

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Órbitas não Birkhoff e Birkhoff
para Aplicações do Tipo Twist

Patrícia Romano Cirilo

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

2007

Sumário

1	Introdução	3
2	Definições e Resultados Básicos	5
3	Δ, Relação de Recorrência	7
3.1	Aplicações Twist e Δ	7
3.2	Órbitas de Birkhoff	12
3.3	Subsoluções e Supersoluções	15
3.4	Teorema de Hall	20
3.5	Órbitas com $n^{\text{º}}$ de rotação w	23
4	Critério para $h_{\text{top}} > 0$	25
4.1	Entropia topológica	25
4.2	O Teorema	28
4.3	A Solução zig-zag	31
4.4	Construção de K	36
5	Entropia Topológica Nula e Órbitas de Birkhoff	41

Capítulo 1

Introdução

Para estudar a dinâmica de transformações que preservam área é interessante se perguntar sobre a existência de órbitas "ordenadas". A importância desta condição geométrica foi observada por G. D. Birkhoff no início do século XX e desde então as *órbitas de Birkhoff* vêm sendo estudadas com afinco.

Nesta dissertação será estudado um critério para que uma aplicação possua entropia topológica positiva e utilizando este critério serão apresentadas condições para a existência de órbitas de Birkhoff. As hipóteses requeridas sobre a aplicação φ do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ nele mesmo são que ela seja um homeomorfismo, twist monótona e que preserve orientação. A aplicação φ é obtida através de uma relação de recorrência

$$\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

onde x_j é a primeira coordenada de um ponto do cilindro.

Será apresentado um teorema que permite obter soluções da relação de recorrência com certas propriedades de periodicidade e ordem. Com isto é possível, a partir de órbitas de φ com estas propriedades, concluir a existência de órbitas de Birkhoff, donde segue, em particular, um teorema de G. R. Hall [3].

Com algumas hipóteses sobre a seqüência $\frac{x_k}{k}$ (veja (3.4)), mostra-se a existência de órbitas de Birkhoff com um número de rotação pré-determinado.

Para terminar, mostra-se que se φ tem entropia topológica nula então toda órbita tem número de rotação para frente e para trás e ainda, um resultado atribuído originalmente a P. Boyland, que se a entropia topológica é nula e a órbita é do tipo (p, q) com $\text{mdc}(p, q) = 1$ então esta é necessariamente uma órbita de Birkhoff.

Já que não se supõe nenhuma diferenciabilidade sobre a transformação φ em questão, não podem ser utilizados argumentos como os de hiperbolicidade, transversalidade e nem procedimentos variacionais para a construção de conjuntos caóticos, portanto os métodos aqui utilizados são puramente topológicos, o que ressalta a beleza do assunto. A referência básica do estudo apresentado é o artigo de S. B. Angenent [1] e esta teoria se generaliza para cilindros do tipo $S^1 \times \mathbb{R}^n$.

Capítulo 2

Definições e Resultados Básicos

Sejam A o cilindro $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ e $\varphi : A \rightarrow A$.

Um levantamento de φ no recobrimento universal \mathbb{R}^2 de A é dado por

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

onde f e g satisfazem:

$$f(x + 1, y) = f(x, y) + 1$$

$$g(x + 1, y) = g(x, y)$$

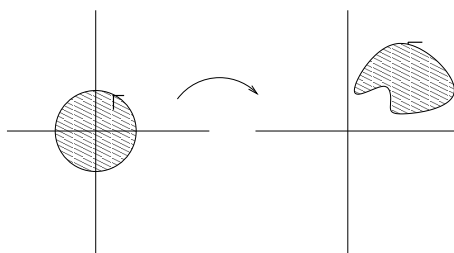
Definição 1 (Twist monótona). Diz-se que φ é uma aplicação *twist monótona*¹ quando f é estritamente crescente ou estritamente decrescente em y .

Por convenção suponha que f é crescente em y e suponha também a condição de *twist infinito*, i.e.,

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = \pm\infty$$

¹Quando trata-se de difeomorfismos, a definição mais usada para a condição de *twist* é exigir que $\partial_2 f(x, y) \neq 0$ ou mais ainda, para a condição de *twist uniforme*, exigir que $0 < c \leq \partial_2 f(x, y) \leq \frac{1}{c}$ para alguma constante positiva c .

Definição 2 (Preservar orientação). Será dito que um homeomorfismo do plano no plano preserva orientação quando ao se tomar um círculo (orientado) no plano o homeomorfismo preservar a orientação do círculo e a sua imagem for tal que o "lado de dentro", i.e., a região limitada do círculo, é levado no lado de dentro do círculo (topológico) da imagem.



Para o estudo proposto, serão necessárias as seguintes condições

$$\varphi : A \rightarrow A \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{homeomorfismo} \\ \text{twist monótona} \\ \text{preserva orientação} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Definição 3 (Órbita). Uma seqüência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, x_k pertencente a um domínio \mathcal{D} , é uma *órbita* para uma função $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ quando $f(x_k) = x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

O espaço das seqüências $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, quando $x_k \in \mathbb{R}$, será, nesta dissertação, denotado por \mathbf{X} .

Capítulo 3

Δ , Relação de Recorrência

3.1 Aplicações Twist e Δ

Como f é monótona em y , para todo par $(x, \bar{x}) \in \mathbb{R}^2$ existe uma única solução $Y(x, \bar{x})$ da equação

$$f(x, Y(x, \bar{x})) = \bar{x}$$

e esta solução é contínua, estritamente crescente em \bar{x} e ainda

$$\begin{aligned} f(x, Y(x+1, \bar{x}+1)) + 1 &= f(x+1, Y(x+1, \bar{x}+1)) = \bar{x} + 1 \\ \Rightarrow f(x, Y(x+1, \bar{x}+1)) &= \bar{x} \end{aligned}$$

pela unicidade segue que a solução $Y(x, \bar{x})$ satisfaz

$$Y(x+1, \bar{x}+1) = Y(x, \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}$$

A partir de $Y(x, \bar{x})$ construa uma nova função

$$\bar{Y}(x, \bar{x}) = g(x, Y(x, \bar{x}))$$

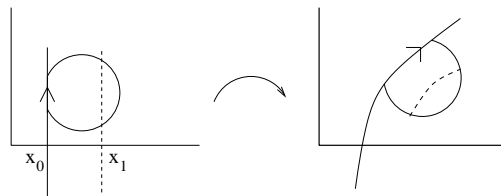
que é também contínua e periódica no sentido que

$$\begin{aligned} \bar{Y}(x+1, \bar{x}+1) &= g(x+1, Y(x+1, \bar{x}+1)) \\ &= g(x, Y(x+1, \bar{x}+1)) \\ &= g(x, Y(x, \bar{x})) \\ &= \bar{Y}(x, \bar{x}) \end{aligned}$$

A função $\bar{Y}(x, \bar{x})$ é estritamente decrescente em x . De fato, para x_0 fixo a imagem da reta $x = x_0$ por F é dada pelo gráfico da função $G_0(\bar{x}) = g(x_0, Y(x_0, \bar{x}))$. Pela condição de twist, este gráfico divide o plano em duas partes, uma acima e outra abaixo dele. Assim dado $x_0 < x_1$ a imagem da reta $x = x_1$ está necessariamente contida em umas destas partes. Portanto tem-se

$$\begin{aligned} g(x_0, Y(x_0, \bar{x})) &< g(x_1, Y(x_1, \bar{x})) \text{ ou} \\ g(x_0, Y(x_0, \bar{x})) &> g(x_1, Y(x_1, \bar{x})) \end{aligned}$$

Mas a primeira desigualdade não pode ocorrer. Para ver isto, trace um círculo (topológico) C que contenha um segmento da reta $x = x_0$ e que possua um trecho da reta $x = x_1$ na sua região limitada e oriente-o no sentido anti-horário. Pela condição de twist a imagem deste segmento por F estará contida no gráfico referido acima e estará orientado de modo crescente [veja a figura].



Assim, por se tratar de um homeomorfismo que preserva a orientação fica determinada a orientação do círculo imagem de C e também a região que será a imagem do "lado de dentro" de C . Em particular, fica determinado que a imagem de um trecho da reta $x = x_1$ está contida na parte do plano abaixo do gráfico de $G_0(\bar{x})$ donde segue que toda a imagem da reta está contida nesta porção do plano. Portanto ocorre a segunda desigualdade, i.e., para $x_0 < x_1$ vale

$$\begin{aligned}\bar{Y}(x_0, \bar{x}) &= g(x_0, Y(x_0, \bar{x})) \\ &> g(x_1, Y(x_1, \bar{x})) \\ &= \bar{Y}(x_1, \bar{x})\end{aligned}$$

conforme era esperado concluir.

Da construção de Y também decorre que

$$\begin{aligned}\lim_{\bar{x} \rightarrow \pm\infty} Y(x, \bar{x}) &= \pm\infty \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} Y(x, \bar{x}) &= \mp\infty\end{aligned}$$

Seja $\{(x_k, y_k)\}$ uma seqüência no plano. Os pontos desta seqüência formam uma órbita para F se e somente se, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, y_k) \\ y_k &= g(x_{k-1}, y_{k-1})\end{aligned}$$

Pela definição de Y , a primeira igualdade é equivalente a $y_k = Y(x_k, x_{k+1})$ e com isto, da segunda segue que $y_k = g(x_{k-1}, Y(x_{k-1}, x_k)) = \bar{Y}(x_{k-1}, x_k)$.

