SL(2, \mathbb{C})$.

Seja $g \in M^2$. Observe que g possui um ou dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$, já que a equação de pontos fixos é um polinômio quadrático.

Antes de classificarmos g com respeito a quantidade de pontos fixos, considere três pontos distintos em $\widehat{\mathbb{C}}$: z_1, z_2 e z_3 . Ponha $g(z_1) = u_1, g(z_2) = u_2$ e $g(z_3) = u_3$ (observe que como g é

bijeção, u_1, u_2 e u_3 são distintos). Suponhamos que tenha uma outra transformação de Möbius h satisfazendo $h(z_1) = u_1, h(z_2) = u_2$ e $h(z_3) = u_3$. Então $g^{-1}h(z_j) = z_j, j = 1, 2, 3$, e daí vem que a transformação $g^{-1}h$ tem três pontos fixos. Logo, $g^{-1}h$ é a identidade e obtemos $g = h$. Portanto, uma transformação linear fracionária fica completamente determinada por seus valores em três pontos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Se $g \in M^2$ tem apenas um ponto fixo em $\widehat{\mathbb{C}}$ então dizemos que g é um elemento **parabólico**; seja x seu ponto fixo. A menos de uma conjugação, podemos pensar que g é uma translação da forma $z \mapsto z + 1$ cujo ponto fixo é ∞ . Veja referência [4], página 4.

Se $g \in M^2$ tem dois pontos fixos em $\widehat{\mathbb{C}}$, então g é conjugado em M^2 a um elemento que fixa 0 e ∞ . Neste caso, g é da forma $g(z) = az, a \in \mathbb{C}$.

Se g é conjugado a uma rotação $z \mapsto e^{i\theta}z, \theta \in \mathbb{R}$, dizemos que g é um elemento **elíptico**.

Se g é conjugado a uma dilatação $z \mapsto k^2z, k \in \mathbb{R} - \{1\}$, dizemos que g é um elemento **hiperbólico**.

Se g é conjugado a uma aplicação $z \mapsto k^2e^{i\theta}z, k \in \mathbb{R} - \{1\}, \theta \in \mathbb{R}$, dizemos que g é um elemento **loxodrômico**.

Observe que todo elemento hiperbólico é loxodrômico.

Sabemos que o traço de uma matriz é invariante por conjugação. Daí podemos também classificar uma transformação linear fracionária usando o traço, $tr(\cdot)$, de uma matriz que a representa. Só que o $tr(\cdot)$ não está bem definido em M^2 : se $A \in SL(2, \mathbb{C})$ representa um elemento de M^2 , a matriz $-A$ representa o mesmo elemento de M^2 e seu traço tem sinal oposto ao de A . De qualquer modo, $tr^2(A)$ está bem definido.

A classificação de uma transformação linear fracionária através do traço segue do próximo teorema onde usaremos a notação M_g para uma matriz em $SL(2, \mathbb{C})$ que representa uma transformação $g \in M^2$. Fazendo um abuso de linguagem, o traço da matriz M_g será considerado como o traço da transformação g e esse será denotado por $tr(g)$.

Teorema 1.5 *Seja $g \in M^2$ representado por uma matriz $M_g \in SL(2, \mathbb{C})$. Então:*

(i) *g é elíptico se, e somente se, $tr^2(g) \in (0, 4)$;*

(ii) g é parabólico se, e somente se, $tr^2(g) = 4$;

(iii) g é hiperbólico se, e somente se, $tr^2(g) = (4, +\infty)$;

(iv) g é loxodrômico se, e somente se, $tr^2(g) \notin [0, +\infty)$.

Prova:

(i) g é elíptico $\Leftrightarrow g$ é conjugado a uma rotação $z \mapsto e^{i\theta}z$.

Seja

$$M_g = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = 2\cos(\frac{\theta}{2})$, logo $tr^2(g) \in (0, 4)$.

(ii) g é parabólico $\Leftrightarrow g$ é conjugado a uma translação $z \mapsto z + 1$.

Seja

$$M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = 2$, logo $tr^2(g) = 4$.

(iii) g é hiperbólico $\Leftrightarrow g$ é conjugado a uma dilatação $z \mapsto k^2z$.

Seja

$$M_g = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = k + \frac{1}{k} = \frac{k^2 + 1}{k}$, logo $tr^2(g) > 4$.

(iv) g é loxodrômico $\Leftrightarrow g$ é conjugado a uma aplicação $z \mapsto k^2e^{i\theta}z$.

Seja

$$M_g = \begin{pmatrix} ke^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{k} \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = ke^{i\frac{\theta}{2}} + \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{k} \notin \mathbb{R}$. ■

1.5 Círculos Isométricos

Seja $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc = 1$, um elemento de M^2 tal que $g(\infty) \neq \infty$, ou seja, $c \neq 0$.

Sejam

$$\alpha = g^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c} \quad \text{e} \quad \alpha' = g(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Então todas as retas que passam por α são levadas pelo elemento g em retas passando por α' , daí um círculo centrado em α de raio r é transformado por g num círculo centrado em α' de raio r' .

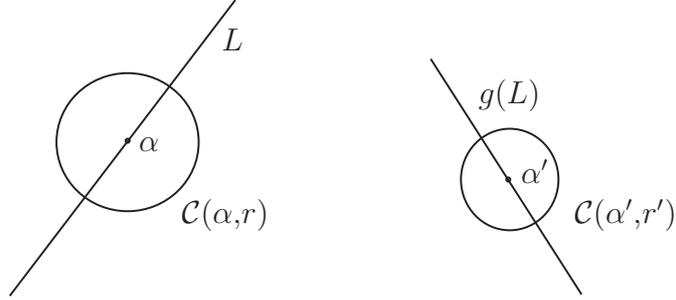


Figura 1.6: $g(\mathcal{C}(\alpha, r)) = \mathcal{C}(\alpha', r')$

Seja $z \in \mathcal{C}(\alpha, r)$. Daí,

$$\begin{aligned} r' &= |g(z) - \alpha'| = \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{acz + bc - acz - ad}{c(cz + d)} \right| \\ &= \frac{1}{|c||cz + d|} = \frac{1}{|c|^2 \left| z + \frac{d}{c} \right|} = \frac{1}{|c|^2 |z - \alpha|} \\ &= \frac{1}{|c|^2 r}. \end{aligned}$$

Portanto existe um único círculo I_g de centro α e raio $\rho = \frac{1}{|c|}$ tal que $g(I_g)$ é um círculo de centro α' e mesmo raio $\rho = \frac{1}{|c|}$. Denotaremos o raio de I_g por R_g .

Segue então a igualdade

$$|g(z) - g(\infty)| = \frac{R_g^2}{|z - g^{-1}(\infty)|}. \quad (1.4)$$

Chamaremos o círculo I_g de **círculo isométrico de g** com centro $g^{-1}(\infty)$ e o círculo $g(I_g) = I_{g^{-1}}$ de **círculo isométrico de g^{-1}** com centro $g(\infty)$. Chamaremos de **região exterior ao círculo I_g** o conjunto $ext(I_g) = \{z \in \mathbb{C} : |z - g^{-1}(\infty)| > R_g\} \cup \{\infty\}$ e de **região interior ao círculo I_g** o conjunto $int(I_g) = \{z \in \mathbb{C} : |z - g^{-1}(\infty)| < R_g\}$. Para o círculo I_g^{-1} , é análogo.

Da igualdade (1.4), temos:

$$\begin{aligned}g(\text{ext}(I_g)) &= \text{int}(I_{g^{-1}}) \\g(\text{int}(I_g)) &= \text{ext}(I_{g^{-1}})\end{aligned}$$

Pelo o que acabamos de mostrar, sabemos calcular o centro e o raio do círculo isométrico de um elemento $g \in M^2$. O próximo resultado nos ensina a calcular o raio do círculo isométrico de uma composição:

Proposição 1.6 *Sejam g e h dois elementos em M^2 tais que: $g(\infty) \neq \infty$, $h(\infty) \neq \infty$, $gh(\infty) \neq \infty$. Sejam R_g , R_h e R_{gh} os raios dos círculos isométricos de g , h e gh , respectivamente. Então,*

$$R_{gh} = \frac{R_g \cdot R_h}{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)|}.$$

Prova: Sejam $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ e $h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, com $ad - bc = 1$ e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, elementos que não fixam ∞ , então podem ser definidos os círculos isométricos de g , g^{-1} , h , h^{-1} com os centros $g^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$, $g(\infty) = \frac{a}{c}$, $h^{-1}(\infty) = \frac{-\delta}{\gamma}$, $h(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma}$, respectivamente. É fato que

$$gh(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}.$$

$$\text{Daí, } R_{gh} = \frac{1}{|c\alpha + d\gamma|} = \frac{1}{|c||\gamma|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{d}{c}\right|} = \frac{R_g \cdot R_h}{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)|}. \blacksquare$$

Proposição 1.7 *Seja $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, com $c \neq 0$. Daí $g^{-1}(\infty) = \frac{-d}{c}$, $g(\infty) = \frac{a}{c}$ e $R_g = \frac{1}{|c|}$. Considere $ad - bc = 1$. Então para pontos distintos $x, y \in \mathbb{C} - \{g^{-1}(\infty)\}$, temos:*

$$|g(x) - g(y)| = \frac{R_g^2}{|x - g^{-1}(\infty)||y - g^{-1}(\infty)|} |x - y|.$$

Prova:

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)| &= \left| \frac{ax + b}{cx + d} - \frac{ay + b}{cy + d} \right| = \left| \frac{(ax + b)(cy + d) - (ay + b)(cx + d)}{(cx + d)(cy + d)} \right| \\ &= \frac{|x - y|}{|cx + d||cy + d|} = \frac{|x - y|}{|c|^2 \left| x + \frac{d}{c} \right| \left| y + \frac{d}{c} \right|}\end{aligned}$$

$$= \frac{R_g^2}{|x - g^{-1}(\infty)||y - g^{-1}(\infty)|} |x - y|. \quad \blacksquare$$

Para terminar essa seção, vamos apresentar uma forma normal para todo elemento $g \in M^2$ tal que $g(\infty) \neq \infty$. Sejam I_g e $I_{g^{-1}}$ círculos isométricos de g e g^{-1} com respectivos centros $\alpha = g^{-1}(\infty)$ e $\alpha' = g(\infty)$. Sejam i a inversão no círculo I_g e j a inversão na mediatriz do segmento $\overline{\alpha\alpha'}$. Se $\alpha = \alpha'$, considere $j = id$. Note que

$$\begin{aligned} ji(I_g) &= I_{g^{-1}} \\ ji(ext(I_g)) &= int(I_{g^{-1}}) \\ ji(int(I_g)) &= ext(I_{g^{-1}}) \end{aligned}$$

Agora defina $R = g(ji)^{-1} = gij$, assim $R(\infty) = \infty$, $R(\alpha') = \alpha'$ e $R(I_{g^{-1}}) = I_{g^{-1}}$.

Se R preserva orientação, então R tem a seguinte forma $R(z) = e^{i\theta}(z - \alpha') + \alpha'$.

Se R inverte orientação, então $R(z) = e^{i\theta}(\bar{z} - \overline{\alpha'}) + \alpha'$.

Em ambos os casos a aplicação R será um movimento rígido Euclidiano deixando invariante o círculo $I_{g^{-1}}$ com pontos fixos α' e ∞ . Daí segue os seguintes resultados:

Teorema 1.8 *Seja $g \in M^2$ tal que $g(\infty) \neq \infty$. Então podemos escrever $g = Rji$, sendo i a inversão em I_g e R e j são movimentos rígidos Euclidianos.*

Corolário 1.9 *M^2 é gerado por inversões em círculos e retas.*

Este corolário segue também do lema 1.2.

Capítulo 2

Grupos Descontínuos em $\widehat{\mathbb{C}}$

2.1 Grupos Descontínuos

Sejam X um espaço topológico e G um grupo de homeomorfismos em X .

Dizemos que G **age livre e descontinuamente** num ponto $x \in X$ se existe uma vizinhança U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todo $g \in G - \{id\}$. Equivalentemente, se $g \neq h$ em G então $g(U) \cap h(U) = \emptyset$. Neste caso, dizemos que U é uma boa vizinhança do ponto x .

Por outro lado, se exigirmos que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos não triviais de G , dizemos que G **age descontinuamente** em x .

Se $X = \widehat{\mathbb{C}}$ e G é subgrupo de M^2 , o conjunto dos pontos onde G age livre e descontinuamente é chamado de **conjunto regular livre**, representado por ${}^0\Omega = {}^0\Omega(G)$. E o conjunto dos pontos onde G age descontinuamente é chamado **conjunto regular**, representado por $\Omega = \Omega(G)$. É imediato que os conjuntos ${}^0\Omega(G)$ e $\Omega(G)$ são conjuntos abertos e G -invariante.

Um subgrupo G de M^2 é dito **Kleiniano** se ${}^0\Omega(G) \neq \emptyset$.

Se G é um grupo propriamente descontínuo tal que $\infty \in {}^0\Omega$, então $g(\infty) \neq \infty$, para todo $g \in G - \{id\}$. Isto implica que podem ser definidos os círculos isométricos de todos os elementos de G .

Dois pontos x e y em X são ditos serem **equivalentes** com respeito ao grupo G se existe um elemento $g \in G - \{id\}$ tal que $g(x) = y$. O conjunto dos pontos equivalentes a um ponto x é a

G-órbita de x por G . O conjunto destas órbitas é denotado por $\frac{X}{G}$.

Munindo o espaço das órbitas $\frac{X}{G}$ com a topologia quociente, a projeção natural $X \rightarrow \frac{X}{G}$ fica contínua e aberta.

O grupo M^2 de homeomorfismos possui uma topologia natural. Dizemos que uma seqüência de elementos $\{g_m\}$ em M^2 converge para um elemento $g \in M^2$ se esses elementos podem ser representados, respectivamente, por matrizes \widetilde{g}_m e \widetilde{g} em $SL(2, \mathbb{C})$ tais que as entradas das matrizes $\{\widetilde{g}_m\}$ convergem para as entradas da matriz \widetilde{g} . Esta topologia é equivalente a topologia da convergência uniforme em M^2 .

2.2 Grupos Discretos

Dizemos que um subgrupo G de M^2 é **discreto** se $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ estão em G com $g_n \rightarrow h$, então $g_n = h$ para todo n suficientemente grande. Não é necessário assumir que $x \in G$, basta $x \in M^2$.

Proposição 2.1 *Seja G um subgrupo não discreto de M^2 . Então existe uma seqüência de elementos distintos de G convergindo para a identidade.*

Prova: Por hipótese, existe uma seqüência de elementos distintos, $(g_m) \subset G$, convergindo para algum elemento de G , digamos g . Por uma conjugação em M^2 , podemos supor que g tem uma das seguintes formas: $g(z) = z + 1$ ou $g(z) = k^2 z$. Em qualquer caso, $g_{m+1} \circ g_m^{-1}$ é a seqüência procurada. ■

Proposição 2.2 *Se G é um grupo Kleiniano, então G é um subgrupo discreto de M^2 .*

Prova: Se G não é discreto então existe, pela proposição 2.1, uma seqüência de elementos distintos $\{g_m\}$ em G tal que $g_m \rightarrow id$. Daí, $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $g_m(z) \rightarrow z$. Isto implica que $z \notin {}^0\Omega(G)$, logo ${}^0\Omega(G) = \emptyset$. Absurdo! ■

Teorema 2.3 Se G é um grupo Kleiniano tal que $\infty \in {}^0\Omega$, então são válidas as seguintes propriedades:

- (i) os raios dos círculos isométricos dos elementos de G possuem um limitante superior;
- (ii) para cada número real $K > 0$, existe no máximo um número finito de elementos $g \in G$ tal que $R_g > K$;
- (iii) para cada seqüência de elementos distintos não triviais $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ de G , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{g_n} = 0.$$

Prova:

- (i) Como $\infty \in {}^0\Omega$, existe uma boa vizinhança de ∞ . Considere esta vizinhança como o exterior de um círculo \mathcal{C} de raio ρ . Então para todo $g \in G - \{id\}$, $g(\infty)$ pertence ao interior deste círculo \mathcal{C} .

Lembre-se de que $R_{gh} = \frac{R_g \cdot R_h}{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)|}$.

Nesta expressão, substitua g por gh e h por h^{-1} .

$$\text{Então, } R_{ghh^{-1}} = \frac{R_{gh} \cdot R_h^{-1}}{|(gh)^{-1}(\infty) - h^{-1}(\infty)|} = \frac{R_g \cdot R_h \cdot R_h^{-1}}{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)| |(gh)^{-1}(\infty) - h^{-1}(\infty)|}.$$

$$\text{Portanto, } (R_h)^2 = \underbrace{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)|}_{< 2\rho} \underbrace{|(gh)^{-1}(\infty) - h^{-1}(\infty)|}_{< 2\rho}.$$

Logo, $R_h < 2\rho$ para todo $h \in G$.

Isto também mostra que a união de todos os círculos isométricos dos elementos de G está contida no interior de um círculo de raio 3ρ .

- (ii) Suponhamos que $g, h \in G$ são tais que $R_g > K$ e $R_h > K$.

$$\text{De } R_{gh} = \frac{R_g \cdot R_h}{|g^{-1}(\infty) - h(\infty)|}, \text{ temos que } |g^{-1}(\infty) - h(\infty)| = \frac{R_g \cdot R_h}{R_{gh}} > \frac{K^2}{2\rho}.$$

Suponha que existam infinitos $g_i \in G$, $i \in \mathbb{N}$, tal que $R_{g_i} > K$. Pelo que acabamos de fazer, iríamos encontrar uma quantidade infinita de pontos no interior do círculo \mathcal{C} tais que a distância entre dois deles é maior do que $\frac{K^2}{2\rho}$. Mas isto é um absurdo pois o conjunto $\{g_i^{-1}(\infty)\}$ é discreto e contido no conjunto compacto $\overline{\text{interior}(\mathcal{C})}$.

(iii) A demonstração segue da negação da propriedade (ii). ■

Seja G um subgrupo de M^2 . Um ponto $x \in \widehat{\mathbb{C}}$ é um **ponto limite de G** se existem $z \in {}^0\Omega(G)$ e uma seqüência $(g_m) \subset G$ de elementos distintos com $g_m(z) \rightarrow x$. O conjunto de todos os pontos limite de um grupo G é o **conjunto limite de G** denotado $\Lambda(G)$.

Como consequência, para um grupo Kleiniano, temos que $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$.

Teorema 2.4 *Sejam G um grupo Kleiniano e $x \in \Lambda(G)$. Então existem uma seqüência de elementos distintos $(g_m) \subset G$ e um ponto limite y tais que $g_m(z) \rightarrow x$ uniformemente em compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$.*

Corolário 2.5 *Se (g_m) é uma seqüência de elementos distintos de um grupo Kleiniano G , então existe uma subseqüência (q_m) e pontos limites x e y tais que $q_m(z) \rightarrow x$ uniformemente em compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$.*

Para uma demonstração do teorema 2.4 e do corolário 2.5, veja a referência [4], página 22.

Teorema 2.6 *Para um grupo Kleiniano G , o conjunto limite $\Lambda(G)$ é fechado, invariante por G e nunca denso.*

Prova: Se $x \in \Lambda(G)$, existe uma seqüência (g_m) de elementos distintos de G e um ponto $z \in {}^0\Omega(G)$ com $g_m(z) \rightarrow x$. Então a seqüência $g \circ g_m(z)$ converge para $g(x)$, assim o conjunto limite é invariante por G . Para mostrar que Λ nunca é denso, basta observar que toda vizinhança de x contém pontos do conjunto regular livre e $\Lambda \cap {}^0\Omega = \emptyset$. Para mostrar que Λ é fechado, considere uma seqüência de pontos limites distintos (x_m) convergindo para um ponto x . Pelo teorema 2.4, é possível encontrar um ponto $z \in {}^0\Omega(G)$ tal que para cada m exista uma seqüência $g_{m,k}$

de elementos distintos de G com $g_{m,k}(z) \rightarrow x_m$. Seja $\delta_m > 0$ uma distância que isola x_m de qualquer outro ponto x_i . Para cada índice m , escolha $k = k_m$ suficientemente grande para que $d(g_{m,k_m}(z), x_m) < \delta/2$ (onde d é a distância esférica). Assim conseguimos uma seqüência de elementos distintos $(g_{m,k_m}) \subset G$ com $g_{m,k_m}(z) \rightarrow x$, mostrando que x é um ponto limite de G . ■

Teorema 2.7 *Seja G um grupo Kleiniano. Se $\Lambda(G)$ contém mais de dois pontos, então $\Lambda(G)$ é um subconjunto perfeito do plano. Isto é, todo ponto de $\Lambda(G)$ é ponto de acumulação de outros pontos de $\Lambda(G)$.*

Prova: Assuma que $\Lambda(G)$ tem no mínimo três pontos. Se $x \in \Lambda(G)$, sabemos que existe uma seqüência de elementos distintos $\{g_m\}$ de G e existe $y \in \Lambda(G)$ tal que, $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$, $g_m(z) \rightarrow x$. Em particular, existem dois pontos limites distintos x_1 e x_2 , não necessariamente diferentes de x , tais que $g_m(x_1) \rightarrow x$ e $g_m(x_2) \rightarrow x$. Para cada m , ou $g_m(x_1) \neq x$ ou $g_m(x_2) \neq x$. Assim existe uma seqüência de pontos limites distintos convergindo para x . ■

Um grupo Kleiniano cujo conjunto limite tem no máximo dois pontos é chamado **elementar**. Caso contrário, é chamado **não elementar**.

