

Índice

Resumo

Utilizando métodos variacionais, apresentamos um resultado de existência e multiplicidade de soluções do tipo multi-bump para uma equação de Schrödinger não linear

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

onde $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ se $n \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $n = 1, 2$; e a, b são funções contínuas; $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função incógnita e $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ denota o operador Laplaciano em \mathbb{R}^n . Mostra-se que se o domínio Ω consiste de k componentes conexas, Ω_j , para cada subconjunto não-vazio $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ existe pelo menos uma solução positiva u_λ de (P_λ) verificando

$$\left| \int_{\Omega_j} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c(\Omega_j) \right| \rightarrow 0,$$

quando $\lambda \rightarrow \infty, \forall j \in J$, e

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_J} (|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2) \rightarrow 0, \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

onde $\Omega_J = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ e $c(\Omega_j)$ é o nível minimax do funcional energia associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u^p & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_j, \forall j \in J \\ u > 0 & \text{em } \Omega_j. \end{cases}$$

Abstract

By applying variational techniques, it is established the existence and multiplicity of "mult-bump" solutions type for the nonlinear Schrödinger equations

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ if $n \geq 3$ and $p \in (1, \infty)$ if $n = 1, 2$; and a, b are continuous functions; $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a unknown function and $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ denotes the Laplacian operator in \mathbb{R}^n . It is shown that if Ω has k connected components, Ω_j , for each noempty subset $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ there exists at least one positive solution u_λ of (P_λ) verifying

$$\left| \int_{\Omega_j} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c(\Omega_j) \right| \rightarrow 0,$$

as $\lambda \rightarrow \infty, \forall j \in J$, and

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_J} (|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2) \rightarrow 0, \text{ as } \lambda \rightarrow \infty,$$

where $\Omega_J = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ and $c(\Omega_j)$ is the minimax level of the energy functional associated to the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u^p & \text{in } \Omega_j \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_j, \forall j \in J \\ u > 0 & \text{in } \Omega_j. \end{cases}$$

Notações

1. $L^p(\Omega)$ denota o espaço de funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, \quad p \in [1, \infty)$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|,$$

de maneira análoga se $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2. $H_0^1(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev, o qual é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx.$$

3. $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev, munido da norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u(x)|^2 + u(x)^2) dx.$$

4. $\int_{\Omega} f$ denota $\int_{\Omega} f(x) dx$.

5. Trabalharemos no seguinte espaço de funções

$$E(\mathbb{R}^n) \equiv E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} a(x) u^2 < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (a(x) + 1) u^2, \quad \text{para } u \in E,$$

o qual vê-se facilmente que $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Hilbert e $E \subset H^1(\mathbb{R}^n)$.

6. Também, escreveremos para um conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$

$$E(D) = \left\{ u \in H^1(D) : \int_D a(x) u^2 < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{E(D)}^2 = \int_D |\nabla u|^2 + (a(x) + 1)u^2.$$

Observe que quando D é um conjunto limitado, $E(D) = H^1(D)$ e $\|\cdot\|_{E(D)}$ é equivalente a $\|\cdot\|_{H^1(D)}$.

7. \rightharpoonup , \rightarrow , q.t.p. denotam, respectivamente, a convergência fraca, forte e quase todo ponto.

0 Introdução

Nessa dissertação, iremos estudar o artigo do Ding e Tanaka [?], onde foi mostrado a existência e multiplicidade de soluções da equação de Schrödinger não-linear

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = |u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

onde $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ se $n \geq 3$ e $p \in (1, \infty)$ se $n = 1, 2$, $a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas e u é não-negativa em \mathbb{R}^n . Consideremos a multiplicidade da solução positiva quando o parâmetro λ é grande.

É sabido que as soluções não negativas de (P_λ) podem ser caracterizadas como pontos críticos do funcional $\Psi_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi_\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} (\lambda a(x) + b(x)) u^2 - \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} \right] dx,$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Quando o parâmetro λ é grande, o "poço" potencial Ω desempenha um importante papel e o seguinte problema em Ω aparecerá como um problema limite de (P_λ)

$$(0.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + b(x)u = |u|^{p-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cujas soluções não-negativas são caracterizadas como pontos críticos de $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I_\Omega(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} b(x) |u|^2 - \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} \right] dx. \quad (0.2)$$

Sabemos que (0.1) tem solução positiva segundo a condição **(B')**, ou seja,

(B') O primeiro auto-valor do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = \mu u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é positivo.

Em outras palavras, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} u^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + b(x)u^2, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que **(B')** é sempre válido se $b(x) \geq 0$ em Ω (veja [?, Prop 1.1]).

Além disso, quando o domínio Ω é limitado, Rabinowitz em [?] provou que o funcional I_{Ω} satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha (veja Apêndice), portanto o problema (P_{λ}) , num domínio Ω limitado e $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$, tem pelo menos uma solução não trivial.

Em 1963, Pohozaev em [?] mostrou a não existência de solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda|u|^{p-1}u & \text{em } D \subset \mathbb{R}^n \\ u \in H_0^1(D) & \text{e } u \neq 0, \end{cases}$$

onde D é um domínio limitado, m e λ são constantes positivas e $p > \frac{n+2}{n-2}$, usando a identidade

$$\frac{1}{2} \int_{\partial D} |\nabla u|^2 \sigma \cdot \nu d\sigma = n \int_D G(u) dx - \frac{n-2}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx.$$

Além disso, o problema acima quando $D = \mathbb{R}^n$, também não tem solução para $p > \frac{n+2}{n-2}$. Isto segue da identidade do tipo Pohozaev [?] (vide [?]) descrita abaixo

$$\frac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = n \int_{\mathbb{R}^n} G(u) dx,$$

onde $G(u) = \int_0^u g(s) ds$, com $g(s) = \lambda|s|^{p-1}s - ms$.

Cabe observar que se $a(x) = 0$ e $b(x) = 1$, Kwong em [?] provou a existência e unicidade de solução positiva para o problema (P_{λ}) no \mathbb{R}^n .

Por outro lado, Berestycki e Lions em [?] provaram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em } \mathbb{R}^n \\ u \in H^1(\mathbb{R}^n) & \text{e } u \neq 0, \end{cases}$$

possui solução positiva, esfericamente simétrica e decrescente, onde a função g satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} &= -m < 0, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s^l} &= 0 \text{ onde } l = \frac{n+2}{n-2}\end{aligned}$$

e existe $\xi > 0$ tal que $G(\xi) > 0$.

Bartsch e Wang em [?] estudaram o problema (P_λ) considerando o caso $b(x) = 1$, e supondo as seguintes condições

(A1) $a \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $a(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto conhecido por "poço" potencial é dado por $\Omega := \text{int } a^{-1}(0)$, o qual supomos que é um conjunto não-vazio, aberto e limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$ e $a^{-1}(0) = \bar{\Omega}$.

(A2) Existe $M_0 > 0$ tal que a medida de Lebesgue do conjunto $A := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq M_0\}$ é finita, que denotaremos por $\text{med}(A) < \infty$ ou $|A| < \infty$.

Além disso, em [?] é mostrado a existência da solução de energia mínima u_λ de (P_λ) para λ grande, e u_λ converge fortemente em $H^1(\mathbb{R}^n)$, quando $\lambda \rightarrow \infty$, para a solução de energia mínima do problema (0.1) em um domínio limite Ω . Aqui, define-se que $u \in E$ é uma solução de energia mínima de (P_λ) se, e somente se,

$$\Psi_\lambda(u) = c_\lambda := \inf\{\Psi_\lambda(v); v \in E \setminus \{0\} \text{ é uma solução de } (P_\lambda)\}.$$

Também dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução energia mínima de (0.1) se, e somente se,

$$I_\Omega(u) = c(\Omega) := \inf\{I_\Omega(v); v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \text{ é uma solução de (0.1)}\}. \quad (0.3)$$

Os valores c_λ e $c(\Omega)$ são chamados níveis de energia mínima.

Bartsch e Wang em [?] também mostraram a existência de pelo menos um número finito de soluções positivas para λ grande, igual à categoria de Ω , denotado por $cat\Omega$, se p é próximo a $\frac{n+2}{n-2}$. Aqui $cat\Omega$ denota categoria de Ljusternik-Schnirelman de Ω (veja [?, pag 82]).

Nos referimos ao Clapp e Ding em [?] para o estudo de um problema análogo envolvendo expoentes críticos de Sobolev, ou seja, o problema (P_λ) com $p = \frac{n+2}{n-2}$.

Em [?], Alves e Ding mostraram que os resultados obtidos em [?] ainda ocorrem para uma classe de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano para $p \geq 2$, onde o operador p -Laplaciano é definido como $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$.

Também referimos ao Bartsch e Wang em [?] e Bartsch, Wang e Pankov em [?] onde obtiveram resultados de existência e multiplicidade de soluções admitindo não só as condições **(A1)** e **(A2)** mas também a condição $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} b(x) > 0$. Em verdade, eles mostram que existe uma função $\Lambda : N \rightarrow (0, \infty)$, $k \mapsto \Lambda(k)$ tal que se $\lambda \geq \Lambda(k)$ então (P_λ) tem pelo menos k soluções que podem mudar de sinal. Observamos que seus resultados foram estendidos por Figueiredo e Ding em [?] a uma situação onde b pode mudar de sinal e envolvendo expoentes críticos de Sobolev.

Nessa dissertação, consideramos o caso onde Ω consiste de k componentes

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$$

e estudaremos a multiplicidade de soluções positivas.

Aqui observamos que a condição **(B')** pode ser estabelecida de outra maneira como segue

(B') Para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, o primeiro autovalor do seguinte problema de valor de contorno é positivo

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = \mu u & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (0.4)$$

Quando $b(x) = 1$, podemos aplicar o resultado de Bartsch e Wang em [?] a esta situação. Assim o problema (P_λ) tem uma solução de energia mínima u_λ e esta tende à solução de energia mínima u_0 de

$$-\Delta u + b(x)u = u^p \text{ em } \Omega = \bigcup_{j=1}^k \Omega_j \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Como

$$I_\Omega(u) = \sum_{j=1}^k I_{\Omega_j}(u), \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega),$$

então temos que $c(\Omega) = \min_{j=1,2,\dots,k} c(\Omega_j)$.

Aqui usamos a notação $I_{\Omega_j}(u)$ e $c(\Omega_j)$ analogamente à aquelas usadas em (0.2) e (0.3).

Assim, existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $c(\Omega) = c(\Omega_{j_0})$ e a função limite u_0 satisfaz

(i) $u_0|_{\Omega_{j_0}}$ é uma solução energia mínima de

$$\begin{cases} -\Delta v + b(x)v = v^p & \text{em } \Omega_{j_0}, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega_{j_0}. \end{cases}$$

(ii) $u_0(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_{j_0}$.

É natural a seguinte pergunta: Dado $J \subset \{1, 2, \dots\}$ existe uma família u_λ que converge para a solução de energia mínima em cada Ω_j e para 0 fora de Ω_J ? Isto é o tópico principal desse artigo e a resposta é afirmativa. Além disso, podemos construir soluções do tipo multi-bump.

O principal resultado deste trabalho é o seguinte, o qual é devido a Ding e Tanaka [?].

A fim de enunciar o resultado acima, assumimos as seguintes condições para a função b

(B1) $b \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(B2) Existe uma constante $M_1 > 1$ tal que $|b(x)| \leq M_1(a(x) + 1)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 0.1 (Ding e Tanaka) *Assumindo (A1), (A2), (B1), (B2) e Ω tendo k componentes conexas, tal que (B') é válido. Então, para cada $\varepsilon > 0$ e algum subconjunto J não-vazio de $\{1, 2, \dots, k\}$, existe $\Lambda = \Lambda(\varepsilon) > 0$ tal que, para cada $\lambda \geq \Lambda$, o problema (P_λ) tem uma solução positiva $u_\lambda \in E$ satisfazendo*

$$\left| \int_{\Omega_j} |\nabla u_\lambda|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c(\Omega_j) \right| \leq \varepsilon, \text{ para } j \in J \quad (0.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_J} (|\nabla u_\lambda|^2 + u_\lambda^2) \leq \varepsilon, \quad (0.6)$$

onde $\Omega_J = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$. Além disso, para cada $\lambda_n \rightarrow \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} , tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge fortemente para a função u em $H^1(\mathbb{R}^n)$, que satisfaz $u(x) = 0$ para $x \notin \Omega_J$ e a restrição $u|_{\Omega_j}$ em Ω_j é a solução de energia mínima de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u^p & \text{em } \Omega_j \\ u > 0 & \text{em } \Omega_j \\ u|_{\partial\Omega_j} = 0 & \text{para todo } j \in J. \end{cases} \quad (0.7)$$

Observação 0.1 *Observe que o caso $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} (\lambda a(x) + b(x)) < 0$ é permitido no Teorema 0.1. Nos argumentos dos artigos [?], [?], [?] e [?] a positividade do ínfimo do potencial $V_\lambda(x) := \lambda a(x) + b(x)$ é importante, logo Ding e Tanaka em [?] estendem os resultados deles.*

Corolário 0.1 *Segundo as hipóteses do Teorema 0.1, existe $\Lambda > 0$ tal que, para cada $\lambda \geq \Lambda$, o problema (P_λ) tem pelo menos $2^k - 1$ soluções positivas.*

Observação 0.2 *A multiplicidade do Teorema 0.1 resulta do Corolário 0.1. E ela é diferente "in natura" da multiplicidade obtida em [?]. Em [?], eles consideram essencialmente o caso onde Ω é conexo e mostram a existência de $\text{cat}\Omega$ soluções positivas para p próximo ao expoente crítico $\frac{n+2}{n-2}$ e λ grande. No conjunto aqui tratado, o número de componentes conexas de Ω é essencial e não se precisa que p esteja próximo ao expoente crítico $\frac{n+2}{n-2}$. A demonstração do Teorema 0.1 é variacional e usa idéias de Del Pino e Felmer [?] e Séré [?]. Os argumentos podem ser esboçados como segue: Para um dado subconjunto $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$, modifica-se o termo não-linear u^p como em [?] para evitar soluções convergindo para uma solução não-nula em $\Omega_j (j \notin J)$ e obter a compacidade. Posteriormente, se aplica uma idéia de [?]. Aqui o valor minimax $b_{\lambda, J}$ definido pelo funcional modificado na seção 3.2 satisfaz*

$$b_{\lambda, J} \rightarrow \sum_{j \in J} c(\Omega_j) \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

e é importante fazer uma análise bastante precisa do fluxo de deformação para o funcional modificado (Proposição 4.2). Observamos que argumentos análogos são também usados para o estudo de equações elípticas periódicas e também para problemas de perturbação singular. Veja, por exemplo, Coti-Zelati e Rabinowitz [?], Gui [?] e Li [?].

