

Amanda Gonçalves Saraiva

Complexo Quadrático de Retas

Belo Horizonte-MG

2007

Complexo Quadrático de Retas

Amanda Gonçalves Saraiva

Orientador: Prof. Dr. Dan Avritzer

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática
do Instituto de Ciências Exatas
da Universidade Federal de Minas Gerais,
como requisito à obtenção do título de
MESTRE EM MATEMÁTICA.

Belo Horizonte-MG

2007

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Dan pela paciência, pela amizade e por me apresentar essa fascinante teoria.

Aos meus pais, pelo apoio e carinho vindos de tão longe.

À minha família, por tantas vezes compreender minha ausência.

À todos os meus amigos e colegas de faculdade.

E ao meu querido Eloy, por tornar tudo mais fácil e agradável.

Resumo

Ao estudarmos a Grassmanniana de retas do espaço projetivo e a quádrlica de Plücker associada à mesma, notamos a presença de interessantes configurações de retas. A partir dessas configurações, obtêm-se uma superfície no espaço projetivo, chamada de Superfície de Kümmer. Analisaremos diversas propriedades da superfície de Kümmer dentre elas o fato de que a mesma possui exatamente 16 pontos singulares; para isso, faremos uso direto do Cálculo de Schubert, introduzido também nessa dissertação. Posteriormente, analisaremos alguns complexos de retas associados à uma superfície de grau 4, no espaço projetivo de dimensão 5, que é birracionalmente equivalente a superfície de Kümmer. Nesses complexos de retas existem várias associações interessantes entre a superfície de Kümmer e o dual dessa superfície.

Palavras - Chave: Kümmer, Grassmanniana, Schubert.

Abstract

On studying the Grassmanian of lines in projective space and Plücker's Quadric related to it, we noted the presence of interesting configurations of lines. From those configurations, a surface in projective space, the so called Kummer's surface, arrives. We analyze several properties of the Kummer's surface, among those, the fact that it has exactly 16 singular points, and in order to show this assertion, we make straightforwardly use of Schubert's Calculus, also introduced in the present dissertation. Afterwards, some line's complexes related to the fourth degree surface, in 5-dimensional projective space, - which is birationally equivalent to Kummer's surface - are analyzed. Also, in this same subject of line's complexes, curious relations among Kummer's surface and its dual are found and stated here.

Key - words: Kummer, Grassmanniana, Schubert.

Sumário

Resumo	i
Abstract	i
Introdução	iii
1 Preliminares	1
1.1 Variedades Afins	1
1.1.1 Funções e Mapas Regulares	1
1.1.2 Funções e Mapas Racionais	3
1.2 Variedades Projetivas	4
1.2.1 O espaço projetivo \mathbb{P}^n	4
1.2.2 Variedades Projetivas	5
1.2.3 Funções e Mapas Regulares	6
1.2.4 Funções e Mapas Racionais	7
1.2.5 Produto de Espaços Projetivos	8
1.2.6 Dimensão	9
1.3 O Teorema de Bézout	10
1.3.1 Junção de Variedades	11
1.3.2 O Teorema de Bézout	12
1.4 Ramificação	13
1.5 Gênero	16
2 Grassmannianas	18
2.1 Quádricas	18
2.2 Grassmannianas	23
2.2.1 Coordenadas de Plücker	23
2.2.2 Grassmanniana	23
2.2.3 Correspondência de Incidência	28

3	Cálculo de Schubert	31
3.1	Condições de Schubert	31
3.2	O Cálculo de Schubert	34
4	Complexo Quadrático de Retas	43
4.1	Complexo de Retas	43
4.1.1	Complexo Linear de Retas	43
4.1.2	Complexo Quadrático de Retas	45
4.2	Superfície de Kummer	48
4.3	Retas Singulares do Complexo Quadrático de Retas	49
4.4	O grau de S	51
4.5	Equação da Superfície de Kummer S	55
4.6	Pontos Singulares da Superfície de Kummer	59
4.7	Duas Configurações	66
4.7.1	Configuração $(16)_6$	66
4.7.2	Configuração $(32_{20}80_8)$	69

Introdução

Ao introduzir essa dissertação, torna-se indispensável a apresentação da Grassmanniana $G(1, 3)$, definida como o conjunto de todas as retas de \mathbb{P}^3 . $G(1, 3)$ mergulha em \mathbb{P}^5 como uma quádriga G , denotada Quádriga de Plücker. O estudo dessas variedades data da metade do século XIX e foi iniciado pelo matemático Hermann Grassmann. Um estudo mais detahado sobre as Grassmannianas é apresentado no capítulo 2.

O objetivo do presente trabalho é fazer um estudo sistemático do Complexo Quadrático de Retas, que vem a ser as retas em \mathbb{P}^3 parametrizadas pela interseção suave da quádriga de Plücker G , com uma segunda quádriga suave $F \subset \mathbb{P}^5$. Posteriormente, vamos analisar diversas propriedades geométricas e algébricas da superfície de Kummer, uma superfície de \mathbb{P}^3 associada ao complexo quadrático de retas $X = G \cap F$ (veja a seção 4.2). A superfície de Kummer, publicada em 1864 pelo matemático Ernst Eduard Kummer, possui várias propriedades e configurações interessantes, dentre elas o fato de que ela possui 16 pontos singulares isolados e 16 planos tangentes singulares.

O capítulo 1 trata de alguns pré-requisitos, necessários para uma melhor compreensão dos demais capítulos. Daremos as definições de mapas regulares e mapas racionais entre variedades afins e, mais adiante, entre variedades projetivas. Falaremos de produto de espaços projetivos, dando um exemplo da imersão de Segre. Passaremos de forma rápida pelo Teorema de Dimensão das Fibras. Logo depois estudaremos a Junção de Variedades, com a finalidade de provar o Teorema de Bézout. Na seção 1.4 utilizaremos alguns conceitos da Teoria de Corpos (para detalhes veja [1]). Conheceremos as definições de grau de um mapa, e de ramificação. Finalmente, vamos relacionar o grau de um mapa regular com o número de pontos de ramificação desse mapa. A seção 1.5 faz uso de conceitos e resultados relacionados com a teoria de superfícies de Riemann, a qual pode ser encontrada na referência [2].

No capítulo 2, vamos primeiramente definir superfícies quádricas e classificá-las de acordo com seu posto. Essa classificação será ilustrada através de alguns exemplos. Posteriormente, conheceremos a definição de cone e a relacionaremos com quádricas singulares. A seção 2.2 se dedica à teoria das Grassmannianas, cujo objetivo é representar os d -planos de \mathbb{P}^n por pontos em uma certa variedade G em \mathbb{P}^N , em que $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$. Em seguida, na subseção 2.2.3, faremos uso de uma variedade, chamada correspondência de incidência, e do teorema de dimensão das fibras, para calcular a dimensão

da família de k -planos contidos em uma quádrlica suave $F \subset \mathbb{P}^n$, cálculo esse com aplicações no capítulo 4.

O Capítulo 3 diz respeito ao Cálculo de Schubert. Essa teoria foi criada pelo matemático alemão Hermann C. H. Schubert, na segunda metade do século XIX. Schubert trabalhou na Geometria Enumerativa, uma parte da Geometria Algébrica que estuda a resolução de problemas enumerativos. O presente capítulo dá uma introdução à teoria do Cálculo de Schubert e apresenta vários exemplos nos quais a mesma é aplicada. Nesses exemplos são explorados tanto o aspecto algébrico quanto o geométrico, além disso alguns deles nos serão úteis ao longo do capítulo 4.

Finalmente, no capítulo 4, daremos a definição de Complexo de Retas e um exemplo, o Complexo Linear de Retas. Passaremos então ao estudo do Complexo Quadrático de Retas $X = G \cap F$ e de duas possíveis configurações de retas relacionadas ao mesmo: X_P , que são as retas em \mathbb{P}^3 que passam pelo ponto $P \in \mathbb{P}^3$ e X_h , as retas de \mathbb{P}^3 , contidas em um plano $h \in \mathbb{P}^{3*}$ (X_P e X_h também podem ser vistos como cônicas, contidas em planos no \mathbb{P}^5).

Posteriormente, vamos introduzir a Superfície de Kummer $S \subset \mathbb{P}^3$, definida como o conjunto dos pontos $P \in \mathbb{P}^3$ tais que a cônica X_P é singular. Na seção 4.3 vamos definir $\Sigma \subset X$, uma subvariedade em \mathbb{P}^5 birracionalmente equivalente à superfície de Kummer S . Faremos uso da superfície $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ na seção 4.4, para mostrar que o grau de S é quatro. Já a seção 4.5 nos dá, de forma explícita, a equação da superfície S .

Veremos na seção 4.6 que a superfície de Kummer S tem exatamente 16 pontos singulares, para isso faremos uso direto do Cálculo de Schubert, introduzido no capítulo 3. Para completar esse trabalho a seção 4.7 estuda duas configurações de retas presentes na superfície Σ . Uma delas, descrita no teorema 4.7.1.2 diz que Σ contém exatamente 32 retas, 16 referentes aos pontos singulares da superfície de Kummer S e 16 referentes aos pontos singulares da superfície de Kummer dual S^* . A segunda configuração, dada no teorema 4.7.2.1, relaciona as retas em Σ com as seções hiperplanas que as contém. Ao analisarmos todas as propriedades e configurações presentes em Σ , teremos idéia da beleza e do mistério, contidos nessa fascinante superfície.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é expor de maneira rápida várias noções, umas básicas, outras nem tanto, fundamentais para a compreensão desta dissertação. As noções aqui descritas são bastante ricas (veja [3] e [4]) mas, por razões de espaço, omitiremos os detalhes.

1.1 Variedades Afins

Escreveremos A^n para denotar o espaço afim de dimensão n sobre um corpo K . Assim os pontos de A^n são os pontos da forma $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_i \in K$.

Definição 1.1.0.1. *Uma **variedade afim** (ou conjunto algébrico) é um subconjunto $X \subset A^n$ consistindo de todos os zeros comuns de um número finito de polinômios com coeficientes em K .*

Se X for uma variedade afim definida como os zeros comuns dos polinômios f_1, \dots, f_r , escreveremos $X = V(f_1, \dots, f_r)$. Se $X = V(f)$, dizemos que X é uma **hipersuperfície**.

Se $X \subset A^n$ é um subconjunto algébrico, vamos considerá-lo como espaço topológico com a topologia de Zariski.

1.1.1 Funções e Mapas Regulares

Definição 1.1.1.1. Dizemos que uma função f definida em uma variedade afim $X \subset A^n$ e tomando valores em K é **regular** se existe um polinômio $F(t)$ com coeficientes em K tal que $f(x) = F(x) \forall x \in X$.

Dada uma função regular f , geralmente o polinômio F não é unicamente determinado. Seja $K[X]$ o conjunto de todas as funções regulares de X e defina nesse conjunto as operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar como as operações das funções avaliadas em cada ponto $x \in X$. Com essas operações o conjunto $K[X]$ é um anel e é denominado *anel de coordenadas de X* .

Nós escrevemos $K[t]$ para denotar o anel de polinômios com coeficientes em K nas variáveis t_1, \dots, t_n . Podemos associar cada polinômio $F \in K[t]$ a uma função $f \in K[X]$, basta restringir F ao subconjunto X . Temos então um homomorfismo de $K[t]$ para $K[X]$. O núcleo desse homomorfismo consiste de todos os polinômios $F \in K[t]$ que valem zero em todos os pontos $x \in X$. Ele é um ideal de $K[t]$ (é o núcleo de um homomorfismo de anéis), chamado de *ideal da variedade X* , e é denotado por \mathcal{U}_X . Temos que

$$K[X] = K[t]/\mathcal{U}_X.$$

Exemplo 1.1.1.2. Se $X = K^n$ então $K[X] = K[t]$

Exemplo 1.1.1.3. Seja $X \subset A^2$ dada pela equação $t_1 t_2 = 1$. Então $K[X] = K[t_1, t_1^{-1}]$ e consiste de todas as funções racionais em t_1 da forma $G(t_1)/t_1^n$, em que $G(t_1)$ é um polinômio e $n \geq 0$.

Sejam $X \subset A^n$ e $Y \subset A^m$ variedades afins.

Definição 1.1.1.4. Um mapa $f : X \rightarrow Y$ é **regular** se existem m funções regulares f_1, \dots, f_m em X tais que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in X$.

Exemplo 1.1.1.5. O mapa projeção $(x, y) \rightarrow x$ define uma mapa regular da curva definida por $xy = 1$ para A^1 .

Exemplo 1.1.1.6. O mapa $f(t) = (t^2, t^3)$ é um mapa regular da reta A^1 para a curva dada por $y^2 = x^3$.

Definição 1.1.1.7. Um mapa regular $f : X \rightarrow Y$ de variedades afins é um **isomorfismo** se tem uma inversa, isto é, se existe um mapa regular $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = 1$ e $g \circ f = 1$. Nesse caso dizemos que X e Y são *isomorfas*.

1.1.2 Funções e Mapas Racionais

Definição 1.1.2.1. *Uma variedade afim X é **redutível** se existem subvariedades próprias $X_1, X_2 \subsetneq X$ tal que $X = X_1 \cup X_2$. Caso contrário X é **irredutível**.*

Sabemos que um anel sem divisores de zero está contido em um corpo, o seu corpo de frações.

Definição 1.1.2.2. *Se uma variedade afim X é irredutível então o corpo de frações do anel de coordenadas $K[X]$ é o **corpo de funções** ou **corpo de funções racionais** de X e é denotado por $K(X)$.*

Podemos dizer que o corpo de funções $K(X)$ consiste das funções racionais $f(t)/g(t)$ tal que $g(t) \notin \mathcal{U}_X$ e $f/g = f_1/g_1$ se $fg_1 - f_1g \in \mathcal{U}_X$.

Definição 1.1.2.3. *Uma função racional $\varphi \in K(X)$ é regular em $x \in X$ se pode ser escrita da forma $\varphi = f/g$, com $f, g \in K[X]$ e $g(x) \neq 0$. Nesse caso dizemos que o elemento $f(x)/g(x) \in K$ é o valor de φ em x e o denotamos por $\varphi(x)$.*

Definição 1.1.2.4. *Sejam $X \subset A^n$ e $Y \subset A^m$ variedades afins. Um **mapa racional** $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma m -upla de funções racionais $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in K(X)$, tal que para todo ponto $x \in X$ no qual φ_i é regular, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \in Y$; dizemos que φ é regular em tal ponto x e $\varphi(x) \in Y$ é a imagem de x . A imagem de X por um mapa racional φ é o conjunto de pontos*

$$\varphi(X) = \{\varphi(x) | x \in X \text{ e } \varphi \text{ regular em } x\}.$$

Seja $\varphi : X \rightarrow Y$ um mapa racional e suponha que $\varphi(X)$ seja denso em Y . Considere φ como um mapa $U \rightarrow \varphi(X) \subset Y$, em que U é o domínio de definição de φ . Para cada função $f \in K[Y]$ defina $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ que é uma função racional em X . De fato, se $Y \subset A^m$ e f é dado por um polinômio $u(T_1, \dots, T_m)$, então $\varphi^*(f)$ é dado pela função racional $u(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Dessa forma temos um mapa $\varphi^* : K[Y] \rightarrow K(X)$. Esse mapa é a inclusão $K[Y] \hookrightarrow K(X)$. De fato, se $\varphi^*(u) = 0$ para $u \in K[Y]$ então $u = 0$ em $\varphi(X)$, mas se $u \neq 0$ em Y a equação $u = 0$ define um conjunto fechado $V(u) \subsetneq Y$. Então $\varphi(X) \subset V(u)$, mas isso contradiz o fato de $\varphi(X)$ ser denso em Y . A inclusão $\varphi^* : K[Y] \hookrightarrow K(X)$ pode ser estendida para uma inclusão isomorfa dos corpos de frações $K(Y)$ em $K(X)$. Assim se $\varphi(X)$ é denso em Y , o mapa racional φ define um mergulho $\varphi^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Dados dois mapas racionais $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ tal que $\varphi(X)$ é denso em Y , então podemos definir a composta $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$; se além disso $\psi(Y)$ for denso em Z então $(\psi \circ \varphi)(X)$ também o é. Assim a inclusão dos corpos satisfaz a seguinte relação $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Definição 1.1.2.5. *Um mapa racional $\varphi : X \rightarrow Y$ é **birracional** se φ tem um mapa racional inverso $\psi : Y \rightarrow X$, isto é, $\varphi(X)$ é denso em Y e $\psi(Y)$ é denso em X , e $\psi \circ \varphi = 1$, $\varphi \circ \psi = 1$ (onde é definido). Nesse caso dizemos que X e Y são **birracionais**.*

Um mapa $\varphi : X \rightarrow Y$ é birracional se e somente se o mapa inclusão dos corpos $\varphi^* : K(Y) \rightarrow K(X)$ é um isomorfismo (veja [4], capítulo 1, seção 3.3). Assim variedades afins X e Y são birracionais se e somente se os corpos $K(X)$ e $K(Y)$ são isomorfos sobre K .

1.2 Variedades Projetivas

1.2.1 O espaço projetivo \mathbb{P}^n

Definição 1.2.1.1. *Um ponto P do **espaço projetivo** \mathbb{P}^n sobre o corpo K é definido por uma $(n+1)$ -upla $(p(0), \dots, p(n))$, tais que $p(i) \in K$ são não simultaneamente nulos. Os números $p(i)$'s são chamados **coordenadas homogêneas** de P . Uma outra $(n+1)$ -upla $(q(0), \dots, q(n))$ também define P se e somente se existe um número c , não nulo, tal que $p(i) = cq(i)$ para todo $i = 0, \dots, n$.*

Identificando um ponto $(a(1), a(2), \dots, a(n))$ de A^n com o ponto

$$(1, a(1), a(2), \dots, a(n))$$

de \mathbb{P}^n , podemos pensar em \mathbb{P}^n como um A^n completado pelos pontos

$$(0, b(1), b(2), \dots, b(n))$$

"no infinito" em \mathbb{P}^n . Para mais detalhes veja [3].

Definição 1.2.1.2. *Um **espaço linear** L em \mathbb{P}^n é definido pelo conjunto dos pontos $P = (p(0), \dots, p(n))$ de \mathbb{P}^n tais que as coordenadas $p(j)$ satisfazem a um sistema linear de equações $\sum_{j=0}^n b_{\alpha j} p(j)$, com $\alpha = 1, \dots, (n-d)$.*

Dizemos que L tem dimensão d se as $(n - d)$ equações acima são linearmente independentes, isto é, se a matriz $(n - d) \times (n + 1)$ de coeficientes $[b_{\alpha j}]$ tem todos os menores $(n - d) \times (n - d)$ não nulos. Sabemos da Álgebra Linear que existem $(d + 1)$ pontos $P_i = (p_i(0), \dots, p_i(n))$, $i = 0, \dots, d$, que geram L . L é chamado de **reta** se $d = 1$, **plano** se $d = 2$ e **hiperplano** se $d = (n - 1)$. Um **d -plano** é um espaço linear de dimensão d .

Em geral um isomorfismo linear $T : A^{n+1} \rightarrow A^{n+1}$ induz uma mudança de coordenadas $T : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$. Conseqüentemente temos a seguinte

Proposição 1.2.1.3. *Dados $n + 2$ pontos $P_i \in \mathbb{P}^n$, $i = 1, \dots, n + 2$, existe uma mudança de coordenadas T tal que $T(E_i) = P_i$, em que $E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, com 1 na posição i , para $i = 1, \dots, n + 1$ e $E_{n+2} = (1, \dots, 1)$.*

1.2.2 Variedades Projetivas

Dado um polinômio qualquer $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ definido em A^{n+1} , não podemos dizer se F se anula ou não em pontos de \mathbb{P}^n . Porém se F for homogêneo de grau d temos que

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n).$$

Nesse caso faz sentido dizer se F se anula ou não em $x \in \mathbb{P}^n$.

Definição 1.2.2.1. *Uma **variedade projetiva** $X \subset \mathbb{P}^n$ é definida como o conjunto dos zeros de uma coleção de polinômios homogêneos F_α .*

Se X for uma variedade definida como os zeros comuns dos polinômios homogêneos F_1, \dots, F_r , escreveremos $X = V(F_1, \dots, F_r)$. Se $X = V(F)$, dizemos que X é uma **hipersuperfície**.

Exemplo 1.2.2.2. *Uma cônica é uma variedade em \mathbb{P}^2 dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2, ou seja, um polinômio da forma*

$$F(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{01}xy + a_{02}xz + a_{11}y^2 + a_{12}zy + a_{22}z^2.$$

Definição 1.2.2.3. *Uma hipersuperfície $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$ é dita **singular** em um ponto $P \in \mathbb{P}^n$ se*

$$F(P) = \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = 0.$$

*Dizemos que uma variedade é **não-singular** ou **suave** se ela for não-singular todos os seus pontos.*

Exemplo 1.2.2.4. Seja $V = V(zw - xy)$ uma hipersuperfície em \mathbb{P}^3

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = w, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = z.$$

Portanto $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w}) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$.

$\therefore V$ é não singular.

Exemplo 1.2.2.5. Seja $S = V(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{P}^3$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Portanto $\nabla F = (-2x, -2y, 2z, 0) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, w)$.

$\therefore S$ é singular em $(0, 0, 0, 1)$.

Definição 1.2.2.6. Uma variedade **quasiprojetiva** é um subconjunto aberto de uma variedade projetiva.

1.2.3 Funções e Mapas Regulares

Definição 1.2.3.1. Uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é dita **irredutível** se sempre que $X = X_1 \cup X_2$, em que X_1 e X_2 são variedades projetivas, tivermos $X = X_1$ ou $X = X_2$.

Uma função racional em $K[x_0, \dots, x_n]$

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{P(x_0, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_n)}$$

em geral não pode ser vista como uma função racional de $x \in \mathbb{P}^n$ (supondo $Q(x) \neq 0$). Entretanto se f for uma função homogênea de grau zero, isto é, se P e Q são polinômios homogêneos de mesmo grau, f é uma função de $x \in \mathbb{P}^n$.

Definição 1.2.3.2. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasiprojetiva, $x \in X$ e $f = P/Q$ uma função homogênea de grau zero com $Q(x) \neq 0$. Nesse caso f define uma função em uma vizinhança de x tomando valores em K e dizemos que a função f é **regular** em $x \in X$. A função f é regular em X se ela for regular em todos os pontos $x \in X$.