2.3 A Partição de $\widehat{\mathbb{C}}$

Em geral, se G é um grupo agindo num espaço topológico X , o **estabilizador** de um subconjunto Y é o subgrupo $Stab_G(Y) = \{g \in G : g(Y) = Y\}$.

Dizemos que um subconjunto Y é **precisamente invariante por um subgrupo H de G** se $H = Stab_G(Y) = \{g \in G : g(Y) = Y\}$ e $g(Y) \cap Y = \emptyset$, $\forall g \in G - H$.

Proposição 2.8 *Suponha que um domínio D (subconjunto de $\widehat{\mathbb{C}}$ aberto e conexo) é G -invariante e que G age descontinuamente em D . Suponha também que D_0 é precisamente invariante por G_0 . Se D_0 é aberto em D ou $\frac{D_0}{G_0}$ é compacto, então $\frac{D_0}{G_0}$ (com a topologia quociente) e $\pi(D_0)$ (com a topologia de subespaço de $\frac{D}{G}$ e $\pi : D \rightarrow \frac{D}{G}$ a projeção natural) são homeomorfos.*

Prova: Ambas aplicações quocientes

$$\pi : D \rightarrow \frac{D}{G} \quad \text{e} \quad \phi : D_0 \rightarrow \frac{D_0}{G_0}$$

são contínuas e abertas quando os respectivos grupos são grupos de homeomorfismos dos espaços correspondentes. A restrição π_0 de π a D_0 é contínua, assim a bijeção natural

$$\theta = \pi_0 \phi^{-1} : \frac{D_0}{G_0} \rightarrow \pi(D_0)$$

dada por

$$G_0(x) \rightarrow G(x)$$

onde $G(x)$ é a G -órbita de x , é contínua. Se D_0 é aberto em D , então π_0 é uma aplicação aberta,

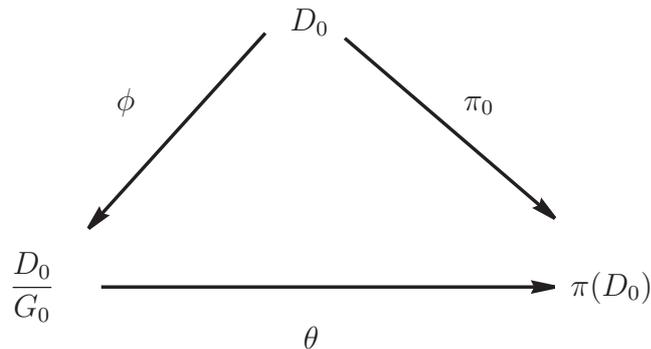


Figura 2.1: Esquema da demonstração da proposição 2.8

pois π é uma aplicação aberta, e θ^{-1} é contínua. Se $\frac{D_0}{G_0}$ é compacto, então θ é uma bijeção contínua de um espaço compacto para um espaço de Hausdorff e assim é um homeomorfismo. ■

Proposição 2.9 *Seja G um grupo Kleiniano. Então um ponto x está no conjunto regular se, e somente se, $Stab_G(x)$ é finito e existe uma vizinhança U de x precisamente invariante por $Stab_G(x)$.*

Prova: Se $x \in \Omega(G)$, existe uma vizinhança U de x tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ só para um número finito de elementos de $g \in G$, daí $Stab_G(x)$ é finito. Tomando uma vizinhança menor \tilde{U} , se necessário, podemos supor que $g(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ somente para $g \in Stab_G(x)$. A interseção $\bigcap_{g \in Stab_G(x)} g(\tilde{U})$ é precisamente invariante sob $Stab_G(x)$. A recíproca é imediata. ■

Teorema 2.10 Para todo grupo Kleiniano G , $\widehat{\mathbb{C}}$ é a união disjunta de $\Lambda(G)$ e $\Omega(G)$.

Prova: É claro que $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$. Seja $x \notin \Omega$. Considere uma vizinhança qualquer U de x . Como existem infinitas translações por G de U que interceptam U , podemos encontrar uma seqüência (g_m) de elementos distintos de G e uma seqüência de pontos (z_m) tais que tanto $(g_m(z_m))$ como (z_m) convergem para x . Pelo corolário 2.5, existem pontos limites y e w tais que $g_m(z) \rightarrow w$ uniformemente em compactos de $\widehat{\mathbb{C}} - \{y\}$. Há duas possibilidades: se $x = y$, está pronto; se $x \neq y$, y não é ponto de acumulação da seqüência $(g_m(z_m))$ que deve se acumular em w , assim $x = w \in \Lambda$. ■

Proposição 2.11 Todo ponto em $\Omega - {}^0\Omega$ é ponto fixo de um elemento elíptico de ordem finita.

Prova: Se $x \in \Omega$ então existe uma vizinhança U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - Stab_G(x)$, sendo $stab_G(x)$ finito. Se $g \in Stab_G(x)$ e $g \neq id$ então g deve ter ordem finita, já que $g^n \in Stab_G(x)$ para todo n . Daí g é elíptico de ordem finita. Se $stab_G(x) = \{id\}$ então $x \in {}^0\Omega$. ■

2.4 Domínio Fundamental

Um **domínio fundamental** D para um grupo Kleiniano G é um aberto não vazio do conjunto regular $\Omega(G)$ tal que:

- (1) para todo $g \in G - \{id\}$, $g(D) \cap D = \emptyset$;
- (2) para todo $z \in \Omega$, existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \overline{D}$;
- (3) a fronteira de D é uma união de pontos limites e um certa quantidade enumerável de curvas que são chamadas de **lados do domínio**;
- (4) os lados de D são, dois a dois, identificados por elementos de G , isto é, se s é um lado de D , então existe outro lado s' , não necessariamente diferente de s e existe $g \in G$ tal que $g(s) = s'$. Tal elemento é o **identificador de lados** de s para s' . Define-se $(s')' = s$, ou seja, o identificador de lados de s' para s é g^{-1} ;

- (5) se s é um lado de D e $\{g_m\}$ é uma seqüência de elementos distintos de G então o diâmetro($g_m(s)$) $\rightarrow 0$;
- (6) todo subconjunto compacto de Ω intercepta somente uma quantidade finita de transladados de D , por elementos de G .

Observação: Se existir um lado s de D tal que $s' = s$, $g(s) = s' = s$. Neste caso, $g = g^{-1}$ daí $g^2 = id$.

Suponhamos agora que D seja um domínio fundamental para um grupo Kleiniano G . Observe que os identificadores de lados definem uma relação de equivalência em \bar{D} :

- (a) um ponto $x \in int(D)$ somente é equivalente a ele mesmo;
- (b) dois pontos da fronteira de D são equivalentes se existe um identificador de lados que leva um ponto no outro.

Seja D^* o conjunto dessas classes de equivalência munido com a topologia quociente. Observe que existe uma projeção natural $\varphi : D^* \rightarrow \frac{\Omega}{G}$.

Teorema 2.12 *A projeção natural $\varphi : D^* \rightarrow \frac{\Omega}{G}$ é um homeomorfismo.*

Para uma demonstração, veja [4], página 30.

2.5 Domínio Fundamental de Ford

Seja G um grupo Kleiniano tal que $\infty \in {}^0\Omega$. Como sabemos, define-se o círculo isométrico de todo elemento $g \in G - \{id\}$. O **domínio de Ford** de G , denotado por F , é definido como

$$F = \bigcap_{g \in G - \{id\}} ext(I_g).$$

Teorema 2.13 *O domínio de Ford é um domínio fundamental para G .*

Prova: A prova consiste em mostrar que o domínio de Ford satisfaz as seis condições de domínio fundamental para G .

Sabemos que todo $g \in G - \{id\}$ é tal que $g(ext(I_g)) \subset int(I_g^{-1})$. Portanto F não contém pontos G -equivalentes e F contém apenas pontos regulares de G . Está é a condição (1) para que F seja domínio fundamental.

É claro que a fronteira de F consiste de alguns arcos de círculos isométricos, e pontos limites, alguns deles contidos em círculos isométricos. Os lados de F são estes arcos de círculos isométricos.

Para provar (5) lembre-se de que o raio de uma seqüência distinta de círculos isométricos tendem a zero; isto implica a condição (5) para uma seqüência de lados contidos em círculos isométricos distintos. Agora, como um círculo isométrico é compacto, uma seqüência de lados distintos contidos num mesmo círculo isométrico tem diâmetro tendendo a zero. Estes dois casos demonstram (5) de modo geral.

Para provar (6), seja dada uma seqüência $\{g_1, g_2, \dots\}$ de elementos distintos de G . Temos que $g_i(F) \subset int(I_{g_i}^{-1})$. Como os raios dos círculos isométricos $I_{g_i}^{-1}$ tendem a zero e como os centros são imagens do ponto ideal $\infty \in {}^0\Omega$, vemos que a seqüência $g_i(F)$ pode se acumular somente em pontos limites de G . Isto demonstra a condição (6).

Como $\infty \in {}^0\Omega$, temos que F tem interior não vazio. Mais ainda, também temos que F é aberto. De fato, suponhamos por absurdo que existe um ponto $z \in F$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $g \in G$ tal que o círculo isométrico de g intercepte o círculo de raio ε e centro z . Daqui podemos encontrar uma seqüência de elementos distintos de G tais que seus círculos isométricos se aproximam de z . Como o raio destes círculos tendem a zero, vemos que os seus centros $g_n^{-1}(\infty)$ tendem a z . Ora, isto é um absurdo pois isto implica que z é ponto limite, mas $z \in F$ que só contém pontos regulares. Portanto F é aberto.

Agora vamos demonstrar a condição (4). Seja z um ponto pertencente a um lado s de F , sendo que s está contido no círculo isométrico de $f \in G$. Como $\infty \in {}^0\Omega$, vemos que diferentes elementos de G definem diferentes círculos isométricos. Portanto um lado de F está contido num único círculo isométrico. Visto que $z \in \overline{F}$, pode existir somente uma quantidade finita de

círculos isométricos contendo z . Primeiramente, suponha que z esteja contido apenas no círculo I_f . Então:

$$|g^{-1}(\infty) - z| > R_g, \text{ para todo } g \in G - \{f, id\} \text{ e } |f^{-1}(\infty) - z| = R_f.$$

Seja $w = f(z)$. Vamos agora utilizar a seguinte identidade ¹:

$$\frac{|(gf)^{-1}(\infty) - z|}{R_{gf}} = \frac{|g^{-1}(\infty) - f(z)|}{R_g} \cdot \frac{|f^{-1}(\infty) - z|}{R_f}, \quad (2.1)$$

desde que $gf(\infty) \neq \infty$. Daí se $g \neq f^{-1}$ e $g \neq id$, temos:

$$\frac{|g^{-1}(\infty) - f(z)|}{R_g} = \frac{|(gf)^{-1}(\infty) - z|}{R_{gf}} > 1.$$

E assim $|g^{-1}(\infty) - w| > R_g$. o que implica que $w = f(z)$ pertence ao exterior de todos os círculos isométricos de elementos $g \in G$ com $g \neq f^{-1}$ e $g \neq id$. Tudo isto implica que $f(z)$ é um ponto na fronteira de F . Concluindo, se $s \in \partial F$ então $s' = f(s)$ também é um lado de F contido no círculo isométrico $I_{f^{-1}}$. Para z arbitrário em s , a demonstração é essencialmente a mesma. Isto demonstra a condição (4).

Vamos agora demonstrar a condição (2). Seja $z \in \Omega$ um ponto regular de G . Então, exceto para uma quantidade finita de elementos $g \in G$, temos que $z \in ext(I_g)$. Caso contrário, z seria ponto limite. Não existe nada a ser demonstrado se z é G -equivalente ao ponto ideal. Então suponhamos que G não seja G -equivalente ao ponto ideal. Neste caso, como $z \in \Omega$, vemos que deve existir uma constante K tal que $|g^{-1}(\infty) - z| > K$, para todo $g \in G - \{id\}$. Daí

$$\frac{R_g}{|g^{-1}(\infty) - z|} < \frac{R_g}{K} < A < \infty,$$

pois R_g é limitado superiormente por uma constante positiva. Isto significa que existe um elemento $f \in G - \{id\}$ com $\frac{R_f}{|f^{-1}(\infty) - z|}$ maximal sobre todos os elementos de G . Isto é:

$$\frac{R_f}{|f^{-1}(\infty) - z|} \geq \frac{R_g}{|g^{-1}(\infty) - z|}, \forall g \in G - \{id\}. \quad (2.2)$$

Seja $w = f(z)$. Vamos provar que $w \in \bar{F}$.

Se $\frac{R_g}{|g^{-1}(\infty) - z|} \leq 1$, $z \in ext(I_g)$ ou $z \in I_g$

¹A identidade (2.1) decorre das proposições 1.6 e 1.7.

Se $\frac{R_g}{|g^{-1}(\infty) - z|} \geq 1$, $z \in \text{int}(I_g)$ ou $z \in I_g$.

Como $\frac{R_f}{|f^{-1}(\infty) - z|}$ é maximal e z está no interior de algum círculo isométrico, então $z \in \text{int}(I_f)$ e assim $w \in \text{ext}(I_{f^{-1}})$.

Pelas desigualdades (2.1) e (2.2), se $g \neq f^{-1}$, temos:

$$\frac{R_g}{|g^{-1}(\infty) - w|} = \frac{R_{gf}}{|(gf)^{-1}(\infty) - z|} \cdot \frac{|f^{-1}(\infty) - z|}{R_f} \leq 1. \quad (2.3)$$

Daí, $|g^{-1}(\infty) - w| \leq R_g$, para todo $g \in G - \{id\}$. Como $f(z) \in \Omega$, esta desigualdade pode ser uma igualdade apenas para um número finito de $g \in G$.

No primeiro momento, suponha que $|g^{-1}(\infty) - f(z)| > R_g, \forall g \in G - \{id\}$, é claro que $f(z) \in F$ como queríamos demonstrar.

No segundo momento, suponha que $|g^{-1}(\infty) - w| = R_g$ para apenas um certo número finito de $g \in G$ e que w pertença ao exterior de todos os outros círculos isométricos. Por absurdo, suponhamos que $w \notin \bar{F}$. Para que isto ocorra, w deve pertencer a pelo menos três círculos isométricos e que w é um ponto isolado em $\bigcap_{g \in G - \{id\}} \text{ext}(I_g)$. Vamos mostrar que se isto ocorre, então w é ponto limite, contradizendo nossa hipótese de que $w \in \Omega$.

O conjunto de tais pontos (pertencentes a pelo menos três círculos isométricos e não pertencentes a F) é discreto e enumerável, G kleiniano é enumerável (veja [4], página 17).

Considere a projeção natural $\pi : \Omega \rightarrow \frac{\Omega}{G}$. Como $F \subset \Omega$, $w \in \Omega$, $w \notin \bar{F}$ então $\pi(w) \notin \frac{\Omega}{G}$. Deste modo, o complementar $\frac{\Omega}{G} - \pi(\bar{F})$ contém apenas uma quantidade enumerável de pontos. Isto implica que deve existir um ponto em $\frac{\Omega}{G}$ pertencente a fronteira de $\pi(\bar{F})$. Tal ponto é G -equivalente a w , então suponhamos que ele seja $\pi(w)$. Daí existe uma seqüência de pontos $z_n \in \bar{F}$ e existe uma seqüência de elementos distintos $g_n \in G$ com $g_n(z_n) \rightarrow w$. Visto que $\text{diâmetro}(g_n(F)) \rightarrow 0$, concluímos que $g_n(F) \rightarrow w$. Logo, $w = f(z)$ é ponto limite de G . Como isso é uma contradição, concluímos que $w = f(z) \in \bar{F}$.

Como todo grupo Kleiniano é enumerável, a demonstração da condição (3) é imediata. ■

2.6 Grupos de Schottky

Teorema 2.14 *Considere $f, h \in M^2$ elementos que não fixam ∞ . Sejam $I_f, I_h, I_{h^{-1}}, I_{fh}$ os círculos isométricos de f, h, h^{-1}, fh , respectivamente.*

- *Se I_f e $I_{h^{-1}}$ são exteriores um ao outro, então I_{fh} está contido em $\text{int}(I_h)$.*
- *Se I_f e $I_{h^{-1}}$ são tangentes externamente, então I_{fh} está no interior de I_h e esses dois círculos são tangente internamente.*

Prova: Seja f um elemento de M^2 tal que $f(\infty) \neq \infty$. Pela proposição 1.7 temos:

$$|f(z) - f(w)| = \frac{R_f^2}{|z - f^{-1}(\infty)||w - f^{-1}(\infty)|} |z - w|. \quad (2.4)$$

Como I_f e $I_{h^{-1}}$ são exteriores um ao outro, $f^{-1}(\infty)$ é exterior a $I_{h^{-1}}$. O elemento h^{-1} aplica $f^{-1}(\infty)$ no interior de I_h , daí $h^{-1}f^{-1}(\infty) = (fh)^{-1}(\infty)$ está no interior de I_h e assim o centro de I_{fh} está no interior de I_h . Seja $x \in I_h$ ou $x \in \text{ext}(I_h)$, assim $|x - h^{-1}(\infty)| \geq R_h$.

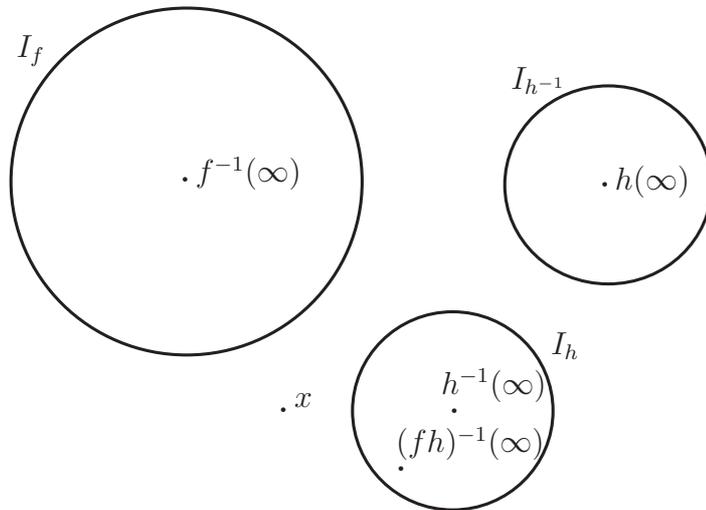


Figura 2.2: Demonstração do teorema 2.14

Devemos mostrar que $|x - (fh)^{-1}(\infty)| > R_{fh}$ para que I_{fh} esteja contido em I_h .

$$\begin{aligned}
|x - (fh)^{-1}(\infty)| &= |x - h^{-1}f^{-1}(\infty)| \\
&= |h^{-1}h(x) - h^{-1}f^{-1}(\infty)| \\
&= \frac{R_h^2}{|h(x) - h(\infty)||f^{-1}(\infty) - h(\infty)|} |h(x) - f^{-1}(\infty)| \\
&= \frac{R_h^2}{|h(x) - h(\infty)| \frac{R_f \cdot R_h}{R_{fh}}} |h(x) - f^{-1}(\infty)| \\
&= \underbrace{\frac{R_h}{|h(x) - h(\infty)|}}_{\geq 1} \underbrace{\frac{|h(x) - f^{-1}(\infty)|}{R_f}}_{> 1} R_{fh} > R_{fh}.
\end{aligned}$$

A terceira igualdade decorre da equação (2.4) e a quarta da proposição 1.6. ■

Sejam G_1, G_2, \dots, G_n grupos Kleinianos tais que $\infty \in {}^0\Omega(G_i)$ para $i = 1, \dots, n$, e $G_i \cap G_j = \{id\}$ para $i \neq j$.

