

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**Deformações de Grupos Triangulares Ideais no  
Espaço Hiperbólico Complexo**

**Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro**

**Orientador: Francisco Dutenhefner**

7 DE JULHO DE 2006

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O Espaço Hiperbólico Complexo</b>	<b>4</b>
1.1 O Modelo Projetivo e o Modelo da Bola . . . . .	4
1.2 Isometrias . . . . .	6
1.3 Subespaços de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	13
1.4 O Modelo do Parabolóide . . . . .	15
1.5 O Produto Vetorial Hermitiano . . . . .	27
1.6 Bissetores . . . . .	35
<b>2 O Invariante Angular de Cartan</b>	<b>37</b>
2.1 O Produto Hermitiano Triplo . . . . .	37
2.2 O Invariante Angular de Cartan . . . . .	38
2.3 Interpretação Geométrica do Invariante de Cartan . . . . .	40
2.4 Uma Partição da Fronteira . . . . .	43
<b>3 O Grupo Triangular Ideal</b>	<b>45</b>
3.1 O Problema . . . . .	45
3.2 Representações Não-Discretas . . . . .	47
3.3 Poliedros de Dirichlet em $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	50
3.4 Discretitude . . . . .	60
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>

# Introdução

Em 1992 William Goldman e John Parker publicaram o artigo “complex hyperbolic ideal triangle groups” [6], que é um marco na história do desenvolvimento da geometria hiperbólica complexa.

O problema por eles levantado diz respeito ao problema de deformação: dados um grupo finitamente gerado  $\Gamma$ , um grupo de Lie  $G_1$ , um grupo de Lie  $G_2 \supset G_1$  e um mergulho discreto  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow G_1$ , pergunta-se se  $\rho_0$  faz parte de alguma família de mergulhos discretos.

Aqui, **mergulho discreto** significa um homomorfismo injetivo sobre um conjunto discreto.

O problema de deformação torna-se mais interessante no caso em que  $G_1$  e  $G_2$  são grupos de isometrias de espaços simétricos de posto 1,  $X_1$  e  $X_2$  respectivamente, e  $\Gamma$  é isomorfo a um lattice em  $G_1$ . Se  $X_1 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  é o plano hiperbólico e se  $X_2 = \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  é o espaço hiperbólico de dimensão 3, então este problema de deformação é equivalente a teoria clássica, bem desenvolvida, de grupos quase-Fuchsianos.

Possivelmente o grupo triangular ideal é o lattice mais simples em  $\text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2)$ . Esse grupo  $\Gamma$  é gerado pelas reflexões  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  nos lados de um triângulo geodésico em  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  cujos vértices pertencem ao círculo no infinito. Uma vez que esse grupo triangular é rígido em  $\text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2)$ , William Goldman e John Parker estudaram esse problema de deformação substituindo  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$  por  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , o espaço hiperbólico complexo de dimensão dois, e substituindo  $\text{Isom}(\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2)$  por  $\text{PU}(2, 1)$ , o grupo de isometrias holomorfas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Na fronteira do espaço hiperbólico complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , uma tripla de pontos  $u = (u_0, u_1, u_2)$  determina o subgrupo de  $\text{PU}(2, 1)$  gerado por três inversões  $i_0, i_1$  e  $i_2$ , cada uma delas na linha complexa que passa por dois desses pontos. Dessa construção, tem-se a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \phi_u : \Gamma &\rightarrow \text{PU}(2, 1) \\ \phi_u(\varepsilon_j) &= i_j, \quad j = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

No artigo [6], foi analisada a seguinte questão: para quais triplas  $u = (u_0, u_1, u_2)$  a representação  $\phi_u$  é um mergulho discreto?

Uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo fica unicamente determinada, a menos de isometrias, por um único número real: o invariante **angular de Cartan**  $\mathbb{A}(u)$ , que pertence ao intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Portanto, reinterpretando o problema de deformação acima em termos desse invariante, pergunta-se sobre quais valores de  $\mathbb{A}$ , a imagem da aplicação

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \frac{\text{Hom}(\Gamma, \text{PU}(2, 1))}{\text{PU}(2, 1)}$$

é um mergulho discreto. Aqui, essa aplicação é definida por:  $\mathbb{A} \mapsto \phi_u$ , sendo  $u = (u_0, u_1, u_2)$  uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo tal que  $\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}$ .

Em [6] foram demonstrados os seguintes resultados:

**Teorema 1:** Se  $\phi_u$  é um mergulho discreto então

$$|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{125/3}) \approx 1,4171 \approx 81,1938^\circ.$$

**Teorema 2:** Reciprocamente,  $\phi_u$  é um mergulho discreto se

$$|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan\sqrt{35} \approx 1,40335 \approx 80,4059^\circ.$$

Além disso, em [6] foi apresentada a seguinte conjectura:

**Conjectura:**  $\phi_u$  é um mergulho discreto se, e somente se,  $|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{125/3})$ .

Desde a publicação do artigo [6] várias tentativas para a demonstração e a generalização da conjectura acima foram publicadas. E nas procuras para alguma resposta para essa pergunta, a geometria hiperbólica complexa foi se desenvolvendo rapidamente. Por esse motivo, o artigo [6] tem uma importância histórica inquestionável.

A conjectura de Goldman-Parker foi afirmativamente demonstrada por Richard Schwartz em 2001 [8], [12] e posteriormente generalizada de várias maneiras diferentes. O artigo [10] contém um excelente resumo do desenvolvimento dessa teoria nos últimos anos.

Nesse trabalho apresentaremos os conceitos envolvidos na análise do problema de deformação de um grupo triangular ideal no espaço hiperbólico complexo além da demonstração dos teoremas

de Goldman-Parker do artigo [6].

Essa dissertação está dividida em 3 capítulos, assim organizados:

No capítulo 1 serão introduzidos conceitos básicos da Geometria Hiperbólica Complexa. Começamos apresentando o modelo projetivo para  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Seguimos com o modelo da bola unitária e fazemos uma discussão sobre o grupo de isometria de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e, em particular, a respeito da ação do seu grupo de isometrias holomorfas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Falamos também dos subespaços totalmente geodésicos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ : as geodésicas complexas e os subespaços totalmente reais. Mostraremos ainda que  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  possui cópias do espaço hiperbólico real tanto no modelo da bola de Poincaré com curvatura constante  $-1$  quanto no modelo de Klein-Beltrami com curvatura constante  $-1/4$ .

Um outro modelo que será discutido é o modelo do Parabolóide. Introduzimos esse modelo e, do mesmo modo como é feito para o modelo do semi-espaço para a geometria hiperbólica real, definiremos as coordenadas horoesféricas. Faremos uma ampla discussão sobre a ação do grupo de isometrias holomorfas nesse modelo para o espaço hiperbólico complexo.

O produto vetorial hermitiano será apresentado de maneira simples e detalhada. Feito isso, seguiremos com uma discussão a respeito das posições relativas de geodésicas complexas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Ainda, utilizando o produto vetorial hermitiano, definiremos projeções e reflexões em geodésicas complexas.

Finalizaremos o capítulo fazendo uma breve discussão sobre os bissetores métricos e exibiremos suas decomposições em subvariedades totalmente geodésicas.

No capítulo 2 será introduzido o invariante angular de Cartan. Começaremos com uma definição algébrica, via produto hermitiano triplo, e demonstraremos algumas propriedades desse invariante. Depois, daremos uma interpretação geométrica do invariante angular de Cartan, e mostraremos como ele pode ser utilizado para distinguir quando uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo pertence à uma cadeia ou à um  $\mathbb{R}$ -círculo. Finalmente finalizamos o capítulo com uma discussão de como podemos utilizar o invariante angular de Cartan para parametrizar triplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo.

No capítulo 3 será apresentado o artigo “complex hyperbolic ideal triangle groups” dos matemáticos William Goldman e John Parker. A exposição será feita de maneira clara e detalhada alcançando o principal objetivo aqui proposto.

# Capítulo 1

## O Espaço Hiperbólico Complexo

Neste capítulo vamos apresentar conceitos básicos sobre o Espaço Hiperbólico Complexo. Uma referência completa desse assunto é o livro de W. M. Goldman [3].

O Espaço Hiperbólico Complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  de dimensão complexa dois é uma variedade de Kähler simplesmente conexa completa de curvatura seccional holomorfa constante negativa igual a  $-1$ . Vista como uma variedade Riemanniana, é uma variedade diferenciável de dimensão 4 e sua curvatura seccional real não é constante variando entre  $-1$  e  $-1/4$ .

### 1.1 O Modelo Projetivo e o Modelo da Bola

Existem vários modelos para o Espaço Hiperbólico Complexo. O primeiro modelo a ser apresentado é o modelo projetivo e, em seguida, apresentaremos o modelo da bola unitária. Uma das grandes vantagens do modelo projetivo é que podemos recorrer a Álgebra Linear para resolver um grande número de problemas relacionado ao espaço hiperbólico complexo.

#### O Modelo Projetivo

Vamos denotar por  $\mathbb{C}^{2,1}$  o espaço vetorial complexo de dimensão 3 com uma estrutura Hermitiana não-degenerada  $\langle, \rangle$  de assinatura  $(2, 1)$ . Isto significa que a representação matricial de  $\langle, \rangle$ , em qualquer base, é uma matriz Hermitiana de ordem 3 com dois autovalores positivos e um negativo.

Para qualquer  $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ , o produto Hermitiano  $\langle Z, Z \rangle$  é um número real. Portanto podemos definir os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{C}^{2,1}$ :

- $V_0 = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} : \langle Z, Z \rangle = 0\}$
- $V_- = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} : \langle Z, Z \rangle < 0\}$

$$\bullet V_+ = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} : \langle Z, Z \rangle > 0\}$$

Os vetores em  $V_0$ ,  $V_-$  ou  $V_+$  são respectivamente chamados vetores **nulos**, **negativos** ou **positivos**.

Seja  $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{2,1} - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$  a projeção natural sobre o Espaço Projetivo Complexo Bidimensional. O Espaço Hiperbólico Complexo é a variedade analítica complexa definida por  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-)$ , munida de uma métrica Riemanniana induzida da forma  $\langle, \rangle$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$ , chamada de **métrica de Bergman**.

A fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é justamente a projeção  $\mathbb{P}(V_0)$ . Deste modo,  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é uma subvariedade real do espaço projetivo  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$  de dimensão real 3.

A métrica de Bergman é dada por

$$ds^2 = \frac{-4}{\langle Z, Z \rangle} \det \begin{pmatrix} \langle Z, Z \rangle & \langle dZ, Z \rangle \\ \langle Z, dZ \rangle & \langle dZ, dZ \rangle \end{pmatrix}.$$

A métrica de Bergman induz uma função distância em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , chamada **distância de Bergman**, expressa pela fórmula

$$\cosh^2 \left( \frac{\rho(z, w)}{2} \right) = \frac{\langle Z, W \rangle \langle W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle},$$

onde  $Z, W$  são os levantamentos em  $\mathbb{C}^{2,1}$  dos pontos  $z$  e  $w$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , respectivamente.

Seja  $U(2, 1) = \{f \in GL(3, \mathbb{C}) : ff^* = id\}$  o grupo das transformações lineares unitárias de  $\mathbb{C}^{2,1}$ .  $U(2,1)$  é o grupo de todos os automorfismos lineares que preservam a estrutura Hermitiana  $\langle. \rangle$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

A cada transformação linear unitária  $f \in U(2, 1)$ , podemos associar uma aplicação  $\mathbf{f} : \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$  definida por  $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(fZ)$ , onde  $z = \mathbb{P}(Z)$ . É claro que  $\mathbf{f}$  é um biholomorfismo que deixa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  invariante. Além disso, como  $f$  preserva a forma Hermitiana de  $\mathbb{C}^{2,1}$ ,  $\mathbf{f}$  é uma isometria de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Por outro lado, se  $\mathbf{f}$  é um biholomorfismo que deixa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  invariante, existe uma aplicação unitária  $f \in U(2, 1)$  tal que  $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(fZ)$  para todo  $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ .

Denotando o grupo dos biholomorfismos de  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$  por  $\text{Aut}(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2)$ , o que fizemos acima foi definir uma aplicação  $\mathbb{P} : U(2, 1) \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2)$ . Essa aplicação é um homomorfismo cujo a imagem  $\mathbb{P}(U(2, 1)) = \text{PU}(2, 1)$  é o grupo de todos os biholomorfismos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Os elementos de  $\text{PU}(2, 1)$  são chamados de **transformações lineares projetivas**.

## O Modelo da Bola Unitária

Consideremos em  $\mathbb{C}^{2,1}$  a estrutura Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  definida por

$$\langle Z, W \rangle_1 = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3,$$

onde

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Considerando essa estrutura Hermitiana e tomando a seção  $z_3 = 1$  no Espaço Projetivo, teremos que

$$\langle Z, Z \rangle_1 = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 < 1$$

para qualquer  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Dessa forma podemos identificar naturalmente o Espaço Hiperbólico Complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  com a bola unitária  $\mathbb{B}^2$  contida em  $\mathbb{C}^2$ . A métrica definida em  $\mathbb{B}^2$  é a métrica de Bergman induzida pela estrutura Hermitiana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ . Munida dessa métrica,  $\mathbb{B}^2$  é chamado o **modelo da bola unitária** para o espaço hiperbólico complexo. Ainda

$$\mathbb{B}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \langle\langle z, z \rangle\rangle < 1\}$$

onde  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  denota o produto interno usual de  $\mathbb{C}^2$ .

## 1.2 Isometrias

### A Ação do Grupo $\text{PU}(2, 1)$ em $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Qualquer matriz em  $\text{U}(2, 1)$  que é um múltiplo escalar não nulo da identidade, leva cada reta complexa passando pela origem em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , nela mesmo. Portanto age trivialmente sobre o espaço hiperbólico complexo. Como essa matriz é unitária com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o escalar tem necessariamente norma 1. Por causa disso, o **Grupo Unitário Projetivo**  $\text{PU}(2, 1)$  pode ser definido como o grupo quociente  $\text{U}(2, 1)/\text{U}(1)$  onde  $\text{U}(1)$  é identificado naturalmente com  $\{e^{i\theta}I : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , onde  $I$  é a identidade em  $\text{U}(2, 1)$ . Às vezes é útil considerar o grupo  $\text{SU}(2, 1)$ , das matrizes unitárias cujo determinante é 1.

A respeito da ação de  $\text{PU}(2, 1)$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , temos as seguintes proposições:



**Proposição 1.2.1** *Para qualquer ponto  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , existe um elemento de  $\mathbf{f} \in \text{PU}(2,1)$  tal que  $\mathbf{f}(0) = z$ , sendo 0 a origem da bola  $\mathbb{B}^2$ . Dessa maneira,  $\text{PU}(2,1)$  age transitivamente no espaço hiperbólico complexo.*

**DEMONSTRAÇÃO:**

Seja  $z \in \mathbb{B}^2$ , cujo representante em  $\mathbb{C}^{2,1}$  é o vetor negativo  $Z$ . Como  $\langle Z, Z \rangle_1 < 0$ , podemos tomar um representante na forma  $\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{\langle Z, Z \rangle_1}} Z$ , que é um vetor negativo com  $\langle \hat{Z}, \hat{Z} \rangle_1 = -1$ . Agora vamos construir uma matriz unitária  $A \in \text{U}(2,1)$  tal que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{Z}$$

Observe que a terceira coluna dessa matriz é justamente o vetor  $\hat{Z}$ . Podemos usar uma versão do processo de Gram-Schmidt em assinatura  $(2,1)$  para obtermos vetores  $E_1$  e  $E_2$  tais que

$$\langle E_1, E_1 \rangle_1 = \langle E_2, E_2 \rangle_1 = 1$$

e

$$\langle E_1, E_2 \rangle_1 = \langle E_1, \hat{Z} \rangle_1 = \langle E_2, \hat{Z} \rangle_1 = 0.$$

Os vetores  $E_1$  e  $E_2$  formam as duas primeiras colunas de  $A$ . Por construção a matriz  $A$  é uma matriz unitária em  $\text{U}(2,1)$ . Projetivizando, temos que  $\mathbb{P}(A)$  é um elemento de  $\text{PU}(2,1)$  mandando  $(0,0)$  à  $z$ , como queríamos. ■

**Proposição 1.2.2** *O grupo  $\text{PU}(2,1)$  age transitivamente na fronteira do espaço hiperbólico  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Sejam  $x, y \in \partial\mathbb{B}^2$  cujos representantes em  $\mathbb{C}^{2,1}$  são, respectivamente,  $X$  e  $Y$ . Queremos encontrar uma transformação linear unitária  $A \in \text{U}(2,1)$  tal que  $AX = Y$ .

Como  $X, Y$  são vetores nulos e linearmente independentes, temos que  $\langle X, Y \rangle \neq 0$  (para detalhes veja a seção 1.5). Podemos assumir que  $\langle X, Y \rangle$  é real. Seja  $P = X + Y$  e defina  $A : \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$  por

$$A(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

Temos que  $A$  é uma transformação linear unitária. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle AZ, AW \rangle &= \langle -Z + 2\frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P, -W + 2\frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P \rangle = \\
 &= \langle Z, W \rangle - 2\langle Z, \frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P \rangle - 2\langle \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P, W \rangle + 4\langle \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P, \frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P \rangle = \\
 &= \langle Z, W \rangle - 4\frac{\langle P, W \rangle}{\langle P, P \rangle}\langle Z, P \rangle + 4\frac{\langle P, W \rangle}{\langle P, P \rangle}\langle Z, P \rangle = \langle Z, W \rangle
 \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
 A(X) &= -X + 2\frac{\langle X, P \rangle}{\langle P, P \rangle}P = \\
 &= -X + 2\frac{\langle X, X+Y \rangle}{\langle X+Y, X+Y \rangle}(X+Y) = \\
 &= -X + \frac{2\langle X, Y \rangle}{2\langle X, Y \rangle}(X+Y) = Y
 \end{aligned}$$

Portanto  $\mathbb{P}(A) \in \text{PU}(2, 1)$  e leva  $x$  ao ponto  $y$ . ▮

O resultado anterior é um caso particular da seguinte proposição, cuja demonstração será apresentada mais adiante nessa dissertação.

**Proposição 1.2.3** *Para quaisquer dois pares de pontos  $z, z'$  e  $w, w'$  em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , existe um elemento  $g \in \text{PU}(2, 1)$  tal que  $g(z) = w$  e  $g(z') = w'$ . Dizemos neste caso que a ação de  $\text{PU}(2, 1)$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é duplamente transitiva.*

## O Grupo de Isometrias de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Como a métrica de Bergman é dada em termos de uma forma Hermitiana  $\langle, \rangle$ , é claro que  $\text{PU}(2, 1)$  é um subgrupo do grupo de isometrias hiperbólicas complexas.

Existem isometrias de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que não estão em  $\text{PU}(2, 1)$ . Por exemplo, considere a conjugação complexa das coordenadas  $z \mapsto \bar{z}$ . Então

$$\cosh^2 \left( \frac{\rho(\bar{z}, \bar{w})}{2} \right) = \frac{\overline{\langle Z, W \rangle} \langle W, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle} = \frac{\langle W, Z \rangle \langle Z, W \rangle}{\langle Z, Z \rangle \langle W, W \rangle} = \cosh^2 \left( \frac{\rho(z, w)}{2} \right)$$

Portanto a conjugação complexa também é uma isometria do espaço hiperbólico complexo. O teorema seguinte diz que o grupo de isometrias holomorfas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é  $\text{PU}(2, 1)$  e, ainda, que o grupo de isometrias de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é gerado por  $\text{PU}(2, 1)$  e conjugações complexas. A demonstração desse teorema pode ser vista em [4].

**Teorema 1.2.1** *Toda isometria de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ou é uma aplicação holomorfa ou uma aplicação anti-holomorfa. Além disso, toda isometria holomorfa de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é um elemento de  $\text{PU}(2, 1)$  e toda isometria anti-holomorfa é dada por uma conjugação complexa seguida por um elemento de  $\text{PU}(2, 1)$ .*

## Classificação das Isometrias Holomorfas

Iremos classificar as isometrias holomorfas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . A tricotomia conhecida da geometria hiperbólica real aparece de maneira semelhante na geometria hiperbólica complexa.

Um automorfismo holomorfo  $\mathbf{g}$  de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  se levanta a uma transformação linear unitária  $g \in \mathbb{C}^{2,1}$ . Os pontos fixos de  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  correspondem a autovetores do levantamento  $g$ . Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, todo automorfismo de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  possui um ponto fixo em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então, podemos dividir os elementos do grupo  $\text{PU}(2, 1)$  em três categorias básicas. Dizemos que  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  é

- **elíptico**, se  $\mathbf{g}$  possui pelo menos um ponto fixo, em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$
- **parabólico**, se  $\mathbf{g}$  possui exatamente um ponto fixo, em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$
- **loxodrômico**, se  $\mathbf{g}$  possui exatamente dois pontos fixos, em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Se  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  é um elemento elíptico, então os autovalores de  $g \in \text{U}(2, 1)$  tem sempre norma 1. Dizemos também que um elemento elíptico é **elíptico regular** se todos os autovalores da matriz correspondente de  $g$  são distintos.