Em resumo, no caso de uma trajetória de F , tem-se

$$\begin{aligned}y_k &= Y(x_k, x_{k+1}) \\ y_k &= \bar{Y}(x_{k-1}, x_k)\end{aligned}$$

Subtraindo as relações anteriores vê-se que uma seqüência (x_k, y_k) é uma órbita de F se e somente se as coordenadas x satisfazem

$$Y(x_k, x_{k+1}) - \bar{Y}(x_{k-1}, x_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

e as coordenadas y são dadas por

$$y_k = Y(x_k, x_{k+1}).$$

Seja

$$\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) := Y(x_k, x_{k+1}) - \bar{Y}(x_{k-1}, x_k) \quad (3.1)$$

No caso em que φ for uma aplicação exata, por exemplo, a função Δ será dada por

$$\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \partial_1 g(x_k, x_{k+1}) - \partial_2 f(x_{k-1}, x_k).$$

Pode-se, portanto, ‘esquecer’ a aplicação inicial φ e considerar *relações de recorrência* Δ definidas no espaço das seqüências \mathbf{X} de modo que, se $\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ contínua ;} \\ \bullet \text{ monótona crescente em } x_{k-1} \text{ e em } x_{k+1}; \\ \bullet \text{ periódica de modo que} \\ \quad \Delta(x_{k-1} + 1, x_k + 1, x_{k+1} + 1) = \Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}); \\ \bullet \text{ e satisfazendo} \\ \quad \lim_{x_{k-1} \rightarrow \pm\infty} \Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \lim_{x_{k+1} \rightarrow \pm\infty} \Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \pm\infty \end{array} \right. \quad (3.2)$$

ela se estende a uma aplicação, também denotada por Δ , definida no espaço das seqüências \mathbf{X} dada por

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{X} \\ x &\mapsto [\Delta(x)]_k = \Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \end{aligned}$$

Considerando a equação

$$\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

ao invés de estudar as órbitas da aplicação F , pode-se assim estudar as *soluções* de (3.3), i.e., seqüências $x \in \mathbf{X}$ tais que $\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Tendo em vista a aplicação $\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ com as propriedades (3.2), considere a equação

$$\Delta(a, b, c) = 0$$

Assim, dados (a, b) existe c que satisfaz esta equação e pode ser feita a associação $(a, b) \mapsto (b, c)$. Do mesmo modo, dados (b, c) existe a que satisfaz a equação acima tornando possível a associação $(b, c) \mapsto (a, b)$. Neste sentido ficam definidas as aplicações F_Δ e (sua inversa) G_Δ dadas por

$$\begin{cases} F_\Delta(a, b) = (b, c) & \text{tal que } \Delta(a, b, c) = 0 \\ G_\Delta(b, c) = (a, b) & \text{tal que } \Delta(a, b, c) = 0 \end{cases}$$

Considerando os esquemas

$$\begin{array}{ccc} (a, b) \xrightarrow{F_\Delta} (b, f_\Delta(a, b)) & \text{e} & (b, c) \xrightarrow{G_\Delta} (g_\Delta(b, c), b) \\ \Delta(a, b, f_\Delta(a, b)) = 0 & & \Delta(g_\Delta(b, c), b, c) = 0 \end{array}$$

conclui-se, das definições anteriores que

$$\begin{aligned} & \Delta(g_\Delta(b, f_\Delta(a, b)), b, f_\Delta(a, b)) = 0 \\ & \Leftrightarrow a = g_\Delta(b, f_\Delta(a, b)) \\ & \Leftrightarrow G_\Delta \circ F_\Delta(a, b) = (a, b) \end{aligned}$$

Note que isto mostra que G_Δ é de fato a inversa de F_Δ .

Lembre do objeto de estudo A , o cilindro \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} que é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{Z} age em \mathbb{R}^2 por $(x_{k-1}, x_k) + j = (x_{k-1} + j, x_k + j)$. A periodicidade citada nas propriedades da função Δ garante ainda que esta ação é preservada, de

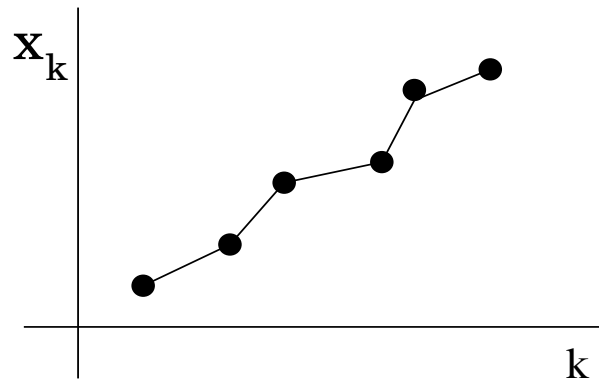
modo que $F_\Delta(z+j) = F_\Delta(z) + j$, assim a projeção define um homeomorfismo no cilindro A , que será denotado por φ_Δ .

3.2 Órbitas de Birkhoff

Definição 4 (Órbita de Birkhoff). Uma seqüência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset A$ é dita uma *órbita de Birkhoff* para a aplicação $\varphi = \varphi_\Delta$ se a sua projeção π na variedade orientada $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ preserva a ordem na órbita. Isto significa que se $\pi(x_j)$ está entre $\pi(x_i)$ e $\pi(x_k)$ no círculo orientado então a imagem $\pi \circ \varphi(x_j)$ estará também entre as imagens $\pi \circ \varphi(x_i)$ e $\pi \circ \varphi(x_k)$. Mais precisamente, deve ser preservada a ordem de acordo com a aplicação exponencial

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R}^+ &\rightarrow S^1 \\ x_k &\mapsto \theta_k \end{aligned}$$

e então, ao olhar para a representação em $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ da seqüência (k, x_k) , será observado um gráfico monótono conforme a figura seguinte,



O espaço \mathbf{X} das seqüências bi-infinitas de números reais é de fato $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, com a topologia produto.

Por definição, \mathbf{X} tem a seguinte *ordem parcial*,

$$x \leq y \iff x_k \leq y_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Com a convenção,

$$x < y \iff x \leq y \text{ e } x \neq y$$

Um intervalo ordenado $[x, y]$ será um conjunto da forma

$$[x, y] = \{z \in \mathbf{X} \mid x \leq z \leq y\}$$

Observe que $[x, y] \sim [0, 1]^{\mathbb{Z}}$, i.e., um intervalo ordenado $[x, y]$ é homeomorfo ao espaço produto compacto $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$.

Considere uma ação por *translação* τ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em \mathbf{X} dada por

$$(\tau_{m,n}(x))_i = x_{i-m} + n$$

Definição 5 (Seqüência de Birkhoff). $x \in \mathbf{X}$ é uma *seqüência de Birkhoff* se $\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tem-se

$$\tau_{m,n}(x) \geq x$$

ou

$$\tau_{m,n}(x) \leq x$$

Equivalentemente tem-se que $x \in \mathbf{X}$ é uma *seqüência de Birkhoff* se e somente se para todo $i, j, k \in \mathbb{Z}$

$$x_i \leq x_j + k \iff x_{i+1} \leq x_{j+1} + k$$

Assim, se $\{x_i\}$ é a seqüência das abscissas de uma órbita de uma aplicação twist monótona então x é uma seqüência de Birkhoff se e somente se a aplicação preserva a ordem na órbita.

Note a relação entre esta observação e a definição 4.

Definição 6 (Tipo (p, q)). Uma seqüência $x \in \mathbf{X}$ será dita do *tipo* (p, q) quando satisfizer

$$x_{k+q} = x_k + p \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Em outras palavras, $x = \tau_{q,p}(x)$

Observação 7. Se $x \in \mathbf{X}$ for uma seqüência do tipo (p, q) então todas as suas translações $y = \tau_{m,n}(x)$ serão do tipo (p, q) . De fato,

$$\begin{aligned} (\tau_{q,p}(y))_k &= y_{k-q} + p \\ &= x_{(k-q)-m} + p + n \\ &= (\tau_{m,n}(\tau_{q,p}(x)))_k \\ &= (\tau_{m,n}(x))_k = y_k \end{aligned}$$

Proposição 8. Se $x \in \mathbf{X}$ for uma seqüência periódica do tipo (p, q) e for também uma seqüência de Birkhoff, então x é periódica do tipo (p_0, q_0) , onde

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{p}{l} \quad e \quad q_0 = \frac{q}{l} \\ l &= \text{mdc}(p, q) \end{aligned}$$

Demonstração: Sendo x uma seqüência de Birkhoff, então $\tau_{q_0,p_0}(x) \geq x$ ou $\tau_{q_0,p_0}(x) \leq x$. Suponha que $x_{i-q_0} + p_0 \geq x_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como o objetivo é provar que vale de fato a igualdade, suponha que para algum i tenha-se $x_{i-q_0} + p_0 > x_i$.

Do fato de estar sendo suposto que $\tau_{q_0,p_0}(x) \geq x$, como τ_{q_0,p_0} preserva a ordem parcial em \mathbf{X} , decorre que, para todo inteiro k ,

$$\tau_{kq_0, kp_0}(x) \geq \tau_{(k-1)q_0, (k-1)p_0}(x) \geq \cdots \geq \tau_{2q_0, 2p_0}(x) \geq \tau_{q_0, p_0}(x)$$

Assim, aplicando isto para $k = l$,

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-lq_0} + lp_0 = [\tau_{lq_0, lp_0}(x)]_i \geq \cdots \geq [\tau_{q_0, p_0}(x)]_i \\ &= x_{i-q_0} + p_0 \\ &> x_i \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Assim, para todo i tem-se $(\tau_{q_0, p_0}(x))_i = x_i$ donde conclui-se que x é do tipo (p_0, q_0) . Se ao invés de supor $\tau_{q_0, p_0}(x) \geq x$ for considerada a desigualdade contrária, o mesmo argumento mostrará que $\tau_{q_0, p_0}(x) = x$. ■

3.3 Subsoluções e Supersoluções

Definição 9 (Sub e Supersolução). Uma seqüência $x \in \mathbf{X}$ será uma *subsolução* para Δ quando

$$\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

e será uma *supersolução* quando

$$\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \leq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Lema 10. *São propriedades das sub e supersoluções:*

- *O conjunto das subsoluções para Δ é fechado em \mathbf{X} . O mesmo vale para as supersoluções.*
- *Se $\{x^{(\alpha)}\}_{\alpha \in A}$ é uma família de subsoluções limitada superiormente (com a ordem parcial em \mathbf{X}) então $\sup_{\alpha} x^{(\alpha)}$ definido por*

$$\left(\sup_{\alpha} x^{(\alpha)}\right)_i := \sup_{\alpha} x_i^{(\alpha)}$$

é uma subsolução.