Sejam os elementos desses grupos combinados de todas as maneiras possíveis formando o grupo de combinação $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$. Teremos dois tipos de elementos em G :

- (a) elemento pertencente a um grupo original G_i ;
- (b) (produto cruzado) elemento resultado de combinação de elementos nem todos pertencendo a um único grupo original G_i .

Vamos admitir que no tipo (b), os elementos estão na forma reduzida.

Em certos casos estaremos aptos em afirmar que o grupo G é Kleiniano e especificar um domínio fundamental para ele. Veja o teorema a seguir:

Teorema 2.15 *Sejam F_1, F_2, \dots, F_n os domínios de Ford dos grupos G_1, G_2, \dots, G_n , respectivamente. Suponha que cada círculo isométrico $I_g, g \in G_i$, é exterior aos círculos isométricos dos elementos de G_j com $i \neq j$ e exterior aos círculos isométricos de elementos do tipo (b). Então, o grupo $G = G_1 * G_2 * \dots * G_n$ é Kleiniano e a região $R = \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} F_i$ é o domínio de Ford de G .*

Prova: A região R é a região do lado de fora dos círculos isométricos dos elementos de G do tipo (a). Mostraremos que os círculos isométricos dos elementos do tipo (b) não contém em seu interior pontos de R .

Considere o produto cruzado geral: $u = h_m h_{m-1} \dots h_2 h_1$.

Como estamos admitindo que u está na forma reduzida, elementos sucessivos h_i, h_{i+1} não estão em um mesmo grupo original. Pelo teorema 2.14, os círculos isométricos de $h_1, h_2 h_1, h_3 h_2 h_1, \dots, u$, formam uma seqüência de tal maneira que o círculo isométrico de um envolve o círculo isométrico do seguinte na seqüência acima. Daí o círculo isométrico de um produto cruzado está situado no interior dos círculos isométricos dos grupos originais e portanto não colabora na construção de R .

Aplicamos u em $z_0 \in R$. Sejam I_i e I'_i representando os círculos isométricos de h_i e h_i^{-1} , respectivamente. Como z_0 é exterior a I_1 , h_1 aplica z_0 em z_1 interior a I'_1 . Como I'_1 é exterior a I_2 , z_1 é exterior a I_2 e h_2 aplica z_1 em z_2 no interior de I'_2 , e assim por diante. Como I'_{m-1} é exterior a I_m , h_m aplica z_{m-1} em z_m no interior de I'_m , $u(z_0) = z_m \in I'_m$. E como I_u está situado no interior de I_m , z_0 é exterior a I_m , ou seja, z_0 está do lado de fora de I_u . Assim, a região R é a região do lado de fora de todos os círculos isométricos dos elementos de G , isto é, R é o domínio de Ford de G . A existência de R mostra que G é Kleiniano. ■

Dados dois círculos de mesmo raio em $\widehat{\mathbb{C}}$, existem infinitas transformações $T \in M^2$ tais que os círculos dados são os círculos isométricos de T e T^{-1} . É fácil verificar que a transformação linear

$$T(z) = \frac{q'z - (qq' + r^2 e^{i\theta})}{z - q}, \text{ com } \theta \in \mathbb{R},$$

tem como círculo isométrico $I_t: |z - q| = r$ e T^{-1} tem como círculo isométrico $I_{t^{-1}}: |z - q'| = r$.

Se I_t e $I_{t^{-1}}$ são exteriores um ao outro, a região exterior a I_t e a $I_{t^{-1}}$ é o domínio de Ford do grupo cíclico G gerado por T , $G = \langle T \rangle$, pelo teorema 2.14.

O **grupo de Schottky** é construído como se segue: sejam $Q_1, Q'_1, \dots, Q_n, Q'_n$, $2n$ círculos externos um ao outro sendo que Q_i, Q'_i tem o mesmo raio. Seja T_i uma transformação aplicando Q_i em Q'_i de tal maneira que o exterior de Q_i é aplicado no interior de Q'_i . A transformação T_i gera o grupo cíclico $G_i = \langle T_i \rangle$. A parte do plano exterior a Q_i e a Q'_i é o domínio de Ford F_i de G_i . O grupo de Schottky G é dado pela combinação de G_1, \dots, G_n , $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$. Ele é

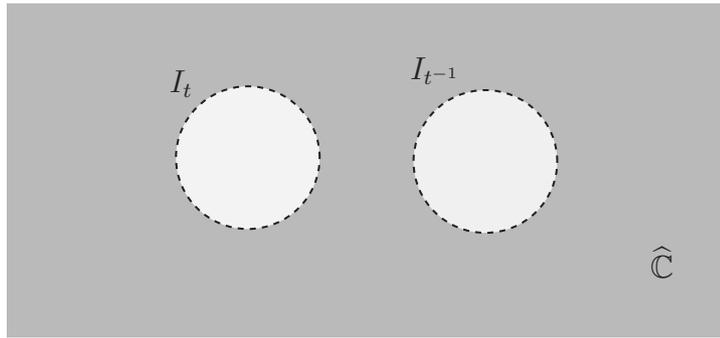


Figura 2.3: O domínio de Ford para $G = \langle T \rangle$ é a região destacada na figura gerado pelas transformações T_1, \dots, T_n e tem como domínio de Ford a parte do plano exterior aos $2n$ círculos.

Capítulo 3

Superfícies de Riemann

3.1 Definições e Exemplos

Seja S uma variedade de dimensão real dois. Uma **carta complexa** em S é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ de um conjunto aberto $U \subset S$ sobre um aberto $V \subset \mathbb{C}$.

Um **atlas complexo** em S é um sistema $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$ formado por cartas complexas em S tais que os abertos U_i formam uma cobertura de S e se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ para algum i, j então a **mudança de coordenadas**

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

é uma aplicação analítica complexa.

Num atlas complexo todas as mudanças de cartas são biholomorfas, isto é, elas e suas inversas são analíticas complexas, pois $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$. Mais ainda, todas as mudanças de cartas são aplicações conformes do plano.

Dizemos que dois atlas complexos \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 em S são **analiticamente equivalentes** se sua união for um atlas complexo em S .

Uma **estrutura complexa** para S é uma classe de equivalência de atlas complexos em S . Deste modo, uma estrutura complexa para S pode ser dada através da escolha de um atlas complexos em S .

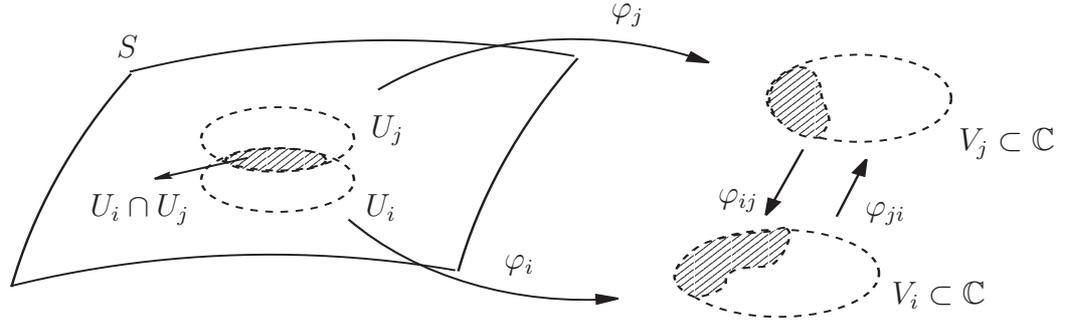


Figura 3.1: As mudanças de cartas φ_{ji} e φ_{ij} são analíticas complexas

Uma **superfície de Riemann** é um par (S, \mathcal{A}) onde S é uma variedade conexa de dimensão real dois e \mathcal{A} é uma estrutura complexa para S .

Usualmente denotaremos uma superfície de Riemann (S, \mathcal{A}) simplesmente por S . Pela observação acima, para se especificar uma superfície de Riemann (S, \mathcal{A}) é suficiente escolher um atlas complexo para S pertencente a \mathcal{A} , o qual também será denotado por \mathcal{A} .

Observe que todas as superfícies de Riemann são variedades orientáveis, pois o determinante da matriz Jacobiana de uma aplicação biholomorfa sempre é positivo.

Vejamos agora alguns exemplos de superfície de Riemann.

Exemplo 1 *O plano complexo \mathbb{C} .*

Exemplo 2 *Subconjuntos abertos e conexos de uma superfície de Riemann.*

Exemplo 3 *O plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Aqui, um atlas complexo pode ser dado através de duas projeções estereográficas.*

Exemplo 4 (toros) *Suponhamos que ω_1 e $\omega_2 \in \mathbb{C}$ são vetores linearmente independentes sobre \mathbb{R}^2 . Defina $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$.*

Dizemos que dois números complexos z, z' são equivalentes mod Γ se $z - z' \in \Gamma$. Isto define uma relação de equivalência em \mathbb{C} , o conjunto das classes de equivalência será denotado por $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ e a projeção canônica por $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$. Em $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ colocamos a topologia quociente que torna π contínua

e aberta e torna $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ um espaço de Hausdorff conexo. Também temos que $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ é compacto pois ele é a imagem, via a aplicação contínua π , do conjunto compacto $\{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2, \lambda, \mu \in [0, 1]\}$.

Uma estrutura complexa para $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ pode ser definida do seguinte modo: seja $V \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto que não contém pontos equivalentes por Γ . Deste modo, se $U = \pi(V) \subset \frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$ então $\pi|_V : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Definimos sua inversa $\varphi : U \rightarrow V$ como sendo uma carta complexa para $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$.

Precisamos mostrar que $\mathcal{A} = \{(U, \varphi) : U \text{ definido como acima}\}$ define um atlas complexo para $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$. Claramente a união de todos tais conjuntos U cobrem $\frac{\mathbb{C}}{\Gamma}$. Assim é suficiente mostrar que se (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) estão em \mathcal{A} , então a aplicação $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ é analítica complexa. Se $z \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$ então $\pi(\varphi_{ij}(z)) = \pi(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(z)) = \varphi_j^{-1}(z) = \pi(z)$. Assim $\varphi_{ij}(z)$ é equivalente a $z \bmod \Gamma$. Logo, para todo $z \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $\varphi_{ij}(z) - z \in \Gamma$. Visto que Γ é discreto e que φ_{ij} é contínua, segue que $\varphi_{ij}(z) - z$ é constante em cada componente conexa de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$. Isto implica que φ_{ij} é analítica.

Sejam (S_1, \mathcal{A}_1) e (S_2, \mathcal{A}_2) duas superfícies de Riemann. Uma aplicação contínua $f : S_1 \rightarrow S_2$ é **analítica** em $p \in S_1$ se existirem cartas complexas $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$ e $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2$ ao redor de p e $f(p)$, respectivamente, tais que a aplicação

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(f^{-1}(f(U_1) \cap U_2)) \rightarrow \varphi_2(f(U_1) \cap U_2)$$

seja uma aplicação analítica complexa.

Mais ainda, dizemos que $f : S_1 \rightarrow S_2$ é **analítica** se ela for analítica em todos os pontos de S_1 . Uma **equivalência conforme** entre S_1 e S_2 é um homeomorfismo analítico $f : S_1 \rightarrow S_2$.

Dizemos que duas superfícies de Riemann são **conformemente equivalentes** se existir uma equivalência conforme entre elas.

Localmente uma superfície de Riemann S não é nada mais que um conjunto aberto do plano complexo, pois todo ponto $p \in S$ está contido no domínio de uma carta complexa $\varphi : U \rightarrow V$ de S , que é uma equivalência conforme. Entretanto, este ponto p pode estar no domínio de muitas cartas de S e nenhuma destas pode ser distinguida das outras. Por esta razão, somente podemos

carregar para uma superfície de Riemann aquelas noções de análise complexa do plano \mathbb{C} que se mantém invariantes por equivalências conformes, isto é, aquelas noções que não dependem da escolha de uma carta particular.

Um método de construir superfícies de Riemann é através do espaço quociente com respeito a ação de grupo descontínuo agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$. O teorema a seguir nos garante essa construção.

Teorema 3.1 *Seja G é um grupo Kleiniano agindo em $\widehat{\mathbb{C}}$ com conjunto regular Ω . Seja $\pi : \Omega \rightarrow \frac{\Omega}{G}$ a projeção canônica. Então existe uma estrutura complexa em $S = \frac{\Omega}{G}$ que o torna uma superfície de Riemann e π analítica.*

Prova: Precisamos primeiramente mostrar que S é um espaço de Hausdorff. Mostraremos que se x e y são pontos não equivalentes em Ω , então existem vizinhanças U de x e V de y cujas as projeções são disjuntas. Para isto, escolha boas vizinhanças U' de x e V' de y . Como U' e V' estão contidos em Ω , somente uma quantidade finita de translados de U' pode interceptar V' . Deste modo podemos considerar vizinhanças menores U e V , com $x \in U \subset U'$ e $y \in V \subset V'$, tais que nenhum translado de U intercepta V .

Agora vamos definir uma estrutura complexa em $S = \frac{\Omega}{G}$. Primeiramente vamos considerar pontos em ${}^0\Omega$. Seja U uma boa vizinhança de um ponto $z \in {}^0\Omega$. Visto que $\pi|_U$ é injetiva, a aplicação $\pi^{-1}|_U : \pi(U) \rightarrow U$ está bem definida em $\pi(U)$. Isto define uma carta local ao redor do ponto $\pi(z)$. Agora, sejam $\pi(U)$ e $\pi(V)$ duas tais vizinhanças de um mesmo ponto $\pi(z)$, onde U e V são abertos em ${}^0\Omega$. Se $\pi(U) \cap \pi(V) = W$ então deve existir um elemento $g \in G$ tal que $g(U \cap \pi^{-1}(W)) = V \cap \pi^{-1}(W)$. Isto significa que $(\pi|_V)^{-1} \circ (\pi|_U) = g$, que é uma aplicação analítica.

Agora seja $z \in \Omega - {}^0\Omega$, seja U uma boa vizinhança de z e seja $J = \text{Stab}_G(z)$. Pela proposição 2.9 J é finito e podemos escolher U tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset$ se, e somente se, $g \in \text{Stab}_g(z)$. Visto que J é um subgrupo finito de G , temos que todo elemento não trivial de J é elíptico, com um ponto fixo z , veja proposição 2.11.

Afirmção: Se f possui dois pontos fixos, e se f e g possuem apenas um ponto fixo em comum, então o comutador $[f, g]$ é parabólico. De fato, normalizando G , podemos supor que f e g possuem ∞ como ponto fixo comum, e que f também fixa a origem: $f(\infty) = g(\infty) = \infty$ e

$f(0) = 0$. Das formas normais dos elementos elípticos, parabólicos e loxodrômicos, f e g podem ser representados pelas seguintes matrizes, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

com $a, b, t \neq 0$.

Por cálculo direto

$$[f, g] = f g f^{-1} g^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -ab + t^2 ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $[f, g](z) = z + ab(t^2 - 1)$. Como $ab(t^2 - 1) \neq 0$, esse elemento é parabólico.

Dessa afirmação, vemos que todos os elementos de J possuem os mesmos pontos fixos. Normalizando o grupo G , podemos supor que os elementos de J fixam $z' = 0$ e $z = \infty$. Deste modo, todos os elementos de J possuem a forma $z \rightarrow e^{2\pi ip/q} z$. Visto que J é finito, tirando o mínimo múltiplo comum, vemos que os expoentes q destes elementos podem ser colocados num denominador comum.

Assim $J = \{z \rightarrow e^{2\pi im/n} z, m = 1, 2, \dots, n\}$. Isto demonstra que J é cíclico.

Lembre-se de que temos U uma boa vizinhança de $z = 0$. Sem perda de generalidade, podemos considerar U na forma do círculo unitário centrado na origem. Agora considere a aplicação $q : U \rightarrow U$ definida por $q(z) = z^n$. Observe que para todo $z \in U$, temos:

$$q(e^{2\pi im/n} z) = (e^{2\pi im/n} z)^n = z^n.$$

Portanto esta aplicação q leva todos os pontos J -equivalentes em U num único ponto ainda em U .

Agora estamos prontos para definir cartas locais ao redor de pontos $\pi(z)$ para $z \in \Omega - {}^0\Omega$. Se $z \in \Omega - {}^0\Omega$, seja U_z uma boa vizinhança de z tal que $g(U_z) = U_z$ se $g(z) = z$, e $g(U_z) \cap U_z = \emptyset$ se $g(z) \neq z$. Seja $J = \text{Stab}_G(z)$. Sabemos que $\text{Stab}_G(z)$ é cíclico gerado por um elemento elíptico de ordem finita, digamos n . Sejam z e z' os pontos fixos dos elementos em J . Considere uma aplicação analítica $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\sigma(U_z) = \Delta$, sendo Δ é o disco unitário centrado na origem, $\sigma(z) = 0$ e $\sigma(z') = \infty$. Deste modo, se $R_n(z) = e^{2\pi i/n} z$ é uma rotação de ordem n ao redor da origem então $J = \text{Stab}(z)$ é gerado pelo elemento $\sigma^{-1} R_n \sigma$. Considere a aplicação $q : \Delta \rightarrow \Delta$ definida por $q(z) = z^n$. Uma carta local ao redor de $\pi(U_n)$ pode ser definida por:

$\varphi : \pi(U_z) \rightarrow \Delta$ tal que $\varphi(w) = q\sigma\pi^{-1}(w)$. Pelo que falamos acima, esta aplicação está bem definida e define um homeomorfismo entre $\pi(U_z)$ e Δ .

Finalmente precisamos somente investigar as mudanças de cartas. Existem praticamente dois tipos de interseção de domínios de cartas locais: (1) duas cartas locais ao redor de pontos fixos de elementos elípticos; (2) uma carta local ao redor de um ponto fixo de um elemento elíptico com uma carta local ao redor de um ponto de ${}^0\Omega$. Em qualquer um destes casos vemos que, da maneira como foi definido o aberto U_z , as interseções destas cartas não contém pontos fixos de elementos elípticos. E portanto a mudança de cartas é sempre um elemento do grupo G . ■

Exemplo 5 Considere o grupo G gerado por $f(z) = \frac{1}{z}$ e por $h(z) = -z$.

$$\text{Então } G = \left\{ id, f(z) = \frac{1}{z}, h(z) = -z, fh(z) = hf(z) = \frac{-1}{z} \right\}.$$

Como os pontos fixos de f são 1 e -1 , os pontos fixos de h são 0 e ∞ e os pontos fixos de $f \circ h$ são i e $-i$, temos:

$${}^0\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}} - \{1, -1, 0, \infty, i, -i\}$$

$$\Lambda(G) = \emptyset$$

$$\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}}$$

Vamos encontrar um domínio fundamental para o grupo Kleiniano G .

Seja $\Phi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ a inversão no círculo unitário $\mathcal{C}(0, 1)$, note que $f(z) = \overline{\Phi(z)}$. Agora observe a figura 3.2.

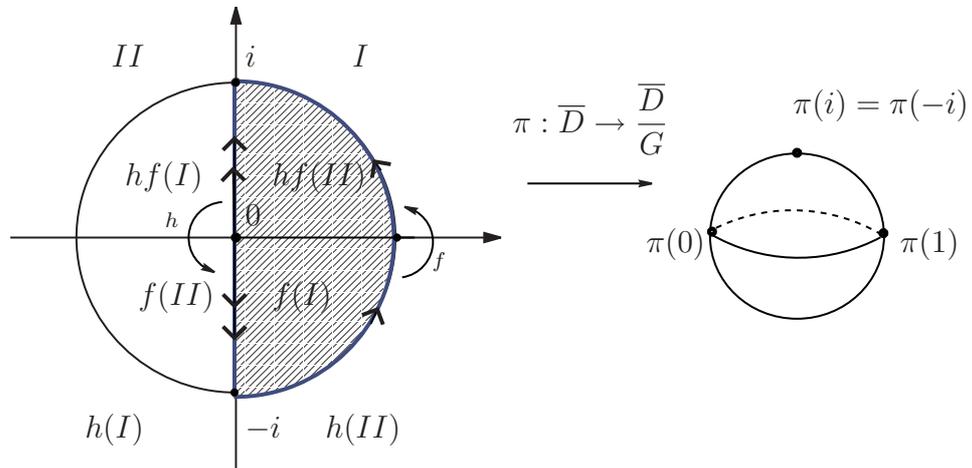


Figura 3.2: A região hachurada é um domínio fundamental para o grupo G

A região hachurada, que chamaremos de D , é um domínio fundamental para G e pela maneira que encontramos D , os seus lados ficam identificados através dos elementos que geram G . Como sabemos $\frac{\bar{D}}{G}$ e $\frac{\Omega}{G}$ são homeomorfos (teorema 2.12), então ao passarmos o quociente $\frac{\bar{D}}{G}$, teremos

uma superfície de Riemann como na figura 3.2, uma esfera com 3 pontos marcados, cada um de ordem 2.