Observação 0.3 *Alves em [?], ele estendeu resultados de Ding e Tanaka [?], usando argumentos diferentes daqueles usados em [?], uma vez que o operador p -Laplaciano não é linear.*

1 Definições e o Operador $-\Delta + (\lambda a + b)$

Ao supormos (\mathbf{B}') , para cada $j \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ podemos encontrar um subconjunto aberto Ω'_j com fronteira suave tal que

(i) $\overline{\Omega}_j \subset \Omega'_j$ para todo j , onde $\overline{\Omega}_j$ é o fecho de Ω_j .

(ii) $\overline{\Omega'_j} \cap \overline{\Omega'_{j'}} = \emptyset$ para todo $j \neq j'$.

Nesta seção será discutida a positividade do operador $-\Delta + (\lambda a + b)$ agindo no espaço $E(D)$, onde D é um dos seguintes conjuntos

$$D = \mathbb{R}^n, \Omega'_j (j = 1, 2, \dots, k) \text{ ou } \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j (J \subset \{1, 2, \dots, k\}) \quad (1.1)$$

A seguinte proposição é uma das chaves da prova.

Proposição 1.1 *Existem $\lambda_1 \geq 1$ e $C_1 > 0$ tais que para cada conjunto D definido em (1.1) e para cada $\lambda \geq \lambda_1$ tem-se*

$$\|u\|_{L^2(D)}^2 \leq C_1 \int_D |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2, \forall u \in E(D),$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado regular.

A prova da Proposição 1.1 é bastante longa. Observe que se supusermos que $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} b(x) > 0$, teremos a conclusão da Proposição facilmente.

Primeiramente, lidaremos com o primeiro caso $D = \Omega'_j (j \in \{1, 2, \dots, k\})$. Observe que $E(\Omega'_j) = H^1(\Omega'_j)$, desde que Ω'_j seja limitado.

Consideremos o seguinte problema de auto-valor (de Neumann)

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = \mu u & \text{em } \Omega'_j \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{na } \partial\Omega'_j. \end{cases} \quad (1.2)$$

Denotaremos o primeiro auto-valor de (1.2) por $\mu_{j\lambda}$, (vide [?] ou [?]). Observe que $\mu_{j\lambda}$ é estritamente crescente em função de λ . De fato, sejam $\lambda_1 \leq \lambda_2$, então temos que

$$\lambda_1 a(x) + b(x) \leq \lambda_2 a(x) + b(x), \quad \forall x \in \Omega'_j,$$

pois $a(x) \geq 0$. Portanto, pela caracterização variacional dos auto-valores $\mu_{j\lambda}$ dada por

$$\mu_{j\lambda} = \inf_{u \in H^1(\Omega'_j), \|u\|_{L^2(\Omega'_j)}=1} \int_{\Omega'_j} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2,$$

temos que $\mu_{j\lambda}$ é estritamente crescente em função de λ .

Para provar a Proposição 1.1 para $D = \Omega'_j$, é suficiente mostrar que $\mu_{j\lambda} > 0$ para $\lambda > 0$ grande.

Lema 1.1 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_{j\lambda} = \mu_{0j}$ onde μ_{0j} é o primeiro auto-valor de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = \mu u & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_j \end{cases}$$

Demonstração: Pela caracterização variacional do primeiro auto-valor, temos

$$\begin{aligned} \mu_{j\lambda} &\leq \inf_{u \in H_0^1(\Omega_j), \|u\|_{L^2(\Omega'_j)}=1} \int_{\Omega'_j} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2 \\ &= \inf_{u \in H_0^1(\Omega_j), \|u\|_{L^2(\Omega_j)}=1} \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 \\ &= \mu_{0j}, \end{aligned}$$

onde a desigualdade acima se deve ao fato de que, para cada $u \in H_0^1(\Omega_j)$ podemos definir

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{se } x \in \Omega_j \\ 0 & \text{se } x \in \Omega'_j \setminus \Omega_j, \end{cases}$$

onde $\bar{u} \in H_0^1(\Omega'_j)$. Logo, podemos identificar $H_0^1(\Omega_j)$ como um subespaço de $H^1(\Omega'_j)$.

Assim, temos $\mu_{j\lambda} \leq \mu_{0j}$ para todo $\lambda \geq 1$. Para concluir o Lema 1.1 é suficiente mostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_{j\lambda} \geq \mu_{0j}$. Argumentaremos por contradição. Suponha que

$$\bar{\mu} := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_{j\lambda} < \mu_{0j}, \quad (1.3)$$

e note que esse limite acima existe pelo fato de $\mu_{j\lambda}$ ser crescente e limitada superiormente.

Seja u_λ uma auto-função associada ao auto-valor $\mu_{j\lambda}$, tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda + (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda = \mu_{j\lambda} u_\lambda & \text{em } \Omega'_j \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial n} = 0 & \text{na } \partial\Omega'_j. \end{cases} \quad (1.4)$$

Podemos supor que

$$\|u_\lambda\|_{L^2(\Omega'_j)} = 1. \quad (1.5)$$

Multiplicando a equação (1.4) por u_λ e integrando sobre Ω'_j , temos que

$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 + \int_{\Omega'_j} (\lambda a(x) + b(x))u_\lambda^2 = \mu_{j\lambda} \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega'_j)}^2.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\lambda\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 + \lambda \int_{\Omega'_j} a(x)u_\lambda^2 &\leq \left(\max_{x \in \Omega'_j} |b(x)| + \mu_{j\lambda} \right) \|u_\lambda\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 \\ &\leq \max_{x \in \Omega'_j} |b(x)| + \bar{\mu}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde a última parte da desigualdade acima passa a não depender de λ .

Como (u_λ) é limitado em $H^1(\Omega'_j)$, podemos assumir que para alguma sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$ e algum $u_0 \in H^1(\Omega'_j)$ temos

$$u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } H^1(\Omega'_j) \quad (1.7)$$

$$u_{\lambda_n} \longrightarrow u_0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega'_j) \quad (1.8)$$

$$u_{\lambda_n} \longrightarrow u_0 \text{ quase todo ponto em } \Omega'_j. \quad (1.9)$$

Por (1.5) e (1.8), observe que $\|u_0\|_{L^2(\Omega'_j)} = 1$ e $u_0 \neq 0$.

Afirmamos que $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$.

De fato, segue de (1.6) que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \int_{\Omega'_j} a(x) u_{\lambda_n}^2 < \infty$. Assim,

$$\int_{\Omega'_j \setminus \Omega_j} a(x) u_0^2 = \int_{\Omega'_j} a(x) u_0^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_j} a(x) u_{\lambda_n}^2 = 0,$$

isto é, $u_0(x) = 0$ em $\Omega'_j \setminus \Omega_j$, pois $a(x) = 0$ em Ω_j .

Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j)$, temos $\varphi(x) = 0$ em $\Omega'_j \setminus \Omega_j$ e por (1.4) segue-se que

$$\int_{\Omega_j} \nabla u_{\lambda_n} \nabla \varphi + b(x) u_{\lambda_n} \varphi = \mu_{j\lambda_n} \int_{\Omega_j} u_{\lambda_n} \varphi.$$

Assim, pela convergência fraca temos que

$$\int_{\Omega_j} \nabla u_0 \nabla \varphi + b(x) u_0 \varphi = \bar{\mu} \int_{\Omega_j} u_0 \varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j)$, o que nos diz que $u_0 \in H_0^1(\Omega_j)$ é uma auto função do problema de auto valor (0.4) e $\bar{\mu}$ é um de seus auto valores. Contudo, $\bar{\mu} < \mu_{0j}$ o que contradiz o fato de μ_{0j} ser o primeiro auto-valor de (0.4).

Logo, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_{j\lambda} = \mu_{0j}$; o que conclui a prova do Lema 1.1. \square

Demonstração da Proposição 1.1 No caso $D = \Omega'_j$: Escolhendo $\lambda_0 \geq 1$ suficientemente grande tal que $\mu_{j\lambda_0} \geq \frac{1}{2}\mu_{0j}$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ (veja Lema 1.1). Sendo $C' := \frac{1}{2} \min\{\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0k}\} > 0$, a conclusão segue pondo $C_1 = \frac{1}{C'}$ e $\lambda \geq \lambda_0$. \square

Demonstração da Proposição 1.1 No caso $D = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^k \Omega'_j$: Denotaremos

$W' = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^k \Omega'_j$ e para $\mu \in (0, M_0]$ escreveremos

$$A'_\mu = \{x \in W' : a(x) \leq \mu\}.$$

Desde que $a(x) > 0$ em W' , temos por **(A2)** que

$$\text{med}(A'_\mu) \longrightarrow 0 \text{ quando } \mu \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Também observe que para algum $\mu \in (0, M_0]$ existe $\lambda_0(\mu) \geq 1$ tal que

$$1 \leq \lambda a(x) + b(x) + M_2 \chi_{A'_\mu}(x) \text{ para } x \in W' \text{ e } \lambda \geq \lambda_0(\mu), \quad (1.11)$$

onde $M_2 = M_1(M_0 + 1) + 1$ e

$$\chi_{A'_\mu}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A'_\mu \\ 0 & \text{se } x \notin A'_\mu. \end{cases}$$

De fato, se $x \in A'_\mu$, então $a(x) \leq \mu$ e por **(B2)**,

$$|b(x)| \leq M_1(a(x) + 1) \leq M_1(M_0 + 1).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1 + b(x) + |b(x)| \leq b(x) + M_2 \\ &\leq \lambda a(x) + b(x) + M_2. \end{aligned}$$

Desse modo, a verificação de (1.11) segue-se para $x \in A'_\mu$ e $\lambda \geq 1$.

Agora, se $x \in W' \setminus A'_\mu$, temos que $a(x) > \mu$. Definindo $\lambda_0(\mu) = M_1(1 + \frac{1}{\mu}) + \frac{1}{\mu}$ por **(B2)** temos que

$$\begin{aligned} |b(x)| + 1 &\leq M_1(a(x) + 1) + 1 \\ &\leq \left(M_1 \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\mu} \right) a(x) \\ &= \lambda_0(\mu) a(x) \leq \lambda a(x), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0(\mu)$. A penúltima desigualdade acima segue do fato de $\frac{a(x)}{\mu} > 1$.

Assim, a verificação de (1.11) segue.

Escolhemos $r \in \left(2, \frac{2n}{n-2}\right)$ para $n \geq 3$ e $r \in (2, \infty)$ para $n = 1, 2$. Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_{A'_\mu} u^2 &\leq \left(\int_{A'_\mu} 1 \right)^{1-\frac{2}{r}} \left(\int_{A'_\mu} |u|^r \right)^{\frac{2}{r}} \\ &= |A'_\mu|^{1-\frac{2}{r}} \left(\int_{A'_\mu} |u|^r \right)^{\frac{2}{r}} \\ &\leq |A'_\mu|^{1-\frac{2}{r}} \|u\|_{L^r(W')}^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Sobolev, a saber, $\|u\|_{L^r(W')} \leq C_* \|u\|_{H^1(W')}$, $C_* > 0$ teremos que

$$\begin{aligned} \int_{A'_\mu} u^2 &\leq C_*^2 |A'_\mu|^{1-\frac{2}{r}} \|u\|_{H^1(W')}^2 \\ &= C_*^2 |A'_\mu|^{1-\frac{2}{r}} \left(\int_{W'} |\nabla u|^2 + u^2 \right). \end{aligned}$$

No que segue, escrevemos $C_\mu = C_*^2 |A'_\mu|^{1-\frac{2}{r}}$.

Por (1.10), concluímos que $C_\mu \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0$.

Usando (1.11), temos para $\lambda \geq \lambda_0(\mu)$ que

$$\begin{aligned} \int_{A'_\mu} u^2 &\leq C_\mu \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x) + M_2 \chi_{A'_\mu}) u^2 \\ &\leq C_\mu \left(\int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x)) u^2 + M_2 \int_{A'_\mu} u^2 \right). \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$(1 - M_2 C_\mu) \int_{A'_\mu} u^2 \leq C_\mu \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x)) u^2.$$

Escolhemos $\mu_0 \in (0, M_0]$ suficiente pequeno tal que

$$M_2 C_{\mu_0} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Definimos $\lambda_1 = \lambda_0(\mu_0)$. Para $\lambda \geq \lambda_1$ temos

$$\frac{1}{2} \int_{A'_{\mu_0}} u^2 \leq C_{\mu_0} \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x)) u^2. \quad (1.13)$$

Agora estimamos $\|u\|_{L^2(W')}$.