Analogamente define-se o ínfimo coordenada a coordenada e então uma família de supersoluções que é limitada inferiormente tem um $\inf_{\alpha} x^{(\alpha)}$ que é uma supersolução.

Demonstração: O conjunto das subsoluções é a pré-imagem do intervalo real $[0, +\infty)$ pela função contínua Δ e portanto é fechado.

Para verificar a segunda propriedade enunciada, considere $\underline{x} := \sup_{\alpha} x^{(\alpha)}$. Para cada posição $j \in \mathbb{Z}$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ existe α_{jk} tal que

$$\underline{x}_j - \frac{1}{2^k} \leq x_j^{\alpha_{jk}}$$

e então $\underline{x}_j = \sup_k x_j^{\alpha_{jk}}$ ou seja $\underline{x} = \sup_{j,k} x^{\alpha_{jk}}$. Sendo assim, pode-se supor que a família $\{x^{\alpha}\}$ é enumerável. Mais ainda, se for definido

$$x^{(N)} = \sup\{x^{(\alpha_{jk})} | 0 \leq k, |j| \leq N\},$$

quando $N \rightarrow \infty$, $x_i^{(N)} \rightarrow \underline{x}_i$ e portanto $x^{(N)} \rightarrow \underline{x}$.

Considere então duas subsoluções x e y e seja $z = \sup(x, y)$. Dada uma posição $j \in \mathbb{Z}$ suponha que $z_j = x_j$, como para todo i vale que $z_i \geq x_i$, segue da monotonicidade da função Δ que

$$\begin{aligned} \Delta(z_{j-1}, z_j, z_{j+1}) &= \Delta(z_{j-1}, x_j, z_{j+1}) \\ &\geq \Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

Analogamente, se $z_j = y_j$,

$$\begin{aligned} \Delta(z_{j-1}, z_j, z_{j+1}) &= \Delta(z_{j-1}, y_j, z_{j+1}) \\ &\geq \Delta(y_{j-1}, y_j, y_{j+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

Em ambos os casos obteve-se $\Delta(z_{j-1}, z_j, z_{j+1}) \geq 0$ para j escolhido arbitrariamente, portanto z é uma subsolução conforme queria-se mostrar.

Para duas subsoluções sabe-se que o resultado é válido, i.e., se x, y são subsoluções então o supremo $\sup(x, y)$ é uma subsolução conforme foi visto.

Sendo assim, dada uma família enumerável $\{x^{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subsoluções, com $\underline{x} = \sup\{x^{\alpha_n}\}$ considere

$$\begin{aligned} x^{\beta_2} &= \sup(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}) \\ x^{\beta_n} &= \sup(x^{\beta_{n-1}}, x^{\alpha_n}) \end{aligned}$$

Então cada uma das seqüências x^{β_n} é uma subsolução. Por construção, $x_i^{\beta_n} \geq x_i^{\alpha_n}$ e portanto $\sup_n \{x_i^{\beta_n}\} \geq \underline{x}_i$. Ainda por construção, a seqüência real $\{x_i^{\beta_n}\}_n$ é crescente para todo i e limitada por \underline{x}_i . Donde conclui-se que $\sup_n \{x_i^{\beta_n}\} \leq \underline{x}_i$, tendo portanto sido provada a igualdade

$$\sup_n \{x_i^{\beta_n}\} = \underline{x}_i$$

Assim, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $x^{\beta_{n_0}}$ tal que $x_i^{\beta_{n_0}} \approx \underline{x}_i$ para todo $|i| \leq N$, onde \approx significa *próximo* na métrica da reta. O que quer dizer que isto dá uma noção de *convergência* no espaço produto $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. E assim, (tomando abertos adequados), pode-se concluir que \underline{x} pertence ao fecho do conjunto de subsoluções, mas como foi visto este conjunto é fechado, donde segue que \underline{x} é de fato uma subsolução conforme se queria demonstrar.

Uma outra maneira de concluir o último argumento é lembrar do teorema de Tichonov pois como o conjunto é fechado, ao invés da família enumerável, basta considerar uma finita. O que significa que se o problema for resolvido para uma família de duas subsoluções o caso finito segue por indução trivialmente. ■

O resultado apresentado a seguir, juntamente com seus corolários, justifica a importância das sub e supersoluções na obtenção de seqüências que sejam de fato soluções da relação de recorrência (3.3).

Teorema 11. *Sejam $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbf{X}$ uma sub e uma supersolução respectivamente, ordenadas de sorte que $\underline{x} \leq \bar{x}$. Então existe pelo menos uma solução de (3.3), diga-se x , entre \underline{x} e \bar{x} , i.e., $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$.*

Demonstração: Seja

$$\underline{S} := \{y \in \mathbf{X} \mid y \text{ é subsolução e } y \leq \bar{x}\}$$

O conjunto \underline{S} é limitado superiormente, portanto existe o supremo de \underline{S} e este será denotado por $x := \sup \underline{S}$.

Pelo lema anterior x é subsolução, i.e., para todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \geq 0.$$

Será mostrado que na verdade, para todo $j \in \mathbb{Z}$, vale a igualdade na expressão acima. Como $\underline{x} \in \underline{S}$, tem-se $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$.

Suponha então que para algum $j \in \mathbb{Z}$ ocorra a desigualdade estrita

$$\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) > 0.$$

Já que \bar{x} é uma cota superior para o conjunto \underline{S} , para todo j , ocorre $x_j \leq \bar{x}_j$. Se $x_j < \bar{x}_j$, defina

$$x_k^\varepsilon = \begin{cases} x_j + \varepsilon, & \text{se } j = k \\ x_j, & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Pela monotonicidade de Δ , apresentada em (3.2), para todo $\varepsilon \geq 0$ e $k \neq j$,

$$\begin{aligned} \Delta(x_{k-1}^\varepsilon, x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon) &\geq \Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) > 0$ e Δ é contínua, para ε pequeno vale,

$$\Delta(x_{j-1}^\varepsilon, x_j^\varepsilon, x_{j+1}^\varepsilon) \geq 0$$

Diminuindo ε se necessário para que ainda valha $x_j + \varepsilon \leq \bar{x}_j$, tem-se $x^\varepsilon \in \underline{S}$, o que é um absurdo pois $x^\varepsilon > x$.

No caso em que $x_j = \bar{x}_j$,

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}) &= \Delta(\bar{x}_{j-1}, x_j, \bar{x}_{j+1}) \\ &\geq \Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

o que é novamente um absurdo pois \bar{x} é uma supersolução.

Logo para todo $j \in \mathbb{Z}$ tem-se $\Delta(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) = 0$ portanto $x = \sup \underline{S}$ é

solução de (3.3).

Está assim provado o teorema. No entanto, note ainda que se for definido o conjunto

$$\bar{S} := \{y \in \mathbf{X} \mid y \text{ é supersolução e } y \geq \underline{x}\},$$

então $\inf \bar{S}$ será também, por argumentos análogos, uma solução da relação de recorrência (3.3). E em geral, $\sup \underline{S}$ e $\inf \bar{S}$ são seqüências distintas. ■

Corolário 12. *Se pelo menos uma entre \underline{x} e \bar{x} for uma seqüência de Birkhoff, então existe uma solução entre \underline{x} e \bar{x} que é uma seqüência de Birkhoff.*

Demonstração: Suponha que \bar{x} seja uma seqüência de Birkhoff. Será mostrado que $x = \sup \underline{S}$ é também uma seqüência de Birkhoff. Sejam m, n inteiros quaisquer, então da hipótese,

$$\tau_{m,n}(\bar{x}) \leq \bar{x} \text{ ou } \tau_{m,n}(\bar{x}) \geq \bar{x}$$

Caso ocorra $\tau_{m,n}(\bar{x}) \leq \bar{x}$, para todo $y \in \underline{S}$,

$$\tau_{m,n}(y) \leq \tau_{m,n}(\bar{x}) \leq \bar{x}$$

portanto, $\tau_{m,n}(y) \in \underline{S}$. Isto porque y é uma subsolução se e somente se $\tau_{m,n}(y)$ é uma subsolução. Sendo assim, $\tau_{m,n}(\underline{S}) \subset \underline{S}$. Como x , e portanto $\tau_{m,n}(x)$, pertence a \underline{S} ,

$$\tau_{m,n}(x) \leq \sup \underline{S} = x$$

No caso em que $\tau_{m,n}(\bar{x}) \geq \bar{x}$, tem-se $\tau_{-m,-n}(\bar{x}) \leq \bar{x}$ e repetindo os passos anteriores, mostra-se que $\tau_{-m,-n}(x) \leq x$, donde $\tau_{m,n}(x) \geq x$.

Assim, para todo par de inteiros m, n tem-se

$$\tau_{m,n}(x) \geq x \text{ ou } \tau_{m,n}(x) \leq x$$

e portanto, x é uma seqüência de Birkhoff.

