

Modos de vibração da membrana elíptica e
problemas de Sturm-Liouville acoplados

Flávio Almeida Lemos
Armando G. M. Neves (orientador)
UFMG - Depto. de Matemática

10 de julho de 2007

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Histórico das funções de Mathieu e do problema da membrana elíptica	4
1.2	Membranas retangular e circular	6
1.2.1	Membrana Retangular	6
1.2.2	Membrana Circular	7
1.3	A membrana elíptica	8
2	Problemas de Sturm-Liouville e a Equação de Mathieu Modificada	12
2.1	Substituição de Pruefer	13
2.2	Equação de Mathieu Modificada	20
3	Equação de Mathieu	23
3.1	Teoria de Floquet	23
3.2	Funções Analíticas de Várias Variáveis	28
3.3	Teoria Analítica de Equações Diferenciais	29
3.4	Versão Analítica do Teorema da Função Implícita	35
3.5	Equação de Hill e os números característicos de Mathieu	37
4	Existência dos Modos Normais	43
4.1	Prova do teorema principal	43
4.2	Conclusões	46

Capítulo 1

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região aberta e conexa, cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma curva fechada, suave por partes. Procuram-se soluções não-triviais periódicas no tempo $\Psi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{i\omega t}$ para a equação da onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi, \quad (1.1)$$

com $(x, y) \in \Omega$ e obedecendo à condição de Dirichlet homogênea

$$\Psi(x, y, t) = 0 \quad (1.2)$$

para $(x, y) \in \partial\Omega$. Em (1.1),

$$\Delta \Psi = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)$$

denota, como usual, o operador laplaciano em duas variáveis. Fisicamente, pode-se imaginar que existe uma membrana elástica ocupando a região Ω com sua borda $\partial\Omega$ fixada. As funções não-nulas $\phi(x, y)$ são chamadas modos normais de vibração da membrana. Os números ω para os quais o problema possui solução são as frequências dos modos. Substituindo $\Psi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{i\omega t}$ em (1.1), vê-se que

$$\Delta \phi(x, y) = -\frac{\omega^2}{c^2} \phi(x, y), \quad (1.3)$$

de modo que os ω estão relacionados a autovalores do laplaciano em Ω com condições de Dirichlet homogêneas em $\partial\Omega$, sendo ϕ as autofunções correspondentes.

Estudaremos nesta dissertação o caso que Ω é a região interior a uma elipse. Tal problema, até onde sabemos, ainda não tem uma solução completa, como já a têm os casos das membranas circular e retangular que veremos mais adiante na seção 1.2. Os resultados desta dissertação contribuem na tentativa de se resolver completamente o problema dos modos normais de vibração de uma membrana elíptica.

Na seção 1.3 introduziremos as coordenadas elípticas e nesse sistema de coordenadas usaremos o método de separação de variáveis em (1.3). Chegaremos às equações diferenciais

$$G''(\eta) + (a - 2q \cos(2\eta))G(\eta) = 0 \quad (1.4)$$

e

$$F''(\xi) - (a - 2q \cosh(2\xi))F(\xi) = 0, \quad (1.5)$$

onde a é a constante da separação de variáveis e q é parâmetro dado por

$$q = \frac{h^2 \omega^2}{4c^2}, \quad (1.6)$$

sendo h a metade da distância entre os focos da elipse $\partial\Omega$. A equação (1.4) é conhecida como equação de Mathieu, enquanto (1.5) é chamada equação de Mathieu modificada.

Na seção 1.3 veremos também que as condições de contorno para (1.4) são

$$G(0) = G(2\pi) \quad \text{e} \quad G'(0) = G'(2\pi). \quad (1.7)$$

Para (1.5) haverá casos em que as condições a serem aplicadas são

$$F(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(\xi_0) = 0 \quad (1.8)$$

e casos em que as condições serão

$$F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(\xi_0) = 0, \quad (1.9)$$

onde, em ambos os casos,

$$\xi_0 = \text{arc cosh} \frac{a}{h}. \quad (1.10)$$

Os problemas de valor de contorno (1.5),(1.8) e (1.5),(1.9) são ambos problemas de Sturm-Liouville [23]. Referir-nos-emos conjuntamente a estes

dois problemas como o problema de Sturm-Liouville radial. No capítulo 2, tais problemas serão estudados e veremos que para q fixado, cada um deles possui solução não-trivial para infinitos valores de a .

O problema (1.4),(1.7) também é um problema de Sturm-Liouville, embora as condições de contorno periódicas tornem seu estudo um pouco diferente. Tal problema será aqui denominado como problema angular e estudado no capítulo 3. Lá veremos que também, para q fixado, o problema angular possui solução não-trivial para infinitos valores de a .

A dificuldade que mencionamos acima em se resolver completamente o problema dos modos normais de vibração da membrana elíptica se deve ao fato de que as frequências dos modos serão encontradas por (1.6), desde que conheçamos valores de q para os quais os problemas de Sturm-Liouville radial e angular possuam ambos solução não-trivial para o mesmo valor de a . Diremos que os problemas de Sturm-Liouville radial e angular estão acoplados.

Como mostraremos nas sub-seções 1.2.1 e 1.2.2, tal acoplamento não aparece nos casos das membranas retangular e circular, que são portanto mais fáceis e com soluções bem conhecidas [8].

No capítulo 4, iremos reunir os resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 e mostrar a existência de infinitos valores de q tais que os problemas de Sturm-Liouville radial e angular possuem solução não-trivial para o mesmo a . Em outras palavras, estaremos mostrando, via método de separação de variáveis, a existência dos modos normais de vibração para a membrana elíptica. Além do mais, veremos que para cada modo de vibração das membranas retangular ou circular, existe pelo menos um modo para a membrana elíptica. Conjeturamos que a relação entre os modos da membrana elíptica e os da membrana circular (ou retangular) seja um para um, ou seja, a expressão “pelo menos um” da última frase deve poder ser substituída por “exatamente um”, embora não o saibamos ainda provar.

1.1 Histórico das funções de Mathieu e do problema da membrana elíptica

Émile Mathieu chegou às duas equações (1.4) e (1.5) que levam seu nome em 1868, ao tentar resolver o problema da membrana elíptica [19]. Em seu artigo, Mathieu obteve soluções 2π -periódicas para (1.4) como séries de potências formais no parâmetro q . Descobriu que, como no caso trivial $q = 0$,

se $q \neq 0$, (1.4) só terá soluções 2π -periódicas para determinados valores de a . Tais valores são chamados números característicos da equação de Mathieu e também foram encontrados em [19] como séries de potências em q . A demonstração da convergência das séries de Mathieu veio somente mais tarde em [25]. Devido à suspeita de que o raio de convergência de tais séries é finito, estas possuem utilidade limitada para a solução do problema dos modos normais de vibração da membrana elíptica [4].

Segundo Alhargan [3], a maior dificuldade em se trabalhar com funções de Mathieu é exatamente o cálculo dos números característicos. Em 1927, Ince [14] obteve um método de cálculo mais adequado para estes, baseado em frações contínuas.

Uma outra estratégia para calcular os números característicos de Mathieu é a de aproximar as soluções de (1.4) através de iteradas de Picard de ordens elevadas obtidas usando programas de cálculo simbólico. Tal método foi preconizado por Sinha e Butcher em [24], em que obtiveram iteradas de Picard aproximadas para EDO's lineares com coeficientes periódicos. Neves [20], [22] aperfeiçoou o método, conseguindo obter iteradas de Picard exatas.

Reunindo o vasto trabalho sobre funções de Mathieu desde o próprio Mathieu até a metade do século passado, dois importantes livros, [17], [5], foram publicados. Uma outra boa referência geral, ainda antiga, é [1]. Outros trabalhos de cunho geral sobre o assunto, estes bastante atuais, são [11], [10].

Com a popularização dos computadores, a partir da década de 80 do século passado, houve um certo renascimento das funções de Mathieu, vários artigos importantes apareceram tendo como ponto de interesse a implementação computacional dessas funções. Além de alguns acima citados podemos destacar ainda [9] e [21].

Ao longo de vários anos, inclusive recentemente, têm aparecido métodos muito variados para o cálculo das frequências dos modos normais e das autofunções correspondentes da membrana elíptica, testemunhando a dificuldade e atualidade do problema. Em [15] usou-se um método baseado na aproximação WKB. Em [12], empregam-se técnicas de otimização. Em [7], usam-se séries truncadas para as funções de Mathieu em termos de produtos de funções de Bessel. Em [13], o método é baseado em discretização via elementos finitos.

Embora nesta dissertação não nos tenhamos preocupado com o cálculo numérico dos modos normais da membrana elíptica, cremos que nosso trabalho sobre a existência e classificação destes modos seja importante devido a imperfeições nos métodos usados nos artigos acima citados. Por exemplo,

os autores de [7] encontram modos ausentes em [15]. Não obstante, não são capazes de garantir que todos os modos até uma determinada frequência estejam listados em suas tabelas e nem podem garantir a exatidão numérica de seus resultados.

Além de aparecerem na solução de problemas de valor de contorno em regiões elípticas, existem outras aplicações para as funções de Mathieu. Uma delas é o problema da estabilidade de pêndulos excitados por vibrações; veja por exemplo [2] ou [22].

1.2 Membranas retangular e circular

Agora, antes de entrarmos mais profundamente no problema da membrana elíptica, vamos ver dois exemplos de problemas mais simples de modos normais de vibração de membranas.

1.2.1 Membrana Retangular

Seja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < b, 0 < y < d\}$. Procuramos soluções $\phi(x, y)e^{i\omega t}$ para (1.3) que se anulem em $\partial\Omega$.

Escrevendo $\phi(x, y) = f(x)g(y)$ e aplicando o método de separação de variáveis, chegamos nas seguintes equações diferenciais

$$f''(x) + \frac{(\omega^2 + \sigma)}{c^2} f(x) = 0 \quad (1.11)$$

e

$$g''(y) - \frac{\sigma}{c^2} g(y) = 0, \quad (1.12)$$

onde σ é a constante de separação. As condições de contorno para as equações (1.11) e (1.12) são respectivamente,

$$f(0) = f(b) = 0 \quad (1.13)$$

e

$$g(0) = g(d) = 0. \quad (1.14)$$

Resolvendo primeiro o problema de valores de contorno (1.12), (1.14), descobrimos que os valores permitidos para a constante de separação são

$\sigma = -\frac{n^2\pi^2 c^2}{d^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Substituindo estes valores em (1.11) e usando as condições de contorno (1.13), obtemos que os modos normais são

$$\phi_{mn}(x, y) = \text{sen} \frac{m\pi x}{b} \text{sen} \frac{n\pi y}{d} \quad (1.15)$$

com frequências $\omega_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2}}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

1.2.2 Membrana Circular

Considere agora sendo a região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$. Para encontrar os modos normais, passamos das coordenadas cartesianas (x, y) para coordenadas polares (ρ, θ) , sendo $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. O laplaciano é então

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}. \quad (1.16)$$

Escrevendo $\phi(x, y) = R(\rho)\Phi(\theta)$ e usando o método de separação de variáveis em (1.3), chegamos às seguintes equações diferenciais com suas respectivas condições de contorno:

$$\Phi''(\theta) + \mu\Phi(\theta) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \quad (1.17)$$

e

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + \left(\frac{\omega^2 \rho^2}{c^2} - \mu\right)R(\rho) = 0, \quad R(r) = 0, \quad (1.18)$$

onde μ é a constante de separação.

Para o problema (1.17) os valores da constante de separação para os quais se tem solução não-trivial são $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. As soluções correspondentes são $\Phi_n^{(P)}(\theta) = \cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$ e $\Phi_n^{(I)}(\theta) = \sin n\theta$, $n = 1, 2, 3, \dots$

A equação diferencial em (1.18) é conhecida como equação de Bessel, ver por exemplo [8], capítulo 8, para propriedades de suas soluções. Substituindo $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ obtemos a solução geral $R_n(\rho) = c_1 J_n\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) + c_2 Y_n\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)$ para a equação de Bessel. Como Y_n é singular na origem $\rho = 0$ e $R(\rho)$ deve ser finita na origem, então temos que ter $c_2 = 0$.

Para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, J_n possui infinitos zeros que denotamos em ordem crescente por x_{n0}, x_{n1}, \dots . As frequências dos modos normais são obtidas aplicando-se agora a condição $R(r) = 0$:

$$\omega_{nm} = \frac{c}{r} x_{nm}, \quad (1.19)$$

onde $n, m = 0, 1, 2, \dots$. Os modos correspondentes são

$$\phi_{mn}^{(P)}(\rho, \theta) = J_n\left(\frac{\omega_{nm}}{c}\rho\right) \cos n\theta \quad (1.20)$$

e

$$\phi_{mn}^{(I)}(\rho, \theta) = J_n\left(\frac{\omega_{nm}}{c}\rho\right) \sen n\theta . \quad (1.21)$$

Observe que $\phi_{mn}^{(P)}$ e $\phi_{mn}^{(I)}$ possuem a mesma frequência ω_{nm} .