O conjunto de todas as funções regulares em X formam um anel, vamos denotá-lo por $K[X]$. Ao contrário do caso afim, o anel $K[X]$ pode consistir apenas de funções constantes; isso ocorre quando X é uma variedade projetiva irredutível. (Veja [4], seção 5.2, corolário 1, teorema 3).

Definição 1.2.3.3. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa entre variedades quasiprojetivas com $Y \subset \mathbb{P}^n$. O mapa f é **regular** se para todo ponto $x \in X$ e para algum subespaço afim A_i^m contendo $f(x)$ existe uma vizinhança $U \ni x$ tal que $f(U) \subset A_i^m$ e o mapa $f : U \rightarrow A_i^m$ é regular.*

Se considerarmos mapas regulares entre uma variedade quasiprojetiva irredutível X e o espaço projetivo \mathbb{P}^n , a definição acima pode ser reescrita da seguinte forma (veja [4], capítulo 1, seção 4.2):

Definição 1.2.3.4. *Um mapa regular $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ de uma variedade quasiprojetiva irredutível X para \mathbb{P}^n é dado por uma $(m+1)$ -upla*

$$(F_0, \dots, F_m) \tag{1.1}$$

de polinômios homogêneos de mesmo grau em $K[x_0, \dots, x_n]$ tal que para cada $x \in X$ existe uma expressão (1.1) para f com $F_i(x) \neq 0$ para pelo menos um i .

Um *isomorfismo* é um mapa regular que tem um mapa regular inverso.

1.2.4 Funções e Mapas Racionais

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasiprojetiva irredutível e \mathcal{O}_X o conjunto das funções racionais $f = P/Q$, tal que $P, Q \in K[x_0, \dots, x_n]$ são polinômios homogêneos do mesmo grau e $Q \notin \mathcal{U}_X$. Segue da irredutibilidade de X que \mathcal{O}_X é um anel.

Seja M_X o conjunto das funções $f \in \mathcal{O}_X$ tal que $P \in \mathcal{U}_X$. M_X é um ideal maximal, dessa forma o anel quociente \mathcal{O}_X/M_X é um corpo, chamado *corpo de funções de X* ou *corpo de funções racionais de X* e é denotado por $K(X)$.

Definição 1.2.4.1. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasiprojetiva. Um mapa **racional** $f : X \rightarrow \mathbb{P}^m$ é definido pela $(m+1)$ -upla (F_0, \dots, F_m) de polinômios homogêneos do mesmo grau nas $n+1$ coordenadas homogêneas de \mathbb{P}^n contendo X , tais que pelo menos um $F_i \notin \mathcal{U}_X$. Dois mapas (F_0, \dots, F_m) e (G_0, \dots, G_m) são iguais se $F_i G_j = F_j G_i$ em X para todo i, j .*

Assim como em variedades afins se a imagem de um mapa racional $f : X \rightarrow Y$ é denso em Y então f define uma inclusão de corpos $f^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Se um mapa racional $f : X \rightarrow Y$ tem mapa inverso, racional, dizemos que f é *biracional* e X e Y são *biracionais*. Nesse caso a inclusão de corpos $f^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ é um isomorfismo.

1.2.5 Produto de Espaços Projetivos

Se \mathbb{P}^n e \mathbb{P}^m são espaços projetivos o produto cartesiano $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ não é um espaço projetivo, pois dados $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathbb{P}^m$ temos que $(kx, y) \neq k(x, y)$, para $k \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Para contornarmos o problema, definimos o produto de espaços projetivos através da Imersão de Segre Ψ , dada por:

$$\Psi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$$

$$((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_m)) \mapsto (x_0y_0, x_0y_1, \dots, x_0y_m, x_1y_0, \dots, x_ny_m)$$

em que $N = (n + 1)(m + 1) - 1$.

A imagem do mapa de Segre é uma variedade algébrica, geralmente denotada por $\Sigma_{n,m}$. De fato, se considerarmos Z_{ij} como coordenadas em \mathbb{P}^N , $\Sigma_{n,m}$ é dada pelos zeros dos seguintes polinômios quadráticos:

$$Z_{i,j}Z_{k,l} - Z_{i,l}Z_{k,j}, i, k = 0, \dots, n; \quad j, l = 0, \dots, m.$$

Exemplo 1.2.5.1.

$$\Psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$((x_0, x_1), (y_0, y_1)) \mapsto (x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1).$$

Primeiramente vamos verificar a boa definição: dado $(kx_0, kx_1) \in \mathbb{P}^1$, $k \neq 0$, temos que

$$\Psi(k(x_0, kx_1), (y_0, y_1)) \mapsto (kx_0y_0, kx_0y_1, kx_1y_0, kx_1y_1) = k(x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1).$$

A verificação é análoga ao considerarmos $(ky_0, ky_1) \in \mathbb{P}^1$, $k \neq 0$.

Vamos denotar as coordenadas de \mathbb{P}^3 por $(Z_{00}, Z_{01}, Z_{10}, Z_{11})$. Então Ψ aplica $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ biunivocamente sobre a superfície de \mathbb{P}^3 dada por

$$Q = V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$$

De fato, $\Psi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset Q$. Reciprocamente dado $z \in Q$, $z = (z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11})$, suponha que $z_{00} \neq 0$. Então se $x = (z_{00}, z_{01})$ e $y = (z_{00}, z_{10})$, temos:

$$\Psi(x, y) = (z_{00}z_{00}, z_{01}z_{00}, z_{00}z_{10}, z_{11}z_{00}) = z_{00}z,$$

pois $z_{00}z_{11} = z_{10}z_{01}$. Por outro lado vemos que $z \in Q$ determina $x, y \in \mathbb{P}^1$ de maneira única, ou seja, Ψ é injetora o que conclui nosso argumento.

Note que a quádrlica Q é a quádrlica não singular de \mathbb{P}^3 (veja a seção 2.1). Fixado $x \in \mathbb{P}^1$, $x = (a_0, a_1)$, verifica-se que o conjunto

$$\Psi(x \times \mathbb{P}^1) = (a_0y_0, a_0y_1, a_1y_0, a_1y_1)$$

é dado, em \mathbb{P}^3 , pelas equações:

$$a_0Z_{00} = a_1Z_{10} \quad e \quad a_1Z_{01} = a_0Z_{11}.$$

que é a equação de uma reta.

Por outro lado considere duas retas $\Psi(x \times \mathbb{P}^1)$ e $\Psi(x' \times \mathbb{P}^1)$, em que $x' = (a'_0, a'_1)$ e suponha que elas tenham um ponto em comum, isto é

$$(a_0y_0, a_0y_1, a_1y_0, a_1y_1) = (a'_0y_0, a'_0y_1, a'_1y_0, a'_1y_1).$$

Temos que: se $a'_0, a'_1 \neq 0$,

$$\frac{a_0}{a'_0} = \frac{a_1}{a'_1}, \quad \text{ou seja, } (a_0, a_1) = (a'_0, a'_1).$$

Se $a'_0 = 0, a'_1 \neq 0$ temos que $a'_1 = ca_1, c \neq 0$. Analogamente se $a'_1 = 0$.

Em qualquer caso vemos que duas retas distintas $\Psi(x \times \mathbb{P}^1)$ e $\Psi(x' \times \mathbb{P}^1)$ não se interceptam.

De maneira análoga podemos considerar retas $\Psi(\mathbb{P}^1 \times y), y \in \mathbb{P}^1$, obtendo uma segunda famílias de retas com propriedades análogas às da primeira.

Verifica-se que dadas duas retas de cada família, elas possuem um único ponto de interseção. Além disso, dado um ponto $z \in Q$, existem exatamente duas retas contidas na quádrlica, uma de cada família, que se interceptam em z .

1.2.6 Dimensão

Conheceremos agora a definição de dimensão de uma variedade quasiprojetiva irredutível. Existem várias "definições" equivalentes em [3], Lecture 11,

que valem a pena ser estudadas. Enunciaremos o Teorema da Dimensão das Fibras, que terá aplicações diversas nessa dissertação e daremos a definição de grau de uma variedade quasiprojetiva irredutível k -dimensional.

Definição 1.2.6.1. A *dimensão* de uma variedade quasiprojetiva irredutível X , é o grau de transcendência do corpo de funções $K(X)$ sobre K e é denotada por $\dim(X)$. A dimensão de uma variedade redutível é o máximo da dimensões de suas componentes irredutíveis. Se $Y \subset X$ é uma subvariedade de X , então o número $(\dim(X) - \dim(Y))$ é chamado de *codimensão* de Y em X .

Para um dado mapa regular $f : X \rightarrow Y$ entre variedades quasiprojetivas e um ponto $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ é chamado de fibra de f por y . Esse conjunto é uma subvariedade fechada de X . Vamos enunciar agora o Teorema da Dimensão das Fibras (veja [4], capítulo 1, seção 6.3), que estabelece uma relação entre a dimensão da fibra $f^{-1}(y)$ e as dimensões de X e Y .

Teorema 1.2.6.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa regular entre variedades quasiprojetivas irredutíveis. Suponha que f seja sobrejetiva: $f(X) = Y$ e que $\dim(X) = n$ e $\dim(Y) = m$. Então $m \leq n$ e*

- (i) *para qualquer componente F da fibra $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, temos que $\dim(F) \geq n - m$;*
- (ii) *existe um subconjunto aberto não-vazio $U \subset Y$ tal que $\dim(f^{-1}(y)) = n - m$, para qualquer $y \in U$.*

Definição 1.2.6.3. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasiprojetiva irredutível k -dimensional. Se Γ é um $(n - k)$ -plano genérico em \mathbb{P}^n , então o **grau** de X , denotado por $\deg(X)$, é o número de pontos da interseção $X \cap \Gamma$.*

1.3 O Teorema de Bézout

Vamos introduzir agora uma versão do teorema de Bézout, de grande utilidade, não só nessa dissertação, como em toda Geometria Algébrica. Para facilitar a compreensão de sua demonstração, dedicaremos uma subseção ao estudo de uma interessante variedade, chamada Junção de Variedades.

1.3.1 Junção de Variedades

Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ duas variedades projetivas disjuntas, definimos a **junção** de X e Y como a união

$$J(X, Y) = \bigcup_{x \in X, y \in Y} \overline{xy}$$

das retas que ligam pontos de X aos pontos de Y . A proposição 2.2.3.2, mais adiante, nos garante que a junção $J(X, Y)$ é uma subvariedade projetiva de \mathbb{P}^n .

Proposição 1.3.1.1. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ variedades projetivas disjuntas. Então a dimensão da junção $J(X, Y)$ será*

$$d = \dim(X) + \dim(Y) + 1$$

sempre que $d \leq n$.

Prova. Isso é imediato quando X e Y são subespaços lineares disjuntos de \mathbb{P}^n . Nesse caso duas retas ligando X a Y nunca se interceptam, assim todo ponto da junção $J(X, Y)$ está em uma única reta ligando X a Y .

Para provar a proposição no caso geral o truque é ver X e Y como subvariedades de dois $\mathbb{P}^{n'}$ s diferentes e imergir esses $\mathbb{P}^{n'}$ s em \mathbb{P}^{2n+1} através dos mapas $i, j : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ dados por

$$i : [z_0, \dots, z_n] \rightarrow [z_0, \dots, z_n, 0, \dots, 0]$$

e

$$j : [z_0, \dots, z_n] \rightarrow [0, \dots, 0, z_0, \dots, z_n].$$

Sejam $\tilde{X}, \tilde{Y} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ as imagens de X, Y pelos mapas i e j , respectivamente, e $\tilde{J} = J(\tilde{X}, \tilde{Y})$. Então $\dim(\tilde{J}) = \dim(X) + \dim(Y) + 1$.

A projeção $\pi_L : \mathbb{P}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$ do plano $L \cong \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ definido por $z_0 = z_{n+1}, \dots, z_n = z_{2n+1}$, leva \tilde{X} e \tilde{Y} para X e Y , respectivamente. Como $X \cap Y = \emptyset$, temos que a junção \tilde{J} é disjunta de L . Assim a projeção π_L é um mapa regular \tilde{J} para $J(X, Y)$.

Suponha que a imagem inversa $\pi_L^{-1}(p)$, $p \in J(X, Y)$ contenha uma curva C . Então C deve estar contida no plano $\langle p, L \rangle$, gerado por p e L e, portanto, intercepta L , o que é absurdo. Dessa forma, dado $p \in J(X, Y)$, a imagem inversa $\pi_L^{-1}(p)$ é um número finito de pontos, o que implica que

$$\dim(J(X, Y)) = \dim(\tilde{J}) = \dim(X) + \dim(Y) + 1.$$

□

Um outro resultado simples e interessante sobre a junção de X e Y é dado na proposição seguinte.

Proposição 1.3.1.2. *Sejam $\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^l$ dois subespaços lineares disjuntos, contidos em \mathbb{P}^n , e $X \subset \mathbb{P}^k$ e $Y \subset \mathbb{P}^l$, subvariedades próprias suaves. Então a junção $J = J(X, Y)$ de X e Y é singular exatamente ao longo de $X \cup Y$. Além disso, em um ponto $r \in \overline{pq} \subset J$, diferente de p e q , o espaço tangente $T_r(J)$ é gerado pelos espaços $T_p(X)$ e $T_q(Y)$.*

Estamos interessados agora em calcular o grau da junção $J(X, Y)$. Para isso suponha que X e Y , de dimensões k e l , estão em subespaços lineares complementares \mathbb{P}^m e $\mathbb{P}^{n-m-1} \subset \mathbb{P}^n$. Seja $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-k-l}$ o subespaço gerado por um plano geral $\Lambda' \cong \mathbb{P}^{m-k} \subset \mathbb{P}^m$ e o plano geral $\Lambda'' \cong \mathbb{P}^{n-m-l-1} \subset \mathbb{P}^{n-m-1}$.

Sabemos que Λ' vai interceptar X em exatamente $d = \deg(X)$ pontos p_1, \dots, p_d e que Λ'' vai interceptar Y em $e = \deg(Y)$ pontos q_1, \dots, q_e . A interseção de Λ com a junção $J(X, Y)$ será a união das $d \cdot e$ retas $L_{i,j}$ geradas por p_i e q_j .

Entretanto se Λ' e Λ'' interceptam X e Y transversalmente, então, pela descrição dos planos tangentes de $J(X, Y)$ dada na proposição 1.3.1.2, o grau de $J(X, Y)$ é $d \cdot e = \deg(X) \cdot \deg(Y)$.

1.3.2 O Teorema de Bézout

Enunciemos agora o famoso Teorema de Bézout, em sua forma simples.

Teorema 1.3.2.1. *Sejam X e $Y \subset \mathbb{P}^n$ duas variedades de dimensão k e l respectivamente, com $k + l = n$ e suponha que a interseção $X \cap Y$ seja transversal. Então $X \cap Y$ consiste exatamente de*

$$\deg(X \cap Y) = \deg(X) \cdot \deg(Y).$$

pontos.

Prova. Vamos usar a notação introduzida na demonstração da proposição 1.3.1.1. Lembremos que $\tilde{X}, \tilde{Y} \subset \mathbb{P}^{2n+1}$ são as imagens de X, Y pelos mapas i e j , respectivamente, e que $\tilde{J} = J(\tilde{X}, \tilde{Y})$.

Observe que a interseção de \tilde{J} com L consiste exatamente dos pontos $[z_0, \dots, z_n, z_0, \dots, z_n]$, tal que $p = [z_0, \dots, z_n] \in X \cap Y$. Pela descrição do espaço tangente de \tilde{J} dada na proposição 1.3.1.2 e a hipótese de que X e Y

são transversais, segue que a interseção $\tilde{J} \cap L$ deve ser transversal. Temos então que

$$\text{card}(X \cap Y) = \text{deg}(J) = \text{deg}(X) \cdot \text{deg}(Y).$$

□

1.4 Ramificação

Nessa seção daremos alguns conceitos da Teoria de Corpos para alcançar nosso real objetivo, que é relacionar o grau de um mapa regular com o número de pontos de ramificação desse mapa.

Definição 1.4.0.2. *Sejam A e B anéis tais que $A \subset B$. Dizemos que um elemento $b \in B$ é **integral** sobre A se satisfaz uma equação do tipo*

$$b^k + a_1 b^{k-1} + a_2 b^{k-2} + \dots + a_k = 0, \quad \text{com } a_i \in A.$$

*Um anel A sem divisores de zero é **integralmente fechado** se todo elemento de seu corpo de frações K é integral sobre A .*

Definição 1.4.0.3. *Dizemos que uma variedade afim irredutível X é **normal** se seu anel de coordenadas $K[X]$ for integralmente fechado. Uma variedade quasiprojetiva irredutível X é **normal** se para todo ponto $x \in X$ existe uma vizinhança afim normal.*

Usaremos agora o conceito de extensão integral para definir mapas finitos em variedades afins e logo depois daremos a definição de mapas finitos entre variedades quasiprojetivas.

Lembremos que se $f : X \rightarrow Y$ é um mapa regular entre variedades afins tal que $f(X)$ é denso em Y então f^* define uma inclusão isomorfa $K[Y] \hookrightarrow K[X]$.

Definição 1.4.0.4. *Sejam X, Y variedades afins e $f : X \rightarrow Y$ um mapa regular tal que $f(X)$ é denso em Y . O mapa f é **finito** se $k[Y] \subset k[X]$ é uma extensão integral.*

*Um mapa regular $f : X \rightarrow Y$ entre variedades quasiprojetivas é **finito** se qualquer ponto $y \in Y$ tem uma vizinhança afim V tal que o conjunto $U = f^{-1}(V)$ é afim e $f : U \rightarrow V$ é um mapa finito entre variedades afins.*

Temos que, se um mapa for finito, então para qualquer $y \in Y$, o conjunto $f^{-1}(y)$ consiste de um número finito de pontos. De fato (em vista da definição de mapa finito vamos nos restringir ao caso em que X e Y são afins), suponha que $X \subset A^n$ e sejam t_1, \dots, t_n coordenadas de A^n , que também podem ser vistas como funções em X . É suficiente mostrar que cada uma das coordenadas t_i assume um número finito de valores em $f^{-1}(y)$. Por definição a função t_i satisfaz uma equação

$$t_i^k + a_1 t_i^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad a_i \in K[y].$$

Dessa forma, para $y \in Y$ e $x \in f^{-1}(y)$, chegamos a seguinte equação

$$t_i(x)^k + a_1(y)t_i(x)^{k-1} + \dots + a_k(y) = 0,$$

que têm apenas um número finito de raízes.

Exemplo 1.4.0.5. Considere a função $f : A^1 \rightarrow A^1$ dada por $y = f(x) = x^2$. Claramente f é um mapa finito, $\#f^{-1}(y) = 2 \forall y \neq 0$ e $f(0) = 0$.

Definição 1.4.0.6. Sejam X e Y variedades quasiprojetivas irredutíveis de mesma dimensão e $f : X \rightarrow Y$ um mapa regular tal que $f(X) \subset Y$ é denso. O grau da extensão de corpos $f^*(K(Y)) \subset K(X)$, que é finito com essas hipóteses, é chamado de **grau** de f ou **número de cobertura** de Y pelo mapa f :

$$n = \deg(f) = [K(X) : f^*(K(Y))].$$

Dizemos ainda que f expressa X como uma n -cobertura de Y .

No exemplo 1.4.0.5 o mapa f tem grau 2, e se $\text{char} k \neq 2$, todo ponto $y \neq 0$ tem duas imagens inversas distintas, e o ponto $y = 0$ tem apenas uma. Mas será que o número de imagens inversas de um mapa finito é sempre menor ou igual que o grau desse mapa?

Exemplo 1.4.0.7. Seja Y a curva plana dada pela equação $Y^2 = X^2 + X^3$. Y é a curva cúbica com um ponto duplo ordinário, veja a figura 1.1. Seja $f : A^1 \rightarrow Y$ sua parametrização $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$. Nesse caso $\deg f = 1$, mas a imagem inversa do ponto singular consiste de dois pontos.

Portanto não é sempre que o número de imagens inversas de um mapa finito é menor ou igual ao grau do mapa. A não ser que exijamos que a variedade Y seja normal!

Teorema 1.4.0.8. Se $f : X \rightarrow Y$ é um mapa finito entre variedades irredutíveis e Y é normal, então o número de imagens inversas de um ponto $y \in Y$ é menor ou igual ao grau de f .

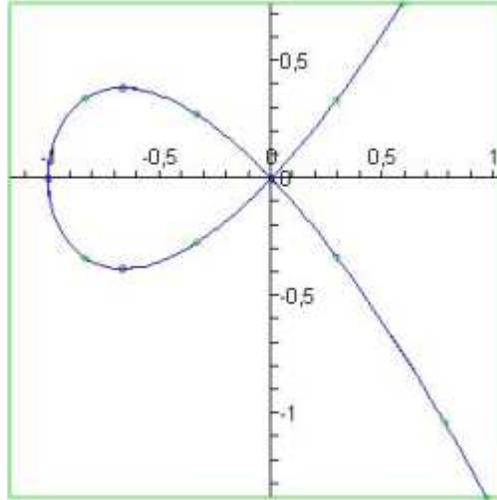


Figura 1.1: Curva de grau 3

Prova. Podemos nos restringir ao caso em que X e Y são afins. Como Y é normal, $K[Y]$ é integralmente fechado e como f é finita, $K[X]$ é um $K[Y]$ -módulo finito. Assim para qualquer $a \in K[X]$, os coeficientes do polinômio minimal de a estão em $K[Y]$ (isto é uma propriedade de anéis integralmente fechados, veja [1], proposição 5.15).

Suponha que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Considere um elemento $a \in K[X]$ tomando distintos valores $a(x_i)$, $i = 1, \dots, m$. Seja $n = \deg f = [K(X) : K(Y)]$ e $F \in (K[Y])[t]$ o polinômio mínimo de a . Obviamente $\deg F \leq n$.