Caso a subsolução \underline{x} seja uma seqüência de Birkhoff prova-se por argumentos análogos que $\inf \bar{S}$ é uma seqüência de Birkhoff. ■

Corolário 13. *Se pelo menos uma entre \underline{x} e \bar{x} for uma seqüência periódica do tipo (p, q) , então existe uma solução x de (3.3) que está entre \underline{x} e \bar{x} e é periódica do tipo (p, q) .*

Demonstração: Suponha que \bar{x} seja uma seqüência periódica do tipo (p, q) , i.e.,

$$\tau_{q,p}(\bar{x}) = \bar{x}$$

Tome $y \in \underline{S}$, então $\tau_{q,p}(y) \leq \tau_{q,p}(\bar{x}) = \bar{x}$, donde $\tau_{q,p}(y) \in \underline{S}$. Mas então $\tau_{q,p}(\sup \underline{S}) = \sup \tau_{q,p}(\underline{S}) = \sup \underline{S}$, i.e., $\tau_{q,p}(x) = x$, ou seja, x é uma seqüência do tipo (p, q) .

Como no corolário anterior, no caso em que \underline{x} é que for periódica do tipo (p, q) , mostra-se o análogo para $\inf \bar{S}$. ■

3.4 Teorema de Hall

Definição 14 (Número de rotação). Define-se o ‘*número de rotação para frente*’ de uma seqüência $x \in \mathbf{X}$ como

$$\rho_+ := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_0}{k}$$

e o ‘*número de rotação para trás*’ como

$$\rho_- := \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{x_k - x_0}{k}$$

caso existam.

Se ambos existem e além disso coincidem, $\rho = \rho_+ = \rho_-$ é dito o *número de rotação* da seqüência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Caso o número de rotação exista, ele pode ser interpretado como a medida da velocidade angular média (ângulo/iteração) com que a seqüência dá voltas no cilindro.

Em 1984 G. R. Hall [3] provou o seguinte resultado:

Teorema 15 (Hall). *Toda aplicação twist monótona que tem uma órbita periódica do tipo (p, q) tem necessariamente uma órbita de Birkhoff do tipo (p_0, q_0) com $\frac{p_0}{q_0} = \frac{p}{q}$.*

O seguinte teorema generaliza este resultado.

Teorema 16. *Seja $x \in \mathbf{X}$ uma solução da relação de recorrência Δ (3.3) para a qual existe $w \in \mathbb{R}$ tal que*

$$M = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k - kw| < \infty$$

Então (3.3) tem uma solução de Birkhoff cujo número de rotação é w .

Demonstração: A imagem de uma solução por uma translação $\tau_{(m,n)}(x)$ também é uma solução e pela hipótese existem

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \sup\{\tau_{m,n}(x) | n \leq mw\} \\ \bar{x} &= \inf\{\tau_{m,n}(x) | n \geq mw\} \end{aligned}$$

Como $x \in \{\tau_{m,n}(x) | n \leq mw\}$ pode-se supor que $x \leq \tau_{m,n}(x)$, assim se $n \leq mw$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{k-m} + n - x_k \\ &\leq x_{k-m} + mw - x_k \\ &\leq kw + M - x_k \\ &\leq 2M \end{aligned}$$

Tomando o supremo quando $n \leq mw$,

$$\underline{x}_k - x_k \leq 2M$$

Do mesmo modo,

$$x_k - \bar{x}_k \leq 2M$$

Assim, se for definido

$$\begin{aligned}\underline{y}_k &:= \underline{x}_k - 2M \text{ e} \\ \bar{y}_k &:= \bar{x}_k + 2M\end{aligned}$$

então \underline{y} e \bar{y} são tais que $\underline{y} \leq \bar{y}$ e ainda serão uma sub e uma supersolução respectivamente, já que, pelo lema 10, \underline{x} é subsolução e \bar{x} é supersolução. Mais ainda, \underline{y} e \bar{y} serão seqüências de Birkhoff. Para ver isto, sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ dados e considere

$$\begin{aligned}\tau_{r,s}(\underline{x}) &= \sup(\tau_{m+r,n+s}(x) | n \leq mw) \\ &= \sup(\tau_{m,n}(x) | n \leq mw + s - rw)\end{aligned}$$

Se $rw \leq s$, $n \leq mw \Rightarrow n \leq mw + s - rw$, donde

$$\sup(\tau_{m,n}(x) | n \leq mw) \leq \sup(\tau_{m,n}(x) | n \leq mw + s - rw)$$

ou seja

$$\underline{x} \leq \tau_{r,s}(\underline{x})$$

Se $s \leq rw$, $n \leq mw + s - rw \Rightarrow n \leq mw$, donde

$$\tau_{r,s}(\underline{x}) \leq \underline{x}$$

Então \underline{x} é uma seqüência de Birkhoff e portanto \underline{y} também o é. Analogamente, \bar{x} e \bar{y} são seqüências de Birkhoff. O corolário 12 implica que (3.3) tem uma solução de Birkhoff y entre \underline{y} e \bar{y} .

Das hipóteses segue ainda que

$$kw - M \leq x_k \leq M + kw \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

o que implica

$$\begin{aligned}kw - 3M &\leq x_k - 2M \leq \underline{x}_k - 2M = \underline{y}_k \\ &\leq y_k \leq \bar{y}_k = \bar{x}_k + 2M \\ &\leq 3M + kw\end{aligned}$$

portanto

$$w \leq \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{y_k}{k} \leq w$$

Assim, tal solução y tem necessariamente número de rotação w . ■

3.5 Órbitas com n^0 de rotação w .

Sejam w_0 e w_1 números reais, $w_0 \leq w_1$, para os quais existam uma sub-solução \underline{x} e uma supersolução \bar{x} de (3.3) tais que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_k}{k} &\geq w_1, \\ \limsup_{k \rightarrow -\infty} \frac{\underline{x}_k}{k} &\geq w_1, \\ \liminf_{k \rightarrow -\infty} \frac{\bar{x}_k}{k} &\leq w_0, \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\underline{x}_k}{k} &\leq w_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note que quando \underline{x} e \bar{x} possuírem *número de rotação para trás e para frente*, as condições acima serão satisfeitas e se resumirão a

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_- &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\bar{x}_k}{k} \leq w_0 < w_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_k}{k} = \bar{\rho}_+ \\ \underline{\rho}_+ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\underline{x}_k}{k} \leq w_0 < w_1 \leq \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{\underline{x}_k}{k} = \underline{\rho}_- \end{aligned}$$

Um dos principais resultados que serão apresentados aqui é o

Teorema 17. *Com as condições (3.4), para todo $w \in [w_0, w_1]$ existe uma solução Birkhoff de (3.3) com número de rotação w .*

Demonstração: Das inequações (3.4) segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \pm\infty} |k|^{-1} \cdot (\bar{x}_k - w \cdot k) &\geq \min(w_1 - w, w - w_0) \geq 0 \\ \limsup_{k \rightarrow \pm\infty} |k|^{-1} \cdot (\underline{x}_k - w \cdot k) &\leq \max(w - w_1, w_0 - w) \leq 0 \end{aligned}$$

Assim existe um inteiro $N \geq 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$ vale

$$\bar{x}_k \geq w \cdot k - N \quad \text{e} \quad \underline{x}_k \leq w \cdot k + N \quad (3.5)$$

Sejam

$$\begin{aligned} \underline{y} &:= \sup\{\tau_{m,n}(\underline{x}) - N \mid n \leq mw\} \\ \bar{y} &:= \inf\{\tau_{m,n}(\bar{x}) + N \mid n \geq mw\} \end{aligned}$$

Assim, por argumentos análogos aos utilizados no teorema 16, pode-se afirmar que \bar{y} é uma supersolução Birkhoff com número de rotação w e que \underline{y} é uma subsolução Birkhoff também com número de rotação w .

Da conclusão tirada em (3.5),

$$\underline{y}_k \leq w \cdot k \leq \bar{y}_k$$

i.e., $\underline{y} \leq \bar{y}$. Segue portanto do teorema 11 e do corolário 12 que existe uma solução Birkhoff entre \underline{y} e \bar{y} e esta solução tem número de rotação w . ■

Em particular, segue que se $x \in \mathbf{X}$ for uma órbita (não Birkhoff) com número de rotação igual a w então existe uma órbita, Birkhoff, com número de rotação w . Neste caso as condições do teorema se resumiriam a $w_0 = w = w_1$

Capítulo 4

Critério para $h_{top} > 0$

4.1 Entropia topológica

Não é simples dar uma noção intuitiva do que seja a *entropia topológica*. Grosseiramente pode ser dito que este conceito representa, com um único número, a taxa do crescimento exponencial das órbitas que podem ser distinguidas com precisão finita, porém arbitrária. Antes de prosseguir com a definição, será dado um exemplo para tentar clarear esta idéia. Considere o shift finito com 2 símbolos modelando, por exemplo, o lançamento de uma moeda. Ao jogar a moeda n vezes, o número de seqüências diferentes de cara ou coroa que podem ser obtidas cresce exponencialmente, a uma taxa exponencial igual a $\log 2$ que é, conforme será mencionado posteriormente, o valor da entropia topológica deste shift.

A abordagem escolhida aqui para a definição de *entropia topológica* será via conjuntos geradores. Para este propósito serão necessárias algumas considerações preliminares.

Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação contínua num espaço métrico compacto M com uma certa função distancia d . Considere a seqüência crescente de

métricas d_n^f , com $d_1^f = d$, dada por

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y))$$

em outra palavras, d_n^f mede a distância entre os segmentos de órbita

$$\{x, \dots, f^{n-1}(x)\} \quad e \quad \{y, \dots, f_{n-1}(y)\}.$$

Seja $B_f(x, \epsilon, n)$ a bola aberta $\{y \in M \mid d_n^f(x, y) < \epsilon\}$.

Um conjunto $E \subset M$ será dito (n, ϵ) -gerador quando $M \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \epsilon, n)$.

