Éden Santana Campos Amorim

# Bilhar de Poncelet

Universidade Federal de Minas Gerais<br/> 2007

# Bilhar de Poncelet

Dissertação de mestrado apresentada como requisito da obtenção do título de Mestre pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Israel Vainsencher

Universidade Federal de Minas Gerais<br/> 2007

## Agradecimentos

À minha família, pelo amor e incentivo.

Ao meu orientador Israel Vainsencher, principalmente pela constante motivação e paciência.

Aos meus professores e colegas, especialmente Adriana e Viviana, minhas "irmãs"

A Jean-Victor Poncelet!

#### Resumo

Em "Applications d'Analyse et de Géométrie", de 1862, Poncelet apresenta um estudo sobre pares de cônicas que possuem um polígono inscrito em uma e ao mesmo tempo circunscrito à outra. Ele demonstra que, quando existe um polígono satisfazendo essa propriedade, na verdade há uma infinidade de polígonos com o mesmo número de lados que também a satisfazem.

Neste trabalho estaremos interessados em estudar as variedades dos pares de cônicas relacionadas por polígonos, mais particularmente triângulos. Daremos uma construção detalhada de uma certa fibração sobre um espaço de configurações de triângulos degenerados que utilizaremos para recuperar o bigrau da variedade de pares de cônicas relacionadas por triângulos empregando técnicas de teoria da interseção.

#### Abstract

In "Applications d'Analyse et de Géométrie", 1862, Poncelet presents a work about pairs of conics holding an inscribe polygon at one and simultanealy circunscribe at another. He proves that when there exists a polygon satisfying this property, then there exist infinitely many polygons with the same number of edges satisfying its too.

In this work we are interested to study the varieties of pairs of conics related by polygons, particularly triangles. We construct a fibration over a space of configurations of degenerate triangles and we use it to recover the bidegree of the variety of pairs of conics related by triangles employing techniques of intersection theory.

## Sumário

1	Intr	rodução	<b>5</b>
2	Bilhar de Poncelet		6
	2.1	Histórico	6
	2.2	Definição do Bilhar de Poncelet	7
	2.3	A curva elíptica associada e o Teorema de Darboux	8
	2.4	A hipersuperfície $\mathcal{P}_n$	11
3	Construindo cônicas Poncelet relacionadas		14
	3.1	Dualidade no Bilhar de Poncelet	14
	3.2	Triângulos	15
	3.3	Quadriláteros	19
	3.4	Caso geral	21
	3.5	Pentágonos e Hexágonos	24
4	Cônicas Poncelet relacionadas por triângulos		26
	4.1	Espaço de configurações	26
	4.2	Diagonal de $X$	28
	4.3	Construindo $\mathcal{P}_3$	29
	4.4	Os fibrados de cônicas externas/internas	30
		4.4.1 Cônicas Externas	33
		4.4.2 Cônicas Internas	36
	4.5	Bigrau de $\mathcal{P}_3$	37
	4.6	Cálculos em MAPLE	40
5	Con	siderações finais: Bilhar de Poncelet e Criptografia?	42

### 1 Introdução

Em "Applications d'Analyse et de Géométrie", de 1862, Poncelet apresenta um estudo sobre pares de cônicas que possuem um polígono inscrito em uma e ao mesmo tempo circunscrito à outra. Ele demonstra que, quando existe um polígono satisfazendo essa propriedade, na verdade há uma infinidade de polígonos com o mesmo número de lados que também a satisfazem. Ainda mais interessante é a relação que esse problema de Poncelet tem com a teoria de curvas elípticas, percebida e estudada por Jacobi e Cavley.

Neste trabalho estaremos interessados em estudar as variedades dos pares de cônicas relacionadas por polígonos, mais particularmente triângulos. Daremos uma construção detalhada de uma certa fibração sobre um espaço de configurações de triângulos degenerados que utilizaremos para recuperar o bigrau da variedade de pares de cônicas relacionadas por triângulos empregando técnicas de teoria da interseção. Inicialmente, discutiremos o problema de Poncelet no plano projetivo complexo no contexto do chamado "Bilhar de Poncelet". É através dessa construção que faremos a ligação com a teoria de curvas elípticas e discutiremos uma solução desse problema.

O capítulo (2) traz um breve histórico do problema de Poncelet, além de sua descrição e solução. Em seqüência, capítulo (3), apresentamos os estudos dos pares de cônicas relacionados por triângulos e quadriláteros e a conseqüente generalização. Finalmente, em (4), fazemos o estudo específico da variedade dos pares de cônicas relacionados por triângulos. Em (5) apresentamos motivações para a continuidade da investigação desse problema clássico.

As referências base para a primeira parte deste trabalho são o texto "Topics in Classical Algebraic Geometry", de Dolgachev [Dol06, cap.2] e o artigo "On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism", de Griffiths e Harris [Har78]. Para uma história do problema de Poncelet ou sobre Poncelet podem ser consultados ([BR87]) ou o próprio livro de Poncelet [Pon62], entre outros.