Exemplo 6 Considere o grupo G gerado por $f(z) = z + 1$.

Então $G = \{z \mapsto z + n ; n \in \mathbb{Z}\}$.

Como o único ponto fixo de todo elemento não trivial de G é ∞ , temos:

$${}^0\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$$

$$\Lambda(G) = \infty$$

$$\Omega(G) = \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$$

É imediato que um domínio fundamental para G é a região hachurada D da figura 3.3.

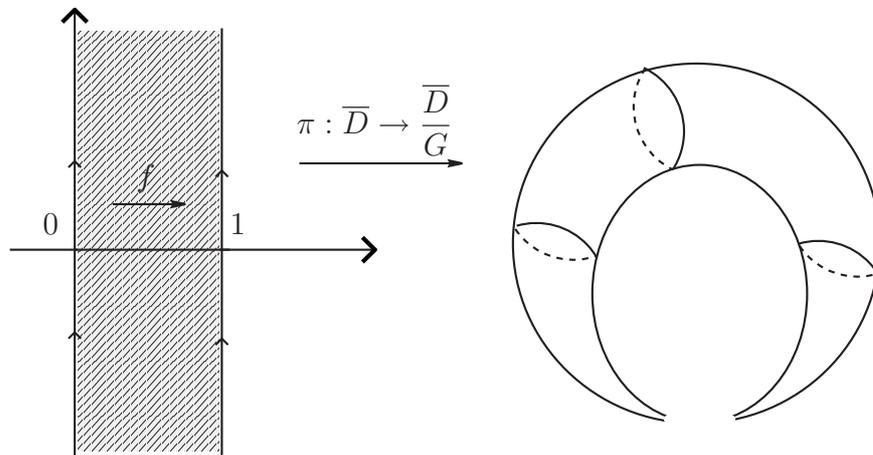


Figura 3.3: A região hachurada é um domínio fundamental para o grupo G

Os dois lados de D são identificados através do elemento f que gera G . Ao passarmos o quociente $\frac{\overline{D}}{G}$, teremos uma superfície de Riemann como na figura 3.3.

Capítulo 4

Geometria Hiperbólica Plana

A geometria hiperbólica plana é a geometria não-Euclidiana que nega apenas o 5^o postulado de Euclides e mantém os outros. O 5^o postulado diz que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a reta dada. Uma negação deste seria: sejam L uma reta e P um ponto não pertencente a L , por P passam pelo menos duas retas paralelas a L .

4.1 Modelos para o Plano Hiperbólico

Seja $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior. As **retas** em \mathbb{H}^2 são as semi-retas ortogonais ao eixo x e os semi-círculos centrados no eixo x .

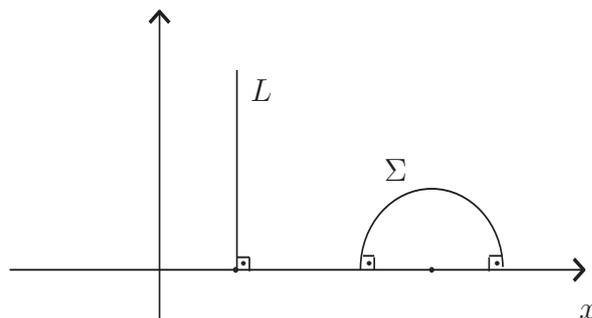


Figura 4.1: Retas em \mathbb{H}^2

Seja Φ_L a inversão (reflexão) na reta L (semi-reta ortogonal ao eixo x) passando pelo ponto $x = a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\Phi_L(z) = -\bar{z} + 2a$$

$$\Phi_L(x, y) = (-x + 2a, y)$$

Portanto, Φ_L preserva a altura y de qualquer parte de \mathbb{H}^2 .

Seja Φ_Σ a inversão no semi-círculo Σ de centro $x = a \in \mathbb{R}$ e raio r .

Pela equação (1.2) teremos:

$$\Phi_\Sigma(z) = a + \frac{r^2}{|z - a|^2}(z - a)$$

$$\Phi_\Sigma(x, y) = \left(a + \frac{r^2}{(x - a)^2 + y^2}(x - a), \frac{r^2}{(x - a)^2 + y^2}y \right)$$

Estas inversões preservam \mathbb{H}^2 e é claro que $\Phi_L, \Phi_\Sigma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ são homeomorfismos que preservam ângulos entre curvas.

O **modelo do semi-plano superior** nada mais é que o conjunto \mathbb{H}^2 com a métrica local ρ induzida da diferencial $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}[z]}$. Assim, para cada curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ diferenciável por partes ligando os pontos $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, o comprimento de γ é definido por

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt.$$

A **distância** entre p e q é definida por $\rho(p, q) = \inf \|\gamma\|$ sendo o ínfimo tomado sobre todos tais caminhos γ . Com esta definição de distância, as inversões em semi-retas e semi-círculos ortogonais ao eixo x são isometrias e as geodésicas são as retas de \mathbb{H}^2 .

A seguir enunciaremos o teorema que caracteriza o grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 . Para uma demonstração, veja [1], página 137.

Teorema 4.1 *Se $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria em \mathbb{H}^2 , então*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{ou} \quad g(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$. E mais, o grupo das isometrias $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é gerado por inversões em geodésicas hiperbólicas.

Seja $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. O **modelo do disco unitário** nada mais é que o conjunto Δ com a métrica local ρ_1 derivada da diferencial $ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}$.

As geodésicas neste modelo são os arcos de círculos ortogonais ao bordo $\partial\Delta$ e os diâmetros de Δ .

Este modelo é obtido a partir de \mathbb{H}^2 usando uma isometria f descrita a seguir. Seja $h^{-1} : \Delta \rightarrow \mathbb{H}^2$ a seguinte transformação de Möbius: primeiro aplique $z \mapsto z/2$, depois $(x, y) \mapsto (x, y + 1/2)$, componha agora com a inversão em $C(0, 1)$ e depois $(x, y) \mapsto (x, y - 1)$, finalmente aplique $z \mapsto -\bar{z}$, já que esta aplicação preserva o semi-plano superior.

Assim $h^{-1} : \Delta \rightarrow \mathbb{H}^2$ será $h^{-1}(z) = -\frac{iz + 1}{z + i}$ e $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ será $h(z) = -\frac{iz + 1}{z + i}$. Como $-i$ é a rotação de 90° no sentido horário, então preserva Δ . Agora defina $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ por $f(z) = -ih(z)$, daí $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$.

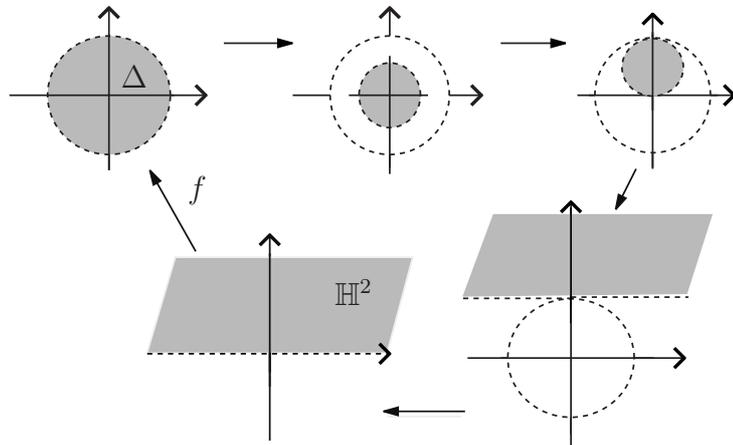


Figura 4.2: A isometria $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$

Observe que o grupo das isometrias no modelo do disco será $Isom(\Delta) = f \circ Isom(\mathbb{H}^2) \circ f^{-1}$, sendo f a isometria descrita a cima.

Teorema 4.2 *Se $g : \Delta \rightarrow \Delta$ é uma isometria em Δ , então*

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \quad \text{ou} \quad g(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}},$$

sendo $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 + |c|^2 = 1$. E mais, o grupo das isometrias $Isom(\Delta)$ é gerado por inversões em geodésicas hiperbólicas.

Para uma demonstração, veja [1], página 137.

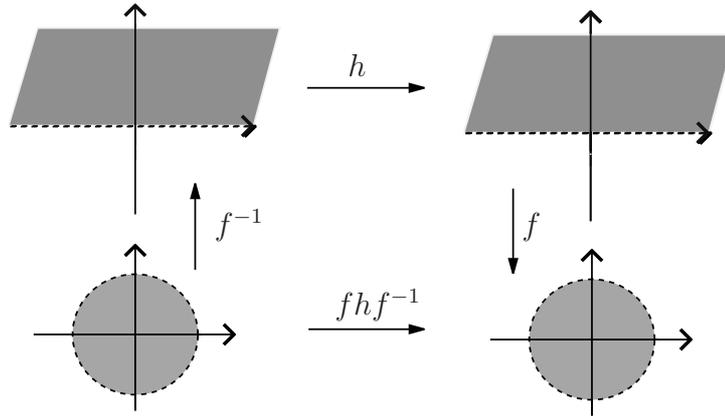


Figura 4.3: $Isom(\Delta) = f \circ Isom(\mathbb{H}^2) \circ f^{-1}$

4.2 Classificação das Isometrias

Sejam L_1 e L_2 geodésicas no plano hiperbólico (\mathbb{H}^2 ou Δ). Em qualquer um dos modelos podemos estender essas geodésicas até o círculo no infinito ($\partial\mathbb{H}^2$ ou $\partial\Delta$). Vamos denotar por $\overline{L_1}$ e $\overline{L_2}$ esses prolongamentos. Dizemos que:

- (1) L_1 e L_2 são **concorrentes** se $L_1 \cap L_2$ é um ponto no interior do plano hiperbólico.
- (2) L_1 e L_2 são **paralelas** se $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ é um ponto da fronteira do plano hiperbólico.
- (3) L_1 e L_2 são **disjuntas** se $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \emptyset$.

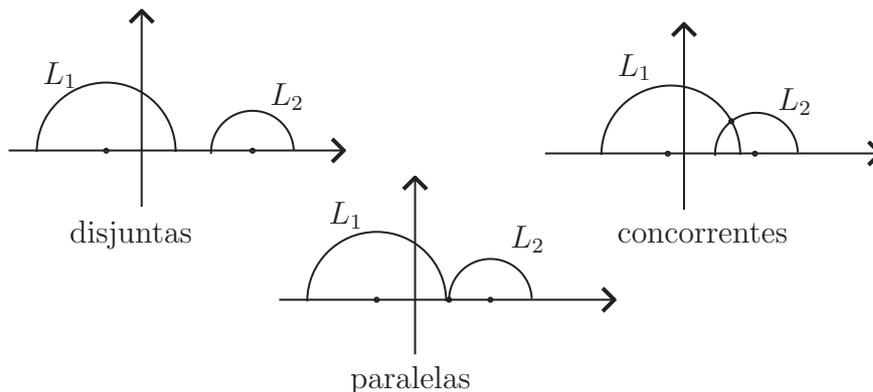


Figura 4.4: Posições relativas entre retas

Pelos teoremas 4.1 e 4.2, toda isometria conforme no plano hiperbólico, em qualquer um dos modelos (\mathbb{H}^2 ou Δ), é uma transformação de Möbius. Sejam $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ e $Isom^+(\Delta)$ os grupos

de isometrias conformes em \mathbb{H}^2 e em Δ , respectivamente.

Um grupo G de transformações de Möbius é dito um **grupo Fuchsiano** se, e somente se, existe algum disco G -invariante em que G age descontinuamente. Por esta definição, um grupo Fuchsiano G é um subgrupo discreto de M^2 com um disco invariante D (G age descontinuamente em D). Podemos assumir que o disco unitário Δ (ou \mathbb{H}^2) é G -invariante e assim considerar G como um grupo discreto de isometrias conformes do plano hiperbólico. Neste caso, segue da natureza descontínua da ação de G que $\Lambda(G) \subset \partial\Delta$.

Dizemos que G é do 1º **tipo** se, e somente se, $\Lambda(G) = \partial\Delta$, caso contrário, G é do 2º **tipo**. Quando G é do 2º tipo, $\Lambda(G)$ é a união enumerável de arcos fechados mutuamente disjuntos em $\partial\Delta$.

Trabalharemos somente com grupos Fuchsianos de isometrias conformes agindo no plano hiperbólico.

É importante observar que se G é um grupo Fuchsiano, então existe um disco G -invariante, assim os elementos loxodrômicos de G são todos hiperbólicos. Recordando a classificação das transformações de Möbius, classificaremos então as isometrias conformes do plano hiperbólico como parabólica, elíptica, ou hiperbólica.

Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, se g é uma isometria conforme do plano hiperbólico e se \tilde{g} é a extensão de g para o fecho do plano, então \tilde{g} tem pelo menos um ponto fixo no fecho do plano. Daremos a classificação das isometrias conformes de acordo com a localização dos pontos fixos de sua extensão. Como cada isometria conforme pode ser representada como um produto de duas inversões em retas, teremos a seguinte classificação:

Uma isometria conforme g é dita **elíptica** se, e somente se, ela pode ser representada como $g = \sigma_1\sigma_2$, sendo σ_1 e σ_2 inversões em geodésicas hiperbólicas concorrentes. Assim, g é elíptica se, e somente se, \tilde{g} possui um único ponto fixo no interior do plano hiperbólico.

Uma isometria conforme g é dita **parabólica** se, e somente se, ela pode ser representada como $g = \sigma_1\sigma_2$, sendo σ_1 e σ_2 inversões em geodésicas hiperbólicas paralelas. Assim, g é parabólica se, e somente se, \tilde{g} só possui um ponto fixo e este está no bordo do plano.

Uma isometria conforme g é dita **hiperbólica** se, e somente se, ela pode ser representada como $g = \sigma_1\sigma_2$, sendo σ_1 e σ_2 inversões em geodésicas hiperbólicas disjuntas L_1 e L_2 , respectivamente. Assim g é hiperbólica se, e somente se, \tilde{g} possui exatamente dois pontos fixos no bordo do plano hiperbólico. O **eixo** de g é a única geodésica g -invariante com os pontos fixos de \tilde{g} sendo os pontos finais desta geodésica. Esse eixo é ortogonal às geodésicas L_1 e L_2 .

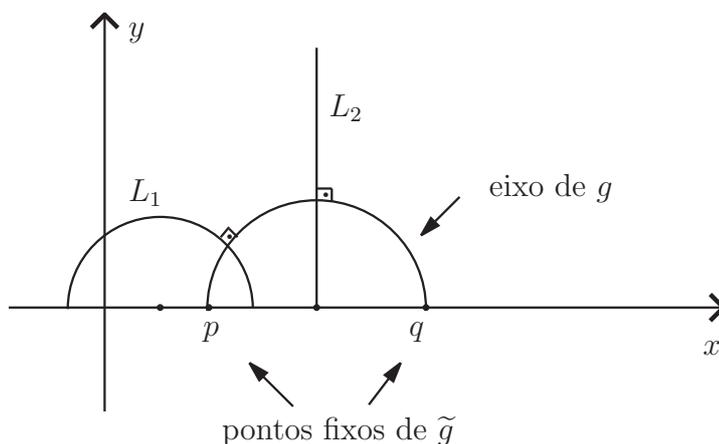


Figura 4.5: A composição das inversões em L_1 e L_2 representa um elemento hiperbólico g

Uma observação importante é que podemos escolher L_1 arbitrariamente e L_2 é determinada por g . Este fato é fácil de ser verificado quando $g(z) = kz$, $k > 0$, $k \neq 1$, no modelo do plano superior. Se $g(z) = kz$, $k > 1$, os seus pontos fixos são 0 e ∞ , daí o eixo de g é o semi-eixo positivo y . Se escolhermos L_1 como o semi-círculo de centro 0 e raio 1 , então L_2 será o semi-círculo de centro 0 e raio \sqrt{k}/k . Observe a figura 4.6.

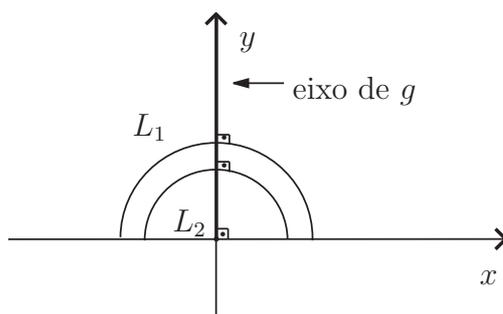


Figura 4.6: O elemento hiperbólico $g(z) = kz$ será a composição das inversões em L_1 e L_2

Para cada $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ temos a **função deslocamento** $\mathcal{D} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{D}(z) = \rho(z, g(z)) = \rho(z, g^{-1}(z))$.

Seja g um elemento hiperbólico, o **comprimento de translação** induzido por g é definido por

$$T = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} \rho(z, g(z)).$$

Teorema 4.3 *Seja $g \in Isom(\mathbb{H}^2)$ um elemento hiperbólico. Então*

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T\right) = \frac{1}{2}|tr(g)|.$$

Prova: Sem perda de generalidade, consideraremos $g(z) = kz$. Pelo teorema 7.2.1, referência [1], página 130, temos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) = \frac{|z - g(z)|}{2[Im(z).Im(g(z))]^{1/2}} = \frac{|z||1 - k|}{2y\sqrt{k}}.$$

Portanto a distância será mínima quando $x = 0$, ou seja, quando $z \in \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$. Neste caso, temos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) = \frac{|1 - k|}{2\sqrt{k}}.$$

Usando o fato de que

$$tr(g) = \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}$$

e a igualdade trigonométrica

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) - \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) = 1,$$

temos

$$\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) = \frac{1}{4}tr^2(g).$$

Daí

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T\right) = \frac{1}{2}|tr(g)|. \quad \blacksquare$$

Como já vimos, um elemento hiperbólico g é representado por $g = \sigma_1\sigma_2$, sendo σ_1 e σ_2 inversões em geodésicas hiperbólicas disjuntas L_1 e L_2 , respectivamente. Veremos agora que seu comprimento de translação pode ser dado através da distância entre essas duas geodésicas. Para isso, vamos considerar mais uma vez um elemento hiperbólico da forma $g(z) = kz$, $k > 1$, agindo

em \mathbb{H}^2 e expressar $g = \sigma_1\sigma_2$, sendo $\sigma_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ a inversão no semi-círculo de centro na origem e raio 1 e $\sigma_2(z) = \frac{1}{k\bar{z}}$ a inversão no semi-círculo de centro na origem e raio $\frac{\sqrt{k}}{k}$. Como sabemos, o eixo de g é a perpendicular comum a L_1 e a L_2 que é o semi-eixo y . Assim se $v_1 = i$ e $v_2 = \frac{i\sqrt{k}}{k}$, temos que

$$\rho(L_1, L_2) = \rho(v_1, v_2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{k}/k}\right) = \ln(\sqrt{k})$$

pela expressão da página 131 de [1]. Portanto,

$$\cosh(\rho(L_1, L_2)) = \frac{e^{\ln(\sqrt{k})} + e^{-\ln(\sqrt{k})}}{2} = \frac{\sqrt{k} + (\sqrt{k})^{-1}}{2}.$$

Logo,

$$\cosh(\rho(L_1, L_2)) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Como $\text{tr}(g) = \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, obtemos

$$\cosh(\rho(L_1, L_2)) = \frac{1}{2}\text{tr}(g).$$

Do teorema anterior obtemos então

$$\cosh(\rho(L_1, L_2)) = \cosh\left(\frac{T}{2}\right),$$

sendo T o comprimento de translação de g . Assim

$$T = 2\rho(L_1, L_2).$$

Agora mostraremos que existe outra representação de um elemento hiperbólico g . Veremos que uma isometria g é hiperbólica se, e somente se, ela pode ser representada como $g = \varepsilon_2\varepsilon_1$, sendo ε_j uma rotação de ordem dois (elemento elíptico) fixando o ponto v_j pertencente ao eixo de g . De fato, considere g um elemento hiperbólico de eixo L e σ a inversão em L . Seja v_1 um ponto qualquer em L e seja ε_1 a rotação de ordem dois sobre v_1 . Seja L_1 a geodésica perpendicular a L passando por v_1 e seja σ_1 a inversão em L_1 . Então $\varepsilon_1 = \sigma_1\sigma = \sigma\sigma_1$. Por definição, sabemos que $g = \sigma_2\sigma_1$ para σ_2 inversão numa geodésica L_2 perpendicular a L . Defina $v_2 = L \cap L_2$. A rotação de ordem dois em v_2 será $\varepsilon_2 = \sigma\sigma_2 = \sigma_2\sigma$. Portanto,

$$\varepsilon_2\varepsilon_1 = \sigma_2\sigma\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1 = g.$$

Note também que $T = 2\rho(v_1, v_2)$.