Por (1.11) temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(W')} &\leq \int_{W'} (\lambda a(x) + b(x))u^2 + M_2 \int_{A'_{\mu_0}} u^2 \\ &\leq \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2 + M_2 \int_{A'_{\mu_0}} u^2. \end{aligned}$$

Por (1.12) e (1.13),

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(W')} &\leq (1 + 2M_2C_{\mu_0}) \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2 \\ &\leq 2 \int_{W'} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração no caso $D = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega'_j$. □

Demonstração da Proposição 1.1 No caso $D = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j$ ($J \subset \{1, 2, \dots, k\}$):

Observamos que quando $J = \emptyset$ então $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j = \mathbb{R}^n$

Para algum subconjunto $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$, escrevemos $J' = \{1, 2, \dots, k\} \setminus J$. Então,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j)}^2 &= \sum_{j \in J'} \|u\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^k \Omega'_j)}^2 \\ &\leq C_1 \left(\sum_{j \in J'} \int_{\Omega'_j} + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^k \Omega'_j} \right) (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2) \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} \Omega'_j} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2. \end{aligned}$$

O que conclui a Proposição 1.1. □

Pelo Lema 1.1 podemos ver que para cada conjunto D dado em (1.1) a forma quadrática definida por

$$\begin{aligned} E(D) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_D |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2, \end{aligned}$$

é positiva definida em $E(D)$ para $\lambda \geq \lambda_1$.

Podemos ainda definir a norma em $E(D)$ por

$$\|u\|_{\lambda,D}^2 = \int_D |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2 \text{ para } \lambda \geq \lambda_1.$$

Quando $D = \mathbb{R}^n$ podemos simplificar a notação para $\|\cdot\|_\lambda = \|\cdot\|_{\lambda,\mathbb{R}^n}$.

Escolhendo λ_1 suficientemente grande, podemos supor que

$$\lambda_1 \geq 2M_1 \left(1 + \frac{1}{M_0}\right). \quad (1.14)$$

Observamos que (1.14) e **(B2)** implicam que se $a(x) \geq M_0$ então

$$\begin{aligned} 2|b(x)| &\leq 2M_1(a(x) + 1) \\ &\leq 2M_1 \left(1 + \frac{1}{M_0}\right) a(x) \leq \lambda_1 a(x). \end{aligned}$$

Assim, $a(x) \geq M_0$ e isso acarreta que

$$|b(x)| \leq \lambda a(x) + b(x) \text{ para } \lambda \geq \lambda_1. \quad (1.15)$$

O seguinte corolário mostra que as normas $\|\cdot\|_{\lambda,D}$ e $\|\cdot\|_{E(D)}$ são equivalentes.

Corolário 1.1 *Existe $C_2 > 0$ independente de $\lambda \geq \lambda_1$ tal que, para todo conjunto D dado em (1.1) e para cada $u \in E(D)$, temos*

$$\int_D |b(x)|u^2 \leq C_2 \|u\|_{\lambda,D}^2, \quad (1.16)$$

$$\int_D a(x)u^2 \leq C_2 \|u\|_{\lambda,D}^2. \quad (1.17)$$

Assim, existem constantes $C_{3,\lambda}$ e $C'_{3,\lambda} > 0$ tais que

$$C_{3,\lambda} \|u\|_{E(D)} \leq \|u\|_{\lambda,D} \leq C'_{3,\lambda} \|u\|_{E(D)} \text{ para todo } u \in E(D). \quad (1.18)$$

Demonstração: Primeiro mostraremos (1.16). Por (1.15), temos

$$\begin{aligned} \int_{x \in D; a(x) \geq M_0} |b(x)|u^2 &\leq \int_{x \in D; a(x) \geq M_0} (\lambda a(x) + b(x))u^2 \\ &\leq \|u\|_{\lambda, D}^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por outro lado, por **(B2)** temos

$$\begin{aligned} \int_{x \in D; a(x) \leq M_0} |b(x)|u^2 &\leq \int_{x \in D; a(x) \leq M_0} M_1(1 + a(x))u^2 \\ &\leq M_1(1 + M_0)\|u\|_{L^2(D)}^2 \\ &\leq M_1(1 + M_0)C_1\|u\|_{\lambda, D}^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Então combinando (1.19) e (1.20) temos (1.16). Para (1.17) fazemos

$$\begin{aligned} \int_D a(x)u^2 &\leq \int_D \lambda a(x)u^2 \\ &\leq \int_D (\lambda a(x) + b(x))u^2 + \int_D |b(x)|u^2 \\ &\leq \|u\|_{\lambda, D}^2 + \int_D |b(x)|u^2. \end{aligned}$$

Então (1.17) segue de (1.16). Podemos mostrar facilmente (1.18) combinando (1.16) e (1.17) com a Proposição 1.1. \square

No que segue usamos $\|\cdot\|_{\lambda, D}$ como a norma de $E(D)$. Também usamos que $E(\Omega'_j) = H^1(\Omega'_j)$ para $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. A dependência em λ da norma $\|\cdot\|_{\lambda, D}$ é essencial em nosso argumento. Usamos a seguinte desigualdade frequentemente na prova do resultado principal.

Corolário 1.2 *Existem $\delta_0, \nu_0 > 0$ tais que para cada conjunto D dado em (1.1) temos*

$$\delta_0\|u\|_{\lambda, D}^2 \leq \|u\|_{\lambda, D}^2 - p\nu_0\|u\|_{L^2(D)}^2 \text{ para todo } u \in E(D) \text{ e } \lambda \geq \lambda_1. \quad (1.21)$$

Demonstração: Observe que (1.21) é equivalente a

$$p\nu_0 \|u\|_{L^2(D)}^2 \leq (1 - \delta_0) \|u\|_{\lambda, D}^2.$$

A desigualdade acima segue da proposição 1.1, escolhendo ν_0 e δ_0 adequados. \square

Observação 1.1 *Na demonstração da Proposição 1.1, o fato de que $a(x) > 0$ na fronteira $\partial\Omega'_j$ é importante. Uma desigualdade análoga não vale em $H^1(\Omega_j)$. De fato, considerando $b(x) \equiv 0$ e $u(x) \equiv 1$, temos $\|u\|_{L^2(\Omega_j)}^2 = \text{med}(\Omega_j)$ e $\|u\|_{1, \Omega_j}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_j)}^2 = 0$.*

2 Um Funcional Modificado e a Condição de Palais-Smale

Nesta seção introduzimos uma modificação da não-linearidade u^p como em Del Pino-Felmer [?] para obter uma família de soluções descritas no Teorema 0.1. Também verificamos a condição de Palais-Smale para o funcional correspondente.

Seja $\nu_0 > 0$ uma constante dada no Corolário 1.2 e definimos $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(\xi) = \begin{cases} \min\{\xi^p, \nu_0\xi\} & \text{para } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{para } \xi < 0 \end{cases} = \begin{cases} \xi^p & \text{para } \xi \in [0, \nu_0^{\frac{1}{p-1}}] \\ \nu_0\xi & \text{para } \xi \in [\nu_0^{\frac{1}{p-1}}, \infty) \\ 0 & \text{para } \xi \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Também definimos

$$F(\xi) = \int_0^\xi f(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{p+1}\nu_0^{\frac{p+1}{p-1}} + \frac{1}{2}\nu_0(\xi^2 - \nu_0^{\frac{2}{p-1}}) & \text{para } \xi \in [\nu_0^{\frac{1}{p-1}}, \infty) \\ \frac{1}{p+1}\xi^{p+1} & \text{para } \xi \in [0, \nu_0^{\frac{1}{p-1}}] \\ 0 & \text{para } \xi \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

No que segue, fixamos um subconjunto não-vazio $J \subset \{1, 2, \dots, k\}$ e tentamos encontrar uma solução positiva descrita no Teorema 0.1.

Definimos

$$\Omega_J = \bigcup_{j \in J} \Omega_j, \quad \Omega'_J = \bigcup_{j \in J} \Omega'_j, \quad \chi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Omega'_J \\ 0 & \text{para } x \notin \Omega'_J, \end{cases}$$

onde Ω'_j é definida no início da seção 1, e seja

$$g(x, \xi) = \chi_J(x)\xi_+^p + (1 - \chi_J(x))f(\xi) = \begin{cases} \xi_+^p & \text{para } x \in \Omega'_J \\ f(\xi) & \text{para } x \notin \Omega'_J, \end{cases}$$

$$G(x, \xi) = \int_0^\xi g(x, \tau) d\tau = \frac{\chi_J(x)}{p+1} \xi_+^{p+1} + (1 - \chi_J(x))F(\xi).$$

Definimos o funcional energia $\Phi_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2) - \int_{\mathbb{R}^n} G(x, u).$$

Usando as condições **(A1)**, **(A2)**, **(B1)**, **(B2)** e **(B')** temos que $\Phi_\lambda \in C^2(E, \mathbb{R})$ e a sua derivada direcional é dada por

$$\Phi'_\lambda(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda a(x) + b(x))uv - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u)v.$$

Portanto podemos concluir que os seus pontos críticos são soluções não negativas do problema

$$-\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = g(x, u), \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Observamos que $f(\xi) = \xi^p$ para $\xi \in [0, \nu_0^{\frac{1}{p-1}}]$, e um ponto crítico u de Φ_λ é uma solução de P_λ se, e somente se, $u(x) \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$.

Primeiramente verificamos a condição de Palais-Smale para Φ_λ .

Proposição 2.1 *Para $\lambda \geq \lambda_1$, o funcional Φ_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$. Isto é, para $c \in \mathbb{R}$, dada qualquer sequência $(u_n) \subset E$ satisfazendo*

$$\Phi_\lambda(u_n) \rightarrow c \text{ quando } n \rightarrow \infty, \tag{2.1}$$

$$\Phi'_\lambda(u_n) \rightarrow 0 \text{ fortemente em } E^*, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \tag{2.2}$$

existe uma subsequência que converge fortemente em E .

Para demonstrar a Proposição 2.1 precisamos primeiramente do seguinte lema.

Lema 2.1 *Seja uma sequência $(u_n) \subset E$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Então, existem constantes $m(c)$ e $M(c)$ independentes de $\lambda \geq \lambda_1$ tais que*

$$m(c) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq M(c).$$

Além disso, $m(c) > 0$ se $c > 0$.

Demonstração: De (2.1) e (2.2) obtemos

$$\Phi_\lambda(u_n) - \frac{1}{p+1} \Phi'_\lambda(u_n)u_n = c + o(1) + \varepsilon_n \|u_n\|_\lambda$$

com $\varepsilon_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u_n\|_\lambda^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(G(x, u_n) - \frac{1}{p+1} g(x, u_n) \cdot u_n \right) \\ &= c + o(1) + \varepsilon_n \|u_n\|_\lambda, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Sendo $\mathbb{R}^n = \Omega'_J \cup (\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J)$ e

$$\int_{\Omega'_J} \left(G(x, u_n) - \frac{1}{p+1} g(x, u_n) \cdot u_n \right) = \int_{\Omega'_J} \left(\frac{u_{n+}^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} u_{n+}^p \cdot (u_n) \right) = 0,$$

pois $u_n = (u_{n+} - u_{n-})$ e $u_{n+} \cdot u_{n-} = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u_n\|_\lambda^2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} \left(G(x, u_n) - \frac{1}{p+1} g(x, u_n) \cdot u_n \right) \\ &= c + o(1) + \varepsilon_n \|u_n\|_\lambda, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mas as funções G e g restritas a $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$ nos dão

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u_n\|_\lambda^2 &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} \left(F(u_n) - \frac{1}{p+1} f(u_n) \cdot u_n \right) \\ &= c + o(1) + \varepsilon_n \|u_n\|_\lambda. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Observamos que $F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\nu_0(\xi^2 - \nu_0^{\frac{2}{p-1}})$ para $\xi \in [\nu_0^{\frac{1}{p-1}}, \infty]$, e 0 caso contrário.

Assim,

$$F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\nu_0\xi^2 \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

De (2.3) e da desigualdade triangular obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)(\|u_n\|_\lambda^2 - \nu_0\|u_n\|_{L^2}^2) \leq c + o(1) + \varepsilon_n\|u_n\|_\lambda.$$

Usando o Corolário 1.2 temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\delta_0\|u_n\|_\lambda^2 \leq c + o(1) + \varepsilon_n\|u_n\|_\lambda.$$

Assim, $\|u_n\|_\lambda$ é limitada quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \leq M(c) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} \delta_0^{-1}c.$$

Por outro lado, desde que $F(\xi) - \frac{1}{p+1}f(\xi)\xi \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, segue de (2.3) que

$$c + o(1) + \varepsilon_n\|u_n\|_\lambda \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_\lambda^2.$$

Portanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_\lambda^2 \geq m(c) := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c. \quad \square$$

Demonstração da Proposição 2.1 Supomos que $(u_n) \subset E$ satisfaz (2.1) e (2.2). Pelo Lema 2.1, temos que (u_n) é limitada em E e podemos supor, pelo Teorema 5.2 do Apêndice, que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E e em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e fortemente em $L_{loc}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Primeiramente observamos que a função limite u é um ponto crítico do funcional Φ_λ . De fato, para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos ver facilmente que $\Phi'_\lambda(u_n)\varphi \rightarrow 0$ quando

$n \rightarrow \infty$, pois

$$|\Phi'_\lambda(u_n)\varphi| \leq \|\Phi'_\lambda(u_n)\| \|\varphi\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $u_n \rightarrow u$ fracamente quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\Phi'_\lambda(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_n \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda a(x) u_n \varphi + b(x) u_n \varphi - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u_n) \varphi$$

converge para $\Phi'_\lambda(u)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde

$$\Phi'_\lambda(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda a(x) u \varphi + b(x) u \varphi - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u) \varphi.$$

De fato, como $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ teremos

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x, u_n) \varphi = \int_{\text{supp}\varphi} g(x, u_n) \varphi \longrightarrow \int_{\text{supp}\varphi} g(x, u) \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u) \varphi,$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde $\text{supp}\varphi = \overline{\{x/\varphi(x) \neq 0\}}$ denota o suporte de φ , e a igualdade acima ocorre pelo Teorema 5.2 (Teorema da Imersão de Sobolev) e pelo Teorema 5.3 (Teorema da Convergência Dominada) do Apêndice. Isto implica que $\Phi'_\lambda(u)\varphi = 0$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em E , isto é,

$$\forall v \in E, \exists \varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|\varphi_n - v\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

$$\text{Logo } \Phi'(u).v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi'(u_n)\varphi_n = 0.$$

Então u é um ponto crítico de Φ_λ .