1.3 A membrana elíptica

Para estudar o problema (1.1), (1.2) no caso que Ω é a região interior a uma elipse, usaremos coordenadas elípticas (ξ, η) definidas por

$$x = h \cosh \xi \cos \eta \quad e \quad y = h \sinh \xi \sen \eta , \quad (1.22)$$

onde h é a metade da distância entre os focos de $\partial\Omega$. Mais sucintamente, pode-se escrever $x + iy = h \cosh(\xi + i\eta)$. De (1.22) vê-se que a curva $\xi = 0$ é o segmento de reta entre os focos de $\partial\Omega$ e que as demais curvas $\xi = \text{const}$ são elipses com focos em $(-h, 0)$ e $(h, 0)$. Se a e b denotam respectivamente os semi-eixos maior e menor de $\partial\Omega$, então $h = \sqrt{a^2 - b^2}$ e a equação $\xi = \xi_0$, $\eta \in [-\pi, \pi)$ descreve $\partial\Omega$, onde

$$\xi_0 = \text{arc cosh} \frac{a}{h} .$$

As curvas $\eta = 0$, $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = \pi$, $\eta = \frac{3\pi}{2}$ são semi-retas. Para outros valores constantes em $[0, 2\pi)$, $\eta = \text{const}$, com $-\infty < \xi < \infty$, são ramos de hipérbolas com os mesmos focos das elipses $\xi = \text{const}$. A figura 1.1 ilustra sucintamente estes fatos.

Usando (1.22), o laplaciano se torna

$$\Delta\Psi = \frac{2}{h^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2} \right) . \quad (1.23)$$

Aplicaremos agora o método de separação de variáveis a (1.3). Escrevendo $\phi(x, y) = F(\xi)G(\eta)$ e usando (1.23), chegamos às equações de Mathieu (1.4) e de Mathieu modificada (1.5), onde a é a constante da separação de variáveis e q é dado por (1.6).

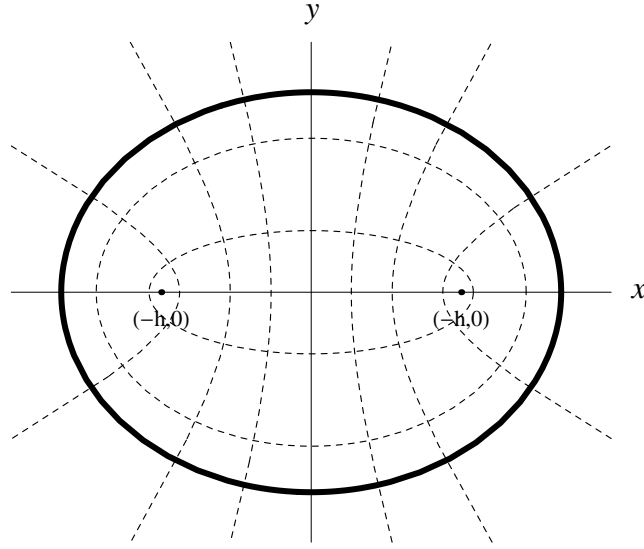


Figura 1.1: Sistema de coordenadas elípticas.

Por causa dos termos $\cos \eta$ e $\sin \eta$ em (1.22), a equação angular (1.4) terá que ter soluções periódicas de período 2π , justificando as condições de contorno (1.7). Como veremos no capítulo 3, para cada $q \in \mathbb{R}$ fixo, existirão valores de a para os quais (1.4) possui solução par periódica de período 2π . Estes valores serão denotados por $a_0(q), a_1(q), \dots$, com $a_n(q) \leq a_{n+1}(q)$. Similarmente, os valores de a tais que (1.4) possui solução ímpar 2π -periódica serão denotados $b_1(q), b_2(q), \dots$, com $b_n(q) \leq b_{n+1}(q)$. Quando $a = a_n(q)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, a solução 2π -periódica da equação de Mathieu (1.4) é denotada $ce_n(\eta, q)$, onde ce é abreviatura para cosseno elíptico. Similarmente, as soluções 2π -periódicas da equação de Mathieu quando $a = b_n(q)$, $n = 1, 2, \dots$ são denotadas $se_n(\eta, q)$, onde se significa seno elíptico. Daí teremos que os modos normais vão ter as formas

$$\phi(\xi, \eta) = F(\xi) ce_n(\eta, q) \tag{1.24}$$

ou

$$\phi(\xi, \eta) = F(\xi) se_n(\eta, q) . \tag{1.25}$$

Passemos agora a considerar condições de contorno para a parte radial $F(\xi)$. Sendo a elipse $\partial\Omega$ parametrizada por $\xi = \xi_0$, onde ξ_0 é dado por (1.10), então a condição (1.2) torna-se simplesmente $F(\xi_0) = 0$.

Para obtermos condições de contorno para F em $\xi = 0$, observe que os pontos do eixo horizontal localizados entre os focos de $\partial\Omega$ são dados exatamente por $\xi = 0$, sendo que cada ponto possui dois valores distintos em $[-\pi, \pi]$, $\eta = \pm\eta_0$, para sua coordenada η .

Podemos portanto exigir que $\phi(0, \eta) = \phi(0, -\eta)$. Levando em conta que as funções ce_n são pares em η , enquanto as se_n são ímpares, tal exigência acarreta que no caso de soluções da forma (1.25) se tenha a condição $F(0) = 0$. No caso de soluções da forma (1.24), a exigência anterior é automaticamente satisfeita e não impõe restrição alguma sobre $F(0)$.

Uma segunda exigência é que nos pontos $(x_0, 0)$ no segmento entre os focos de $\partial\Omega$, a derivada $\frac{\partial\phi(\xi, \eta)}{\partial\xi}$ seja também independente de o ponto ser escrito em coordenadas elípticas como $(0, \eta_0)$ ou como $(0, -\eta_0)$. Chegamos assim à condição

$$F'(0)G(\eta_0) = -F'(0)G(-\eta_0) , \quad (1.26)$$

onde $G(\eta) = ce_n(\eta, q)$ em (1.24) ou $G(\eta) = se_n(\eta, q)$ em (1.25). No caso de modos da forma (1.25), (1.26) é automaticamente satisfeita, mas no caso (1.24), esta implica que se deve ter $F'(0) = 0$.

Resumindo, as condições de contorno a serem aplicadas à equação de Mathieu modificada (1.5) são as dadas por (1.8) ou por (1.9), dependendo respectivamente de o modo ser da forma (1.25) ou (1.24). No capítulo 2 mostraremos que para cada $q \in \mathbb{R}$ fixado o problema de Sturm-Liouville (1.5), (1.9) possui solução não-trivial para infinitos valores de a , que serão denotados $A_0(q), A_1(q), \dots$. Similarmente, o problema de Sturm-Liouville (1.5), (1.8) possui solução não-trivial para infinitos valores de a , que serão denotados $B_0(q), B_1(q), \dots$.

A determinação dos modos normais de vibração da forma (1.24) exige portanto que encontremos valores especiais de q tais que para algum par (m, n) , $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ se tenha

$$A_m(q) = a_n(q) , \quad (1.27)$$

sendo as freqüências então encontradas por (1.6). A condição (1.27) acopla os problemas de Sturm-Liouville radial e angular. Analogamente, para os modos normais de vibração da forma (1.25) temos que encontrar valores de q tais que para algum par (m, n) , $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $n \in \{1, 2, \dots\}$ se tenha

$$B_m(q) = b_n(q) . \quad (1.28)$$

Como resultado principal dessa dissertação, provaremos que para cada par (m, n) existem valores positivos de q em que (1.27) é satisfeita e valores positivos de q em que (1.28) é satisfeita. Até onde sabemos, a prova rigorosa direta de tais afirmativas é inédita.

Capítulo 2

Problemas de Sturm-Liouville e a Equação de Mathieu Modificada

Sejam p, q, r funções contínuas em $[a, b]$, com p de classe C^1 , $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em $[a, b]$. Um problema de Sturm-Liouville é o de encontrar valores de λ para os quais há soluções não-triviais de

$$(p(x)y'(x))' + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0 \quad (2.1)$$

obedecendo a condições de contorno

$$c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) = 0 \quad (2.2)$$

$$c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = 0 \quad (2.3)$$

com $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} \in \mathbb{R}$.

Os λ para os quais há solução não-trivial são chamados *autovalores* e as soluções correspondentes, *autofunções* do problema de Sturm-Liouville.

Daqui em diante, iremos encontrar várias equações da forma (2.1) e também da forma mais geral

$$(P(x)y'(x))' + Q(x)y(x) = 0. \quad (2.4)$$

Para evitar repetições de hipóteses nos diversos resultados que virão, estabelecemos aqui os seguintes conjuntos de hipóteses:

Hipóteses A: As funções q e r são contínuas em um intervalo $[a, b]$ compacto, p é de classe C^1 no mesmo intervalo e além do mais, $p(x) > 0 \forall x \in [a, b]$, $r(x) > 0 \forall x \in [a, b]$.

Hipóteses B: A função Q é contínua no compacto $[a, b]$ e P é de classe C^1 no mesmo intervalo, sendo $P(x) > 0 \forall x \in [a, b]$.

2.1 Substituição de Pruefer

O estudo que faremos nesta seção de problemas de Sturm-Liouville através da substituição de Pruefer está praticamente todo baseado em [23].

Considere inicialmente a equação diferencial

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0, \quad (2.5)$$

onde p e q satisfazem as hipóteses B. Definindo

$$z(x) = p(x)y'(x) \quad (2.6)$$

podemos reescrever (2.5) como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{p(x)} z \\ \frac{dz}{dx} &= -q(x)y \end{aligned}$$

e introduzir coordenadas polares (substituição de Pruefer)

$$\begin{aligned} y &= r(x) \cos \phi(x) \\ z &= r(x) \operatorname{sen} \phi(x). \end{aligned}$$

Em termos destas, (2.5) torna-se

$$\frac{d\phi}{dx} = - \left(\frac{1}{p(x)} \operatorname{sen}^2 \phi + q(x) \cos^2 \phi \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{dr}{dx} = \left(\frac{1}{p(x)} - q(x) \right) r(x) \operatorname{sen} \phi \cos \phi \quad (2.8)$$

Observamos que a equação (2.7) não contém r . Uma vez resolvida (2.7) e substituindo sua solução em (2.8), esta é resolvida por simples integração, obtendo-se

$$r(x) = C e^{\int (\frac{1}{p(x)} - q(x)) \operatorname{sen} \phi(x) \cos \phi(x) dx}.$$

Vê-se portanto que $r(x)$ não pode se anular, a menos que a solução correspondente de (2.5) seja trivial.

Define-se a curva- ϕ relativa a uma solução de (2.5) como o gráfico da solução correspondente de (2.7).

Pode-se observar que se $\phi(x)$ é solução de (2.7), então $\phi(x) + k\pi$ também é solução para (2.7) $\forall k \in \mathbb{Z}$. Se k é par, $\phi(x)$ e $\phi(x) + k\pi$ descrevem a mesma solução de (2.7). Se k é ímpar, $\phi(x)$ e $\phi(x) + k\pi$ descrevem a mesma solução, a menos de sinal. Como uma possível mudança de sinal é irrelevante do ponto de vista da solução de problemas de Sturm-Liouville, de agora em diante iremos sempre considerar que $\forall k \in \mathbb{Z}$, ϕ e $\phi + k\pi$ estão associados à mesma solução de (2.5). Se y é solução não-trivial de (2.5), é fácil ver que se x_1 é um zero de y , então $\phi(x_1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Veremos agora um lema importante para os nossos resultados.

Lema 1 (da comparação) *Sejam y_1 uma solução de*

$$(p_1(x) y'(x))' + q_1(x) y(x) = 0 \quad (2.9)$$

e y_2 uma solução de

$$(p_2(x) y'(x))' + q_2(x) y(x) = 0, \quad (2.10)$$

onde p_1, q_1 e p_2, q_2 obedecem às hipóteses B e além do mais $p_1(x) \geq p_2(x)$, $q_1(x) \leq q_2(x)$ em $[a, b]$. Se ϕ_1 e ϕ_2 são as curvas- ϕ correspondentes e para um certo x_0 em $[a, b]$

$$\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0), \quad (2.11)$$

então $\forall x > x_0$ em $[a, b]$, vale

$$\phi_2(x) \leq \phi_1(x). \quad (2.12)$$

Para o caso em que $q_1(x) < q_2(x) \forall x \in [a, b]$ teremos $\phi_2(x) < \phi_1(x)$, $\forall x \in (x_0, b]$.

Prova: De acordo com (2.7) temos

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi_2 - \phi_1)}{dx} &= -\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \text{sen}^2 \phi_1 - (q_2 - q_1) \cos^2 \phi_2 \\ &+ \frac{1}{p_2} (\text{sen}^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \phi_2) + q_1 (\cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Introduzindo

$$h(x) = -\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) \text{sen}^2 \phi_1 - (q_2 - q_1) \cos^2 \phi_2, \quad (2.14)$$

temos pelas hipóteses do lema que $h(x) \leq 0$. Introduzimos também

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{p_1} \frac{\sin^2 \phi_1 - \sin^2 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1} + q_1 \frac{\cos^2 \phi_1 - \cos^2 \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}, & \text{se } \phi_1(x) \neq \phi_2(x) \\ -\frac{1}{p_1} \sin(2\phi_1) + q_1 \sin(2\phi_1), & \text{se } \phi_1(x) = \phi_2(x) \end{cases}. \quad (2.15)$$

Temos claramente que h é contínua em $[a, b]$. O leitor pode verificar, usando a definição de k para $\phi_1 = \phi_2$, que k também é contínua em $[a, b]$.