Seja $S_d(f, \epsilon, n)$ a cardinalidade mínima de um conjunto (n, ϵ) -gerador, i.e., a cardinalidade de um conjunto (n, ϵ) -gerador minimal,

$$S_d := \min\{\#E \mid E \text{ é um } (n, \epsilon)\text{-gerador}\}.$$

Em palavras, S_d é o número mínimo de condições iniciais cujas órbitas até o tempo n aproximam-se pelo menos ϵ da órbita de qualquer outra condição inicial. Sendo M compacto, sempre existe um conjunto (n, ϵ) -gerador finito. Considere a taxa de crescimento exponencial,

$$h_d(f, \epsilon) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_d(f, \epsilon, n)$$

Como $h_d(f, \epsilon)$ não decresce com ϵ , pode-se definir

$$h_d(f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_d(f, \epsilon)$$

O número $h_d(f)$ é igual ao número $h_{d'}(f)$ desde que d' seja uma métrica que defina a mesma topologia que a métrica d no espaço M .¹

Assim é coerente a seguinte

Definição 18 (Entropia topológica). O número $h_d(f)$ calculado para uma métrica qualquer que gere uma dada topologia em M é chamado a *entropia topológica* de f e será denotado por $h_{top}(f)$.

¹Para o leitor interessado na demonstração deste fato ver [4, Prop. 3.1.2]

Para os estudos aqui propostos, será dito que uma aplicação contínua $f : N \rightarrow N$, N um espaço métrico, tem *entropia topológica positiva*, quando existir um compacto invariante $K \subset N$ tal que $f|_K$ tem entropia topológica positiva.

Definição 19 (Fator). Uma aplicação $g : N \rightarrow N$ é dita um *fator* de $f : M \rightarrow M$ se existe uma $h : M \rightarrow N$ contínua e sobrejetiva tal que $h \circ f = g \circ h$.

Proposição 20. [4, Prop. 3.1.6] *Se a aplicação g for um fator de f então $h_{top}(g) \leq h_{top}(f)$.*

Proposição 21. [4, Corol. 3.1.4] *Se uma aplicação $g : N \rightarrow N$ for conjugada a uma aplicação $f : M \rightarrow M$, i.e., se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$, então*

$$h_{top}(g) = h_{top}(f)$$

Proposição 22. [4, Prop. 3.1.7]

- *Se Λ for um conjunto fechado f -invariante então $h_{top}(f|_{\Lambda}) \leq h_{top}(f)$;*
- *$h_{top}(f^m) = m \cdot h_{top}(f)$*

Proposição 23. [4] *A entropia topológica do shift de Bernoulli com n símbolos é igual a $\log n$ e é portanto positiva.*

O resultado seguinte vem enunciar os fatos acima já no formato em que serão utilizados no texto. Fica claro que a demonstração decorre diretamente dos fatos citados acima.

Proposição 24. *Dada uma aplicação φ , se for possível exibir um compacto K invariante por algum iterado φ^n de φ que tem um shift de Bernoulli como fator quando restrito a K então φ tem entropia topológica positiva.*

4.2 O Teorema

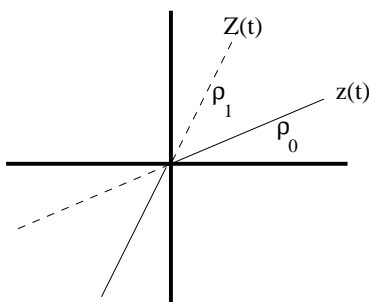
Teorema 25. *Sejam \underline{x} e \bar{x} sub e supersoluções de uma relação de recorrência Δ , como a de (3.3), que satisfaçam as condições (3.4) para $w_0 < w_1$. Então φ_Δ tem entropia topológica positiva.*

Para provar este teorema basta construir um subconjunto compacto K de A tal que alguma iterada de φ_Δ deixa K invariante e tem um shift de Bernoulli como fator quando restrita a K , pois, conforme a proposição 24, sua existência implica entropia topológica positiva.

Dados dois números racionais ρ_0 e ρ_1 tais que $w_0 < \rho_0 < \rho_1 < w_1$. Sejam

$$\begin{aligned} z(t) &= \rho_0 t_+ - \rho_1 t_- \\ Z(t) &= \rho_1 t_+ - \rho_0 t_- \end{aligned}$$

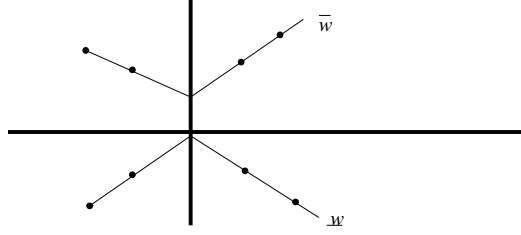
onde $t_+ = \max\{t, 0\}$ e $t_- = \max\{-t, 0\}$.



Sejam

$$\underline{w} = \sup\{\tau_{m,n}(\underline{x}) \mid n \leq z(m)\}$$

$$\bar{w} = \inf\{\tau_{m,n}(\bar{x}) \mid n \geq Z(m)\}$$



Como $\tau_{m,n}(\underline{x})_i = \underline{x}_{i-m} + n$,

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_{m,n}(\underline{x})_{i-1}, \tau_{m,n}(\underline{x})_i, \tau_{m,n}(\underline{x})_{i+1}) &= \Delta(\underline{x}_{i-1-m} + n, \underline{x}_{i-m} + n, \underline{x}_{i+1-m} + n) \\ &= \Delta(\underline{x}_{i-1-m}, \underline{x}_{i-m}, \underline{x}_{i+1-m}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

e portanto tem-se uma família de subsoluções limitada superiormente, pelo lema 10, \underline{w} é uma subsolução e \bar{w} , uma supersolução .

Lema 26. *Com as hipóteses (3.4) segue que existe M tal que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &\geq Z(k) - M \\ \underline{x}_k &\leq z(k) + M \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, sabe-se que (para ε pequeno)

$$\frac{\bar{x}_k}{k} \geq w_1 - \varepsilon > \rho_1 \quad \text{exceto para finitos } k's.$$

Assim, para $k > 0$, tem-se que $Z(k) = k\rho_1$ e por conseguinte,

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &\geq kw_1 - k\varepsilon \\ &\geq k\rho_1 - k\varepsilon \\ &= Z(k) - k\varepsilon \end{aligned}$$

Suponha agora, por absurdo, que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista k_n tal que

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k_n} - k_n \rho_1 &< -n \\ k_n \left(\frac{\bar{x}_{k_n}}{k_n} - \rho_1 \right) &< -n \\ \frac{\bar{x}_{k_n}}{k_n} - \rho_1 &< \frac{-n}{k_n}\end{aligned}$$

O lado esquerdo da última desigualdade é positivo exceto para finitos k_n 's, então tomando o limite inferior quando $n \rightarrow \infty$, conclui-se que no caso em que a ordem de n é maior ou igual a ordem de k_n o limite inferior do lado direito será negativo, o que é um absurdo. No caso da ordem de n ser menor que a ordem de k_n o termo da direita tende a 0 e portanto $\liminf \frac{\bar{x}_{k_n}}{k_n} - \rho_1 \leq 0$ donde segue que $\liminf \frac{\bar{x}_{k_n}}{k_n} \leq \rho_1$, novamente um absurdo.

Assim existe M_1 tal que para todo $k > 0$ tem-se $\bar{x}_k \geq Z(k) - M_1$. Repita o argumento e consiga M_2 tal que para todo $k < 0$ tem-se $\bar{x}_k \geq Z(k) - M_2$. Tome $M = \max\{M_1, M_2\}$ e portanto, para todo k será verdade que $\bar{x}_k \geq Z(k) - M$. Por argumentos similares segue que existe M tal que $\underline{x}_k \leq z(k) + M$. Escolha novamente o maior M para que ambas desigualdades sejam verdadeiras com o mesmo M . ■

Para todo (m, n) com $n \leq z(m)$, tem-se

$$\begin{aligned}(\tau_{m,n}(\underline{x}))_k &= \underline{x}_{k-m} + n \\ &\leq z(k-m) + M + z(m) \\ &\leq z(k) + M\end{aligned}$$

onde na última passagem foi utilizada a subaditividade de $-z(t)$, i.e., $-z(k) \leq -z(k-m) - z(m)$. Assim tomando o supremo sobre todos m, n tais que $n \leq z(m)$ tem-se

$$\underline{w}_k \leq z(k) + M$$

pondo $m = k$ e $n = \lfloor z(k) \rfloor$

$$\begin{aligned}\underline{w}_k &\geq (\tau_{m,n}(\underline{x}))_k \\ &= \underline{x}_0 + \lfloor z(k) \rfloor\end{aligned}$$

Sem perda de generalidade tome M tal que $M > |\underline{x}_0| + 1$, então

$$\begin{aligned}\underline{w}_k &\geq \underline{x}_0 + \lfloor z(k) \rfloor \\ &\geq -M + 1 + \lfloor z(k) \rfloor \\ &\geq -M + z(k)\end{aligned}$$

Assim foi provado que para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\underline{w}_k - z(k)| \leq M \tag{4.1}$$

Um argumento análogo permite concluir que

$$|\bar{w}_k - Z(k)| \leq M$$

podendo ser necessário tomar o maior M mais uma vez. Por razões que serão justificadas posteriormente, M será, além do mais, escolhido como um número inteiro.