Sabemos que $\Phi'(u)(u_n - u) = 0$ pois u é ponto crítico de Φ e

$$\|\Phi'(u_n)(u_n - u)\| \leq \|\Phi'(u_n)\| \|u_n - u\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois $\|\Phi'(u_n)\| \rightarrow 0$ (obedece $(PS)_c$) e $\|u_n - u\|$ é limitada. Assim, segue-se que $(\Phi'_\lambda(u_n) - \Phi'_\lambda(u))(u_n - u) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, que é

$$\|u_n - u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) = \int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) + o(1).$$

Assim, pela definição de f temos $\max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} \left| \frac{\partial g}{\partial \xi}(x, \xi) \right| \leq p\nu_0$. Usando o Teorema do Valor Médio, ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\xi(x)$ onde $f(u_n(x)) - f(u(x)) = f'(\xi(x))(u_n(x) - u(x))$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \leq p\nu_0 \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.4)$$

Observamos também que $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^{p+1}(\Omega'_J)$ quando $n \rightarrow \infty$, pois Ω'_J é compacto, por definição. Assim, usando o Corolário 1.2 obtemos

$$\begin{aligned} \delta_0 \|u_n - u\|_\lambda^2 &\leq \|u_n - u\|_\lambda^2 - p\nu_0 \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|u_n - u\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \\ &\leq \int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) + o(1) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Esta última convergência se deve ao fato de

$$\int_{\Omega'_J} (u_n - u)^{p+1} \rightarrow 0 \text{ pois } \|u_n - u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Usando a desigualdade de Hölder vem

$$\int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) \leq \left(\int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \cdot \left(\int_{\Omega'_J} (u_n - u)^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, usando a identidade $|a - b|^\alpha \leq (|a| + |b|)^\alpha \leq 2^\alpha(|a|^\alpha + |b|^\alpha)$, teremos

$$\left(\int_{\Omega'_J} (u_{n+}^p - u_+^p)^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \leq 2^{p+1} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u_n|^{p+1} + |u|^{p+1} \right]^{\frac{p}{p+1}} \leq K$$

pois $\|u_n\|_{L^{p+1}} \leq C \|u_n\|_{H^1} \leq A$.

Portanto $u_n \rightarrow u$ fortemente em E . □

A Proposição 2.1 possibilita aplicar o argumento minimax ao funcional Φ_λ . Aqui também estudamos o comportamento das seqüências $(u_n) \subset E$, $(\lambda_n) \subset [\lambda_1, \infty)$ satisfazendo

$$\lambda_n \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

$$\|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

onde $\|\cdot\|_\lambda^*$ é definida por

$$\|h\|_\lambda^* = \sup_{\varphi \in E, \|\varphi\|_\lambda \leq 1} |h(\varphi)| \text{ para } h \in E^*,$$

e E^* denota o espaço dual de E .

Proposição 2.2 *Sejam $(u_n) \subset E$ e $(\lambda_n) \subset [\lambda_1, \infty)$ seqüências satisfazendo (2.5)-(2.7). Então, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } E \text{ e } H^1(\mathbb{R}^n), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para algum $u \in E$. Além disso,

(i) $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_j$ e $u(x)$ é uma solução não negativa de

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u^p & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (2.8)$$

para $j \in J$.

(ii) u_n converge fortemente para u no seguinte sentido

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

O limite em (2.9) implica que

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortemente em } E \text{ em } H^1(\mathbb{R}^n), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

(iii) u_n também satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n a(x) u_n^2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \longrightarrow I_{\Omega_J}(u), \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j}^2 \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 \rightarrow \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 \text{ para todo } j \in J, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

onde $I_{\Omega_J}(u)$ é definido como em (0.2).

Demonstração: Repetindo os mesmos argumentos da demonstração do Lema 2.1, temos

$$m(c) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \leq M(c).$$

Pelo Corolário 1.1, temos que (u_n) é limitada em E e $H^1(\mathbb{R}^n)$. Podemos supor que para algum $u \in E$ tem-se

$$u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } E \text{ e } H^1(\mathbb{R}^n), \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

e pelo processo de Diagonalização de Cantor (vide Apêndice) temos que

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ quase todo ponto em } \mathbb{R}^n.$$

Para mostrar (i) definimos $C_m := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geq \frac{1}{m}\} = \{x \in \mathbb{R}^n : ma(x) \geq 1\}$.

Para n grande, teremos $\lambda_n \leq 2(\lambda_n - \lambda_1)$ e então

$$\begin{aligned} \int_{C_m} u_n^2 &\leq \frac{m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n a(x) u_n^2 \\ &\leq \frac{2m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_n - \lambda_1) a(x) u_n^2 \\ &\leq \frac{2m}{\lambda_n} \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_n - \lambda_1) a(x) u_n^2 + \frac{2m}{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_1}^2 \\ &= \frac{2m}{\lambda_n} \|u_n\|_{\lambda_n}^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Portanto $u(x) = 0$ em $\bigcup C_m = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Observamos que para $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$ ($j \in \{1, 2, \dots, k\}$) obtemos de $|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\varphi| \leq \|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* \|\varphi\|_{\lambda_n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Por $(PS)_c$ segue-se que

$$\Phi'_{\lambda_n}(u)\varphi = \int_{\Omega_j} [\nabla u \nabla \varphi + b(x)u\varphi - g(x, u)\varphi] = 0,$$

pois em Ω_j , $a(x) = 0$.

Assim, para $j \in J$, u satisfaz (2.8). Para $j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus J$, colocando $\varphi(x) = u(x)$, pois

$$\Phi'_{\lambda_n}(u)\varphi_n = \int_{\Omega_j} [\nabla u \nabla \varphi_n + b(x)u\varphi_n - g(x, u)\varphi_n].$$

E como $\varphi_n \rightarrow u$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega_j)$ temos

$$\int_{\Omega_j} [|\nabla u|^2 + b(x)u^2 - f(u)u] = 0.$$

E sendo $\overline{\Omega_j} \subset \Omega'_j$ e em $\Omega'_j \setminus \Omega_j$ $u = 0$ teremos $\int_{\Omega'_j} = \int_{\Omega_j} + \int_{\Omega'_j \setminus \Omega_j}$ que nos dá

$$\|u\|_{\lambda_1, \Omega'_j}^2 - \int_{\Omega'_j} f(u)u = 0.$$

Pelo Corolário 1.2 e pelo fato que $f(\xi)\xi \leq v_0\xi^2$ para $\xi \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \delta_0 \|u\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 &\leq \|u\|_{\lambda_1, \Omega'_j}^2 - v_0 \|u\|_{L^2(\Omega'_j)}^2 \\ &\leq \|u\|_{\lambda_1, \Omega'_j}^2 - \int_{\Omega'_j} f(u)u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $u = 0$ em Ω_j para $j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus J$ e obtemos (i).

Para (ii), isto é, $\|u_n - u\|_{\lambda_n} \rightarrow 0$ e $u_n \rightarrow u$ fortemente em E e em $H^1(\mathbb{R}^n)$, quando $n \rightarrow \infty$, usaremos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) - \int_{\Omega'_j} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) \\ = \Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u) - \Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u). \end{aligned}$$

De (2.15) e pela imersão de Sobolev, obtemos que $u_n \rightarrow u$ em $L_{Loc}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $p+1 < p^*$. Sendo Ω'_j um compacto temos que

$$\int_{\Omega'_j} (u_{n+}^p - u_+^p)(u_n - u) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como u é ponto crítico de Φ_{λ_n} em particular podemos aplicar o operador $\Phi'_{\lambda_n}(u)$ a $(u_n - u)$ e temos

$$\Phi'_{\lambda_n}(u)(u_n - u) = \int_{\Omega_j} [\nabla u \nabla(u_n - u) + b(x)u(u_n - u) - u^p(u_n - u)] \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Usando o fato de que $\Phi_{\lambda_n}(u_n)$ verifica a condição $(PS)_c$, resulta que

$$|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)(u_n - u)| \leq \|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* (\|u_n\|_{\lambda_n} + \|u\|_{\lambda_n}) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Assim temos

$$\|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Por (2.4) e pelo Corolário (1.2), temos

$$\begin{aligned} \delta_0 \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 &\leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 - pv_0 \|u_n - u\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} (f(u_n) - f(u))(u_n - u) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Então temos (2.9).

Assim, (2.10) segue facilmente de (2.9) e da Proposição 1.1, pois

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla(u_n - u)|^2 + (u_n - u)^2] \\ &\leq C \|u_n - u\|_{\lambda_n} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$ e para algum $C > 0$.

(iii) Mostraremos agora (2.11). Para λ_n suficientemente grande, $\frac{1}{2}\lambda_n \leq \lambda_n - \lambda_1$, logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_n a(x) u_n^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_n - \lambda_1) a(x) u_n^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_n - \lambda_1) a(x) (u_n - u)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_n - \lambda_1) a(x) (u_n - u)^2 + \|u_n - u\|_{\lambda_1}^2 \\ &= \|u_n - u\|_{\lambda_n}^2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Note que a primeira igualdade acima vale pois em Ω_j tem-se que $a \equiv 0$ e $u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_j$.

A prova de (2.12) segue usando (2.10) e (2.11) pois

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda_n}(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u_n|^2 + (\lambda_n a(x) + b(x)) u_n^2] - \int_{\mathbb{R}^n} G(x, u_n) \\ &\longrightarrow \int_{\Omega_j} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} b(x) u^2 - \int_{\Omega_j} \frac{1}{p+1} u_+^{p+1} \\ &= I_{\Omega_j}(u), \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

A prova de (2.13) e (2.14) são elaboradas de modo análogo à aquela provada em (2.12), sendo que para (2.13) usamos $u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$ e em (2.14) usamos $a(x) = 0$ em Ω'_J .

Corolário 2.1 *Para qualquer $M > 0$ existe uma constante $\Lambda(M) \geq \lambda_1$ tal que, se u_λ é um ponto crítico de Φ_λ satisfazendo*

$$\Phi_\lambda(u_\lambda) \leq M, \quad \text{com } \lambda \geq \Lambda(M),$$

então u_λ satisfaz $|u_\lambda(x)| \leq \nu_0^{\frac{1}{p-1}}$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$. Em particular, u_λ resolve o problema original (P_λ) .

Demonstração: Usaremos a notação $B_\sigma(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < \sigma\}$. Da estimativa dada em [?], para cada $\sigma, M > 0$, existe $C_{\sigma, M} > 0$ independente de $\lambda \geq \lambda_1$ tal que

$$|u_\lambda(x)| \leq C_{\sigma, M} \int_{B_\sigma(x)} |u_\lambda|,$$

para todo ponto crítico $u_\lambda \in E$ de Φ_λ satisfazendo $\Phi_\lambda(u_\lambda) \leq M$. Pela proposição 2.2, para cada sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$, podemos extrair uma subsequência λ_{n_i} , tal que

$$u_{\lambda_{n_i}} \rightarrow u_0 \in H_0^1(\Omega_J) \text{ fortemente em } H^1(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, pela Imersão de Sobolev temos

$$u_{\lambda_{n_i}} \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_J}), \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $\lambda_n \rightarrow \infty$ é arbitrário, temos que

$$u_\lambda \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_J}) \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Assim, escolhendo $\sigma \in (0, \text{dist}(\Omega_J, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J))$, tendo a uniformidade para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$ (usando o fato que $C_{\sigma, M}$ não depende de x) temos que

$$\begin{aligned} |u_\lambda(x)| &\leq C_{\sigma, M} \int_{B_\sigma(x)} |u_\lambda| \\ &\leq C_{\sigma, M} (\text{med} B_\sigma(x))^{\frac{1}{2}} \|u_\lambda\|_{L^2(B_\sigma(x))} \\ &\leq C_{\sigma, M} (\text{med} B_\sigma(x))^{\frac{1}{2}} \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde $\text{dist}(\Omega_j, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j) = \inf\{|x - y|/x \in \Omega_j, y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j\}$. \square

3 Argumentos de Minimax

Para dar uma prova do Teorema 0.1, usamos uma idéia de Séré [11] em que soluções do tipo multi-bump são construídas para sistemas Hamiltonianos.