4.3 Polígono Fundamental Convexo

Uma geodésica no plano hiperbólico divide o plano em dois semi-planos. Um **polígono** é uma interseção de um número finito ou enumerável de semi-planos. Um **lado** de um polígono é um segmento geodésico de comprimento positivo que limita o polígono.

Considere $X = \mathbb{H}^2$ ou $X = \Delta$.

Um polígono P em X é um **polígono fundamental convexo** para um grupo Fuchsiano $G \subset Isom^+(X)$ se:

- (1) Para todo $g \in G - \{id\}$, $g(P) \cap P = \emptyset$.
- (2) Para todo $z \in X$, existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \overline{P}$.
- (3) Para cada lado s de P , existe um outro lado s' , não necessariamente diferente de s , e existe $g_s \in G$ tal que $g_s(s) = s'$. Tal elemento é o **identificador de lados** de s para s' .
- (4) Todo subconjunto compacto de X intercepta somente uma quantidade finita de translados de P . Dizemos que P é **localmente finito**.

Seja P um polígono fundamental convexo para G . Um **lado** de P é um segmento geodésico de comprimento positivo da forma $\overline{P} \cap g(\overline{P})$, sendo $g \in G$. Um **vértice** de P é um ponto $v \in \overline{P}$ da forma $v = \overline{P} \cap g(\overline{P}) \cap h(\overline{P})$, sendo $g, h \in G$ e $g \neq h$.

Sejam $G_0 = \{g \in G / \overline{P} \cap g(\overline{P}) \text{ é um lado de } P\}$ o conjunto dos identificadores de lados de P e $S = \{\overline{P} \cap g(\overline{P}) / g \in G_0\}$ o conjunto dos lados de P . Considere a aplicação $\Upsilon : G_0 \rightarrow S$ definida por $\Upsilon(g) = \overline{P} \cap g(\overline{P})$. Observe que por definição, esta aplicação é sobrejetiva e injetiva. Desta forma, cada lado $s \in S$ pode ser associado à $g_s = \Upsilon^{-1}(s)$ e $s = \overline{P} \cap g_s(\overline{P})$. Decorre que $s' = g_s^{-1}(s) = \overline{P} \cap g_s^{-1}(\overline{P})$ é um lado de P e $g_{s'} = g_s^{-1}$.

Teorema 4.4 *Sejam G um grupo Fuchsiano e P um polígono fundamental convexo para G . Então o conjunto $G_0 \subset G$ gera o grupo G .*

Prova: Seja G^* o subgrupo de G gerado por G_0 . Sejam $z \in X$ e $g \in G$ de forma que $g(z) \in \bar{P}$, suponha que para $h \in G$ também tenhamos que $h(z) \in \bar{P}$. Assim a única possibilidade é que $h(z)$ e $g(z)$ estejam em ∂P . Então $h(z)$ está em \bar{P} e em $hg^{-1}(\bar{P})$, portanto está em $\bar{P} \cap hg^{-1}(\bar{P})$, daí $hg^{-1} \in G_0$. Isto significa que temos a igualdade das classes laterais $G^*h = G^*g$. Seja $\Phi : X \rightarrow \frac{G}{G^*}$ definida por $\Phi(z) = G^*g$, onde $g(z) \in \bar{P}$. O que acabamos de fazer mostra que essa aplicação está bem definida. Considere $z \in \bar{P}$. Como P é localmente finito, existe um número finito de imagens $g_1(\bar{P}), \dots, g_m(\bar{P})$, onde cada uma contém z e tal que a união destas imagem cobrem uma vizinhança $V(z)$ de z . Se $w \in V(z)$, então $w \in g_j(\bar{P})$ para algum $j \in \{1, \dots, m\}$ e segue que $\Phi(w) = G^*(g_j)^{-1} = \Phi(z)$. Consequentemente Φ é constante em $V(z)$. Como X é convexo, logo conexo, temos que Φ é constante em X . Desta forma, assumindo que $z \in P$, $g \in G$ e $w \in g^{-1}(P)$, temos $G^* = \Phi(z) = \Phi(w) = G^*g$. Logo, $g \in G^*$. Portanto, $G = G^*$. ■

Os identificadores de lados definem uma relação de equivalência nos vértices de um polígono fundamental. Cada classe de equivalência é definida ciclicamente do seguinte modo: comece com um vértice v_1 , este vértice está contido em dois lados, chame um deles de s_1 . Seja g_1 o identificador de lado de s_1 . Assim $g_1(s_1) = s'_1$ e $g_1(v_1) = v_2$. Este vértice v_2 pertence a fronteira de dois lados, um deles é s'_1 e o outro chame de s_2 . Seja g_2 o identificador de lados de s_2 , então $g_2(s_2) = s'_2$ e $g_2(v_2) = v_3$. Continuando desta maneira, obtemos uma seqüência de vértices $\{v_1, v_2, \dots\}$, uma seqüência de identificadores de lados $\{g_1, g_2, \dots\}$ e uma seqüência de pares de lados identificados $\{(s_1, s'_1), (s_2, s'_2), \dots\}$. Pela condição (4) da definição de polígono fundamental convexo, cada vértice de P é G-equivalente a apenas uma quantidade finita de outros vértices. Seja k o menor inteiro positivo tal que as três seqüências acima tenham período k . A seqüência $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ é chamada de um **ciclo de vértices** de P . O inteiro k é o **período do ciclo**. Temos $g_k \cdots g_2 g_1(v_1) = v_1$, chame $g_k \cdots g_2 g_1 = h$, este elemento h é o **elemento cíclico do vértice** v_1 . Dois ciclos são equivalentes se eles tiverem os mesmos vértices. É claro que cada vértice pertence a exatamente uma dessas classes de equivalência. Veja o exemplo apresentado na figura 4.7. Observe que o elemento cíclico do vértice de v_1 é $h = f_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 g_2^{-1} f_1^{-1} f_2 f_1$.

Vamos examinar os transladados de P numa vizinhança do vértice v_1 . De um dos lados da aresta s_1 , temos o polígono P e do outro lado desta aresta, encontramos o polígono $g_1^{-1}(P)$. Neste polígono, o identificador de lados da aresta $g_1^{-1}(s_2)$ será $g_1^{-1} g_2 g_1$. Daí, de um lado desta aresta encontramos o polígono $g_1^{-1}(P)$ e do outro lado encontramos $(g_1^{-1} g_2 g_1)^{-1}(g_1^{-1}(P)) =$

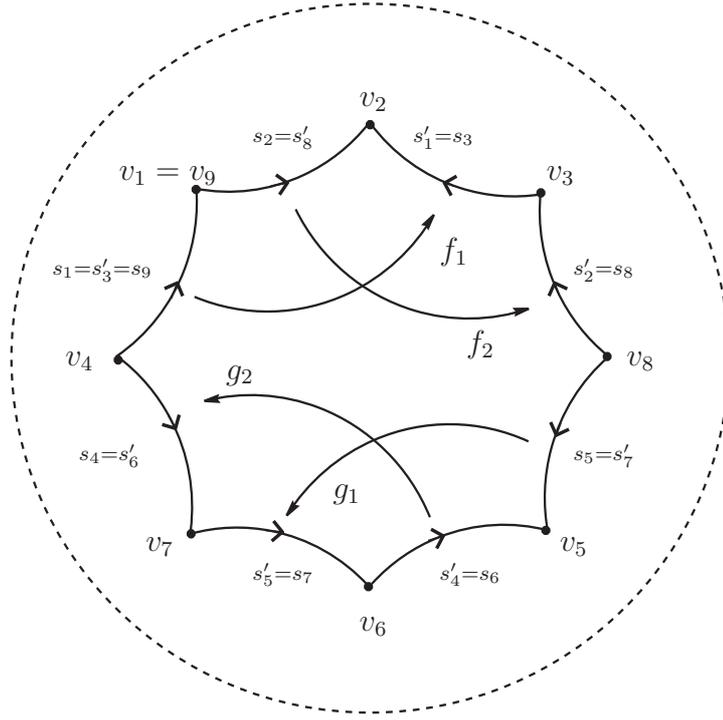


Figura 4.7: Exemplo de ciclo de vértices de v_1

$g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_1^{-1}(P) = g_1^{-1}g_2^{-1}(P)$. Continuando desta maneira ao redor do vértice v_1 , aparecem os polígonos (disjuntos) $P, g_1^{-1}(P), g_1^{-1}g_2^{-1}(P), \dots, h^{-1}(P) = g_1^{-1}g_2^{-1} \dots g_k^{-1}(P)$. Pode acontecer do polígono $h^{-1}(P) \neq P$. Se $h^{-1}(P) \neq P$, então continuamos normalmente a seqüência encontrando os seguintes polígonos: $P, g_1^{-1}(P), g_1^{-1}g_2^{-1}(P), \dots, h^{-1}(P), h^{-1}g_1^{-1}(P), h^{-1}g_1^{-1}g_2^{-1}(P), \dots$. Pela condição (4) da definição de polígono fundamental convexo, esta seqüência é finita. Da maneira como foi definido o período k , a seqüência deve terminar $(h^q)^{-1}(P) = P$, ou seja, $h^q(P) = P$ para algum q inteiro positivo. Isto implica que $h^q = id$. A **ordem do ciclo** C é $ord(C) = q$. Para cada vértice v do conjunto C , denote $\alpha(v)$ o ângulo interno no vértice v do polígono P . Portanto,

$$\sum_{i=1}^k \alpha(v_i) = \frac{2\pi}{q}.$$

Desta maneira, podemos analisar os ciclos. Primeiramente, suponhamos que o ciclo C não contenha nenhum elemento que seja ponto fixo de uma isometria elíptica pertencente à G ; neste caso dizemos que C é um **ciclo acidental** e que seus vértices são **vértices acidentais**. Os ciclos acidentais são caracterizados pelo fato que $\sum_{i=1}^k \alpha(v_i) = 2\pi$; por isto basta analisá-los pelo seu período.

- (1) Se $C = \{v_1\}$, então $\alpha(v_1) = 2\pi$, $\alpha(v_1) \in P$;
- (2) Se $C = \{v_1, v_2\}$, então $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \pi$, uma vez que $0 \leq \alpha(v_i) \leq \pi$. Assim, v_j é um ponto situado no interior de uma aresta de P ;
- (3) Segue que se v é um vértice acidental, então o período do ciclo de v é maior ou igual a 3.

Agora vamos apresentar dois resultados fundamentais para a teoria dos grupos Fuchsianos: o teorema de existência de um polígono fundamental convexo e o teorema de Poincaré. Para maiores detalhes, recomendamos as referências [4] e [1].

Seja G um grupo Fuchsiano agindo em X ($X = \mathbb{H}^2$ ou $X = \Delta$) e seja $w \in X$ um ponto que não é fixado por elemento elíptico de G . Para cada $g \in G - \{id\}$, definimos

$$L_g(w) = \{z \in X; \rho(z, w) = \rho(z, g(w))\} \quad e \quad H_g(w) = \{z \in X; \rho(z, w) < \rho(z, g(w))\}.$$

$L_g(w)$ é uma geodésica em X e $H_g(w)$ é um semi-plano limitado por $L_g(w)$ que contém w , portanto convexo.

O **polígono de Dirichlet** $D(w)$ para G com centro em $w \in X$ é definido por

$$D(w) = \bigcap_{g \in G - \{id\}} H_g(w).$$

Observação: Se $h \in G$, $hD(w) = D(h(w))$.

Teorema 4.5 *O polígono de Dirichlet $D(w)$ é um polígono fundamental convexo para G .*

Seja P um polígono convexo em X . Vamos listar condições para que elementos que identifiquem os lados de P gerem um grupo Fuchsiano G com P sendo um polígono fundamental convexo para G .

- (1) Para cada lado s de P , existe um lado s' de P e um elemento $g_s \in Isom(X)$ tal que $g_s(s) = s'$.
- (2) Devemos ter: $(s')' = s$ e $g_{s'} = g_s^{-1}$.

- (3) Para todo lado s , $g_s(P) \cap P = \emptyset$. Se existir um lado s tal que $s' = s$, então por (2) $g_s^2 = id$ (esta é uma **relação de reflexão**).

Os identificadores de lados g_s definem uma relação de equivalência em \overline{P} . Seja P^* o conjunto das classes de equivalência e seja $p : \overline{P} \rightarrow P^*$ a projeção natural.

- (4) Para todo $z \in P^*$, $p^{-1}(z)$ é finita.

As próximas duas condições são relacionadas com os ciclos de vértices. Sejam $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ e $\{(s_1, s'_1), (s_2, s'_2), \dots, (s_k, s'_k)\}$ as seqüências que definem um ciclo de vértices em P . Seja $h = g_k \cdots g_2 g_1$ elemento cíclico do vértice v_1 .

- (5) Existe um inteiro positivo q tal que $h^q = id$. As relações em G da forma $h^q = id$ são chamadas **relações cíclicas**.

- (6)

$$\sum_{i=1}^k \alpha(v_i) = \frac{2\pi}{q}.$$

- (7) P^* é completo.

Teorema 4.6 (Teorema de Poincaré) *Seja P um polígono convexo com identificadores de lados satisfazendo as condições de (1) à (7). Então G , o grupo gerado pelos identificadores de lados de P , é discreto, P é um polígono fundamental convexo de G e as relações de reflexões e as relações cíclicas formam um sistema completo de relações para G .*

Seja G um grupo Fuchsiano do 2º tipo, isto é, $\Lambda(G) \neq \partial\Delta$. Um **arco de descontinuidade** para G é um arco aberto em $\partial\Delta$ (ou em $\partial\mathbb{H}^2$) sobre o qual G age descontinuamente. Assim, $\partial\Delta$ é a união disjunta do conjunto limite $\Lambda(G)$ e união enumerável de arcos de descontinuidade disjuntos C_j de $\Omega(G)$. Um arco de descontinuidade C_j define uma geodésica L_j com os mesmos pontos finais de C_j que divide o plano em dois semi-planos: H_j^1 o semi-plano aberto limitado por $L_j \cup C_j$ que chamaremos de **semi-plano de bordo** e H_j^2 o complementar de H_j^1 . A coleção $\{C_j\}$ é G -invariante, pois $\Omega(G)$ é G -invariante, daí $\{H_j^2\}$ também é G -invariante.

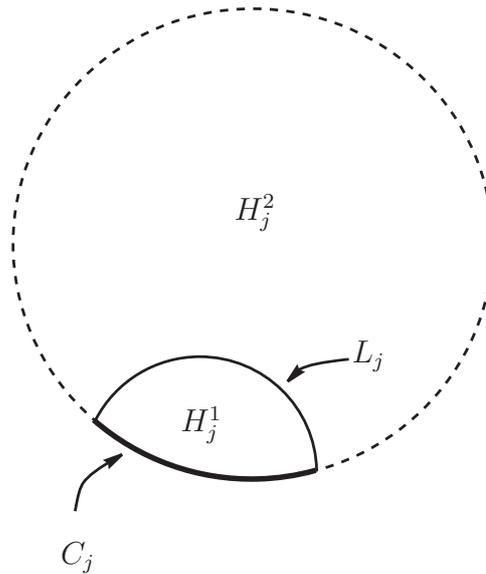


Figura 4.8: Arco de descontinuidade C_j com semi-plano de bordo H_j^1

Sejam G um grupo Fuchsiano não elementar de 2^0 tipo agindo em Δ e $\{C_j\}$ a coleção de arcos de descontinuidade associados a G . A **região de Nielsen** associada ao grupo G é a região

$$N_G = \bigcap_j H_j^2$$

Se G for do 1^0 tipo, definimos $N_G = \Delta$.

Teorema 4.7 N_G é o menor conjunto aberto e convexo G -invariante em Δ .

Prova: Como N_G é G -invariante, aberto e convexo, falta mostrar que é o menor com tal propriedade. Mostraremos que qualquer conjunto convexo aberto não vazio G -invariante E contém N_G . Como o conjunto E é não vazio e G -invariante, ele contém alguma G -órbita que necessariamente acumula em algum ponto de $\Lambda(G)$. Isto mostra que $\overline{E} \supset \overline{N_G}$. Como para todo conjunto aberto convexo A , temos $(\overline{A})^0 = A$, então $E \supset N_G$. ■

Quando o grupo Fuchsiano é do 1^0 tipo, o polígono fundamental convexo P é um subconjunto limitado de Δ . Quando ele é do 2^0 tipo, P pode ter arestas sobre $\partial\Delta$, tais arestas sobre Δ são denominadas de **lados livres** de P . Cada lado livre é um intervalo fechado contido em um arco de descontinuidade de G . Quando um vértice v de P pertence a $\partial\Delta$, dizemos que v é **vértice próprio** se v é a extremidade de dois lados de P e dizemos que v é **vértice impróprio** se for a extremidade de um lado livre de P . Em ambos os casos, v é vértice de P no infinito.

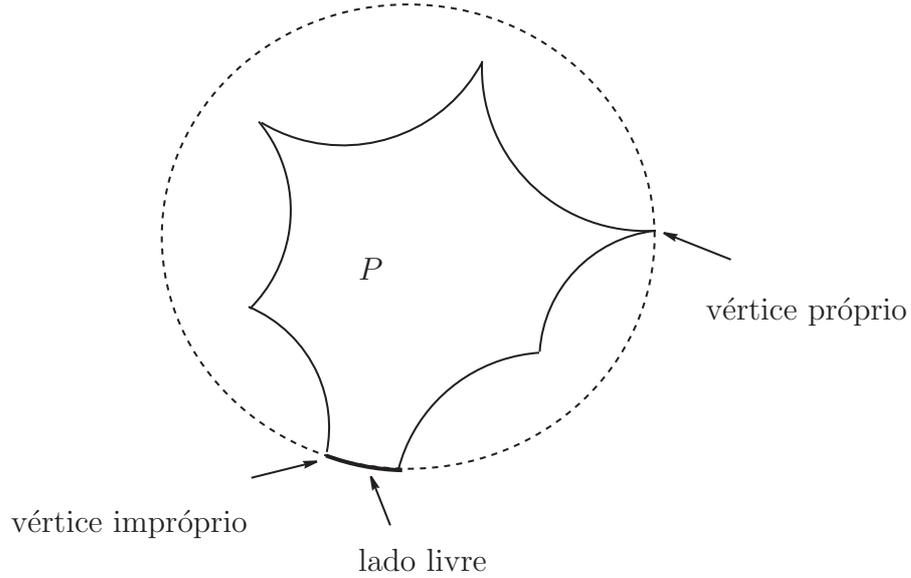


Figura 4.9: Se G é do 2^0 tipo, P tem vértice no infinito e pode ter lados livres

Teorema 4.8 *Seja G um grupo Fuchsiano não elementar agindo em Δ . Seja $C \subset \partial\Delta$ um arco de descontinuidade para G definindo a geodésica L e semi-plano de bordo H . Então $\text{stab}(C) = \text{stab}(L) = \text{stab}(H)$ ou é trivial ou cíclico hiperbólico, e $H \cup L \cup C$ é precisamente invariante por $\text{stab}(L)$.*

Veja demonstração na referência [4], página 106.

Um elemento de G que deixa algum arco de descontinuidade invariante é chamado **elemento hiperbólico de bordo**.

4.4 Classes de Conjugação em Grupos Fuchsianos

Nesta seção nosso objetivo é apresentar alguns resultados sobre classes de conjugação de grupos Fuchsianos para que possamos falar sobre assinatura de grupos Fuchsianos finitamente gerados. Como nosso interesse principal é considerar grupos finitamente gerados, vamos precisar da seguinte proposição que está demonstrada em [1], página 254.

Proposição 4.9 *Seja G um grupo Fuchsiano não elementar com região de Nielsen N . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) G é finitamente gerado;
- (2) para todo polígono fundamental convexo P de G , $\text{área}(P \cap N) < \infty$;
- (3) existe um polígono fundamental convexo de G com um número finito de lados;
- (4) todo polígono fundamental convexo de G tem uma quantidade finita de lados.