De (2.13) temos que

$$\frac{d(\phi_1 - \phi_2)}{dx} = h(x) + (\phi_2 - \phi_1)k(x). \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.16) pelo fator integrante $e^{-\int k(x)dx}$ teremos

$$\frac{d}{dx} \{e^{-\int k(x)dx} (\phi_2 - \phi_1)\} = h(x)e^{-\int k(x)dx}. \quad (2.17)$$

Como $h(x) \leq 0$, temos que $s(x) = e^{-\int k(x)dx} (\phi_2 - \phi_1)$ é decrescente. Sendo $s(x_0) = 0$ obtemos $\phi_2(x) \leq \phi_1(x) \forall x > x_0$

Para o caso $q_2(x) > q_1(x)$ suponha que exista um x_1 tal que $\phi_2(x_1) = \phi_1(x_1)$ com $x_1 > x_0$. Daí teremos que $s(x) = 0$ para $x \in (x_0, x_1)$. Conseqüentemente $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ e $h(x) = 0$ em (x_0, x_1) , ou seja

$$\left(\frac{1}{p_2(x)} - \frac{1}{p_1(x)}\right) \sin^2 \phi_2(x) = - (q_2(x) - q_1(x)) \cos^2 \phi_2(x) \quad (2.18)$$

em (x_0, x_1) . A única maneira para que isso se verifique é que $\cos \phi_2(x) = 0$. Usando isto em (2.7), como ϕ_2 é constante em (x_0, x_1) , obtém-se

$$-\frac{1}{p_2(x)} = 0 \quad (2.19)$$

em (x_0, x_1) , o que é absurdo. Logo $\phi_2(x) < \phi_1(x) \forall x > x_0$. ■

Agora iremos a um teorema que é exatamente uma das conseqüências mais importantes do lema acima.

Teorema 1 *Suponha p_1, p_2, q_1, q_2 como no Lema 1 e que $q_1(x) > 0$ em $[a, b]$. Sejam y_1 e y_2 soluções respectivamente de*

$$(p_1(x) y'(x))' + q_1(x) y(x) = 0 \quad (2.20)$$

e

$$(p_2(x) y'(x))' + q_2(x) y(x) = 0 \quad (2.21)$$

e suponha que x_1 e x_2 são zeros consecutivos de y_1 . Então existe x_3 em $(x_1, x_2]$ tal que $y_2(x_3) = 0$.

Prova: Note que por (2.7) $\frac{d\phi_1}{dx} < 0$. Se x_1 e x_2 são zeros consecutivos de $y_1(x)$ então $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi_1(x_1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\phi_1(x_2) = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi$. Como podemos somar múltiplos de π a ϕ_1 sem alterar a solução de (2.20), supomos sem perda de generalidade que $k = 1$. Também sem perda de generalidade, pelo mesmo motivo, podemos supor que $\frac{\pi}{2} < \phi_2(x_1) \leq \frac{3\pi}{2}$.

Vamos agora considerar dois casos. Primeiro suponha que existe $x_0 \in (x_1, x_2]$ tal que $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$. Aplicando o Lema 1,

$$\phi_1(x) \geq \phi_2(x), \forall x > x_0.$$

Conseqüentemente existe x_3 em (x_0, x_2) tal que $\phi_2(x_3) = \frac{\pi}{2}$.

Suponha agora que não existe $x_0 \in (x_1, x_2]$ tal que $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$. Logo $\phi_1(x) > \phi_2(x)$ em $(x_1, x_2]$. Conseqüentemente $\exists x_3$ em $(x_1, x_2]$ tal que $\phi_2(x_3) = \frac{\pi}{2}$. ■

Queremos agora reescrever as condições de fronteira (2.2) e (2.3) em termos da função ϕ . Para isso, usamos primeiramente a função $z(x)$ introduzida em (2.6), de forma que (2.2) e (2.3) tornam-se

$$a_{11}y(a) + \frac{a_{12}}{p(a)} z(a) = 0 \quad (2.22)$$

e

$$a_{21}y(b) + \frac{a_{22}}{p(b)} z(b) = 0. \quad (2.23)$$

Definindo A , B , α e β tais que

$$a_{11} = A \operatorname{sen} \alpha \quad a_{21} = B \operatorname{sen} \beta,$$

e

$$\frac{a_{12}}{p(a)} = -A \cos \alpha \quad \frac{a_{22}}{p(b)} = -B \cos \beta,$$

(2.22) e (2.23) tornam-se

$$\operatorname{sen}(\phi(a) - \alpha) = 0 \quad (2.24)$$

e

$$\text{sen}(\phi(b) - \beta) = 0, \quad (2.25)$$

o que acarreta finalmente

$$\phi(a) = \alpha + \nu\pi \quad (2.26)$$

e

$$\phi(b) = \beta + \mu\pi \quad (2.27)$$

$\nu, \mu \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2 *Suponha que p, q e r obedecem às hipóteses A. Então existe um valor $\bar{\lambda}$ tal que $\forall \lambda < \bar{\lambda}$ o problema de Sturm-Liouville (2.1), (2.2), (2.3) não tem solução.*

Prova: Dado $M > 0$, podemos escolher um $\bar{\lambda}$ tal que

$$q(x) + \bar{\lambda}r(x) < -M. \quad (2.28)$$

Considere ainda $m > 0$ tal que $p(x) \geq m$. A idéia da prova é aplicar o lema da comparação, comparando a equação (2.1) com

$$\frac{d}{dx}[my'] - My = 0. \quad (2.29)$$

Para (2.29) temos a solução geral dada por

$$y_2(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{M}{m}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{M}{m}}x}. \quad (2.30)$$

Denotaremos a ϕ -curva de y_2 por ϕ_2 . Denotaremos ainda por y_1 e ϕ_1 , respectivamente, a solução de (2.1), (2.2) e sua ϕ -curva. Mostraremos que se λ é pequeno o suficiente e y_1 satisfaz (2.2), então não satisfará (2.3).

É instrutivo notar que $\phi_2(x) = \pm \arctan \sqrt{Mm}$ são soluções de equilíbrio para a equação obedecida por ϕ_2 , sendo que $\phi_2'(x) > 0$ se x é tal que $\phi(x) \in (-\arctan \sqrt{Mm}, \arctan \sqrt{Mm})$ e $\phi_2'(x) < 0$ se x é tal que $\phi(x) \in (\arctan \sqrt{Mm}, \pi - \arctan \sqrt{Mm})$.

Usando que $z(x) = p(x)y'(x)$, obtemos que

$$\tan \phi_2(x) = \frac{z(x)}{y(x)} = \sqrt{Mm} \frac{c_1 e^{\sqrt{\frac{M}{m}}x} - c_2 e^{-\sqrt{\frac{M}{m}}x}}{c_1 e^{\sqrt{\frac{M}{m}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{M}{m}}x}}.$$

Vamos impor que y_2 satisfaça a condição de contorno (2.2), reescrita como $\phi(a) = \alpha$, onde podemos escolher que $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Consideremos inicialmente o caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, ϕ_2 decresce monotonamente, tendendo a $\arctan \sqrt{Mm}$ quando $x \rightarrow \infty$. A segunda condição de contorno, (2.3), assumirá a forma $\phi(b) = \beta + \nu\pi$, onde podemos escolher $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\nu \in \mathbb{Z}$. Escolhemos M de forma a que $\beta < \arctan \sqrt{Mm}$. Como $\phi_1'(\frac{\pi}{2}) < 0$ e do Lema 1, temos que $\arctan \sqrt{Mm} < \phi_2(x) < \phi_1(x) < \frac{\pi}{2}$ com $x \in (a, b)$. Portanto, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a condição $\phi(b) = \beta + \nu\pi$ não será satisfeita para nenhum $\nu \in \mathbb{Z}$.

Considere agora $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Para que y_2 satisfaça (2.2), devemos ter $\phi_2(a) = \alpha$, portanto

$$\tan \alpha = \sqrt{Mm} \frac{c_1 e^{\sqrt{\frac{M}{m}}a} - c_2 e^{-\sqrt{\frac{M}{m}}a}}{c_1 e^{\sqrt{\frac{M}{m}}a} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{M}{m}}a}}. \quad (2.31)$$

Por esta condição, a relação $\frac{c_1}{c_2}$ é unicamente determinada. Fazendo $K = \frac{c_1}{c_2}$ e resolvendo (2.31), temos

$$K = -e^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}a} \left(\frac{\sin \alpha + \sqrt{Mm} \cos \alpha}{\sin \alpha - \sqrt{Mm} \cos \alpha} \right) \quad (2.32)$$

e portanto

$$\tan \phi_2(x) = \sqrt{Mm} \frac{(1 + e^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}(x-a)}) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{Mm} \cos \alpha} + (1 - e^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}(x-a)})}{(1 - e^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}(x-a)}) \frac{\sin \alpha}{\sqrt{Mm} \cos \alpha} + (1 + e^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}(x-a)})} \quad (2.33)$$

Da equação acima vemos que se $x > a$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \tan \phi_2(x) = +\infty. \quad (2.34)$$

Em primeiro lugar, façamos a escolha de $M > 0$ de modo a ter $\alpha \in (-\arctan \sqrt{Mm}, \arctan \sqrt{Mm})$. Daí temos que ϕ_2 é estritamente crescente. Em seguida escolhamos arbitrariamente $\phi_0 \in (\beta, \frac{\pi}{2})$. De (2.34) temos que se necessário podemos aumentar o valor de M e garantir que se tenha $\phi_2(b) > \phi_0$.

Aplicando o Lema 1, temos $\phi_1(x) > \phi_2(x)$ em $[a, b]$. Assim, ϕ_1 não pode satisfazer $\phi(b) = \beta + \nu\pi$ para nenhum $\nu \in \mathbb{Z}$. Escolhendo $\bar{\lambda}$ como em (2.28), a demonstração está completa. ■

Como conseqüência da demonstração do teorema anterior temos o seguinte corolário:

Corolário 1 *Suponha que valham as hipóteses do Teorema 2 e que em (2.27) se escolha $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Então $\phi_1(b) > \beta$.*

Teorema 3 *Suponha que p , q e r obedecem as hipóteses A. Então existe uma seqüência infinita $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ de autovalores para o problema de Sturm-Liouville (2.1), (2.2) e (2.3), com $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Além do mais, a autofunção y_n correspondente ao autovalor λ_n possui n zeros em (a, b) , $n = 0, 1, 2, \dots$*

Para provar o teorema necessitamos dos dois lemas que vêm a seguir. Antes porém de enunciá-los, introduzimos duas notações que neles serão usadas. Denotaremos por $\phi(x, \lambda)$, para cada λ dado, a solução de (2.7) com a condição inicial $\phi(a) = \alpha$ obtida a partir de (2.2). Por $y(x, \lambda)$ denotaremos a solução correspondente de (2.1). Pelo teorema de existência e unicidade padrão para EDO's, ambas as funções estão bem definidas.

Lema 2 *Se p , q e r obedecem às hipóteses A, então $\phi(b, \lambda)$ é estritamente decrescente em λ .*

Prova: Se $\lambda_1 < \lambda_2$, então $q(x) + \lambda_1 r(x) < q(x) + \lambda_2 r(x) \forall x \in [a, b]$. Pelo lema da comparação, como $\phi(a, \lambda_1) = \phi(a, \lambda_2)$, tem-se $\phi(x, \lambda_1) > \phi(x, \lambda_2) \forall x > a$. ■

Lema 3 *Sob as mesmas hipóteses do lema anterior,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(b, \lambda) = -\infty .$$

Prova: Pelo lema anterior, $\phi(x, \lambda)$ é estritamente decrescente. Sendo isso, podemos supor por absurdo que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(b, \lambda) = L ,$$

sendo $L > -\infty$. Temos $\phi(a, \lambda) = \alpha$, onde supomos ainda, sem perda de generalidade, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Para λ suficientemente grande temos $\frac{\partial \phi}{\partial x} < 0$ pois $r(x) > 0$ e $p(x) > 0$. Podemos portanto garantir que

$$-\frac{\pi}{2} - k\pi \leq L < -\frac{\pi}{2} - (k-1)\pi$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$ não-negativo. É fácil ver que a quantidade de zeros de $y(x, \lambda)$ em (a, b) é no máximo k .

Considere agora constantes M, m_q e m_r tais que $p(x) \leq M, q(x) \geq m_q, r(x) \geq m_r \forall x \in [a, b]$ e considere as soluções da equação.

$$\frac{d}{dx}[My'] + (m_q + \lambda m_r)y = 0. \quad (2.35)$$

Se λ é grande o suficiente, as soluções de (2.35) possuem tantos zeros quanto se queira em $[a, b]$. Por outro lado, a hipótese $L > -\infty$ força que (2.1) possua no máximo k zeros. Isto contradiz o Teorema 1, provando o resultado desejado. ■

Prova do Teorema 3: Sabemos que $\phi(b, \lambda)$ é uma função contínua de λ , pelo teorema de continuidade da solução de problemas de valor inicial com relação a parâmetros. Pelos lemas 2 e 3 sabemos que $\phi(b, \lambda)$ é decrescente em λ com $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi(b, \lambda) = -\infty$. Pelo Corolário 1 do Teorema 2 sabemos que se $\lambda < \bar{\lambda}$, $\phi(b, \lambda) > \beta$. Pelo teorema do valor intermediário, existem $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ com $\lambda_n \geq \bar{\lambda}$ tais que $\phi(b, \lambda_n) = \beta - n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. É fácil ver que se $x \in (a, b)$, o gráfico de $\phi(x, \lambda_n)$ intercepta exatamente n retas do tipo $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, de forma que $y(x, \lambda_n)$ possui n zeros em (a, b) .