4.3 A Solução zig-zag

Seja Q um múltiplo comum dos denominadores dos racionais ρ_0 e ρ_1 citados anteriormente, i.e., $\rho_0 Q$ e $\rho_1 Q$ são inteiros. Escolha Q grande de sorte que

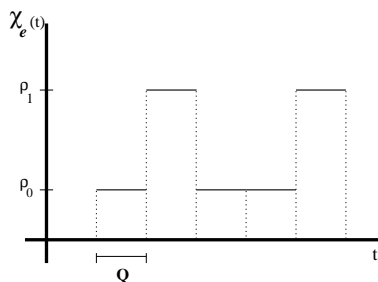
$$(\rho_1 - \rho_0)Q \geq 8M \tag{4.2}$$

Seja $e = (e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ seqüência bi-infinita de zeros e uns, i.e., $e_k \in \{0, 1\}$. Dada uma tal seqüência duas funções serão definidas, $\chi_e(t)$ e $\zeta_e(t)$.

No intervalo $jQ \leq t < (j+1)Q$ define-se

$$\chi_e(t) = \rho_{e_j}$$

i.e., $\chi_e(t) = \rho_1$ se $e_j = 1$ e $\chi_e(t) = \rho_0$ se $e_j = 0$.



A outra função é

$$\zeta_e(t) = \int_0^t \chi_e(s) ds$$

Observação 27. Para todo inteiro j , $\zeta_e(jQ)$ é um inteiro.

De fato,

$$\int_0^{jQ} \chi_e(s) ds = \sum Q\rho_0 + \sum Q\rho_1 \in \mathbb{Z}$$

Observação 28. Para a qualquer seqüência e vale a desigualdade

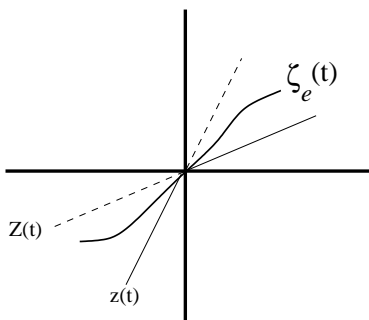
$$z(t) \leq \zeta_e(t) \leq Z(t)$$

De fato, lembre que $\rho_0 \leq \chi_e \leq \rho_1$ e portanto, para $t > 0$,

$$\int_0^t \rho_0 ds \leq \int_0^t \chi_e(s) ds \leq \int_0^t \rho_1 ds$$

$$\rho_0 t \leq \zeta_e(t) \leq \rho_1 t$$

$$z(t) \leq \zeta_e(t) \leq Z(t)$$

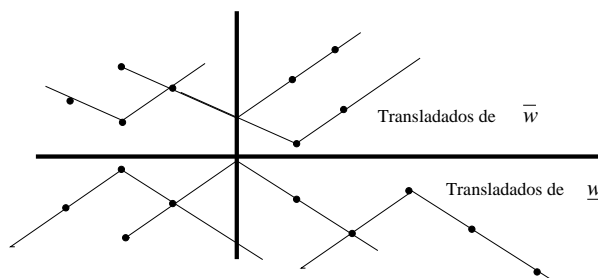


Analogamente para $t < 0$.

Agora defina

$$\underline{W}_e := \sup\{\tau_{jQ, \zeta_e(jQ)}(\underline{w}) | j \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{W}_e := \inf\{\tau_{jQ, \zeta_e(jQ)}(\overline{w}) | j \in \mathbb{Z}\}$$



Proposição 29.

$$|\underline{W}_{e,k} - \zeta_e(k)| \leq M$$

$$|\overline{W}_{e,k} - \zeta_e(k)| \leq M$$

Demonstração: Para todo $m \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$\begin{aligned}
[\tau_{jQ, \zeta_e(jQ)}(\underline{w})]_m - \zeta_e(m) &= \underline{w}_{m-jQ} + \zeta_e(jQ) - \zeta_e(m) \\
&= \underline{w}_{m-jQ} - \int_{jQ}^0 \chi_e(s) ds - \int_0^m \chi_e(s) ds \\
&= \underline{w}_{m-jQ} - z(m-jQ) + z(m-jQ) - \int_{jQ}^m \chi_e(s) ds \\
&\leq \underline{w}_{m-jQ} - z(m-jQ) \\
&\leq M
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade foi utilizada a proposição (4.1) e na penúltima, utilizou-se que $z(t) \leq \int_x^{x+t} \chi_e(s) ds$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, como $\rho_0 \leq \chi_e \leq \rho_1$, integrando tem-se:

Se $t \geq 0$,

$$z(t) = t_+ \rho_0 = t \rho_0 \leq \int_x^{x+t} \chi_e(s) ds$$

Se $t < 0$,

$$\int_{x+t}^x \chi_e(s) ds \leq \int_{x+t}^x \rho_1 = t \rho_1 = \rho_1 t_- = -z(t)$$

donde,

$$z(t) \leq \int_x^{x+t} \chi_e(s) ds$$

conforme se queria.

Voltando à desigualdade obtida $[\tau_{jQ, \zeta_e(jQ)}(\underline{w})]_m - \zeta_e(m) \leq M$ e tomando $\sup_{j \in \mathbb{Z}}$ tem-se

$$\underline{W}_{e,k} - \zeta_e(k) \leq M$$

Falta então mostrar que $\underline{W}_{e,k} - \zeta_e(k) \geq -M$. Para isto, escolha j tal que $jQ \leq m \leq (j+1)Q$

Se $e_j = 0$,

$$\begin{aligned}
 \underline{W}_{e,m} &\geq [\tau_{jQ, \zeta_e(jQ)}(\underline{w})]_m \\
 &= \underline{w}_{m-jQ} + \zeta_e(jQ) \\
 &\geq z(m-jQ) - M + \zeta_e(jQ), \quad \text{pois, } \underline{w}_{m-jQ} - z(m-jQ) \geq -M \\
 &= \rho_0 \cdot (m-jQ) + \zeta_e(jQ) - M \\
 &= \int_{jQ}^m \chi_e(s) ds + \int_0^{jQ} \chi_e(s) ds - M \\
 &= \int_0^m \chi_e(s) ds - M \\
 &= \zeta_e(m) - M
 \end{aligned}$$

Se $e_j = 1$

$$\begin{aligned}
 \underline{W}_{e,m} &\geq [\tau_{(j+1)Q, \zeta_e((j+1)Q)}(\underline{w})]_m \\
 &= \underline{w}_{m-(j+1)Q} + \zeta_e((j+1)Q) \\
 &\geq z(m-(j+1)Q) - M + \zeta_e((j+1)Q) \\
 &= -\rho_1 \cdot (m-(j+1)Q) + \zeta_e((j+1)Q) - M \\
 &= \int_{(j+1)Q}^m \chi_e(s) ds + \int_0^{(j+1)Q} \chi_e(s) ds - M \\
 &= \int_0^m \chi_e(s) ds - M \\
 &= \zeta_e(m) - M
 \end{aligned}$$

O que implica, em ambos os casos, $\underline{W}_{e,m} - \zeta_e(m) \geq -M$. Portanto,

$$|\underline{W}_{e,m} - \zeta_e m| \leq M$$

Analogamente, $|\overline{W}_{e,m} - \zeta_e(m)| \leq M$ ■

Segue diretamente das definições de \underline{W}_e e de \overline{W}_e e da periodicidade da função Δ que $\underline{W}_e - M$ é uma subsolução e que $\overline{W}_e + M$ é uma supersolução. E isto justifica o fato de M ter sido escolhido como um número inteiro no final da seção 4.2, para que as translações $\underline{W}_e - M$ e $\overline{W}_e + M$ ainda sejam sub e supersoluções.

Da proposição anterior segue que

$$\underline{W}_e - M \leq \overline{W}_e + M.$$

Logo existe pelo menos uma solução de (3.3) entre $\underline{W}_e - M$ e $\overline{W}_e + M$.

4.4 Construção de K

Denote por Σ_e o conjunto de soluções W de (3.3) tal que

$$\underline{W}_e - M \leq W \leq \overline{W}_e + M$$

A proposição anterior garante que Σ_e é não vazio.

Seja

$$\Sigma := \cup_e \Sigma_e$$

isto é, a união de todos os Σ_e onde e percorre todas as seqüências de $\{0, 1\}$.

Lembre que K tem que ser um subconjunto de $\frac{\mathbb{R}^{1+1}}{\mathbb{Z}}$, onde \mathbb{Z} age em \mathbb{R}^{1+1} por

$$(x_{-1}, x_0) + 1 = (x_{-1} + 1, x_0 + 1)$$

Defina então

$$\begin{aligned} K_e &:= \{(x_{-1}, x_0) \bmod \mathbb{Z} \mid x \in \Sigma_e\} \\ K &:= \{(x_{-1}, x_0) \bmod \mathbb{Z} \mid x \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Proposição 30. K e K_e são compactos

Demonstração: Como Σ_e está contido no intervalo ordenado $[\underline{W}_e - M, \overline{W}_e + M]$ então Σ_e é pré-compacto ².

Se W_n são soluções e $W_n \rightarrow W$ então, pela continuidade de Δ , $\Delta(W) = \Delta(\lim W_n) = \lim \Delta(W_n) = 0$, i.e., W também é solução e portanto Σ_e é fechado. Sendo pré-compacto, segue que $\Sigma_e = \{\text{soluções}\} \cap [\underline{W}_e - M, \overline{W}_e + M]$ é de fato compacto.

Cada K_e é a imagem de Σ_e pela projeção

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow \frac{\mathbb{R}^{1+1}}{\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto (x_{-1}, x_0, x_1) \pmod{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Donde segue que K_e é compacto pois π é contínua.

Σ também é compacto. Para ver isto, observe que Σ está contido em um intervalo ordenado

$$\Sigma \subset \{x \in X \mid z(k) - M \leq x_k \leq Z(k) + M\}$$

portanto Σ é pré-compacto.

Falta mostrar que Σ é fechado.