Teorema 4.10 *Seja G um grupo Fuchsiano e sejam v_1, v_2, \dots pontos fixos de elementos parabólicos ou elípticos de G pertencentes a fronteira de algum polígono fundamental convexo de G . Suponha que g_j gera o estabilizador de v_j . Então todo elemento parabólico ou elíptico de G é conjugado a alguma potência de algum g_j .*

Prova: Se g é elíptico ou parabólico com ponto fixo v , então algum h em G leva v em algum ponto de ∂P . Assim para algum j , $h(v) = v_j$. Então $hgh^{-1} \in \langle g_j \rangle$. É fato que o $\text{stab}(v_j)$ é sempre cíclico, veja a demonstração do teorema 3.1 . ■

Corolário 4.11 *Se G é grupo Fuchsiano finitamente gerado, então G tem um número finito de subgrupos cíclicos maximais $\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_n \rangle$ tais que todo elemento parabólico ou elíptico em G é conjugado a exatamente um elemento em exatamente um destes subgrupos.*

Prova: Precisamos apenas observar que se g é parabólico ou elíptico e se duas potências de g são conjugadas, isto é, $hg^n h^{-1} = g^m$, então h tem os mesmos pontos fixos de g e então h é uma potência de g , assim $n = m$. Note que se g é parabólico e fixa v , então h também fixa v e assim não pode ser hiperbólico. ■

Teorema 4.12 *Um grupo Fuchsiano finitamente gerado tem somente um número finito de classes de conjugação de subgrupos cíclicos gerados por elementos hiperbólicos de bordo.*

Prova: Se G é finitamente gerado, então todo polígono fundamental convexo P de G possui um número finito de lados livres s_1, \dots, s_n , onde cada lado s_j está num arco de descontinuidade C_j . Seja h_j o elemento hiperbólico de bordo que deixa C_j invariante. Veja a figura 4.10. Agora, seja h um elemento hiperbólico de bordo que deixa o arco de descontinuidade C invariante. Os

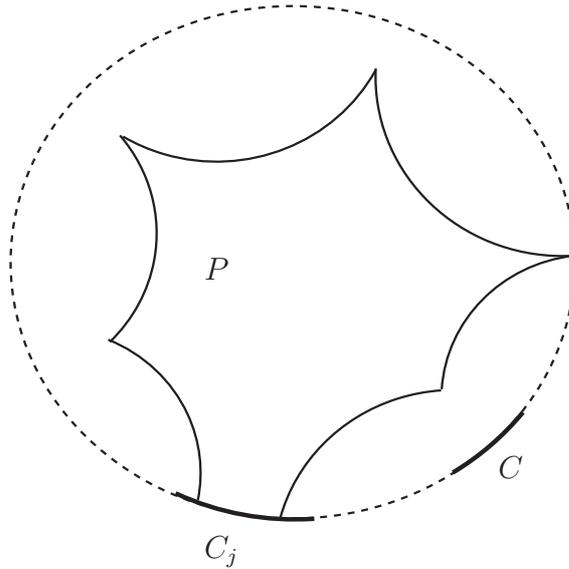


Figura 4.10: Considere o arco de descontinuidade C não contendo lado livre de P

pontos de C não são pontos limites de G . Considere um segmento L terminando em algum ponto interior de C e estando inteiramente em alguma imagem $g(P)$, $g \in G$. Como $g^{-1}(L)$ está em P e termina em algum ponto do conjunto regular de G , ele deve terminar em algum s_j . Desta forma, $g^{-1}(C) = C_j$, para algum $j = 1, \dots, n$ e gh_jg^{-1} deixa C invariante. Assim provamos que h é conjugado a alguma potência de h_j . ■

4.5 Assinatura de Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados

Seja G um grupo Fuchsiano não elementar finitamente gerado. Todo polígono fundamental convexo P de G tem finitos lados e, topologicamente, $\frac{\bar{P}}{G}$ é uma superfície de Riemann S de gênero g . Como $\frac{\Delta}{G}$ e $\frac{\bar{P}}{G}$ são homeomorfos (teorema 2.12), o gênero g não depende da escolha de P .

Agora considere a região de Nielsen e o correspondente espaço quociente $\frac{\bar{N}_G}{G}$. Pelo que já vimos, o bordo de N_G consiste de todos os eixos de todos os elementos hiperbólico de bordo em G e do conjunto Λ . Seja A um tal eixo com estabilizador gerado pelo elemento h e seja H o correspondente semi-plano de bordo. Sabemos que H é precisamente invariante com respeito ao

subgrupo $\langle h \rangle$, assim a projeção de H em $\frac{\Delta}{G}$ é topologicamente o cilindro $\frac{H}{\langle h \rangle}$ pela proposição 2.8. Uma das curvas do bordo desse cilindro é a curva fechada simples $\frac{A}{\langle h \rangle}$. Se denotarmos a projeção natural de Δ sobre $\frac{\Delta}{G}$ por π , temos que $\pi(\Delta)$ é a união disjunta de $\pi(N_G)$, união de curvas fechadas simples da forma $\pi(A)$, união de cilindros da forma $\pi(H)$. Pelo teorema 4.12 e sua demonstração, o número finito t de cilindros da forma $\pi(H)$ em $\pi(\Delta)$ é o mesmo número de classes de conjugação de subgrupos cíclicos hiperbólicos maximais de bordo. Além disso, G contém somente um número finito s de classes de conjugação de subgrupos cíclicos parabólicos maximais e cada uma destas classes correspondem a um ponto removido na superfície S . Finalmente, G contém somente um número finito r de classes de conjugação de subgrupos cíclicos elípticos maximais com ordem m_1, \dots, m_r , respectivamente.

O símbolo

$$(g : m_1, \dots, m_r; s; t) \tag{4.1}$$

resume todas as informações descritas acima. Este símbolo é conhecido como a **assinatura de G** . Cada parâmetro é um inteiro finito não negativo e $m_j \geq 2$. As vezes falamos em assinatura da superfície $S = \frac{\bar{P}}{G}$ ao invés de falarmos na assinatura do grupo G .

Teorema 4.13 *Existe um grupo Fuchsiano não elementar finitamente gerado com assinatura (4.1) e $m_j \geq 2$ se, e somente se,*

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0. \tag{4.2}$$

Observação: Se $t = 0$, $s = 0$ e $r = 0$, então (4.2) é válido se, e somente se, $2g - 2 > 0$, ou seja, $g \geq 2$. Observe também que nesse caso o número de Euler da superfície compacta $S = \frac{\bar{P}}{G}$ será negativo ($\chi(S) = 2 - 2g < 0$).

A prova que o teorema 4.13 é uma condição necessária para a existência de um grupo com assinatura (4.1) é uma consequência do seguinte resultado:

Teorema 4.14 *Seja G um grupo Fuchsiano finitamente gerado com assinatura (4.1) e região de Nielsen N . Então*

$$\text{área}\left(\frac{N}{G}\right) = 2\pi \left\{ 2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right\}.$$

Se G é do 1^o tipo, então $N = \Delta$ e $t = 0$, assim obtemos uma fórmula para a área de um polígono convexo fundamental de G .

Prova: Seja D um polígono de Dirichlet para G com centro w , é imediato que

$$\text{área}(D \cap N) = \text{área}\left(\frac{N}{G}\right).$$

Escolhendo w apropriadamente, podemos assumir que cada ciclo elíptico e parabólico em ∂D tenha período um e que nenhum ciclo de vértice de D esteja nos eixos dos elementos hiperbólicos de bordo. Sabemos que somente uma quantidade finita de imagens distintas de um eixo hiperbólico pode cortar o fecho de todo domínio fundamental localmente finito. Como N é limitada por eixos hiperbólicos, isto implica que somente uma quantidade finita de lados de N corta D e assim $D \cap N$ é um polígono com finitos lados. O bordo de $D \cap N$ consiste de l pares de lados (s, s') , $s \neq s'$, e k pares do tipo (s, s) somando um total de $2l + k$ lados. Ao contar o número de vértices, sejam C_1, \dots, C_r os ciclos correspondendo a cada uma das r classes de conjugação elípticas e sejam $\theta(C_i) = 2\pi/m_i$ o ângulo total em cada um destes vértices. Seja a o número de ciclos acidentais. Além destes vértices, também há k vértices provenientes dos ciclos de ordem dois oriundos das identificações dos pares (s, s) . Ao aplicarmos estes dados na fórmula da área de um polígono hiperbólico,

$$\text{area}(P) = \pi(n - 2) - (\theta_1 + \dots + \theta_2) \tag{4.3}$$

sendo n o número de lados e $\theta_1 + \dots + \theta_2$ os ângulos internos de P , temos que

$$\text{área}(P) = \pi(2l + k - 2) - \left(2\pi \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} + 2\pi a + \pi k \right) = 2\pi \left(l - a - 1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} \right).$$

Aplicando a conhecida fórmula da característica de Euler de uma superfície, na caso $\frac{\overline{P}}{G}$, obtemos

$$2 - 2g = (1 + t) - (l + k) + (r + a + k + s)$$

onde $1 + t$ é o número de faces, $l + k$ é o número de aresta e $r + a + k + s$ é o número de vértices da superfície. Simplificando a expressão acima obtemos:

$$l - a = 2g - 1 + r + s + t$$

Agora ligando w a cada vértice de $D \cap N$, dividimos $D \cap N$ em $2l + k$ triângulos. Somando as áreas desses triângulos, obtemos

$$\begin{aligned} \text{area}(D \cap N) &= (2l + k)\pi - 2\pi - 2\pi a - \pi k - \sum_{j=1}^r \frac{2\pi}{m_j} \\ &= 2\pi \left[l - a - 1 - \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} \right] \\ &= 2\pi \left[2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

Prova do teorema 4.13:

É evidente que a área $\left(\frac{N}{G}\right)$ tem sinal positivo. Logo $2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) > 0$. Assim mostramos a condição necessária do teorema 4.13.

Agora vamos mostrar a condição suficiente. Dado o símbolo $(g : m_1, \dots, m_r; s; t)$, suponha válida a desigualdade $2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) > 0$. Vamos construir um grupo Fuchsiano G com assinatura $(g : m_1, \dots, m_r; s; t)$.

Para cada $d > 0$, construa no interior de Δ o círculo dado por $\rho_1(z, 0) = d$, este denotaremos por $\mathcal{C}(0, d)$. Construa também um conjunto de $4g + r + s + t$ pontos z_i equidistantes em $\mathcal{C}(0, d)$. Os arcos $z_i z_{i+1}$ estão subentendidos a um ângulo 2θ na origem onde

$$\theta = \frac{2\pi}{8g + 2r + 2s + 2t}.$$

Para os primeiros quatro arcos desta circunferência, considere linhas geodésicas ligando os pontos adjacentes. Identifiquem duas a duas estas linhas geodésicas como na figura 4.11. Note que z_1, \dots, z_5 são um, imagem do outro, pelos identificadores de lados.

Esta construção é repetida $g - 1$ vezes, começando a próxima em z_5 e assim por diante. Isto contabiliza $4g$ arcos $z_i z_{i+1}$, um ângulo $8g\theta$ na origem e aplicações identificadoras de lados h_1, \dots, h_{2g} .

Usando os próximos r arcos $z_i z_{i+1}$, construiremos configurações com aplicações elípticas e_i como na figura 4.12. Necessariamente, e_i é um elemento elíptico de ordem m_i e fixa w_i .

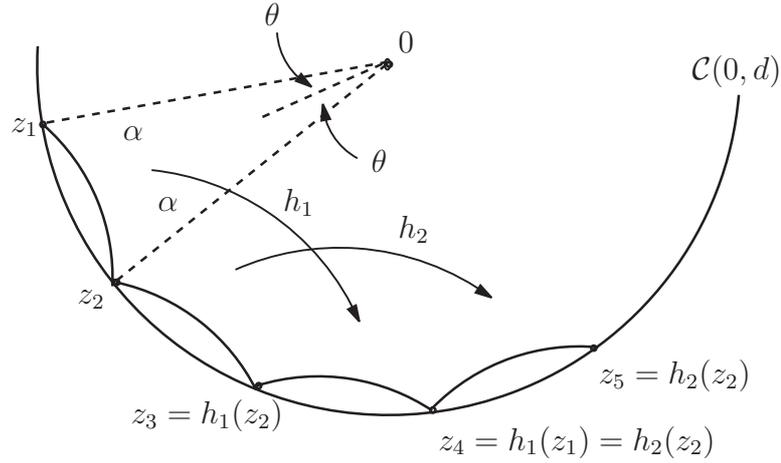


Figura 4.11:

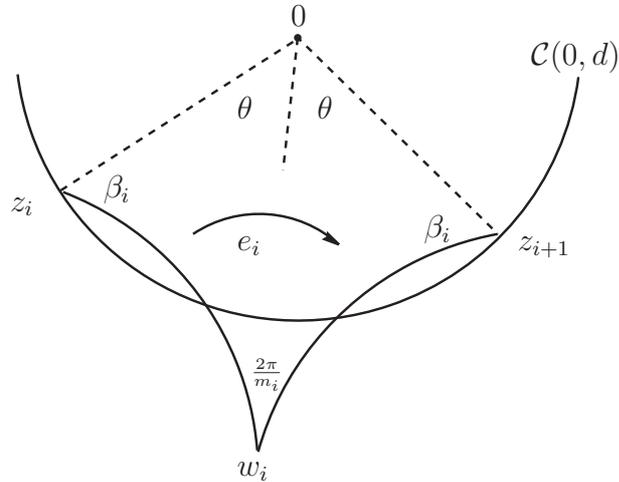


Figura 4.12:

Esta construção é repetida r vezes, isto contabiliza um ângulo $2r\theta$ na origem.

Usando os próximos s arcos $z_i z_{i+1}$, repetimos a construção anterior; só que agora cada w_i está situado em $\partial\Delta$. O ângulo em cada w_i é nulo e as aplicações correspondentes p_i são parabólicas.

Restam agora t arcos, cada um subentendido a um ângulo 2θ na origem. Para cada um desses arcos, construiremos a configuração da figura 4.13. As aplicações hiperbólicas b_i estão ilustradas na figura, onde $\theta_1 = \left(\frac{1+d}{1+2d}\right)\theta$.

Finalmente temos construído um polígono com vértices z_i, u_i, v_i, w_i e com identificadores de lados dado por h_i, e_i, p_i, b_i . Seja G o grupo gerado por estes identificadores de lados.

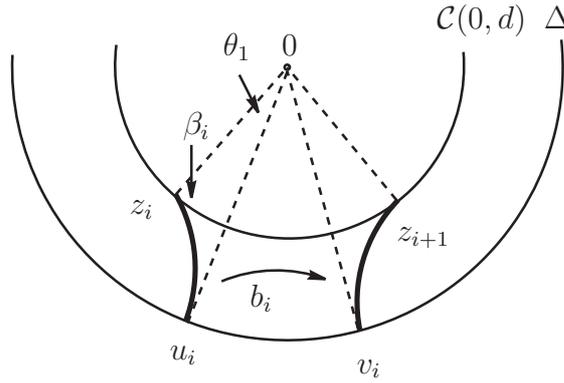


Figura 4.13:

A soma dos ângulos nos vértices z_i será

$$\phi(d) = 8g\alpha + 2(\beta_1 + \cdots + \beta_{r+s+t}).$$

Cada um dos ângulos α e β_i depende continuamente do parâmetro d . Mostraremos que para algum d , temos $\phi(d) = 2\pi$. Então pelo teorema de Poincaré, G é discreto e o polígono construído é um domínio fundamental para G .

Suponha $d \rightarrow 0$. Neste caso limite, temos que numa vizinhança da origem, a métrica hiperbólica é aproximadamente Euclidiana.

Na figura 4.11, temos:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Na figura 4.12, temos:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \beta_i = \pi - \frac{\pi}{m_i} - \theta.$$

E com a interpretação apropriada de $m_i = \infty$ para os s arcos $z_i z_{i+1}$, com w_i em $\partial\Delta$, temos:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \beta_i = \pi - \theta.$$

Finalmente, na figura 4.13,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \beta_i = \pi - \theta_1.$$

Mas como o comprimento de $C(0, d)$ tende a zero, nesta última configuração, $\theta_1 \rightarrow \theta$, pois $\theta_1 = \left(\frac{1+d}{1+2d} \right) \theta$.

Assim,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \phi(d) = 8g \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + 2 \left[\pi - \frac{\pi}{m_1} - \theta + \cdots + \pi - \frac{\pi}{m_r} - \theta \right] + 2s(\pi - \theta) + 2t(\pi - \theta)$$

Simplificando,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \phi(d) = 2\pi \left[2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right] + 2\pi$$

Por hipótese,

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \phi(d) > 2\pi.$$

Suponha $d \rightarrow \infty$. Quando o comprimento do raio do círculo $\mathcal{C}(0, d)$ tende para o infinito, temos que $\alpha \rightarrow 0$ e $\beta_i \rightarrow 0$, conseqüentemente,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \phi(d) = 0.$$

Como $\phi(d)$ depende continuamente de d , temos que existe um valor d_0 tal que $\phi(d_0) = 2\pi$. ■

Capítulo 5

Aplicações

Sejam u, v e w três pontos distintos no plano hiperbólico e sejam f, g e h elementos elípticos de ordem dois cujos pontos fixos são, respectivamente, u, v e w . Seja G o grupo gerado por f, g e h . Neste capítulo daremos condições necessárias e suficientes para G ser um subgrupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$. Nas demonstrações dos teoremas principais usaremos o conceito de domínio fundamental, o teorema de Poincaré e o produto inverso de duas geodésicas no plano hiperbólico. A definição e as principais propriedades desse produto estão apresentadas na primeira seção deste capítulo.

5.1 O Produto Inverso

Na seção 1.3 vimos que uma transformação de Möbius transforma cada círculo e reta do plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}}$ em um círculo ou uma reta. Por causa dessa propriedade, é conveniente modificarmos nossa terminologia: usaremos o termo "círculo" para representar um círculo ou uma reta no plano complexo estendido.

Além disso, uma discussão detalhada da geometria das transformações de Möbius, ou das isometrias conformes do plano hiperbólico, depende essencialmente do fato dessas transformações levarem círculos em círculos e do fato dessas aplicações serem conformes. Um substituto útil para conformalidade é o elegante conceito de produto inverso (Σ, Σ') de dois círculos Σ e Σ' (ou duas linhas geodésicas do plano hiperbólico). O produto inverso é um número real que depende somente dos círculos Σ e Σ' , e que é invariante por transformações de Möbius. Veremos que se

Σ e Σ' são disjuntos então o produto inverso (Σ, Σ') é uma função da distância hiperbólica entre Σ e Σ' (quando esses círculos definem geodésicas do plano hiperbólico), e quando esses círculos são concorrentes o produto inverso é uma função do ângulo entre os círculos Σ e Σ' .

Para definir o produto inverso vamos denotar por $\mathcal{C}(a, r)$ o círculo Euclidiano no plano complexo de centro $a = (a_1, a_2)$ e raio r cuja equação tem a forma

$$|z|^2 - 2\langle z, a \rangle + |a|^2 - r^2 = 0.$$

Por outro lado, denotaremos por $P(a, t)$, $t \in \mathbb{R}$, a reta Euclidiana de equação

$$-2\langle z, a \rangle + 2t = 0.$$

Observe que essas duas equações podem ser colocadas na forma comum

$$a_0|z|^2 - 2\langle z, a \rangle + a_3 = 0. \tag{5.1}$$

Agora, se Σ denota um círculo no plano complexo estendido (pode ser um círculo $\mathcal{C}(a, r)$ ou uma reta $P(a, t)$), o **vetor coeficiente** (a_0, a_1, a_2, a_3) de Σ é a coleção dos coeficientes da equação (5.1) que representa Σ . Observe que o círculo Σ define seu vetor coeficiente a menos de multiplicação por um número real diferente de zero, e que esse vetor coeficiente sempre satisfaz a relação

$$|a|^2 > a_0 a_3.$$

Sejam Σ e Σ' dois círculos em $\widehat{\mathbb{C}}$ com respectivos vetores coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3) e (b_0, b_1, b_2, b_3) . O **produto inverso** (Σ, Σ') de Σ e Σ' é o número real positivo:

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2\langle a, b \rangle - a_0 b_3 - a_3 b_0|}{2 \cdot \sqrt{|a|^2 - a_0 a_3} \cdot \sqrt{|b|^2 - b_0 b_3}} \tag{5.2}$$

Se consideramos em \mathbb{R}^4 a forma bilinear q definida por

$$q(x, y) = 2(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_0 y_3 + x_3 y_0)$$

então o produto inverso pode ser escrito da seguinte maneira mais concisa:

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|q(a', b')|}{2 \cdot \sqrt{q(a', a')} \cdot \sqrt{q(b', b')}}.$$

sendo $a' = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e $b' = (b_0, b_1, b_2, b_3)$.

As expressões abaixo são fórmulas explícitas para o produto inverso, e podem ser verificadas através de um cálculo direto. Sejam $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ e $r, t \in \mathbb{R}$.