Para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, suponha agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \Delta < \infty$. Pela continuidade de $\phi(b, \lambda)$ em $\lambda = \Delta$, teríamos que ter $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(b, \lambda_n) = \phi(b, \Delta)$. Mas como $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(b, \lambda_n) = -\infty$, temos uma contradição, provando o que queríamos. ■

2.2 Equação de Mathieu Modificada

Como já vimos, a equação de Mathieu modificada é a equação

$$F''(\xi) - (a - 2q \cosh(2\xi))F(\xi) = 0, \quad (2.36)$$

onde nos interessam condições de contorno

$$F'(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(\xi_0) = 0 \quad (2.37)$$

e

$$F(0) = 0 \quad \text{e} \quad F(\xi_0) = 0, \quad (2.38)$$

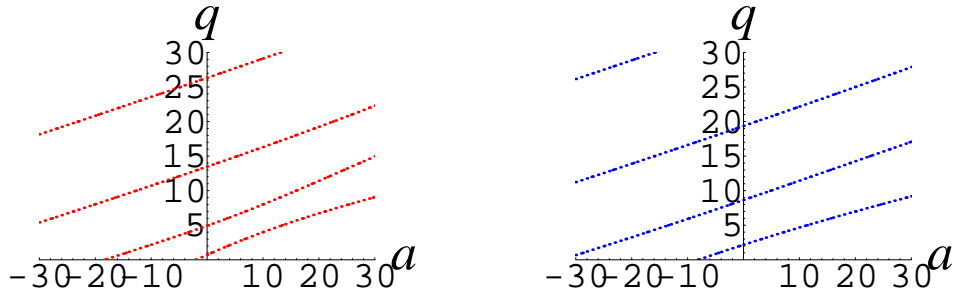


Figura 2.1: Gráficos ilustrando o resultado de cálculos numéricos para os $A_n(q)$ e para os $B_n(q)$, $n = 0, 1, 2, 3$. A figura à esquerda representa os $A_n(q)$ e a figura à direita, os $B_n(q)$.

onde $\xi = \xi_0$ descreve a elipse $\partial\Omega$. Ambos os problemas (2.36),(2.37) e (2.36),(2.38) são problemas de Sturm-Liouville.

O Teorema 3 aplica-se tanto para o problema (2.36), (2.37) quanto para o problema (2.36),(2.38). No primeiro caso desses problemas, obtemos que para cada $q \in \mathbb{R}$ fixo dado existe seqüência $A_0(q) > A_1(q) > \dots$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(q) = -\infty$ de autovalores para o problema. Observe que (2.36) possui a forma (2.1) com $\lambda = -a$, o que explica a diferença de sinal em relação ao Teorema 3. Similarmente, no caso de (2.36), (2.38) existe uma seqüência $B_0(q) > B_1(q) > \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(q) = -\infty$ de valores de a para os quais (2.36),(2.38) possui solução não-trivial.

O gráfico à esquerda na figura 2.1 ilustra os valores dos números $A_n(q)$, $n = 0, 1, 2, 3$, calculados com um valor de ξ_0 correspondente a uma elipse $\partial\Omega$ com semi-eixos iguais a 4 e 5. Os pontos foram obtidos resolvendo-se numericamente a equação de Mathieu modificada (2.36) com condições iniciais $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ para um grande número de valores de a e de q e, em seguida, por um processo semelhante ao método da bisseção para resolução de equações, obtiveram-se valores aproximados de (a, q) em que a condição de contorno $F(\xi_0) = 0$ era satisfeita. O gráfico à direita na figura 2.1 é análogo ao da esquerda e representa uma aproximação numérica dos $B_n(q)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

O resultado seguinte é uma aplicação simples do Lema da Comparação e será de grande importância no resultado final da dissertação, embora não o tenhamos visto em nenhuma das referências consultadas.

Teorema 4 *Os $A_n(q)$ e $B_n(q)$ citados acima são funções crescentes com relação a $q \forall n \in \mathbb{N}$.*

Prova: Provaremos para $A_n(q)$, sendo que para $B_n(q)$ o argumento é o mesmo. Suponha $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ com $q_2 > q_1$. Sejam y_1, y_2 as respectivas autofunções. Do Teorema 3, ambas autofunções possuem n zeros em $(0, \xi_0)$ e portanto obedecem $\phi_1(\xi_0) = \phi_2(\xi_0) = \frac{\pi}{2} - n\pi$.

Caso tivéssemos $A_n(q_2) \leq A_n(q_1)$, então

$$-(A_n(q_2) - 2q_2 \cosh 2\xi) > -(A_n(q_1) - 2q_1 \cosh 2\xi) . \quad (2.39)$$

Do Lema 1 teríamos então que $\phi_1(x) > \phi_2(x) \forall x \in (0, \xi_0]$, o que contradiz o fato de $\phi_1(\xi_0) = \phi_2(\xi_0)$. Daí temos que $A_n(q_2) > A_n(q_1) \forall q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ com $q_2 > q_1$. ■

É possível comprovar o resultado do Teorema 4 na figura 2.1.

Capítulo 3

Equação de Mathieu

Como já falamos no primeiro capítulo, desejamos encontrar para a equação de Mathieu

$$y'' + (a - 2q \cos 2t)y = 0 \quad (3.1)$$

soluções tais que $y(0) = y(2\pi)$ e $y'(0) = y'(2\pi)$. Veremos neste capítulo que a equação de Mathieu possui soluções periódicas pares e soluções periódicas ímpares, em ambos os casos com período 2π . Para cada $q \in \mathbb{R}$ fixo, os valores de a para os quais (3.1) possui solução par periódica de período 2π são denotados por $a_0(q), a_1(q), \dots$, com $a_0(q) \leq a_1(q) \leq \dots$. Similarmente, os valores de a tais que (3.1) possui solução ímpar 2π -periódica são $b_1(q), b_2(q), \dots$, com $b_1(q) \leq b_2(q) \leq \dots$. O objetivo principal deste capítulo é mostrar que os $a_n(q)$ e $b_n(q)$ são funções analíticas de q . Para tal finalidade necessitamos de algumas ferramentas importantes que serão vistas neste capítulo: teoria de Floquet, dependência analítica com relação a parâmetros de soluções de EDOs e versão analítica do teorema da função implícita.

3.1 Teoria de Floquet

Uma referência para essa seção é o livro de Magnus e Winkler sobre a equação de Hill [16].

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$x'(t) = P(t)x(t) \quad (3.2)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $P(t)$ é uma matriz $n \times n$ cujos elementos são contínuos e

periódicos com período T ,

$$P(t+T) = P(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Daqui em diante tais hipóteses sobre $P(t)$ serão consideradas sem nenhuma citação ulterior. Dizemos que $X(t)$ é uma matriz de soluções do sistema acima se suas colunas são soluções do sistema. Se $X(t)$ é $n \times n$ e suas colunas são linearmente independentes, dizemos que $X(t)$ é matriz fundamental de soluções. Temos ainda que $X(t)$ obedece a equação matricial

$$X'(t) = P(t)X(t) \quad (3.4)$$

Depois das preliminares veremos agora o teorema que dá nome à seção:

Teorema 5 (Floquet) *Existe pelo menos um número $\mu \in \mathbb{C}$ tal que o sistema (3.2) admite solução não-trivial $\vartheta(t)$ com*

$$\vartheta(t+T) = \mu\vartheta(t). \quad (3.5)$$

Prova: Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de soluções do sistema. É fácil ver que $Y(t) = X(t+T)$ também é matriz fundamental do sistema, simplesmente por causa de $P(t+T) = P(t)$. Por derivação de $X^{-1}(t)Y(t)$ vemos que essa é matriz constante, ou seja,

$$Y(t) = X(t)C \quad (3.6)$$

onde C é uma matriz constante. Concluimos que $\det C \neq 0$, pois $\det C = 0$ acarretaria que $\det Y = 0$ o que é absurdo, pois Y é fundamental.

Seja $\mu \in \mathbb{C}$ um autovalor qualquer de C . Como $\det C \neq 0$, temos $\mu \neq 0$. Seja v o autovetor correspondente e

$$\vartheta(t) = X(t)v. \quad (3.7)$$

$\vartheta(t)$ é solução de (3.2) pois é combinação linear das colunas de X . Também temos

$$\vartheta(t+T) = X(t+T)v = X(t)Cv = \mu\vartheta(t), \quad (3.8)$$

o que prova o teorema. ■

Os números μ do teorema de Floquet são chamados números característicos do sistema $x' = P(t)x$. Eles independem da escolha da matriz fundamental X . De fato, seja $Z(t)$ uma outra matriz fundamental. Então,

pelo mesmo argumento do teorema para $Y(t)$, $\exists K$ matriz $n \times n$ com $\det K \neq 0$ tal que $Z(t) = X(t)K$. Daí existe

$$Z(t+T) = X(T+t)K = X(t)CK = Z(t)K^{-1}CK = Z(t)D, \quad (3.9)$$

onde temos que C e D são matrizes semelhantes e conseqüentemente possuem os mesmos autovalores.

Se μ é um número característico de (3.2), então

$$\rho = \frac{1}{T} \log \mu \quad (3.10)$$

é chamado expoente característico de (3.2).

Proposição 1 *Se μ é um número característico e ρ é definido como acima, então $x' = P(t)x$ possui solução da forma*

$$x(t) = \alpha(t)e^{\rho t} \quad (3.11)$$

onde $\alpha(t+T) = \alpha(t)$.

Prova: A prova é simples, basta tomar

$$\alpha(t) = e^{-\rho t} \vartheta(t) \quad (3.12)$$

Pela definição de ρ vê-se que $\alpha(t)$ satisfaz $\alpha(t+T) = \alpha(t)$. ■

É pertinente observar que para $|\mu| > 1$, uma solução $x(t)$ da forma (3.11) se afasta exponencialmente de 0 quando $t \rightarrow \infty$. Nos casos $0 < |\mu| < 1$ e $|\mu| = 1$, as soluções correspondentes respectivamente se aproximam de 0 e não se afastam de 0 quando $t \rightarrow \infty$.

Em particular, se C possui n autovalores $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ distintos, então, caso todos tenham módulo menor que 1, qualquer solução de (3.2) converge para 0. Neste caso, dizemos que $x(t) \equiv 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável. Se algum dos autovalores possuir módulo maior que 1, então há soluções de (3.2) que se afastam de 0 quando $t \rightarrow \infty$. Dizemos que $x(t) \equiv 0$ é solução de equilíbrio instável.

Proposição 2 *Sejam $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ os números característicos, não necessariamente distintos, do sistema $x' = P(t)x$. Então*

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n = \exp \int_0^T \text{tr } P(s) ds \quad (3.13)$$

Prova: Seja $\Phi(t)$ uma matriz fundamental tal que $\Phi(0) = I$, onde I é a matriz identidade. Como

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C, \quad (3.14)$$

então $\Phi(T) = C$ e

$$\mu_1\mu_2\mu_3 \dots \mu_n = \det \Phi(T). \quad (3.15)$$

Seja $W(t) = \det \Phi(t)$ o wronskiano. Como

$$W(t) = W(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr} P(s) ds \quad (3.16)$$

concluimos que

$$\mu_1\mu_2\mu_3 \dots \mu_n = \exp \int_0^T \operatorname{tr} P(s) ds. \blacksquare \quad (3.17)$$

Aplicaremos agora a teoria de Floquet à equação

$$y'' + Q(t)y = 0, \quad (3.18)$$

onde $Q(t)$ é contínua e periódica com período π . Tal equação é conhecida como equação de Hill. Observe que a equação de Mathieu (3.1) é caso particular de equação de Hill.

Tomando $x_1(t) = y$ e $x_2(t) = y'$, (3.18) escreve-se na forma (3.2) com

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

sendo P π -periódica.

Definamos y_1 e y_2 como sendo as soluções de (3.18) com condições iniciais dadas respectivamente por

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0 \quad (3.20)$$

e

$$y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1. \quad (3.21)$$

A matriz fundamental de soluções do sistema equivalente à equação de Hill que satisfaz $\Phi(0) = I$ é portanto

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Como $\text{tr } P(t) = 0$, se μ_1, μ_2 são os números característicos do sistema, (3.13) implica que

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (3.23)$$

Como em geral somos incapazes de resolver explicitamente sistemas de EDO's da forma (3.2) com $P(t)$ satisfazendo (3.3), então é quase sempre impossível calcular a matriz $\Phi(\pi)$ cujos autovalores são os números característicos de Floquet, como vimos na prova da Proposição 2. Tal impossibilidade se verifica em geral também no caso da equação de Hill. Veremos porém que é útil relacionar a existência de soluções 2π -periódicas da equação de Hill com o traço de $\Phi(\pi)$.

Se μ_1 e μ_2 são autovalores de $\Phi(\pi)$, então são raízes de

$$\det(\Phi(\pi) - \mu I) = \mu^2 - \text{tr } \Phi(\pi) \mu + \det \Phi(\pi). \quad (3.24)$$

Mas, de (3.23), $\det \Phi(\pi) = 1$ e portanto os autovalores de $\Phi(\pi)$ são

$$\mu_{1,2} = \frac{\psi \pm \sqrt{\psi^2 - 4}}{2}, \quad (3.25)$$

onde

$$\psi = \text{tr } \Phi(\pi) = y_1(\pi) + y_2'(\pi). \quad (3.26)$$

Vamos agora estudar os vários casos para os valores de ψ :

Primeiro caso: Se $\psi > 2$ então $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\mu_1 \neq \mu_2$. Sendo $\mu_1 \mu_2 = 1$ e $\mu_1 + \mu_2 = \psi$, logo $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$. Conseqüentemente, $y(t) \equiv 0$ é solução de equilíbrio instável.

Segundo caso: Se $-2 < \psi < 2$, então $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mas μ_1 e μ_2 são conjugados um do outro e, como $\mu_1 \mu_2 = 1$, temos $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$. Neste caso, $y(t) \equiv 0$ é solução de equilíbrio estável.