Seja $\bar{F}(t)$ o polinômio obtido ao substituirmos todos os coeficientes de F por eles avaliados em y . Esse polinômio tem então m raízes distintas $a(x_i)$. Portanto

$$m \leq \deg(\bar{F}) = \deg(F) \leq n.$$

Logo $m \leq n$ e o teorema está provado! □

Definição 1.4.0.9. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa finito entre variedades irredutíveis com Y normal. O mapa f é **não ramificado** no ponto $y \in Y$ se o número de imagens inversas de y for igual ao grau do mapa. Caso contrário f é **ramificada** em y .*

Teorema 1.4.0.10. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa finito entre variedades irredutíveis com Y normal. O conjunto dos pontos nos quais o mapa f é não ramificado é aberto em Y . Além disso o mesmo conjunto é não-vazio se $f^*(K(Y)) \subset K(X)$ for uma extensão separável.*

Prova. Usaremos aqui a mesma notação da demonstração do teorema 1.4.0.8. Suponha que f seja não ramificada em $y \in Y$, então $\deg(\overline{F}) = \deg(F) = n$ e \overline{F} tem n raízes distintas. Seja $D(F)$ o discriminante de F . Uma condição suficiente para que f seja não ramificada em y é que

$$D(\overline{F}) = D(F)(y) \neq 0.$$

Mas então $D(F)(y') \neq 0$ para todo ponto y' em uma vizinhança de y . Isso prova a primeira parte do teorema. Segue que o conjunto dos pontos de ramificação é fechado; ele é chamado de *lugar de ramificação de f* .

Suponha agora que $f^*(K(Y)) \subset K(X)$ é separável. Podemos novamente assumir que X e Y são afins e usar a notação citada acima. Se $a \in K[X]$ é um elemento primitivo da extensão de corpos $f^*(K(Y)) \subset K(X)$ e $F(t)$ seu polinômio mínimo, então $\deg(F) = n$ e $D(F) \neq 0$. Segue que existe pontos $y \in Y$ tais que $D(F)(y) \neq 0$. Logo f é não ramificada num conjunto não vazio. \square

1.5 Gênero

Usaremos nesta seção conceitos e resultados relacionados com a teoria de superfícies de Riemann. Uma boa exposição desse tema pode ser encontrada na referência [2]. Também serão abordados tópicos em [5], que relaciona o assunto com a parte algébrica. Nos restringiremos aqui à mapas de uma curva plana para \mathbb{P}^1 .

Definição 1.5.0.11. *Dada uma curva plana C de grau d , com δ pontos duplos ordinários, seu **gênero** é definido por*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta.$$

Seja $C \subset \mathbb{P}^2$ uma curva plana irredutível e $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ um mapa finito. O teorema 1.4.0.10 nos afirma que o conjunto dos pontos nos quais f se ramifica é fechado em \mathbb{P}^1 , isto é, f se ramifica em um número finito de pontos.

Para $x \in X$, seja $v(f, x)$ a multiplicidade com que f assume o valor $f(x)$ no ponto x . O número

$$b(f, x) := v(f, x) - 1$$

é chamado de **multiplicidade de ramificação** de f no ponto x . Note que $b(f, x) = 0$ precisamente se f é não-ramificada no ponto $y = f(x)$. Se $b(f, x) \neq 0$, dizemos que x é um **ponto de ramificação** de f .

Denotamos por

$$b(f) := \sum_{x \in X} b(f, x),$$

o número total de pontos de ramificação de f .

Dados uma curva plana irredutível C e um mapa finito f de C para \mathbb{P}^1 vamos enunciar agora o teorema que relaciona o gênero de C , o grau do mapa f e o seu número de pontos de ramificação. Esse teorema é conhecido como "Fórmula de Riemann-Hurwitz".

Teorema 1.5.0.12. *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ um mapa finito de grau n , em que C é uma curva plana irredutível de gênero g . Suponha que f tenha $b = b(f)$ pontos de ramificação. Então*

$$g = \frac{b}{2} - n + 1.$$

Prova. Veja [2], página 140.

□

Capítulo 2

Grassmannianas

Neste capítulo vamos primeiramente definir superfícies quádricas e classificá-las de acordo com seu posto. Daremos a noção de cone para caracterizar quádricas singulares. Posteriormente vamos desenvolver um método para parametrizar os d -planos de \mathbb{P}^n por pontos em uma certa variedade G em \mathbb{P}^N , em que $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$.

2.1 Quádricas

Definição 2.1.0.13. *Uma hipersuperfície **quádrica** $Q \subset \mathbb{P}^n$ é o lugar geométrico dos zeros de um polinómio homogêneo de grau 2 em $n+1$ variáveis, a saber uma forma quadrática*

$$Q(X) = \sum_{0 \leq i, j \leq n} q_{ij} x_i x_j,$$

em que $Q = (q_{ij})$ é uma matriz simétrica.

Exemplo 2.1.0.14. *Um exemplo de quádrica está descrito no exemplo 1.2.2.2, no entanto se a quádrica estiver em \mathbb{P}^2 a chamamos de **cônica**.*

Podemos representar uma cônica em \mathbb{P}^2 pela matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.1.0.15. A equação geral de uma quádrlica em \mathbb{P}^3 é

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{03}x_0x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3,$$

e a matriz simétrica que a representa é da seguinte forma

$$Q = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Definição 2.1.0.16. O *posto* de uma quádrlica é o posto de sua matriz simétrica associada.

Teorema 2.1.0.17. Se $F(X) = X^tAX$ é uma forma quadrática em x_0, \dots, x_n , tal que A é uma matriz simétrica de posto r , podemos encontrar uma transformação linear invertível P tal que

$$F(P(X)) = y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{r-1}^2,$$

em que $(y_0, \dots, y_n) = P(x_0, \dots, x_n)$.

Prova. Veja [6], pág. 184. □

Dessa forma podemos classificar quádrlicas de acordo com seu posto, além disso, dada uma quádrlica qualquer $Q \subset \mathbb{P}^n$ de posto r , vamos descrevê-la como zeros do polinômio $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2$ e representá-la por uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

na qual I é a matriz identidade $r \times r$. Esse novo sistema de coordenadas é chamado de **coordenadas de Klein**.

Corolário 2.1.0.18. Uma quádrlica $Q \subset \mathbb{P}^n$ é não singular se e somente se possui posto máximo $n + 1$.

Prova. Se a quádrlica Q possui posto máximo $n+1$, pelo teorema 2.1.0.17, podemos, por uma transformação linear, descrever Q pela seguinte equação: $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Dessa forma,

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = 0 \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) = (0, \dots, 0).$$

Logo Q é não singular.

Reciprocamente, se Q possui posto $r < n + 1$, pelo teorema 2.1.0.17 $Q = V(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2)$, então

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i, \quad i = 0, \dots, r-1 \quad \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad j = r, \dots, n.$$

Logo Q é singular nos pontos do tipo $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, em que 1 ocupa a posição i , para $i \geq r$. \square

Corolário 2.1.0.19. *Uma quádrlica $Q \subset \mathbb{P}^n$ de posto $n - k$ é singular ao longo de um k -plano $\Omega \subset Q$.*

Exemplo 2.1.0.20. *Cônicas em \mathbb{P}^2 :*

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Esta é a cônica não singular.

2. $x^2 + y^2 = 0$.

Nesse caso a cônica Q é dada pela união de duas retas distintas ($x = 0 \cup y = 0$).

3. $x^2 = 0$.

Nesse caso Q corresponde a uma reta dupla ($x = 0$).

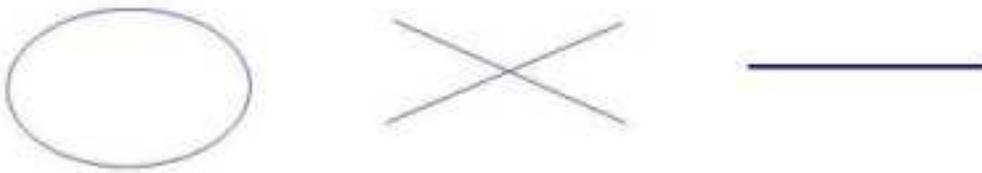


Figura 2.1: Cônicas em \mathbb{P}^2

Note que uma cônica $Q \subset \mathbb{P}^2$ é singular se e só se o determinante de sua matriz é zero, $\det Q = 0$. Logo o conjunto das cônicas singulares tem codimensão 1 no sistema linear de todas as cônicas. Já o conjunto das retas duplas tem codimensão 3 no mesmo conjunto (a dimensão da variedade dada pelos zeros dos determinantes dos nove menores 2×2 da matriz associada a Q é 2. Esse cálculo pode ser feito no programa Singular).

Exemplo 2.1.0.21. *Quádricas em \mathbb{P}^3 :*

1. $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$.

Quádrica não singular.

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Cone com vértice em $P = (0, 0, 0, 1)$.

3. $x^2 + y^2 = 0$.

União de dois planos.

4. $x^2 = 0$.

Plano duplo.

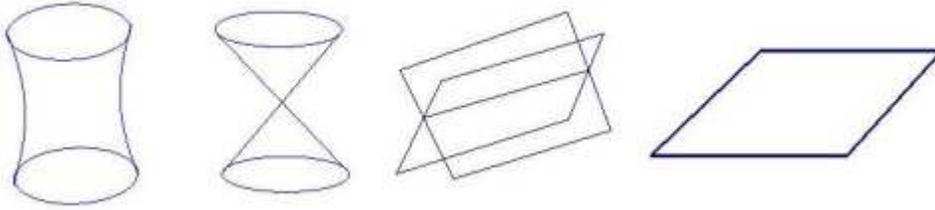


Figura 2.2: Quádricas em \mathbb{P}^3

Definição 2.1.0.22. *Considere um hiperplano $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ e um ponto $P \in \mathbb{P}^n$ que não está em \mathbb{P}^{n-1} . Seja $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ uma variedade. Definimos o **cone** $\overline{X, p}$ sobre X com vértice p como a união*

$$\overline{X, p} = \bigcup_{q \in X} \overline{qp}$$

das retas que ligam p aos pontos de X .

O conjunto $\overline{X, p}$ é uma variedade projetiva. De fato, escolha coordenadas de modo que $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ seja o lugar dos zeros de polinômios $F_\alpha = F_\alpha(Z_0, \dots, Z_{n-1})$. O cone $\overline{X, p}$ é o lugar dos zeros dos mesmos polinômios F_α vistos como polinômios em Z_0, \dots, Z_n .

Vamos agora generalizar a definição de cone.

Definição 2.1.0.23. *Seja $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$, $\Psi \cong \mathbb{P}^{n-k-1}$ um subespaço linear complementar, e $X \subset \Psi$ uma variedade. Definimos o cone $\overline{X, \Lambda}$ sobre X com vértice Λ como sendo a união dos $(k+1)$ -planos $\overline{q, \Lambda}$ gerados por Λ e passando pelos pontos q de X .*

Verifica-se de forma análoga à anterior que o cone $\overline{X, \Lambda}$ é uma variedade projetiva. Podemos usar o conceito de cones para fazer uma descrição sobre hipersuperfícies quádricas.

Teorema 2.1.0.24. *Uma quádrica $Q \subset \mathbb{P}^n$ de posto k é o cone cujo vértice é um $(n-k)$ -plano $\Omega \subset Q \subset \mathbb{P}^n$ sobre uma quádrica de posto k em \mathbb{P}^{k-1} .*

Prova. Seja Q uma quádrica de posto k , singular sobre o conjunto $\Omega \cong \mathbb{P}^{n-k}$ e V_{k-1} um $(k-1)$ -plano genérico disjunto de Ω .

Seja $\tilde{Q} = V_{k-1} \cap Q$. \tilde{Q} é uma quádrica suave em V_{k-1} de dimensão $k-2$. Uma reta L qualquer passando por Ω e \tilde{Q} intercepta Q três vezes, portanto $L \subset Q$. Isso quer dizer que o cone de vértice Ω sobre \tilde{Q} está contido na quádrica Q .

Reciprocamente seja $P \in Q - \Omega$ e considere o $(n-k+1)$ -plano gerado por P e Ω que intercepta V_{k-1} em um ponto R .

A reta gerada por P e R intercepta Q em P e duas vezes em Ω e portanto está contida em Q . Logo $R \in Q$ e P está em uma reta ligando Ω a Q . \square

Como corolário desse teorema, observe que dada uma quádrica suave em $Q \subset \mathbb{P}^n$ e um ponto $x \in Q$, o conjunto $T_x(Q) \cap Q$ é uma quádrica singular em x . Portanto $T_x(Q) \cap Q$ é exatamente o lugar das retas contidas em Q , que passam por x .

Teorema 2.1.0.25. *Uma quádrica Q não-singular de dimensão m não contém subespaços lineares de dimensão estritamente maior que $m/2$.*

Prova. Considere a família de planos tangentes (veja [3], Lecture 15) a Q ao longo de um k -plano $\Lambda_k \subset Q$. Seja $\mathcal{G} : \mathbb{P}^{m+1} \rightarrow \mathbb{P}^{(m+1)*}$ a aplicação de Gauss (veja [3], Lecture 15). Como \mathcal{G} é um isomorfismo, esta família é um subespaço de dimensão k em $\mathbb{P}^{(m+1)*}$.

Como $T_P(Q) \subset \Omega_k$ para todo $P \in \Omega_k$, a imagem $\mathcal{G}(\Omega_k)$ está estritamente contida no $(m-k)$ -subespaço de $\mathbb{P}^{(m+1)*}$ dos hiperplanos que contém Ω_k .

Então $k \leq m-k$, ou seja, $k \leq m/2$.

\square

2.2 Grassmannianas

Vamos, nesta seção, relacionar os d -planos de \mathbb{P}^n com pontos em uma variedade G , que consiste da interseção de quádricas em \mathbb{P}^N . Para isso, introduziremos novas coordenadas que facilitam muito nosso trabalho, chamadas coordenadas de Plücker.

2.2.1 Coordenadas de Plücker

Dado um d -plano L em \mathbb{P}^n , considere $P_i = (p_i(0), \dots, p_i(n))$, $i = 0, \dots, d$, $(d+1)$ pontos que geram L . Podemos então representar L por uma matriz $(d+1) \times (n+1)$, $[p_i(j)]$, com $i = 0, \dots, d$ e $j = 0, \dots, n$. Por conveniência vamos usar a seguinte notação: Dada uma matriz $[p_i(j)]$ e uma sequência de $(d+1)$ inteiros j_0, \dots, j_d , com $0 \leq j_\beta \leq n$, denotaremos por $p(j_0, \dots, j_d)$ o determinante da matriz $(d+1) \times (d+1)$, $[p_i(j_\beta)]$, com $i, \beta = 0, \dots, d$. Note que o número de sequências j_0, \dots, j_d com $0 \leq j_0 < \dots < j_d \leq n$ é exatamente $\binom{n+1}{d+1} = \binom{N+1}{d+1}$. Pela álgebra linear vemos que um dos determinantes $p(j_0, \dots, j_d)$ é não nulo, portanto todos esses determinantes determinam um ponto $(\dots, p(j_0, \dots, j_d), \dots)$ em \mathbb{P}^N (escolha a ordem lexicográfica, veja [7]).

Seja $Q_i = (q_i(0), \dots, q_i(n))$, $i = 0, \dots, d$, outros $(d+1)$ pontos que geram L . Então existe uma matriz $(d+1) \times (d+1)$ invertível C que leva cada P_i em Q_i , isto é, $[q_i(j)] = C \cdot [p_i(j)]$. Claramente

$$(\dots, q(j_0, \dots, j_d), \dots) = \det(C) \cdot (\dots, p(j_0, \dots, j_d), \dots)$$

Como $\det(C)$ é não nulo, os pontos $(\dots, q(j_0, \dots, j_d), \dots)$ e $(\dots, p(j_0, \dots, j_d), \dots)$ denotam o mesmo ponto em \mathbb{P}^N .

As coordenadas $(\dots, p(j_0, \dots, j_d), \dots)$ desse ponto são chamadas **coordenadas de Plücker** de L .

Mas nem todo ponto de \mathbb{P}^N vem de um d -plano de \mathbb{P}^n , como veremos na seguinte subseção.

2.2.2 Grassmanniana

Vimos que a cada d -plano de \mathbb{P}^n podemos associar um ponto de \mathbb{P}^N expresso nas coordenadas de Plücker. Mas a recíproca nem sempre é verdadeira. É o que nos mostra o seguinte teorema:

Teorema 2.2.2.1. *Existe uma correspondência um a um entre os d -planos em \mathbb{P}^n e os pontos de \mathbb{P}^N , com $N = \binom{n+1}{d+1} - 1$, tal que as coordenadas satisfazem as seguintes relações quadráticas:*

$$\sum_{\lambda=0}^{d+1} (-1)^\lambda p(j_0 \dots j_{d-1} k_\lambda) p(k_0 \dots \check{k}_\lambda \dots k_{d+1}) = 0, \quad (2.1)$$

em que $j_0 \dots j_{d-1}$ e $k_0 \dots k_{d+1}$ são sequências quaisquer de inteiros com $0 \leq j_\beta, k_\lambda \leq n$ e o símbolo \check{k}_λ significa que o inteiro k_λ foi removido da sequência.

A variedade, contida em \mathbb{P}^N , dada pelas equações (2.1) é chamada de variedade de Plücker. Ela parametriza o conjunto dos d -planos de \mathbb{P}^n . Esse conjunto é chamado de Grassmanniana e é denotado por $G(d, n)$.

Prova. Vamos provar primeiro que as coordenadas de Plücker de um d -plano

L em \mathbb{P}^n satisfazem as relações (2.1). Para isso vamos explicitar os determinantes de (2.1), que são as coordenadas de Plücker de L .

$$\sum_{\lambda=0}^{d+1} (-1)^\lambda \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_\lambda) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots & p_0(\check{k}_\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & p_d(\check{k}_\lambda) & \dots \end{vmatrix}.$$

Expandindo o primeiro determinante ao longo de sua última coluna, obtemos

$$\sum_{\lambda=0}^{d+1} (-1)^\lambda \left\{ \sum_{i=0}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} p_i(k_\lambda) \right\} \begin{vmatrix} \dots & p_0(\check{k}_\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & p_d(\check{k}_\lambda) & \dots \end{vmatrix}.$$

Reajandando os termos teremos a seguinte relação

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{d+1} (-1)^\lambda p_i(k_\lambda) \begin{vmatrix} \dots & p_0(\check{k}_\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & p_d(\check{k}_\lambda) & \dots \end{vmatrix} \right\}.$$

Note que essa relação pode ser obtida ao expandirmos o segundo determinante abaixo ao longo de sua primeira linha:

$$\sum_{i=0}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots & p_i(\check{k}_\lambda) & \dots \\ \dots & p_0(k_\lambda) & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & p_d(k_\lambda) & \dots \end{vmatrix}.$$

Mas o segundo determinante acima é zero, porque possui duas linhas iguais. Portanto as coordenadas de Pücker de d-plano L em \mathbb{P}^n satisfazem as relações quádricas (2.1).

Reciprocamente, um ponto $P = (\dots, p(j_0 \dots j_d), \dots)$ de \mathbb{P}^N tal que as coordenadas satisfazem as relações quádricas (2.1) determina um único d-plano L em \mathbb{P}^n . Para mostrar isso considere o seguinte

Lema 2.2.2.2. *Seja P um ponto de \mathbb{P}^N , tal que suas coordenadas de satisfazem as relações (2.1) e suponha que a coordenada $p(k_0 \dots k_d)$ de P seja não nula. Então todas as $(N + 1)$ coordenadas $p(j_0 \dots j_d)$ são determinadas pelas $[(d + 1)(n - d) + 1]$ coordenadas da forma $p(k_0 \dots k_\lambda \dots k_d j_\alpha)$, isto é, pelas coordenadas $p(i_0 \dots i_d)$ tais que no máximo um dos elementos i_0, \dots, i_d não está em $\{k_0, \dots, k_d\}$.*

Prova. De fato, seja $j_0 \dots j_d$ uma sequência de inteiros em que exatamente m elementos não estão em $\{k_0, \dots, k_d\}$ e seja j_β um desses elementos. A relação quádrica (2.1) correspondente às sequências $j_0 \dots \check{j}_\beta \dots j_d j_\beta$ e $k_0 \dots k_d j_\beta$ nos dá que

$$p(j_0 \dots \check{j}_\beta \dots j_d j_\beta) p(k_0 \dots k_d) = \sum_{\lambda=0}^d (-1)^\lambda p(j_0 \dots \check{j}_\beta \dots j_d k_\lambda) p(k_0 \dots \check{k}_\lambda \dots k_d j_\beta).$$

Se $k_\lambda \in \{j_0, \dots, j_d\}$, então $p(j_0 \dots \check{j}_\beta \dots j_d k_\lambda) = 0$. Caso contrário existem exatamente $(m - 1)$ dos $j_0 \dots \check{j}_\beta \dots j_d k_\lambda$ que não estão no conjunto $\{k_0, \dots, k_d\}$.

Assim, se $m \geq 2$, podemos expressar $p(j_0 \dots j_d) p(k_0 \dots k_d)$ em termos de coordenadas $p(i_0 \dots i_d)$ em que no máximo $(m - 1)$ dos i_0, \dots, i_d não estão em $\{k_0, \dots, k_d\}$.

Continuando esse processo de multiplicar por $p(k_0 \dots k_d)$ e usar as relações quádricas (2.1), podemos expressar $p(j_0 \dots j_d) p(k_0 \dots k_d)^{m-1}$ como um polinômio nas coordenadas $p(i_0 \dots i_d)$ em que no máximo um dos i_0, \dots, i_d não está em $\{k_0 \dots k_d\}$. \square

Suponha sem perda de generalidade que $p(k_0 \dots k_d) = 1$. Vamos construir um d-plano L em \mathbb{P}^n tal que as coordenadas de Plücker $p(j_0 \dots j_d)$ são exatamente as coordenadas do ponto P em \mathbb{P}^N .

Para $i = 0, \dots, d$ e $j = 0, \dots, n$ seja

$$p_i(j) = p(k_0 \dots k_{i-1} j k_{i+1} \dots k_d).$$

Os vetores $(p_i(0), \dots, p_i(n))$, $i = 0, \dots, d$ são claramente linearmente independentes, pois $p_i(k_\lambda) = 0$ se $\lambda \neq i$ e $p_i(k_i) = 1$. Portanto eles geram um d-plano L em \mathbb{P}^n .

A coordenada de Plücker $p'(j_0 \dots j_d)$ de L é definida como o determinante da matriz $[p_i(j_\beta)]$ com $i, \beta = 0, \dots, d$. Temos então que se $j_\beta = k_\beta$ para $\beta \neq \lambda$, essa matriz coincide com a identidade, exceto na λ -ésima coluna. Portanto

$$p'(j_0 \dots j_d) = p_\lambda(j_\lambda) = p(j_0 \dots j_d),$$

quando no máximo um j_λ dos j_0, \dots, j_d não está em $\{k_0, \dots, k_d\}$. Como já provamos que essas coordenadas determinam as demais, temos que $p'(j_0 \dots j_d) = p(j_0 \dots j_d)$ para toda sequência $j_0 \dots j_d$. Assim o ponto $(\dots, p(j_0 \dots j_d), \dots)$ é realmente as coordenadas de Plücker de um d-plano L em \mathbb{P}^n .