- Se $\Sigma = \mathcal{C}(a, r)$ e $\Sigma' = \mathcal{C}(b, t)$, então os vetores coeficientes de Σ e Σ' são, respectivamente:

$$(1, a_1, a_2, |a|^2 - r^2) \quad e \quad (1, b_1, b_2, |b|^2 - t^2).$$

Pela definição do produto inverso, verifica-se que:

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{2rt}.$$

- Se $\Sigma = \mathcal{C}(a, r)$ e $\Sigma' = P(b, t)$, então os vetores coeficientes de Σ e Σ' são, respectivamente:

$$(1, a_1, a_2, |a|^2 - r^2) \quad e \quad (0, b_1, b_2, 2t).$$

Pela definição do produto inverso, verifica-se que:

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|\langle a, b \rangle - t|}{r|b|}.$$

- Se $\Sigma = P(a, r)$ e $\Sigma' = P(b, t)$, então os vetores coeficientes de Σ e Σ' são, respectivamente:

$$(0, a_1, a_2, 2r) \quad e \quad (0, b_1, b_2, 2t).$$

Pela definição do produto inverso, verifica-se que:

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|\langle a, b \rangle|}{|a||b|}.$$

Teorema 5.1 *Para qualquer transformação de Möbius ϕ e quaisquer círculos Σ e Σ' , temos:*

$$(\phi(\Sigma), \phi(\Sigma')) = (\Sigma, \Sigma').$$

Prova: Uma transformação de Möbius transforma um círculo Σ em um círculo Σ' e induz uma aplicação

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto (a'_0, a'_1, a'_2, a'_3)$$

entre os vetores coeficientes (a menos de multiplicação por um número real diferente de zero).

Por exemplo, uma rotação $z \mapsto e^{i\theta}z = z'$ satisfaz

$$|z|^2 = |z'|^2, \quad \langle z, a \rangle = \langle e^{i\theta} z, e^{i\theta} a \rangle = \langle z', e^{i\theta} a \rangle$$

e daí transforma o círculo

$$a_0|z|^2 - 2\langle z, a \rangle + a_3 = 0$$

no círculo

$$a_0|z'|^2 - 2\langle z', e^{i\theta} a \rangle + a_3 = 0.$$

A aplicação induzida entre os coeficientes nos dá:

$$a_0 \mapsto a_0, \quad a \mapsto e^{i\theta} a, \quad a_3 \mapsto a_3.$$

E é claro que a equação (5.2) é invariante se ambos vetores coeficientes são sujeitos a esta aplicação. Logo, (Σ, Σ') é invariante por rotação ($z \mapsto e^{i\theta} z$).

De maneira análoga, as aplicações: (i) $z \mapsto kz$ (dilatação), $k > 0$; (ii) $z \mapsto \frac{1}{z}$; (iii) $z \mapsto z + u$ (translação), $u = (u_1, u_2)$, induzem as aplicações:

$$(i) (a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_0, ka_1, ka_2, k^2a_3);$$

$$(ii) (a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_3, a_1, a_2, a_0);$$

$$(iii) (a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto (a_0, a_1 + a_0u_1, a_2 + a_0u_2, a_3 + 2\langle a, u \rangle + a_0|u|^2).$$

É fácil verificar que a equação (5.2) também permanece invariante por essas três aplicações, e como as transformações de Möbius são geradas por elas e por rotação, o teorema está provado.

■

Teorema 5.2 *Sejam L e L' geodésicas no plano hiperbólico. Então o produto inverso (L, L') é igual a*

$$\cosh \rho(L, L'), \quad 1, \quad \cos(\theta)$$

se L e L' são respectivamente disjuntas, paralelas ou concorrentes (segundo um ângulo θ , com $0 \leq \theta \leq \pi/2$).

Prova: Sabemos que geodésicas disjuntas têm em comum uma geodésica ortogonal e que $\rho(L, L')$ é definido como o comprimento do segmento geodésico ortogonal que liga L e L' . Pelo usual argumento de invariância, precisamos considerar apenas os seguintes casos:

- (i) L, L' estão em \mathbb{H}^2 e são dadas por $|z| = r, |z| = R$ (disjuntas);
- (ii) L, L' estão em \mathbb{H}^2 e são dadas por $x = 0, x = 1$ (paralelas);
- (iii) L, L' são diâmetros Euclidianos de Δ (concorrentes).

Em todos os casos, a equação (5.2) nos fornece os resultados do teorema. ■

Teorema 5.3 *Sejam L_1 e L_2 retas disjuntas, seja σ_j a inversão em L_j e seja $f = \sigma_1\sigma_2$. Então o produto inverso (L_1, L_2) satisfaz*

$$(L_1, L_2) = \frac{1}{2}|tr(f)|.$$

Prova: Se L_1 e L_2 são disjuntas, então a geodésica ortogonal L em comum a ambas é invariante por σ_1 e σ_2 . Segue que f é hiperbólico, L é o eixo de f e conseqüentemente, o comprimento de translação T de f satisfaz

$$\frac{1}{2}T = \rho(L_1, L_2).$$

Sabemos que neste caso, o produto inverso (L_1, L_2) é dado por

$$(L_1, L_2) = \cosh \rho(L_1, L_2)$$

e o resultado segue pelo teorema 4.3 que diz que

$$\cosh \left(\frac{1}{2}T \right) = \frac{1}{2}|tr(f)|.$$

Se L_1 e L_2 são paralelas, então o produto inverso é igual a 1 e, como f é parabólico, $|tr(f)| = 2$.

Finalmente, suponha que L_1 e L_2 interceptam formando um ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$, então

$$(L_1, L_2) = \cos(\theta).$$

Portanto, neste caso, f é uma rotação de ângulo 2θ sobre o ponto de interseção de L_1 e L_2 e

$$|tr(f)| = 2\cos(\theta). \quad \blacksquare$$

5.2 Grupos Gerados por Três Elementos Elípticos de Ordem Dois

Sejam f, g e h elementos elípticos de ordem dois em $Isom(\mathbb{H}^2)$ com pontos fixos diferentes u, v e w , respectivamente. Assumiremos que u, v e w não estão contidos em uma mesma geodésica. Sejam α, β e γ os ângulos e a, b e c os comprimentos dos lados do triângulo com vértices u, v e w . Veja a figura 5.1.

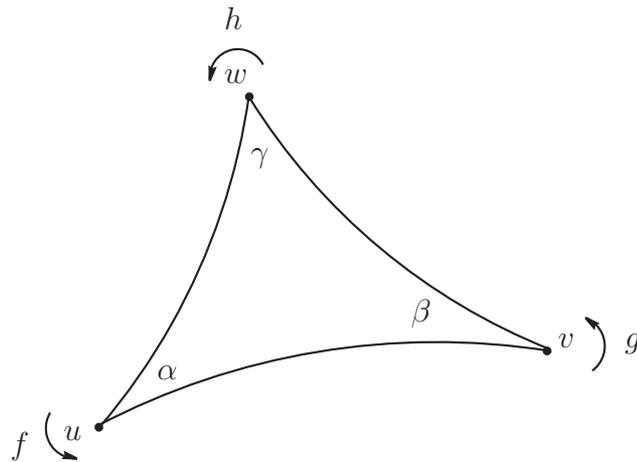


Figura 5.1: Triângulo hiperbólico

Os três vértices do triângulo determinam um número positivo λ que é definido por três igualdades:

$$\begin{aligned} \lambda &= \operatorname{senh}(a) \cdot \operatorname{senh}(b) \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \\ &= \operatorname{senh}(b) \cdot \operatorname{senh}(c) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \\ &= \operatorname{senh}(c) \cdot \operatorname{senh}(a) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

Estas igualdades são conseqüências da lei do seno no plano hiperbólico.

Se assumimos o lado $[u, v]$ como a base do triângulo da figura 5.1, $[u, v]$ na geodésica L_w , então a altura do triângulo será $\rho(w, L_w)$ e pelo teorema 7.11.2, ítem (ii), página 147, referência [1], temos:

$$\sinh \rho(w, L_w) = \sinh a \cdot \sin \beta.$$

Assim, de maneira óbvia

$$\lambda = \sinh(\text{base}) \cdot \sinh(\text{altura}). \quad (5.3)$$

Veremos agora que o valor de λ está relacionado com os elementos elípticos f , g e h da seguinte maneira:

Teorema 5.4 *O valor absoluto do traço de todas as isometrias fgh , hfg , ghf , hgf , fhg , ghf é igual a 2λ .*

Prova: Primeiro é fácil observar que $|\text{traço}(fgh)|$ é invariante por permutações cíclicas de f , g e h .

Por exemplo:

$$|\text{traço}(fgh)| = |\text{traço } h(fgh)h^{-1}| = |\text{traço}(hfg)|.$$

Também é bom lembrar que estamos considerando os elementos em questão representados por matrizes cujo o determinante é 1, daí

$$|\text{traço}(fgh)| = |\text{traço}(fgh)^{-1}| = |\text{traço}(hgf)|.$$

Logo, $|\text{traço}(fgh)|$ é invariante por todas permutações de f , g e h . Então se calcularmos $|\text{traço}(hfg)|$ e encontrar 2λ , o teorema está provado. Para isso, vamos fazer a seguinte construção:

Seja L a geodésica passando por u e v . Construa a geodésica L_1 passando por w e ortogonal à geodésica L . Depois construa a geodésica L_2 passando por w e ortogonal a L_1 e finalmente as geodésicas L_3 e L_4 ortogonais a L com

$$\rho(L_1, L_3) = \rho(u, v) = \rho(L_1, L_4).$$

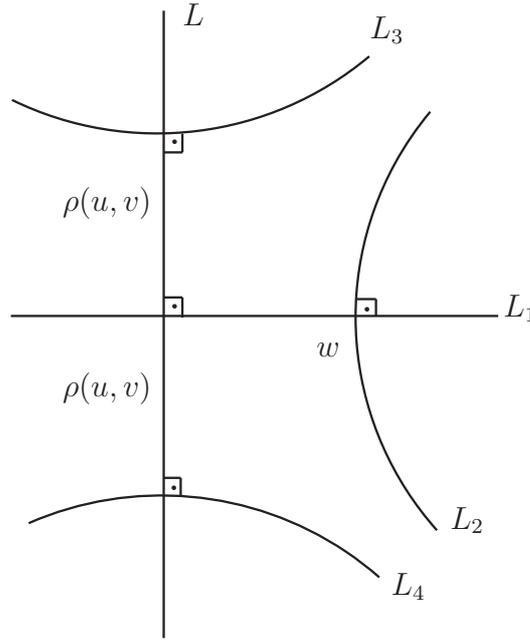


Figura 5.2:

Veja a construção feita na figura 5.2.

Seja σ_j a inversão em L_j . Claramente temos que $h = \sigma_1\sigma_2$. Também temos que os elementos $\sigma_1\sigma_3$ e fg são ambos elementos hiperbólicos com o mesmo eixo L e mesmo comprimento de translação $2\rho(u, v)$ (veja seção 4.2). Isso implica que esses elementos são iguais. Logo $\sigma_1\sigma_3 = fg$ (ou gf).

Pelo teorema 5.2, o produto inverso (L_2, L_3) é $\cosh \rho(L_2, L_3)$, quando L_2 e L_3 são disjuntas e $\cos(\phi)$, quando L_2 e L_3 interceptam formando um ângulo ϕ . No primeiro caso, pelo teorema 7.18.1(ii), referência [1], página 159, temos:

$$(L_2, L_3) = \cosh \rho(L_2, L_3) = \sinh \rho(L, L_2) \cdot \sinh \rho(L_1, L_3).$$

E no segundo caso, pelo teorema 7.17.1(i), referência [1], página 157, temos:

$$(L_2, L_3) = \cos(\phi) = \sinh \rho(L, L_2) \cdot \sinh \rho(L_1, L_3).$$

Daí em ambos os casos temos:

$$(L_2, L_3) = \sinh \rho(L, L_2) \cdot \sinh \rho(L_1, L_3) = \sinh \rho(w, L) \cdot \sinh \rho(u, v).$$

Portanto, da expressão (5.3), concluímos que:

$$(L_2, L_3) = \lambda.$$

Finalmente, pelo teorema 5.3, temos:

$$\frac{1}{2}|tr(hfg)| = \frac{1}{2}|tr(\sigma_2\sigma_3)| = (L_2, L_3) = \lambda$$

Daí,

$$|tr(hfg)| = 2\lambda. \quad \blacksquare$$

Agora vamos examinar como o valor de λ determina a natureza do grupo gerado por f , g e h .

Teorema 5.5 *Sejam f , g e h elementos elípticos de ordem dois que geram um grupo não elementar G e seja λ dado pelas equações (5.2).*

(1) *Se $\lambda > 1$ então G é discreto e tem assinatura $(0 : 2, 2, 2; 0; 1)$.*

(2) *Se $\lambda = 1$ então G é discreto e tem assinatura $(0 : 2, 2, 2; 1; 0)$.*

(3) *Se $\lambda < 1$ então G é discreto somente se λ é um dos valores*

$$\cos\left(\frac{\pi}{q}\right), q \geq 3; \quad \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right), q \geq 5; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{q}\right), q \geq 7.$$

Sendo q um número inteiro. E as possíveis assinaturas de G são

$$(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0); \quad (0 : 2, 4, q; 0; 0); \quad (0 : 2, 3, q; 0; 0).$$

Prova: Uma construção de um domínio fundamental para cada G discreto surgirá na prova e ela será clara para cada valor de λ dado no teorema.

Suponhamos primeiramente $\lambda > 1$. Como $\lambda = (L_2, L_3) > 1$ temos que as linhas geodésicas L_2 , L_3 e L_4 são disjuntas. Seja D o polígono hiperbólico convexo limitado pelas geodésicas L_3 , L_4 e L_2 (esse polígono possui dois lados livres). Como fg é um elemento hiperbólico com comprimento de translação $2\rho(u, v)$ e como $\rho(L_3, L_4) = 2\rho(u, v)$, temos que existe uma potência de fg que conjuga f e g de modo que os pontos fixos u' e v' de

$$(fg)^m f (fg)^{-m} \quad \text{e} \quad (fg)^m g (fg)^{-m},$$

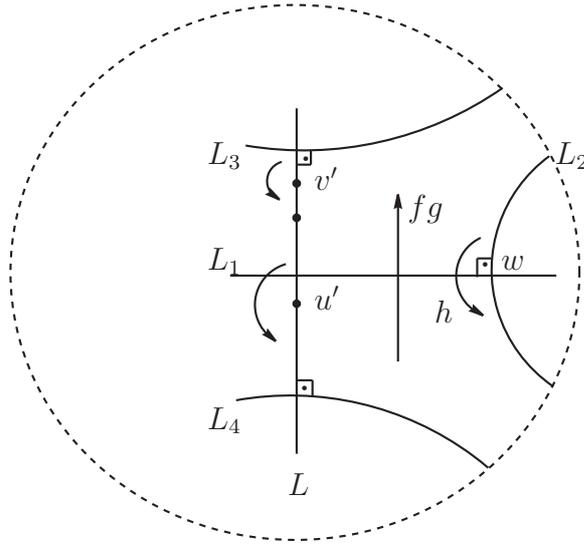


Figura 5.3: Construção para $\lambda > 1$

respectivamente, pertencem ao arco da geodésica L compreendido entre L_3 e L_4 (esse arco de geodésica é um lado do polígono D). Agora identifique os lados desse polígono com os elementos

$$(fg)^m f (fg)^{-m}, \quad (fg)^m g (fg)^{-m}, \quad h \quad e \quad fg.$$

Aplicando o Teorema de Poincaré, vemos que o grupo gerado por esses identificadores de lados é discreto e que D é um domínio fundamental para G . Mais ainda, é claro que esse grupo G é o grupo gerado pelos elementos f , g e h . Pela análise dos ciclos de vértices de D , vemos que G tem assinatura $(0 : 2, 2, 2; 0; 1)$ e que $\frac{\bar{D}}{G}$ é uma superfície de Riemann como na figura 5.4. Isto prova (1).

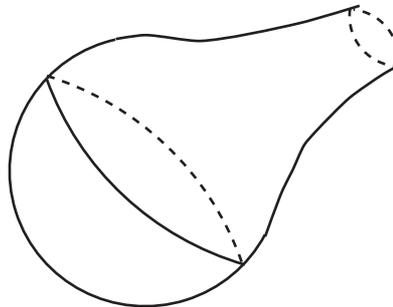


Figura 5.4: Superfície de Riemann para $\lambda > 1$

Para o caso (2), quando $\lambda = 1$, temos L_2 tangente a L_3 e a L_4 no círculo no infinito. Veja a figura 5.5. Como no caso anterior, os elementos identificadores de lados do polígono D são

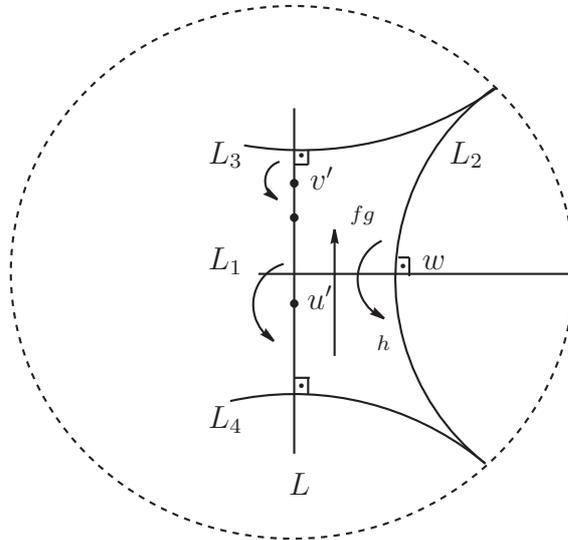


Figura 5.5: Construção para $\lambda = 1$

$(fg)^m f(fg)^{-m}$, $(fg)^m g(fg)^{-m}$, h (elementos elípticos de ordem 2) e fg (elemento hiperbólico). Estes elementos geram G e novamente pelo Teorema de Poincaré, D é um domínio fundamental para G . Ao passarmos o quociente $\frac{\bar{D}}{G}$, teremos uma superfície de Riemann como na figura 5.6. Neste caso, G tem assinatura $(0 : 2, 2, 2; 1; 0)$.

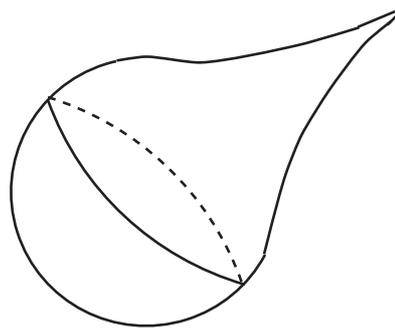


Figura 5.6: Superfície de Riemann para $\lambda = 1$

O caso (3), quando $\lambda < 1$, é mais complexo. A reta L_2 corta L_3 e L_4 formando um ângulo θ . Consideraremos o quadrilátero ilustrado na figura 5.7. Note que $\lambda = \cos(\theta)$.

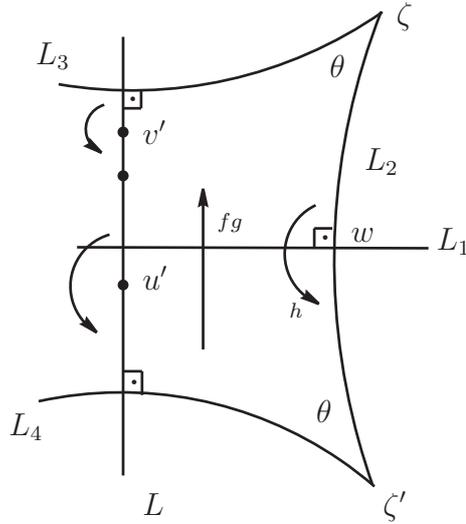


Figura 5.7: Construção para $\lambda < 1$

Suponha G discreto. Então hgf (ou hfg) satisfaz

$$hgf = (\sigma_2\sigma_1)(\sigma_1\sigma_3) = \sigma_2\sigma_3.$$

O elemento $\sigma_2\sigma_3$ é uma rotação de ângulo 2θ sobre ζ . Como estamos supondo G discreto, $hfg = \sigma_2\sigma_3$ deve ter ordem finita, digamos q . Isso implica que $\theta = \frac{\pi p}{q}$ para algum inteiro p com $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Se $p = 1$, considere o polígono convexo limitado D pelas geodésicas L_3 , L , L_4 e L_2 . Como anteriormente, identifiquem os lados desse polígono com os elementos

$$(fg)^m f (fg)^{-m}, \quad (fg)^m g (fg)^{-m}, \quad h \quad e \quad fg.$$

Nesse caso, também podemos aplicar o teorema de Poincaré a esse polígono com lados identificados para mostrar que o grupo G , gerado por esses quatro elementos, é discreto e que D é um domínio fundamental para G . Isso implica que, o grupo gerado por f , g e h é discreto (por ser igual a G) e que G tem assinatura $(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0)$ sendo $q \geq 3$, pois $\lambda = \cos \frac{\pi}{q} < 1$.