Uma isometria holomorfa é elíptica regular se, e somente se, o traço do seu levantamento a  $\text{SU}(2, 1)$  satisfaz uma certa condição polinomial. Isto é análogo ao fato que um elemento  $\mathbf{g} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  é elíptico, se o traço de um levantamento a  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  pertence ao intervalo  $(-2, 2) \subset \mathbb{R}$ . Assim como o traço de um elemento de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  é unicamente determinado a menos de multiplicação por 1 ou  $-1$ , dependendo da escolha do levantamento a  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , o traço de um elemento de  $\text{PU}(2, 1)$  é unicamente determinado a menos de multiplicação por uma raiz cúbica da unidade, dependendo do levantamento escolhido a  $\text{SU}(2, 1)$ . Para detalhes veja [3].

Em particular temos:

**Proposição 1.2.4** *Defina o polinômio  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$f(z) = |z|^4 - 8\Re(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Então  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  é *elíptico regular* se, e somente se,  $f(\text{tr}(g)) < 0$ , onde  $g$  é um levantamento de  $\mathbf{g}$  a  $\text{SU}(2, 1)$ .

O conjunto dos números complexos  $z$  tal que  $f(z) = 0$  está ilustrado na figura a seguir. Essa curva é chamada **deltóide**. Geometricamente, o teorema anterior implica que não existem pontos fora do interior do triângulo da figura 1.1 tais que a isometria correspondente seja elíptica regular.

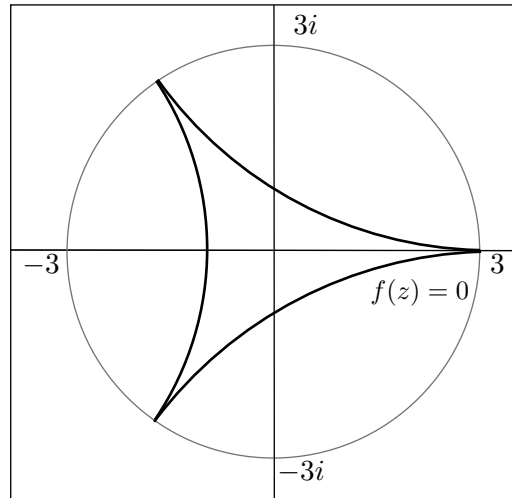


Figura 1.1: Condição de Elipticidade Regular

Para finalizar, trataremos agora da topologia em  $\text{PU}(2, 1)$ . Vamos considerar sempre  $\text{PU}(2, 1)$  munido da topologia compacto aberta. Um subgrupo  $\Gamma$  de  $\text{PU}(2, 1)$  é um subgrupo **discreto** se, e somente se, para todo ponto  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , a órbita  $\Gamma.z$  é um subconjunto discreto de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Ou ainda,  $\Gamma$  é um subgrupo discreto se, e somente se, a identidade é um ponto isolado. Em particular, se  $\Gamma$  é finito, então é discreto.

Vamos agora enunciar e demonstrar um resultado que será usado no capítulo 3.

**Lema 1.2.1** *Seja  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  um elemento elíptico. Se o subgrupo gerado por  $\mathbf{g}$  é infinito, então ele não é discreto.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  um elemento elíptico. Como  $\text{PU}(2, 1)$  age transitivamente em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , podemos supor que  $\mathbf{g}$  fixa a origem. Então um levantamento de  $\mathbf{g}$  a  $\text{U}(2, 1)$  é da forma

$$g = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}$$

Como  $g$  é uma transformação unitária, no modelo da bola devemos ter  $g^* \mathcal{J}_1 g = \mathcal{J}_1$ , onde  $\mathcal{J}_1$  é a representação matricial da estrutura Hermitiana  $\langle, \rangle_1$ . Então

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{d} & \bar{e} & \bar{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ -c & -f & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} |a| + |b| - |c| & d\bar{a} + e\bar{b} + f\bar{c} & -\bar{c} \\ a\bar{d} + b\bar{e} + c\bar{f} & |d| + |e| - |f| & -\bar{f} \\ -c & -f & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,  $c = f = 0$ , donde

$$g = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\rangle &= |a|^2 + |b|^2 = 1, \\ \left\langle \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \right\rangle &= |d|^2 + |e|^2 = 1, \end{aligned}$$

e ainda

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \right\rangle = a\bar{d} + b\bar{e} + c\bar{f} = 0.$$

Portanto  $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$  é uma matriz unitária em  $U(2)$ .

Como toda matriz em  $U(2)$  é diagonalizável, existe uma matriz unitária  $u$  tal que

$$u^{-1} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} e^{\theta i} & 0 \\ 0 & e^{\phi i} \end{bmatrix}.$$

É claro que  $U = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in U(2, 1)$  e que sua inversa é  $U^{-1} = \begin{bmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Conjugando o elemento  $g \in U(2, 1)$  com essa isometria obtemos

$$U^{-1}gU = \begin{bmatrix} e^{\theta i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, para qualquer número natural  $n$ , temos

$$(U^{-1}gU)^n = \begin{bmatrix} e^{n\theta i} & 0 & 0 \\ 0 & e^{n\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se o elemento elíptico  $\mathbf{g}$  tem ordem infinita, da expressão acima, temos que ou  $\theta$ , ou  $\phi$  é um múltiplo irracional de  $2\pi$ . Tomando um ponto  $z = (z_1, z_2)$  que não é ponto fixo de  $\mathbf{g}$ , a órbita

$$\left\{ \begin{bmatrix} z_1 e^{n\theta i} \\ z_2 e^{n\phi i} \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$$

tem um ponto de acumulação em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , pois  $\{z_1 e^{n\theta i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$  é um conjunto denso no círculo de raio  $|z_1|$  ou  $\{z_2 e^{n\phi i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$  é um conjunto denso no círculo de raio  $|z_2|$ . Dessa maneira o subgrupo gerado pelo elemento elíptico não é discreto. ■

É claro que um subgrupo de um grupo discreto é também um subgrupo discreto. Por outro lado, se  $H$  é um subgrupo discreto de índice dois de um grupo  $G$ , então  $G$  é discreto. De fato, suponha que  $G$  não é discreto. Então a identidade não é um ponto isolado. Desta forma existe uma sequência de elementos distintos  $(g_n)$  de  $G$  tal que  $g_n \rightarrow id_G$ . Como  $G = H \cup gH$  é uma partição de  $G$ , com  $g \in G - H$ , necessariamente existe uma sequência de elementos em  $H$  ou uma de elementos em  $gH$  que converge para a identidade. Assim  $H$  não é discreto.

### 1.3 Subespaços de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Trataremos agora dos subespaços totalmente geodésicos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Eles são de dois tipos: geodésicas (ou linhas) complexas ou subespaços totalmente reais.

#### Geodésicas Complexas

Seja  $S$  um subespaço complexo bidimensional de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Se  $S \cap V_- \neq \emptyset$ , a imagem  $\Sigma = \mathbb{P}(S \cap V_-)$  é um subespaço de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  chamado **geodésica complexa**.

Considerando o modelo da bola  $\mathbb{B}^2$ , as geodésicas complexas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  são justamente interseções de retas complexas de  $\mathbb{C}^2$  com a bola  $\mathbb{B}^2$ . É claro que a dimensão complexa de geodésicas complexas é 1, e que a dimensão real é 2.

As geodésicas complexas são subvariedades holomorfas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  totalmente geodésicas. A fronteira de uma geodésica complexa é chamada de **cadeia** e é uma subvariedade unidimensional real de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Um fato simples é que para quaisquer dois pontos distintos em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , existe uma única geodésica complexa contendo ambos os pontos. Neste caso, dizemos que esses pontos geram essa geodésica.

Vamos mostrar agora que as geodésicas complexas são biholomorficamente isométricas a

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 < 1\}.$$

Seja  $\Sigma$  uma geodésica complexa gerada pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$  na fronteira de  $\mathbb{B}^2$ . Pela proposição 1.2.3, existe uma isometria biholomorfa  $\mathbf{f} \in \text{PU}(2, 1)$  tal que  $\mathbf{f}(z_1) = (0, 1)$  e  $\mathbf{f}(z_2) = (0, -1)$ . A geodésica complexa por  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  é  $\{(0, z) : |z|^2 < 1\}$ . Podemos identificar  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  naturalmente com essa geodésica complexa. Afirmamos que a restrição da métrica de Bergman à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  é a **métrica de Poincaré** de curvatura constante negativa  $-1$ . Para ver isso, seja  $(0, z) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , cujo levantamento canônico à  $\mathbb{C}^{2,1}$  é dado por

$$Z = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A métrica de Bergman restrita à  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  é

$$ds^2 = \frac{-4}{\langle Z, Z \rangle} \det \begin{pmatrix} \langle Z, Z \rangle & \langle dZ, Z \rangle \\ \langle Z, dZ \rangle & \langle dZ, dZ \rangle \end{pmatrix} = \frac{-4}{(|z|^2 - 1)^2} ((|z|^2 - 1)dzd\bar{z} - |z|^2 dzd\bar{z}) = \frac{4dzd\bar{z}}{(|z|^2 - 1)^2}$$

Que é justamente a métrica de Poincaré para o disco unitário. Dessa maneira,  $\Sigma$  é uma cópia do espaço hiperbólico complexo unidimensional  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ .

## Subespaços Totalmente Reais

Seja  $R \subset \mathbb{C}^{2,1}$  um subespaço vetorial real não trivial. Dizemos que  $R$  é **totalmente real** se, e somente se, o produto Hermitiano  $\langle X, Y \rangle$  é real para todo  $X, Y \in R$ .

Se  $R$  é um subespaço vetorial totalmente real, a dimensão ( real ) de  $R$  é no máximo 3.

Suponha que  $R$  seja um subespaço totalmente real tal que  $R \cap V_- \neq \emptyset$ . Então  $\mathcal{R} = \mathbb{P}(R \cap V_-)$  é uma subvariedade real de  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$  de dimensão no máximo 2 chamada de subespaço totalmente real de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Quando  $\mathcal{R}$  tem dimensão dois, dizemos que  $\mathcal{R}$  é um  **$\mathbb{R}$ -plano** em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

A fronteira de um  $\mathbb{R}$ -plano é chamado  **$\mathbb{R}$ -círculo** e é uma subvariedade real de dimensão 1 de  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

Os subespaços totalmente reais podem ser vistos de outra maneira. Para qualquer  $p \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , o espaço tangente  $T_p\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ . Mais ainda, o espaço tangente tem mesma estrutura Hermitiana  $\langle \langle, \rangle \rangle$  de  $\mathbb{C}^2$ . Faz sentido então tomarmos em  $T_p\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  subespaços totalmente reais. Os subespaços totalmente reais de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  são as imagens pela aplicação exponencial desses subespaços. Quando a dimensão do subespaço totalmente real de  $T_p\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é 1, os subespaços totalmente reais em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  são linhas reais.

Assim como as geodésicas complexas, os  $\mathbb{R}$ -planos são subvariedades ( agora reais ) totalmente geodésicas. Por qualquer par de pontos  $z, w$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , passa uma única linha geodésica real. Dizemos nesse caso que o par de pontos  $z, w$  gera essa linha geodésica real. Como uma reta em  $\mathbb{C}^2$  está contida em uma infinidade de planos, existe uma infinidade de  $\mathbb{R}$ -planos contendo uma dada linha geodésica real. Por outro lado, existe uma única geodésica complexa contendo essa linha.

Analogamente ao que foi feito para geodésicas complexas, vamos mostrar que  $\mathbb{R}$ -planos em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  são variedades reais difeomorficamente isométricas à

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

onde  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  é o modelo de Klein para o espaço hiperbólico real bidimensional.

Seja  $\mathcal{R}$  um  $\mathbb{R}$ -plano em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e seja  $p \in \mathcal{R}$ . Como  $\text{PU}(2, 1)$  age transitivamente em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , podemos supor que  $p = (0, 0)$ . Sabemos que  $\mathcal{R} = \mathbf{Exp}_{\mathbf{p}}(R)$ , onde  $R$  é um subespaço totalmente real bidimensional de  $T_p\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \approx \mathbb{C}^2$ . Como  $\text{U}(2)$  age transitivamente sobre o conjunto dos subespaços totalmente reais de  $\mathbb{C}^2$ , podemos supor que  $R = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x, y \in \mathbb{R}\}$  e assim  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Afirmamos que a métrica de Bergman restrita à  $\mathcal{R}$  é a métrica de Klein-Beltrami de curvatura constante negativa  $-1/4$ .

De fato, sejam  $(x, y) \in \mathcal{R}$  e  $Z = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^t$  seu levantamento natural à  $\mathbb{C}^{2,1}$ . A métrica de Bergman restrita a  $\mathcal{R}$  é



$$\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{-4}{\langle Z, Z \rangle} \det \begin{pmatrix} \langle Z, Z \rangle & \langle dZ, Z \rangle \\ \langle Z, dZ \rangle & \langle dZ, dZ \rangle \end{pmatrix} = \\
&= \frac{-4}{x^2 + y^2 - 1} ((x^2 + y^2 - 1)(dx^2 + dy^2) - x^2 dx^2 - y^2 dy^2 - 2xy dx dy) = \\
&= \frac{-4}{x^2 + y^2 - 1} ((y^2 - 1)dx^2 + (1 - x^2)dy^2 - 2xy dx dy) = \\
&= 4 \frac{(1 - y^2)dx^2 + (1 - x^2)dy^2 + 2xy dx dy}{1 - x^2 - y^2}.
\end{aligned}$$

que é justamente a métrica de Klein-Beltrami de curvatura constante igual a  $-1/4$ . Dessa maneira,  $\mathbb{R}$ -planos são cópias de espaços hiperbólicos reais bidimensionais de curvatura constante igual a  $-1/4$ .

Como foi dito no início deste capítulo, em cada ponto, a curvatura seccional real de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  varia entre  $-1$  e  $-1/4$ . Assim, acabamos de mostrar que esses valores extremos são atingidos quando nesse ponto tomarmos uma geodésica complexa e um  $\mathbb{R}$ -plano, respectivamente.

## Classificação das Subvariedades Totalmente Geodésicas

Geodésicas complexas e subespaços totalmente reais são variedades totalmente geodésicas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Podemos nos perguntar se existem outras. A resposta é negativa e uma demonstração desse fato se encontra em [5]. Vamos apenas enunciar:

**Teorema 1.3.1** *Todo subespaço totalmente geodésico de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  ou é uma geodésica complexa ou é um subespaço totalmente real.*

Como consequência imediata desse teorema temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.3.1** *Todo subespaço totalmente geodésico de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tem dimensão real 1 ou 2. Dessa forma, não existem hipersuperfícies reais totalmente geodésicas do espaço hiperbólico complexo.*

## 1.4 O Modelo do Parabolóide

### O Domínio de Siegel

Consideremos o modelo da bola para o espaço hiperbólico complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Dado um ponto qualquer  $z \in \mathbb{B}^2$ , existe  $g \in \text{PU}(2,1)$  tal que  $g(z) = (0,0)$ . Nos perguntamos qual é o grupo de isotropia

em  $\text{PU}(2, 1)$  do ponto  $z \in \mathbb{B}^2$ , isto é, o grupo  $G_z = \{f \in \text{PU}(2, 1) : f(z) = z\}$ . É claro que  $G_z = gG_o g^{-1}$ , onde  $G_o$  é o subgrupo de isotropia de  $o = (0, 0) \in \mathbb{B}^2$  e  $g$  é a aplicação acima. Então para saber qual é o subgrupo de isotropia de um ponto em  $\mathbb{B}^2$  é suficiente encontrar qual é o subgrupo de isotropia da origem  $o$ .

Segue da demonstração do lema 1.2.1 que se  $g \in G_o$ , então seu levantamento natural à  $\text{U}(2, 1)$  é uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $A \in \text{U}(2)$ . Portanto,  $G_o$  se identifica naturalmente com o grupo  $\text{U}(2)$ .

Podemos levantar agora a seguinte questão: Qual é o subgrupo de isotropia de um ponto  $z \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ ? Como  $\text{PU}(2, 1)$  age transitivamente na fronteira, podemos fixar esse ponto. Fixemos o ponto  $z_o = (0, -1) \in \partial\mathbb{B}^2$  que pode ser representado pelo vetor nulo

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}.$$

Uma transformação unitária  $g \in \text{U}(2, 1)$  define um elemento em  $\text{PU}(2, 1)$  que fixa  $z_o$  se, e somente se,  $Z_o$  é um autovetor de  $g$ . Por causa disso, é vantajoso mudarmos a base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{C}^{2,1}$  para uma nova base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  que inclua o vetor  $Z_o$ . Definimos essa base por

$$\hat{e}_1 = e_1, \quad \hat{e}_2 = -e_2 + e_3 = Z_o, \quad \hat{e}_3 = \frac{e_2 + e_3}{2}.$$

A matriz de mudança de base é

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

O modelo da bola  $\mathbb{B}^2$  foi definido em termos da forma Hermitiana  $\langle Z, W \rangle_1 = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$ . A matriz que representa  $\langle, \rangle_1$  na base canônica de  $\mathbb{C}^{2,1}$  é

$$\mathcal{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A mudança de coordenadas  $D$  define uma nova estrutura Hermitiana  $\mathcal{J}_2$  de assinatura  $(2, 1)$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , induzida pela estrutura  $\mathcal{J}_1$ , da seguinte maneira:

$$\mathcal{J}_2 = D^* \mathcal{J}_1 D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que se  $A : \mathbb{C}^{2,1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2,1}$  é uma matriz que representa uma transformação linear na base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , então  $D^{-1}AD$  é a matriz que representa essa transformação linear na base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ .

Desse modo, se uma matriz  $A$  é unitária em  $U(2, 1)$ , então  $D^{-1}AD$  é unitária em  $D^{-1}U(2, 1)D$ . Reciprocamente, se  $A$  é unitária em  $D^{-1}U(2, 1)D$ , então  $DU(2, 1)D^{-1}$  é unitária em  $U(2, 1)$ . Vamos denotar  $\hat{U}(2, 1) = D^{-1}U(2, 1)D$ .

Vamos mostrar agora que  $A$  deixa  $\mathcal{J}_2$  invariante se, e somente se,  $A \in \hat{U}(2, 1)$ . Dessa forma, definindo

$$\langle Z, W \rangle_2 = Z^t \mathcal{J}_2 \bar{W} = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$$

teremos que  $\hat{U}(2, 1) = \{g \in GL(3, \mathbb{C}) : \langle g(Z), g(W) \rangle_2 = \langle Z, W \rangle_2, Z, W \in \mathbb{C}^{2,1}\}$  e, portanto,  $\hat{U}(2, 1)$  é o grupo das transformações unitárias com respeito a estrutura Hermitiana  $\langle, \rangle_2$ .

Temos que

$$\begin{aligned} A \in \hat{U}(2, 1) &\Leftrightarrow \\ DAD^{-1} \in U(2, 1) &\Leftrightarrow \\ (DAD^{-1})^* \mathcal{J}_1 DAD^{-1} = \mathcal{J}_1 &\Leftrightarrow \\ (D^{-1})^* A^* [D^* \mathcal{J}_1 D] AD^{-1} = \mathcal{J}_1 &\Leftrightarrow \\ (D^*)^{-1} A^* \mathcal{J}_2 AD^{-1} = \mathcal{J}_1 &\Leftrightarrow \\ A^* \mathcal{J}_2 A = D^* \mathcal{J}_1 D = \mathcal{J}_2. & \end{aligned}$$

Podemos agora definir um novo modelo para o espaço hiperbólico complexo, onde consideramos a estrutura Hermitiana  $\langle, \rangle_2$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ , cujo grupo de transformações unitárias é  $\hat{U}(2, 1)$ .

Tomando a seção  $Z_3 = 1$  no modelo projetivo obtemos:

$$\mathcal{S} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \langle Z, Z \rangle_2 < 0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 - 2\Re(z_2) < 0\}.$$

O conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado **domínio de Siegel**.

A métrica em  $\mathcal{S}$  é a métrica de Bergman, definida anteriormente, onde a estrutura Hermitiana considerada é  $\langle Z, W \rangle_2 = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$ .

Se  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ , então  $(z_1, z_2) \in \mathcal{S}$  se, e somente se,  $x_1^2 + y_1^2 - 2x_2 < 0$ . Mas  $x_1^2 + y_1^2 - 2x_2 = 0$  é um parabolóide. Por esse motivo o domínio de Siegel também é chamado de **Modelo do Parabolóide** para o espaço hiperbólico complexo.