3.1 Os funcionais I_{Ω_j} e $\Phi_{\lambda, \Omega'_j}$.

Para $j \in J$ considere os seguintes funcionais $I_{\Omega_j} : H_0^1(\Omega_j) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi_{\lambda, \Omega'_j} : E(\Omega'_j) = H^1(\Omega'_j) \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$I_{\Omega_j}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_j} u_+^{p+1}, \quad (3.1)$$

$$\Phi_{\lambda, \Omega'_j}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_j} |\nabla u|^2 + (\lambda a(x) + b(x))u^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega'_j} u_+^{p+1},$$

onde $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Estes funcionais exercem papel crucial em nosso argumento ao provar a existência de soluções de energia mínima em Ω_j ($j \in J$). Observamos que tais funcionais são definidos em espaços correspondentes diferindo apenas nas condições de fronteira. Além disso, os seus pontos críticos são, respectivamente, soluções não negativas do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = u_+^p & \text{em } \Omega_j \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_j \end{cases} \quad (3.2)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + (\lambda a(x) + b(x))u = u_+^p & \text{em } \Omega'_j \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{na } \partial\Omega'_j. \end{cases} \quad (3.3)$$

Em virtude do Corolário 1.2, podemos facilmente ver que I_{Ω_j} e $\Phi_{\lambda, \Omega'_j}$ possuem a geometria do passo da montanha. Isto é

$$(i) \quad I_{\Omega_j}(0) = \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(0) = 0.$$

(ii) Existem $\rho_0, \rho_1 > 0$ independente de $\lambda \geq \lambda_1$, tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\Omega_j} \leq \rho_0 &\implies I_{\Omega_j}(u) \geq 0 \\ \|u\|_{0,\Omega_j} = \rho_0 &\implies I_{\Omega_j}(u) \geq \rho_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observamos que esta primeira implicação é válida pela imersão de Sobolev. De fato, se

$$\begin{aligned} I_{\Omega_j}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_j} u_+^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{0,\Omega_j}^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_j} u_+^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{0,\Omega_j}^2 - \frac{C}{p+1} \|u\|_{0,\Omega_j}^{p+1} \end{aligned}$$

Como $p > 1$ existem $\rho_0, \rho_1 > 0$ tais que $I_{\Omega_j}(u) \geq \rho_1 > 0$ se $\|u\|_{0,\Omega_j} = \rho_0$ e $I_{\Omega_j}(u) \geq 0$ se $\|u\|_{0,\Omega_j} \leq \rho_0$. Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\lambda,\Omega'_j} \leq \rho_0 &\implies \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(u) \geq 0 \\ \|u\|_{\lambda,\Omega'_j} = \rho_0 &\implies \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(u) \geq \rho_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aqui usamos a notação

$$\|u\|_{0,\Omega_j}^2 = \int_{\Omega_j} [|\nabla u|^2 + b(x)u^2], \text{ para } u \in H_0^1(\Omega_j),$$

que é equivalente a norma H^1 em $H_0^1(\Omega_j)$ pela hipótese **(B')**.

(iii) Escolha u_j tal que

$$\text{supp } u_j \subset \Omega_j, \quad \int_{\Omega_j} u_j^{p+1} \neq 0, \quad \|u_j\| \neq 0.$$

Definimos

$$g(t) = I_j(tu_j) = \frac{t^2}{2} \|u_j\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega_j} u_j^{p+1},$$

e temos $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty$. Portanto, $\exists t_j$ tais que $g(t_j) < 0$ se $t_j > \bar{t}$ e $\|t_j u_j\| \geq \rho_0$ e logo $I(t_j u_j) < 0$.

Assim, seja $\varphi_j = t_j u_j$ onde $t_j > \bar{t}$ temos que

$$\|\varphi_j\|_{\lambda, \Omega'_j} = \|\varphi_j\|_{0, \Omega_j} \geq \rho_0,$$

que ocorre pela igualdade seguinte

$$\int_{\Omega'_j} [|\nabla \varphi_j|^2 + (\lambda a(x) + b(x))\varphi_j^2] = \int_{\Omega_j} [|\nabla \varphi_j|^2 + b(x)\varphi_j^2].$$

Ainda temos

$$\Phi_{\lambda, \Omega'_j}(\varphi_j) = I_{\Omega_j}(\varphi_j) < 0.$$

Assim, podemos definir os seguintes valores minimax (valores críticos do passo da montanha)

$$c_j = \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} I_{\Omega_j}(\gamma(t)),$$

$$c_{\lambda,j} = \inf_{\gamma \in \Gamma_{\lambda,j}} \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(\gamma(t)),$$

onde Γ_j e $\Gamma_{\lambda,j}$ são não vazios e definidos por

$$\Gamma_j = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega_j)) : \gamma(0) = 0, I_{\Omega_j}(\gamma(1)) < 0\},$$

$$\Gamma_{\lambda,j} = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\Omega'_j)) : \gamma(0) = 0, \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(\gamma(1)) < 0\}.$$

A verificação da condição de Palais-Smale para $I_{\Omega_j} \in C^2(H_0^1(\Omega_j), \mathbb{R})$, $\Phi_{\lambda, \Omega'_j} \in C^2(H^1(\Omega'_j), \mathbb{R})$ é padrão e $c_j, c_{\lambda,j}$ são valores críticos. Denotemos os pontos críticos correspondentes por ω_j e $\omega_{\lambda,j}$. Com as notações acima, teremos o Lema seguinte.

Lema 3.1 (i) $0 < \rho_1 \leq c_{\lambda,j} \leq c_j$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$.

(ii) c_j ($c_{\lambda,j}$ respectivamente) é o nível de energia mínima para I_{Ω_j} (Φ_{λ,Ω'_j} respectivamente), qual é

$$\begin{aligned} c_j &= \inf\{I_{\Omega_j}(v); v \in H_0^1(\Omega_j) \setminus \{0\} \text{ é um ponto crítico de } I_{\Omega_j}\} \\ c_{\lambda,j} &= \inf\{\Phi_{\lambda,\Omega'_j}(v); v \in H^1(\Omega'_j) \setminus \{0\} \text{ é um ponto crítico de } \Phi_{\lambda,\Omega'_j}\} \end{aligned}$$

(iii) $c_j = \max_{r>0} I_{\Omega_j}(r\omega_j)$, $c_{\lambda,j} = \max_{r>0} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(r\omega_{\lambda,j})$.

(iv)

$$c_{\lambda,j} \longrightarrow c_j \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Demonstração: Usando (3.5) obtemos $c_{\lambda,j} \geq \rho_1$. Estendendo $u \in H_0^1(\Omega_j)$ a $\tilde{u} \in H^1(\Omega'_j)$ por:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{em } \Omega_j, \\ 0 & \text{em } \Omega'_j \setminus \overline{\Omega_j}, \end{cases}$$

consideremos $H_0^1(\Omega_j) \subset H^1(\Omega'_j)$. Assim, temos $\Gamma_j \subset \Gamma_{\lambda,j}$ e

$$\begin{aligned} c_{\lambda,j} &= \inf_{\gamma \in \Gamma_{\lambda,j}} \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(t)) \\ &\leq \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\lambda,\Omega'_j}(\gamma(t)) \\ &= \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} I_{\Omega_j}(\gamma(t)) \\ &= c_j. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Isto mostra (i).

Para mostrar (ii): Sabemos que $c_j = I_{\Omega_j}(\omega_j)$ e $I'_{\Omega_j}(\omega_j) = 0$ e $a = \inf\{I_{\Omega_j}(v)/v \in H_0^1(\Omega_j) \setminus \{0\}; I_{\Omega_j}(v) = 0\}$. É claro que $a \leq c_j$. Suponhamos por absurdo que $a < c_j$. Assim existe v_ε tal que $a \leq I_{\Omega_j}(v_\varepsilon) < a + \varepsilon < c_j$, $v_\varepsilon \neq 0$ e $I'_{\Omega_j}(v_\varepsilon) = 0$. Definindo $\gamma_\varepsilon = tv_\varepsilon \in \Gamma_j$ e construindo $g(t) = I_{\Omega_j}(tv_\varepsilon)$ temos $g'(t) = I'_{\Omega_j}(tv_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon$ e

$0 = g'(1) = I'_{\Omega_j}(v_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon = t \|v_\varepsilon\|^2 - t^p \int v_\varepsilon^{p+1}$. Isto implica que $c_j \leq I_{\Omega_j}(v_\varepsilon)$ o que prova **(ii)**.

A prova de **(iii)** é análoga à de **(ii)** colocando $g(r) = I_{\Omega_j}(r\omega_j)$.

Para **(iv)** procedemos como na Proposição 2.3 e podemos extrair uma subsequência $\lambda_i \rightarrow \infty$ tal que

$$\omega_{\lambda_i, j} \rightarrow u_0 \text{ fortemente em } H^1(\Omega'_j), \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

onde $u_0(x) \in H_0^1(\Omega_j)$ é solução de (3.2) e

$$\Phi_{\lambda_i, \Omega'_j}(\omega_{\lambda_i, j}) \rightarrow I_{\Omega_j}(u_0), \text{ quando } \lambda \rightarrow \infty.$$

Assim, c_j é o nível de energia mínima para $I_{\Omega_j} : H_0^1(\Omega_j) \rightarrow \mathbb{R}$ e temos

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} c_{\lambda, j} = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(\omega_{\lambda, j}) \geq I_{\Omega_j}(u_0) \geq c_j.$$

Comparando com (3.7), temos (3.6). \square

Observamos que as soluções de energia mínima de (3.2) ((3.3) respectivamente), podem ser obtidas também através da solução do problema com vínculo

$$\inf \left\{ \|v\|_{0, \Omega_j}^2; v \in H_0^1(\Omega_j), \int_{\Omega_j} v_+^{p+1} = 1 \right\},$$

$$\left(\inf \left\{ \|v\|_{\lambda, \Omega'_j}^2; v \in H^1(\Omega'_j), \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = 1 \right\}, \text{ respectivamente} \right).$$

E os valores encontrados via o re-escalonamento

$$v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{L^{p+1}}}, \text{ e respectivamente } v_{j\lambda} = \frac{u_{j\lambda}}{\|u_{j\lambda}\|_{L^{p+1}}},$$

são $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{p-1}{p+1}} c_j^{\frac{p-1}{p+1}}$ e $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-\frac{p-1}{p+1}} c_{\lambda, j}^{\frac{p-1}{p+1}}$.

Observe que um argumento de re-escalamento (via Teorema dos Multiplicadores de Lagrange), nos dá o seguinte

$$\begin{aligned}
 c_j &= \inf \left\{ I_{\Omega_j}(v) : v \in H_0^1(\Omega_j), \int_{\Omega_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_j \right\}, \\
 c_{\lambda,j} &= \inf \left\{ \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(v) : v \in H^1(\Omega'_j), \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_{\lambda,j} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Argumento de Minimax para Φ_λ

Fixemos $R \geq 2$ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned} I_{\Omega_j}(R\omega_j) &< 0 \\ R^{p+1} \|\omega_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} &\geq 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{P+1} \right)^{-1} c_j \end{aligned} \quad (3.9)$$

para todo $j \in J$. Aqui observamos que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow H_0^1(\Omega_j)$ dada por $g(s) = sR\omega_j$ é um dos caminhos de Γ_j e satisfaz

$$\max_{s \in [0,1]} I_{\Omega_j}(sR\omega_j) = c_j.$$

Para simplificar a notação, rearranjamos os índices $1, 2, \dots, k$ e supondo $J = \{1, 2, \dots, l\}$ ($l \leq k$) no que segue. Agora definimos

$$\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)(x) = \sum_{j=1}^l s_j R\omega_j(x), \forall (s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0, 1]^l, \quad (3.10)$$

$$\Gamma_J = \{ \gamma \in C([0, 1]^l, E); \gamma(s_1, s_2, \dots, s_l) = \gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l), \forall (s_1, s_2, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l) \}$$

$$b_{\lambda, J} = \inf_{\gamma \in \Gamma_J} \max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0, 1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)).$$

Observamos que $\gamma_0 \in \Gamma_J$; logo $\Gamma_J \neq \emptyset$ e $b_{\lambda, J}$ está bem definido. No que segue, usaremos a notação $c_J = \sum_{j=1}^l c_j$.

Proposição 3.1 (i) $\sum_{j=1}^l c_{\lambda, j} \leq b_{\lambda, J} \leq c_J$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$.

(ii) $\Phi_\lambda(\gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)) \leq c_J - \rho_1$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$, $\gamma \in \Gamma_J$ e $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l)$.

Aqui $\rho_1 > 0$ é dado em (3.4), (3.5) e (i) do Lema 3.1.

Para demonstrar a proposição, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2 Para algum $\gamma \in \Gamma_J$ e para algum

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l) \in [0, R^{p+1} \|\omega_1\|_{L^{p+1}}^{p+1}] \times \dots \times [0, R^{p+1} \|\omega_l\|_{L^{p+1}}^{p+1}], \quad (3.11)$$

existe $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0, 1]^l$ tal que

$$\int_{\Omega'_j} \gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)(x)_+^{p+1} = \xi_j \text{ para todo } j \in J.$$

Demonstração: Definimos $s = (s_1, \dots, s_l)$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$. Para algum $\gamma \in \Gamma_J$ dado, considere a função $\tilde{\gamma} : [0, 1]^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ definida por

$$\tilde{\gamma}(s_1, s_2, \dots, s_l) = \left(\int_{\Omega'_1} \gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)(x)_+^{p+1}, \dots, \int_{\Omega'_l} \gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)(x)_+^{p+1} \right)$$

Temos para $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l)$, o seguinte

$$\tilde{\gamma}(s_1, s_2, \dots, s_l) = (s_1^{p+1} R^{p+1} \|\omega_1\|_{L^{p+1}}^{p+1}, \dots, s_l^{p+1} R^{p+1} \|\omega_l\|_{L^{p+1}}^{p+1}).$$

Assim, para cada $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ satisfazendo (3.11), definimos a função $f(s_1, \dots, s_l) = (\tilde{\gamma}_1(s_1, \dots, s_l) - \xi_1, \dots, \tilde{\gamma}_l(s_1, \dots, s_l) - \xi_l)$ tal que $\tilde{\gamma}(s_1, \dots, s_l) = (\tilde{\gamma}_1(s_1, \dots, s_l), \dots, \tilde{\gamma}_l(s_1, \dots, s_l))$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Poincaré-Miranda descrito abaixo e cuja demonstração para o caso de dimensão 2 encontra-se no Apêndice.

Teorema de Poincaré-Miranda [?] [?]

Seja $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que $f_i(I_i^-) \subset (-\infty, 0]$ e $f_i(I_i^+) \subset [0, +\infty)$ para cada $i \leq n$, onde $I_i^- = \{x \in I^n; x_i = 0\}$ e $I_i^+ = \{x \in I^n; x_i = 1\}$. Então existe um ponto $c \in I^n$ tal que $f(c) = 0$.