Finalmente, seja L' outro d-plano em \mathbb{P}^n cujas coordenadas de Plücker coincidem com as coordenadas do ponto $P = (\dots, p(j_0 \dots j_d), \dots)$. Escolha $(d+1)$ pontos $P'_i = (p'_i(0), \dots, p'_i(d))$, $i = 0, \dots, d$ que geram L' . Então a matriz $(d+1) \times (d+1)$, $[p'_i(k_j)]$ é invertível, pois seu determinante é, por hipótese, um múltiplo não nulo de $p(k_0 \dots k_d) = 1$. Escolha novos P'_i 's de modo que $[p'_i(k_j)]$ seja a matriz identidade, assim para qualquer sequência j_0, \dots, j_d o determinante $\det[p'_i(k_j)]$ é exatamente igual a $p(j_0 \dots j_d)$.

Fixe λ e j com $0 \leq \lambda \leq n$ e $0 \leq j \leq n$, e considere $j_\beta = k_\beta$ para $\beta \neq \lambda$ e $j_\lambda = j$. Então $[p'_i(j_\beta)]$ coincide com a matriz identidade, exceto na λ -ésima coluna. Temos então que

$$p'_\lambda(j) = \det[p'_i(j_\beta)] = p(j_0 \dots j_d) = p_\lambda(j),$$

em que a última equação é a definição de $p_\lambda(j)$ dada acima. Então $P'_\lambda = P_\lambda$ para cada λ e portanto $L' = L$. □

Observe que o lema 2.2.2.2 nos afirma que a dimensão da Grassmanniana $G(d, n)$ é

$$\dim(G(d, n)) = (d+1)(n-d). \quad (2.2)$$

Exemplo 2.2.2.3. *As retas de \mathbb{P}^3 são representadas pela Grassmanniana $G(1, 3)$, de dimensão 4, e são parametrizadas pela quádrlica de Plücker $G \subset \mathbb{P}^5$, dada pela seguinte equação quadrática:*

$$p(01)p(23) - p(02)p(13) + p(03)p(12) = 0.$$

Para verificar isso escolha sequências como as enunciadas no teorema 2.2.2.1, por exemplo $(j_0) = (0)$ e $(k_0, k_1, k_2) = (1, 2, 3)$, e obtenha a relação quadrática 2.1 referente a essa sequência. As outras escolhas de sequências resultam na mesma equação.

Estudaremos mais adiante muitas propriedades da Grassmanniana $G(1, 3)$.

Exemplo 2.2.2.4. Considere a Grassmanniana $G(2, 5)$, dos planos de \mathbb{P}^5 , e a quádrlica suave $F \subset \mathbb{P}^5$ dada por

$$F : xy + zw = tv.$$

Estamos interessados em calcular a dimensão do conjunto

$$\omega_F = \{\Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \Lambda \cap F \text{ é uma reta dupla}\} \subset G(2, 5).$$

Para isso note que um plano $\Lambda \in G(2, 5)$ pode ser dado pelas seguintes equações lineares em \mathbb{P}^5 :

$$\begin{cases} a_1x + 1y + b_1z + 0w + c_1t + 0v = 0 \\ a_2x + 0y + b_2z + 1w + c_2t + 0v = 0 \\ a_3x + 0y + b_3z + 0w + c_3t + 1v = 0. \end{cases}$$

Essas equações parametrizam um aberto da Grassmanniana $G(2, 5)$. Para maiores detalhes veja [4], chapter 1.

Fazendo as substituições

$$\begin{cases} y = -a_1x - b_1z - c_1t \\ w = -a_2x - b_2z - c_2t \\ v = -a_3x - b_3z - c_3t, \end{cases}$$

na equação de F , obtemos a equação explícita da cônica $\Lambda \cap F$,

$$a_1x^2 + b_2z^2 - c^3t^2 + (b_1 + a_2)xz + (c_1 - a_3)xt + (c_2 - b_3)zt = 0.$$

A matriz simétrica associada à $\Lambda \cap F$ é

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 + a_2 & c_1 - a_3 \\ b_1 + a_2 & 2b_2 & c_2 - b_3 \\ c_1 - a_3 & c_2 - b_3 & -2c_3 \end{pmatrix}.$$

Seja $\Delta \subset G(2, 5)$ a variedade dada pelos zeros dos determinantes de todos os menores 2×2 da matriz de $\Lambda \cap F$. Podemos descrever Δ usando apenas seis equações; essas, foram calculadas através do programa Singular¹ e estão descritas abaixo:

¹Agradeço ao professor Paulo Antônio Fonseca Machado pelo auxílio com os cálculos no Singular.

$$\begin{aligned}
b_3^2 - 2b_3c_2 + c_2^2 + 4b_2c_3 &= 0 \\
a_3b_3 - b_3c_1 - a_3c_2 + c_1c_2 + 2a_2c_3 + 2b_1c_3 &= 0 \\
a_3b_2 - a_2b_3 - b_1b_3 - 2b_2c_1 + a_2c_2 + b_1c_2 &= 0 \\
a_3^2 - 2a_3c_1 + c_1^2 + 4a_1c_3 &= 0 \\
a_2a_3 + a_3b_1 - 2a_1b_3 - a_2c_1 - b_1c_1 + 2a_1c_2 &= 0 \\
a_2^2 + 2a_2b_1 + b_1^2 - 4a_1b_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Novamente usando o Singular, temos que a dimensão da variedade Δ é seis. Mas um plano $\Lambda \in \omega_F$ se e somente se $\Lambda \in \Delta$. Portanto

$$\dim(\omega_F) = 6.$$

2.2.3 Correspondência de Incidência

Estudaremos agora a correspondência de incidência, e através dela, mostraremos que a junção de variedades, definida na subseção 1.3.1, é de fato uma variedade projetiva. Em seguida daremos alguns exemplos do cálculo da dimensão de algumas famílias, usando a correspondência de incidência e o teorema de dimensão das fibras, apresentado na subseção 1.2.6.

Seja $G(k, n)$ a Grassmanniana dos k -planos em \mathbb{P}^n . Podemos definir a **correspondência de incidência** $\Sigma \subset G(k, n) \times \mathbb{P}^n$ como

$$\Sigma = \{(\Delta, x) : x \in \Delta\}.$$

O conjunto Σ é uma variedade projetiva, pois podemos escrever

$$\Sigma = \{(v_0 \wedge \dots \wedge v_k, w) : v_0 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w = 0\}.$$

A partir dessa útil construção podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.2.3.1. *Seja $\Phi \subset G(k, n)$ uma subvariedade. Então a união*

$$\Psi = \bigcup_{\Delta \in \Phi} \Delta \subset \mathbb{P}^n$$

é também uma subvariedade projetiva.

Prova. Sejam π_1 e π_2 os mapas projeções de Σ para $G(k, n)$ e \mathbb{P}^n , respectivamente. Nós podemos escrever

$$\Psi = \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi)),$$

dessa forma, segue que Ψ é uma subvariedade de \mathbb{P}^n . \square

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Vamos mostrar agora que o lugar $\mathcal{C}_k(X)$, dos k -planos de \mathbb{P}^n que interceptam X , é uma subvariedade da Grassmanniana $G(k, n)$. Para isso basta notar que

$$\mathcal{C}_k(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X)) \subset G(k, n),$$

em que Σ é a correspondência incidente, e $\pi_1 : \Sigma \rightarrow G(k, n)$ e $\pi_2 : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^n$ são os mapas projeções. Essa variedade é chamada de variedade dos planos incidentes.

Vamos mostrar agora que a junção de variedades, definida na subseção 1.3.1, é de fato uma variedade projetiva.

Proposição 2.2.3.2. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ duas variedades projetivas disjuntas. Então a união $J(X, Y) \subset \mathbb{P}^n$ das retas ligando X a Y é ainda uma variedade projetiva.*

Prova. Primeiramente note que o conjunto $J(X, Y)$ é uma subvariedade da Grassmanniana $G(1, n)$, pois pode ser expresso como a interseção $\mathcal{C}_1(X) \cap \mathcal{C}_1(Y)$. Mas a proposição 2.2.3.1 nos afirma que a união dessas retas é uma subvariedade de \mathbb{P}^n , o que mostra a proposição. \square

Exemplo 2.2.3.3. *Vamos calcular a dimensão da família de k -planos contidos em uma hipersuperfície quádrlica suave em \mathbb{P}^n .*

Considere a família $|F|$ de todas as hipersuperfícies quádrlicas suaves de \mathbb{P}^n . Como, a toda quádrlica de \mathbb{P}^n podemos associar sua matriz simétrica, temos que a dimensão da família $|F|$ é a dimensão das matrizes simétricas $(n+1) \times (n+1)$, ou seja,

$$\dim(|F|) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$$

Seja $I \subset |F| \times G(k, n)$, a correspondência de incidência dada por

$$I = \{(F, \Lambda) : \Lambda \subset F\}.$$

Mostra-se de maneira análoga que I é uma variedade projetiva. Para a irredutibilidade veja [3]. Considere os respectivos mapas projeções $\pi_1 : I \rightarrow |F|$ e $\pi_2 : I \rightarrow G(k, n)$.

Dado um k -plano $\Lambda \in G(k, n)$, queremos calcular a dimensão da fibra de π_2 por Λ . Para isso note que a família $|F|$ intercepta Λ exatamente na família completa das quádricas em $\mathbb{P}^k \cong \Lambda$. Mas uma quádrica $F \in |F|$ contém o plano Λ se e só se F não intercepta Λ ao longo de uma quádrica. Portanto

$$\dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Pelo teorema 1.2.6.2, de dimensão das fibras,

$$\dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) = \dim(I) + \dim(G(k, n)),$$

para todo Λ contido em um aberto $U \subset G(k, n)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \dim(I) &= \dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) + \dim(G(k, n)) \\ &= (k+1)(n-k) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1. \end{aligned}$$

Finalmente podemos calcular a dimensão da fibra $\pi_1^{-1}(F)$ (a família dos k -planos que estão contidos em uma quádrica suave F). Novamente aplicando o teorema 1.2.6.2, temos que

$$\begin{aligned} \dim(\pi_1^{-1}(F)) &= \dim(I) - \dim(|F|) \\ &= (k+1)(n-k) - \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3.4. Seja $F \subset \mathbb{P}^5$ uma quádrica suave. Pelo exemplo 2.2.3.3, a dimensão do conjunto

$$\tau(F) = \{L \subset \mathbb{P}^5 : L \subset F\} \subset G(1, 5),$$

das retas de \mathbb{P}^5 , contidas na quádrica F , é

$$\dim(\tau(F)) = (1+1)(5-1) - \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 5.$$

Exemplo 2.2.3.5. Seja $Q \subset \mathbb{P}^4$ uma quádrica suave. O exemplo 2.2.3.3 nos diz a dimensão do conjunto

$$\tau(Q) = \{L \subset \mathbb{P}^4 : L \subset Q\} \subset G(1, 4),$$

das retas de \mathbb{P}^4 , contidas em Q , é

$$\dim(\tau(Q)) = (1+1)(4-1) - \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3.$$

Capítulo 3

Cálculo de Schubert

Vamos apresentar neste capítulo, de forma simplificada, o Cálculo de Schubert, que nos dá uma poderosa ferramenta para resolução de problemas enumerativos. Alguns desses problemas surgirão ao longo do capítulo 4 e por isso vamos adiantar alguns deles através de exemplos no final deste capítulo. Para mais detalhes sobre esse tema veja [8].

3.1 Condições de Schubert

Nesta seção estudaremos as condições necessárias e suficientes para um d -plano em \mathbb{P}^n interceptar uma sequência dada de subespaços lineares em \mathbb{P}^n .

Definição 3.1.0.6. *Seja $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d$ uma sequência estritamente crescente de $(d + 1)$ espaços lineares em \mathbb{P}^n . Dizemos que um d -plano L em \mathbb{P}^n satisfaz a **condição de Schubert** definida por esta sequência se $\dim(A_i \cap L) \geq i$, para todo $i = 0, \dots, d$.*

O conjunto de todos os d -planos L que satisfazem tal condição é um subconjunto de $G(d, n)$ denotado por $\Omega(A_0 \dots A_d)$.

Exemplo 3.1.0.7. *Fixe uma reta A_0 em \mathbb{P}^3 e tome A_1 como sendo o próprio \mathbb{P}^3 . O subconjunto $\Omega(A_0 A_1) \subset G(1, 3)$ é o conjunto de todas as retas L em \mathbb{P}^3 satisfazendo*

$$\begin{aligned} \dim(L \cap A_0) &\geq 0 \\ \dim(L \cap A_1) &\geq 1. \end{aligned}$$

Como a segunda condição é supérflua, $\Omega(A_0 A_1)$ representa o conjunto das retas L em \mathbb{P}^3 que interceptam a reta A_0 .

Proposição 3.1.0.8. *Seja $0 \leq a_0 < \dots < a_d \leq n$ uma seqüência de inteiros e para $i = 0, \dots, d$ seja A_i o espaço linear de dimensão a_i em \mathbb{P}^n tal que os pontos são da forma $(p(0), \dots, p(a_i), 0, \dots, 0)$. Então $\Omega(A_0 \dots A_d)$ consiste exatamente dos pontos $(\dots, p(j_0 \dots j_d) \dots)$ em $G(d, n)$ satisfazendo $p(j_0 \dots j_d) = 0$ sempre que $j_i > a_i$ para algum i .*

Prova. Considere um d -plano L em \mathbb{P}^n que satisfaz as condições de Schubert

$$\dim(A_i \cap L) \geq i, \quad i = 0, \dots, d.$$

Podemos escolher i pontos $P_i = (p_i(0), \dots, p_i(n))$ em $A_i \cap L$ tais que P_0, \dots, P_i são linearmente independentes (para ver isso basta fazer indução em i). Então $\{P_0, \dots, P_d\}$ é uma base de L . Pela construção da seção (2.2), podemos associar L a um ponto de $G(d, n)$ com coordenadas

$$p(j_0 \dots j_d) = \det[p_i(j_\beta)], \quad i, \beta = 0, \dots, d.$$

Suponha que $j_\lambda > a_\lambda$ para um certo λ . Como $P_i \in A_i$, temos que $p_i(j) = 0$ para $j = (a_{i+1}, \dots, n)$. Portanto a matriz $[p_i(j_\beta)]$ é da forma:

$$[p_i(j_\beta)] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

em que $[0]$ representa uma submatriz nula de $(\lambda + 1)$ linhas e $(d - \lambda + 1)$ colunas.

Resolvendo o determinante $p(j_0 \dots j_d)$ da matriz acima pela expansão de Laplace ao longo das últimas $(d - \lambda + 1)$ últimas colunas, vemos que $p(j_0 \dots j_d) = 0$.

Reciprocamente considere um ponto $P = (\dots, p(j_0 \dots j_d), \dots)$ em $G(d, n)$ tal que suas coordenadas $p(j_0 \dots j_d) = 0$ sempre que $j_i > a_i$, para algum i . Escolha uma coordenada não nula $p(k_0 \dots k_d)$ que maximiza a soma $\sum_{\gamma=0}^d k_\gamma$. Substituindo cada $p(j_0 \dots j_d)$ por $p(j_0 \dots j_d)/(p(k_0 \dots k_d))$, podemos assumir que $p(k_0 \dots k_d) = 1$.

Na seção (2.2) vimos que o ponto P representa um d -plano L gerado pelos pontos $P_i = (p_i(0), \dots, p_i(n))$, com $p_i(j) = p(\dots k_{i-1} j k_{i+1} \dots)$, $j = 0, \dots, n$ e $i = 0, \dots, d$.

Fixe $j > a_i$. Queremos mostrar que $p_i(j) = 0$. De fato, como $p(k_0 \dots k_d) \neq 0$ temos que $k_i \leq a_i$ e portanto $k_i < j$. Consequentemente a soma $\sum_{\gamma=0}^d k_\gamma < j + \sum_{\gamma \neq i} k_\gamma$. Mas a soma $\sum_{\gamma=0}^d k_\gamma$ é máxima, portanto $p_i(j) = p(\dots k_{i-1} j k_{i+1} \dots) = 0$, como queríamos mostrar.

Dessa forma, temos que cada $P_i \in A_i$ e os $(i + 1)$ pontos P_0, \dots, P_i estão em $(A_i \cap L)$. Logo L satisfaz a condição de Schubert $\dim(A_i \cap L) \geq i$, para $i = 0, \dots, d$.

$\therefore P = (\dots, p(j_0 \dots j_d), \dots) \in \Omega(A_0, \dots, A_d)$. \square

Proposição 3.1.0.9. *Seja $A_0 \subsetneq \dots \subsetneq A_d$ e $B_0 \subsetneq \dots \subsetneq B_d$ duas seqüências estritamente crescente de espaços lineares em \mathbb{P}^n tais que $\dim(A_i) = \dim(B_i)$, para $i = 0, \dots, d$. Então existe uma transformação linear invertível de \mathbb{P}^N em \mathbb{P}^N que leva $G(d, n)$ em si mesmo e $\Omega(B_0 \dots B_d)$ em $\Omega(A_0 \dots A_d)$.*

Prova. Como $\dim(A_i) = \dim(B_i)$ para cada i , existe uma matriz $[a_{ij}]$, $(n+1) \times (n+1)$, invertível, tal que a transformação linear $T : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, definida por

$$T(p(0), \dots, p(n)) = \left(\sum_{i=0}^n p(i)a_{i0}, \dots, \sum_{i=0}^n p(i)a_{in} \right)$$

leva B_i em A_i , para cada i .

A transformação T leva um d-plano L em \mathbb{P}^n em outro d-plano $T(L)$ em \mathbb{P}^n e se L satisfaz a condição de Schubert $\dim(B_i \cap L) \geq i$, $i = 0, \dots, d$, então $T(L)$ satisfaz a condição de Schubert $\dim(A_i \cap T(L)) \geq i$, $i = 0, \dots, d$, pois $T(B_i) = A_i \forall i = 0, \dots, d$.

Escolha $(d+1)$ pontos $P_i = (p_i(0), \dots, p_i(n))$ que geram L . Então os $(d+1)$ pontos $T(P_i)$ geram $T(L)$. Mas $T(P_i)$ é da forma $(q_i(0), \dots, q_i(n))$, em que

$$q_i(j) = \sum_{\alpha=0}^n p_i(\alpha)a_{j\alpha}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Mostra-se através de cálculos computacionais que as coordenadas de Plücker $q(j_0 \dots j_d) = \det[q_i(j_\beta)]$ de $T(L)$ são combinações lineares das coordenadas de Plücker $p(j_0 \dots j_d) = \det[p_i(j_\beta)]$ de L .

Portanto existe uma transformação linear $\Lambda[a_{ij}]$ de \mathbb{P}^N em si mesmo que leva $G(d, n)$ em si mesma e $\Omega(B_0 \dots B_d)$ em $\Omega(A_0 \dots A_d)$. Como $[a_{ij}]$ é invertível, evidentemente $\Lambda[a_{ij}]$ também é e $\Lambda([a_{ij}]^{-1})$ é sua inversa. \square

Corolário 3.1.0.10. *Seja $B_0 \subsetneq \dots \subsetneq B_d$ uma seqüência estritamente crescente de espaços lineares em \mathbb{P}^n . Então $\Omega(B_0 \dots B_d)$ consiste dos pontos de $G(d, n)$ cujas coordenadas $q(j_0 \dots j_d)$ satisfazem a certas equações lineares. Em outras palavras, $\Omega(B_0 \dots B_d)$ é a interseção de $G(d, n)$ com um espaço linear em \mathbb{P}^N . Esse espaço linear é um hiperplano se e somente se $\dim(B_0) = (n-d-1)$ e $\dim(B_i) = (n-d+i)$ para $i = 1, \dots, d$.*

Prova. Para cada $i = 0, \dots, d$ seja $a_i = \dim(B_i)$ e A_i o espaço linear de dimensão a_i em \mathbb{P}^n cujos pontos são da forma $(p(0), \dots, p(a_i), 0, \dots, 0)$.

A proposição 3.1.0.9 nos garante a existência de uma transformação linear $S : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$ tal que um ponto $P \in G(d, n)$ pertence a $\Omega(B_0 \dots B_d)$ se e somente se $S(P)$ pertence a $\Omega(A_0 \dots A_d)$. Mas, pela proposição 3.1.0.8, o ponto $S(P)$ pertence a $\Omega(A_0 \dots A_d)$ se e somente se suas coordenadas $q(j_0 \dots j_d) = 0$, sempre que $j_i > a_i$ para algum i .

Como cada $q(j_0 \dots j_d)$ é uma combinação linear das coordenadas $p(j_0 \dots j_d)$ de P , podemos concluir que um ponto P pertence a $\Omega(B_0 \dots B_d)$ se e somente se suas coordenadas $p(j_0 \dots j_d)$ satisfazem certas equações lineares. E o número de equações linearmente independentes é exatamente o número de sequências j_0, \dots, j_d tal que $j_i > a_i$, para algum i .

Suponha que $\dim(B_0) = (n - d - 1)$ e $\dim(B_i) = (n - d + i)$ para $i = 1, \dots, d$. Então podemos representar $\Omega(B_0 \dots B_d)$ pela seguinte matriz, na qual $*$ é uma entrada qualquer, o primeiro bloco é $(d + 1) \times (n - d)$ e o último $(d + 1) \times (d + 1)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccccc} * & \dots & * & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * & * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ * & \dots & * & * & * & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array} \right)$$

Note que apenas a última coordenada $p(j_0 \dots j_d)$ de qualquer elemento de $\Omega(B_0 \dots B_d)$ é nula. Portanto todo elemento de $\Omega(B_0 \dots B_d)$ está contido no hiperplano $p(j_0 \dots j_d) = 0$.

Reciprocamente, seja $P \in G(d, n)$ tal que P pertence ao hiperplano $p(j_0 \dots j_d) = 0$ de \mathbb{P}^N , em que $p(j_0 \dots j_d)$ é a última coordenada de \mathbb{P}^N . Então, claramente, P pertence a $\Omega(B_0 \dots B_d)$, no qual $\dim(B_0) = (n - d - 1)$ e $\dim(B_i) = (n - d + i)$ para $i = 1, \dots, d$. \square

3.2 O Cálculo de Schubert

Nesta seção vamos apresentar o Cálculo de Schubert e, através dele, resolver alguns problemas enumerativos. Usaremos aqui algumas ferramentas de Topologia Algébrica sem nos preocuparmos com demonstrações rigorosas. Para mais detalhes veja [8].