## Transformações de Cayley

Vimos dois modelos em  $\mathbb{C}^2$  para o espaço hiperbólico complexo: o modelo da bola  $\mathbb{B}^2$  e o modelo do parabolóide  $\mathcal{S}$ . Estamos interessados em uma transformação que leve um modelo em outro.

A transformação linear  $D$  definida anteriormente é um elemento do grupo  $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ . Como os elementos de  $\text{U}(2, 1)$  deixam invariante o conjunto  $V_- = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} : \langle Z, Z \rangle_1 < 0\}$ , vemos que os elementos do grupo  $\hat{\text{U}}(2, 1)$  deixam o conjunto  $D^{-1}(V_-)$  invariante. Analogamente, como o grupo  $\text{U}(2, 1)$  deixa  $V_0 = \{Z \in \mathbb{C}^{2,1} : \langle Z, Z \rangle_1 = 0\}$  invariante, o grupo  $\hat{\text{U}}(2, 1)$  deixa  $D^{-1}(V_0)$  invariante.

A transformação linear  $C = D^{-1} : \mathbb{C}^{2,1} \longrightarrow \mathbb{C}^{2,1}$  é chamada **transformação de Cayley** e sua representação matricial é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A transformação de Cayley induz uma aplicação em  $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$

$$\mathcal{C} : \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2$$

definida por

$$\mathcal{C}([z_1; z_2; z_3]) = \mathbb{P}(D^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}) = [z_1; \frac{-z_2 + z_3}{2}; z_2 + z_3].$$

Em coordenadas não-homogêneas  $\mathcal{C} : \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 \neq -1\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 \neq -1/2\}$  é definida por

$$\mathcal{C}(z_1, z_2) = \left( \frac{z_1}{1 + z_2}, \frac{1 - z_2}{2(1 + z_2)} \right).$$

Sua inversa é a transformação  $\mathcal{C} : \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 \neq -1/2\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2 \neq -1\}$ , definida por

$$\mathcal{C}^{-1}(z_1, z_2) = \left( \frac{2z_1}{1 + 2z_2}, \frac{1 - 2z_2}{1 + 2z_2} \right).$$

É imediato verificar que a transformação de Cayley leva o modelo da bola no modelo do parabolóide. Desta maneira podemos tomar a restrição  $\mathcal{C} : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathcal{S}$ .

**Observação:** Faremos o seguinte abuso de notação: usaremos  $\text{PU}(2, 1)$  para indicar a projetivização do grupo unitário em relação a ambas estruturas Hermitianas  $\langle, \rangle_1$ , para o modelo da bola, e  $\langle, \rangle_2$  para o domínio de Siegel.

## O Grupo de Heisenberg

Um modelo para o espaço hiperbólico real é o modelo do semi-espaço superior

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

em  $\mathbb{R}^n$ . A fronteira desse modelo é a compactificação em um ponto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , visto como subespaço de  $\mathbb{R}^n$  dado por  $x_n = 0$ . De modo análogo, veremos que para o espaço hiperbólico complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , a sua fronteira pode ser identificada com a compactificação em um ponto do grupo de Heisenberg. Veremos essa construção nessa seção.

Vamos considerar o domínio de Siegel  $\mathcal{S} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 2\Re(z_2) - |z_1|^2 > 0\}$  para o espaço hiperbólico complexo. A fronteira de  $\mathcal{S}$  é dada por

$$\partial\mathcal{S} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : 2\Re(z_2) - |z_1|^2 = 0\} \cup \{q_{\infty}\}$$

sendo  $q_{\infty}$  um ponto ideal. A transformação de Cayley  $\mathcal{C} : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathcal{S}$  pode ser estendida naturalmente para a fronteira, do seguinte modo:

$$\mathcal{C}(z_1, z_2) = \begin{cases} \left( \frac{z_1}{1+z_2}, \frac{1-z_2}{2(1+z_2)} \right) & \text{se } (z_1, z_2) \neq (0, -1) \\ q_{\infty} & \text{se } (z_1, z_2) = (0, -1) \end{cases}$$

O ponto ideal  $q_{\infty}$  se levanta a  $D^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Agora, um ponto  $z \in \partial\mathcal{S} - \{q_{\infty}\}$  se levanta a um vetor  $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , onde  $2\Re(z_2) - |z_1|^2 = 0$ .

Assim  $\Re(z_2) = |z_1|^2/2$  e, desse modo,  $z_2$  se escreve da forma  $z_2 = \frac{|z_1|^2 - iv}{2}$  para algum número real  $v$ . Portanto para quaisquer  $\zeta \in \mathbb{C}$  e  $v \in \mathbb{R}$ , o vetor

$$Z = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

representa um ponto em  $\partial\mathcal{S}$ . Assim, a fronteira do domínio de Siegel pode ser visto como a compactificação em um ponto de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ .

Lembre-se que desejamos estudar o subgrupo de isotropia de um ponto na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Vamos considerar esse ponto como o ponto ideal  $q_\infty$  no domínio de Siegel. No domínio de Siegel, aplicações holomorfas de  $\text{PU}(2, 1)$  que fixam  $q_\infty$  são chamadas **similaridades**.

A respeito desse grupo temos o seguinte lema:

**Lema 1.4.1** *Em  $\text{PU}(2, 1)$ , o subgrupo de isotropia do ponto ideal age transitivamente em  $\partial\mathcal{S}$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que dado um ponto  $(z_1, z_2) \in \partial\mathcal{S}$ , existe um matriz unitária  $T$  tal que

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é da forma

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & z_1 \\ b & 1 & z_2 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para  $T$  ser unitária devemos ter

$$T^* \mathcal{J}_2 T = \mathcal{J}_2.$$

Daí

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & z_1 \\ b & 1 & z_2 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & z_1 \\ -c & 0 & -1 \\ -b & -1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} |a|^2 - c\bar{b} - b\bar{c} & -\bar{c} & z_1\bar{a} - \bar{b} - z_2\bar{c} \\ & -c & 0 & -1 \\ a\bar{z}_1 - c\bar{z}_2 - b & -1 & |z_1|^2 - \bar{z}_2 - \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$c = 0, |a| = 1 \text{ e } a\bar{z}_1 = b.$$

Tomando  $a = 1$ , obtemos a transformação linear unitária

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_1 \\ \bar{z}_1 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuja projetivização em  $\text{PU}(2, 1)$  fixa o ponto  $q_\infty$  e leva  $(z_1, z_2)$  em  $(0, 0)$ . ■

Como consequência imediata desse lema, obtemos a proposição 1.2.3.

Escrevamos agora um ponto em  $\partial\mathcal{S}$  na forma  $\left(\zeta, \frac{|\zeta|^2 - iv}{2}\right)$ . Podemos definir um aplicação  $T : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{PU}(2, 1)$  que associa a cada ponto  $(\zeta, v)$ , na fronteira do espaço hiperbólico complexo, a transformação que fixa o ponto  $q_\infty$  e leva  $(\zeta, v)$  em  $(0, 0)$ . Como vimos acima,  $T : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{PU}(2, 1)$  é definida por

$$T(\zeta, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Podemos definir uma operação de grupo em  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  de tal forma que a aplicação  $T : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{PU}(2, 1)$  seja um homomorfismo. Multiplicando matrizes, obtemos

$$T(\zeta_1, v_1)T(\zeta_2, v_2) = T(\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2\Im(\zeta_1\bar{\zeta}_2)).$$

A operação em  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  é definida por

$$(\zeta_1, v_1) * (\zeta_2, v_2) = (\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2\Im(\zeta_1\bar{\zeta}_2))$$

Com essa operação,  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  é um grupo chamado **Grupo de Heisenberg** e é denotado por  $\mathcal{H}$ .

Da identificação

$$(\zeta, v) \longmapsto \left(\zeta, \frac{|\zeta|^2 - iv}{2}\right) \in \partial\mathcal{S},$$

vemos que a fronteira do espaço hiperbólico complexo é a compactificação em um ponto do grupo de Heisenberg.

A aplicação  $T(\zeta, v) \in \text{PU}(2, 1)$  é chamada **translação de Heisenberg**. Uma translação de Heisenberg  $T(0, t)$  é chamada **translação vertical** por  $t$ .

## Coordenadas Horoesféricas

O modelo do semi-espaço superior para a geometria hiperbólica real  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$  é foliado por horoesferas  $H_u$  para  $u > 0$ . A horoesféra  $H_u$  é uma cópia de  $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ . Queremos fazer uma construção análoga para o espaço hiperbólico complexo.

Dado  $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{S}$ , seu levantamento natural em  $\mathbb{C}^{2,1}$  é

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \langle Z, Z \rangle_2 = |z_1|^2 - 2\Re(z_2) < 0.$$

Seja  $u = -\langle Z, Z \rangle_2 = 2\Re(z_2) - |z_1|^2$ . Então  $z_2 = \frac{|z_1|^2 + u - iv}{2}$  para algum  $v \in \mathbb{R}$ . Daí, para quaisquer  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $v \in \mathbb{R}$  e  $u \in \mathbb{R}_+$ , temos que

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

representa o levantamento de um ponto no domínio de Siegel.

A tripla  $(\zeta, v, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  é chamada a **coordenada horoesférica** do ponto  $z \in \mathcal{S}$ . Temos portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathcal{S} \\ (\zeta, v, u) &\longmapsto \left( \zeta, \frac{|z_1|^2 + u - iv}{2} \right) \end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (z_1, -2\Im(z_2), 2\Re(z_2) - |z_1|^2). \end{aligned}$$

Quando  $u = 0$ , a identificação acima coincide com a identificação  $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}$  definida anteriormente.

A seguinte proposição nos diz como a translação de Heisenberg afeta as coordenadas horoesféricas de um ponto de  $\mathcal{S}$ . Sua demonstração é uma simples conta.



**Proposição 1.4.1** *A translação de Heisenberg  $T(\zeta_0, v_0)$  é tal que*

$$\begin{aligned} T(\zeta_0, v_0) : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (\zeta, v, u) &\longmapsto (\zeta_0 + \zeta, v_0 + v + 2\Im(\zeta_0 \bar{\zeta}), u) \end{aligned}$$

A **horoefera** de altura  $u > 0$  é o seguinte subconjunto do espaço hiperbólico complexo

$$H_u = \{(z_1, z_2) \in \mathcal{S} : 2\Re(z_2) - |z_1|^2 = u\} .$$

Como consequência da proposição anterior, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.4.1** *As translações de Heisenberg deixam cada horoesfera invariante e age transitivamente em cada um delas.*

A translação de Heisenberg  $T(\zeta, v)$  é uma isometria que tem como ponto fixo o ponto ideal  $q_\infty$ . Não é difícil verificar que esse é o único ponto fixo de  $T(\zeta, v)$ . Assim,  $T(\zeta, v)$  é um elemento parabólico de  $\text{PU}(2, 1)$ .

Vamos retornar a nossa pergunta original: qual é o subgrupo de isotropia em  $\text{PU}(2, 1)$  de um ponto em  $\partial\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ ? Trabalhando no domínio de Siegel  $\mathcal{S}$  já mostramos que as translações de Heisenberg fixam o ponto ideal  $q_\infty$ , e atuam transitivamente em  $\partial\mathcal{S}$ .

Vamos determinar agora os elementos em  $\text{PU}(2, 1)$  que fixam o ponto ideal  $q_\infty$  e a origem  $(0, 0)$  do grupo de Heisenberg  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.4.1** *Uma transformação unitária  $A \in \text{U}(2, 1)$  representa uma isometria  $\bar{\mathcal{S}} \rightarrow \bar{\mathcal{S}}$  que fixa o ponto ideal  $q_\infty$  e o ponto  $o = (0, 0)$  se, e somente se,  $A$  pode ser representada a menos de multiplicação por escalar unitário pela matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix}$$

com  $k \in \mathbb{R}$  e  $k \neq 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO:**

Sejam

$$q_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

os levantamentos naturais à  $\mathbb{C}^{2,1}$ , respectivamente, dos pontos  $q_\infty$  e  $o$ .

Daí  $A \in U(2,1)$  define uma isometria de  $\mathcal{S}$  que fixa  $q_\infty$  e  $o$  se, e somente se,  $q_\infty$  e  $O$  são autovetores de  $A$ . Isso significa que  $A$  deve ter a forma

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \beta & 0 \\ c & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Agora,  $A \in U(2,1)$  se, e somente se,  $A^* \mathcal{J}_2 A = \mathcal{J}_2$ . Temos:

$$\begin{aligned} A^* \mathcal{J}_2 A &= \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \beta & 0 \\ c & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -c & 0 & -\lambda \\ -b & -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 - \bar{b}c - \bar{c}b & -\beta\bar{c} & -\lambda\bar{b} \\ -c\bar{\beta} & 0 & -\bar{\beta}\lambda \\ -b\bar{\lambda} & -\beta\bar{\lambda} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daí  $A^* \mathcal{J}_2 A = \mathcal{J}_2$  se, e somente se,

$$|a|^2 - \bar{b}c - \bar{c}b = 1, \quad c\bar{\beta} = 0, \quad b\bar{\lambda} = 0, \quad \beta\bar{\lambda} = 1.$$

De  $\beta\bar{\lambda} = 1$  vemos que  $\beta \neq 0$  e  $\lambda \neq 0$ . Disso e das relações  $c\bar{\beta} = 0$  e  $b\bar{\lambda} = 0$  concluímos que  $c = b = 0$ . Logo obtemos as restrições:

$$|a| = 1 \quad \text{e} \quad \beta\bar{\lambda} = 1.$$

Daí  $A$  deve ter a forma:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1/\bar{\beta} \end{bmatrix}$$

Se escrevermos  $\beta = ke^{i\varphi}$  obtemos

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\beta}} = \frac{1}{ke^{-i\varphi}} = \frac{1}{k}e^{i\varphi}$$

e portanto

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & ke^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k}e^{i\varphi} \end{bmatrix} = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} e^{i(\theta-\varphi)} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix}.$$

Desse teorema, podemos definir agora duas isometrias que fixam tanto o ponto ideal  $q_\infty$ , quanto o ponto  $(0, 0, 0)$  na fronteira  $\partial\mathcal{S}$ . A **cadeia vertical** em  $\partial\mathcal{S}$  é a geodésica  $\zeta = 0$ .

**Definição 1.4.1** A **rotação de Heisenberg** ao redor da cadeia vertical por um ângulo  $\theta$  é o elemento  $\mathcal{R}_\theta$  em  $\text{PU}(2, 1)$  representado pela matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{U}(2, 1). \quad (1.2)$$

**Definição 1.4.2** A **dilatação de Heisenberg** por um fator  $k \neq 0$  tendo como eixo a cadeia vertical é o elemento  $\mathcal{D}_k$  representado pela matriz

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{bmatrix} \in \text{U}(2, 1). \quad (1.3)$$

**Observação:** Note que  $\mathcal{D}_k\mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_\theta\mathcal{D}_k$ .

Pode-se verificar através de uma conta simples que a dilatação e a rotação de Heisenberg afetam as coordenadas horoesféricas de um ponto do seguinte modo:

**Proposição 1.4.2** A dilatação de Heisenberg  $\mathcal{D}_k$  e a rotação de Heisenber  $\mathcal{R}_\theta$ , em termos de coordenadas horoesféricas, são dadas por

$$\mathcal{D}_k(\zeta, v, u) = (k\zeta, k^2v, k^2u) \quad \mathcal{R}_\theta(\zeta, v, u) = (e^{i\theta}\zeta, v, u).$$

Finalmente, vamos determinar qual é o subgrupo de isotropias de um ponto em  $\partial\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ . Analogamente ao que foi feito para um ponto em  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ , podemos considerar um ponto fixado; digamos  $q_\infty$ . Podemos fazer isso pois o grupo  $\text{PU}(2, 1)$  age transitivamente na fronteira.

**Teorema 1.4.2** *Seja  $g$  um elemento de  $\text{PU}(2,1)$  que fixa o ponto ideal  $q_\infty \in \partial\mathcal{S}$ . Então  $g$  é uma composição de uma rotação de Heisenberg, seguida de uma dilatação de Heisenberg e de uma translação de Heisenberg. Isto é,*

$$g = T(\zeta, v) \circ D_k \circ R_\theta .$$

DEMONSTRAÇÃO: Nessa demonstração, vamos considerar os pontos dados através de suas coordenadas horoesféricas, e vamos supor que  $g(0,0) = (\zeta, v)$ , isto é, a imagem da origem do grupo de Heisenberg pelo elemento  $g$  tenha coordenadas horoesféricas  $(\zeta, v)$ . Então

$$T(-\zeta, -v)(g(0,0)) = T(-\zeta, -v)(\zeta, v) = (0,0).$$

Assim  $T(-\zeta, -v) \circ g$  é um elemento que fixa  $(0,0)$  e  $q_\infty$ . Pelo teorema anterior, devemos ter

$$T(-\zeta, -v) \circ g = D_k \circ R_\theta.$$

Portanto

$$g = T(\zeta, v) \circ D_k \circ R_\theta$$

■

## Grupo de similaridade no modelo da bola

Na seção anterior, as matrizes (1.1), (1.2) e (1.3) das translações, rotações e dilatações de Heisenberg são elementos unitários que preservam a segunda forma Hermitiana

$$\langle z, w \rangle_2 = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_3 + z_3 \bar{w}_2$$

que foi utilizada para a definição do domínio de Siegel

$$\mathcal{S} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \langle Z, Z \rangle_2 < 0\} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 - 2\Re(z_2) < 0\} .$$

Conjugando com a transformação de Cayley, podemos obter matrizes para estas isometrias, mas agora preservando a primeira forma Hermitiana

$$\langle z, w \rangle_1 = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$$

que foi utilizada para a definição do modelo da bola para o espaço hiperbólico complexo. Efetuando essa conjugação, obtemos as seguintes matrizes para uma translação, uma rotação e uma dilatação de Heisenberg

$$T_{(\zeta, v)} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta \\ -\bar{\zeta} & 1 - \frac{1}{2}(|\zeta|^2 - \mathbf{i}v) & -\frac{1}{2}(|\zeta|^2 - \mathbf{i}v) \\ \bar{\zeta} & \frac{1}{2}(|\zeta|^2 - \mathbf{i}v) & 1 + \frac{1}{2}(|\zeta|^2 - \mathbf{i}v) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{i}\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+k^2}{2k} & \frac{1-k^2}{2k} \\ 0 & \frac{1-k^2}{2k} & \frac{1+k^2}{2k} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

## 1.5 O Produto Vetorial Hermitiano

Nesta seção vamos definir de modo geral o conceito de produto vetorial Hermitiano. Esse conceito desempenha um papel similar, para espaços vetoriais complexos, ao papel desempenhado pelo produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$  e será aplicado, nos próximos capítulos, para o caso especial  $E = \mathbb{C}^{2,1}$ .

Seja  $E$  um espaço vetorial complexo de dimensão 3 e seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

uma matriz  $3 \times 3$  não singular de entradas complexas. Seja  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  uma base qualquer para  $E$ . Vamos representar por uma matriz coluna as coordenadas de um vetor  $v \in E$  em relação a base  $\mathcal{B}$ :

$$v \in E \quad \Leftrightarrow \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

A matriz  $M$  define uma forma sesqui-linear  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  em  $E$  por

$$\langle v, w \rangle = v^t M \bar{w},$$

sendo que do lado direito dessa igualdade são consideradas as matrizes colunas cujas entradas são iguais as coordenadas dos vetores  $v$  e  $w$  em relação a base  $\mathcal{B}$ .