Assim, garantimos a existência de um $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0, 1]^l$ tal que $f(s_1, s_2, \dots, s_l) = (0, \dots, 0)$ o que prova o Lema 3.2.

Demonstração da Proposição 3.1: (i) Seja γ_0 definida em (3.10). Então temos

$$\begin{aligned}
b_{\lambda,J} &\leq \max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0,1]^l} \Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)) \\
&= \max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0,1]^l} \Phi_\lambda(s_1 R\omega_1 + s_2 R\omega_2 + \dots + s_l R\omega_l) \\
&= \max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0,1]^l} (I_{\Omega_1}(s_1 R\omega_1) + \dots + I_{\Omega_l}(s_l R\omega_l)) \\
&= c_1 + \dots + c_l = \sum_{j=1}^l c_j = c_J.
\end{aligned}$$

Por outro lado, observando (3.9) e colocando

$$(\xi_1, \dots, \xi_l) = \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_{\lambda,1}, \dots, \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_{\lambda,l} \right)$$

no Lema 3.2, para cada $\gamma \in \Gamma_J$ existe $s_\gamma \in [0,1]^l$ tal que

$$\int_{\Omega'_j} \gamma(s_\gamma)(x)_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_{\lambda,j} \text{ para todo } j \in J.$$

Assim, para $u(x) = \gamma(s_\gamma)(x)$ temos

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u) &= \Phi_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}(u) + \sum_{j=1}^l \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(u) \\
&\geq \sum_{j=1}^l \inf \left\{ \Phi_{\lambda, \Omega'_j}(v); v \in H^1(\Omega'_j), \int_{\Omega'_j} v_+^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} c_{\lambda,j} \right\} \\
&= \sum_{j=1}^l c_{\lambda,j}.
\end{aligned}$$

Aqui $\Phi_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}$ foi definido como em (3.1) substituindo Ω'_j por $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$ e usando (3.8) e o fato

$$\Phi_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}(u) \geq 0, \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J). \quad (3.12)$$

Para verificar (3.12), usamos que $G(x, \xi) \leq \frac{1}{2}v_0\xi^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J$ e o Corolário 1.2.

Logo,

$$\begin{aligned}\Phi_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}^2 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} F(u) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}^2 - \frac{1}{2} v_0 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J)}^2 \\ &\geq \frac{\delta_0}{2} \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J}^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Assim, $\max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0, 1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)) \geq \sum_{j=1}^l c_{\lambda, j}$.

Como $\gamma \in \Gamma_J$ é arbitrário, temos $b_{\lambda, J} \geq \sum_{j=1}^l c_{\lambda, j}$.

Para provar (ii), observamos que $\gamma(s_1, s_2, \dots, s_l) = \gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)$ na fronteira $\partial([0, 1]^l)$. Assim, para cada $(s_1, s_2, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l)$ teremos

$$\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)) = \sum_{j=1}^l I_{\Omega_j}(s_j R\omega_j),$$

pois $\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)) = \Phi_\lambda(\sum_{j=1}^l s_j R\omega_j)$.

Contudo, $I_{\Omega_j}(s_j R\omega_j) \leq c_j, \forall j \in J$ e para algum $j_0 \in J, s_{j_0} \in \{0, 1\}$ e assim $I_{\Omega_{j_0}}(s_{j_0} R\omega_{j_0}) \leq 0$.

Portanto, como $\rho_1 \leq c_{j_0}$ no Lema 3.1(i) temos

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, s_2, \dots, s_l)) &\leq \sum_{j \neq j_0} c_j = c_J - c_{j_0} \\ &\leq c_J - \rho_1.\end{aligned}$$

Corolário 3.1 (i) $b_{\lambda, J} \rightarrow c_J$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

(ii) $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico de Φ_λ para λ grande.

Demonstração: (i) Como $c_{\lambda,j} \rightarrow c_j$ para cada j (pelo Lema 3.1(iv)), pela Proposição 3.1 temos que

$$\sum_{j=1}^l c_{\lambda,j} \leq b_{\lambda,J} \leq c_J = \sum_{j=1}^l c_j$$

e (i) segue pelo Teorema do Confronto.

Para provar (ii), escolhemos λ_* tal que $b_{\lambda,J} \geq c_J - \rho_1$ para $\lambda \geq \lambda_*$, e usando o ítem (i) teremos

$$b_{\lambda,J} = \inf_{\gamma \in \Gamma_J} \max_{(s_1, s_2, \dots, s_l) \in [0,1]^l} \Phi_\lambda(\gamma(s_1, s_2, \dots, s_l)).$$

Assim, Φ_λ satisfaz $(PS)_c$, pelo Lema de Deformação (vide Apêndice-Teorema 5.5), podemos ver que $b_{\lambda,J}$ é um valor crítico de Φ_λ para $\lambda \geq \lambda_*$. \square

Na seção seguinte provaremos a existência de um ponto crítico $u_\lambda \in E$ que satisfaz:

1. $\Phi_\lambda(u_\lambda) \rightarrow c_J$, quando $\lambda \rightarrow \infty$,
2. $u_\lambda|_{\Omega_j}$ tende à solução de energia mínima de (0.7) para todo $j \in J$,
3. $u_\lambda|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_J} \rightarrow 0$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^n)$.

4 Uma demonstração do Teorema 0.1

O objetivo desta seção é encontrar uma solução u_λ para λ grande que se aproxima da solução de energia mínima em cada $\Omega_j (j \in J)$ e se aproxima de zero em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_J$, quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Para $\mu > 0$ suficientemente pequeno, que escolhemos mais adiante, definimos

$$D_\mu^\lambda = \left\{ u \in E; \|u\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_J} \leq \mu, \left| \|u\|_{\lambda, \Omega_j} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j} \right| \leq \mu, \text{ para todo } j \in J \right\},$$

Também usamos a notação

$$\Phi_\lambda^{c_J} = \{u \in E; \Phi_\lambda(u) \leq c_J\}.$$

Observamos que qualquer solução de energia mínima ω_j de (3.2) satisfaz

$$\int_{\Omega_j} |\nabla \omega_j|^2 + b(x) \omega_j^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j.$$

Isto segue de $I'_{\Omega_j}(\omega_j) \omega_j = 0$ e $I_{\Omega_j}(\omega_j) = c_j$. Assim, ω_j satisfaz

$$\|\omega_j\|_{\lambda, \Omega_j}^2 = \int_{\Omega_j} |\nabla \omega_j|^2 + b(x) \omega_j^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j.$$

Em geral soluções de energia mínima de (3.2) não são únicas. Observe que $D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$ contém todas as funções da forma

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_j(x), & \text{em } \Omega_j, \\ 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_J, \end{cases}$$

onde ω_j é uma solução de energia mínima em Ω_j .

Escolha μ tal que

$$0 < \mu < \frac{1}{3} \min_{j \in J} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j}. \quad (4.1)$$

Assim, teremos uma estimativa uniforme de $\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^*$ no anel $(D_{2\mu}^\lambda \setminus D_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.

Proposição 4.1 *Seja $\mu > 0$ satisfazendo (4.1). Então existem $\sigma_0 > 0$ e $\Lambda_* \geq \lambda_1$ independentes de λ tais que*

$$\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^* \geq \sigma_0 \text{ para } \lambda \geq \Lambda_*, \text{ e para todo } u \in (D_{2\mu}^\lambda \setminus D_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_J} \quad (4.2)$$

Demonstração: Raciocinando por contradição, suponhamos que existem $\lambda_n \rightarrow \infty$ e $u_n \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus D_\mu^{\lambda_n}) \cap \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$ tal que $\|\Phi'_{\lambda_n}(u_n)\|_{\lambda_n}^* \rightarrow 0$, quando $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Desde que, $u_n \in D_{2\mu}^{\lambda_n}$ e $\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^n}$ é uma sequência limitada isto implica que $\Phi_{\lambda_n}(u_n)$ fica limitada quando $n \rightarrow \infty$, pelo fato de $u_n \in \Phi_{\lambda_n}^{c_J}$.

Assim, passando a uma subsequência se necessário temos que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) \rightarrow c \in (-\infty, c_J],$$

na qual usaremos os mesmos índices.

Aplicando a Proposição 2.2, podemos extrair uma subsequência tal que $u_n \rightarrow u$ (que converge forte) tal que $u \in H_0^1(\Omega_J)$ é uma solução não negativa de (3.2) e além disso

$$I_{\Omega_J}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\lambda_n}(u_n) \leq c_J, \quad (4.3)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega'_j}^2 \rightarrow \int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2, \text{ para todo } j \in J, \quad (4.4)$$

$$\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j}^2 \rightarrow 0, \quad (4.5)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Como $c_J = \sum_{j=1}^l c_j$ e c_j é o nível de energia mínima para $I_{\Omega_j}(u)$ teremos duas possibilidades:

1) $I_{\Omega_j}(u|_{\Omega_j}) = c_j$, para todo $j \in J$,

2) $I_{\Omega_{j_0}}(u|_{\Omega_{j_0}}) = 0$, isto é $u|_{\Omega_{j_0}} \equiv 0$, para algum $j_0 \in J$.

Se a alternativa 1) ocorre, temos

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j, \text{ para todo } j \in J,$$

pois $\|u_n\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} \leq \mu$ por (4.5) e (4.4) garante a outra parte; e segue que $u_n \in D_\mu^{\lambda_n}$ para n grande, o que é uma contradição, pois consideramos que $u_n \in (D_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus D_\mu^{\lambda_n})$.

Se a alternativa 2) ocorre, então $\|u_n\|_{\lambda_n, \Omega'_{j_0}} \rightarrow 0$, quando $\lambda_n \rightarrow \infty$, e da escolha de μ em (4.1) e de (4.4) segue que

$$\left| \|u_n\|_{\lambda_n, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \geq 3\mu,$$

quando $n \rightarrow \infty$, e isto também é uma contradição com o fato de que $u_n \in D_{2\mu}^{\lambda_n} \setminus D_\mu^{\lambda_n}$. Assim, existem σ_0, Λ_* satisfazendo (4.2).

A seguinte proposição é a chave da prova do Teorema 0.1.

Proposição 4.2 *Sejam μ satisfazendo (4.1) e $\Lambda_* \geq \lambda_1$ a constante encontrada na proposição (4.1). Então, para $\lambda \geq \Lambda_*$ existe uma solução u_λ de (P_λ) satisfazendo $u_\lambda \in D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que não existam pontos críticos em $D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}$.

Desde que Φ_λ satisfaz a condição Palais-Smale (Proposição 2.1), existe uma constante $d_\lambda > 0$ tal que

$$\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^* \geq d_\lambda \text{ para todo } u \in D_\mu^\lambda \cap \Phi_\lambda^{c_J}.$$

Da Proposição 4.1, temos que

$$\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^* \geq \sigma_0 \text{ para todo } u \in (D_{2\mu}^\lambda \setminus D_\mu^\lambda) \cap \Phi_\lambda^{c_J}, \quad (4.6)$$

onde $\sigma_0 > 0$ é independente de λ .

A prova da Proposição 4.2 consiste de quatro passos.

Passo 1: Construção de um Fluxo Deformação.

Escolhemos uma função de Lipschitz contínua $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(u) = \frac{\text{dist}(u, E \setminus D_{2\mu}^\lambda)}{\text{dist}(u, E \setminus D_{2\mu}^\lambda) + \text{dist}(u, E \setminus D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda)}.$$

Então φ possui as seguintes propriedades: $\varphi(u) = 1$ para $u \in D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda$; $\varphi(u) = 0$ para $u \notin D_{2\mu}^\lambda$; e $0 \leq \varphi(u) \leq 1$ para $u \in E$.

Definimos, para $u \in \Phi_\lambda^{cJ}$, o campo vetorial dado por

$$V(u) = -\varphi(u) \frac{\Phi'_\lambda(u)}{\|\Phi'_\lambda(u)\|_\lambda^*} : \Phi_\lambda^{cJ} \rightarrow E.$$

Podemos identificar E^* e E através do Teorema da Representação de Riesz. Consideremos um fluxo $\eta : [0, \infty) \times \Phi_\lambda^{cJ} \rightarrow \Phi_\lambda^{cJ}$ Deformação do campo vetorial V , definido por (vide [12])[Lang]

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = V(\eta) \\ \eta(0, u) = u \in \Phi_\lambda^{cJ}, \end{cases}$$

onde $\eta(t, u)$ possui as seguintes propriedades de fácil verificação

$$1) \quad \frac{d}{dt} \Phi_\lambda(\eta(t, u)) = -\varphi(\eta) \|\Phi'_\lambda(\eta)\|_\lambda^* \leq 0 \quad (4.7)$$

$$2) \quad \left\| \frac{d\eta}{dt} \right\|_\lambda = \|V(\eta)\|_\lambda \leq 1, \forall (t, u). \quad (4.8)$$

$$3) \quad \eta(t, u) = u \text{ para } t \geq 0 \text{ e } u \in \Phi_\lambda^{cJ} \setminus D_{2\mu}^\lambda. \quad (4.9)$$

Passo 2: O Caminho $\eta(t, \gamma_0(s_1, \dots, s_l))$.

Seja $\gamma_0(s_1, \dots, s_l) \in \Gamma_J$ o caminho definido em (3.10) e consideremos $\eta(t, \gamma_0(s_1, \dots, s_l))$ para t grande.

Temos $\gamma_0(s_1, \dots, s_l) \notin D_{2\mu}^\lambda$ para todo $(s_1, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l)$ e temos por (4.9)

$$\eta(t, \gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = \gamma_0(s_1, \dots, s_l), \forall (s_1, \dots, s_l) \in \partial([0, 1]^l).$$

Portanto $\eta(t, \gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \in \Gamma_J$ para todo $t \geq 0$.