Na seção 2.2 vimos que $G(d, n)$ é parametrizada por uma variedade projetiva de dimensão $(d + 1)(n - d)$. A Topologia Algébrica nos garante que a cada classe de cohomologia, isto é, a cada elemento em $H^*(G(d, n), \mathbb{Z})$, podemos associar uma variedade algébrica em $G(d, n)$ e vice versa.

Se duas variedades são elementos de um mesmo sistema contínuo de subvariedades, associamos às duas a mesma classe de $H^*(G(d, n), \mathbb{Z})$.

Os subconjuntos $\Omega(A_0 \dots A_d)$ são subvariedades de $G(d, n)$, chamadas **variedades de Schubert** e suas classes de cohomologia são chamadas **ciclos de Schubert**. Afirmamos que a classe de cohomologia de $\Omega(A_0 \dots A_d)$ depende apenas dos inteiros $a_i = \dim(A_i)$, para $i = 0, \dots, d$. De fato, considere o sistema contínuo de subvariedades $(\Lambda M)\Omega(A_0 \dots A_d)$, parametrizado pelas matrizes M , $(n+1) \times (n+1)$, em que ΛM denota a transformação linear de \mathbb{P}^N em \mathbb{P}^N , induzida pela matriz M (veja proposição 3.1.0.9). Claramente $\Omega(A_0 \dots A_d)$ pertence a esse sistema e, pela proposição 3.1.0.9, toda subvariedade $\Omega(B_0 \dots B_d)$, com $\dim B_i = a_i$, para $i = 0, \dots, d$, pertence ao mesmo sistema. Como todas subvariedades de um mesmo sistema contínuo pertencem a mesma classe de cohomologia, a classe de cohomologia $\Omega(A_0 \dots A_d)$ depende apenas dos inteiros a_i , como havíamos afirmado. Denotaremos então esse ciclo de Schubert apenas por $\Omega(a_0 \dots a_d)$.

Vamos enunciar agora um importante teorema do Cálculo de Schubert, que nos assegura que os ciclos de Schubert determinam completamente a cohomologia de $G(d, n)$.

Teorema 3.2.0.11. *(Teorema da base): Considerado aditivamente, o grupo $H^*(G(d, n), \mathbb{Z})$ é abeliano livre e os ciclos de Schubert $\Omega(a_0 \dots a_d)$ formam uma base.*

Por esse motivo chamaremos $\Omega(a_0 \dots a_d)$ de ciclos da base de Schubert. Outro fato importante a respeito desses ciclos é que

$$\dim(\Omega(a_0 \dots a_d)) = \sum_{i=0}^d (a_i - i) \quad (3.1)$$

Para maiores detalhes veja [8], pg 1071.

Exemplo 3.2.0.12. *Consideremos a Grassmanniana $G(1, 3)$ e vamos calcular seus ciclos de Schubert. Para isso vamos obter todas as possíveis sequências (a_0, a_1) , como na proposição 3.1.0.8 e os respectivos ciclos de Schubert $\Omega(a_0, a_1)$. São eles:*

- $\Omega(01) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_1) \geq 1 \end{array} \right\}$

Parametriza uma reta fixa l em \mathbb{P}^3 . Vamos denotá-lo por $|l|$.

- $\Omega(02) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_2) \geq 1 \end{array} \right\}$

Parametriza o conjunto das retas de \mathbb{P}^3 que passam por um ponto P e estão contidas em um plano π . Vamos denotá-lo por $\sigma(P, \pi)$.

$$\bullet \Omega(03) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_3) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Parametriza o conjunto das retas de \mathbb{P}^3 que passam por um ponto P . Denotaremos por $\sigma(P)$.

$$\bullet \Omega(12) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_2) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Parametriza o conjunto das retas de \mathbb{P}^3 que estão contidas num plano π . Denotaremos por $\sigma(\pi)$.

$$\bullet \Omega(13) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_3) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Parametriza as retas de \mathbb{P}^3 que interceptam uma reta l . Vamos denotá-lo por $\sigma(l)$

$$\bullet \Omega(23) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 3) : \dim(L \cap A_2) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_3) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Parametriza o conjunto das retas de \mathbb{P}^3 que interceptam um plano π , vamos denotá-lo por σ^π .

Note que estamos considerando a seguinte sequência de espaços lineares $P \in l \subset \pi \subset \mathbb{P}^3$, na qual P é um ponto, l uma reta e π um plano em \mathbb{P}^3 .

Quando várias variedades se interceptam propriamente em um número finito de pontos, então o número de pontos na interseção, contados com multiplicidade, é igual ao produto das classes de cohomologia correspondentes. Dessa forma podemos resolver problemas enumerativos através de operações nos ciclos de Schubert. Essas operações satisfazem as seguintes propriedades:

1. A cada ciclo de Schubert σ podemos associar sua dimensão k , que é a dimensão de um representante qualquer $\Omega(A_0 \dots A_d)$ do ciclo como variedade em $G(d, n)$.
2. Dados dois ciclos de Schubert σ e σ' de dimensão k , podemos definir o ciclo de Schubert $\sigma + \sigma'$ como sendo o conjunto dos pontos $P \in G(d, n)$, tais que $P \in \sigma \cup \sigma'$.
3. Dados dois ciclos de Schubert σ e σ' de dimensões k e k' , respectivamente, definimos o ciclo de Schubert $\sigma \cdot \sigma'$ como sendo o conjunto dos pontos $P \in G(d, n)$, tais $P \in \sigma \cap \sigma'$.

4. Dado um ciclo de Schubert σ e um inteiro positivo n , definimos

$$n\sigma = \sigma + \dots + \sigma \quad (n \text{ vezes})$$

$$\sigma^n = \sigma \cdot \dots \cdot \sigma \quad (n \text{ vezes}).$$

Além disso, vale a lei distributiva $\sigma \cdot (\sigma' + \sigma'') = \sigma \cdot \sigma' + \sigma \cdot \sigma''$. Se $\sigma = \sigma' + \sigma''$, dizemos também que $\sigma' = \sigma - \sigma''$.

Exemplo 3.2.0.13. *Vejamos algumas relações entre os ciclos de Schubert de $G(1, 3)$.*

- $\sigma(P)^2 = |l|$.

Dados dois pontos P e P' em \mathbb{P}^3 , existe apenas uma reta l passando por P e P' .

- $\sigma(\pi)^2 = |l|$.

Dados dois planos α e β em posição geral, contidos em \mathbb{P}^3 , α e β se interceptam ao longo de uma reta l . Portanto l é a única reta que está contida em α e β .

- $\sigma(l)\sigma(\pi) = \sigma(P, \pi)$.

Uma reta λ , que satisfaz a condição $\sigma(l)\sigma(\pi)$, intercepta a reta l e está contida em um plano π . Como podemos tomar l e π em posição geral, $l \cap \pi$ é um ponto P . Portanto λ pertence a plano π e passa por P , mas isso é exatamente o que diz a condição $\sigma(P, \pi)$.

- *Fórmula de Redução:* $\sigma(l)^2 = \sigma(P) + \sigma(\pi)$.

Uma reta λ , que satisfaz a condição $\sigma(l)^2$, intercepta duas retas l e l' distintas em \mathbb{P}^3 . Como não faz diferença a escolha do representante de cada ciclo de Schubert, podemos escolher as retas l e l' se interceptando em um ponto P , sem que isso altere o resultado. Desse modo, ou λ passa por P , ou λ está contida no plano gerado por l e l' . Mas isso é exatamente o que diz a condição $\sigma(P) + \sigma(\pi)$.

A partir dessas relações podemos resolver o seguinte problema enumerativo:

Exemplo 3.2.0.14. *Quantas retas interceptam quatro retas de \mathbb{P}^3 em posição geral?*

$$\sigma(l)^4 = (\sigma(l)^2)^2 = (\sigma(P) + \sigma(\pi))^2 = \sigma(P)^2 + 2\sigma(P)\sigma(\pi) + \sigma(\pi)^2 = |l| + 0 + |l| = 2|l|.$$

$\sigma(P)\sigma(\pi) = 0$, pois podemos tomar P e π em posição geral, assim $P \notin \pi$. Portanto não existe nenhuma reta que passa por P e está contida em π .

Portanto o cálculo de Schubert nos dá que **duas** retas interceptam quatro retas em posição geral em \mathbb{P}^3 .

Exemplo 3.2.0.15. Quantas retas estão contidas na interseção de duas quádricas suaves $Q, Q' \subset \mathbb{P}^4$?

Para responder a essa pergunta vamos aplicar o teorema 3.2.0.11 e expressar o ciclo de Schubert

$$\tau(Q) = \{L \subset \mathbb{P}^5 : L \subset Q\} \subset G(1, 4),$$

de dimensão 3 (veja o exemplo 2.2.3.5), como combinação linear dos ciclos da base de Schubert de dimensão 3. Mas a relação 3.1 afirma que esses ciclos são da forma $\Omega(a_0 a_1)$, em que

$$a_0 + a_1 - 1 = 3, \quad \text{isto é,} \quad a_0 + a_1 = 4, \quad 0 \leq a_0 < a_1 \leq 4.$$

São eles:

$$\bullet \Omega(04) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_4) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Retas que passam pelo ponto A_0 .

$$\bullet \Omega(13) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_3) \geq 1 \end{array} \right\}$$

Retas contidas em A_3 , que interceptam a reta A_1 .

Pelo teorema 3.2.0.11, existem constantes a e b tais que

$$\tau(Q) = a\Omega(04) + b\Omega(13).$$

Calculemos então os valores de a e b .

O truque é interceptar o ciclo $\tau(Q)$ com ciclos da base de Schubert de dimensão complementar. A equação 2.2 nos afirma que $\dim(G(1, 4)) = 2 \cdot 3 = 6$. Logo, temos que interceptar $\tau(Q)$ com os ciclos de dimensão $6 - 3 = 3$.

$$\Omega(04)\tau(Q) = a\Omega(04)^2 + b\Omega(04)\Omega(13).$$

$$\bullet \Omega(04)^2 = 1.$$

$$\bullet \Omega(04)\Omega(13) = 0. \text{ Basta tomar } A_0 \text{ fora de } A_3.$$

Portanto $a = \Omega(04)\tau(Q)$. Mas $\Omega(04)\tau(Q) = 0$, basta tomar o ponto A_0 fora da quádrlica $Q \subset \mathbb{P}^4$. Logo $a = 0$.

$$\Omega(13)\tau(Q) = b\Omega(13)^2.$$

- $\Omega(13)^2 = 1$.

Sejam $V_2 = A_3 \cap A'_3$, um 2-plano, e $P = A_1 \cap V_2$, $P' = A'_1 \cap V_2$. Então a reta P, P' é a única contida em V_2 que intercepta A_1 e A'_1 .

Logo $b = \Omega(13)\tau(Q)$. Seja $F = Q \cap A_3$; F é uma quádrlica suave de dimensão 2 e, pelo teorema 1.3.2.1, ela deve interceptar a reta A_1 em dois pontos $\{P_1, P_2\}$. Pelo exemplo 1.2.5.1, existem duas retas contidas em F , uma de cada família, passando por cada ponto P_i . Veja a figura 4.19. Segue que $b = 4$.

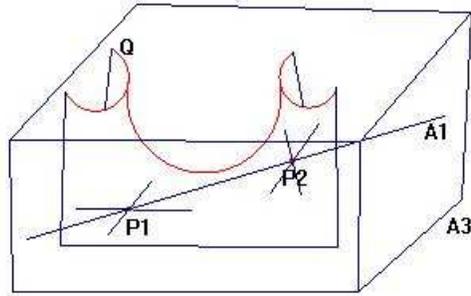


Figura 3.1: $F = Q \cap A_3$

Finalmente

$$\tau(Q) = 4 \cdot \Omega(13).$$

Vamos agora contar quantas são as retas contidas na interseção de duas quádrlicas suaves $Q, Q' \subset \mathbb{P}^4$. Para isso devemos calcular $\tau(Q) \cdot \tau(Q')$. Mas

$$\tau(Q) \cdot \tau(Q') = 16\Omega(13)^2 = 16.$$

Logo, existem 16 retas em $Q \cap Q'$.

Exemplo 3.2.0.16. Vamos expressar o ciclo de Schubert

$$\tau(F) = \{L \subset \mathbb{P}^5 : L \subset F\} \subset G(1, 5),$$

no qual $F \subset \mathbb{P}^5$ é uma hipersuperfície quádrlica suave, como combinação linear dos ciclos da base de Schubert.

Como $\tau(F)$ tem dimensão 5 (veja o exemplo 2.2.3.4), devemos procurar os ciclos da base de Schubert de dimensão 5. Eles são da forma $\Omega(a_0 a_1)$, em que

$$a_0 + a_1 = 5 + 0 + 1 = 6 \quad 0 \leq a_0 < a_1 \leq 5.$$

São eles:

- $\Omega(15) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_5) \geq 1 \end{array} \right\}$

As retas que interceptam a reta A_1 .

- $\Omega(24) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_2) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_4) \geq 1 \end{array} \right\}$

Retas que estão contidas em A_4 e interceptam o plano A_2 , veja a figura 3.2.

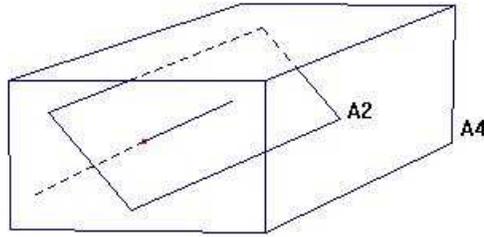


Figura 3.2: $\Omega(24)$

Queremos calcular constantes a e b tais que

$$\tau(F) = a\Omega(15) + b\Omega(24).$$

Para isso devemos interceptar $\tau(F)$ com os ciclos de Schubert de dimensão 3. Eles são da forma $\Omega(a_0 a_1)$, em que

$$a_0 + a_1 = 3 + 0 + 1 = 4 \quad 0 \leq a_0 < a_1 \leq 5 :$$

- $\Omega(04) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_4) \geq 1 \end{array} \right\}$

Retas contidas em A'_4 , que passam pelo ponto A'_0 , veja a figura 3.3.

- $\Omega(13) = \left\{ \begin{array}{l} L \in G(1, 5) : \dim(L \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(L \cap A_3) \geq 1 \end{array} \right\}$

Retas que estão contidas em A'_3 e interceptam a reta A'_1 , veja a figura 3.4.

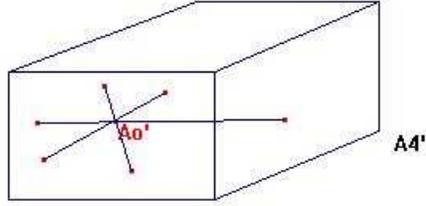


Figura 3.3: $\Omega(04)$

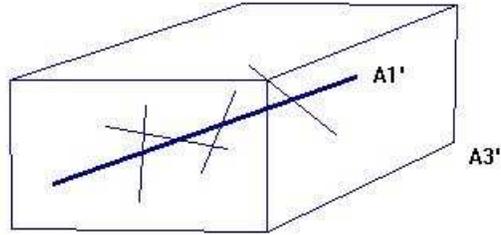


Figura 3.4: $\Omega(13)$

Cálculo de a e b :

$$\Omega(04)\tau(F) = a\Omega(04)\Omega(15) + b\Omega(04)\Omega(24).$$

- $\Omega(04)\Omega(15) = 1$.

Basta tomar a reta A_1 fora de A_4' . Seja $P = A_1 \cap A_4'$. A reta $\overline{P, A_0'}$ é a única em A_4' que passa por A_0' e intercepta A_1 .

- $\Omega(04)\Omega(24) = 0$.

De fato, sejam $V_3 = A_4 \cap A_4'$ e a reta $L = V_3 \cap A_2$. Tome o ponto A_0' fora de V_3 . Dessa forma não existe reta que passa por A_0' e intercepta L .

Logo $a = \Omega(04)\tau(F)$. Seja $Q = A_4' \cap F$; Q é uma quádrlica suave de dimensão 3 em A_4' . Tome o ponto A_0' fora de Q . Nesse caso não existe nenhuma reta em Q que passa por A_0' . Portanto $a = 0$.

$$\Omega(13)\tau(F) = b\Omega(13) \cdot \Omega(24).$$

- $\Omega(13) \cdot \Omega(24) = 1$.

De fato, considere o plano $\pi = A_4 \cap A_3'$. Em A_4 , $A_2 \cap \pi = \{P\}$ e em A_3' , $A_1' \cap \pi = \{P'\}$. Portanto a reta $\overline{P, P'}$ é a única contida em π , que intercepta A_1' e A_2 .

Logo $b = \Omega(13)\tau(F)$. Seja $Q = F \cap A_3'$, Q é uma quádrlica suave de dimensão 2 em A_3' e portanto possui dois pontos de interseção $\{P_1, P_2\}$ com a reta A_1' (veja o teorema 1.3.2.1). Mas existem duas retas em Q (uma de cada família), passando por cada ponto P_i . Portanto $b = 4$.

Finalmente, temos que

$$\tau(F) = 4 \cdot \Omega(24).$$

Capítulo 4

Complexo Quadrático de Retas

Neste capítulo abordaremos o principal assunto desta dissertação, o Complexo Quadrático de Retas. Estamos interessados em descrever a geometria das famílias de retas de \mathbb{P}^3 descritas pela interseção da quádrlica de Plücker G , com uma hipersuperfície quádrlica de \mathbb{P}^5 . Começemos com a definição de complexo de retas e um exemplo bastante interessante, o complexo linear de retas.

4.1 Complexo de Retas

Definição 4.1.0.17. *Um **complexo de retas** de grau d é a família, a três parâmetros, de retas em \mathbb{P}^3 , correspondendo à interseção da quádrlica de Plücker $G \subset \mathbb{P}^5$, com uma hipersuperfície de grau d em \mathbb{P}^5 .*

Definição 4.1.0.18. *Dizemos que um complexo de retas $X = G \cap S$, no qual S é uma hipersuperfície em \mathbb{P}^5 , é **singular** em um ponto $x \in X$ se $T_x G = T_x S$, isto é, se o hiperplano tangente a G no ponto x coincidir com o hiperplano tangente a S no mesmo ponto x . Caso contrário dizemos que o complexo é **não-singular** no ponto $x \in X$. X é não singular se o for para todo ponto $x \in X$.*

4.1.1 Complexo Linear de Retas

Analisemos primeiramente o Complexo Linear de Retas, dado como a interseção de G com um hiperplano em \mathbb{P}^5 .

Considere o complexo de retas $X = G \cap H$, no qual $H \subset \mathbb{P}^5$ é um hiperplano. Suponha que X seja singular em um ponto x , isto é, $H = T_x G$. Nesse caso já sabemos que o complexo X corresponde ao ciclo de Schubert $\sigma(l_x)$, que parametriza as retas em \mathbb{P}^3 que interceptam a reta l_x (l_x é a reta em $G(1,3)$ correspondente ao ponto $x \in G$).

Vamos supor agora que o complexo X seja não-singular. Para cada $P \in \mathbb{P}^3$ considere o conjunto

$$X_P = \sigma(P) \cap H$$

das retas do complexo X que passam pelo ponto P . Temos duas possibilidades:

- $\sigma(P) \subset H$, nesse caso $X_P = \sigma(P)$.
- Ou $\sigma(P) \cap H$ é uma reta l .

Para verificarmos as possibilidades acima considere o seguinte

Lema 4.1.1.1. *O conjunto dos hiperplanos tangentes*

$$\{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$$

a G nos pontos de $\sigma(P)$ forma o sistema linear de todos os hiperplanos de \mathbb{P}^5 que contém $\sigma(P)$.

Prova. De fato, suponha que $J = T_x G$ com $x \in \sigma(P)$. Então $\sigma(P) \subset J$, pois $G \cap J = \sigma(l_x)$; em particular $\sigma(P) \subset \sigma(l_x)$, pois $P \in l_x$. Logo $\sigma(P) \subset J = T_x G$.

Por outro lado seja \mathcal{F} a família dos hiperplanos $H \subset \mathbb{P}^5$ tais que $H \supset \sigma(P)$. $\{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$ é uma família de 2 parâmetros em \mathbb{P}^5 que está contida em \mathcal{F} . Para mostrarmos que $\mathcal{F} = \{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$ basta mostrarmos que \mathcal{F} tem 2 parâmetros. Para isso vamos escolher três pontos para gerar $\sigma(P)$ (veja a proposição 1.2.1.3), $P_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

Seja $H \in \mathcal{F}$, dado pela equação

$$H : ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 + ex_4 + fx_5 = 0.$$

Como $\sigma(P) \subset H$, $a = b = c = 0$.

Seja $\mathcal{G}: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$ a aplicação de Gauss. Temos que $\mathcal{G}(H) = (0, 0, 0, d, e, f)$. Isso nos mostra que $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ é um plano em \mathbb{P}^{5*} ; como \mathcal{G} é um isomorfismo entre \mathbb{P}^5 e \mathbb{P}^{5*} , temos que \mathcal{F} é uma família a dois parâmetros. \square

Dessa forma qualquer hiperplano contendo $\sigma(P)$ é tangente a G . Como estamos supondo que o complexo X é não-singular, X_P tem que ser uma reta, isto é

Para cada $P \in \mathbb{P}^3$, as retas de X que passam por P formam um feixe-plano, isto é, $X_P = \sigma(P, h)$.

De maneira análoga pode-se mostrar que dado qualquer plano $h \subset \mathbb{P}^3$, o hiperplano H não pode conter o plano $\sigma(h) \subset \mathbb{P}^5$, pois caso contrário X seria singular. Dessa forma

Para cada plano $h \subset \mathbb{P}^3$, as retas de X contidas em h formam um feixe-plano $X_h = \sigma(h, P)$.

Para mais detalhes sobre o Complexo Linear de Retas veja [9].

4.1.2 Complexo Quadrático de Retas

Nesta seção estamos interessados em estudar o **Complexo Quadráticos de Retas**, definido como a família de retas em \mathbb{P}^3 correspondendo à interseção não-singular $X = G \cap F$ da quádrlica de Plücker G com uma hipersuperfície quádrlica suave F em \mathbb{P}^5 .