Agora assumiremos que $p \geq 2$.

Sabemos que o teorema de Poincaré nos dá condições para que elementos que identifiquem os lados de um polígono D sejam geradores de um grupo Fuchsiano G sendo D o polígono

fundamental para G . Uma dessas condições é que

$$\sum_{i=1}^k \alpha(v_i) = \frac{2\pi}{Q}.$$

Veja as páginas 51 a 54. Denotamos por $\alpha(v_i)$ o ângulo interno no vértice v_i do polígono D , k o período do ciclo de v_i e Q a ordem do elemento cíclico de v_i .

Exemplo ilustrativo:

Considere $g(z) = ze^{i3\pi/4}$ uma rotação de 135° ao redor da origem do plano hiperbólico Δ . Veja a figura 5.8. O setor $\widehat{a_1 a_8}$ de 135° está em destaque, sendo que $g(a_1) = a_2$, $g^2(a_1) = a_3$, \dots , $g^7(a_1) = a_8$, $g^8(a_1) = a_1$. Assim a ordem do ciclo de v_1 é 8, já que 8 é o menor inteiro positivo n tal que $n \cdot \frac{3\pi}{4}$ é múltiplo de 2π . Considere $G = \langle g \rangle = \langle id, g, g^2, g^3, \dots, g^7 \rangle$. A princípio podemos pensar que um polígono fundamental para G seria o setor $\widehat{a_1 a_8}$ de 135° . Mas este setor (polígono) não satisfaz o teorema de Poincaré, portanto não é polígono fundamental. Um setor (polígono) que satisfaz o teorema de Poincaré é, por exemplo, o setor $\widehat{a_3 a_8}$, hachurado na figura 5.8, de 45° . Desta maneira, concluímos que

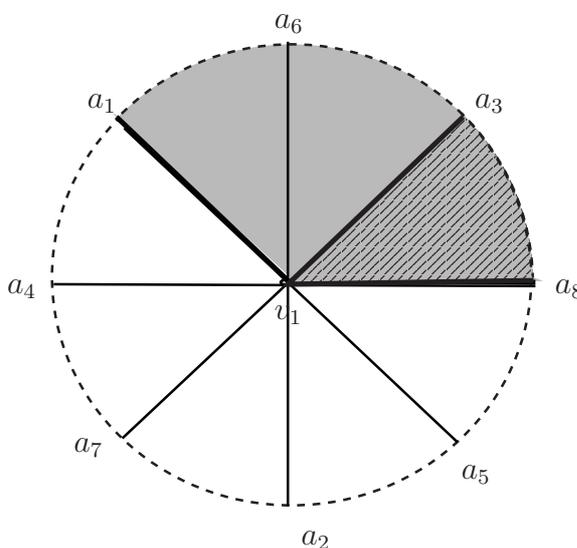


Figura 5.8: Exemplo ilustrativo

$$\text{área do polígono fundamental} \leq \text{área do setor de ângulo } \frac{3\pi}{4}.$$

Voltando ao caso que estamos estudando ($\lambda < 1, p \geq 2$), temos que as G -órbitas do quadrilátero D da figura 5.7 cobrem o plano hiperbólico, assim considerando áreas, temos

área do polígono fundamental para $G \leq$ área do quadrilátero D da figura 5.7.

Então pelo teorema 4.14 e pela equação (4.3), temos

$$2\pi \left\{ 2g - 2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right\} \leq \pi - \frac{2\pi p}{q}, \quad (5.4)$$

onde G tem assinatura $(g : m_1, \dots, m_r; 0; 0)$.

Simplificando por π a equação (5.4),

$$4g - 4 + 2r - 2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} \leq 1 - \frac{2p}{q}. \quad (5.5)$$

Logo,

$$4g - 4 + r \leq 1 - \frac{2p}{q} - r + 2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j}. \quad (5.6)$$

Como $m_j \geq 2$, então

$$\sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} \leq \frac{r}{2}.$$

Daí,

$$-\frac{2p}{q} - r + 2 \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} < 0.$$

Portanto,

$$4g - 4 + r < 1. \quad (5.7)$$

Como a área do polígono fundamental é positiva, pela equação (5.4), temos:

$$0 < 2g - 2 + r \quad (5.8)$$

Pelas desigualdades (5.7) e (5.8), temos apenas as seguintes possibilidades:

$$g = 0 \text{ e } r = 3 \text{ ou } r = 4.$$

De fato vamos demonstrar que $r = 3$. Para ver isto, vamos assumir que $r = 4$ e vamos obter um absurdo. Como G contém um elemento de ordem q , podemos supor que q divide m_4 .

Por $m_j \geq 2$,

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_4} \right) \leq 2 \left(2 - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{m_j} \right).$$

Pela a equação (5.5),

$$2 \left(2 - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{m_j} \right) \leq 1 - \frac{2p}{q} .$$

E por $p \geq 2$ e $q \leq m_4$,

$$2 \left(2 - \sum_{j=1}^4 \frac{1}{m_j} \right) \leq 1 - \frac{4}{m_4} .$$

Portanto,

$$2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m_4} \right) \leq 1 - \frac{4}{m_4} .$$

Daí,

$$1 - \frac{2}{m_4} \leq 1 - \frac{4}{m_4} .$$

Logo, $m_4 = \infty$. Assim G contém elemento parabólico, no entanto isso não pode acontecer, pois o quadrilátero é compacto e contém pontos de toda órbita. Portanto $r = 3$.

Agora vamos escrever a assinatura de G como $(0 : l, m, n; 0; 0)$ onde q divide n .

Como podemos perceber no exemplo ilustrativo, existe o inteiro positivo 3 tal que o setor $\widehat{a_1 a_8}$ de 135° contém 3 imagens de cada ponto do domínio fundamental (setor $\widehat{a_3 a_8}$ de 45°). Veja figura 5.8. De fato, isso acontece em geral. Pelo teorema 9.8.6 da referência [1], página 250, temos:

Seja P um polígono convexo com os lados identificados e \overline{P} compacto em Δ . Se o grupo G gerado por esses identificadores de lados é discreto, então existe um inteiro positivo N tal que

área do polígono $P = N$ (área do polígono fundamental para G).

Voltando ao caso em questão, existirá um inteiro positivo N tal que o quadrilátero D (figura 5.7) contém N imagens de cada ponto do polígono fundamental de G . Desta forma,

$$2\pi N \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] = \pi - \frac{2\pi p}{q} . \quad (5.9)$$

Como $\theta = \frac{\pi p}{q}$ e como ζ e ζ' estão na mesma órbita, encontramos $N \geq p$.

Assim,

$$\begin{aligned} 2p \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] &\leq 2N \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{2p}{q} \\ &\leq 1 - \frac{2p}{n} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

E a inequação entre o primeiro termo e o último nos dá

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \geq \frac{2p-1}{2p} \geq \frac{3}{4}.$$

Assim,

$$\frac{l+m}{lm} \geq \frac{3}{4}.$$

Atribuindo valores para l podemos determinar as soluções dessa inequação restrita as condições $l \geq 2$ e $m \geq 2$.

- Se $l = 2$, então $m \leq 4$. Logo, $m = 3$ ou $m = 4$.
- Se $l = 3$, então $m \leq \frac{12}{5}$. Logo, $m = 2$.
- Se $l = 4$, então $m \leq 2$. Logo, $m = 2$.
- Se $l = 5$, então $m \leq \frac{20}{11}$. Logo, $m \leq 2$ (absurdo).

Daí temos as seguintes soluções para l , m e p :

$$(l, m, p) = (2, 3, 2), (2, 3, 3), (2, 4, 2).$$

Se $(l, m, p) = (2, 4, 2)$, veremos que as desigualdades em (5.10) são de fato igualdades.

De (5.10) obtemos

$$2p \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] \leq 1 - \frac{2p}{q}.$$

Para $(l, m, p) = (2, 4, 2)$, essa desigualdade implica:

$$4 \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \right) \right] \leq 1 - \frac{4}{q}$$

$$4 - 2 - 1 - \frac{4}{n} \leq 1 - \frac{4}{q}$$

$$1 - \frac{4}{n} \leq 1 - \frac{4}{q}$$

Logo, $-q \leq -n$. Daí $q \geq n$. Mas como q divide n , temos $q \leq n$. Portanto $q = n$. Assim neste caso, G tem assinatura $(0 : 2, 4, q; 0; 0)$ e $\lambda = \cos \frac{2\pi}{q}$, sendo $q \geq 5$, pois $\lambda < 1$.

Se $(l, m, p) = (2, 3, 3)$, do mesmo modo as desigualdades em (5.10) também são igualdades e daí $q = n$. Assim G tem assinatura $(0 : 2, 3, q; 0; 0)$ e $\lambda = \cos \frac{3\pi}{q}$, sendo $q \geq 7$.

Para o caso que resta, $(l, m, p) = (2, 3, 2)$, precisamos de um argumento diferente. Primeiro, os pontos fixos elípticos u', v', w, ζ e ζ' estão em mais de duas órbitas (nenhum deles pode pertencer à órbitas de ordem três). Isto, significa que $N \geq 3$. Finalmente usando os termos do meio de (5.10),

$$2N \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] = 1 - \frac{4}{q},$$

temos

$$6 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n} \right) \leq 1 - \frac{4}{q}.$$

Assim $q = n$, pois q divide n . E G tem assinatura $(0 : 2, 3, q; 0; 0)$. Isto completa a prova do teorema. ■

Exemplo 7 Como ilustração de um caso possível para este último teorema, considere o quadrilátero da figura 5.9 onde $\rho(u', w) = \rho(u', v')$.

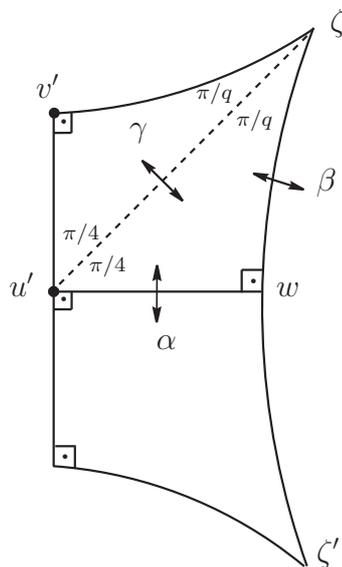


Figura 5.9: Exemplo ilustrativo de grupo com assinatura $(0; 2, 4, q; 0; 0)$

Sejam α , β e γ as inversões nas retas como mostra na figura. As três rotações de ordem dois (fixando w , u' e v' , respectivamente) são $\alpha\beta$, $(\alpha\gamma)^2$ e $\gamma(\alpha\beta)\gamma$ e estas rotações geram o mesmo grupo do que $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ e $\gamma\alpha$. Logo o grupo gerado tem assinatura $(0 : 2, 4, q; 0; 0)$.

Anexo

Produto Livre Amalgamado

O objetivo deste anexo é apresentar as definições de produto livre e produto livre amalgamado de dois grupos. Uma vez que esses conceitos são recorrentes no estudo da geometria hiperbólica, e em particular no estudo dos Teoremas de Combinação, esperamos que este anexo possa ser útil para alguns leitores interessados.

O **produto livre**, denotado por $A * B$, dos grupos

$$A = \langle a_1, \dots, a_n; R_1(a_v), \dots, R_p(a_v) \rangle \quad \text{e} \quad B = \langle b_1, \dots, b_m; S_1(b_u), \dots, S_q(b_u) \rangle$$

é o grupo

$$A * B = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; R_1(a_v), \dots, R_p(a_v), S_1(b_u), \dots, S_q(b_u) \rangle.$$

A e B são chamados fatores livres de $A * B$.

O grupo apresentado por $\langle a, b; a^4, b^6 \rangle$ é obviamente o produto livre dos grupos cíclicos $\langle a; a^4 \rangle$ e $\langle b; b^6 \rangle$. Por outro lado, o grupo apresentado por

$$\langle a, b; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle \tag{5.11}$$

não é produto livre. Um produto livre tem centro trivial. Observe que o elemento a^2 em (5.11) comuta com a e comuta com b já que a^2 é uma potência de b , assim a^2 está no centro de (5.11). Para mostrar que a^2 não é a identidade note que (5.11) pode ser aplicado homomorficamente sobre o grupo cíclico $\langle x; x^{12} \rangle$ levando a em x^3 e b em x^2 , por esta aplicação a^2 vai em x^6 que não é a identidade em $\langle x; x^{12} \rangle$. Logo, (5.11) não define um produto livre.

Apesar da representação em (5.11) ser simples, um grupo com tal representação é dado um nome especial.

$$\text{Se } G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; R(a_v), \dots, S(b_u), \dots, U_1(a_v) = V_1(b_u), \dots, U_q(a_v) = V_q(b_u) \rangle,$$

$$A = \langle a_1, \dots, a_n; R(a_v), \dots \rangle,$$

$$B = \langle b_1, \dots, b_m; S(b_u), \dots \rangle,$$

H subgrupo de A gerado por $U_1(a_v), \dots, U_q(a_v)$,

K subgrupo de B gerado por $V_1(b_u), \dots, V_q(b_u)$.

Então G é dito o **produto livre amalgamado** de A e B com os subgrupos H e K amalgamados pelo isomorfismo φ que aplica $U_i(a_v)$ em $V_i(b_u)$. notação: $G = A *_\varphi B$

Assim, considerando $G = \langle a, b; a^4, b^6, a^2 = b^3 \rangle$, o homomorfismo de G em $\langle x; x_{12} \rangle$ dado por $a \rightarrow x^3, b \rightarrow x^2$ mostra que a e b tem ordem 4 e 6, respectivamente. Daí, $A = \langle a; a^4 \rangle$ e $B = \langle b; b^6 \rangle$. Além disso, $H = \langle a^2, a^4 \rangle$ com ordem dois e $k = \langle b^3; b^6 \rangle$ com ordem dois e H e K são amalgamados pelo isomorfismo $a^2 \rightarrow b^3$.

Seja G um grupo definido por uma apresentação. O problema de decidir quando uma palavra em G define um elemento identidade ou quando duas palavras definem o mesmo elemento é conhecido com o **problema da palavra em G** .

Se $G = \langle a, b; a^{12}, b^{15}, a^4 = b^5 \rangle$, a aplicação $a^4 \rightarrow b^5$ induz um isomorfismo de $H = \langle a^4; a^{12} \rangle$ em $\langle b^5; b^{15} \rangle$. Para entender a idéia da solução do problema da palavra, vamos reduzir a palavra específica

$$a^{15}b^{-21}a^{32}b^{42}a^{-19}. \quad (5.12)$$

Podemos mudar os expoentes de a e b de maneira que eles variam de 0 a 11 e 0 a 14, respectivamente. Assim, (5.12) define o mesmo elemento que

$$a^3b^9a^8b^{12}a^5. \quad (5.13)$$

Além disso, como $a^4 = b^5$, podemos simplificar (5.13) como se segue:

$$\begin{aligned} a^3b^9a^8b^{12}a^5 &= a^3b^9a^8b^{12}a^4a &= a^3b^9a^8b^{12}b^5a &= a^3b^9a^8b^{17}a \\ &= a^3b^9a^8b^{15}b^2a &= a^3b^9a^8b^2a &= a^3b^9b^{10}b^2a \\ &= a^3b^{21}a &= a^3b^{15}b^6a &= a^3b^6a \\ &= a^3b^5ba &= a^3a^4ba &= a^7ba \\ &= a^4a^3ba \end{aligned}$$

De maneira análoga pode-se mostrar que toda palavra em G pode ser reduzida a uma palavra da forma

$$a^{4k} a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_r} b^{\beta_r} \quad (5.14)$$

onde $k = 0, 1, 2$; $0 \leq \alpha_i \leq 3$; $0 \leq \beta_i \leq 4$ e $\alpha_i \neq 0$ se $i \neq 1$, $\beta_j \neq 0$ se $j \neq r$.

O fator a^{4k} em (5.14) define o elemento geral de H em G . Além disso, a^{α_i} pode ser $1, a, a^2$ ou a^3 que são simplesmente representantes das classes laterais $A \text{ mod } H$. Analogamente, b^{β_i} pode ser $1, b, b^2, b^3$ ou b^4 que são representantes das classes laterais $A \text{ mod } K$. Assim, todo elemento de G pode ser representado unicamente como o produto de um elemento de H e representantes de classes laterais alternadamente de $A \text{ mod } H$ e $B \text{ mod } K$. Quando um elemento está representado desta maneira, dizemos que está na **forma normal**.

Isto sugere a seguinte generalização:

Teorema: *Sejam $A = \langle a_1, \dots, a_n; R(a_v), \dots \rangle$, $B = \langle b_1, \dots, b_m; S(b_u), \dots \rangle$, $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m; R(a_v), \dots, S(b_u), \dots, U_1(a_v) = V_1(b_u), \dots, U_q(a_v) = V_q(b_u) \rangle$ e seja φ o isomorfismo que aplica $U_i(a_v)$ em $V_i(b_u)$ entre os subgrupos H e K de A e B , respectivamente; e suponha um sistema de representantes das classes laterais à direita de $A \text{ mod } H$ e $B \text{ mod } K$ selecionado. Então para cada elemento g de G podemos associar a uma única seqüência (h, c_1, \dots, c_r) tal que*

(i) h é um elemento de H ;

(ii) c_i é um representante de uma classe lateral de $A \text{ mod } H$ ou de $B \text{ mod } K$;

(iii) $c_i \neq 1$;

(iv) c_i e c_{i+1} não são ambos em A e não são ambos em B .

Para uma prova deste teorema, veja [3].

Referências Bibliográficas

- [1] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag (1983)
- [2] Ford, L. R., *Automorphic Functions*, Chelsea Publishing (1951)
- [3] Magnus, W, Karrass, A e Solitar, D., *Combinatorial Group Theory: presentations of groups in terms of generators and relations*, Dover (1976)
- [4] Maskit, B., *Kleinian Groups*, Springer-Verlag (1986)
- [5] Rosenfeld, B.A., Sergeeva, N. D., *Stereographic Projection*, Min Publishers-Moskow (1977)
- [6] Soares, M. G., *Cálculo em uma variável complexa*, IMPA (2003)

Índice Remissivo

- aplicação
 - analítica, 37
 - anti-conforme, 7
- arco de descontinuidade, 54
- assinatura, 59
- atlas complexo, 35
- círculo isométrico, 17
- carta complexa, 35
- ciclo acidental, 52
- ciclo de vértices, 51
- comprimento de translação, 48
- conjunto
 - limite, 23
 - regular, 20
 - regular livre, 20
- domínio, 24
 - de Ford, 27
 - fundamental, 26
- elemento
 - cíclico do vértice, 51
 - elíptico, 15
 - hiperbólico, 15
 - hiperbólico de bordo, 56
 - identificador de lados, 26, 50
 - loxodrômico, 15
 - parabólico, 15
- equivalência conforme, 37
- estrutura complexa, 35
- forma normal, 85
- função deslocamento, 48
- G-órbita, 21
- geodésicas, 43
 - concorrentes, 45
 - disjuntas, 45
 - paralelas, 45
- grupo
 - das isometrias, 43
 - das transformações lineares fracionárias, 8
 - de Möbius, 8
 - de Schottky, 33
 - do 1^o tipo, 46
 - do 2^o tipo, 46
 - elementar, 24
 - Fuchsiano, 46
 - geral de Möbius, 7
 - Kleiniano, 20
 - não elementar, 24
 - projetivo linear especial, 14
 - projetivo linear geral, 13
- inversão em círculos, 6

- isometria
 - conforme, 45
 - conforme elíptica, 46
 - conforme hiperbólica, 47
 - conforme parabólica, 46
- isometrias, 43
- lado
 - de um polígono, 50
 - de um polígono fundamental, 50
- lados
 - do domínio, 26
- lados livres, 55
- métrica
 - da corda em $\widehat{\mathbb{C}}$, 6
- modelo
 - do disco unitário, 43
 - do semi-plano superior, 43
- mudança de cartas, 35
- ordem do ciclo, 52
- período do ciclo, 51
- polígono, 50
 - de Dirichlet, 53
 - fundamental convexo, 50
 - localmente finito, 50
- ponto limite, 23
- pontos equivalentes, 20
- problema da palavra, 84
- produto
 - inverso, 66
 - livre, 83
 - livre amalgamado, 84
- projeção estereográfica, 5
- região de Nielsen, 55
- retas em \mathbb{H}^2 , 42
- semi-plano de bordo, 54
- subconjunto
 - precisamente invariante, 24
- superfície de Riemann, 36
- Teorema de Poincaré, 54
- transformação
 - de Möbius, 7
 - linear fracionária, 8
- vértice, 50
 - impróprio, 55
 - próprio, 55
- vértices acidentais, 52