Terceiro caso: Para $\psi = 2$, então $\mu_1 = \mu_2 = 1$, logo $\rho = 0$. Conseqüentemente, a equação de Hill possui neste caso uma solução de período π , portanto de período 2π .

Quarto caso: Para $\psi = -2$, então $\mu_1 = \mu_2 = -1$, logo $\rho = i$. Sendo $x(t) = e^{it} \alpha(t)$, concluímos que

$$x(t + 2\pi) = e^{i(t+2\pi)} \alpha(t + 2\pi) = e^{it} \alpha(t) = x(t) \quad (3.27)$$

e a equação de Hill possui solução de período 2π .

Quinto caso: Para $\psi < -2$ teremos $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ com $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$. Conseqüentemente $y(t) \equiv 0$ é uma solução de equilíbrio instável.

Conclui-se da análise acima que a equação de Hill possui solução 2π -periódica quando o traço ψ da matriz $\Phi(\pi)$ for igual a ± 2 .

3.2 Funções Analíticas de Várias Variáveis

Nesta seção daremos apenas algumas definições e resultados sobre funções analíticas de várias variáveis, que serão usados nas seções posteriores. Os resultados que exporemos são apenas generalizações de resultados para o caso de uma variável complexa e não serão aqui demonstrados, as demonstrações podendo ser encontradas em [18] ou [6].

Vamos primeiramente à definição de função analítica de duas variáveis, que será o caso que nos interessará, e que pode ser facilmente generalizada para funções de k variáveis.

Definição 1 *Sejam $G \subset \mathbb{C}$ e $D \subset \mathbb{C}$ abertos e seja $F(z, w)$ contínua em $G \times D$. Então $F(z, w)$ é dita analítica em $G \times D$ se $F(z, w)$ é analítica em G para cada $w \in D$ fixo e analítica em D para cada $z \in G$ fixo.*

Vamos agora ao teorema que generaliza a fórmula integral de Cauchy. Aqui, se Γ denotar curva de Jordan, o símbolo $I(\Gamma)$ denotará a região aberta do plano limitada por Γ .

Teorema 6 *Sejam G e D abertos em \mathbb{C} e $F(z, w)$ função analítica em $G \times D$. Sejam C e Γ curvas de Jordan suaves por partes tais que $\overline{I(C)} \subset G$ e $\overline{I(\Gamma)} \subset D$. Então*

$$\begin{aligned} F(z, w) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_C d\zeta \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta, \eta)}{(\zeta - z)(\eta - w)} d\eta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} d\eta \int_C \frac{F(\zeta, \eta)}{(\zeta - z)(\eta - w)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.28)$$

Teorema 7 *Sejam G e D abertos e $F : G \times D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em $G \times D$. Sejam ainda (z_0, w_0) ponto arbitrário de $G \times D$, e $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tais que os discos $K_1 : |z - z_0| < \delta$, $K_2 : |w - w_0| < \Delta$ e seu fechos estejam contidos respectivamente em G e D . Então existe uma série de potências em duas variáveis*

$$F(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} (z - z_0)^k (w - w_0)^m \quad (3.29)$$

convergindo uniformemente para $F(z, w)$ em $K_1 \times K_2$. Além do mais,

$$A_{km} = \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{k+m} F}{\partial z^k \partial w^m} (z_0, w_0). \quad (3.30)$$

Usando em (3.30) a fórmula integral de Cauchy deduzimos a desigualdade de Cauchy

$$|A_{km}| \leq \frac{M}{\delta^k \Delta^m} \quad (3.31)$$

onde C e Γ são os discos $|z - z_0| = \delta$, $|w - w_0| = \Delta$ e M é o máximo de $|F(z, w)|$ em $C \times \Gamma$.

3.3 Teoria Analítica de Equações Diferenciais

Com exceção do Teorema 10, todo o material desta seção foi baseado em [6].

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.32)$$

com as condições iniciais

$$y(a) = b, \quad (3.33)$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $b, y, f(x, y) \in \mathbb{C}^k$ e cada componente $f_i(x, y_1, \dots, y_k)$ de f é analítica em alguma vizinhança de (a, b_1, \dots, b_k) em \mathbb{C}^{k+1} . As soluções dos problemas de valor inicial acima serão funções analíticas de x , conforme o teorema abaixo:

Teorema 8 *Se cada componente de f é analítica em alguma vizinhança de (a, b) , a solução do problema de valor inicial (3.32), (3.33), é função analítica de x em alguma vizinhança de a .*

Prova: Por simplicidade apresentaremos a prova no caso $k = 2$. Os outros valores de k podem ser tratados com argumento semelhante. Também por simplicidade, faremos, se necessário, translações da variável x e das funções y_i , de forma que as condições iniciais (3.33) serão substituídas por

$$y(0) = 0. \quad (3.34)$$

Escrevemos a série de Taylor de $f_i(x, y_1, y_2)$ com o centro na origem

$$f_i(x, y_1, y_2) = \sum_{p,q,r \geq 0} c_{p,q,r}^{(i)} x^p y_1^q y_2^r. \quad (3.35)$$

Pelo Teorema 7, existe uma vizinhança da origem em que tal série converge. Para $i = 1, 2$, considere as séries formais

$$\phi_i(x) = \sum_{n \geq 1} a_n^{(i)} x^n, \quad (3.36)$$

as quais já obedecem a condição inicial (3.34) e cujos coeficientes $a_n^{(i)}$ queremos determinar em termos dos coeficientes conhecidos $c_{p,q,r}^{(i)}$. Para que $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ satisfaça (3.32), os coeficientes $a_n^{(i)}$ deverão obedecer

$$\sum_{n \geq 1} n a_n^{(i)} x^{n-1} = \sum_{p,q,r \geq 0} c_{p,q,r}^{(i)} x^p \left(\sum_{n \geq 1} a_n^{(1)} x^n \right)^q \left(\sum_{n \geq 1} a_n^{(2)} x^n \right)^r. \quad (3.37)$$

Igualando termos com mesma potência de x , obtemos que cada $a_n^{(i)}$ tem que ser dado como polinômio com coeficientes inteiros não-negativos dependente de um número finito de coeficientes $c_{p,q,r}^{(j)}$ e dos coeficientes incógnitos $a_{n-1}^{(j)}, a_{n-2}^{(j)}, \dots, a_1^{(j)}$ de ordens anteriores. Partindo da relação para os $a_1^{(i)}$ em termos de $c_{0,0,0}^{(i)}$ e substituindo ordem por ordem os $a_l^{(j)}$, $l < n$ pelas expressões encontradas para eles em termos dos $c_{p,q,r}^{(j)}$, indutivamente podemos provar que

$$a_n^{(i)} = Q_n^{(i)}(c_{p,q,r}^{(j)}), \quad (3.38)$$

onde $Q_n^{(i)}(c_{p,q,r}^{(j)})$ são polinômios com coeficientes não-negativos, cada polinômio dependente apenas de um número finito das variáveis $c_{p,q,r}^{(j)}$ com $j = 1, 2$. Daí temos que o valores de $a_n^{(i)}$ estão unicamente determinados pelos valores de $c_{p,q,r}^{(j)}$. Agora basta mostrar que a série (3.36) converge em alguma vizinhança da origem para concluirmos a demonstração. Para isso temos a seguinte definição:

Definição 2 *A série formal*

$$F_i(x, y_1, y_2) = \sum_{p,q,r \geq 0} C_{p,q,r}^{(i)} x^p y_1^q y_2^r, \quad (3.39)$$

é uma majorante de (3.35) se seus coeficientes $C_{p,q,r}^{(i)}$ satisfazem

$$C_{p,q,r}^{(i)} \geq |c_{p,q,r}^{(i)}|. \quad (3.40)$$

Para a série formal (3.36) definimos analogamente

$$\Phi_i(x) = \sum_{n \geq 1} A_n^{(i)} x^n \quad (3.41)$$

como seu majorante se $A_n^{(i)} \geq |a_n^{(i)}|$.

A idéia para encerrar a prova do Teorema 8 é substituir a função f em (3.32) por uma outra função F em que cada componente F_i seja majorante da componente correspondente f_i . Primeiramente iremos provar que a solução formal do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

é uma majorante da série (3.35) que resolve formalmente (3.32), (3.34). De fato, seja (Φ_1, Φ_2) a única solução formal de (3.42). Então

$$A_n^{(i)} = Q_n^{(i)}(C_{p,q,r}^{(j)}) \geq Q_n^{(i)}(|c_{p,q,r}^{(j)}|) \geq |Q_n^{(i)}(c_{p,q,r}^{(j)})|, \quad (3.43)$$

provando a afirmativa que fizemos acima. A primeira desigualdade na linha acima decorre do fato de os coeficientes dos polinômios $Q_n^{(i)}$ serem não negativos e a segunda, da desigualdade triangular.

Agora, para o fim da prova, basta encontrar majorantes $F_i(x, y_1, y_2)$ dos $f_i(x, y_1, y_2)$ convenientes e que sejam analíticas em uma vizinhança da origem. Para isso, tomamos $R > 0$ tal que f_1 e f_2 sejam ambas analíticas na região

$$|x| \leq R, |y_1| \leq R, |y_2| \leq R. \quad (3.44)$$

Seja M tal que $|f_i(x, y_1, y_2)| \leq M$ na região acima. Pela desigualdade de Cauchy (3.31),

$$|c_{p,q,r}^{(i)}| \leq \frac{M}{R^{p+q+r}}. \quad (3.45)$$

Tomando

$$C_{p,q,r}^{(i)} = \frac{M}{R^{p+q+r}} \quad (3.46)$$

podemos somar a série (3.39) obtendo

$$F_i(x, y_1, y_2) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{y_1}{R}\right)\left(1 - \frac{y_2}{R}\right)}. \quad (3.47)$$

Se ambas as componentes de F são dadas pela fórmula acima, fica fácil resolver (3.42). De fato, se $\Phi(x)$ é solução do problema de valor inicial

$$\left(1 - \frac{\theta}{R}\right)^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)}, \theta(0) = 0, \quad (3.48)$$

então $(\Phi_1(x), \Phi_2(x)) = (\Phi(x), \Phi(x))$ é a solução de (3.42). Facilmente resolvemos (3.48), obtendo

$$\Phi(x) = R\left\{1 - \left[1 + 3M \log\left(1 - \frac{x}{R}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\right\}. \quad (3.49)$$

Como $(\Phi(x), \Phi(x))$ é majorante para a solução do problema de valor inicial (3.32), (3.34) e é analítica em uma vizinhança de $x = 0$, então a solução formal (3.36) do problema de valor inicial (3.32), (3.34) converge em alguma vizinhança de $x = 0$, provando o Teorema 8. ■

Considere agora o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, t) \quad (3.50)$$

com as condições iniciais

$$y(a, t) = b, \quad (3.51)$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}^l$ e $b, y, f(x, y, t) \in \mathbb{C}^k$ e cada componente $f_i(x, y, t)$ de f é analítica em alguma vizinhança de $(a, b_1, \dots, b_k; t_1, \dots, t_l)$ em \mathbb{C}^{k+l+1} , onde $t = (t_1, \dots, t_l)$ são parâmetros.

Como mostramos no teorema anterior, o problema de valor inicial (3.50), (3.51) possui solução analítica $y = \phi(x)$ que é nula para $x = 0$. A função $\phi(x)$, solução do problema de valor inicial (3.50), (3.51), depende obviamente dos parâmetros $t = (t_1, \dots, t_l)$. Denotamos esta solução

$$y = \phi(x; t). \quad (3.52)$$

A solução $\phi(x; t)$ do problema de valor inicial (3.50), (3.51) será analítica com relação a t , como será provado no seguinte teorema:

Teorema 9 *Com as hipóteses acima, a função $\phi(x; t)$ é analítica nas suas $l + 1$ variáveis em alguma vizinhança da origem $(0, 0, \dots, 0)$.*

Prova: Por simplicidade provaremos novamente para $k = 2$ e sem perda de generalidade, podemos supor $l = 1$. A demonstração é similar à demonstração do teorema anterior. Considere

$$f_i(x, y_1, y_2, t) = \sum_{p, q, r \geq 0} c_{p, q, r}^{(i)}(t) x^p y_1^q y_2^r \quad (3.53)$$

onde

$$c_{p,q,r}^{(i)}(t) = \sum_{s \geq 0} c_{p,q,r,s}^{(i)} t^s . \quad (3.54)$$

Da mesma maneira que na demonstração do teorema anterior, conseguimos $M > 0$ tal que em

$$|x| < R , |y_1| < R , |y_2| < R , |t| < R \quad (3.55)$$

uma série majorante $F_i(x, y_1, y_2, t)$ terá a forma

$$F_i(x, y_1, y_2, t) = \frac{M}{(1 - \frac{x}{R})(1 - \frac{y_1}{R})(1 - \frac{y_2}{R})(1 - \frac{t}{R})} \quad i = 1, 2 . \quad (3.56)$$

Repetindo o mesmo argumento que usamos na demonstração do teorema anterior, teremos majorante

$$\Phi_i(x, t) = R \left(1 - \left[1 + \frac{3M}{1 - \frac{t}{R}} \log \left(1 - \frac{x}{R} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \right) \quad (3.57)$$

que é claramente analítica nas variáveis x, t em alguma vizinhança da origem $x = 0, t = 0$. ■

O teorema seguinte vale somente para equações diferenciais lineares e será usado na seção 3.5 para provar o Teorema 15 e também no capítulo 4. Como veremos, os teoremas anteriores desta seção não serão aplicáveis nas situações concretas que aparecerão adiante.