**Proposição 1.5.1 (Teorema de representação de Riesz)** *Seja  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  um funcional  $\mathbb{C}$ -linear. Existe um único vetor  $w \in E$  tal que  $f(v) = \langle v, w \rangle$  para todo  $v \in E$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Para cada  $i = 1, 2, 3$  defina  $\alpha_i = f(\vec{e}_i)$ . Desse modo,  $f(v) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

para todo  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$  em  $E$ . Seja  $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$  o vetor procurado. Temos que:

$$f(\vec{e}_1) = \langle \vec{e}_1, w \rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ \overline{w_3} \end{bmatrix} = \alpha_1 \Leftrightarrow a_{11}\overline{w_1} + a_{12}\overline{w_2} + a_{13}\overline{w_3} = \alpha_1.$$

$$f(\vec{e}_2) = \langle \vec{e}_2, w \rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ \overline{w_3} \end{bmatrix} = \alpha_2 \Leftrightarrow a_{21}\overline{w_1} + a_{22}\overline{w_2} + a_{23}\overline{w_3} = \alpha_2.$$

$$f(\vec{e}_3) = \langle \vec{e}_3, w \rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \\ \overline{w_3} \end{bmatrix} = \alpha_3 \Leftrightarrow a_{31}\overline{w_1} + a_{32}\overline{w_2} + a_{33}\overline{w_3} = \alpha_3.$$

Essas três últimas igualdades são válidas, se e somente se,  $M \overline{w} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ . Sendo  $M$  uma matriz não-singular, essa equação tem uma única solução:

$$w = \overline{M^{-1}} \begin{bmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \overline{\alpha_2} \\ \overline{\alpha_3} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

■

## A matriz de Gram

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  quaisquer três vetores em  $E$ . Seja  $A = [a \ b \ c]$  a matriz cujas colunas são as coordenadas desses vetores em relação a base  $\mathcal{B}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Defina a matriz de Gram de  $a$ ,  $b$  e  $c$  por

$$G = \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{bmatrix}.$$

**Proposição 1.5.2** *Temos que  $G = A^t M \bar{A}$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos denotar a matriz  $A$  por  $A = [a \ b \ c]$  sendo  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  e  $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$  suas três colunas: coordenadas desses vetores em relação a base  $\mathcal{B}$ . Temos que:

$$A^t M \bar{A} = \begin{bmatrix} a^t \\ b^t \\ c^t \end{bmatrix} M [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \begin{bmatrix} a^t M \\ b^t M \\ c^t M \end{bmatrix} [\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \begin{bmatrix} a^t M \bar{a} & a^t M \bar{b} & a^t M \bar{c} \\ b^t M \bar{a} & b^t M \bar{b} & b^t M \bar{c} \\ c^t M \bar{a} & c^t M \bar{b} & c^t M \bar{c} \end{bmatrix} = G.$$

■

## O produto vetorial Hermitiano em $E$

Sejam  $b$  e  $c$  quaisquer dois vetores no espaço vetorial complexo  $E$ . Esses vetores definem o seguinte funcional  $\mathbb{C}$ -linear em  $E$ :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C} \\ f(a) = \det [a \ b \ c]$$

que associa ao vetor  $a$  o determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas dos vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$  em relação a base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

Pelo teorema de representação de Riesz, existe um único vetor  $b \boxtimes c$  em  $E$  tal que  $f(a) = \langle a, b \boxtimes c \rangle$  para todo  $a \in E$ . Isso é,

$$\langle a, b \boxtimes c \rangle = \det [a \ b \ c] \quad \forall a \in E.$$

O vetor  $b \boxtimes c$  é chamado de **produto vetorial Hermitiano** dos vetores  $b$  e  $c$ . Claramente temos que esse produto vetorial é um vetor ortogonal aos vetores  $b$  e  $c$ , no seguinte sentido:

$$\langle b, b \boxtimes c \rangle = \langle c, b \boxtimes c \rangle = 0.$$

Além disso, pela proposição 1.5.2, se  $A = [a \ b \ c]$  e se  $G = A^t M \bar{A}$  é a matriz de Gram dos vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$ , então

$$\det(G) = \det(A^t M \bar{A}) = |\det(A)|^2 \det(M) = |\langle a, b \boxtimes c \rangle|^2 \det(M),$$

ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{bmatrix} = \det(M) |\langle a, b \boxtimes c \rangle|^2. \quad (1.8)$$

### O produto vetorial Hermitiano em uma base de $E$

Vamos determinar as coordenadas do vetor  $b \boxtimes c$  em função das coordenadas de  $b$  e  $c$  em relação a

base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Suponhamos então que:  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  e  $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ .

O funcional linear  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , definido por  $f(a) = \det [a \ b \ c]$  é tal que

$$\alpha_1 = f(\vec{e}_1) = \det \begin{bmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = b_2 c_3 - b_3 c_2$$

$$\alpha_2 = f(\vec{e}_2) = \det \begin{bmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = b_3 c_1 - b_1 c_3$$

$$\alpha_3 = f(\vec{e}_3) = \det \begin{bmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

Portanto, pela equação (1.7), as coordenadas do produto vetorial  $b \boxtimes c$  são dadas pela matriz coluna

$$b \boxtimes c = \overline{M^{-1}} \begin{bmatrix} \overline{b_2 c_3} - \overline{b_3 c_2} \\ \overline{b_3 c_1} - \overline{b_1 c_3} \\ \overline{b_1 c_2} - \overline{b_2 c_1} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$



## O produto vetorial para matrizes auto-adjuntas $M$

Suponhamos agora que  $M$  seja uma matriz **auto-adjunta**, isto é,  $M = \overline{M}^t$ . Nesse caso temos que

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

para quaisquer  $v$  e  $w$  em  $E$ . Daí concluímos que

$$\langle b, b \boxtimes c \rangle = \langle c, b \boxtimes c \rangle = \langle b \boxtimes c, b \rangle = \langle b \boxtimes c, c \rangle = 0.$$

Se na equação (1.8) tomamos, em particular,  $a = b \boxtimes c$  obtemos

$$\det \begin{bmatrix} \langle b \boxtimes c, b \boxtimes c \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ 0 & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{bmatrix} = \det(M) \langle b \boxtimes c, b \boxtimes c \rangle^2,$$

que é equivalente a igualdade:

$$\langle b \boxtimes c, b \boxtimes c \rangle \det(M) = \langle b, b \rangle \langle c, c \rangle - \langle b, c \rangle \langle c, b \rangle. \quad (1.10)$$

## O produto vetorial Hermitiano em $\mathbb{C}^{2,1}$

Nessa seção vamos particularizar as expressões anteriores para o caso em que  $E = \mathbb{C}^{2,1}$ , o espaço vetorial  $\mathbb{C}^3$  munido do produto interno Hermitiano  $\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} - z_3 \overline{w_3}$ , sendo  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$  e

$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$  vetores considerados na base canônica  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{C}^3$ .

A matriz  $M$  desse produto Hermitiano, em relação a essa base canônica  $\mathcal{B}$ , é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daí, pela equação (1.9), vemos que o produto vetorial Hermitiano em  $\mathbb{C}^{2,1}$  pode ser expresso por:

$$b \boxtimes c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{b_2 c_3} - \overline{b_3 c_2} \\ \overline{b_3 c_1} - \overline{b_1 c_3} \\ \overline{b_1 c_2} - \overline{b_2 c_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b_2 c_3} - \overline{b_3 c_2} \\ \overline{b_3 c_1} - \overline{b_1 c_3} \\ \overline{b_2 c_1} - \overline{b_1 c_2} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Dessa equação percebe-se que esse produto vetorial pode ser calculado pelo uso do determinante simbólico

$$b \boxtimes c = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \overline{b}_3 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_2 & \overline{c}_3 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso particular, em que  $E = \mathbb{C}^{2,1}$ , as equações (1.8) e (1.10) tomam a forma:

$$\det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{bmatrix} = - |\langle a, b \boxtimes c \rangle|^2. \quad (1.12)$$

$$\langle b \boxtimes c, b \boxtimes c \rangle = |\langle b, c \rangle|^2 - \langle b, b \rangle \langle c, c \rangle. \quad (1.13)$$

**Proposição 1.5.3** *Sejam  $b$  e  $c$  dois vetores linearmente independentes e nulos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ :  $\langle b, b \rangle = 0$  e  $\langle c, c \rangle = 0$ . Então  $\langle b, c \rangle \neq 0$  e  $b \boxtimes c$  é um vetor positivo em  $\mathbb{C}^{2,1}$ .*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, por redução ao absurdo, que  $\langle b, c \rangle = 0$ . Seja  $a \in \mathbb{C}^{2,1}$  um vetor qualquer. Da equação (1.12) obtemos

$$\det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & 0 & 0 \\ \langle c, a \rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} = - |\langle a, b \boxtimes c \rangle|^2$$

Daí  $\langle a, b \boxtimes c \rangle = 0$  para todo  $a \in \mathbb{C}^{2,1}$ . Isso ocorre se, e somente se,  $b \boxtimes c = 0$ . Como

$$b \boxtimes c = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \overline{b}_3 \\ \overline{c}_1 & \overline{c}_2 & \overline{c}_3 \end{bmatrix}$$

isso significa que os vetores  $b$  e  $c$  são linearmente dependentes, contradizendo nossa hipótese. Portanto  $\langle b, c \rangle \neq 0$  e, da equação (1.13), vemos que  $\langle b \boxtimes c, b \boxtimes c \rangle = |\langle b, c \rangle|^2$ . Isso implica que o vetor  $b \boxtimes c$  é positivo. ■

## Posições Relativas de Geodésicas Complexas

Nesta seção vamos definir o vetor polar de uma geodésica complexa em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , e vamos discutir a posição relativa de duas geodésicas complexas através da análise de seus vetores polares.

Se  $\Sigma \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é uma geodésica complexa, então  $\Sigma = \mathbb{P}(S)$  sendo  $S$  um subespaço  $\mathbb{C}$ -linear de dimensão dois de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Seja  $S^{\perp}$  o complemento ortogonal de  $S$ :

$$S^{\perp} = \{ v \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle v, z \rangle = 0, \forall z \in S \}.$$

Evidentemente,  $S^{\perp}$  é um subespaço complexo de dimensão 1 de  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Uma vez que em  $\mathbb{C}^{2,1}$  estamos considerando o produto interno Hermitiano  $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$  de assinatura  $(2, 1)$ , vemos que  $S$  é um subespaço indefinido de  $\mathbb{C}^{2,1}$ , isto é,  $S$  contém vetores negativos, positivos e nulos. Sejam  $b$  e  $c$  quaisquer vetores nulos e linearmente independentes em  $S$ . A proposição 1.5.3 implica que  $S^{\perp}$  é gerado pelo vetor positivo  $b \boxtimes c$ .

**Definição 1.5.1** *Qualquer vetor em  $S^{\perp} - \{\vec{0}\}$  é um **vetor polar** da geodésica complexa  $\Sigma$ .*

Reciprocamente, seja  $P$  um vetor positivo em  $\mathbb{C}^{2,1}$  e seja  $S$  o complemento ortogonal de  $P$ :

$$S = \{ v \in \mathbb{C}^{2,1} \mid \langle v, P \rangle = 0 \}.$$

Claramente  $S$  é um subespaço complexo indefinido de  $\mathbb{C}^{2,1}$  e  $\Sigma = \mathbb{P}(S)$  é uma geodésica complexa de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Desse modo, mostramos que existe uma correspondência biunívoca entre linhas complexas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e subespaços complexos de dimensão 1 gerados por vetores positivos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Essa correspondência será utilizada com frequência nos próximos capítulos.

**Definição 1.5.2** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Existem três possibilidades:*

1.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ . Neste caso dizemos que  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são **concorrentes**.
2.  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ , com  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 \neq \emptyset$ . Neste caso dizemos que  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são **assintóticas**.
3.  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \emptyset$ . Neste caso dizemos que  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são **ultraparalelas**.

Dessa definição e das propriedades do produto vetorial Hermitiano segue a seguinte proposição.

**Proposição 1.5.4** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  geodésicas complexas distintas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  com respectivos vetores polares  $P_1$  e  $P_2$ . Considere o produto vetorial Hermitiano  $P = P_1 \boxtimes P_2$ . Então*

1.  $P$  é negativo se, e somente se,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são concorrentes. Nesse caso,  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \mathbb{P}(P) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
2.  $P$  é nulo se, e somente se,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são assintóticas. Nesse caso,  $\bar{\Sigma}_1 \cap \bar{\Sigma}_2 = \mathbb{P}(P) \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .
3.  $P$  é positivo se, e somente se,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são ultraparalelas. Nesse caso,  $P$  é vetor polar de uma geodésica complexa ortogonal a  $\Sigma_1$  e a  $\Sigma_2$ .

**Definição 1.5.3** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  concorrentes no ponto  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . O ângulo  $\phi$  entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  é o menor ângulo Riemanniano entre geodésicas  $\gamma_1 \in \Sigma_1$  e  $\gamma_2 \in \Sigma_2$  que passam por  $z$ .*

Esse ângulo  $\phi$ , entre duas geodésicas complexas, pode ser calculado da seguinte forma:

**Proposição 1.5.5** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  concorrentes no ponto  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , com respectivos vetores polares  $P_1$  e  $P_2$ , normalizados de modo que  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 1$ . Então, neste caso,  $|\langle P_1, P_2 \rangle| = \cos(\phi)$ .*

## Projeções e Inversões em Geodésicas Complexas

**Definição 1.5.4** *Seja  $\Sigma$  uma geodésica complexa em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . A projeção ortogonal sobre  $\Sigma$  é a aplicação  $\Pi_{\Sigma} : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$  que associa a cada ponto  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , o único ponto  $\Pi_{\Sigma}(z)$  de  $\Sigma$  mais próximo de  $z$ .*

Evidentemente, a geodésica complexa contendo o par  $z$  e  $\Pi_{\Sigma}(z)$  é ortogonal à  $\Sigma$ . Mais ainda, se  $P$  é um vetor polar à  $\Sigma$ , então a projeção ortogonal  $\Pi_{\Sigma} : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$  é dada por

$$\Pi_{\Sigma}(z) = \mathbb{P} \left( Z - \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \right)$$

onde  $Z$  é um levantamento de  $z$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

Existe um análogo ao teorema de Pitágoras para o espaço hiperbólico complexo. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [3].

**Lema 1.5.1** *Seja  $\Sigma \subset \mathbb{B}^2$  uma geodésica complexa e seja  $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma$  a projeção sobre  $\Sigma$ . Então para todo  $u \in \mathbb{B}^2 - \Sigma$  e  $s \in \Sigma$ , a geodésicas real de  $\Pi(u)$  à  $u$  e a geodésicas real de  $\Pi(u)$  à  $s$  são ortogonais e estão contidas em um  $\mathbb{R}$ -plano. Além disso,*

$$\cosh \left( \frac{\rho(u, s)}{2} \right) = \cosh \left( \frac{\rho(u, \Pi(u))}{2} \right) \cosh \left( \frac{\rho(\Pi(u), s)}{2} \right).$$

Vamos definir agora as reflexões em geodésicas complexas.

Seja  $\Sigma$  um geodésica complexa em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e seja  $P$  seu vetor polar. Se  $\zeta$  é um número complexo unitário, a **reflexão** em  $\Sigma$  com fator de reflexão  $\zeta$  é a projeção em  $\text{PU}(2, 1)$  da transformação linear unitária

$$\varrho_{\Sigma}^{\zeta} : Z \mapsto \Pi_{\Sigma}(Z) + \zeta \Pi_P(Z).$$

Se  $\zeta$  é uma raiz  $n$ -ésima da unidade, então  $\varrho_{\Sigma}^{\zeta}$  é uma isometria de ordem  $n$ . A **inversão** na geodésica complexa  $\Sigma$  é uma reflexão complexa de ordem 2.

A expressão para a reflexão em  $\Sigma$  por um fator  $\zeta$ , assim como a projeção, pode ser dada em termos do vetor polar à  $\Sigma$ . Temos:

$$\varrho_{\Sigma}^{\zeta}(Z) = Z + (\zeta - 1) \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P.$$

Em particular, para a inversão em  $\Sigma$  temos

$$\iota_{\Sigma}(Z) = Z + -2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P$$

Um fato importante sobre inversões é que, dado uma geodésica complexa  $\Sigma$ , existe uma única inversão  $\iota_{\Sigma}$  cujo conjunto dos pontos fixo de  $\iota_{\Sigma}$  seja  $\Sigma$ . Reciprocamente, o conjunto de pontos fixos de uma inversão é uma geodésica complexa.

Tanto a projeção quanto a inversão se estendem naturalmente para os fechos dos espaços envolvidos. As extensões são definidas pelas mesmas expressões vistas acima.

## 1.6 Bissetores

Não existem hipersuperfícies reais totalmente geodésicas em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , diferentemente como acontece em  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^4$ . Isso aumenta consideravelmente a dificuldade na construção de poliedros (por exemplo, um poliedro fundamental para grupos discretos de isometrias hiperbólicas complexas). Um substituto razoável são os bissetores métricos. Estas hipersuperfícies analíticas reais possuem duas decomposições em subvariedades totalmente geodésicas.

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois pontos distintos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . O **bissetor equidistante** de  $z_1$  e  $z_2$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}\{z_1, z_2\}$ , é definido por

$$\mathcal{B}\{z_1, z_2\} = \{z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 : \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)\}.$$

Seja  $\Sigma$  a geodésica complexa que passa por  $z_1$  e por  $z_2$ . Essa geodésica  $\Sigma$  é a **espinha complexa** de  $\mathcal{B}$ . A **espinha real** de  $\mathcal{B}$  é a linha geodésica real

$$\sigma = \mathcal{B}\{z_1, z_2\} \cap \Sigma = \{z \in \Sigma : \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)\}.$$

Ou seja,  $\sigma$  é o bissetor equidistante de  $z_1$  e  $z_2$  em  $\Sigma$ .

**Teorema 1.6.1** *Sejam  $\mathcal{B}$ ,  $\Sigma$  e  $\sigma$  como acima. Seja  $\Pi : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$  a projeção ortogonal sobre  $\Sigma$ . Então*

$$\mathcal{B} = \Pi^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi^{-1}(s).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo lema 1.5.1, para todo  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ ,

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{\rho(z, z_1)}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\rho(z, \Pi(z))}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho(\Pi(z), z_1)}{2}\right) \\ \cosh\left(\frac{\rho(z, z_2)}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\rho(z, \Pi(z))}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho(\Pi(z), z_2)}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{B} &\Leftrightarrow \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2) \Leftrightarrow \\ \cosh\left(\frac{\rho(z, z_1)}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\rho(z, z_2)}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \cosh\left(\frac{\rho(\Pi(z), z_1)}{2}\right) &= \cosh\left(\frac{\rho(\Pi(z), z_2)}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \Pi(z) &\in \sigma. \end{aligned}$$

■

**Definição 1.6.1 (Mostow)** *Para cada  $s \in \sigma$ ,  $\Pi^{-1}(s)$  é uma geodésica complexa em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , chamada de **fatia** do bissetor  $\mathcal{B} = \mathcal{B}\{z_1, z_2\}$ .*

A decomposição  $\mathcal{B} = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi^{-1}(s)$  de um bissetor em geodésicas complexas  $\Pi^{-1}(s)$  é chamada **decomposição em fatias de Mostow**. Além dessa, todo bissetor também pode ser apresentado como uma união de subespaços totalmente geodésicos e puramente reais, isto é, em  $\mathbb{R}$ -planos. Essa decomposição de um bissetor é chamada de **decomposição meridional de Goldman** ( veja [3]).

**Teorema 1.6.2** *Seja  $\sigma \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  uma geodésica real. O bissetor  $\mathcal{B}$  tendo espinha real  $\sigma$  é a união de todos os  $\mathbb{R}$ -planos contendo  $\sigma$ .*

# Capítulo 2

## O Invariante Angular de Cartan

### 2.1 O Produto Hermitiano Triplo

Seja  $\mathbb{C}^{2,1}$  o espaço vetorial  $\mathbb{C}^3$  munido do produto Hermitiano  $\langle z, w \rangle = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 - z_3\bar{w}_3$ . O **produto Hermitiano Triplo** é definido por

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (Z_1, Z_2, Z_3) &\longmapsto \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle = \langle Z_1, Z_2 \rangle \langle Z_2, Z_3 \rangle \langle Z_3, Z_1 \rangle\end{aligned}$$

Listaremos algumas propriedades básicas desse produto.

**Proposição 2.1.1** *O produto Hermitiano triplo satisfaz*

1. Se  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  são vetores dois a dois linearmente independentes e nulos, então

$$\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle \neq 0.$$

2. Se  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  são vetores nulos, então

$$\Re\{\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\} \leq 0.$$

3. Para quaisquer números complexos não nulos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , temos

$$\arg\{-\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\} = \arg\{-\langle \lambda_1 Z_1, \lambda_2 Z_2, \lambda_3 Z_3 \rangle\}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Esse resultado segue imediatamente da proposição 1.5.3 do capítulo 1.