Observamos que

1) $\text{supp}\gamma_0(s_1, \dots, s_l)(x) \subset \overline{\Omega_J}$ para todo $(s_1, \dots, s_l) \in [0, 1]^l$. Além disso, $\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l))$, $\|\gamma_0(s_1, \dots, s_l)\|_{\lambda, \Phi_j}^2 + \int_{\Phi_j} b(x)\gamma_0(s_1, \dots, s_l)^2$ não dependem de $\lambda \geq \lambda_1$.

2) $\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \leq c_J$ para todo $(s_1, \dots, s_l) \in [0, 1]^l$ e $\Phi_\lambda(\gamma_0(s_1, \dots, s_l)) = c_J$ ocorre se, e somente se, $s_j = \frac{1}{R}$, ou seja $\gamma_0(s_1, \dots, s_l) |_{\Omega_j} = \omega_j, \forall j$.

Assim,

$$m_0 := \max \left\{ \Phi_\lambda(u), u \in \gamma_0([0, 1]^l) \setminus D_\mu^\lambda \right\} \quad (4.10)$$

é independente de λ e $m_0 < c_J$.

Passo 3: Demonstração de que $\max_{(s_1, \dots, s_l) \in [0, 1]^l} \Phi_\lambda(\eta(T, \gamma_0(s_1, \dots, s_l))) \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\}$ para T grande, onde $\sigma_0 > 0$ e $m_0 < c_J$ são dados em (4.6) e (4.10)

Seja $u = \gamma_0(s_1, \dots, s_l) \in E$. Se $u \notin D_\mu^\lambda$, por (4.9), $\Phi_\lambda(\eta(t, u)) = \Phi_\lambda(u) \leq m_0$ para todo $t \geq 0$. Consideremos o caso $u \in D_\mu^\lambda$. Vamos observar o comportamento de $\tilde{\eta}(t) = \eta(t, u)$.

Definimos $\tilde{d}_\lambda = \min\{d_\lambda, \sigma_0\} > 0$ e $T = \frac{\sigma_0\mu}{2\tilde{d}_\lambda} > 0$.

Teremos dois casos:

1. $\tilde{\eta}(t) \in D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda$ para todo $t \in [0, T]$.
2. $\tilde{\eta}(t_0) \in \partial D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda$ para algum $t_0 \in [0, T]$.

Quando a alternativa 1 ocorre, temos que $\varphi(\tilde{\eta}(t)) = 1$ e $\|\Phi'_\lambda(\tilde{\eta}(t))\|_\lambda^* \geq \tilde{d}_\lambda$ para todo $t \in [0, T]$.

Assim, por (4.7) e pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(T)) &= \Phi_\lambda(u) + \int_0^T \frac{d}{ds} \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(s)) ds = \Phi_\lambda(u) - \int_0^T \varphi(\tilde{\eta}(s)) \|\Phi'_\lambda(\tilde{\eta}(s))\|_\lambda^* ds \\ &\leq c_J - \int_0^T \tilde{d}_\lambda ds = c_J - \tilde{d}_\lambda T = c_J - \frac{1}{2} \sigma_0 \mu. \end{aligned}$$

Quando a alternativa 2 ocorre, pelo Teorema da Fronteira, existem t_1 e t_2 tais que $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ e

$$\tilde{\eta}(t_1) \in \partial D_\mu^\lambda \tag{4.11}$$

$$\tilde{\eta}(t_2) \in \partial D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda \tag{4.12}$$

$$\tilde{\eta}(t) \in D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda \setminus D_\mu^\lambda \text{ para todo } t \in [t_1, t_2]. \tag{4.13}$$

Observamos que

$$\|\tilde{\eta}(t_1) - \tilde{\eta}(t_2)\|_\lambda \geq \frac{1}{2} \mu. \tag{4.14}$$

Considerando $\omega_1 = \tilde{\eta}(t_1)$ e $\omega_2 = \tilde{\eta}(t_2)$, segue de (4.12) e pela definição de $D_{\frac{3\mu}{2}}^\lambda$ que

$$\|\omega_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_J} = \frac{3\mu}{2}$$

ou

$$\left| \|\omega_2\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| = \frac{3\mu}{2}, \text{ para algum } j_0 \in J.$$

Trabalharemos primeiramente com o último caso. Por (4.11) temos,

$$\left| \|\omega_1\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| \leq \mu,$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} &\geq \left| \|\omega_2\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| \\ &\quad - \left| \|\omega_1\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_{j_0}} \right| \\ &\geq \frac{\mu}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda} \geq \|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda, \Omega'_{j_0}} \geq \frac{\mu}{2}.$$

Considerando o outro caso, temos

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} \geq \|\omega_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} - \|\omega_1\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} \geq \frac{\mu}{2}.$$

Portanto,

$$\|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda} \geq \|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda, \mathbb{R}^n \setminus \Omega'_j} \geq \frac{\mu}{2}.$$

Logo, $\|\omega_1 - \omega_2\|_{\lambda} \geq \frac{\mu}{2}$.

Por (4.8) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} &\leq \|\tilde{\eta}(t_2) - \tilde{\eta}(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\tilde{\eta}}{dt} \right\| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|V(\tilde{\eta})\| dt \leq t_2 - t_1 \end{aligned}$$

o que permite concluir que $t_2 - t_1 \geq \frac{\mu}{2}$.

Usando (4.6) e o Teorema do Valor Médio temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda}(\tilde{\eta}(T)) &= \Phi_{\lambda}(u) - \int_0^T \varphi(\tilde{\eta}(s)) \|\Phi'_{\lambda}(\tilde{\eta}(s))\|_{\lambda}^* ds \\ &\leq \Phi_{\lambda}(u) - \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot \|\Phi'_{\lambda}(\tilde{\eta}(s))\|_{\lambda}^* ds \\ &\leq c_J - \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0 ds \\ &\leq c_J - \sigma_0(t_2 - t_1) \\ &\leq c_J - \frac{1}{2} \sigma_0 \mu \end{aligned}$$

e concluimos o Passo 3.

Passo 4: Conclusão.

Recordando que $\tilde{\eta}(s_1, \dots, s_l) = \eta(T, \gamma_0(s_1, \dots, s_l)) \in \Gamma_J$, temos que

$$b_{\lambda, J} \leq \max \Phi_\lambda(\tilde{\eta}(s_1, \dots, s_l)) \leq \max\{m_0, c_J - \frac{1}{2}\sigma_0\mu\} < c_J.$$

Pelo Corolário 3.1 temos que $b_{\lambda, J} \rightarrow c_J$ quando $\lambda \rightarrow \infty$. Isto é uma contradição, e $\Phi_\lambda(u)$ tem um ponto crítico u_λ em D_μ^λ para λ grande. Pelo Corolário 2.1, temos que u_λ é solução do problema original (P_λ) .

Fim da Demonstração do Teorema 0.1 Seja $u_\lambda \in D_\mu^\lambda$ uma solução não negativa de (P_λ) obtida na Proposição 2.2. Para alguma sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$ dada, podemos extrair uma subsequência, denotada ainda por λ_n , que satisfaz a conclusão da Proposição 2.2. Raciocinando como na prova da Proposição 4.1 e usando (4.5), podemos mostrar que

$$\int_{\Omega_j} [|\nabla u_{\lambda_n}|^2 + (\lambda_n a(x) + b(x))u_{\lambda_n}^2] \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)^{-1} c_j,$$

$$\|u_{\lambda_n}\|_{\lambda_n, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_j}^2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, os limites dessas sequências não dependem da escolha da sequência $\lambda_n \rightarrow \infty$, e teremos (0.5) e (0.6). Também podemos ver que a função limite $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\lambda_n}(x)$, satisfaz $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_j$ e $u|_{\Omega_j}$ é uma solução de energia mínima em Ω_j para cada $j \in J$.

5 Apêndice

Nesse capítulo, coletamos algumas definições e resultados que foram utilizados na nossa prova.

Teorema 5.1 (Eberlein-Smulyan) [?]

Sejam H um espaço de Hilbert e (u_n) uma sequência limitada em H . Então, existe $u \in H$ e subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que

$$\langle u_{n_j}, v \rangle \longrightarrow \langle u, v \rangle, \forall v \in H, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Esta convergência é dita convergência fraca em H .

Definição 5.1 (Espaço de Sobolev) [?]

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega); \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \quad / \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right\}$$

E é munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}}^p = \int_{\Omega} |\nabla u|^p.$$

E denotamos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

O espaço $H^1(\Omega)$ é munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

e a norma associada dada por $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Essa norma é equivalente a norma de $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 5.2 (Imersão de Sobolev) [?]

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira de Lipschitz, $1 \leq p \leq \infty$. Então, tem-se os seguintes resultados

1. Se $p < n$, temos $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$; a imersão é compacta, se $q < \frac{np}{n-p}$.
2. Se $0 \leq m < 1 - \frac{n}{p} < m+1$, temos $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, para $0 \leq \alpha \leq 1 - m - \frac{n}{p}$; a imersão é compacta, se $\alpha < 1 - m - \frac{n}{p}$.

Teorema 5.3 (Convergência Dominada de Lebesgue) [?]

Seja (f_n) uma sequência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω ;
- existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω .

Então, $f \in L^1(\Omega)$, e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 5.4 $I_{\Omega_j} \in C^2(H_0^1(\Omega_j), \mathbb{R})$ e $\Phi_{\lambda, \Omega'_j} \in C^2(H^1(\Omega'_j), \mathbb{R})$.

Para provar o resultado acima, basta utilizar a seguinte proposição.

Proposição 5.1 [?] Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e seja $2 < p < \infty$. Os funcionais

$$\psi(u) := \int_{\Omega} |u|^p \text{ e } \chi(u) := \int_{\Omega} |u_+|^p$$

são de classe $C^2(H^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle \psi'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u h \quad \text{e} \quad \langle \chi'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} (u_+)^{p-1} h.$$

onde $u_+ = \max\{0, u\}$.

Demonstração da Proposição 5.1:

Existência da Derivada de Gateaux

Consideremos somente ψ . A prova para χ é análoga. Sejam $u, h \in H^1(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{||u(x) + th(x)|^p - |u(x)|^p|}{|t|} &= p|u(x) + \lambda th(x)|^{p-1}|h(x)| \\ &\leq p(|u(x)| + |h(x)|)^{p-1}|h(x)|. \end{aligned}$$

A Desigualdade de Hölder implica que

$$(|u(x)| + |h(x)|)^{p-1}|h(x)| \in L^1(\Omega).$$

Como

$$\langle \psi'(u), h \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} \frac{|u + th|^p - |u|^p}{t} \right],$$

Segue então do Teorema de Lebesgue que

$$\langle \psi'(u), h \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p-2} u h.$$

Continuidade da Derivada de Gateaux

Seja $f(u) := p|u|^{p-2}u$. Suponhamos que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema A2 ou A4 de [?] temos que $f(u_n) \rightarrow f(u)$ em $L^q(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $q = \frac{p}{p-1}$. Obtemos, pela Desigualdade de Hölder que

$$|\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), h \rangle| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_q \|h\|_p,$$

e portanto

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\| \leq \|f(u_n) - f(u)\|_q \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Existência da Segunda Derivada de Gateaux

Sejam $u, h, v \in H^1(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{|[f(u(x) + th(x)) - f(u(x))]v(x)|}{|t|} &= p(p-1)|u(x) + \lambda th(x)|^{p-2}|h(x)||v(x)| \\ &\leq p(p-1)[|u(x)| + |h(x)|]^{p-2}|h(x)||v(x)|. \end{aligned}$$

A Desigualdade de Hölder implica que

$$[|u(x)| + |h(x)|]^{p-2}|h(x)||v(x)| \in L^1(\Omega).$$

E segue do Teorema de Lebesgue que

$$\langle \psi''(u)h, v \rangle = p(p-1) \int_{\Omega} |u|^{p-2} h v.$$

Continuidade da Segunda Derivada de Gateaux

Defina como sendo $g(u) := p(p-1)|u|^{p-2}$. Suponhamos que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto implica que $g(u_n) \rightarrow g(u)$ em $L^r(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$, onde $r := \frac{p}{p-2}$, vide Teorema A2 ou A4 de [?]. Obtemos pela Desigualdade de Hölder que

$$|\langle (\psi''(u_n) - \psi''(u))h, v \rangle| \leq \|g(u_n) - g(u)\|_r \|h\|_p \|v\|_p,$$

e portanto

$$\|\psi''(u_n) - \psi''(u)\| \leq \|g(u_n) - g(u)\|_r \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad \square$$

Teorema 5.5 (Lema da Deformação) [?]

Seja $\varphi^d = \varphi^{-1}(] - \infty, d[)$ e X um espaço de Hilbert onde $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Suponhamos que

$$\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) : \|\varphi'(u)\| \geq 2\varepsilon$$

Então existe $\eta \in C(X, X)$ tal que:

(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$

(ii) $\eta(\varphi^{c+\varepsilon}) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$.