Teorema 10 *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = A(x, t)y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

onde $A(x, t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas analíticas na região $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2, |x| < R_1 \text{ e } |t| < R_2\}$ e t é um parâmetro. Então o problema (3.58) tem solução analítica em $\Gamma' = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2, |x| < r_1 \text{ e } |t| < r_2\}$, onde r_1 e r_2 são valores quaisquer tais que $0 < r_1 < R_1$ e $0 < r_2 < R_2$.

Prova: Por (3.58) temos

$$y'_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t)y_j, \quad i = 1, \dots, n . \quad (3.59)$$

Escrevemos a série de Taylor de $a_{ij}(x, t)$ com o centro na origem

$$a_{ij}(x, t) = \sum_{p,q} c_{pq}^{(ij)} x^p t^q . \quad (3.60)$$

Sejam r_1 e r_2 arbitrários tais que $0 < r_1 < R_1$ e $0 < r_2 < R_2$. Tome $M > 0$ tal que $|a_{ij}(x, t)| \leq M$ se $|x| \leq r_1$ e $|t| \leq r_2$. A idéia agora é a mesma da demonstração do Teorema 8, isto é, encontrar séries majorantes convenientes para cada uma das séries (3.60). Por (3.31) temos

$$|c_{pq}^{(ij)}| \leq \frac{M}{r_1^p r_2^q} . \quad (3.61)$$

Considere agora

$$b_{ij}(x, t) = \sum_{p,q} \frac{M}{r_1^p r_2^q} x^p t^q = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{t}{r_2})} , \quad (3.62)$$

que é um majorante para (3.60) e o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = B(x, t)y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.63)$$

no qual

$$B(x, t) = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{t}{r_2})} D \quad (3.64)$$

sendo D a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \dots & \\ & \dots & \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} .$$

Teremos

$$y'_i = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{t}{r_2})} \sum_{j=1}^n y_j , i = 1, \dots, n . \quad (3.65)$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$z_1 = \sum_{j=1}^n y_j , \quad z_i = y_1 - y_i , \quad i = 2, 3, \dots, n ,$$

o sistema (3.64) torna-se

$$\begin{cases} z'_1 &= \frac{Mn}{(1-\frac{x}{r_1})(1-\frac{t}{r_2})} z_1 \\ z'_2 &= 0 \\ &\dots \\ z'_n &= 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

com solução fácil

$$z_1(x) = z_1(0) \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)^{-\frac{nr_1 M}{1-r_2}} \quad (3.67)$$

e $z_2(x) = z_2(0), \dots, z_n(x) = z_n(0)$. Observe que z_1, \dots, z_n são analíticas em Γ' . Como os y_i são combinações lineares dos z_j , concluímos que o problema (3.58) tem solução analítica em Γ' . ■

3.4 Versão Analítica do Teorema da Função Implícita

O teorema apresentado nesta seção acrescenta ao teorema usual da função implícita uma hipótese de analiticidade que resulta também em analiticidade da função implicitamente definida. A demonstração aqui apresentada é uma adaptação da encontrada em [6].

Teorema 11 *Sejam Ω_1, Ω_2 abertos em \mathbb{C} e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Suponha que $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ sendo $f(a, b) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial z_2}(a, b) \neq 0$. Então existem abertos $\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, com $(a, b) \in \Omega$ e $W \subset \mathbb{C}$ tal que $a \in W$ e função analítica $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ tais que as únicas soluções em Ω da equação*

$$f(z_1, z_2) = c \quad (3.68)$$

são tais que $z_1 \in W$ e $z_2 = g(z_1)$.

Prova: Primeiramente escrevemos $z_j = x_j + iy_j, j = 1, 2, x_j, y_j \in \mathbb{R}$ e

$$f(z_1, z_2) = u(x_1, y_1, x_2, y_2) + iv(x_1, y_1, x_2, y_2), \quad (3.69)$$

u, v funções reais. Escrevemos ainda $a = \alpha + i\alpha', b = \beta + i\beta', \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$. Sendo f analítica em $\Omega_1 \times \Omega_2$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \quad (3.70)$$

sendo as igualdades acima válidas para todos os pontos $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ tais que $(z_1, z_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_2}(a, b) &= \frac{\partial u}{\partial x_2}(\alpha, \alpha', \beta, \beta') + i \frac{\partial v}{\partial x_2}(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \\ &= \frac{\partial v}{\partial y_2}(\alpha, \alpha', \beta, \beta') - i \frac{\partial u}{\partial y_2}(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \end{aligned} \quad (3.71)$$

e por hipótese tal derivada é não-nula, então a matriz jacobiana

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x_2, y_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u}{\partial y_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial y_2} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

tem determinante não nulo em $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$. De fato, usando a condição (3.70) temos

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x_2, y_2)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2. \quad (3.73)$$

Aplicando então a versão real do teorema da função implícita para a função

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2) = (u(x_1, y_1, x_2, y_2), v(x_1, y_1, x_2, y_2)) \quad (3.74)$$

teremos que existem abertos $A \subset \mathbb{R}^2$ e $B \subset \mathbb{R}^4$, onde $(\alpha, \alpha') \in A$ e $(\alpha, \alpha', \beta, \beta') \in B$, funções $U, V : A \rightarrow B$ de classe C^∞ tais que para cada $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in B$ com $F(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c)$ existe um único $(x_1, y_1) \in A$ tal que $x_2 = U(x_1, y_1)$ e $y_2 = V(x_1, y_1)$.

A função g fica então definida por $g(x_1 + iy_1) = U(x_1, y_1) + iV(x_1, y_1)$. Para terminar a demonstração basta provar que as funções U e V obedecem às condições de Cauchy-Riemann em alguma vizinhança de (α, α') . Daqui por diante as derivadas parciais serão tomadas em pontos arbitrários do domínio A de U e V , sendo o ponto omitido.

Para $(x_1, y_1) \in A$ temos

$$u(x_1, y_1, U(x_1, y_1), V(x_1, y_1)) = \operatorname{Re} c \quad (3.75)$$

e

$$v(x_1, y_1, U(x_1, y_1), V(x_1, y_1)) = \operatorname{Im} c. \quad (3.76)$$

Derivando (3.75) com relação a x_1 e (3.76) com relação a y_1 , temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \quad (3.77)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2} \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \quad (3.78)$$

Subtraindo (3.78) de (3.77) e usando as condições de Cauchy-Riemann (3.70), obtemos

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1}\right) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\right) \frac{\partial u}{\partial y_2} = 0 \quad (3.79)$$

Similarmente, derivando (3.75) com relação a y_1 , derivando (3.76) com relação a y_2 , somando e utilizando as condições (3.70) novamente, temos

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1}\right) \frac{\partial u}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\right) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0. \quad (3.80)$$

Consideremos (3.79) e (3.80) como sistema de equações lineares homogêneas para determinar as incógnitas $\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1}\right)$ e $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial y_1}\right)$ em termos de $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial u}{\partial y_2}$. O determinante do sistema é $\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)^2$. No ponto $(\alpha, \alpha', \beta, \beta')$ sabemos que tal determinante é não-nulo. Existe portanto vizinhança deste ponto em que o determinante continua diferente de zero. Nessa vizinhança podemos concluir que a única solução do sistema (3.79)-(3.80) é a trivial e portanto existe vizinhança de (α, α') em que U e V satisfazem as condições de Cauchy-Riemann. ■

3.5 Equação de Hill e os números característicos de Mathieu

Nesta seção faremos uma união de todos os resultados das seções anteriores, para no final mostrar a analiticidade dos números característicos de Mathieu $a_n(q)$ e $b_n(q)$.

Consideremos a equação de Hill

$$y'' + (\lambda + Q(x))y = 0, \quad (3.81)$$

onde $Q(x)$ é contínua, periódica com período π e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, sejam $y_1(x, \lambda)$ e $y_2(x, \lambda)$ respectivamente soluções de (3.81) com condições iniciais

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0 \quad (3.82)$$

e

$$y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1. \quad (3.83)$$

Denotamos aqui $\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) + y_2'(\pi, \lambda) = \text{tr } \Phi(\pi)$ como em (3.26). Da teoria de Floquet lembramos que (3.81) terá soluções 2π -periódicas para os valores de λ tais que $\Delta(\lambda) = \pm 2$. Enunciaremos agora um teorema importante sobre a existência de tais valores para λ . Para a prova, consulte [16].

Teorema 12 (*Teorema da Oscilação*) *Para toda equação diferencial (3.81) existem duas seqüências de números reais*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (3.84)$$

$$\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots \quad (3.85)$$

com

$$\lambda_0 < \lambda'_1 \leq \lambda'_2 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda'_3 \leq \lambda'_4 \dots, \quad (3.86)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (3.87)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda'_n = +\infty \quad (3.88)$$

Esses números são tais que $\Delta(\lambda_n) = 2$ e $\Delta(\lambda'_n) = -2$. Além do mais, a equação de Hill (3.81) terá duas soluções 2π -periódicas linearmente independentes para um valor de λ se e somente se esse valor de λ for raiz dupla de uma das equações $\Delta(\lambda) = \pm 2$.

É oportuno observar que caso a função Q em (3.81) seja par, então as soluções 2π -periódicas não-triviais cuja existência é garantida pelo teorema da oscilação serão ou pares ou ímpares. De fato, neste caso, se $\phi(x)$ é solução de (3.81), então $\phi(-x)$ também o será. É fácil ver também que a solução de $y_1(x, \lambda)$ é par, enquanto $y_2(x, \lambda)$ é ímpar. Isto se dá pois $\frac{1}{2}(y_1(x, \lambda) + y_1(-x, \lambda))$ é par e claramente obedece às mesmas condições iniciais que $y_1(x, \lambda)$, logo é a própria $y_1(x, \lambda)$. Analogamente, prova-se que $y_2(x, \lambda)$ é ímpar.

Para ver que as soluções 2π -periódicas de (3.81) têm que ser pares ou ímpares, suponha que $\phi(x)$ é uma solução 2π -periódica não-trivial de (3.81) e construa

$$v(x) = \phi(x) + \phi(-x), \quad (3.89)$$

$$u(x) = \phi(x) - \phi(-x). \quad (3.90)$$

Figura 3.1: Números característicos de Mathieu como funções de q . Os $a_n(q)$ são mostrados em linhas contínuas, enquanto os $b_n(q)$ em linhas tracejadas.

Por construção, v é par, u é ímpar e ambas são 2π -periódicas. Pelo teorema de existência e unicidade de EDO's, v é múltiplo de y_1 e u é múltiplo de y_2 . Além do mais, v e u não podem ser ambas soluções triviais, pois isto implicaria que ϕ seria trivial. Portanto ou y_1 é 2π -periódica, ou y_2 é 2π -periódica, ou ambas o são.

Observe que a equação de Mathieu, para cada q fixo, é uma equação da forma (3.81), onde o parâmetro a em (3.1) toma o lugar de λ em (3.81). Denotamos, para a equação de Mathieu, $\Delta(a, q) = y_1(\pi, a, q) + y_2'(\pi, a, q)$. Para cada q fixo o Teorema 12 pode ser agora aplicado à equação de Mathieu (3.1), daí resultando a existência dos números característicos: os $a_{2n}(q)$, $b_{2n}(q)$ são raízes de $\Delta(a, q) = 2$ e os $a_{2n-1}(q)$, $b_{2n-1}(q)$ são raízes de $\Delta(a, q) = -2$. O fato de as soluções 2π -periódicas correspondentes da equação de Mathieu serem pares ou ímpares segue da observação que fizemos acima. Na figura 3.1 mostramos gráficos dos números característicos de Mathieu como funções de q , usando a implementação destes no *software* Mathematica.

Para poder provar o resultado principal deste capítulo, Teorema 15, vamos a alguns outros resultados necessários sobre a equação de Mathieu.

Escrevendo para uma solução periódica de período 2π de (3.1) a sua série de Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{int}, \quad (3.91)$$

substituindo-a em (3.1) e usando que $\cos 2t = \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2}$ teremos a seguinte relação de recorrência:

$$(a - n^2)A_n - q(A_{n+2} + A_{n-2}) = 0. \quad (3.92)$$

Vê-se daí que teremos duas classes de soluções: a classe par, na qual

$$0 = \dots = A_{-3} = A_{-1} = A_1 = A_3 \dots = 0 \quad (3.93)$$

e a classe ímpar, na qual

$$0 = \dots A_{-4} = A_{-2} = A_0 = A_2 = A_4 \dots = 0. \quad (3.94)$$

Definindo

$$v_k = \frac{A_{k+2}}{A_k}, \quad (3.95)$$

reescrevemos (3.92) para $q \neq 0$ fixo como

$$v_{n-2} = \frac{1}{\frac{a-n^2}{q} - v_n} \quad (3.96)$$

ou

$$v_n = \frac{a - n^2}{q} - \frac{1}{v_{n-2}}. \quad (3.97)$$

Querendo determinar condições para que tenhamos soluções de classe par, começamos com $n = 2$ e depois $n = 4$ em (3.96), obtendo

$$v_0 = \frac{1}{\frac{a-4}{q} - v_2} = \frac{1}{\frac{a-4}{q} - \frac{1}{-\frac{(a-16)}{q} + v_4}}. \quad (3.98)$$

Continuando o processo, teremos

$$v_0 = \frac{1}{\alpha_1^{(p)} + \frac{1}{\alpha_2^{(p)} + \ddots}}, \quad (3.99)$$

onde $\alpha_n^{(p)}(a) = \frac{(-1)^{n+1}(a-4n^2)}{q}$. Começando com $n = 0$ em (3.97), analogamente ao que fizemos acima, chegamos a

$$v_0 = \frac{a}{q} - \frac{1}{\alpha_1^{(p)} + \frac{1}{\alpha_2^{(p)} + \ddots}}. \quad (3.100)$$

Igualando (3.98) com (3.100) chegamos finalmente a

$$\frac{a}{2q} = \frac{1}{\alpha_1^{(p)} + \frac{1}{\alpha_2^{(p)} + \ddots}}. \quad (3.101)$$

Procurando condições para que tenhamos soluções de classe ímpar, similarmente ao que fizemos para a classe par, teremos

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1^{(i)} + \frac{1}{\alpha_2^{(i)} + \ddots}}, \quad (3.102)$$

onde $\alpha_n^{(i)}(a) = \frac{(-1)^{n+1}(a-(2n+1)^2)}{q}$ e também

$$v_1 = \frac{a-1}{q} + \frac{1}{-\frac{a-1}{q} + \frac{1}{\alpha_1^{(i)} + \frac{1}{\alpha_2^{(i)} + \dots}}}. \quad (3.103)$$

Igualando (3.102) e (3.103) teremos duas soluções

$$\frac{a-1}{q} \pm 1 = \frac{1}{\alpha_1^{(i)} + \frac{1}{\alpha_2^{(i)} + \dots}}. \quad (3.104)$$

Enunciaremos agora um outro teorema que, como o Teorema 12, prova a existência dos números característicos de Mathieu, agora utilizando as frações contínuas em (3.101) e (3.104). Desse resultado obteremos informações relevantes sobre os números característicos de Mathieu relativos às soluções pares e ímpares. A demonstração do teorema pode ser encontrada em [21].