Como na seção 4.1.1, queremos identificar os feixes de retas em X e determinar, dado um ponto $P \in \mathbb{P}^3$ e uma plano $h \subset \mathbb{P}^3$, o lugar das retas do nosso complexo que passam por P ou estão contidas em h . Verifiquemos então o seguinte

Lema 4.1.2.1. *Nenhum plano dos tipos $\sigma(P)$ ou $\sigma(h)$ está contido no complexo quadrático não-singular $X = G \cap F$.*

Prova. Suponha que exista um plano $V \subset \mathbb{P}^5$ tal que $V \subset X$ e considere os mapas de Gauss

$$\mathcal{G}_F : F \rightarrow \mathbb{P}^{5*} \quad e \quad \mathcal{G}_G : G \rightarrow \mathbb{P}^{5*}.$$

O lema 4.1.1.1 nos garante que $\{T_x G\}_{x \in V}$ é a família dos hiperplanos de \mathbb{P}^5 que contém V . Dessa forma cada um desses mapas restritos a V nos dão um isomorfismo entre V e o conjunto V^* dos hiperplanos de \mathbb{P}^5 contendo V .

Considere agora o isomorfismo

$$\mathcal{G}_F^{-1} \circ \mathcal{G}_G : V \rightarrow V$$

e seja $x \in V$ um ponto fixo, isto é, $\mathcal{G}_F^{-1} \circ \mathcal{G}_G(x) = x$ (veja [10],pg 86). Então $T_x G = T_x F$, o que contradiz o fato do complexo X ser não-singular. □

A partir do lema podemos deduzir que para cada ponto $P \in \mathbb{P}^3$ o conjunto

$$X_P = X \cap \sigma(P)$$

das retas do complexo X que passam por P , formam uma cônica em $\sigma(P) \subset G$. Temos então três possibilidades:

- 1- F intercepta $\sigma(P)$ transversalmente, isto é, X_P é uma cônica não-singular.
O lugar, em \mathbb{P}^3 , das retas de X que passam por P é um cone com vértice P sobre uma cônica não-singular. (Veja [11], pag 48)

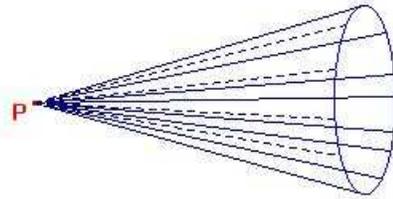


Figura 4.1: Caso 1

- 2- F é tangente a $\sigma(P)$ em um ponto. Nesse caso $\sigma(P) \cap F$ é uma cônica singular que corresponde a duas retas se interceptando em um ponto em \mathbb{P}^5 .
Em \mathbb{P}^3 , X_P corresponde a dois feixes planos com foco P .

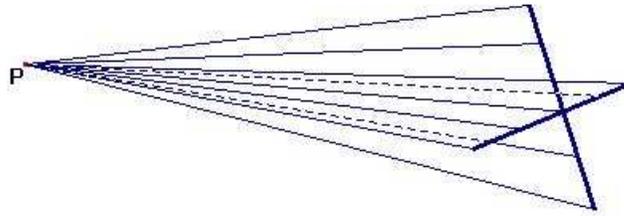


Figura 4.2: Caso 2

- 3- F é tangente a $\sigma(P)$ ao longo de uma reta. Nesse caso X_P é uma reta dupla em \mathbb{P}^5 e, em \mathbb{P}^3 , corresponde a um feixe-plano duplo com foco P .

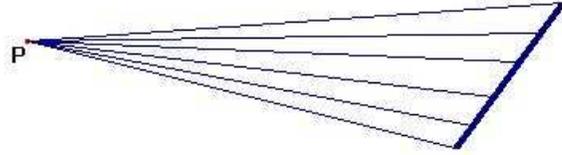


Figura 4.3: Caso 3

Da mesma forma, dado um plano $h \subset \mathbb{P}^3$, o conjunto $X_h = X \cap \sigma(h)$, das retas do complexo X que estão contidas em h , é uma cônica em $\sigma(h)$. Novamente temos três possibilidades:

1'- F intercepta $\sigma(h)$ transversalmente, isto é, $X_h \subset \sigma(h)$ é uma cônica não-singular.

Em \mathbb{P}^3 as retas de X_h formam o conjunto das retas tangentes a uma cônica não-singular em h . (Veja [11], pag 48)

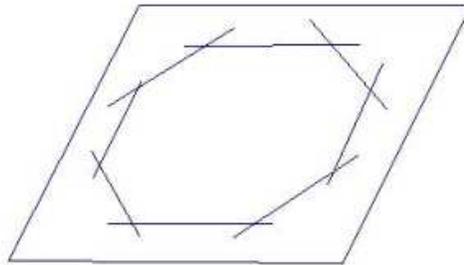


Figura 4.4: Caso 1'

2'- F é tangente a $\sigma(h)$ em um ponto, isto é, X_h corresponde a duas retas que se interceptam em um ponto em $\sigma(h)$. Em \mathbb{P}^3 , X_h corresponde a dois feixes planos distintos contidos em h .

3'- F é tangente a $\sigma(h)$ ao longo de uma reta. Claro que X_h será uma reta dupla em $\sigma(h)$ e um feixe plano duplo em \mathbb{P}^3 .

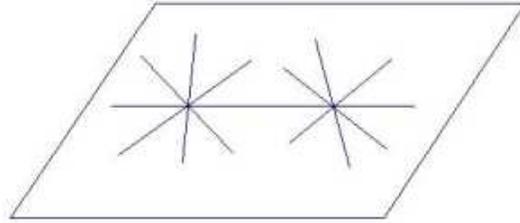


Figura 4.5: Caso 2'

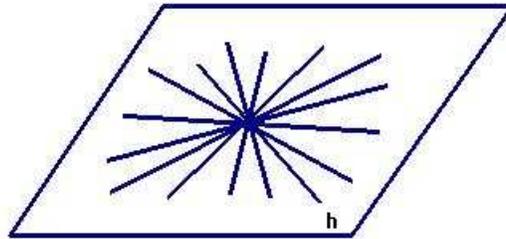


Figura 4.6: Caso 3'

4.2 Superfície de Kummer

Vamos estudar, nesta seção, uma importante superfície de \mathbb{P}^3 , a superfície de Kummer. As seções seguintes são dedicadas às várias propriedades interessantes que essa superfície possui.

Definição 4.2.0.2. *Dado um complexo quadrático de retas X , seja S o conjunto de todos os pontos $P \in \mathbb{P}^3$ tais que X_P seja singular, isto é, o conjunto dos pontos tais que ocorre o caso 2 ou 3, descritos acima. S é chamada a **Superfície de Kummer** associada ao complexo quadrático de retas X .*

Por essa definição não fica claro que S é de fato uma superfície. As seções 4.3 e 4.5, adiante, apresentam duas demonstrações diferentes para esse fato.

Note que S pode ser visto como o conjunto dos focos de todos os feixes planos do complexo X .

Vamos denotar por $R \subset S$ o conjunto dos pontos $P \in S$ tais que o caso 3 ocorre.

Definição 4.2.0.3. *Definimos a **Superfície de Kummer Dual** associada ao complexo quadrático de retas X , $S^* \subset \mathbb{P}^{3*}$, como o conjunto dos planos $h \in \mathbb{P}^{3*}$ tais que X_h é singular, isto é, tais que ocorre o caso 2' ou 3'.*

S^* pode ser visto como o conjunto dos planos de \mathbb{P}^3 que contém feixes planos do complexo X .

Denotaremos por $R^* \subset S^*$ o conjunto dos planos $h \in S^*$ tais que ocorre o caso 3'.

4.3 Retas Singulares do Complexo Quadrático de Retas

Nosso próximo passo no estudo do complexo quadrático de retas X é introduzir uma subvariedade $\Sigma \subset X$ e relacioná-la com a superfície de Kummer S .

Definição 4.3.0.4. *Para algum $x \in X$, a reta l_x é chamada de **reta singular** do complexo X se ela pertence a dois feixes planos cofocais em X , isto é, se $\sigma(P)$ é tangente a F em x , para algum ponto $P \in l_x$.*

Se $P \in S - R$ é claro que existe uma única reta singular por P , que corresponde à reta de interseção dos dois feixes planos de X_P .

Se $P \in R$ qualquer reta l_x de X , que passa por P , é singular pois l_x pertence a um feixe plano duplo de X .

Vamos denotar por $\Sigma \subset X$ o conjunto dos pontos $x \in X$ tal que l_x é uma reta singular.

Lema 4.3.0.5. *Nenhuma reta l_x é singular em mais de um ponto, isto é, se $\sigma(P)$ é tangente a F em $x \in X$ então para $W \neq P$ em l_x , $\sigma(W)$ não pode ser tangente a F em x .*

Prova. Temos que $\sigma(P) \cap \sigma(W) \ni \{x\}$, podemos então tomar os geradores lineares de $\sigma(P)$ e $\sigma(W)$, em \mathbb{P}^5 , para gerar o hiperplano $T_x(G)$. Segue que $\sigma(P)$ e $\sigma(W)$ não podem estar ambos contidos em $T_x(F) \neq T_x(G)$. \square

Dessa forma podemos definir o mapa

$$\pi : \Sigma \rightarrow S$$

que leva cada ponto $x \in \Sigma$ no único ponto $P \in l_x$ em que $\sigma(P)$ é tangente a F em x .

Note que π é injetora e sobrejetora em $S - R$ e que $\pi^{-1}(P) = X_P \cong \mathbb{P}^1$, $\forall P \in R$. Vamos dar uma caracterização para Σ através do seguinte

Lema 4.3.0.6. *Para $x \in X$,*

$$x \in \Sigma \Leftrightarrow T_x(F) \text{ é tangente a } G.$$

Prova. Suponha que $T_x(F)$ seja tangente a G em $x' \neq x$. Então $x \in T_{x'}(G)$ e, portanto, l_x intercepta $l_{x'}$ em um ponto $P \in \mathbb{P}^3$. O plano $\sigma(P)$ está contido em $T_{x'}(G) = T_x(F)$ e $x \in \sigma(P)$, portanto $\sigma(P)$ é tangente a F em x , isto é, $x \in \Sigma$.

Reciprocamente, suponha que $x \in \Sigma$ e seja $P \in l_x$ tal que $\sigma(P) \subset T_x(F)$. Então $T_x(F) \cap G$ contém um plano. Temos então que $T_x(F)$ é tangente a G em algum ponto $x' \neq x$. □

Vamos dar agora uma descrição explícita de $\Sigma \subset X$.

Seja $x = (x_0 : \dots : x_5)$ coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^5 e suponha que G e F são dadas por

$$(Qx, x) = 0 \quad e \quad (Q'x, x) = 0$$

respectivamente, em que Q e Q' são as matrizes simétricas associadas às quádricas G e F .

Em termos de coordenadas x^* do dual \mathbb{P}^{5*} , o mapa de Gauss de G e F são dados por

$$x^* = Qx \quad e \quad x^* = Q'x.$$

As hipersuperfícies duais G^* e $F^* \subset \mathbb{P}^{5*}$ dos hiperplanos tangentes a G e F são então (veja [3], Lecture 15)

$$G^* = ((x^*, Q^{-1}x^*) = 0) \quad e \quad F^* = ((x^*, F^{-1}x^*) = 0).$$

Seja $x \in F$ e suponha que $T_x(F)$ seja tangente a G , então $(x^*, Q^{-1}x^*) = 0$, em que $x^* = Q'x$. Portanto

$$(x^*, Q^{-1}x^*) = (Q'x, Q^{-1}Q'x) = 0$$

Mas $Q^{-1}Q'$ é uma matriz simétrica, portanto $(Q^{-1}Q'y, y) = (y, Q^{-1}Q'y)$ (veja [6], pág 219).

Temos então que, para algum $x \in F$, $T_x(F)$ será tangente a G se e somente se $\mathcal{G}_F(x) \in G^*$, isto é, quando

$$(Q'x, Q^{-1}Q'x) = (Q'Q^{-1}Q'x, x) = 0.$$

O conjunto $\Sigma \subset X$ é portanto uma superfície dada pela interseção de três quádricas, $\Sigma = G \cap F \cap M$, na qual M é uma hipersuperfície quádrica dada por

$$M = ((Q'Q^{-1}Q'x, x) = 0).$$

Proposição 4.3.0.7. *A interseção $\Sigma = G \cap F \cap M$ é não singular.*

Prova. De fato suponha que para algum $x \in G \cap F \cap M$ os hiperplanos tangentes $T_x(G), T_x(F)$ e $T_x(M)$ sejam linearmente dependentes, isto é, os pontos

$$\mathcal{G}_G(x) = Qx, \quad \mathcal{G}_F(x) = Q'x, \quad \mathcal{G}_M(x) = Q'Q^{-1}Q'x$$

em \mathbb{P}^{5*} estão contidos em uma reta.

Note que \mathcal{G}_G é um isomorfismo linear de \mathbb{P}^5 em \mathbb{P}^{5*} , portanto, se aplicarmos \mathcal{G}_G^{-1} nos pontos acima teremos que os três pontos

$$x, \quad x' = Q^{-1}Q'x, \quad x'' = (Q^{-1}Q')^2x$$

estão contidos em uma reta L em \mathbb{P}^5 .

Como esses pontos estão contidos em $G \cap F$, a reta L , gerada por x, x', x'' , está contida em $G \cap F$. Mas a transformação linear

$$N : x \mapsto Q^{-1}Q'x$$

de F em G leva x e x' (distintos pela hipótese $Qx \neq Q'x$ para todo $x \in G \cap F$) em L e, portanto, leva L nela mesma. Então N tem um ponto fixo y em L (veja [10], pg 86), isto é, existe $y \in L$ tal que $N(y) = y$, isto é, $Q'y = Qy$. Absurdo!

Portanto $T_x(G), T_x(F)$ e $T_x(M)$ são linearmente independentes. □

Temos então uma descrição de Σ como a interseção suave de três quádricas em \mathbb{P}^5 . Σ é chamada a dessingularização da superfície de Kummer S .

Veremos na seção 4.6 que a superfície de Kummer S possui um número finito de pontos singulares, isto é, o conjunto $R \subset S$ consiste de um número finito de pontos. Dessa forma, o mapa $\pi : \Sigma \rightarrow S$, nos dá uma equivalência birracional entre Σ e S .

4.4 O grau de S

Nesta seção estamos interessados em calcular o grau da superfície de Kummer. Para isso, faremos uso da definição de grau, apresentada na seção 1.2.6.

Teorema 4.4.0.8. *A superfície de Kummer $S \subset \mathbb{P}^3$, tem grau quatro.*

Prova. Considere $l_x \subset \mathbb{P}^3$ uma reta genérica do complexo X tal que l_x não é tangente a S . Analisemos o conjunto $l_x \cap S$.

Para todo $P \in l_x \cap S$, l_x pertence a um ou dois feixes planos focados em P . Em outras palavras, x pertence a uma ou duas das retas de $F \cap \sigma(P)$. Reciprocamente, é claro que um feixe plano de X , contendo a reta l_x , tem seu foco em l_x e, portanto, em $l_x \cap S$. Assim, se assumirmos que a reta genérica l_x não pertence a dois feixes planos cofocais de X , os pontos da interseção $l_x \cap S$ correspondem exatamente às retas $L \subset \mathbb{P}^5$ em X , passando por $x \in \mathbb{P}^5$.

Já vimos que o lugar das retas em G (resp. F), que passam por um ponto $x \in \mathbb{P}^5$ é justamente a interseção $T_x(G) \cap G$ (resp. $T_x(F) \cap F$). Portanto o lugar das retas em $X = G \cap F$ que passam por x é

$$T_x(X) \cap X = T_x(F) \cap F \cap T_x(G) \cap G.$$

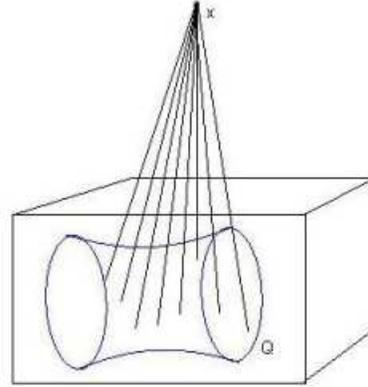


Figura 4.7: $T_x(G) \cap G$

Podemos olhar para $T_x(G) \cap G$ como o cone sobre uma quádrica $Q = T_x(G) \cap G \cap H$, em que H é um hiperplano disjunto de x , veja figura 4.7.

Como estamos supondo que $T_x(F)$ não é tangente a G , então a interseção $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$ será o cone com vértice em x sobre a cônica não singular $T_x(F) \cap Q$, veja a figura 4.8.

Pelo teorema de Bezout, $F \cap T_x(F) \cap Q$ consiste de quatro pontos, contados com multiplicidade. Assim, se assumirmos que $T_x(X) \cap X$ não tem componentes múltiplas, $T_x(X) \cap X$ consiste de 4 retas distintas.

Logo

$$\deg(S) = \#(l_x \cap S) = 4.$$

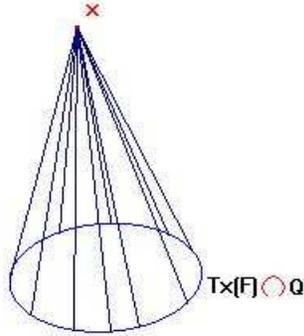


Figura 4.8: $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$

□

Note que, se tomarmos a reta l_x contida em dois feixes planos focados em um ponto P , como $T_x(X) \cap X$ não pode conter mais do que 4 retas, podem existir mais duas retas que passam por x em X , mas que não estão contidas em $\sigma(P)$, ou seja, podem existir no máximo mais dois pontos em $l_x \cap S$. Isso quer dizer que l_x intercepta S em no máximo 3 pontos e, portanto, l_x é tangente a S .

Consideremos agora a interseção $\sigma(P) \cap \sigma(h)$, em que $P \in l_x$ e $h \supset l_x$ e l_x é uma reta qualquer em \mathbb{P}^3 . $\sigma(P) \cap \sigma(h)$ é uma reta em \mathbb{P}^5 (ou um feixe plano em \mathbb{P}^3). Desse modo podemos gerar $\sigma(P)$ por x e uma reta de uma das famílias de retas de $Q = T_x(G) \cap G \cap H$ (veja a figura 4.7) e podemos gerar $\sigma(h)$ por x e uma reta da outra família. Veja o exemplo 1.2.5.1.

Dessa forma os planos $\{\sigma(P)\}_{P \in l_x}$ em $T_x(G) \cap G$ são gerados por x e retas de uma família de Q , enquanto os planos $\{\sigma(h)\}_{h \supset l_x}$ são gerados por x e retas da outra família de Q , veja figura 4.9.

Se $T_x(F)$ for tangente a G em um ponto y podemos tomar y em Q . Vamos ver em que consiste a interseção $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$. Para isso observe que $T_x(F) \cap Q$ tem dimensão 1 e grau 2 em \mathbb{P}^5 , como $T_x(F) \cap Q = T_y(G) \cap Q$ segue que $T_x(F) \cap Q$ é uma cônica singular, isto é, um par de retas que se interceptam em y .

Dessa forma $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$ consiste de dois planos $\sigma(P)$ e $\sigma(h)$ gerados por x e as duas retas da interseção $T_x(F) \cap Q$, veja a figura 4.10.

Cada um desses planos estão contidos em $T_x(F)$ e portanto interceptam F em duas retas passando por x . Dessa forma, das quatro retas de $T_x(X) \cap X = T_x(F) \cap F \cap T_x(G) \cap G$, duas estão contidas em um plano $\sigma(P)$

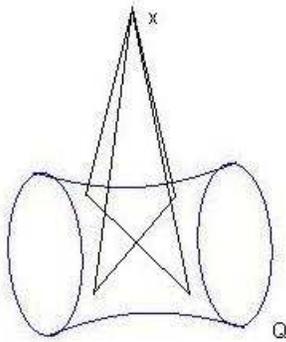


Figura 4.9: $\sigma(P)$ e $\sigma(h)$

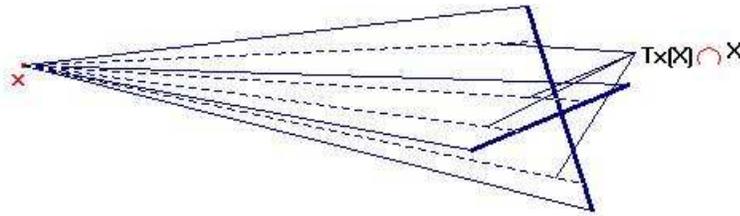


Figura 4.10: $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$

e outras duas em um plano $\sigma(h)$.

Por outro lado, se $T_x(F)$ não é tangente a G , já sabemos que a interseção $T_x(F) \cap T_x(G) \cap G$ será o cone com vértice em x sobre a cônica não singular $T_x(F) \cap Q$ (veja figura 4.8).

Nesse caso não há possibilidade de duas retas de $T_x(X) \cap X$ estarem num mesmo plano $\sigma(P)$ ou $\sigma(h)$.

Acabamos de mostrar então que a interseção $T_x(X) \cap X$ contém duas retas de um mesmo plano $\sigma(P)$ se e somente se contém duas retas de um plano $\sigma(h)$. Em outras palavras:

Proposição 4.4.0.9. *Uma reta l_x do complexo de retas X é singular, isto é, l_x está contida em dois feixes planos cofocais, se e somente se l_x está contida em dois feixes planos coplanares.*

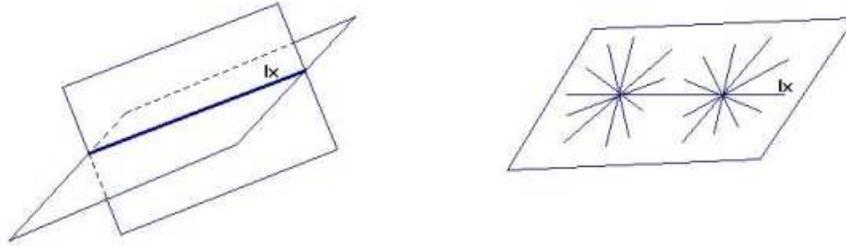


Figura 4.11: Reta l_x em feixes cofocais e em feixes coplanares

4.5 Equação da Superfície de Kummer S

Vamos apresentar nesta seção, de forma explícita, uma equação para a superfície de Kummer S . Para isso será necessário introduzirmos as equações que definem a mudança de coordenadas de Plücker para coordenadas de Klein. São elas:

$$\begin{aligned} x_0 &= p_{12} + p_{34}, & x_2 &= p_{13} - p_{24}, & x_4 &= p_{14} + p_{23} \\ ix_1 &= p_{12} - p_{34}, & ix_3 &= p_{13} + p_{24}, & ix_5 &= p_{14} - p_{23}. \end{aligned}$$

Vamos escolher as coordenadas de Klein em \mathbb{P}^5 . Então a equação de G nesse novo sistema de coordenadas é

$$\sum_{i=0}^5 x_i^2 = 0.$$

Note que $Q = Q^{-1} = Id$, em que Q é a matriz associada a quádrlica G .