2. Por hipótese  $\langle Z_1, Z_1 \rangle = \langle Z_2, Z_2 \rangle = \langle Z_3, Z_3 \rangle = 0$ . Daí, pela equação (1.12),

$$\begin{aligned} 0 \geq -|\langle Z_1 \boxtimes Z_2, Z_3 \rangle|^2 &= \begin{vmatrix} 0 & \langle Z_2, Z_1 \rangle & \langle Z_3, Z_1 \rangle \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle & 0 & \langle Z_3, Z_2 \rangle \\ \langle Z_1, Z_3 \rangle & \langle Z_2, Z_3 \rangle & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \langle Z_1, Z_2 \rangle \langle Z_2, Z_3 \rangle \langle Z_3, Z_1 \rangle + \langle Z_1, Z_3 \rangle \langle Z_3, Z_2 \rangle \langle Z_2, Z_1 \rangle = \\ &= \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle + \overline{\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle} = 2\Re\{\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\}. \end{aligned}$$

3. Dados  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  complexos não nulos, temos

$$\langle \lambda_1 Z_1, \lambda_2 Z_2, \lambda_3 Z_3 \rangle = \langle \lambda_1 Z_1, \lambda_2 Z_2 \rangle \langle \lambda_2 Z_2, \lambda_3 Z_3 \rangle \langle \lambda_3 Z_3, \lambda_1 Z_1 \rangle = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\lambda_3|^2 \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle.$$

Logo

$$\arg\{-\langle \lambda_1 Z_1, \lambda_2 Z_2, \lambda_3 Z_3 \rangle\} = \arg\{-\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\}.$$

■

## 2.2 O Invariante Angular de Cartan

Seja  $\mathbb{A} : \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \times \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \times \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \arg\{-\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\},$$

onde  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  são levantamentos em  $\mathbb{C}^{2,1}$  de  $z_1, z_2$  e  $z_3$ , respectivamente. Pelo item **3** da proposição anterior essa função está bem definida, no sentido que ela independe da escolha dos levantamentos dos pontos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Pelo item **2** dessa mesma proposição, para qualquer tripla de pontos  $z = (z_1, z_2, z_3)$  na fronteira, temos

$$-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(z) \leq \frac{\pi}{2}.$$

O número real  $\mathbb{A}(z)$ , associado a tripla de pontos na fronteira  $z = (z_1, z_2, z_3)$ , é chamado o **invariante angular de Cartan** de  $z$ .

É claro que se  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  é uma isometria holomorfa, então

$$\mathbb{A}(\mathbf{g}(z)) = \mathbb{A}(z).$$

Portanto, o invariante de Cartan é invariante por isometrias holomorfas de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . O seguinte teorema afirma que também é válida a recíproca dessa propriedade.



**Teorema 2.2.1** *Sejam  $z = (z_1, z_2, z_3)$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)$  duas triplas de pontos na fronteira  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  tais que  $\mathbb{A}(z) = \mathbb{A}(w)$ . Então existe uma isometria holomorfa  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  tal que*

$$\mathbf{g}(z_1) = (w_1), \quad \mathbf{g}(z_2) = (w_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(z_3) = (w_3).$$

*Além disso, tal isometria é única desde que  $z$  e  $w$  não estejam em uma mesma cadeia ou em um mesmo  $\mathbb{R}$ -círculo.*

**DEMONSTRAÇÃO:** Denotemos por  $Z_i$  e  $W_i$  levantamentos dos pontos  $z_i$  e  $w_i$  à  $\mathbb{C}^{2,1}$ , respectivamente. Suponhamos primeiramente que as triplas  $z$  e  $w$  não estão contidas em uma cadeia e nem em um  $\mathbb{R}$ -círculo. Dessa forma, os vetores  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  são linearmente independentes, e os vetores  $W_1, W_2$  e  $W_3$  também são linearmente independentes. Desse modo, pela proposição 1.5.3 temos que

$$\langle Z_i, Z_j \rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad \langle W_i, W_j \rangle \neq 0,$$

para todo  $i \neq j$ . Assim podemos supor, após normalização adequada, que

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1, Z_3 \rangle = 1.$$

Temos então

$$A_1 = \mathbb{A}(z) = \arg\{-\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\} = \arg\{-\langle Z_2, Z_3 \rangle\}.$$

Uma vez que  $\Re\{-\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle\} \geq 0$ , podemos escrever

$$-\langle Z_2, Z_3 \rangle = \rho^2 e^{iA_1} \quad \text{onde} \quad \rho \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Substituindo  $Z_1$  por  $\rho Z_1$ ,  $Z_2$  por  $\frac{Z_2}{\rho}$  e  $Z_3$  por  $\frac{Z_3}{\rho}$ , teremos

$$\langle \rho Z_1, \frac{Z_2}{\rho} \rangle = \langle \rho Z_1, \frac{Z_3}{\rho} \rangle = 1 \quad \text{e} \quad -\langle \frac{Z_2}{\rho}, \frac{Z_3}{\rho} \rangle = e^{iA_1}.$$

Portanto, sempre podemos escolher levantamentos  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$  tais que

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1, Z_3 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad -\langle Z_2, Z_3 \rangle = e^{iA_1}.$$

De modo análogo, podemos escolher levantamentos  $W_1, W_2$  e  $W_3$  tais que

$$\langle W_1, W_2 \rangle = \langle W_1, W_3 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad -\langle W_2, W_3 \rangle = e^{iA_2}.$$

Como, por hipótese, o invariante de Cartan das triplas de pontos são iguais, isto é,  $A_1 = A_2$ , temos que  $\langle Z_2, Z_3 \rangle = \langle W_2, W_3 \rangle$ . A aplicação  $Z_i \mapsto W_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  se estende a uma única isometria linear  $g \in \text{U}(2, 1)$ . A projetivização  $\mathbf{g}$  dessa isometria em  $\text{PU}(2, 1)$  é tal que

$$\mathbf{g}(z_1) = (w_1), \quad \mathbf{g}(z_2) = (w_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(z_3) = (w_3).$$

Quando as triplas de pontos  $z$  e  $w$  pertencem a uma cadeia ou a um  $\mathbb{R}$ -círculo, existe uma isometria Hermitiana entre os planos gerados por  $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$  e por  $\{W_1, W_2, W_3\}$ . Tal isometria não admite uma única extensão para todo  $\mathbb{C}^{2,1}$ . ■

## 2.3 Interpretação Geométrica do Invariante de Cartan

Na seção anterior definimos algebricamente o invariante de Cartan. O seguinte teorema nos apresenta uma interpretação geométrica desse invariante.

**Teorema 2.3.1** *Seja  $x = (x_1, x_2, x_3)$  uma tripla de pontos da fronteira  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Sejam  $\Sigma_{12}$  a geodésica complexa gerada pelos pontos  $x_1$  e  $x_2$  e  $\sigma_{12}$  a linha geodésica real ligando  $x_1$  à  $x_2$ . Considere a projeção ortogonal*

$$\Pi_{12} : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \Sigma_{12} \cup \partial\Sigma_{12}$$

Então

$$|\tan \mathbb{A}(x)| = \sinh(\rho(\Pi_{12}(x_3), \sigma_{12})).$$

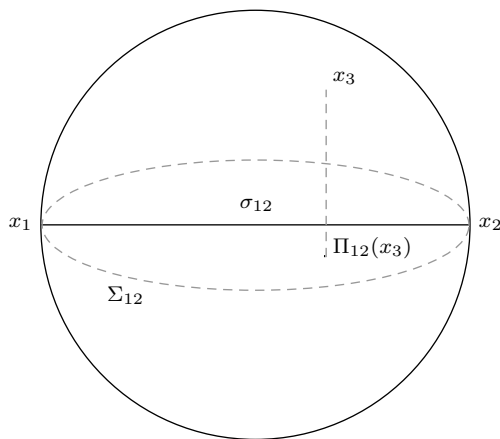


Figura 2.1: Interpretação Geométrica do Invariante de Cartan

**DEMONSTRAÇÃO:** Vamos considerar o modelo da bola unitária  $\mathbb{B}^2$  para o espaço hiperbólico complexo. Como a ação do grupo  $\text{PU}(2, 1)$  em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é duplamente transitiva e o invariante de Cartan é invariante por isometrias, podemos considerar  $x_1, x_2$  e  $x_3$  em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  levantados à

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daí temos que

$$\mathbb{A}(x) = \arg\{2(\bar{z}_2 - 1)(-z_2 - 1)\} = \arg\{(1 - \bar{z}_2)(1 + z_2)\}.$$

Seja  $w = (1 - \bar{z}_2)(1 + z_2) = (1 - |z_2|^2) + 2i\Im(z_2)$ . Como

$$\tan \mathbb{A}(x) = \tan(\arg\{w\}) = \frac{\Im(w)}{\Re(w)},$$

temos

$$\tan \mathbb{A}(x) = \frac{2\Im(z_2)}{1 - |z_2|^2}.$$

Por outro lado,  $\Pi_{12}(x_3) = (0, z_2) \in \mathbb{B}^2 \cup \partial\mathbb{B}^2$ . Desse modo  $x_1, x_2$  e  $\Pi_{12}(x_3)$  pertencem à geodésica complexa  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , que é exatamente o modelo que disco unitário para o plano hiperbólico real. Agora, da geometria hiperbólica real ( ver [1] ) temos que

$$\sinh(\rho(z_2, \sigma_{12})) = \frac{2|\Im(z_2)|}{1 - |z_2|^2}.$$

Portanto

$$\sinh(\rho(\Pi_{12}(x_3), \sigma_{12})) = \left| \frac{2\Im(z_2)}{1 - |z_2|^2} \right| = |\tan \mathbb{A}(x)|.$$

■

Como consequência desse teorema, temos:

**Corolário 2.3.1** *Seja  $x$  uma tripla de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então  $x$  pertence a uma cadeia se, e somente se,  $\mathbb{A}(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Continuando com a notação introduzida na demonstração do teorema anterior, se  $x$  pertence a uma cadeia, temos que  $x_3$  pertence a linha complexa  $\Sigma_{12}$ , ou seja,  $\Pi_{12}(x_3) = x_3$ . Daí,

$$\rho(\Pi_{12}(x_3), \sigma_{12}) = \infty.$$

e portanto

$$\mathbb{A}(x) = \arctan(\pm\sinh(\rho(x_3, \sigma_{12}))) = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Reciprocamente, se  $\mathbb{A}(x) = \pm \frac{\pi}{2}$ , então  $\rho(\Pi_{12}(x_3), \sigma_{12}) = \infty$ , e assim  $\Pi_{12}(x_3) \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Agora, se  $x_3$  não pertencesse a cadeia  $\partial\Sigma_{12}$ , teríamos  $x_3$  pertencendo à fronteira de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  mas não pertencendo a cadeia. Portanto  $\Pi_{12}(x_3)$  pertenceria ao interior da geodésica complexa  $\Sigma_{12}$ . Mas  $\text{Int}(\Sigma_{12}) \cap \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 = \emptyset$ . Portanto  $x_3$  necessariamente pertence à  $\partial\Sigma_{12}$ .  $\blacksquare$

Para saber quando uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo está em um  $\mathbb{R}$ -círculo precisamos do seguinte teorema:

**Teorema 2.3.2** *Sejam  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  quaisquer vetores em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Suponha que  $\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle \neq 0$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$  é real.
2. Existem escalares não-nulos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  em  $\mathbb{C}$  tais que

$$W_1 = \lambda_1 Z_1, \quad W_2 = \lambda_2 Z_2 \quad \text{e} \quad W_3 = \lambda_3 Z_3.$$

geram um subespaço totalmente real de  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

DEMONSTRAÇÃO:

(2  $\Rightarrow$  1) Se  $W_1, W_2$  e  $W_3$  geram um subespaço totalmente real, então  $\langle W_i, W_j \rangle$  é real para todo  $i \neq j$ . Como

$$\langle W_1, W_2, W_3 \rangle = \langle \lambda_1 Z_1, \lambda_2 Z_2, \lambda_3 Z_3 \rangle = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\lambda_3|^2 \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$$

segue que  $\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$  é real.

(1  $\Rightarrow$  2) Suponha que  $\langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle$  é real. Queremos encontrar  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\langle W_i, W_j \rangle$  é real para todo  $i \neq j$ . Tomando  $\lambda_1 = 1$ , devemos ter

$$\langle W_1, W_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle Z_1, Z_2 \rangle \in \mathbb{R}.$$

Assim  $\lambda_2 = \langle Z_1, Z_2 \rangle$ . Analogamente, devemos ter

$$\langle W_1, W_3 \rangle = \bar{\lambda}_3 \langle Z_1, Z_3 \rangle \in \mathbb{R}.$$

Assim  $\lambda_3 = \langle Z_1, Z_3 \rangle$ . Para verificar que  $\langle W_2, W_3 \rangle$  é real, observe que

$$\langle W_2, W_3 \rangle = \frac{\langle W_1, W_2, W_3 \rangle}{\langle W_1, W_2 \rangle \langle W_1, W_3 \rangle}.$$

Mas como vimos na demonstração acima

$$\langle W_1, W_2, W_3 \rangle = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\lambda_3|^2 \langle Z_1, Z_2, Z_3 \rangle.$$

Portanto, para esses escalares,  $\langle W_i, W_j \rangle$  é real para todo  $i \neq j$ . ▮

Como conseqüência do teorema acima, temos:

**Corolário 2.3.2** *Seja  $x = (x_1, x_2, x_3)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Então  $x$  pertence a um  $\mathbb{R}$ -círculo se, e somente se,  $\mathbb{A}(x) = 0$ .*

## 2.4 Uma Partição da Fronteira

Seja  $x = (x_0, x_1, x_2)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Seja  $\mathbb{A}(x)$  o invariante angular de Cartan de  $x$ . Se esses pontos não estão contidos em uma cadeia, vimos que  $|\mathbb{A}(x)| < \pi/2$ , ou seja,  $\tan(\mathbb{A}(x)) \in \mathbb{R}$ . Mais ainda, vimos que se  $y = (y_0, y_1, y_2)$  é uma outra tripla de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  então existe um elemento  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  tal que  $\mathbf{g}(x_i) = y_i$  ( $i = 0, 2, 3$ ) se, e somente se,  $\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}(y)$ . Desse modo, podemos dizer que o invariante angular de Cartan parametriza, a menos de isometrias holomorfas, triplas de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Nessa seção, vamos explicitar essa parametrização. Isso significa que vamos construir uma função injetora

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \times \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \times \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ t &\mapsto x(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

tal que

$$\tan \mathbb{A}(x(t)) = t.$$

Então seja  $x = (x_0, x_1, x_2)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Suponhamos que esses pontos não estejam contidos em uma cadeia. Como a ação de  $\text{PU}(2, 1)$  em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é duplamente transitiva, podemos supor que em coordenadas horoesféricas  $x_1 = q_{\infty}$  e  $x_2 = (0, 0)$ . A cadeia determinada pelos pontos  $x_1$  e  $x_2$  é a cadeia vertical

$$\mathbb{V} = \{ (\zeta, v) \in \mathcal{H} \mid \zeta = 0 \}.$$

Como estamos supondo que o ponto  $x_0$  não pertence a essa cadeia, vemos que  $x_0$  possui coordenadas horoesféricas da forma  $x_0 = (\zeta, v)$  com  $\zeta = \rho e^{i\theta} \neq 0$ .

Seja  $\mathbf{g}$  o seguinte elemento de  $\text{PU}(2, 1)$ :  $\mathbf{g}$  é a composição da dilatação de Heisenberg  $\mathcal{D}_{1/\rho}$  seguida da rotação de Heisenberg  $\mathcal{R}_{-\theta}$ . Uma vez que cada uma dessas aplicações fixa os pontos  $x_1$  e  $x_2$ , vemos que  $\mathbf{g}$  também fixa esses pontos e

$$\mathbf{g}(x_0) = \mathcal{R}_{-\theta} \circ \mathcal{D}_{1/\rho}(\rho e^{i\theta}, v) = \mathcal{R}_{-\theta}\left(e^{i\theta}, \frac{v}{\rho^2}\right) = \left(1, \frac{v}{\rho^2}\right).$$

Dessa forma, dados quaisquer pontos distintos  $x_0, x_1$  e  $x_2$  na fronteira do espaço hiperbólico complexo, se eles não estiverem contidos em uma cadeia, sempre existe uma isometria  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$  tal que, em coordenadas horoesféricas:

$$\mathbf{g}(x_0) = (1, t) \quad , \quad \mathbf{g}(x_1) = q_\infty \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(x_2) = (0, 0),$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Vamos denotar desse mesmo modo os seguintes levantamentos para  $\mathbb{C}^{2,1}$  desses pontos:

$$\mathbf{g}(x_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ it \\ 2 - it \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{g}(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(x_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $\mathbf{g} \in \text{PU}(2, 1)$ , temos que  $\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle \mathbf{g}(x_0), \mathbf{g}(x_1), \mathbf{g}(x_2) \rangle$ . Daí, usando os vetores acima, obtemos a seguinte expressão para o produto triplo Hermitiano

$$-\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = 8(1 + it).$$

Isso implica que o invariante angular de Cartan de  $x = (x_0, x_1, x_2)$  é tal que  $\tan \mathbb{A}(x) = t$ .

Essa construção demonstra o seguinte resultado.

**Proposição 2.4.1** *Seja  $x = (x_0, x_1, x_2)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Suponhamos que esses pontos não estejam contidos em uma cadeia. Se  $\tan \mathbb{A}(x) = t$ , então existe um elemento de  $\text{PU}(2, 1)$  que transforma  $x_0, x_1$  e  $x_2$  respectivamente nos pontos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  representados pelos seguintes vetores nulos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ :*

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ it \\ 2 - it \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Capítulo 3

## O Grupo Triangular Ideal

No plano hiperbólico real, reflexões em três geodésicas mutuamente assintóticas, geram um grupo discreto tendo o triângulo limitado por essas geodésicas como o seu domínio fundamental. Vamos agora resolver um problema análogo para grupos gerados por inversões em três geodésicas complexas mutuamente assintóticas, no espaço hiperbólico complexo. Um tal grupo triangular ideal é geometricamente determinado por uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo; tais triplas são parametrizadas por um único número real em  $[-\pi/2, \pi/2]$ : o invariante angular de Cartan. Nosso objetivo é investigar para quais valores em  $[-\pi/2, \pi/2]$ , a representação correspondente é um mergulho discreto.

### 3.1 O Problema

Seja  $\Gamma = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  o grupo livre gerado por involuções  $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ . Consideremos o espaço  $\text{Hom}(\Gamma, \text{PU}(2, 1))$ , dos homomorfismos  $\Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$ , munido da topologia compacto aberta.

Dizemos que um tal homomorfismo  $\phi : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  é um **mergulho discreto** se  $\phi$  é injetivo e se  $\phi(\Gamma)$  é um subgrupo discreto de  $\text{PU}(2, 1)$ .

Nesse trabalho vamos considerar somente homomorfismos em  $\text{Hom}(\Gamma, \text{PU}(2, 1))$  que são geometricamente dados por uma tripla de pontos na fronteira do espaço hiperbólico complexo: seja  $u = (u_0, u_1, u_2)$  uma tripla de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Seja  $\Sigma_0 = \overline{u_1 u_2}$  a geodésica complexa gerada por  $u_1$  e  $u_2$ . Similarmente sejam  $\Sigma_1 = \overline{u_0 u_2}$  e  $\Sigma_2 = \overline{u_0 u_1}$ . Denotemos a inversão em  $\Sigma_j$  por

$\iota_j \in \text{PU}(2, 1)$  e defina a representação  $\phi_u$  por

$$\begin{aligned} \phi_u : \Gamma &\rightarrow \text{PU}(2, 1) \\ \phi_u(\epsilon_j) &= \iota_j \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Nesse capítulo, procuramos analisar o seguinte problema de deformação do grupo  $\Gamma$ : para quais triplas  $u$  a representação  $\phi_u : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  é um mergulho discreto.

Antes de analisar mais profundamente essa questão, vamos estudar dois casos extremais.

**(1) Quando  $u$  pertence a uma cadeia:**

Quando  $u_0, u_1$  e  $u_2$  estão em uma cadeia, ou seja, a fronteira de uma geodésica complexa  $\Sigma$ , então cada  $\Sigma_j = \Sigma$  e a representação  $\phi_u$  leva  $\Gamma$  sobrejetivamente no grupo cíclico de ordem dois gerado pela inversão em  $\Sigma$ . Dessa forma  $\phi_u$  não é um mergulho.

**(2) Quando  $u$  pertence a um  $\mathbb{R}$ -círculo:**

Quando  $u_0, u_1$  e  $u_2$  estão em um  $\mathbb{R}$ -círculo, ou seja, a fronteira de um  $\mathbb{R}$ -plano  $\mathcal{R}$ , então por uma mudança de coordenadas - isto é, uma conjugação por elementos de  $\text{PU}(2, 1)$  - podemos tomar  $\mathcal{R}$  como sendo o subespaço  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2 \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . As geodésicas complexas  $\Sigma_j$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  são ortogonais  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Dessa maneira, inversões em geodésicas complexas  $\Sigma_j$  deixam  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  invariante e agem em  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$  como inversões nas linhas geodésicas reais  $\Sigma_j \cap \mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Assim,  $\phi_u(\Gamma)$  é o grupo gerado por reflexões nos lados de um triângulo geodésico ideal no plano hiperbólico real  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ . Portanto,  $\phi_u$  é um mergulho discreto.

**Observação:** Da análise desses dois casos extremais, a partir desse momento, vamos considerar que os pontos  $u_0, u_1$  e  $u_2$  não pertencem a uma cadeia nem a um  $\mathbb{R}$ -círculo.