Demonstração do Lema 1: Definimos $A = \varphi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$, $B = \varphi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ e

$$\psi(u) = \frac{\text{dist}(u, X \setminus A)}{\text{dist}(u, X \setminus A) + \text{dist}(u, B)},$$

Observe que ψ é localmente Lipschitziana, $\psi = 1$ em B e $\psi = 0$ em $X \setminus A$. Definiremos também, um campo vetorial Lipschitziano dado por

$$f(u) := \begin{cases} -\psi(u) \frac{\nabla \varphi(u)}{\|\nabla \varphi(u)\|^2}, & u \in A \\ 0, & u \in X \setminus A. \end{cases}$$

Temos claramente que $\|f(u)\| \leq \frac{1}{2\varepsilon}$ em X . Para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma(t, u) = f(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) = u, \end{cases}$$

possui solução única $\sigma(\cdot, u)$ definida em \mathbb{R} (vide [12] [?]). Portanto σ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. A função η definida em X por $\eta(u) := \sigma(2\varepsilon, u)$ satisfaz (i). Assim,

$$\frac{d}{dt} \varphi(\sigma(t, u)) = \langle \nabla \varphi(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt} \sigma(t, u) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \nabla \varphi(\sigma(t, u)), f(\sigma(t, u)) \rangle \\
&= -\psi(\sigma(t, u)).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, $\varphi(\sigma(\cdot, u))$ é não crescente. Seja $u \in \varphi^{c+\varepsilon}$. Se existe $t \in [0, 2\varepsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t, u)) < c - \varepsilon$, então $\varphi(\sigma(2\varepsilon, u)) < c - \varepsilon$ e (ii) é satisfeita. Se $\varphi(t, u) \in \varphi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, $\forall t \in [0, 2\varepsilon]$, então obtemos de (5.1) que

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma(2\varepsilon, u)) &= \varphi(u) + \int_0^{2\varepsilon} \frac{d}{dt} \varphi(\sigma(t, u)) dt \\
&= \varphi(u) - \int_0^{2\varepsilon} \psi(\sigma(t, u)) dt \\
&\leq c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon
\end{aligned}$$

e (ii) também é satisfeita. \square

Teorema 5.6 [?] *Seja X um espaço de Hilbert, $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$, $e \in X$, $r > 0$ tal que $\|e\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{5.2}$$

Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

$$a) \quad c - 2\varepsilon \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon,$$

$$b) \quad \|\varphi'(u)\| < 2\varepsilon,$$

onde $c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$ e $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Demonstração: Temos que (5.2) implica que $b \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t))$, e então, $b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(te)$.

Suponhamos que, para algum $\varepsilon > 0$, a conclusão do Teorema não seja válida.

Podemos supor que

$$c - 2\varepsilon \geq \varphi(0) \geq \varphi(e). \tag{5.3}$$

Pela definição de c , existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)) \leq c + \varepsilon. \quad (5.4)$$

Considere $\beta := \eta \circ \gamma$ onde η é dada no Lema 1. Temos, usando (i) e (5.3), que

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0$$

e

$$\beta(1) = \eta(\gamma(1)) = \eta(e) = e, \beta \in \Gamma.$$

Segue de (ii) e (5.4) que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \varphi(\beta(t)) \leq c - \varepsilon.$$

que é uma contradição. Isto conclui a demonstração do Teorema. \square

Teorema 5.7 (Ambrosetti-Rabinowitz) Teorema do Passo da Montanha

Sob as hipóteses do Teorema 5.6, se φ satisfaz $(PS)_c$ então c é um valor crítico de φ .

Demonstração: O Teorema 5.6 implica na existência de uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo $(PS)_c$. Como satisfaz $(PS)_c$, temos que (u_n) possui uma subsequência convergente, digamos para $u \in X$. Pelo fato de φ ser C^1 temos que $\varphi(u) = c$ e $\varphi'(u) = 0$, logo c é um valor crítico de φ .

Teorema 5.8 (Ponto Fixo de Brouwer)

Toda função contínua $g : I^n \rightarrow I^n$, onde $I^n = [0, 1]^n$, possui um ponto fixo x_0 tal que $g(x_0) = x_0$.

Teorema 5.9 (Desigualdade de Hölder)

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1$ e

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema 5.10 (Representação de Riesz-Fréchet)

Dada $\varphi \in H^*$ existe $f \in H$ único tal que $\varphi(v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H$. Ainda se verifica $\|f\| = \|\varphi\|_{H^*}$.

Proposição 5.2 O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

Lema 5.1 Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f\varphi' = 0, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Então, existe uma constante C tal que $f = C$ quase todo ponto.

Teorema 5.11 (Diagonalização de Cantor)

Suponha que haja uma sequência de conjuntos infinitos dos naturais tal que

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \dots \supset \mathbb{N}_n \supset \dots$$

Cada subconjunto \mathbb{N}_n é infinito, isto é, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ uma bijeção $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_n$ ordenada, quer dizer,

$$\varphi_n(k) < \varphi_n(k+1), \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Se definirmos $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por $\varphi(n) = \varphi_n(n)$, então, $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$ é um subconjunto infinito, φ é injetiva e crescente. Ainda, $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{N}_n$ é infinito $\forall n \in \mathbb{N}$. Mais do que isso, mostraremos que $\varphi(k) \in \mathbb{N}_n, \forall k \geq n$. Podemos dizer que para todo n , \mathbb{N}^* está quase contido em \mathbb{N}_n , no sentido de que só uma quantidade finita de elementos de \mathbb{N}^* pode não estar em \mathbb{N}_n .

Teorema 5.12 (Poincaré-Miranda)

Seja $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que para cada $i \leq n$, $f_i(I_i^-) \subset (-\infty, 0]$ e $f_i(I_i^+) \subset [0, +\infty)$. Então existe um ponto $c \in I^n$ tal que $f(c) = 0$. Onde $I_i^- = \{x \in I^n; x_i = 0\}$ e $I_i^+ = \{x \in I^n; x_i = 1\}$.

Demonstração: Faremos a prova para $n=2$. O enunciado nesse caso fica:

Seja $f : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ uma função contínua tal que para todo $i \leq 2$, $f_i(I_i^-) \subset (-\infty, 0]$ e $f_i(I_i^+) \subset [0, +\infty)$. Então existe $c \in I^2$ tal que $f(c) = 0$. Onde $I_i^- = \{(x_1, x_2) \in I^2; x_i = 0\}$ e $I_i^+ = \{(x_1, x_2) \in I^2; x_i = 1\}$.

PROVA: Considere $g(x, y) = (x, y) - \epsilon f(x, y)$, $\epsilon > 0$. Por hipótese, temos: $f_1(0, y) < 0$, $f_2(x, 0) < 0$, $f_1(1, y) > 0$, $f_2(x, 1) > 0$. Assim,

$$g(0, y) = (-\epsilon f_1(0, y), y - \epsilon f_2(0, y)) \quad , \quad \text{onde } -\epsilon f_1(0, y) > 0$$

$$g(x, 0) = (x - \epsilon f_1(x, 0), -\epsilon f_2(x, 0)) \quad , \quad \text{onde } -\epsilon f_2(x, 0) > 0$$

$$g(1, y) = (1 - \epsilon f_1(1, y), y - \epsilon f_2(1, y)) \quad , \quad \text{onde } 1 - \epsilon f_1(1, y) < 1$$

$$g(x, 1) = (x - \epsilon f_1(x, 1), 1 - \epsilon f_2(x, 1)) \quad , \quad \text{onde } 1 - \epsilon f_2(x, 1) < 1.$$

Queremos mostrar que $\exists \epsilon > 0 / g(I^2) \subset I^2$.

De fato, defina

$$g_n(x, y) = (x, y) - \epsilon_n(f_1(x, y), f_2(x, y)), \text{ com } \epsilon_n > 0 \text{ e } \epsilon_n \rightarrow 0.$$

Supondo por absurdo que não exista tal ϵ , existiria $(x_n, y_n) \in I^2$ tal que $g_n(x_n, y_n) \notin I^2$. Da compacidade de I^2 , podemos considerar a existência de (x_0, y_0) tais que $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow y_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

- Se $(x_0, y_0) \in \text{int}(I^2)$, teríamos um absurdo, pois

$$g_n(x_n, y_n) = (x_n, y_n) - \epsilon_n(f_1(x_n, y_n), f_2(x_n, y_n)) \longrightarrow (x_0, y_0), \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que é um absurdo do fato de $g_n(x_n, y_n) \notin I^2$.

- Se $(x_0, y_0) \in \partial I^2$ teríamos quatro casos:

1) $x_0 = 0$ e $y_0 \neq 0$;

2) $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 0$;

3) $x_0 = 1$ e $y_0 \neq 0$;

4) $x_0 \neq 0$ e $y_0 = 1$.

Mostraremos o caso 4), os outros são análogos. De fato, 4) ocorre, pois considere

$$g_n(x_0, 1) = (x_0 - \epsilon_n f_1(x_0, 1), 1 - \epsilon_n f_2(x_0, 1)) \text{ onde } 1 - \epsilon_n f_2(x_0, 1) < 1$$

Desse modo teríamos

$$x_0 - \epsilon_n f_1(x_0, 1) > 1 \Rightarrow x_0 \geq 1 \text{ ou } x_0 - \epsilon_n f_1(x_0, 1) < 0 \Rightarrow x_0 \leq 0.$$

Logo, $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

◇ Se $x_0 = 0 \Rightarrow f_1(0, 1) < 0 \Rightarrow -\epsilon_n f_1(0, 1) > 0$ o que é um absurdo!

◇ Se $x_0 = 1 \Rightarrow f_1(1, 1) > 0 \Rightarrow 1 - \epsilon_n f_1(1, 1) < 1$ o que é um absurdo!

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 5.8 Apêndice), garantimos que $\exists (x_1, y_1) \in I^2$ tal que $g(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$. Isto implica que

$$-\epsilon f(x_1, y_1) = 0, \epsilon > 0 \Rightarrow f(x_1, y_1) = 0.$$

Portanto, chame $c = (x_1, y_1)$ e a demonstração segue. \square

Reciprocamente: Sendo $g : I^2 \rightarrow I^2$ contínua, defina

$$f(x, y) = (x, y) - g(x, y).$$

Se f satisfaz as hipóteses do Teorema de Poincaré-Miranda, então g tem ponto fixo.

Demonstração: Garantiremos que f satisfaz as hipóteses do Teorema de Poincaré-Miranda. Como $0 \leq g_i(x, y) \leq 1$ temos,

$$f_2(x, 0) = -g_2(x, 0) \leq 0,$$

$$f_2(x, 1) = 1 - g_2(x, 1) \geq 0,$$

$$f_1(0, y) = -g_1(0, y) \leq 0,$$

$$f_1(1, y) = 1 - g_1(1, y) \geq 0.$$

Pelo Teorema de Poincaré-Miranda, existe $c \in I^2$ tal que $f(c) = 0$ e portanto $g(c) = c$.

Logo, c é ponto fixo de g . \square

6 Bibliografia

Referências

- [1] **C.O. Alves:** *Existência de solução do tipo mult-bump para uma classe de problemas quasilineares em \mathbb{R}^n* , Tese de Dissertação para concurso Professor Titular, UFCG (2005)
- [2] **C.O. Alves e Y.H. Ding:** *Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems*, preprint.
- [3] **T. Bartsch e Z.Q. Wang:** *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on \mathbb{R}^n* , Comm. Part. Diff. Eqs. 20 (1995), 1725–1741
- [4] **T. Bartsch e Z.Q. Wang:** *Multiple positive solutions for a nonlinear Schrodinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. 51 (2000), 366–384
- [5] **T. Bartsch e A. Pankov e Z. Wang:** *Nonlinear Schrodinger equations with steep potential well*, Commun. Contemp.Math. 3 (2001), 549–569
- [6] **H. Berestycki e P.L Lions:** *Nonlinear scalar field equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 313–345
- [7] **M. Clapp e Y.H. Ding:** *Positive solutions of a Schrödinger equations with critical nonlinearity*, a aparecer em Z. Angew. Math. Phys.
- [8] **V. Coti-Zelati:** *Introduction to critical point theory*, School on Nonlinear Differential Equations ICTP-Trieste, (October-2006)
- [9] **V. Coti-Zelati e P.H. Rabinowitz:** *Homoclinic type solutions for semilinear elliptic PDE on \mathbb{R}^n* , Comm. Pure. Appl. Math. LV (1992), 1217–1269
- [10] **M. del Pino e P.L. Felmer** *Local mountain passes for semilinear elliptic problems em unbounded domains*, Cal. Var. PDE. 4 (1996), 121–137

- [11] **Y. Ding e K. Tanaka:** *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrodinger equation*, Manuscripta Math. 112 (2003), 109–135
- [12] **C.I. Doering e A.O. Lopes:** *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro, (2005)
- [13] **L.C.Evans:** *Partial differential equations*, A.M.S, Providence, (1997)
- [14] **D.G. Figueiredo:** *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, *Differential Equations*, (Editores D.G de Figueiredo e C.S. Honig), Lectures Notes in Math. 957, Springer, Berlin (1982), 34–87
- [15] **D.G. Figueiredo e Y.H. Ding:** *Solutions of a nonlinesr Schrödinger equation*, Discr. Contin.Dynam. Syst. 8 (2002), 563–584
- [16] **C. Gui:** *Existence of multi-bumb solutions for nonlinear Schrodinger equations via variational method*, Comm. Part. Diff. Eqs. 21 (1996), 787–820
- [17] **W. Kulpa:** *The Poincaré-Miranda theorem*, Amer. Math. Monthly (1997), 545–550
- [18] **K.M. Kwong:** *Uniqueness of positive solution of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbb{R}^n* , Arch. Rat. Mech. Analysis, 105 (1989), 243–266
- [19] **Y.Y. Li:** *On a singularly perturbed elliptic equation*, Adv. Diff. Eqs. 2 (1997), 955–980
- [20] **R. Ortega:** *Degree theory and boundary value problems*, School on Nonlinear Differential Equations, ICTP-Trieste, (October-2006)
- [21] **S.I. Pohozaev:** *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Soviet Math. 5 (1965), 1408–1411
- [22] **P.H. Rabinowitz:** *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series Math. 65, Amer. Math. Soc., Providence (1986)

- [23] **E. Séré:** *Existence of infinitely many homoclinic orbits in hamiltonian systems*,
Math. Z. 209 (1992), 27–42
- [24] **B. Simon:** *Schrödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S) 7 (1982),
447–526
- [25] **M. Struwe:** *Variational methods*, Vol 34, Springer, Berlin, (1996).
- [26] **M. Willem:** *Minimax theorems*, Boston, (1996).