Considere agora a seguinte caracterização da superfície S .

Proposição 4.5.0.10. *Para $x \in \Sigma$ qualquer o ponto $Q'x \in G$ e o mapa $\pi : \Sigma \rightarrow S$ é dado por*

$$\pi(x) = l_x \cap l_{Q'x}.$$

Prova. Na seção 4.3 vimos que $\Sigma = F \cap G \cap M$, em que $Q'Q^{-1}Q'$ é a matriz simétrica associada a quádrlica M . Portanto $x \in \Sigma$ se e somente se satisfizer a três equações

$$x^t Q x = 0, \quad x^t Q' x = 0, \quad x^t Q' Q^{-1} Q' x = 0.$$

Mas a última equação pode ser vista como $(Q'x)^t Q(Q'x)$, o que significa que $(Q'x) \in G$

Sejam $X = (X_0, \dots, X_5)$, coordenadas de \mathbb{P}^{5*} . Então a equação de $T_x(F)$ é

$$(Q'x)^t X = 0$$

e a equação de $T_{Q'x}(G)$ é

$$(QQ'x)^t X = (Q'x)^t X = 0,$$

portanto $T_x(F) = T_{Q'x}(G)$. Isso implica que a reta $\langle x, Q'x \rangle \subset \mathbb{P}^5$ está contida em $T_{Q'x}(G) \cap G$ e portanto está contida em G . Segue que as retas l_x e $l_{Q'x}$ se interceptam em um único ponto $P \in \mathbb{P}^3$ e que a reta l_x é singular em P . \square

Teorema 4.5.0.11. *A superfície de Kummer é descrita pelos zeros do seguinte polinômio:*

$$A \sum y_i^4 + 2B(y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2) + 2C(y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2) + 2D(y_0^2 y_3^2 + y_1^2 y_2^2) + 4E y_0 y_1 y_2 y_3 = 0,$$

em que A, B, C, D e E , são constantes dadas pelas relações 4.2, adiante.

Prova. A proposição 4.5.0.10 nos dá uma descrição de S como o lugar dos pontos de interseção das retas l_x e $l_{Q'x}$, quando x varia em Σ . Dado $x \in \Sigma$ seja $\{y\} = l_x \cap l_{Q'x}$, α um ponto de l_x e β um ponto em $l_{Q'x}$. Considere a seguintes coordenadas de Plücker dos pontos x e $Q'x$

$$l_x = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \mapsto x = (y_0 \alpha_1 - y_1 \alpha_0, y_0 \alpha_2 - y_2 \alpha_0, y_0 \alpha_3 - y_3 \alpha_0, y_1 \alpha_2 - y_2 \alpha_1, \\ , y_1 \alpha_3 - y_3 \alpha_1, y_2 \alpha_3 - y_3 \alpha_2),$$

$$l_{Q'x} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \mapsto Q'x = (y_0 \beta_1 - y_1 \beta_0, y_0 \beta_2 - y_2 \beta_0, y_0 \beta_3 - y_3 \beta_0, y_1 \beta_2 - y_2 \beta_1, \\ , y_1 \beta_3 - y_3 \beta_1, y_2 \beta_3 - y_3 \beta_2)$$

e suas respectivas coordenadas de Klein $x = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$ e $Q'x = (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, x''_4, x''_5)$, em que

$$\begin{aligned} x'_0 &= y_0 \alpha_1 - y_1 \alpha_0 + y_2 \alpha_3 - y_3 \alpha_2 \\ ix'_1 &= y_0 \alpha_1 - y_1 \alpha_0 - y_2 \alpha_3 + y_3 \alpha_2 \\ x'_2 &= y_0 \alpha_2 - y_2 \alpha_0 - y_1 \alpha_3 + y_3 \alpha_1 \\ ix'_3 &= y_0 \alpha_2 - y_2 \alpha_0 + y_1 \alpha_3 - y_3 \alpha_1 \\ x'_4 &= y_0 \alpha_3 - y_3 \alpha_0 + y_1 \alpha_2 - y_2 \alpha_1 \\ ix'_5 &= y_0 \alpha_3 - y_3 \alpha_0 - y_1 \alpha_2 + y_2 \alpha_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x_0'' &= y_0\beta_1 - y_1\beta_0 + y_2\beta_3 - y_3\beta_2 \\
ix_1'' &= y_0\beta_1 - y_1\beta_0 - y_2\beta_3 + y_3\beta_2 \\
x_2'' &= y_0\beta_2 - y_2\beta_0 - y_1\beta_3 + y_3\beta_1 \\
ix_3'' &= y_0\beta_2 - y_2\beta_0 + y_1\beta_3 - y_3\beta_1 \\
x_4'' &= y_0\beta_3 - y_3\beta_0 + y_1\beta_2 - y_2\beta_1 \\
ix_5'' &= y_0\beta_3 - y_3\beta_0 - y_1\beta_2 + y_2\beta_1.
\end{aligned}$$

Considere como x', x'' os pontos x e $Q'x$ em coordenadas de Klein e F', G' as matrizes Q' e Q nas novas coordenadas, respectivamente.

É claro que

$$x'' = F'x'. \quad (4.1)$$

Mas

$$F' = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

A relação 4.1 nos dá então que

$$(x_0'', \dots, x_5'') = F'(x_0', \dots, x_5') = (\lambda_0 x_0', \dots, \lambda_5 x_5'),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
y_0\beta_1 - y_1\beta_0 + y_2\beta_3 - y_3\beta_2 &= \lambda_0 y_0 \alpha_1 - \lambda_0 y_1 \alpha_0 + \lambda_0 y_2 \alpha_3 - \lambda_0 y_3 \alpha_2 \\
y_0\beta_1 - y_1\beta_0 - y_2\beta_3 + y_3\beta_2 &= \lambda_1 y_0 \alpha_1 - \lambda_1 y_1 \alpha_0 - \lambda_1 y_2 \alpha_3 + \lambda_1 y_3 \alpha_2 \\
y_0\beta_2 - y_2\beta_0 - y_1\beta_3 + y_3\beta_1 &= \lambda_2 y_0 \alpha_2 - \lambda_2 y_2 \alpha_0 - \lambda_2 y_1 \alpha_3 + \lambda_2 y_3 \alpha_1 \\
y_0\beta_2 - y_2\beta_0 + y_1\beta_3 - y_3\beta_1 &= \lambda_3 y_0 \alpha_2 - \lambda_3 y_2 \alpha_0 + \lambda_3 y_1 \alpha_3 - \lambda_3 y_3 \alpha_1 \\
y_0\beta_3 - y_3\beta_0 + y_1\beta_2 - y_2\beta_1 &= \lambda_4 y_0 \alpha_3 - \lambda_4 y_3 \alpha_0 + \lambda_4 y_1 \alpha_2 - \lambda_4 y_2 \alpha_1 \\
y_0\beta_3 - y_3\beta_0 - y_1\beta_2 + y_2\beta_1 &= \lambda_5 y_0 \alpha_3 - \lambda_5 y_3 \alpha_0 - \lambda_5 y_1 \alpha_2 + \lambda_5 y_2 \alpha_1
\end{aligned}$$

Além disso existe $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{P}^3$ tal que

$$\begin{aligned}
a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 &= 0, \\
a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Eliminando α e β dessas equações, obtemos como equação de S

$$\begin{vmatrix} -\lambda_0 y_1 & \lambda_0 y_0 & -\lambda_0 y_3 & \lambda_0 y_2 & -y_1 & y_0 & -y_3 & y_2 \\ -\lambda_1 y_1 & \lambda_1 y_0 & \lambda_1 y_3 & -\lambda_1 y_2 & -y_1 & y_0 & y_3 & -y_2 \\ -\lambda_2 y_2 & \lambda_2 y_3 & \lambda_2 y_0 & -\lambda_2 y_1 & -y_2 & y_3 & y_0 & -y_1 \\ -\lambda_3 y_2 & -\lambda_3 y_3 & \lambda_3 y_0 & \lambda_3 y_1 & -y_2 & -y_3 & y_0 & y_1 \\ -\lambda_4 y_3 & -\lambda_4 y_2 & \lambda_4 y_1 & \lambda_4 y_0 & -y_3 & -y_2 & y_1 & y_0 \\ -\lambda_5 y_3 & \lambda_5 y_2 & -\lambda_5 y_1 & \lambda_5 y_0 & -y_3 & y_2 & -y_1 & y_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esse determinante é divisível por $(a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3)^2$. Dividindo então por esse fator, teremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 \lambda_3 \lambda_5 - \lambda_0 \lambda_2 \lambda_4) (\sum y_i^2)^2 + (\lambda_0 \lambda_2 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4) (y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2)^2 \\ & + (\lambda_0 \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5) (y_0^2 - y_1^2 + y_2^2 - y_3^2)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 - \lambda_0 \lambda_3 \lambda_5) (y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 \\ & + 4(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5) (y_0 y_2 - y_1 y_3)^2 + 4(\lambda_0 \lambda_4 \lambda_5 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) (y_0 y_1 - y_2 y_3)^2 \\ & + 4(\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_5) (y_0 y_3 - y_1 y_2)^2 + 4(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5) (y_1 y_2 + y_0 y_3)^2 \\ & + 4(\lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 - \lambda_0 \lambda_1 \lambda_3) (y_1 y_3 + y_0 y_2)^2 + 4(\lambda_0 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5) (y_0 y_1 + y_2 y_3)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, se escrevermos

$$\begin{aligned} \lambda_0 - \lambda_1 &= a_0, & \lambda_0 + \lambda_1 &= a_1, \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= b_0, & \lambda_2 + \lambda_3 &= b_1, \\ \lambda_4 - \lambda_5 &= c_0, & \lambda_4 + \lambda_5 &= c_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_0 b_0 c_0 &= A, \\ a_0 [b_0^2 + c_0^2 - (b_1 - c_1)^2] &= 2B, \\ b_0 [c_0^2 + a_0^2 - (c_1 - a_1)^2] &= 2C, \\ c_0 [a_0^2 + b_0^2 - (a_1 - b_1)^2] &= 2D, \\ a_0^2 (b_1 - c_1) + b_0^2 (c_1 - a_1) + c_0^2 (a_1 - b_1) + (b_1 - c_1)(c_1 - a_1)(a_1 - b_1) &= -2E. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Vemos que a equação da superfície de Kummer S assume a seguinte forma

$$A \sum y_i^4 + 2B(y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2) + 2C(y_0^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2) + 2D(y_0^2 y_3^2 + y_1^2 y_2^2) + 4E y_0 y_1 y_2 y_3 = 0.$$

□

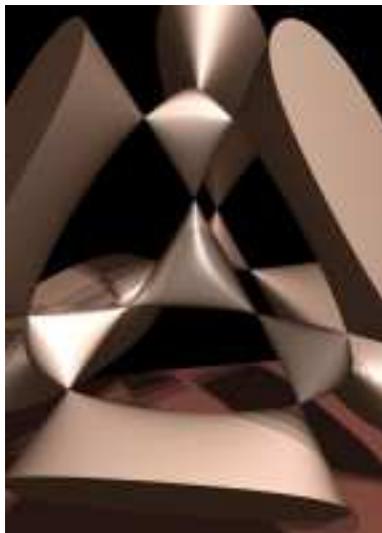


Figura 4.12: Superfície de Kummer

4.6 Pontos Singulares da Superfície de Kummer

Já vimos que o mapa $\pi : \Sigma \rightarrow S$, que leva cada ponto $x \in \Sigma$ no único ponto $P \in l_x$ em que $\sigma(P)$ é tangente a F em x , é uma bijeção em $S - R$ e que $\pi^{-1}(P) = X_P \cong \mathbb{P}^1, \forall P \in R$

Observe que $P \in R$ se e somente se $P \in \tau \cap \omega_F$, em que

$$\tau = \{\sigma(P)\}_{P \in \mathbb{P}^3}$$

é um ciclo de Schubert de dimensão 3 em $G(2, 5)$, o conjunto dos planos de \mathbb{P}^5 , e

$$\omega_F = \{\Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \Lambda \cap F \text{ é uma reta dupla}\}$$

é um ciclo de Schubert de dimensão 6 em $G(2, 5)$ (veja o exemplo 2.2.2.4).

Note ainda que $\dim G(2, 5) = 9$ e que a interseção de um ciclo de dimensão 3 com um ciclo de dimensão 6 em $G(2, 5)$ é um número finito de pontos. Portanto R consiste de um número finito de pontos.

Estamos justamente interessados em calcular o número de pontos duplos de S , ou seja, vamos, através do cálculo de Schubert, calcular $\#R$.

Teorema 4.6.0.12. *A Superfície de Kummer possui 16 pontos singulares.*

Prova. Na seção 3.2 vimos que podemos escrever τ como uma combinação linear dos ciclos da base de Schubert que tem a mesma dimensão. Vimos também que

$$\sum_{i=0}^2 a_i = \dim(\Omega(a_0 a_1 a_2)) + \sum_{i=0}^2 i.$$

Como queremos os ciclos da base de Schubert de dimensão 3, procuramos por seqüências (a_0, a_1, a_2) tais que

$$\sum_{i=0}^2 a_i = 3 + (0 + 1 + 2) = 6.$$

Os ciclos procurados são:

$$\Omega(024) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A_2) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A_4) \geq 2 \end{array} \right\}$$

Os planos de \mathbb{P}^5 contidos em A_4 que interceptam A_2 em uma reta e que passam por A_0 , veja a figura 4.13.

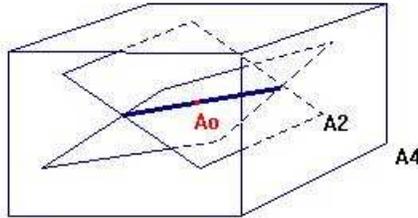


Figura 4.13: $\Omega(024)$

$$\Omega(015) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A_0) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A_1) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A_5) \geq 2 \end{array} \right\}$$

Planos que contém uma reta A_1 , veja a figura 4.14.

$$\Omega(123) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A_1) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A_2) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A_3) \geq 2 \end{array} \right\}$$

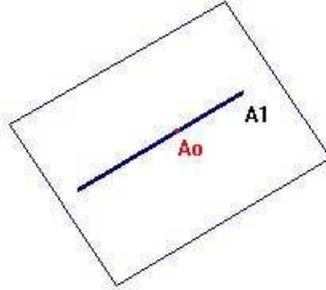


Figura 4.14: $\Omega(015)$

Planos contidos em A_3 , veja figura 4.15.

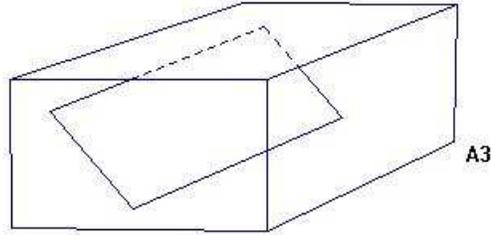


Figura 4.15: $\Omega(123)$

Portanto existem constantes a, b e c tais que

$$\tau = a\Omega(0204) + b\Omega(015) + c\Omega(123).$$

Vamos calcular agora os valores de a, b e c . Para isso vamos interceptar τ (de dimensão 3) com ciclos da base de Schubert de dimensão 6. Eles são determinados pelas sequências (a_0, a_1, a_2) tais que $\sum_{i=0}^2 a_i = 6 + 3 = 9$, e portanto são:

$$\Omega(135) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A'_1) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A'_3) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A'_5) \geq 2 \end{array} \right\}$$

Planos que interceptam A'_3 em uma reta e que intercepta a reta A'_1 em um ponto, veja figura 4.16.

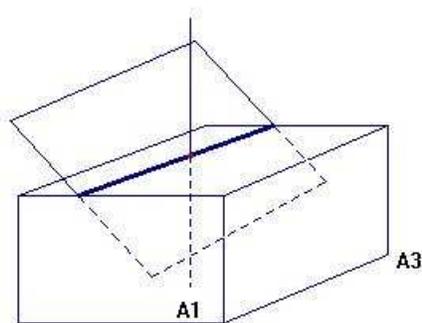


Figura 4.16: $\Omega(135)$

$$\Omega(045) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A'_0) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A'_4) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A'_5) \geq 2 \end{array} \right\}$$

Planos que contém um ponto A'_0 , veja figura 4.17.

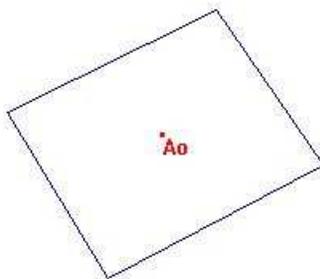


Figura 4.17: $\Omega(045)$

$$\Omega(234) = \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \subset \mathbb{P}^5 : \dim(\Lambda \cap A'_2) \geq 0 \\ \dim(\Lambda \cap A'_3) \geq 1 \\ \dim(\Lambda \cap A'_4) \geq 2 \end{array} \right\}$$

Planos contidos em A'_4 , veja figura 4.18.

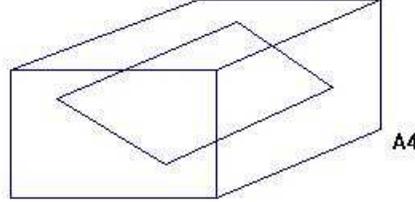


Figura 4.18: $\Omega(234)$

Cálculo de a, b, c :

$$\Omega(135)\tau = a\Omega(135)\Omega(024) + b\Omega(135)\Omega(015) + c\Omega(135)\Omega(123).$$

- $\Omega(135)\Omega(015) = 0$,

pois podemos tomar a reta A'_1 tal que $A'_1 \cap A_3 = \emptyset$, nesse caso se $\Lambda \in \Omega(135)$ então A'_1 não pode estar contida em Λ , caso contrario interceptaria a reta $\Lambda \cap A_3$ e portanto $A'_1 \cap A_3 \neq \emptyset$. Absurdo.

- $\Omega(135)\Omega(123) = 0$,

pois $A_3 \cap A'_3$ é uma reta L . Basta tomarmos a reta A_1 tal que $A_1 \cap L = \emptyset$.

- $\Omega(135)\Omega(024) = 1$,

pois $A_4 \cap A'_3 = \pi$ é um plano π . Seja $P = A'_1 \cap \pi$ em A'_3 e $Q = A_2 \cap \pi$ em A_4 . Um plano Λ em $\Omega(135)\Omega(024)$ deve conter os pontos P, Q e A_0 , portanto $\Lambda = \langle P, Q, A_0 \rangle$.

Logo $a = \Omega(135)\tau$.

Mas $Q = G \cap A'_3$ é uma quádrlica não singular de dimensão 2 em A'_3 e a reta A'_1 intercepta Q em dois pontos P_1 e P_2 . $T_{P_i}(Q) \cap Q$ consiste de duas retas que se interceptam em P_i . Para todo P em \mathbb{P}^3 , se $\sigma(P)$ passa pelo ponto P_i , então $\sigma(P) \subset T_{P_i}(G)$. Além de $\sigma(P)$ conter P_i , $\sigma(P) \cap Q$ tem que conter uma reta. Mas só existem quatro retas contidas em Q que passam por P_i . Veja a figura 4.19. Portanto

$$a = \Omega(135)\tau = 4.$$

$$\Omega(045)\tau = a\Omega(045)\Omega(024) + b\Omega(045)\Omega(015) + c\Omega(045)\Omega(123).$$

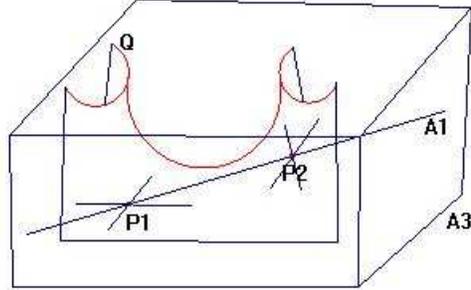


Figura 4.19: $Q = G \cap A'_3$

- $\Omega(045)\Omega(024) = 0$,
pois podemos tomar A'_0 fora de A_4 .
- $\Omega(045)\Omega(015) = 1$,
pois existe um único plano Λ que contém a reta A_1 e passa pelo ponto A'_0 .
- $\Omega(045)\Omega(123) = 0$,
basta tomar A'_0 fora de A_3 .

Logo $b = \Omega(045)\tau$. Mas se tomarmos A'_0 fora de G vemos que $b = 0$.

$$\Omega(234)\tau = a\Omega(234)\Omega(024) + c\Omega(234)\Omega(123).$$

- $\Omega(234)\Omega(024) = 0$,
pois $A_4 \cap A'_4 = \Pi$, em que Π é um subespaço linear de dimensão 3. E $A_2 \cap \Pi$ é apenas um ponto.
- $\Omega(234)\Omega(123) = 1$,
pois $A'_4 \cap A_3$ é um plano Λ .

Logo $c = \Omega(234)\tau$.

Mas $G \cap A'_4$ é uma quádrlica de dimensão 3 e portanto contém apenas subespaços lineares de dimensão $< \frac{3}{2}$ (veja [5],pg 735), ou seja, $G \cap A'_4$ não contém planos. Então $c = 0$.

Portanto,

$$\tau = 4\Omega(024).$$

Vamos agora calcular

$$\#\tau \cdot \omega_F = 4 \cdot \#(\Omega(024) \cdot \omega_F)$$

Para isso sejam P , A_2 e A_4 genéricos tais que $P \notin F$, A_2 intercepta F em uma cônica suave C e A_4 intercepta F em uma quádrlica suave tridimensional Q .

$\Lambda \subset \omega_F \cap \Omega(024)$ se Λ é um plano que contém P , tem uma reta em comum com A_2 , está contido em A_4 e intercepta F em uma reta. Então a reta $\Lambda \cap A_2$ pode interceptar C em um único ponto e portanto, é uma das duas retas tangentes L_1, L_2 a C passando por P em A_2 .

Sejam x_1 e x_2 os pontos de tangência de L_1 e L_2 em C ; o lugar das retas em $Q = F \cap A_4$ passando por x_i é exatamente $T_{x_i}(Q) \cap Q$, um cone de dimensão 2 e vértice x_i .