No capítulo anterior, vimos que triplas  $u = (u_0, u_1, u_2)$  de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo podem ser parametrizadas pelo invariante angular de Cartan  $\mathbb{A}(u)$ , que pertence ao intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Portanto, reinterpretando o problema de deformação acima em termos desse invariante, pergunta-se sobre quais valores de  $\mathbb{A}$ , a imagem da aplicação

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \frac{\text{Hom}(\Gamma, \text{PU}(2, 1))}{\text{PU}(2, 1)}$$

é um mergulho discreto. Aqui, essa aplicação é definida por  $\mathbb{A} \mapsto \phi_u$ , sendo  $u = (u_0, u_1, u_2)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo tal que  $\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}$ . Além disso, estamos considerando a imagem dessa aplicação no quociente  $\text{Hom}(\Gamma, \text{PU}(2, 1))/\text{PU}(2, 1)$  pois se  $u = (u_0, u_1, u_2)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2)$  são duas triplas de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  com  $\mathbb{A}(u) = \mathbb{A}(v)$  então



os grupos  $\phi_u(\Gamma)$  e  $\phi_v(\Gamma)$  são conjugado em  $\text{PU}(2, 1)$ . Portanto a representação  $\phi_u : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  é um mergulho discreto se, e somente se, a representação  $\phi_v : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  é um mergulho discreto.

Nas próximas seções vamos demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.1** *Seja  $u$  uma tripla de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e seja  $\phi_u : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  a representação definida acima.*

(I) *Se  $\phi_u$  é um mergulho discreto, então*

$$|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{125/3}).$$

(II) *A representação  $\phi_u$  é um mergulho discreto se*

$$|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{35}).$$

## 3.2 Representações Não-Discretas

Vamos agora demonstrar a primeira parte do teorema 3.1.1, o qual será referido como o teorema principal.

Seja  $u = (u_0, u_1, u_2)$  uma tripla de pontos distintos na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Suponhamos que esses pontos não estejam contidos em uma cadeia ou um  $\mathbb{R}$ -círculo. Seja  $A = \mathbb{A}(u)$  o invariante de Cartan de  $u$  e seja  $t = \tan(A)$ . Seja  $\phi_u$  a representação definida na seção anterior. De acordo com o que foi demonstrado na seção 2.4, existe um elemento de  $\text{PU}(2, 1)$  que transforma  $u_0, u_1$  e  $u_2$ , respectivamente, nos seguintes pontos do grupo de Heisenberg:  $(1, t)$ ,  $(0, 0)$  e  $q_\infty$ . Desse modo, a partir desse momento vamos supor que  $u_0, u_1$  e  $u_2$  são, de fato, esses pontos. Além disso, vamos considerar os seguintes levantamentos de  $u_0, u_1$  e  $u_2$  para  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

$$U_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ it \\ 2 - it \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores polares às geodésicas complexas  $\Sigma_0, \Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são, respectivamente:

$$P_0 = U_1 \boxtimes U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = U_0 \boxtimes U_2 = \begin{bmatrix} 1 + it \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = U_1 \boxtimes U_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Mas vimos na seção 1.5, a inversão em uma linha complexa  $\Sigma_j$ , de vetor polar  $P_j$ , é dada por

$$\iota_j(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} P_j.$$

Vamos calcular as representações matriciais, na base canônica de  $\mathbb{C}^{2,1}$ , das inversões acima.

1.  $\iota_0 \in \text{U}(2, 1)$ :

Temos

$$\iota_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \iota_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \iota_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e portanto

$$\iota_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

2.  $\iota_1 \in \text{U}(2, 1)$ :

Temos

$$\begin{aligned} \iota_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 1+t^2 \\ 2(1-it) \\ 2(1-it) \end{bmatrix}, \\ \iota_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 2(1+it) \\ 1-t^2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ \iota_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} -2(1+it) \\ -2 \\ -3-t^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e portanto

$$\iota_1 = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 1+t^2 & 2(1+it) & -2(1+it) \\ 2(1-it) & 1-t^2 & -2 \\ 2(1-it) & 2 & -(3+t^2) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

**3.**  $\iota_3 \in \text{U}(2, 1)$ :

Temos

$$\iota_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \iota_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \iota_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

e portanto

$$\iota_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Pode-se verificar facilmente que  $\det(\iota_j) = 1$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Dessa maneira, essas aplicações unitárias são projetadas em  $\text{SU}(2, 1)$ .

Agora consideremos a aplicação  $\iota_0 \iota_1 \iota_2 \in \text{PU}(2, 1)$ . Após algumas contas obtemos

$$\text{tr}(\iota_0 \iota_1 \iota_2) = \frac{1}{1+t^2}(-17 - 16it - t^2) = -9 + 8 \frac{t-i}{t+i} = -9 - 8e^{2iA}.$$

Como  $A$  é um parâmetro real entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ ,  $\text{tr}(\iota_0 \iota_1 \iota_2)$  descreve um arco circular em  $\mathbb{C}$  de raio 8 com centro em  $-9$  (veja figura 3.1). Agora, após algumas simplificações algébricas, se  $f(z) = |z|^4 - 8\Re(z^3) + 18|z|^2 - 27$  é a função discriminante, obtemos

$$f(\text{tr}(\iota_0 \iota_1 \iota_2)) = 1024 \frac{125 - 3t^2}{(1+t^2)^3}.$$

Pela proposição 1.1,  $\iota_0 \iota_1 \iota_2$  é elíptico regular se, e somente se,  $f(\text{tr}(\iota_0 \iota_1 \iota_2)) < 0$ . Isto é, se e somente se,

$$|t| > \sqrt{125/3}.$$

Suponhamos agora que  $\phi_u : \Gamma \rightarrow \text{PU}(2, 1)$  seja um mergulho discreto. Seja  $\Gamma_0$  o subgrupo de  $\Gamma$  gerado por  $\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2$ . Como  $\Gamma_0$  é livre de torção (isto é, não possui elemento de ordem finita), pelo lema 1.2.1, concluímos que  $\phi_u(\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2)$  não pode ser elíptico. Mas  $\phi_u(\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2) = \iota_0 \iota_1 \iota_2$ , daí necessariamente  $|t| \leq \sqrt{125/3}$ . Portanto,  $|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{125/3})$ , provando a primeira parte do teorema.

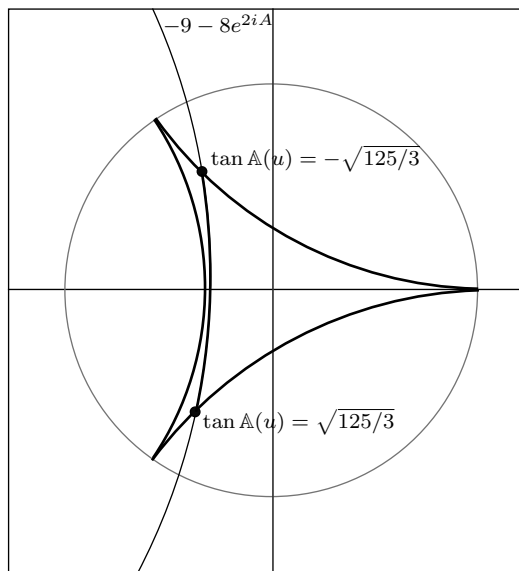


Figura 3.1: Condição de Elipticidade Regular

### 3.3 Poliedros de Dirichlet em $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$

Para a demonstração da segunda parte do teorema 3.1.1, vamos precisar do conceito de domínio fundamental de Dirichlet no espaço hiperbólico complexo. Nessa seção estaremos apresentando a definição desse conceito, e algumas de suas propriedades.

A construção padrão do **Poliedro Fundamental de Dirichlet** para o espaço hiperbólico real, se estende a  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  fornecendo um domínio fundamental localmente finito  $D_G(x)$  baseado em  $x \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  para um grupo discreto  $G \subset \text{PU}(2, 1)$ , onde  $x$  não é ponto fixo de nenhum elemento de  $G$ :

$$D_G(x) = \bigcap_{g \in G - id} H(x, gx)$$

onde  $H(x, gx)$  denota o semi-espço

$$H(x, y) = \{z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 : \rho(x, z) < \rho(y, z)\}$$

cuja fronteira é o bissetor

$$\mathcal{B}(x, y) = \partial H(x, y) = \{z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 : \rho(x, z) = \rho(y, z)\}.$$

Entretanto, ao contrário da situação no espaço hiperbólico real,  $H(x, y)$  não é convexo e  $\mathcal{B}(x, y)$  não é totalmente geodésico. Apesar disso,  $H(x, y)$  é estrelado com base  $x$ , e  $D_G(x)$  é um domínio fundamental para o grupo discreto  $G$ . Veja as demonstrações dessas afirmações em [7].

O lema seguinte é um caso particular do Teorema de Combinação da Klein e pode ser demonstrado através de uma aplicação do princípio de ping-pong.

**Lema 3.3.1** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  subgrupos discretos de  $\text{PU}(2, 1)$  com domínios fundamentais conexos  $D_1$  e  $D_2$ . Sejam  $E_1$  e  $E_2$  o interior do complemento de  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente. Suponha que  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  e  $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ . Então  $G = \langle G_1, G_2 \rangle$  é discreto e  $D = D_1 \cap D_2$  é o domínio fundamental para  $G$ .*

Além desse lema, precisaremos do seguinte resultado, que dá uma caracterização mais simples para o domínio de Dirichlet de um grupo Fuchsiano em  $\text{PU}(2, 1)$  que deixa invariante uma linha complexa em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ .

**Lema 3.3.2** *Suponha que  $\Sigma$  é uma geodésica complexa de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  e seja  $\Pi_{\Sigma} : \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$  a projeção ortogonal sobre  $\Sigma$ . Suponha que  $x \in \Sigma$  e que  $G$  é um grupo discreto de automorfismos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que deixa  $\Sigma$  invariante. Então*

$$D_G(x) = \Pi_{\Sigma}^{-1}(D_G(x) \cap \Sigma).$$

DEMONSTRAÇÃO: Como  $\Sigma$  é  $G$ -invariante, para qualquer  $g \in G$  temos  $y = g(x) \in \Sigma$ . Assim, pelo lema 1.5.1, para qualquer  $z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ , temos

$$\cosh\left(\frac{\rho(z, x)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\rho(z, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho(x, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right)$$

e

$$\cosh\left(\frac{\rho(z, y)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\rho(z, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho(y, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right)$$

Assim

$$\frac{\cosh\left(\frac{\rho(z, x)}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\rho(z, y)}{2}\right)} = \frac{\cosh\left(\frac{\rho(x, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\rho(y, \Pi_{\Sigma}(z))}{2}\right)}$$

Portanto

$$\rho(x, \Pi_{\Sigma}(z)) < \rho(y, \Pi_{\Sigma}(z)) \Leftrightarrow \rho(z, x) < \rho(z, y).$$

Logo

$$H(x, y) = \Pi_{\Sigma}^{-1} (H(x, y) \cap \Sigma).$$

Dessa maneira

$$D_G(x) = \bigcap_{g \in G-id} H(x, gx) = \Pi_{\Sigma}^{-1} \left( \bigcap_{g \in G-id} H(x, gx) \cap \Sigma \right) = \Pi_{\Sigma}^{-1} (D_G(x) \cap \Sigma).$$

■

Usaremos também o seguinte lema sobre polígonos de Dirichlet no plano hiperbólico real.

**Lema 3.3.3** *Sejam  $p_1$  e  $p_2$  pontos distintos no plano hiperbólico real  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Seja  $\sigma_i$  a inversão no ponto  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ) e seja  $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  o grupo gerado por essas inversões. Seja  $x \in \mathcal{B}(p_1, p_2) \subset \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  e seja  $\gamma_i = \mathcal{B}(x, \sigma_i x)$  a geodésica real bisetando o segmento unindo  $x$  à  $\sigma_i x$ .*

(1) *Se  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ , o polígono fundamental de Dirichlet do grupo  $\Sigma$  com centro em  $x$  é*

$$D_{\Sigma}(x) = H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x).$$

*Além disso, esse domínio possui dois lados contidos em  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .*

(2) *Se  $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$ , o polígono fundamental de Dirichlet do grupo  $\Sigma$  com centro em  $x$  é*

$$D_{\Sigma}(x) = H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_1 \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_2 \sigma_1 x).$$

*Além disso, esse domínio possui quatro lados contidos nas geodésicas reais  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_{12} = \mathcal{B}(x, \sigma_1 \sigma_2 x)$  e  $\gamma_{21} = \mathcal{B}(x, \sigma_2 \sigma_1 x)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Os elementos de  $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  são palavras nos símbolos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , sendo que em cada uma dessas palavras não aparecem dois símbolos consecutivos iguais. Dessa maneira, os elementos de  $\Sigma$  são palavras de dois tipos:

(a) palavras com um número par de letras:  $\sigma_i \sigma_j \dots \sigma_i \sigma_j$ ,  $i \neq j$ , ou

(b) palavras com um número ímpar de letras:  $\sigma_i \sigma_j \dots \sigma_i \sigma_j \sigma_i$ ,  $i \neq j$ .

As palavras com um número par de letras (mais o elemento identidade) formam o subgrupo cíclico de  $\Sigma$  gerado pelo elemento hiperbólico  $\sigma_1 \sigma_2$ :

$$H = \{ \sigma_i \sigma_j \dots \sigma_i \sigma_j : i \neq j \}.$$

Observe que se  $\alpha$  é a linha geodésica em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  passando pelos pontos  $p_1$  e  $p_2$ , e se  $q_1$  e  $q_2$  são os pontos finais de  $\alpha$  em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ , então  $\sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$  e todos os elementos de  $H$  fixam  $q_1$  e  $q_2$ .

Vamos denotar por  $E$  o subconjunto de  $\Sigma$  constituído de todas as suas palavras com um número ímpar de letras:

$$E = \{\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i\sigma_j\sigma_i : i \neq j\} .$$

Se  $\sigma \in E$ , então

$$\sigma = \sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i\sigma_j\sigma_i, \text{ com } 2n - 1 \text{ letras.}$$

Para  $n = 1$  não há nada a fazer. Se  $n > 1$ , então podemos associar as  $n - 1$  primeiras letras e as  $n - 1$  últimas letras, ficando

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i)\sigma_j(\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i), \text{ se } n \text{ for par} \\ &\text{ou} \\ \sigma &= (\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i\sigma_j)\sigma_i(\sigma_j\sigma_i \dots \sigma_j\sigma_i), \text{ se } n \text{ for ímpar.} \end{aligned}$$

Se  $n$  for par, então  $\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i(p_j)$  é ponto fixo de  $\sigma$ . Se  $n$  for ímpar, então  $\sigma_i\sigma_j \dots \sigma_i\sigma_j(p_i)$  é ponto fixo de  $\sigma$ . Em qualquer um desses pontos  $\sigma$  tem ordem dois, e assim  $\sigma$  é a uma inversão no seu ponto fixo, que não está contido no segmento de  $\alpha$  compreendido entre  $p_1$  e  $p_2$ .

Dessa forma, o grupo  $\Sigma$  possui apenas elementos hiperbólicos e inversões em pontos de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$ . Além disso, para qualquer elemento de  $\Sigma$ , seu ponto fixo (ou seus pontos fixos) pertence ao fecho da geodésica  $\alpha$ .

Agora seja  $x \in \mathcal{B}(p_1, p_2)$ . Então a projeção de  $x$  em  $\alpha$  é o ponto médio  $\Pi(x)$  de  $p_1$  e  $p_2$ .

Suponha primeiramente que  $x \in \alpha$ . Então  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são ortogonais à  $\alpha$  e, para qualquer  $\sigma \in \Sigma$ , temos que  $\rho(x, \sigma x) \geq \rho(x, p_1) = \rho(x, p_2)$ . Além disso,  $\sigma(x) \in \alpha$  para qualquer  $\sigma \in \Sigma$  e, portanto,  $\mathcal{B}(x, \sigma x)$  é perpendicular à  $\alpha$ . Dessa maneira,

$$D_{\Sigma}(x) = \bigcap_{g \in G-id} H(x, gx) = H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x),$$

obtendo a parte (1) do lema.

Suponha agora que  $x \notin \alpha$ . Seja  $\beta$  a geodésica passando por  $x$  e perpendicular à  $\alpha$ .

Primeiramente vamos estudar as linhas geodésicas  $\mathcal{B}(x, \sigma(x))$ , com  $\sigma \in H$ . Sabemos que todo elemento  $\sigma \in H$  é um potência de  $\sigma_i\sigma_j$ :  $\sigma = (\sigma_i\sigma_j)^n$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Afirmamos que

$$\mathcal{B}(x, \sigma(x)) = \mathcal{B}(x, (\sigma_i \sigma_j)^n(x)) = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}}(\beta) .$$

Com efeito,

$$\underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}} \mathcal{B}(x, (\sigma_i \sigma_j)^n(x)) = \mathcal{B}(\underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}} x, \underbrace{\sigma_i \sigma_j \dots \sigma_i \sigma_j}_{n \text{ letras}} x) .$$

Como  $x \in \mathcal{B}(p_1, p_2)$ , temos que

$$\mathcal{B}(\underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}} x, \underbrace{\sigma_i \sigma_j \dots \sigma_i \sigma_j}_{n \text{ letras}} x) = \beta .$$

Donde

$$\mathcal{B}(x, (\sigma_i \sigma_j)^n(x)) = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}}(\beta) .$$

Em particular,  $\gamma_{12} = \sigma_1(\beta)$  e  $\gamma_{21} = \sigma_2(\beta)$ . Da relação  $\mathcal{B}(x, \sigma(x)) = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}}(\beta)$  vemos que

$\mathcal{B}(x, \sigma(x))$  é uma linha geodésica perpendicular a  $\alpha$ , uma vez que  $\beta$  o é. Além disso, se  $n > 1$ , da geometria das aplicações  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , vemos que  $\mathcal{B}(x, \sigma(x)) = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \dots \sigma_j \sigma_i}_{n \text{ letras}}(\beta)$  está contido no

complementar de  $H(x, \sigma_1 \sigma_2 x)$  ou de  $H(x, \sigma_2 \sigma_1 x)$ . Dessas observações concluímos que

$$H(x, \sigma_1 \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_2 \sigma_1 x) = \bigcap_{\sigma \in H-id} H(x, \sigma x) .$$



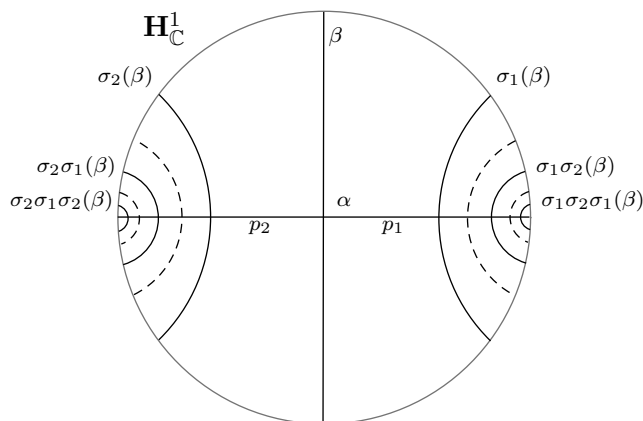


Figura 3.2: Ação de elementos hiperbólicos

Agora vamos analisar as linhas geodésicas  $\mathcal{B}(x, \sigma(x))$ , com  $\sigma \in E - \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2\}$ . Sabemos que  $\sigma$  é a inversão num ponto  $p \in \alpha$ . Mais ainda,  $p$  que não está contido no segmento de  $\alpha$  de extremos  $p_1$  e  $p_2$ . Assim, trocando  $\sigma$  por  $\sigma^{-1}$  se for necessário, podemos supor que o ponto fixo  $p$  de  $\sigma$  está mais próximo de  $p_1$  do que de  $p_2$  (isso porque a análise no outro caso é inteiramente análoga a que faremos agora). Seja  $\gamma$  a geodésica bissectando o segmento ligando  $x$  e  $\sigma x$ . É claro que  $\gamma = \mathcal{B}(x, \sigma x)$  e que  $p \in \gamma$ .

A idéia para demonstrar o lema, é mostrar que  $\gamma$  está totalmente contido em

$$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \setminus (H(x, \sigma_1 \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_1 x)).$$

Isso implicará o resultado pois, desse modo, nenhum elemento de  $E - \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2\}$  poderá definir um lado para o domínio fundamental  $D_{\Sigma}(x)$ .