Teorema 13 *Para cada $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, as frações contínuas em (3.101) e (3.104) definem funções meromorfas de a . Além do mais:*

- (i) $a_0(q), a_2(q), \dots$ são as soluções de (3.101) e $b_2(q), b_4(q), \dots$ são os polos da fração contínua do lado direito de (3.101).
- (ii) Em (3.104), as soluções relativas ao sinal menos são os $a_1(q), a_3(q), \dots$ e as relativas ao sinal mais são os $b_1(q), b_3(q), \dots$.

Agora podemos apresentar o seguinte teorema:

Teorema 14 *Para cada $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ não existem valores de a tais que as soluções 2π -periódicas pares e ímpares da equação de Mathieu sejam ambas não-triviais.*

Prova: Pelo Teorema 12 poderia acontecer que $\Delta(a, q) = 2$ ou $\Delta(a, q) = -2$ tenham raízes duplas. Vamos mostrar que isto não acontece se $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$. De fato, pelo Teorema 13 não podemos ter $a_{2n}(q) = b_{2n}(q)$ para qualquer $q \neq 0$, pois $b_{2n}(q)$ são os polos da fração contínua do lado direito de (3.101), enquanto os $a_{2n}(q)$ são soluções da igualdade. Observe também que pelo mesmo Teorema 13, não podemos ter $a_{2n+1}(q) = b_{2n+1}(q)$, pois ambos são soluções da mesma equação (3.104), porém com escolhas de sinais diferentes. ■

Agora temos ferramentas suficientes para provar o teorema principal do capítulo:

Teorema 15 *Os números característicos $a_n(q)$ e $b_n(q)$ são funções analíticas reais de q .*

Prova: Seja $q_0 \in \mathbb{R}$. Se $q_0 = 0$, a analiticidade em uma vizinhança de q_0 se resume à prova da convergência das séries introduzidas por Mathieu em [19], o que foi feito originalmente em [25]. Ver também [4].

Se $q_0 \neq 0$, usaremos nas equações $\Delta(a, q) = \pm 2$ o Teorema 11, versão analítica do teorema da função implícita. Para aplicarmos o Teorema 11, primeiro temos que mostrar que $\Delta(a, q)$ é uma função analítica de duas variáveis complexas. Isto é verdade, pois pelo Teorema 10, $y_1(\pi, a, q)$ e $y_2'(\pi, a, q)$ são analíticas em \mathbb{C}^2 .

Temos também que verificar que $\frac{\partial \Delta}{\partial a} \neq 0$ nos pontos $(a_n(q_0), q_0)$ e $(b_n(q_0), q_0)$. Tal conclusão segue imediatamente dos Teoremas 14 e 12. Podemos então aplicar o Teorema 11 e provar a analiticidade em alguma vizinhança de $q_0 \neq 0$. ■

Capítulo 4

Existência dos Modos Normais

Neste capítulo iremos sintetizar todos os resultados dos capítulos 2 e 3, acrescentando ainda alguns resultados sobre as equações de Mathieu e Mathieu modificada. Demonstraremos assim o teorema que dá nome ao capítulo, Teorema 19, que é o resultado principal deste trabalho. Segue ainda uma seção com as conclusões finais.

4.1 Prova do teorema principal

Começamos com um lema sobre problemas de Sturm-Liouville que refina o Lema 2 do capítulo 2.

Lema 4 *Considere a equação*

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0, \quad (4.1)$$

onde p , q e r obedecem às hipóteses A do capítulo 2. A ϕ -curva $\phi(x, \lambda)$ relacionada a (4.1) com condição inicial $\phi(a) = \alpha$ arbitrária é tal que $\frac{\partial \phi(x, \lambda)}{\partial \lambda} < 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Prova: Tome $\delta > 0 \in \mathbb{R}$ e considere a equação

$$(p(x)y')' + (q(x) + (\lambda + \delta)r(x))y = 0. \quad (4.2)$$

A idéia é comparar as ϕ -curvas ϕ_1 relativa a (4.1) e ϕ_2 relativa a (4.2). Procedemos como na demonstração do lema da comparação, Lema 1. Integrando

(2.17), temos

$$\phi_2 - \phi_1 = -\delta e^{\int_a^x k(s)ds} \int_a^x \cos^2 \phi_2(t) e^{-\int_a^t k(s)ds} dt. \quad (4.3)$$

Daí,

$$\frac{\phi(x, \lambda + \delta) - \phi(x, \lambda)}{\delta} = -e^{\int_a^x k(s)ds} \int_a^x \cos^2 \phi(t, \lambda + \delta) e^{-\int_a^t k(s)ds} dt. \quad (4.4)$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$ e aplicando o teorema da convergência dominada para passar o limite para dentro das integrais envolvidas, concluímos então que $\frac{\partial \phi(x, \lambda)}{\partial \lambda} < 0$. ■

Podemos agora provar o seguinte

Teorema 16 *Os $A_n(q)$ e $B_n(q)$ são funções analíticas reais.*

Prova: Seja $F(\xi, a, q)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} F''(\xi) - (a - 2q \cosh 2\xi)F(\xi) = 0 \\ F(0) = 1 \\ F'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

e $\phi(\xi, a, q)$ sua ϕ -curva. Aplicando o Teorema 10, teremos que $F(\xi, a, q)$ é analítica em \mathbb{C}^3 . As funções $A_n(q)$ são implicitamente definidas pela equação $F(\xi_0, a, q) = 0$, ou equivalentemente por

$$\cot \phi(\xi_0, a, q) = 0. \quad (4.6)$$

Como $\cot \phi(\xi, a, q) = F(\xi, a, q)/F'(\xi, a, q)$, então para cada $q \in \mathbb{R}$ fixado, $\cot \phi(\xi_0, a, q)$ é analítica em alguma vizinhança de $a = A_n(q)$. Além do mais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (\cot \phi(\xi_0, a, q)) \Big|_{a=A_n(q)} &= -\csc^2 \phi(\xi_0, A_n(q), q) \frac{\partial \phi(\xi_0, a, q)}{\partial a} \Big|_{a=A_n(q)} \\ &= -\frac{\partial \phi(\xi_0, a, q)}{\partial a} \Big|_{a=A_n(q)}, \end{aligned}$$

pois $\sin \phi(\xi_0, A_n(q), q) = \pm 1$. Pelo Lema 4, concluímos então que

$$\frac{\partial}{\partial a} (\cot \phi(\xi_0, a, q)) \Big|_{a=A_n(q)} \neq 0.$$

Pelo Teorema 11, concluímos que os $A_n(q)$ são funções analíticas reais de q . Similarmente, temos o mesmo resultado para $B_n(q)$. ■

Teorema 17 Tanto $A_n(q)$ quanto $B_n(q)$ divergem para $+\infty$ quando $q \rightarrow +\infty$.

Prova: Suponha $q > 0$ dado. Caso para todo $q > 0$ se tenha $A_n(q) \geq 2q$, o enunciado segue trivialmente para $A_n(q)$. Suponha então que $A_n(q) < 2q$ e defina $\beta = \sqrt{-A_n(q) + 2q}$. Sejam respectivamente $F_1 = \cos(\beta\xi)$ e F_2 as soluções das equações

$$F''(\xi) + (-A_n(q) - 2q)F(\xi) = 0$$

e

$$F''(\xi) + (-A_n(q) - 2q \cosh 2\xi)F(\xi) = 0 ,$$

ambas com condições iniciais $F(0) = 1$ e $F'(0) = 0$.

Pelo Teorema 1, entre dois zeros consecutivos de F_1 há pelo menos um zero de F_2 . Por outro lado, pelo Teorema 3, F_2 tem exatamente n zeros em $(0, \xi_0)$. Portanto, para que não haja excesso de zeros de F_2 em $(0, \xi_0)$, é necessário que $\beta\xi_0 \leq \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$. Segue daí que

$$A_n(q) \geq 2q - \left(\frac{\pi/2 + (n+1)\pi}{\xi_0} \right)^2 ,$$

terminando a prova do enunciado para $A_n(q)$.

A prova do enunciado para $B_n(q)$ é similar. ■

O teorema a seguir é provado em [17]. A idéia da prova é semelhante à usada para provar o Teorema 17, porém envolve comparar a equação de Mathieu com uma outra equação: a equação parabólica cilíndrica. Para não nos alongarmos na prova de resultados sobre os zeros das soluções dessa equação, optamos por deixar ao leitor interessado a tarefa de consultar a referência acima.

Teorema 18 Os números característicos de Mathieu $a_n(q)$ e $b_n(q)$ divergem para $-\infty$ quando $q \rightarrow +\infty$.

Depois de tantos resultados, vamos agora ao teorema principal dessa dissertação:

Teorema 19 Para qualquer par (m, n) com $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ existe pelo menos uma solução $q_{m,n}^{(P)} > 0$ para a equação

$$A_m(q) = a_n(q) . \tag{4.7}$$

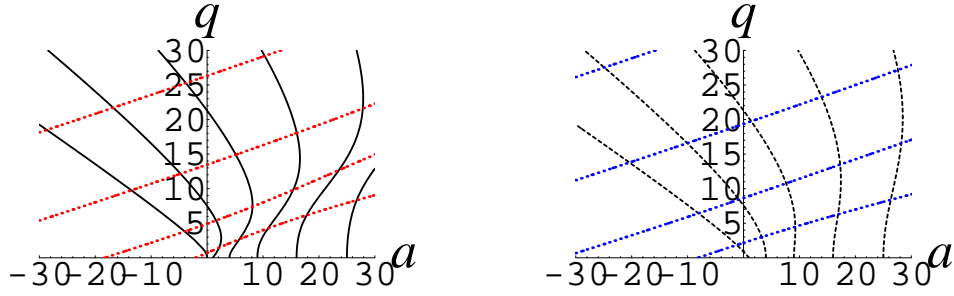


Figura 4.1: O gráfico à esquerda ilustra a existência de vários modos do tipo P através das interseções das curvas $A_m(q)$ e $a_n(q)$. O gráfico à direita ilustra analogamente a existência de vários modos do tipo I. Ambos se referem a uma elipse com semi-eixos iguais a 4 e 5.

Similarmente, para qualquer par (m, n) com $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e $n \in \{1, 2, \dots\}$ existe pelo menos uma solução $q_{m,n}^{(I)} > 0$ para a equação

$$B_m(q) = b_n(q) . \quad (4.8)$$

Prova: É possível resolver explicitamente os problemas de Sturm-Liouville radial e angular para a membrana elíptica no caso $q = 0$. Obtemos $a_n(0) = b_n(0) = n^2$, $A_m(0) = -(m + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{\xi_0^2}$ e $B_m(0) = -(m + 1)^2 \frac{\pi^2}{\xi_0^2}$.

Temos então $A_m(0) < a_n(0)$ e, pelos Teoremas 15 e 16, $A_m(q)$ e $a_n(q)$ são funções contínuas. Dos Teoremas 17 e 18 e do teorema do valor intermediário segue o enunciado para os $q_{m,n}^{(P)}$. O mesmo raciocínio vale para os $q_{m,n}^{(I)}$. ■

Podemos aqui ilustrar o resultado do teorema acima superpondo as figuras 2.1 e 3.1 e observando as interseções das curvas correspondentes.

4.2 Conclusões

As frequências dos modos normais são obtidas dos $q_{m,n}^{(P,I)}$ através de (1.6). Os modos normais são dados por

$$\phi_{m,n}^{(P)}(\eta, \xi) = F^{(P)}(\xi, A_m(q_{mn}^{(P)}), q_{mn}^{(P)}) ce_n(\eta, q_{mn}^{(P)}) , \quad (4.9)$$

onde $F^{(P)}(\xi, a, q)$ é a solução da equação de Mathieu modificada (1.5) com condições iniciais $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ e por

$$\phi_{m,n}^{(I)}(\eta, \xi) = F^{(I)}(\xi, B_m(q_{mn}^{(I)}), q_{mn}^{(I)}) \operatorname{se}_n(\eta, q_{mn}^{(I)}), \quad (4.10)$$

onde $F^{(I)}(\xi, a, q)$ é a solução da mesma (1.5) agora com condições iniciais $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$.