Seja U_i um 2-plano em $T_{x_i}(Q)$ contendo P e não contendo x_i . Então $F \cap U_i$ é uma cônica suave C_i em $T_{x_i}(Q)$ e $T_{x_i}(Q) \cap Q$ é exatamente o lugar das retas que passam por x_i e que interceptam C_i .

Temos então que Λ intercepta U_i , $i = 1$ ou $i = 2$, em uma das retas tangentes L_{i1}, L_{i2} a C_i passando por P , isso quer dizer que Λ pode ser qualquer um dos quatros planos Λ_{ij} gerados pelas retas L_i e L_{ij} , veja a figura 4.20.

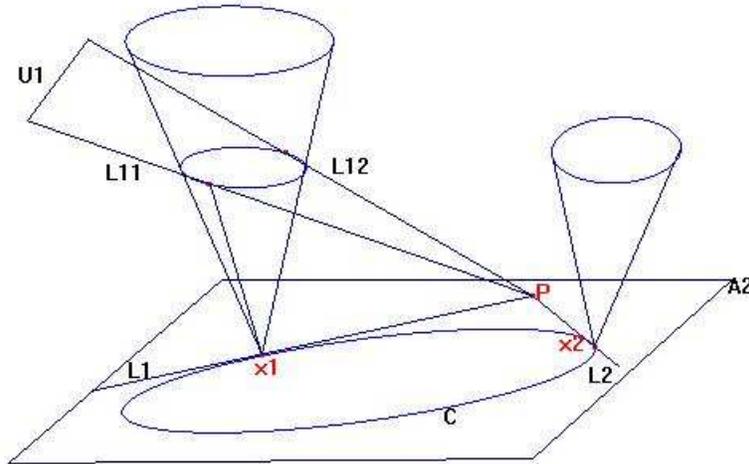


Figura 4.20: $T_{x_i}(Q) \cap Q$, $i=1,2$

Claramente todos os quatros planos Λ_{ij} estão em $\omega_F \cap \Omega(024)$.

Logo $\omega_F \cap \Omega(024) = 4$ e finalmente

$$\#R = \tau \cdot \omega_F = 16.$$

□

4.7 Duas Configurações

Existem duas configurações clássicas associadas à superfície de Kummer $S \subset \mathbb{P}^3$ e sua dessingularização $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$. Para descrevê-las faremos uso das fórmulas apresentadas na seção 1.5.

4.7.1 Configuração $(16)_6$

Analisemos primeiro a configuração $(16)_6$, que tem esse nome por razões que serão entendidas mais adiante. Para isso considere $P_0 \in R$ um ponto duplo de S e \tilde{S} a explosão de S por P_0 (veja [4], II.4). Seja

$$r : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$$

o mapa obtido pela projeção de P_0 em um plano \mathbb{P}^2 .

Dado um plano genérico $h \subset \mathbb{P}^3$, considere a seção hiperplana C_h de S por P_0 . C_h é uma curva plana de grau 4 com um ponto duplo em P_0 e seu gênero é

$$g = \frac{(4-1)(4-2)}{2} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

A curva $\widetilde{C}_h \subset \tilde{S}$ tem então, gênero 2.

Além disso, r expressa \widetilde{C}_h como um recobrimento duplo de sua imagem $L = h \cap \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^1$, portanto, pelo teorema 1.5.0.12, r terá

$$b = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 = 6$$

pontos de ramificação em L .

Se variarmos h no conjunto de todos os planos de \mathbb{P}^3 que passam por P_0 teremos o lugar geométrico dos pontos de ramificação de r , $V \subset \mathbb{P}^2$. V é uma curva plana de grau seis sem componentes múltiplas.

Por outro lado se h é um plano genérico passando por P_0 e outro ponto duplo P_i de S , a curva C_h terá dois pontos duplos e, portanto, seu gênero será

$$g = 3 - 2 = 1.$$

Nesse caso o mapa $r : \widetilde{C}_h \rightarrow \mathbb{P}^1$, que expressa \widetilde{C}_h como uma cobertura dupla de \mathbb{P}^1 , pode se ramificar em, no máximo,

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 = 4$$

pontos além de P_i .

Logo uma reta genérica $L \subset \mathbb{P}^2$ passando por $r(P_i)$ intercepta V no máximo quatro vezes fora de $r(P_i)$. Temos então, que as imagens $\overline{P_i} = r(P_i)$ dos pontos duplos de S , são pontos duplos de V .

Suponha agora que a curva V tenha componentes irredutíveis V_i de grau d_i , isto é,

$$V = V_1 \dots V_r, \quad \deg(V_i) = d_i, \quad \sum d_i = 6.$$

Um ponto duplo de V pode ser de duas formas: Ponto de interseção de duas componentes V_i, V_j ou ponto singular de uma componente V_i . Existem no máximo $\sum_{i \neq j} d_i d_j$ pontos singulares de V da primeira forma e pelo menos $\sum_i \frac{(d_i-1)(d_i-2)}{2}$ pontos singulares da segunda forma.

Mas V tem no máximo 15 pontos singulares $r(P_i), i = 1, \dots, 15$ e $\sum d_i = 6$, então

$$\begin{aligned} 15 &\leq \sum_{i \neq j} d_i d_j + \sum \frac{(d_i-1)(d_i-2)}{2} \\ &= \sum_{i \neq j} d_i d_j + \frac{1}{2} \sum (d_i)^2 + \sum \frac{-3d_i + 2}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\sum d_i)^2 - \frac{1}{2} \sum d_i - \sum (d_i - 1) \\ &= 18 - 3 - \sum (d_i - 1). \end{aligned}$$

Podemos concluir então que $d_i = 1$ para todo i e, portanto, que V consiste de seis retas distintas L_i , isto é, $V = L_1 \dots L_6$. V tem então 15 pontos duplos $L_i \cap L_j, i \neq j$, sendo eles as imagens $r(P_i)$. Segue que cada uma das retas L_i contém exatamente cinco dos pontos $r(P_i)$ e o correspondente plano $\langle P_0, L_i \rangle \subset \mathbb{P}^3$ contém exatamente seis pontos duplos P_i de S , veja a figura 4.21 . Logo

Através de cada ponto duplo P de S passam seis planos, cada um contendo seis dos pontos P_i .

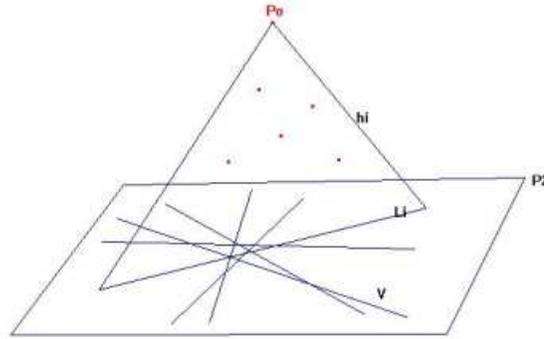


Figura 4.21: Plano por P_0

Vamos analisar com mais detalhes um dos planos $h = \langle P_0, L \rangle$, no qual L é uma das retas L_i . Note que, já que L é parte do lugar geométrico dos pontos de ramificação do mapa r , toda reta por P_0 em h intercepta S em mais um ponto e, portanto, é tangente a S nesse ponto. Segue que h é tangente a S em todo ponto $P \in S \cap h$. Logo a curva C_h é uma cônica, contida com multiplicidade 2, na interseção $S \cap h$.

Proposição 4.7.1.1. *O plano $h = \langle P_0, L \rangle$ é um ponto duplo da superfície de Kummer dual $S^* \subset \mathbb{P}^{3*}$.*

Prova. De fato, suponha que $h \notin R^*$, então X tem que conter dois feixes planos contidos em h e, através de um ponto genérico $P \in C_h$, teriam que passar duas retas distintas do complexo de retas X .

Mas a reta comum de dois feixes planos de X passando por cada $P \in C_h$, como já vimos, é tangente a S por P , logo está contida em h e, portanto, é uma das retas que passa por P da figura 4.22. Existe então pelo menos uma reta de X secante a S por P , contida em h , portanto X tem que conter o feixe plano $\sigma(P, h)$. Logo X contém três feixes planos em h e portanto todo h . Absurdo! Assim, X pode conter apenas um feixe plano em h , isto é, $h \in R^*$. \square

Finalmente, aplicando os mesmos argumentos para a superfície de Kummer dual $S^* \subset \mathbb{P}^{3*}$, vemos que todo ponto $h^* \in R^*$ está contido em seis planos $P^* \in R$, ou seja, todo plano $h \in \mathbb{P}^3$ correspondendo um ponto de R^*

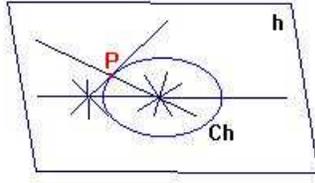


Figura 4.22: C_h

contém seis dos pontos P_i de R .

Toda essa construção resume-se ao seguinte:

Teorema 4.7.1.2. *Todo plano $h \in R^*$ contém exatamente seis dos 16 pontos duplos de S e todo ponto duplo de S está contido em exatamente seis dos 16 hiperplanos $h \in R^*$.*

Essa configuração dos 16 pontos e 16 planos é a chamada *configuração* $(16)_6$.

4.7.2 Configuração $(32_{20}80_8)$

Uma outra configuração associadas à superfície de Kummer $S \subset \mathbb{P}^3$ e a $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ é a configuração $(32_{20}80_8)$.

Considere agora a superfície $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$. Vamos mostrar que Σ contém 32 retas; 16 retas $\{X_P\}_{P \in R}$ formando a imagem inversa dos pontos duplos de S por π e, da mesma forma, 16 retas $\{X_h\}_{h \in R^*}$ formando a imagem inversa $\{\pi^{-1}(C_h)\}_{h \in R^*}$ das 16 seções planas duplas de S (também pode ser visto como o divisor excepcional da dessingularização $\pi : \Sigma \rightarrow S^*$, veja [5], pg182).

As retas $\{X_P\}$ são claramente todas disjuntas (pois uma reta é singular em apenas um ponto), assim como as retas $\{X_h\}$. A configuração (16_6) nos diz que cada reta X_P intercepta exatamente seis das retas $\{X_h\}$ e vice versa.

Note que essas são exatamente as retas de Σ . De fato, se $L \subset \Sigma$ é uma reta e $\sigma(P, h)$ o correspondente feixe plano, então, por definição, toda reta $l \in \sigma(P, h)$ pertence a dois feixes cofocais em X . Se o foco comum desses dois feixes é P para toda reta $l \in \sigma(P, h)$, então claramente $\sigma(P, h) = X_P$. Mas se, para uma reta genérica $l \in \sigma(P, h)$, o foco comum dos dois feixes contendo l é um ponto $Q \neq P \in C_h$, então h não pode conter dois feixes planos e, portanto, $\sigma(P, h) = X_h$.

Gostaríamos de descrever agora um conjunto especial de seções hiperplanas de Σ . Para isso será necessário a compreensão da figura da configuração (16₆), obtida pela projeção r de um ponto $P_0 \in R$. Já sabemos que através dessa projeção os 15 pontos restantes de R são levados nos pontos de interseção das seis retas $L_1, \dots, L_6 \subset \mathbb{P}^2$. Sejam $\overline{P_{ij}} = L_i \cap L_j$ e P_{ij} os pontos de R que são levados em $\overline{P_{ij}}$, isto é, os pontos tais que $r(P_{ij}) = \overline{P_{ij}}$.

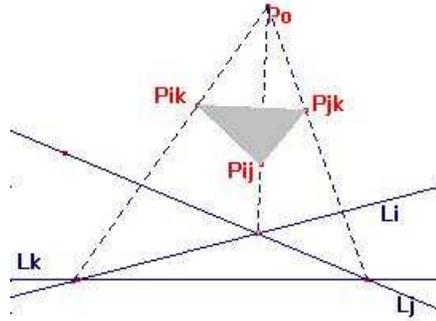


Figura 4.23: Pontos P_{ij}

Escolha três retas L_i, L_j, L_k e considere as retas em Σ correspondendo aos pontos $P_0, P_{ij}, P_{ik}, P_{jk} \in R$ e aos planos $h_i = \overline{P_0 L_i}$, $h_j = \overline{P_0 L_j}$, $h_k = \overline{P_0 L_k} \in R^*$. Essas retas formam a configuração da figura 4.24.

Note que essas sete retas estão em um hiperplano em \mathbb{P}^5 gerado pelos cinco pontos circulosados. Nesse hiperplano as retas $X_{P_{ik}}$ e $X_{P_{jk}}$ geram um 3-plano, que deve então interceptar $X_{P_{ij}}$ em um único ponto $(X_{P_{ij}.P_{jk}.P_{ik}} \cap X_{P_{ij}})$. Portanto existe uma reta $L \subset \mathbb{P}^5$ interceptando $X_{P_{ij}}, X_{P_{ik}}$ e $X_{P_{jk}}$.

Mas Σ é formado por quádricas, como a reta L encontra Σ em três pontos, L está contida em Σ . Além disso L intercepta retas da forma X_P , portanto $L = X_h$, para algum $h \in R^*$. Como L intercepta as retas $X_{P_{ij}}, X_{P_{ik}}$ e $X_{P_{jk}}$, devemos ter que $h = \langle P_{ij}, P_{ik}, P_{jk} \rangle$. Logo todas as faces do tetraedro em \mathbb{P}^3 com vértices P_0, P_{ij}, P_{ik} e P_{jk} são planos $h \in R^*$.

Esse tetraedro é chamado de tetraedro especial.

A cada tetraedro especial podemos associar uma seção hiperplana de Σ consistindo das oito retas que formam a configuração da figura 4.24.

Dado $P \in R$ existe um tetraedro especial passando por P para cada escolha de três retas L_i, L_j e L_k entre as seis retas $\{L_i\}$, portanto toda reta X_P , com $P \in R$ (assim como toda reta X_h , com $h \in R^*$) em Σ está contida em 20 tais hiperplanos.

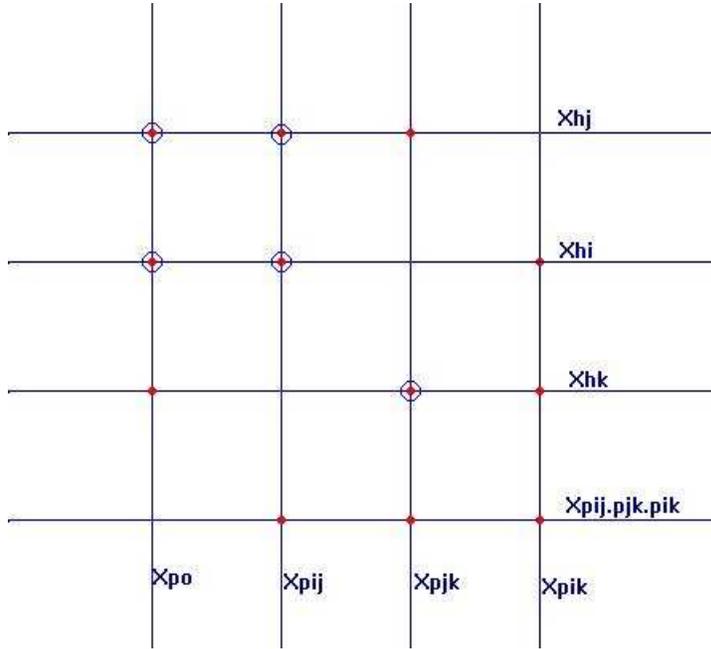


Figura 4.24: Configuração de retas em Σ

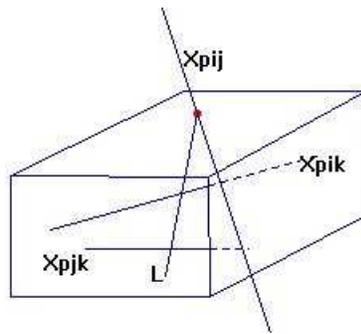


Figura 4.25: $L = X_h$

Finalmente como temos 16 pontos $P \in R$, 20 tetraedros especiais contendo cada P como vértice e quatro vértices em cada tetraedro, segue que existem exatamente 80 tais seções hiperplanas de Σ .

Essa configuração de 32 retas e 80 hiperplanos em \mathbb{P}^5 é a chamada *configuração* $(32_{20}80_8)$ e está descrita no seguinte teorema:

Teorema 4.7.2.1. *A superfície Σ contém 32 retas, formando duas famílias*

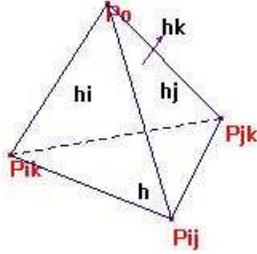


Figura 4.26: Tetraedro Especial

de retas disjuntas, com cada reta encontrando exatamente seis membros da família oposta. Existem 80 hiperplanos em \mathbb{P}^5 interceptando Σ em exatamente oito retas (quatro de cada família) e cada reta em Σ está em 20 tais seções hiperplana de Σ .

Essa configuração nos ajuda a compreender melhor a configuração (16₆). Em termos de nossa descrição dos 16 pontos de R , poderíamos a priori identificar seis dos 16 planos planos de R^* : os planos $h_i = \langle P_0, L_i \rangle$, contendo os pontos P_0 e $\{P_{ij}\}_j$. Vamos agora descrever os dez restantes.

Como já vimos, para cada trio de retas L_i, L_j e L_k , o plano $h_{ijk} = \langle P_{ij}, P_{ik}, P_{jk} \rangle \in R^*$. Gostaríamos de identificar os três outros pontos Q_1, Q_2 e Q_3 de R que estão contidos em h_{ijk} . Para isso lembremos que os pontos $P_{ij}, P_{ik}, P_{jk}, Q_1, Q_2$ e Q_3 estão todos em uma curva cônica e portanto assim o fazem suas imagens $\overline{P_{ij}}, \overline{P_{ik}}, \overline{P_{jk}}, \overline{Q_1}, \overline{Q_2}$ e $\overline{Q_3}$. Temos então que não existe nenhuma reta contendo três desses pontos, logo $\overline{Q_1}, \overline{Q_2}$ e $\overline{Q_3}$ estão fora das retas L_i, L_j e L_k . Essas retas entretanto dão conta de 12 dos 15 pontos $\{P_{ij}\}$, veja a figura 4.27.

Consequentemente os pontos Q_1, Q_2 e Q_3 tem que ser da forma P_{lm}, P_{mn} e P_{ln} . Então podemos considerar que os 16 pontos duplos de S são P_0 e os pontos da forma $\{P_{ij}\}$ e que os 16 pontos duplos de S^* são $\{h_i\}$ e os pontos da forma $\{h_{ijk} = h_{lmn}\}$.

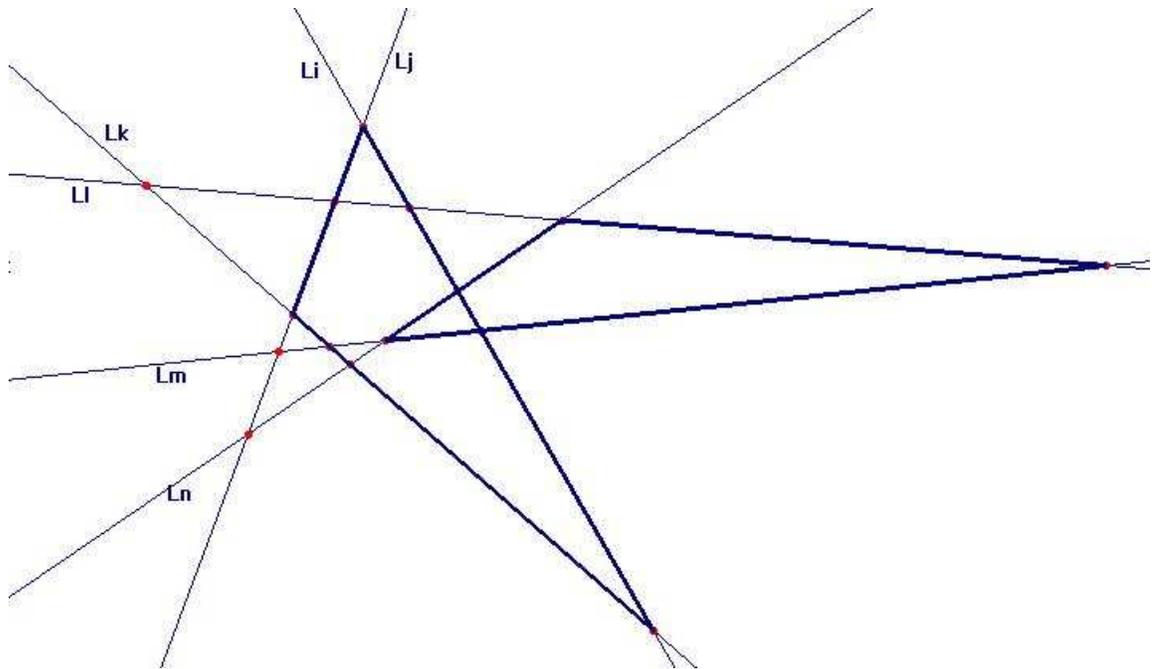


Figura 4.27: Interseção das retas L_j

Temos então as seguintes relações de incidência:

$$h_i \supset \{P_0, P_{ij}\}, \quad j \neq i,$$

$$h_{ijk} \supset \{P_{ij}, P_{ik}, P_{jk}, P_{lm}, P_{ln}, P_{mn}\},$$

$$P_0 \in h_i, \quad i = 1, \dots, 6, \quad e$$

$$P_{ij} \in h_i, h_j, h_{ijk}, \quad k \neq i, j.$$

Referências Bibliográficas

- [1] I. G. MacDonald M. F. Atiyah. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [2] Otto Foster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1981.
- [3] J. Harris. *Algebraic Geometry-A first Course*. Springer-Verlag, 1993.
- [4] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [5] Griffiths and Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Interscience, 1978.
- [6] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer-Verlag, third edition, 1987.
- [7] M. Greuel. and Gerhard Pfister. *A Singular Introduction to Comutative Algebra*. Springer, 2002.
- [8] S. L. Kleiman e D.Laksov. Schubert's calculus. *Am. Math. Monthly* 79, pages 1061–1082, 1972.
- [9] Danúbia Junca. *Complexo Linear e Tetraédrico de Retas*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, abril de 2007.
- [10] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill KogaKusha, Ltd, second edition, 1996.
- [11] D. Avritzer. *Introdução à Geometria Enumerativa: Algumas Propriedades Geométricas das Grassmannianas*. Escola de Álgebra, São Paulo, 1990.