Para demonstrar esse fato, denotemos por  $H_{\alpha}$  o semi-espaco contendo  $x$  e limitado por  $\alpha$ , denotemos por  $A$  o ângulo entre  $\alpha$  e  $\gamma_1$  em  $p_1$ , e denotemos por  $B$  ângulo entre  $\alpha$  e  $\gamma$  em  $p$  (veja figura 3.3). Afirmamos que  $A < B$ . De fato, o triângulo retângulo  $\Delta_1$  (de vértices  $x$ ,  $\Pi(x)$  e  $p_1$ ) e o triângulo retângulo  $\Delta_2$  (de vértices  $x$ ,  $\Pi(x)$  e  $p$ ) possuem um lado congruente (segmento de  $x$  a  $\Pi(x)$ ) e lados desiguais  $\rho(\Pi(x), p_1) < \rho(\Pi(x), p)$ . Daí obtemos a seguinte desigualdade entre seus ângulos internos:

$$\text{ang}(x, p_1, \Pi(x)) > \text{ang}(x, p, \Pi(x)).$$

Como  $A = \pi/2 - \text{ang}(x, p_1, \Pi(x))$  e  $B = \pi/2 - \text{ang}(x, p, \Pi(x))$ , da desigualdade anterior concluímos que  $A < B$ .

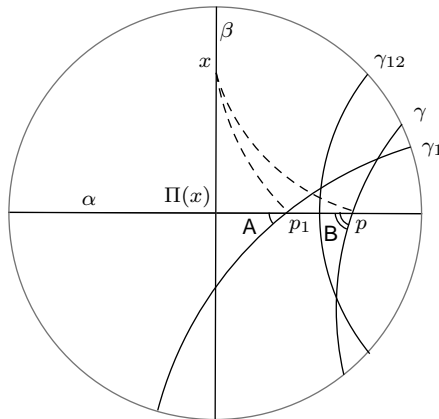


Figura 3.3: Nessa figura o ângulo  $A$  é menor que o ângulo  $B$ .

Assim  $\gamma$  pode interceptar  $\gamma_1$  somente em  $H_\alpha$ . Além disso, como o ângulo  $B$  é agudo,  $\gamma$  pode interceptar  $\gamma_{12}$  somente em  $C - \overline{H}_\alpha$ .

Desta maneira  $\gamma$  está contido no complemento de  $\overline{H}(x, \sigma_1) \cap \overline{H}(x, \sigma_1\sigma_2x)$ . Portanto

$$\bigcap_{\sigma \in E-id} H(x, \sigma x) = H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_1\sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_2\sigma_1 x).$$

Juntando as informações que obtemos das geodésicas  $\mathcal{B}(x, \sigma(x))$  com  $\sigma \in H$  e depois com  $\sigma \in E$ , concluímos finalmente que

$$D_\Sigma(x) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma-id} H(x, \sigma x) = H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_1\sigma_2 x) \cap H(x, \sigma_2\sigma_1 x).$$

Analisemos adora as duas situações possíveis na hipótese do lema.

(1) Se  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ , então o bissetor  $\beta = \mathcal{B}(p_1, p_2)$  não intersecta  $\gamma_1$  e nem  $\gamma_2$ . Ou seja,  $\beta$  está totalmente contido em  $H(x, \sigma_1 x) \cap H(x, \sigma_2 x)$  (veja figura 3.4). Desse modo,  $\sigma_1(\beta)$  e  $\sigma_2(\beta)$  estão completamente contidos em

$$\mathbf{H}_\mathbb{C}^1 - (\overline{H}(x, \sigma_1) \cap \overline{H}(x, \sigma_2 x)).$$

De fato, se  $\gamma_1 \cap \gamma_{12} = q$ , então como  $q \in \gamma_1$ ,  $\sigma_1(q) \in \gamma_1$  e além disso, como  $\gamma_{12} = \sigma_1(\beta)$ , teríamos  $\sigma_1(q) \in \beta$ . De onde teríamos  $\beta \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ , que é um absurdo.

(2) Se  $\gamma_1 \cap \gamma_2 = q$ , então

$$\rho(x, q) = \rho(\sigma_1(x), q) \quad \text{e} \quad \rho(x, q) = \rho(\sigma_2(x), q).$$

Daí  $\rho(\sigma_1(x), q) = \rho(\sigma_2(x), q)$  e, portanto,  $q \in \beta$ . Temos então que  $\sigma_1(q) \in \gamma_{12}$  e  $\sigma_2(q) \in \gamma_{21}$ . Assim

$$\gamma_{12} \cap \gamma_1 = \sigma_1(q) \quad \text{e} \quad \gamma_{21} \cap \gamma_2 = \sigma_2(q).$$

Portanto, as geodésicas  $\gamma_{12}$  e  $\gamma_{21}$  contêm arcos que são fronteiras de  $D_\Sigma(x)$ .

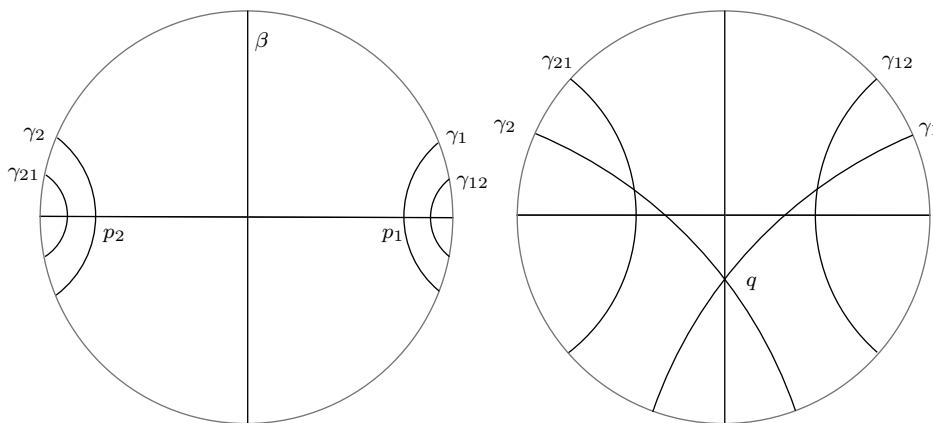


Figura 3.4: A figura da esquerda representa o domínio fundamental  $\mathbb{D}_\Sigma(x)$  no caso (1) do lema anterior. E a figura da direita representa esse domínio no caso (2) desse lema.

Um outro fato necessário para a demonstração do teorema principal é a existência de geodésicas complexas que fazem papéis de “bissetores” de pares de geodésicas complexas assintóticas.

**Lema 3.3.4** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  duas geodésicas complexas assintóticas em  $\mathbf{H}_\mathbb{C}^2$ . Então existe uma única geodésica complexa  $\Sigma_{12}$  tal que a inversão  $\iota_{12}$  em  $\Sigma_{12}$  é tal que  $\iota_{12}(\Sigma_1) = \Sigma_2$ . Além disso, se  $\Sigma_0$  é uma geodésica assintótica à  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  e tal que  $\partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2 \notin \partial\Sigma_0$ , então  $\Sigma_0$  intersecta  $\Sigma_{12}$ . (veja figura 3.5)*

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  vetores polares à  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , respectivamente. Como  $P_1$  e  $P_2$  são vetores positivos, podemos normalizá-los de modo que  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 1$ . Consideremos o produto vetorial Hermitiano  $P = P_1 \boxtimes P_2$ . Como  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são assintóticas, pela proposição 1.5.4, o vetor  $P$  é um vetor nulo. Dessa forma, da expressão 1.13

$$\langle P_1 \boxtimes P_2, P_1 \boxtimes P_2 \rangle = |\langle P_1, P_2 \rangle|^2 - \langle P_1, P_1 \rangle \langle P_2, P_2 \rangle,$$

obtemos

$$|\langle P_1, P_2 \rangle| = 1.$$

Assim podemos escrever

$$\langle P_1, P_2 \rangle = e^{-2\theta i}.$$

Substituindo  $P_1$  por  $e^{\theta i} P_1$  e  $P_2$  por  $e^{-\theta i} P_2$ , obtemos

$$\langle e^{\theta i} P_1, e^{\theta i} P_1 \rangle = \langle P_1, P_1 \rangle = 1$$

$$\langle e^{-\theta i} P_2, e^{-\theta i} P_2 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = 1$$

$$\langle e^{\theta i} P_1, e^{-\theta i} P_2 \rangle = e^{2\theta i} \langle P_1, P_2 \rangle = 1$$

Portanto, podemos considerar  $P_1$  e  $P_2$  normalizados de forma que

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle = 1.$$

Quando  $P_1$  e  $P_2$  estão normalizados nessa forma, o vetor polar a linha complexa procurada  $\Sigma_{12}$  é  $P_{12} = P_1 + P_2$ .

De fato,

$$\iota_{12}(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, P_1 + P_2 \rangle}{\langle P_1 + P_2, P_1 + P_2 \rangle} (P_1 + P_2) = -Z + \frac{1}{2} \langle Z, P_1 + P_2 \rangle (P_1 + P_2)$$

Temos

$$\iota_{12}(P_1) = -P_1 + (P_1 + P_2) = P_2 \quad \text{e} \quad \iota_{12}(P_2) = -P_2 + (P_1 + P_2) = P_1.$$

Assim

$$\iota_{12}(\Sigma_1) = \Sigma_2, \quad \iota_{12}(\Sigma_2) = \Sigma_1 \quad \text{e} \quad \iota_{12}(\Sigma_{12}) = \Sigma_{12}.$$

Vamos mostrar agora a segunda afirmação. Seja  $\Sigma_0$  uma geodésica assintótica a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  com  $\partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2 \notin \partial\Sigma_0$ . Seja  $P_0$  o vetor polar à  $\Sigma_0$ . Os vetores  $P_0 \boxtimes P_1$  e  $P_0 \boxtimes P_2$  são vetores nulos. Vamos mostrar que  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_{12}$  se intersectam em um ponto de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . Como vimos acima, podemos normalizar  $P_0$  de modo que  $\langle P_0, P_0 \rangle = 1$  e teremos

$$|\langle P_0, P_1 \rangle| = |\langle P_0, P_2 \rangle| = 1$$

Daí,

$$\langle P_0 \boxtimes P_{12}, P_0 \boxtimes P_{12} \rangle = |\langle P_0, P_{12} \rangle|^2 - 4.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\langle P_0, P_{12} \rangle|^2 &= |\langle P_0, P_1 + P_2 \rangle|^2 = |\langle P_0, P_1 \rangle + \langle P_0, P_2 \rangle|^2 \leq \\ &\leq |\langle P_0, P_1 \rangle|^2 + 2|\langle P_0, P_1 \rangle||\langle P_0, P_2 \rangle| + |\langle P_0, P_2 \rangle|^2 = 4. \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle P_0 \boxtimes P_{12}, P_0 \boxtimes P_{12} \rangle \leq 0.$$

Se fosse  $\langle P_0 \boxtimes P_{12}, P_0 \boxtimes P_{12} \rangle = 0$ , então  $\Sigma_0$  seria assintótica à  $\Sigma_{12}$ . Neste caso,  $\partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$  pertenceria à  $\partial\Sigma_0$ . Logo  $\langle P_0 \boxtimes P_{12}, P_0 \boxtimes P_{12} \rangle < 0$  e, portanto,  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_{12}$  se intersectam em  $\mathbb{P}(P_0 \boxtimes P_{12}) \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . ■

A geodésica complexa  $\Sigma_{12}$  do lema acima é chamada a **mediatriz** das geodésicas complexas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ .

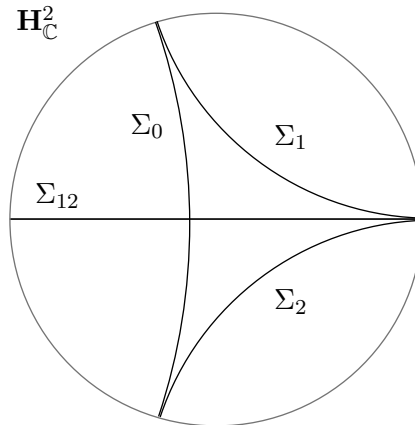


Figura 3.5: Linha complexa mediatriz de duas outras linhas complexas assintóticas.

### 3.4 Discretitude

Vamos agora demonstrar a segunda parte do teorema principal 3.1.1. Desse modo, vamos continuar com a notação definida na introdução desse capítulo:  $u = (u_0, u_1, u_2)$  é uma tripla de pontos distintos em  $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  normalizados para  $u_0 = (1, t)$ ,  $u_1 = q_{\infty}$  e  $u_2 = (0, 0)$  no grupo de Heisenberg;  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$  não estão contidos em uma cadeia ou em um  $\mathbb{R}$ -círculo;  $\Sigma_0$  é a linha complexa que passa pelos pontos  $u_1$  e  $u_2$ ;  $\Sigma_1$  é a linha complexa que passa pelos pontos  $u_0$  e  $u_2$ ;  $\Sigma_2$  é a linha complexa que passa pelos pontos  $u_0$  e  $u_1$ ;  $\iota_j \in \text{PU}(2, 1)$  é a inversão em  $\Sigma_j$ .

Considere agora as linhas complexas  $\Sigma_3 = \iota_0(\Sigma_1)$  e  $\Sigma_4 = \iota_0(\Sigma_2)$ . Pelas matrizes (3.2), (3.3) e (3.4), podemos calcular as inversões nessas linhas complexas  $\Sigma_3$  e  $\Sigma_4$ , respectivamente.

$$\iota_3 = \iota_0 \iota_1 \iota_0 = \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 1+t^2 & -2(1+it) & 2(1+it) \\ 2(-1+it) & 1-t^2 & -2 \\ 2(-1+it) & 2 & -3-t^2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

e

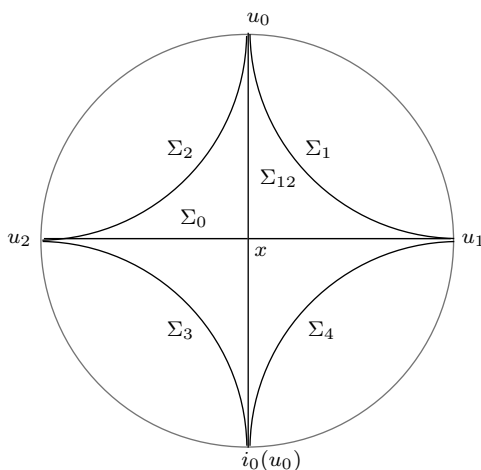
$$\iota_4 = \iota_0 \iota_2 \iota_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Para demonstrar a parte **(II)** do teorema principal, vamos mostrar que sob a hipótese colocada nesse teorema, o grupo  $\langle \iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4 \rangle$  é discreto. Observe que isso é suficiente uma vez que  $G = \langle \iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4 \rangle$  é um subgrupo de índice dois de  $\langle \iota_0, \iota_1, \iota_2 \rangle$ . (veja página 12)

Para mostrar que  $\langle \iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4 \rangle$  é discreto, vamos primeiramente mostrar que os grupos  $G_{14} = \langle \iota_1, \iota_4 \rangle$  e  $G_{23} = \langle \iota_2, \iota_3 \rangle$  são discretos e, depois disso, vamos tentar aplicar o lema 3.3.1.

Seja  $\Sigma_{12}$  a mediatriz das geodésicas complexas assintóticas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  e seja  $\Sigma_{34}$  a mediatriz das geodésicas complexas assintóticas  $\Sigma_3$  e  $\Sigma_4$ . Vamos considerar como centro de poliedros de Dirichlet a serem construídos o ponto  $x = \Sigma_0 \cap \Sigma_{12}$ . Esse ponto  $x$  existe pelo lema 3.3.4. Observe que, pela simetria  $\Sigma_{34} = \iota_0(\Sigma_{12})$ ,  $x = \iota_0(x) = \Sigma_0 \cap \Sigma_{34}$ . Desse modo  $x = \Sigma_0 \cap \Sigma_{12} \cap \Sigma_{34}$ .

Seja  $x_j = \iota_j(x)$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$ .



**Lema 3.4.1** *Os três pontos  $x$ ,  $x_1$  e  $x_4$  são  $\mathbb{C}$ -colineares, isto é, eles pertencem a uma mesma geodésica complexa  $\Sigma_{14}$ . Similarmente  $x$ ,  $x_2$  e  $x_3$  pertencem a uma mesma geodésica complexa  $\Sigma_{23}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** Vamos considerar o modelo da bola  $\mathbb{B}^2$  para o espaço hiperbólico complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$ . A idéia da demonstração desse lema é fazer uma mudança de coordenadas de modo que  $x$  seja a origem de  $\mathbb{B}^2$ ,  $\Sigma_{14}$  seja o eixo  $\{0\} \times \mathbb{B}$  e  $\Sigma_{23}$  seja o eixo  $\mathbb{B} \times \{0\}$ .

Para executar essa idéia, vamos primeiramente determinar as coordenadas de um levantamento para o ponto  $x$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$ . Evidentemente,  $x = \Sigma_0 \cap \Sigma_{12} = \mathbb{P}(P_0 \boxtimes P_{12})$ , onde  $P_0$  e  $P_{12}$  são os vetores polares de  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_{12}$ , respectivamente. Mas quem é  $P_{12}$ ? Pelo lema 3.3.4, se  $P_1$  e  $P_2$  são os vetores polares à  $\Sigma_1$  e à  $\Sigma_2$  normalizados de forma que

$$\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle = 1$$

então

$$P_{12} = P_1 + P_2.$$

Mas, pela equação (3.1), sabemos que

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 + it \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizando esses vetores para obtermos  $\langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle = 1$ , teremos

$$P_1 = \frac{1}{-1 + it} \begin{bmatrix} 1 + it \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daí

$$P_{12} = P_1 + P_2 = \frac{1}{-1 + it} \begin{bmatrix} 2it \\ 2 - it \\ it \end{bmatrix}$$

Assim, um levantamento para o ponto  $x = \Sigma_0 \cap \Sigma_{12}$  em  $\mathbb{C}^{2,1}$  é o vetor negativo

$$\tilde{x} = P_0 \boxtimes P_{12} = \frac{1}{-1 + it} \begin{bmatrix} 0 \\ -it \\ 2 + it \end{bmatrix}$$

Daí, usando as matrizes (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), podemos calcular vetores negativos que representam os pontos  $x_j = \iota_j(x)$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$

$$\tilde{x}_1 = \begin{bmatrix} 4t^2 - 4 - 8it \\ -4 + it^3 - 3it \\ -6 - 2t^2 - 5it - it^3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 + it \\ -6 - it \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_3 = \begin{bmatrix} -4t^2 + 4 + 8it \\ -4 + it^3 - 3it \\ -6 - 2t^2 - 5it - it^3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 + it \\ -6 - it \end{bmatrix}.$$

Através de uma conta simples, pode-se verificar que as coordenadas horoesféricas de  $x$  são  $(0, -t, 1)$ . Desse modo, a translação de Heisenberg  $T = T(0, t)$  leva  $x$  à origem da bola  $(0, 0)$ , que tem coordenadas horoesféricas  $(0, 0, 1)$ .

Sabemos, pela equação 1.4, que uma matriz em  $U(2, 1)$  que representa essa translação de Heisenberg é dada por

$$T(0, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{it}{2} & \frac{it}{2} \\ 0 & -\frac{it}{2} & 1 - \frac{it}{2} \end{bmatrix}.$$



Assim, as imagens dos pontos  $x, x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  por essa translação  $T$  são representadas pelos seguintes vetores negativos em  $\mathbb{C}^{2,1}$ .

$$T(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\tilde{x}_4) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\tilde{x}_1) = \begin{bmatrix} 2t^2 - 2 - 4it \\ 2t^2 - 2 - 4it \\ -3 - 3t^2 \end{bmatrix}.$$

$$T(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\tilde{x}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\tilde{x}_3) = \begin{bmatrix} -2t^2 + 2 + 4it \\ 2t^2 - 2 - 4it \\ -3 - 3t^2 \end{bmatrix}.$$

Dessas coordenadas fica evidente que os pontos  $T(x), T(x_1)$  e  $T(x_4)$  pertencem a linha complexa  $z_1 = z_2$ , e que os pontos  $T(x), T(x_2)$  e  $T(x_3)$  pertencem a linha complexa  $z_1 = -z_2$  contidas na bola unitária

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \right\}.$$

É fácil ver que a seguinte matriz de  $U(2, 1)$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa uma isometria de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que transforma a linha complexa  $z_1 = z_2$  de  $\mathbb{B}^2$  no eixo  $\{0\} \times \mathbb{B}$ , e também transforma a linha complexa  $z_1 = -z_2$  de  $\mathbb{B}^2$  no eixo  $\mathbb{B} \times \{0\}$ . Além disso, a matriz

$$\begin{bmatrix} -e^{-iA} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iA} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa uma isometria de  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que deixa cada um desses eixos invariantes. Dessas observações, vemos que o elemento

$$h = \begin{bmatrix} -e^{-iA} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iA} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{it}{2} & \frac{it}{2} \\ 0 & -\frac{it}{2} & 1 - \frac{it}{2} \end{bmatrix} \in U(2, 1)$$

representa uma isometria do espaço hiperbólico complexo  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  que transforma a linha complexa  $\Sigma_{14}$  (que passa pelos pontos  $x, x_1$  e  $x_4$ ) no eixo  $\{0\} \times \mathbb{B}$ , e transforma a linha complexa  $\Sigma_{23}$  (que passa

pelos pontos  $x$ ,  $x_2$  e  $x_3$ ) no eixo  $\mathbb{B} \times \{0\}$ . ■

**Observação:** Continuando com a notação introduzida na demonstração do lema anterior, a partir desse momento vamos trocar os pontos  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_4$  pelos pontos  $h(x)$ ,  $h(x_1)$ ,  $h(x_2)$ ,  $h(x_3)$  e  $h(x_4)$ . Ou seja, vamos considerar os seguintes vetores negativos como representantes dos pontos  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_4$ :

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{2}e^{iA} \\ -3 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}e^{-iA} \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}e^{iA} \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2}e^{-iA} \\ -3 \end{bmatrix}$$

**Observações:**

1. As geodésicas complexas  $\Sigma_{14} = \{0\} \times \mathbb{B}$  e  $\Sigma_{23} = \mathbb{B} \times \{0\}$  são ortogonais.
2. Agora estamos em um novo sistema de coordenadas, portanto devemos conjugar todas as inversões  $\iota_j$  consideradas até agora com a transformação de mudança de coordenadas  $h$ . Assim, por exemplo, a inversão em  $\Sigma_0$  fica

$$h\iota_0h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a inversão em  $\Sigma_0$  permuta as geodésicas complexas  $\Sigma_{14}$  e  $\Sigma_{23}$ .