Seja $\{w^{(m)}\}_{m \geq 1}$ uma seqüência em Σ convergindo para $w^* \in \mathbf{X}$. Então, para todo m existe seqüência $e^{(m)} = \{e_k^{(m)}\}_{k \geq 1}$ de $\{0, 1\}$ tal que $w^{(m)} \in \Sigma_{e^{(m)}}$.

Agora, passando a uma subsequência se necessário, pode-se arranjar as coisas de modo que $\{e_k^{(m)}\}_{k \geq 1}$ seja eventualmente constante.

Assim, se $e_k^* = \lim_{m \rightarrow \infty} e_k^{(m)}$, para m grande $e^* = e^{(m)}$ e segue pela definição de \underline{W}_e e \overline{W}_e que

$$\begin{aligned} \underline{W}_{e^{(m)}} &\longrightarrow \underline{W}_{e^*} \\ \overline{W}_{e^{(m)}} &\longrightarrow \overline{W}_{e^*} \end{aligned}$$

²Um conjunto C é dito *pré-compacto* se dado qualquer $\varepsilon > 0$ toda cobertura do tipo $\bigcup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$ admite subcobertura finita. Uma condição suficiente para a compacidade de um conjunto pré-compacto é que ele seja fechado

Segue daí que $w^* \in \Sigma_{e^*}$ e então $w^* \in \Sigma$. Donde conclui-se que Σ é fechado e portanto compacto.

Como $K = \pi(\Sigma)$ e π é contínua, K é compacto. ■

Proposição 31. *Os conjuntos K_e são disjuntos dois a dois.*

Demonstração: Seja $(x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^{1+1}$ representando um ponto em K_e . Pode-se olhar para sua órbita pelo difeomorfismo

$$F_\Delta : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{1+1}$$

que dará uma seqüência bi-infinita $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

Por outro lado, precisa existir uma seqüência $\tilde{x} \in \Sigma$ tal que $(x_{-1}, x_0) \bmod \mathbb{Z} = \pi(\tilde{x})$. E como \tilde{x} é uma solução de (3.3), ele é unicamente determinado por suas componentes (x_{-1}, x_0, x_1) , donde fica explícito que

$$\tilde{x} = x \bmod \mathbb{Z}.$$

Portanto, a partir da proposição 29 e usando, para $k = jQ$ e $k = (j+1)Q$, o fato

$$\underline{W}_{e,k} - M < x_k < \overline{W}_{e,k} + M$$

obtemos

$$\begin{aligned} \zeta_e((j+1)Q) - 2M &< x_{(j+1)Q} < \zeta_e((j+1)Q) + 2M \\ -\zeta_e(jQ) - 2M &< -x_{jQ} < -\zeta_e(jQ) + 2M \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades,

$$\zeta_e((j+1)Q) - \zeta_e(jQ) - 4M < x_{(j+1)Q} - x_{jQ} < \zeta_e((j+1)Q) - \zeta_e(jQ) + 4M$$

E como

$$\begin{aligned}\zeta_e((j+1)Q) + \zeta_e(jQ) - \rho_{e_j}Q &= \int_{jQ}^{(j+1)Q} \chi_e(s)ds - \rho_{e_j}Q \\ &= \int_{jQ}^{(j+1)Q} \rho_{e_j} - \rho_{e_j}Q \\ &= Q\rho_{e_j} - \rho_{e_j}Q \\ &= 0\end{aligned}$$

Segue que

$$|x_{(j+1)Q} - x_{jQ} - \rho_{e_j}| < 4M$$

Agora lembre-se que $(\rho_1 - \rho_0)Q > 8M$; assim a desigualdade acima não pode ser verdadeira simultaneamente para $e_j = 0$ e para $e_j = 1$. De fato, suponha que seja válida a desigualdade para $e_j = 1$, i.e.,

$$-4M + \rho_1Q \leq \tilde{x}_{(j+1)Q} - \tilde{x}_{jQ} \leq 4M + \rho_1Q$$

Então,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{(j+1)Q} - \tilde{x}_{jQ} - \rho_0Q &\geq -4M + \rho_1Q - \rho_0Q \\ &= -4M + (\rho_1 - \rho_0)Q \\ &> -4M + 8M = 4M\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}-(\tilde{x}_{(j+1)Q} - \tilde{x}_{jQ} - \rho_0Q) &= -(\tilde{x}_{(j+1)Q} - \tilde{x}_{jQ}) + \rho_0Q \\ &\leq -(-4M + \rho_1Q) + \rho_0Q \\ &= -(\rho_1 - \rho_0)Q + 4M \\ &< -8M + 4M = -4M\end{aligned}$$

Desta duas desigualdades conclui-se que $|\tilde{x}_{(j+1)Q} - \tilde{x}_{jQ} - \rho_0Q| > 4M$. Analogamente, se a desigualdade for válida para $e_j = 0$ mostra-se que vale a desigualdade contrária para $e_j = 1$.

Em outras palavras, dado um ponto em K_e pode-se encontrar \tilde{x} , a partir de \tilde{x} , pode-se calcular cada posição e_j da seqüência e através da desigualdade acima (o valor de e_j será aquele para o qual a desigualdade se verifica). Então a seqüência e foi recuperada a partir de \tilde{x} , donde segue que dois diferentes K_e não podem se sobrepor. ■

A prova desta última proposição mostra também que existe uma aplicação contínua

$$\epsilon : K \rightarrow C = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$$

onde C é o espaço das seqüências de $\{0, 1\}$ equipado com a topologia produto. C é homeomorfo ao conjunto de Cantor. Tem-se ainda que ϵ é sobrejetiva.

Considere o *shift* σ agindo em C dado por

$$\sigma(e)_k = e_{k+1}.$$

Usando o fato que

$$w \in \Sigma_e \Rightarrow \tilde{w} = \tau_{-Q, \rho_{e_j} \cdot Q}(w) \in \Sigma_{\sigma(e)}$$

e usando também que

$$(\varphi_{\Delta})^Q(\pi(w)) = \pi(\tilde{w}),$$

verifica-se que

- (i) K é invariante por $(\varphi_{\Delta})^Q$;
- (ii) $\epsilon \circ (\varphi_{\Delta})^Q = \sigma \circ \epsilon$, i.e., $(\varphi_{\Delta})^Q$ manda K_e sobre $K_{\sigma(e)}$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\epsilon} & C \\ \varphi_{\Delta}^Q \uparrow & & \uparrow \sigma \\ K & \xrightarrow{\epsilon} & C \end{array}$$

Em outras palavras, (C, σ) é um fator de $(K, (\varphi_{\Delta})^Q)$ e portanto φ_{Δ} tem entropia topológica positiva, veja a proposição 24.

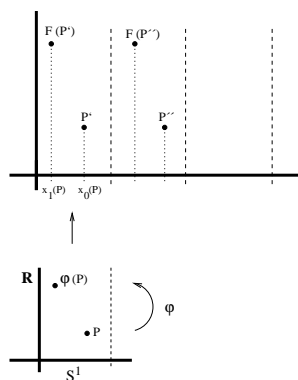
Capítulo 5

Entropia Topológica Nula e Órbitas de Birkhoff

Usando o critério descrito para obter *entropia topológica* positiva, serão estudadas aplicações twist monótonas do anel bidimensional $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ cujas entropias se anulam.

Seja $\varphi : A \rightarrow A$ uma tal aplicação e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seu levantamento tais que as condições (2.1) sejam satisfeitas.

Para cada $P \in A$ associe a seqüência $\{x_k(P)\}$, onde $x_k(P)$ é a abscissa (1^a coordenada) de $F^k(P')$ e P' é um levantamento de P .



Note que a seqüência $x_k(P)$ depende do levantamento escolhido de P , mas a seqüência $x_k(P) - x_0(P)$ não depende. Aqui, $x_0(P)$ é a primeira coordenada de $F^0(P') = I(P') = P$.

Lembrando a definição 14, observa-se que os *números de rotação de P para frente e para trás* como sendo

$$\rho_{\pm}(P) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{x_k(P) - x_0(P)}{k}$$

se eles existem. É permitido que ρ_{\pm} seja $+\infty$ ou $-\infty$.

Teorema 32. *Se φ tem entropia topológica nula então todo $P \in A$ tem número de rotação para frente e para trás.*

Teorema 33. *Se φ tem entropia topológica nula e P é um ponto periódico do tipo (p, q) com $\text{mdc}(p, q) = 1$ então a órbita de P é uma órbita de Birkhoff.*

Antes de começar a demonstrar os teoremas acima, lembre que o problema de encontrar órbitas da aplicação φ foi transformado no problema de encontrar soluções da relação de recorrência

$$\Delta(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

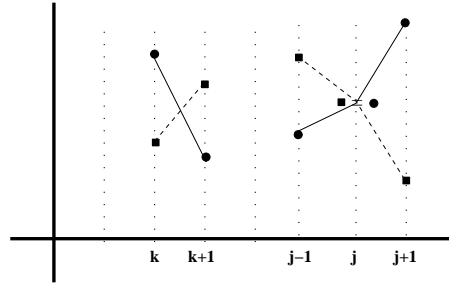
Definição 34. Sejam x e $y \in \mathbf{X}$ seqüências bi-infinitas. Diz-se que x e y se ‘interceptam em um inteiro k ’ se

$$(y_k - x_k)(y_{k+1} - x_{k+1}) < 0$$

ou

$$y_k = x_k \quad \text{e} \quad (y_{k-1} - x_{k-1})(y_{k+1} - x_{k+1}) < 0$$

veja a próxima figura.



Observação 35. *Duas seqüências x e y estão ordenadas se e somente se elas não se interceptam para nenhum inteiro k .*

Em particular, conclui-se da observação anterior que x é uma seqüência de Birkhoff se e somente se x não intercepta nenhuma de suas translações $\tau_{m,n}(x)$.