A correspondência desses modos com os da membrana circular é clara da própria notação. Nos modos $\phi_{m,n}^{(P,I)}$ da membrana circular m denota o número de círculos nodais e n o número de linhas nodais. Na membrana elíptica, pelo teorema 3, m denota o número de zeros de $F(\xi)$ no intervalo $(0, \xi_0)$ e portanto significa o número de elipses nodais. Analogamente, pode-se provar que n denota o número de zeros em $[0, \pi)$ da função de Mathieu angular. Vamos explicar a seguir o significado geométrico de n .

Nos modos $\phi_{m,n}^{(I)}$ a função angular sempre se anula em $\eta = 0$ e a radial em $\xi = 0$. Portanto, para esses modos o zero em $\eta = 0$ significa que o eixo maior da elipse é uma curva nodal. Examinando-se as séries de Fourier das funções de Mathieu angulares, conforme [5], [17] ou [21], pode-se ver ainda que a função angular possui zero em $\eta = \frac{\pi}{2}$ nos modos $\phi_{m,n}^{(P)}$ com n ímpar e nos modos $\phi_{m,n}^{(I)}$ com n par. Um zero $\eta = \frac{\pi}{2}$ significa portanto que nos modos correspondentes o eixo menor da elipse é curva nodal. Zeros da função angular em valores de $\eta \in [0, \pi)$ diferentes de 0 e de $\frac{\pi}{2}$ correspondem a ramos de hipérbolos nodais. Portanto, se considerarmos os eixos maior e menor da elipse como ramos de hipérbole generalizados, o índice n nos modos $\phi_{m,n}^{(P,I)}$ conta os número de ramos de hipérbole generalizados nodais.

Podemos visualizar agora alguns modos de vibração da membrana elíptica nas figuras 4.2 - 4.6, onde o leitor pode observar as elipses nodais e os ramos de hipérbolos generalizados nodais. Em todas as figuras, a elipse borda da membrana possui comprimento do semi-eixo maior igual a 5 e o do menor igual a 4.

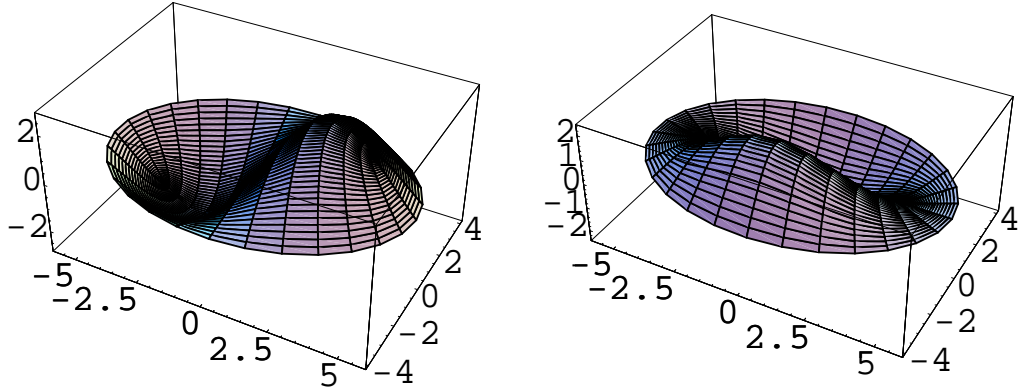


Figura 4.2: Modos $\phi_{0,1}^{(P)}$ à esquerda e $\phi_{0,1}^{(I)}$ à direita, Ambos não possuem elipse nodal, mas no primeiro o eixo menor da elipse e no segundo, o eixo maior, são curvas nodais.

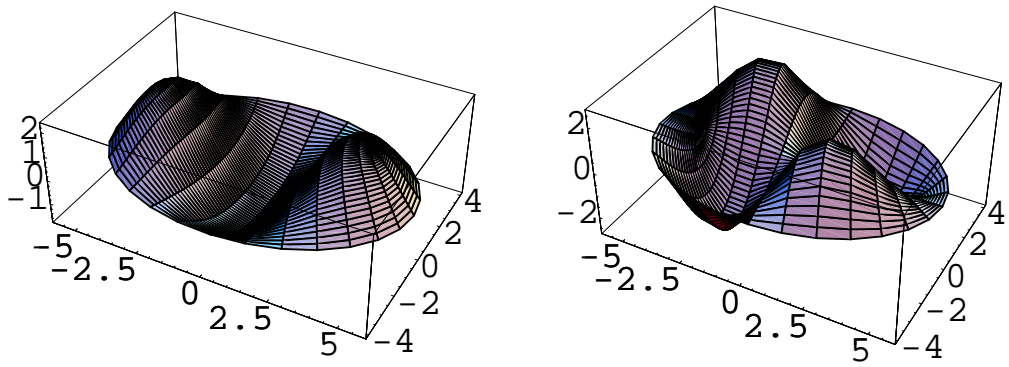


Figura 4.3: Modos $\phi_{0,2}^{(P)}$ à esquerda e $\phi_{0,2}^{(I)}$ à direita. No primeiro temos dois ramos de hipérbole nodais. No segundo, o eixos maior e menor da elipse são ambos nodais.

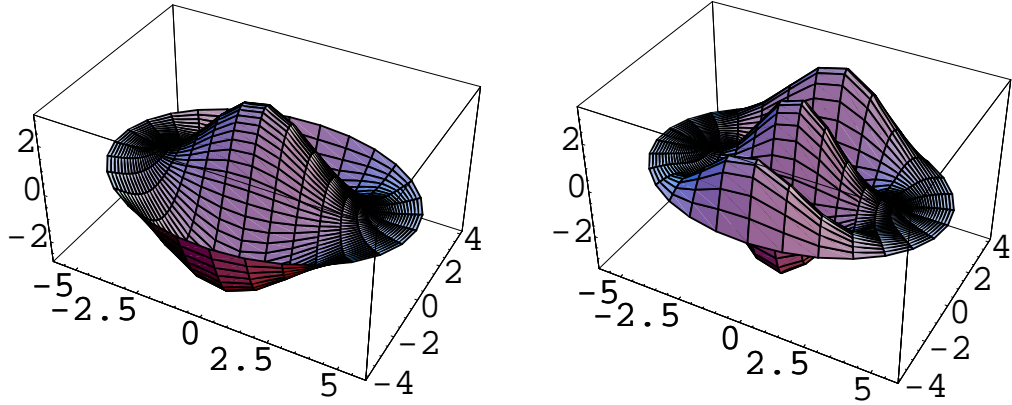


Figura 4.4: Modos $\phi_{1,0}^{(P)}$ à esquerda e $\phi_{2,0}^{(P)}$ à direita, onde temos respectivamente uma elipse nodal e duas elipses nodais.

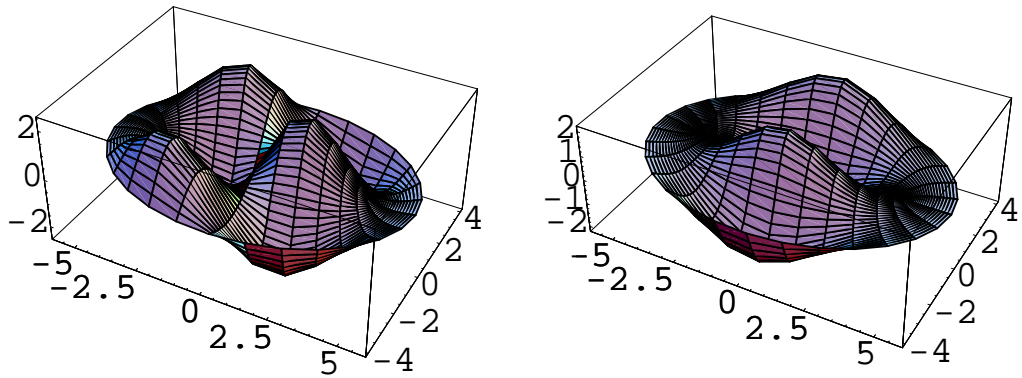


Figura 4.5: Modos $\phi_{1,1}^{(P)}$ à esquerda e $\phi_{1,1}^{(I)}$ à direita.

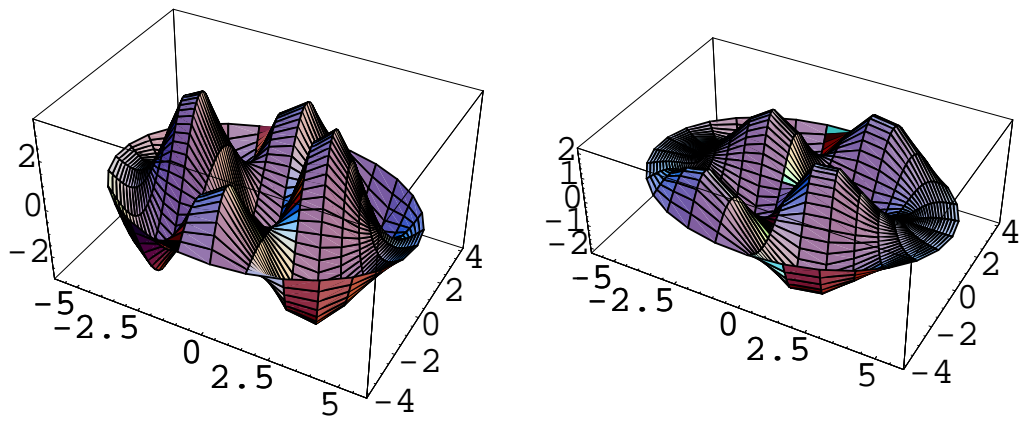


Figura 4.6: Modos $\phi_{1,2}^{(P)}$ à esquerda e $\phi_{1,2}^{(I)}$ à direita.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover, New York (1965).
- [2] D. J. Acheson, *A pendulum theorem*, Proc. R. Soc. Lond. A 443 (1993), 239–245.
- [3] F. A. Alhargan, *A Complete Method for the Computation of Mathieu Characteristic Numbers of Integer Orders*, SIAM Rev. 38 (1996) no. 2, 239–255.
- [4] R. R. de Ávila, *Convergência das séries perturbativas das funções de Mathieu*, monografia de bacharelado em Física, orientada por A. G. M. Neves, UFMG (2006).
- [5] R. Campbell, “Théorie Générale de L’Équation de Mathieu et de Quelques Autres Équations Différentielles de la Mécanique”, Masson et Cie. Éditeurs, Paris, 1955.
- [6] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover, New York (1995).
- [7] G. Chen, P. J. Morris e J. Zhou, *Visualization of special eigenmode shapes of a vibrating elliptical membrane*, SIAM Review 36 (1994), 453.
- [8] R. V. Churchill, *Série de Fourier e Problemas de Valores de Contorno*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro - RJ (1978).
- [9] D. Frenkel e R. Portugal, *Algebraic methods to compute Mathieu functions*, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 3541.

- [10] J. C. Gutiérrez-Vega, R. M. Rodríguez-Dagnino, M. A. Meneses-Nava, S. Chávez-Cerda, *Mathieu functions, a visual approach*, Am. J. Phys. 71 (2003), 233.
- [11] J. C. Gutiérrez Vega, *Theory and numerical analysis of the Mathieu functions*, disponível em <http://homepages.mty.itesm.mx/jgutierrez/Mathieu/Mathieu.pdf>
- [12] R. Hettich, E. Haaren, M. Ries, G. Still, *Accurate numerical approximations of eigenfrequencies and eigenfunctions of elliptical membranes*, Z. Angew. Math. Mech. 67 (1987), 589.
- [13] V. Heuveline, *On the computation of a Very Large Number of Eigenvalues for Selfadjoint Elliptic Operators by Means of Multigrid Methods*, J. Comp. Phys. 184, (2003), 321.
- [14] L. Ince, *Characteristic Numbers of Mathieu Equation*, Proc. R. Soc. Edinburgh, 46 (1925), 20, 46 (1926), 316 e 47 (1927), 294.
- [15] J. B. Keller e S. I. Rubinow, *Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems*, Ann. Phys. 9, 24 (1960).
- [16] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's Equation*, John Wiley and Sons, New York (1966).
- [17] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, 1951.
- [18] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, Volume II, Prentice-Hall, N. J. (1965).
- [19] E. Mathieu, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, Journal de Liouville 13 (1868), 137.
- [20] A. G. M. Neves, *Symbolic Computation of High-Order Exact Picard Iterates for Systems of Linear Differential Equations with Time-Periodic Coefficients*, in Computational Science-ICCS 2003, International Conference Melbourne, Australia and St. Petersburg, Russia, June 2003, Proceedings, Part 1, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2657, 838, Springer-Verlag, New York (2003).

- [21] A. G. M. Neves, *Upper and Lower Bounds on Mathieu Characteristic Numbers of Integer Orders*, Communications on Pure and Applied Analysis 3(3) (2004), 447.
- [22] A. G. M. Neves, *Approximating Solutions of Linear Ordinary Differential Equations with Periodic Coefficients by Exact Picard Iterates*, The Mathematica Journal 10 (2006), 90.
- [23] H. Sagan, *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*, John Wiley and Sons, New York, 1963.
- [24] S. C. Sinha, E. A. Butcher, *Symbolic Computation of Fundamental Solution Matrices for Linear Time-Periodic Dynamical Systems*, Journal of Sound and Vibration 206 (1), (1997), 61.
- [25] E. T. Whittaker e G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.