Visto que  $x$ ,  $x_1$  e  $x_4$  pertencem a linha complexa  $\Sigma_{14}$ , o grupo  $G_{14} = \langle \iota_1, \iota_4 \rangle$  deixa essa linha complexa  $\Sigma_{14}$  invariante. Daí segue que a linha complexa  $\Sigma_{14}$  é perpendicular comum às linhas complexas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_4$ , e que o grupo  $G_{14}$  age na linha complexa  $\Sigma_{14}$  como o grupo gerado pelas inversões nos pontos  $\Sigma_1 \cap \Sigma_{14}$  e  $\Sigma_4 \cap \Sigma_{14}$ . Portanto  $G_{14}$  é discreto para qualquer valor de  $t$ .

Do mesmo modo o grupo  $G_{23} = \iota_0 G_{14} \iota_0 = \langle \iota_2, \iota_3 \rangle$  deixa a geodésica complexa  $\Sigma_{23} = \iota_0(\Sigma_{14})$  invariante. Isso implica que a linha complexa  $\Sigma_{23}$  é perpendicular comum às linhas complexas  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$ . Assim, o grupo  $G_{23}$  age na geodésica complexa  $\Sigma_{23}$  como o grupo gerado pelas inversões nos pontos  $\Sigma_2 \cap \Sigma_{23}$  e  $\Sigma_3 \cap \Sigma_{23}$ . Portanto  $G_{23}$  é discreto para qualquer valor de  $t$ .

Pelo lema 3.3.2, o domínio de Dirichlet  $D_{14}$  com ponto base  $x$  para a ação de  $G_{14}$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é

$$D_{14} = (\mathbb{C} \times D) \cap \mathbb{B}^2 = \Pi_{14}^{-1}(\{0\} \times D)$$

onde  $D$  é o polígono de Dirichlet com ponto base  $x$  para a ação de  $G_{14}$  na geodésica complexa  $\Sigma_{14} = \{0\} \times \mathbb{B}$ .

Da mesma maneira, o domínio de Dirichlet  $D_{23}$  com ponto base  $x$  para a ação de  $G_{23}$  em  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$  é

$$D_{23} = (D \times \mathbb{C}) \cap \mathbb{B}^2 = \Pi_{14}^{-1}(D \times \{0\})$$

onde  $D$  é o mesmo polígono fundamental mas agora como subconjunto de  $\Sigma_{23} = \mathbb{B} \times \{0\}$ . Essa observação segue do fato que  $D_{23} = \iota_0(D_{14})$  e que  $\iota_0$  somente troca as coordenadas  $z_1$  e  $z_2$ .

Seja  $E_{14}$  o interior do complementar de  $D_{14}$  e seja  $E_{23}$  o interior do complementar de  $D_{23}$ . Para aplicarmos o lema 3.3.1 para mostrar que  $\langle \iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4 \rangle$  é discreto, precisamos verificar que  $E_{14}$  e  $E_{23}$  são disjuntos. Denotemos por  $E$  o interior do conjunto  $\mathbb{C} - D$ .

Mas

$$E_{14} \cap E_{23} = (\mathbb{C} \times E \cap E \times \mathbb{C}) \cap \mathbb{B}^2$$

O conjunto  $E_{14} \cap E_{23}$  é vazio se  $E$  não interceptar o círculo em  $\mathbb{C}$  de raio  $1/\sqrt{2}$  centrado em 0, pois  $(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 1$ .

Vamos agora verificar em que condições  $E$  não intercepta o círculo de raio  $1/\sqrt{2}$  centrado em 0.

Pelo lema 3.3.3, é suficiente checar se as geodésicas reais  $\gamma_1 = \mathcal{B}(x, \iota_1 x) \cap \Sigma_{14}$ ,  $\gamma_4 = \mathcal{B}(x, \iota_4 x) \cap \Sigma_{14}$ ,  $\gamma_{14} = \mathcal{B}(x, \iota_1 \iota_4 x) \cap \Sigma_{14}$  e  $\gamma_{41} = \mathcal{B}(x, \iota_4 \iota_1 x) \cap \Sigma_{14}$  estão todas contidas no complemento do interior do disco de centro na origem e raio  $1/\sqrt{2}$  contido no plano complexo.

Observe que somente precisamos verificar o que ocorre na linha complexa  $\Sigma_{14}$  pois o mesmo ocorre na linha complexa  $\Sigma_{23} = \iota_0(\Sigma_{14})$ , uma vez que essas duas são simétricas pela inversão na linha complexa  $\Sigma_0$ .

Sejam  $x_{14} = \iota_1 \iota_4 x$  e  $x_{41} = \iota_4 \iota_1 x$ . Usando os valores de  $X$ ,  $X_1$  e  $X_4$  obtemos as expressões de  $X_{14}$  e de  $X_{41}$  ( lembrando que  $\iota_1 = h\iota_1 h^{-1}$  e  $\iota_4 = h\iota_4 h^{-1}$  são as inversões nas novas coordenadas).

$$X_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12\sqrt{2} \cos(A) \\ 9 + 8e^{-2iA} \end{bmatrix}, \quad X_{41} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12\sqrt{2} \cos(A) \\ 9 + 8e^{2iA} \end{bmatrix}$$

Para calcular as geodésicas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_4$ ,  $\gamma_{14}$  e  $\gamma_{41}$  observamos que cada uma delas é uma linha geodésica no plano hiperbólico real  $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1$  (disco unitário) equidistante de  $z_0 = 0$  e de  $z_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{iA}$ ,  $z_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-iA}$ ,  $z_{14} = \frac{12\sqrt{2} \cos(A)}{9 + 8e^{-2iA}}$  e  $z_{41} = -\frac{12\sqrt{2} \cos(A)}{9 + 8e^{2iA}}$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{ z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \mid \rho(z, z_0) = \rho(z, z_1) \}. \\
\gamma_4 &= \{ z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \mid \rho(z, z_0) = \rho(z, z_4) \}. \\
\gamma_{14} &= \{ z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \mid \rho(z, z_0) = \rho(z, z_{14}) \}. \\
\gamma_{41} &= \{ z \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^1 \mid \rho(z, z_0) = \rho(z, z_{41}) \}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora, no disco unitário, a distância  $\rho(z, w)$  entre dois pontos  $z$  e  $w$  pode ser calculada via a expressão: ( veja [1] )

$$\cosh^2 \left( \frac{\rho(z, w)}{2} \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Dessa expressão, prova-se que

$$\rho(z, 0) = \rho(z, w) \Leftrightarrow |w|^2(|z|^2 + 1) - z\bar{w} - \bar{z}w = 0.$$

Dessa observação e das equações (3.7) pode-se escrever as geodésicas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_4$ ,  $\gamma_{14}$  e  $\gamma_{41}$  como

$$\gamma_1 = \{ z \in \Sigma_{14} : 2\sqrt{2}(|z|^2 + 1) - 3(ze^{-iA} + \bar{z}e^{iA}) = 0 \},$$

$$\gamma_4 = \{ z \in \Sigma_{14} : 2\sqrt{2}(|z|^2 + 1) + 3(ze^{iA} + \bar{z}e^{-iA}) = 0 \},$$

$$\gamma_{14} = \{ z \in \Sigma_{14} : 12\sqrt{2} \cos A(|z|^2 + 1) - (9 + 8e^{-2iA})z - (9 + 8e^{2iA})\bar{z} = 0 \},$$

$$\gamma_{41} = \{ z \in \Sigma_{14} : 12\sqrt{2} \cos A(|z|^2 + 1) + (9 + 8e^{2iA})z + (9 + 8e^{-2iA})\bar{z} = 0 \}.$$

Lembremos que a equação do círculo em  $\mathbb{C}$  de centro  $z_0$  e raio  $r > 0$  é dada por  $|z - z_0|^2 = r^2$ . Desenvolvendo essa equação obtemos

$$|z|^2 + (|z_0|^2 - r^2) - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} = 0.$$

Daí, comprando equações, é fácil verificar que  $\gamma_1$ ,  $\gamma_4$ ,  $\gamma_{14}$  e  $\gamma_{41}$  são, de fato, arcos de circunferência no disco unitário, sendo que  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$  possuem respectivos centros

$$z_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}e^{iA} \qquad z_4 = \frac{-3}{2\sqrt{2}}e^{-iA}$$

e respectivos raios

$$r_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad r_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Portanto nem  $\gamma_1$  e nem  $\gamma_4$  interceptam o interior do disco  $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

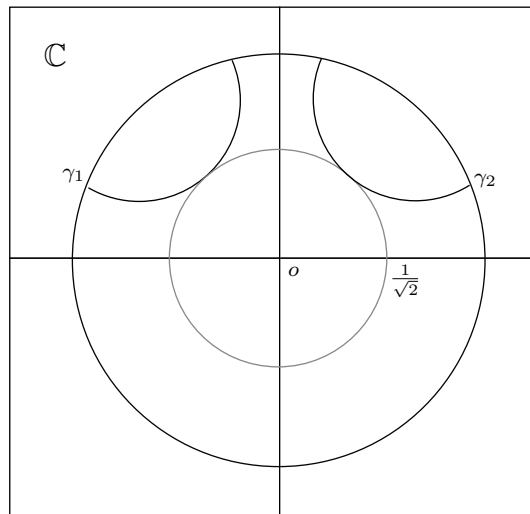


Figura 3.6: Esquema das geodésicas  $\gamma_1$  e  $\gamma_4$  no disco unitário: elas não interceptam o círculo  $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Agora consideremos  $\gamma_{14}$ . Seja  $w_0$  o ponto de  $\gamma_{14}$  mais próximo de  $z_0 = 0$  na linha complexa  $\Sigma_{14}$  (disco unitário no plano complexo). A geodésica real ligando  $z_0 = 0$  à  $w_0$  é o menor segmento de reta Euclidiano ligando a origem do plano complexo à  $\gamma_{14}$ . Esse segmento está contido na reta Euclidiana passando pela origem do plano complexo e pelo centro Euclidiano de  $\gamma_{14}$ . Pela equação acima, o centro da circunferência que contém  $\gamma_{14}$  é o número complexo

$$c_{14} = \frac{9 + 8e^{2iA}}{12\sqrt{2} \cos A}$$

Assim, o ponto de  $\gamma_{14}$  mais próximo da origem é

$$w_0 = \left( \frac{|9 + 8e^{2iA}| - 1}{9 + 8e^{2iA}} \right) \left( \frac{9 + 8e^{2iA}}{12\sqrt{2} \cos A} \right)$$

Como  $|9 + 8e^{2iA}|^2 = 288 \cos^2 A + 1$ , temos

$$|w_0|^2 = \frac{(|9 + 8e^{2iA}| - 1)^2}{|9 + 8e^{2iA}|^2 - 1} = \frac{|9 + 8e^{2iA}| - 1}{|9 + 8e^{2iA}| + 1}$$

Quando  $|w_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$\frac{1}{2} = \frac{|9 + 8e^{2iA}| - 1}{|9 + 8e^{2iA}| + 1}$$

e assim  $|9 + 8e^{2iA}| = 3$ . Fazendo  $t = \tan A$ , temos

$$9(1 + t^2) = 289 + t^2 \Leftrightarrow t^2 = 35$$

Portanto, para todo  $z \in \gamma_{14}$ , temos  $|z| \geq 1/\sqrt{2}$  desde que  $|A| \leq \arctan\sqrt{35}$ .

Trocando  $z$  por  $-\bar{z}$  obtemos a mesma coisa para  $z \in \gamma_{41}$ .

Isso concluí a demonstração do teorema principal 3.1.1.

■

É interessante ver, na construção anterior, como o Domínio de Dirichlet  $D_G(x)$  se comporta com a mudança do invariante de Cartan  $A$ .

Quando  $|\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{8})$ , poliedro de Dirichlet baseado em  $x$  tem quatro faces:

$$D_G(x) = H(x, x_1) \cap H(x, x_2) \cap H(x, x_3) \cap H(x, x_4)$$

correspondendo ao caso **(I)** do lema 3.3.3 para ambos os grupos  $\langle \iota_1, \iota_4 \rangle$  e  $\langle \iota_2, \iota_3 \rangle$ .

O instante  $A = \arctan(\sqrt{8})$  é um ponto de bifurcação onde o poliedro de Dirichlet deixa de ter quatro faces passando a ter oito faces.

Quando  $\arctan(\sqrt{8}) \leq |\mathbb{A}(u)| \leq \arctan(\sqrt{35})$  o poliedro de Dirichlet baseado em  $x$  tem oito faces correspondendo ao caso **(I)** do lema 3.3.3 para os mesmo grupos  $\langle \iota_1, \iota_4 \rangle$  e  $\langle \iota_2, \iota_3 \rangle$ .

A próxima bifurcação ocorre em  $\mathbb{A}(u) = \arctan(\sqrt{35})$ . Essa situação é onde as faces dadas pelos dois grupos  $\langle \iota_1, \iota_4 \rangle$  e  $\langle \iota_2, \iota_3 \rangle$  tendem a serem disjuntas. Para ver isso observe que para esse valor de  $\mathbb{A}(u)$  temos

$$\partial\mathcal{B}(x, x_{14}) \cap \partial\mathcal{B}(x, x_{32}) = \begin{bmatrix} 9 + 8e^{iA} \\ 9 + 8e^{2iA} \\ 18\sqrt{2} \cos A \end{bmatrix} \in \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^2$$

Quando  $|\mathbb{A}(u)| \geq \arctan(\sqrt{35})$  o poliedro de Dirichlet baseado em  $x$  torna significativamente mais complicado (observe as figuras seguintes).

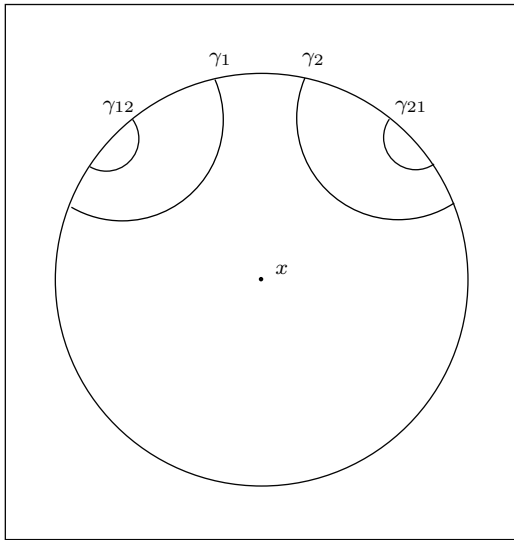


Figura 3.7:  $A = \pi/4$

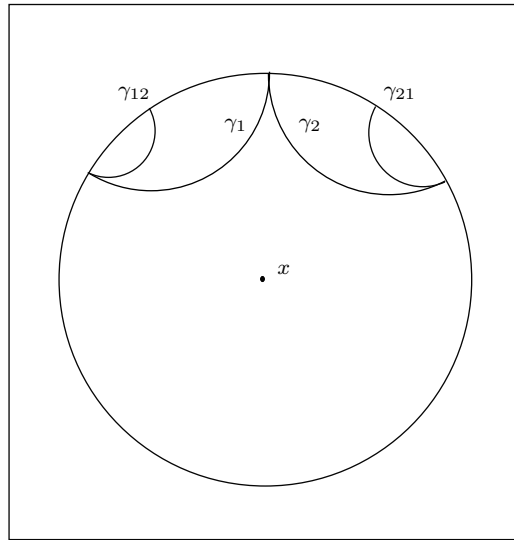


Figura 3.8:  $A = \arctan(\sqrt{8})$

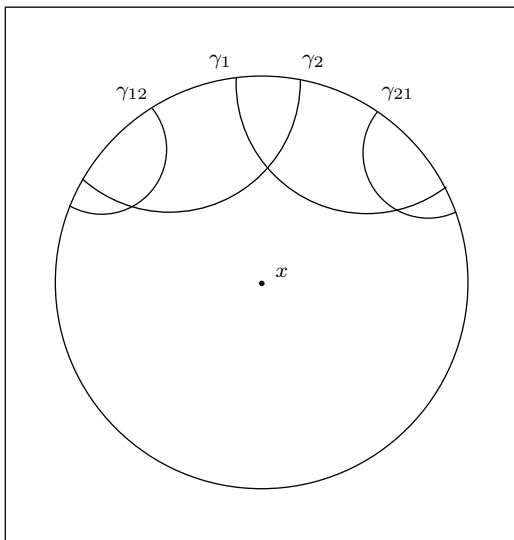


Figura 3.9:  $A = 1.3$

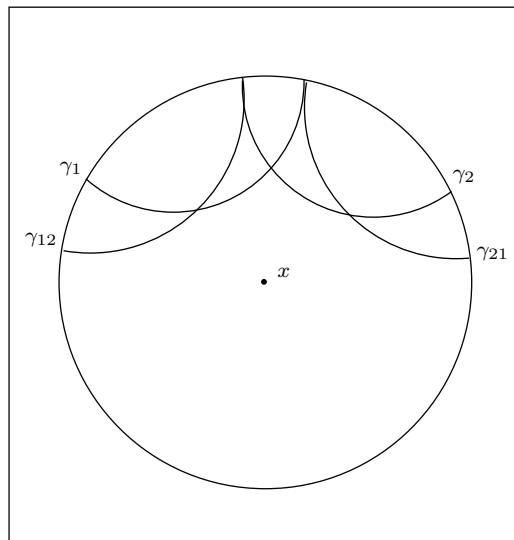


Figura 3.10:  $A = \arctan(\sqrt{35})$



# Referências Bibliográficas

- [1] A.F. Beardon, *The Geometry Of Discrete Groups*, Berlin-Heidelberg - New York 1983.
- [2] B. Maskit, *Kleinian Groups*, Berlin-Heidelberg - New York 1988.
- [3] W.M. Goldman, *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford University Press, 1999.
- [4] J.R. Parker, *Notes on Complex Hyperbolic Geometry*, University of Durham - England 2003.
- [5] S.S. Chen, L. Greenberg, *Hyperbolic Spaces*, in Contributions to Analysis, New York (1974), 49-87.
- [6] W.M. Goldman e J.R. Parker, *Complex hyperbolic ideal triangle groups*, Journal für die Reine and Angewandte Mathematik 425 (1992) 71-86.
- [7] M.B Phillips, *Dirichlet polyedra for cyclic groups in complex hyperbolic space*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 115, Number 1, May 1992, 221-228.
- [8] R.E. Schwartz, *Ideal triangle groups, dented tori, and numerical analysis*, Ann. of Math. (2) 153 (2001), no. 3, 533-598.
- [9] R.E. Schwartz, *Degenerating the complex hyperbolic ideal triangle groups*. Acta Math. 186 (2001), no. 1, 105-154.
- [10] R.E. Schwartz, *Complex Hyperbolic Triangle Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (2002) Volume 1: Invited Lectures, pp 339-350.
- [11] R.E. Schwartz, *Real Hyperbolic on the Outside, Complex Hyperbolic on the Inside*, Inventiones Mathematicae 151.2 (2003) 221-295.
- [12] R.E. Schwartz, *A Better Proof of the Goldman-Parker Conjecture*, Geometry & Topology (to appear) 2005.

- [13] R.E. Schwartz, *Spherical CR Geometry and Dehn Surgery*, Annals of Mathematics Studies (2005-6) to appear.