Observação 36. *Dada uma seqüência $x \in \mathbf{X}$ pode acontecer que para algum par de inteiros (m, n) , com $m > 0$, x e $\tau_{m,n}(x)$ se interceptem em infinitos inteiros positivos k_1, k_2, \dots . Isto ocorre por exemplo no caso em que x é periódica.*

Dada uma seqüência $x \in \mathbf{X}$, seja

$$J(x) := \{(m, n) \mid m > 0 \text{ e } \#(x \cap \tau_{(m,n)}(x)) = \infty\}$$

e defina o correspondente conjunto de números racionais

$$R(x) := \left\{ \frac{n}{m} \mid (m, n) \in J(x) \right\} \subset \mathbb{Q}$$

Lema 37. *Se $R(x)$ é finito, então x tem número de rotação para frente.*

Demonstração: Defina

$$\bar{\rho} := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k} \quad \text{e}$$

$$\underline{\rho} := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k}$$

Se x não tem número de rotação para frente, $\underline{\rho} < \bar{\rho}$ e portanto existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\underline{\rho} < \frac{a}{b} < \bar{\rho}$.

Escolha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus R(x)$. Portanto $\sharp(x \cap \tau_{b,a}(x)) < \infty$. E daí existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\forall j \geq k \quad x_j \geq x_{j-b} + a$$

ou

$$\forall j \geq k \quad x_j \leq x_{j-b} + a$$

No primeiro caso, i.e., se $\forall j \geq k$ tem-se $x_j \geq x_{j-b} + a$. Por indução segue que para todo $l \in \mathbb{Z}$,

$$x_{k+lb} \geq x_k + la$$

De fato, para $l = 1$,

$$x_{k+b} \geq x_{k+b-b} + a = x_k + a$$

Se vale para l ,

$$\begin{aligned} x_{k+(l+1)b} &\geq x_{k+(l+1)b-b} + a \\ &= x_{k+lb} + a \\ &\geq x_k + la + a, \quad \text{por hipótese de indução} \\ &= x_k + (l+1)a \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+lb}}{lb} &\geq \frac{x_k}{lb} + \frac{la}{lb} \\ &= \frac{x_k}{lb} + \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Tomando o $\liminf_{l \rightarrow \infty}$, conclui-se

$$\underline{\rho} \geq 0 + \frac{a}{b}$$

o que é um absurdo.

No segundo caso também tem-se uma contradição semelhante.

Logo, é necessário que $\underline{\rho} = \bar{\rho}$.

Note apenas que não está sendo excluída a possibilidade de o número de rotação para frente ser infinito. ■

Lema 38. *Se $R(x)$ contém dois ou mais elementos, então φ tem entropia topológica positiva.*

Demonstração: Sejam $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ elementos de $R(x)$. Então $(b, a), (d, c) \in J(x)$ e em particular $b, d > 0$. Suponha que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$.

Será construída uma supersolução \bar{y} cujo número de rotação para trás é $\frac{a}{b}$ e o número de rotação para frente é $\frac{c}{d}$.

Como x e $\tau_{b,a}(x)$ se interceptam infinitas vezes, precisa existir $j \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} x_j &\leq \tau_{b,a}(x)_j = x_{j-b} + a \\ x_{j+1} &> \tau_{b,a}(x)_{j+1} = x_{j+1-b} + a \end{aligned}$$

Em outras palavras precisa existir $j \leq 0$ tal que $x_i - \tau_{b,a}(x)_i$ cresça de negativo para positivo em j .

Para $i \leq j$ define-se

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_j &= x_j \\
 \bar{y}_{j-1} &= x_{j-1} \\
 &\vdots \\
 \bar{y}_{j-b+1} &= x_{j-b+1} \\
 \\
 \bar{y}_{j-b} &= x_j - a \\
 \bar{y}_{j-b-1} &= x_{j-1} - a \\
 &\vdots \\
 \bar{y}_{j-2b+1} &= x_{j-b+1} - a \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Em geral, para $t = 0, 1, \dots, b-1$ e $s \geq 0$,

$$\bar{y}_{j-sb-t} = x_{j-t} - sa$$

Espera-se que para $i \leq j-1$,

$$\Delta(\bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}) \leq 0$$

Como, por construção, a seqüência \bar{y}_i é periódica, basta verificar isto para $i = j-1, \dots, j-b$.

Para $j \geq i \geq j-b+1$ tem-se $\bar{y}_i = x_i$ e então

$$\begin{aligned}
 \Delta(\bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}) &= \Delta(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\
 &= 0 \quad \text{para } j-1 \geq i \geq j-b+2
 \end{aligned}$$

em $i = j-b+1$,

$$\begin{aligned}
 \Delta(\bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}) &= \Delta(x_j - a, x_{j-b+1}, x_{j-b+2}) \\
 &\leq \Delta(x_{j-b}, x_{j-b+1}, x_{j-b+2}), \quad \text{pois } x_j - a \leq x_{j-b} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

O cálculo é semelhante para verificar o caso $i = j - b$.

Resta então definir \bar{y}_i para $i > j$. Mas como x e $\tau_{c,d}(x)$ também se interceptam infinitas vezes, existe $k \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} x_k &\geq x_{k-d} + c \\ x_{k+1} &< x_{k-d+1} + c \end{aligned}$$

Se necessário, tome k de modo que $k > j$ e então defina

$$\bar{y}_i = x_i \quad \text{se } j \leq i \leq k$$

e para $t = 1, 2, \dots, d$ e $s > 0$

$$\bar{y}_{k+sd+t} = x_{k+t} + sc$$

Do mesmo modo que foi feito anteriormente, verifica-se que para estes casos também tem-se $\Delta(\bar{y}_{i-1}, \bar{y}_i, \bar{y}_{i+1}) \geq 0$. E portanto, \bar{y} é uma supersolução com número de rotação para frente igual a $\frac{a}{b}$ e número de rotação para trás igual a $\frac{c}{d}$.

Analogamente construa \underline{y} com número de rotação para frente igual a $\frac{a}{b}$ e número de rotação para trás igual a $\frac{c}{d}$.

\bar{y} e \underline{y} satisfazem as condições (3.4) e portanto, pelo teorema 25 φ , que é conjugada a φ_Δ , tem entropia topológica positiva. ■

Demonstração: (do teorema 32) Se φ tem entropia topológica nula, então pelo lema 38, o conjunto $R(x)$ possui no máximo um elemento para toda solução x de (3.3). Pelo lema 37, esta seqüência possui número de rotação para frente.

Considere agora a seqüência reversa $\tilde{x}_k = x_{-k}$. Então, se $\tilde{\Delta}(r, s, t) = \Delta(t, s, r)$, \tilde{x} satisfaz a relação de recorrência monótona

$$\tilde{\Delta}(\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}) = 0.$$

A aplicação correspondente a esta relação de recorrência monótona é conjugada à inversa de φ e pela proposição 21 esta inversa também possui entropia topológica nula. Donde segue que a seqüência \tilde{x} possui número de rotação para frente e portanto a seqüência x possui número de rotação para trás. ■

Demonstração: (do teorema 33) Seja $x \in \mathbf{X}$ uma seqüência periódica do tipo (p, q) . Como para todo (m, n) a seqüência $\tau_{m,n}(x)$ também é periódica do tipo (p, q) (veja observação 7), há duas possibilidades: ou x e $\tau_{m,n}(x)$ não se interceptam ou elas se interceptam infinitas vezes.

Da periodicidade também decorre que se x e $\tau_{m,n}(x)$ interceptam-se então o mesmo acontece para x e $\tau_{m+q,n+p}$. Assim se $(m, n) \in J(x)$, então $(m + q, n + p) \in J(x)$ e portanto os números racionais $\frac{n}{m}$ e $\frac{n+p}{m+q}$ pertencem a $R(x)$. Já que por hipótese φ tem entropia topológica nula, segue do lema 38 que $\frac{n}{m} = \frac{n+p}{m+q}$. Mas isto implica $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$.

A outra hipótese, $\text{mdc}(p, q) = 1$, garante que existe um inteiro $l \geq 1$ tal que $(m, n) = (lq, lp)$. Mas se isto fosse verdade, concluir-se-ia que $\tau_{m,n}(x) = x$ o que contradiz a hipótese de que x e $\tau_{m,n}(x)$ se interceptam.

A contradição decorre do fato de supor que x e $\tau_{m,n}(x)$ se interceptam para algum (m, n) , então x não intercepta nenhuma de suas translações, o que significa que x é uma órbita de Birkhoff. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ANGENENT, S. B., *Monotone recurrence relations, their Birkhoff orbits and topological entropy*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, 10, (1990), 15-41.
- [2] CARNEIRO, M. J. D., RAGAZZO, C. G., ZANATA, S. A., *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*, 25^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005.
- [3] HALL, G. R., *A topological version of a theorem of Mather on twist maps*, Ergodic Theory & Dynamical Systems, 4, (1984), 585-603.
- [4] KATOK, A., HASSELBLATT, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] MAÑÉ R., *Teoria Ergódica*, IMPA, 1983.
- [6] MUNKRES J., *Topology* Prentice Hall, 1975.

Índice Remissivo

- (n, ϵ) -gerador, 26
- φ_Δ , 12
- órbita, 6
 - Birkhoff, 12
- conjugada, 27
- entropia topológica, 25, 26, 41
 - positiva, 27
- fator, 27
- número de rotação, 20
 - para frente, 20, 23, 42
 - para trás, 20, 23, 42
- ordem parcial, 13
- pré-compacto, 37
- relação de recorrência Δ , 10
- seqüência Birkhoff, 13
- solução, 11
- subsolução, 15
- supersolução, 15
- tipo (p, q) , 14
- translação, 13
- twist, 5
 - infinito, 5
 - monótona, 5
 - uniforme, 5