## 2 Bilhar de Poncelet

#### 2.1 Histórico

O nome de Jean-Victor Poncelet se destaca na Matemática pelos trabalhos em geometria projetiva e cônicas. Na verdade, Poncelet é considerado um dos fundadores da geometria projetiva moderna. Nasceu em 1 de julho de 1788, em Metz, França, e morreu em Paris, 23 de dezembro de 1867. Estudou na École Polytechnique e École d'Application de Metz, onde foi pupilo de Monge (1746 - 1818).

Seus primeiros estudos em geometria projetiva foram feitos durante o inverno de 1812-13 e julho de 1814, enquanto era prisioneiro de guerra, em Saratov, por ter participado da campanha russa como tenente-engenheiro. A obra de Poncelet realizada nesse período foi publicada nos dois volumes de "Applications d'Analyse et de Géométrie", mas somente a partir de 1862.

Em 1814 volta a Metz e torna-se capitão-engenheiro. De 1815 até 1825 trabalha em projetos militares e a partir daí até 1835, como professor de mecânica. Mas sempre continuou com seus estudos em geometria projetiva e em 1822 é publicado o "Traité des propriétés projectives des figures", primeiro livro dedicado à geometria projetiva. Nessa obra Poncelet desenvolveu vários conceitos importantes como perspectiva, razão cruzada, dualidade, entre outros. Também estabelece que duas cônicas genéricas do plano projetivo complexo são equivalentes por uma mudança de coordenadas projetiva e que possuem quatro pontos de interseção.

Outro resultado sobre cônicas apresentado por Poncelet, ainda em "Applications...", diz respeito a polígonos simultaneamente inscritos em uma cônica e circunscritos a outra [Pon62, p. 355]. Ele demonstra que:

Si deux courbes du second degré sont telles, qu'on puisse inscrire dans l'une, un polygone d'un certain nombre de côtés, qui soit en même temps circonscrit à l'autre, il y aura une infinité de polygones de ce nombre de côtés, qui jouiront de la même propriété.

#### Mostra também que

Deux courbes quelconques du second degré étant données sur un plan, il est impossible, en général, d'inscrire dans l'une quelconque d'entre elles, un polygone qui soit en même temps circonscrit à l'autre.

Esse problema já aparece anteriormente no trabalho de outros matemáticos, como Euler e Steiner. A demonstração original, dada por Poncelet, usa resultados da geometria analítica. Mas em 1828, Jacobi descobre a relação entre o problema de Poncelet e a teoria das funções elípticas e publica um artigo com uma demonstração analítica. Mais tarde, em 1853, Cayley dá condições explícitas para que duas cônicas sejam relacionadas como no teorema de Poncelet.

A versão que apresentaremos aqui usa a relação com curvas elípticas e o teorema de Cayley, baseada principalmente nos trabalhos de [Dol06] e [Har78].

#### 2.2 Definição do Bilhar de Poncelet

Definimos um polígono de *n*-lados  $(n \ge 3)$  no plano projetivo complexo  $\mathbb{P}^2$  como um conjunto ordenado de *n* pontos  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{P}^2$  tais que três pontos consecutivos não são colineares. Os pontos  $x_i$  são chamados vértices do polígono e as retas  $\ell_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$  entre dois pontos consecutivos são os lados (aqui usamos a convenção  $x_{n+1} = x_1$ ).

Dada uma curva não-singular  $C \in \mathbb{P}^2$ , dizemos que um polígono P é *inscrito em* C se C contém seus vértices e *circunscrito* se todos os seus lados são tangentes a C.

Agora, seja P um n-ágono inscrito em uma cônica não-singular C e, ao mesmo tempo, circunscrito a uma outra cônica não-singular K. Nesse caso diremos que C é *Poncelet* relacionada por n-ágonos ou n-Poncelet relacionada com K.

Dado um par de cônicas, vamos descrever agora um processo para construir, se possível, um *n*-ágono que seja inscrito em uma e circunscrito à outra.

Sejam  $C \in K$  duas cônicas não-singulares. Dado um ponto  $x \in C$ , temos em geral duas tangentes a K passando por x. Escolha uma dessas tangentes, digamos  $\ell$ . Formamos portanto um par  $(x, \ell) \in C \times \check{K}$ , onde  $\check{K} \subset \check{\mathbb{P}}^2$  denota a cônica dual a K, ou seja, o subconjunto de  $\check{\mathbb{P}}^2$  formado pelas retas tangentes à cônica K. A reta tangente  $\ell$  encontra C, em geral, num segundo ponto x', além de x. Por sua vez, a partir de x' temos uma segunda tangente a K, denotada por  $\ell'$ . Com esse processo determinamos um novo par  $(x', \ell')$ . Esse processo pode então ser iterado e o denominamos *bilhar de Poncelet* (veja figura 1, p. 7).



Figura 1: Bilhar de Poncelet

Dizemos que esse processo termina em n passos se o par  $(x^{(n+1)}, \ell^{(n+1)})$ , obtido pela (n+1)-ésima iteração, é igual ao par inicial  $(x, \ell)$ . Nesse caso, por construção, temos um polígono inscrito em C e circunscrito a K, ou seja, C é n-Poncelet relacionada com K.

A cônica na qual o polígono está inscrito será chamada de *cônica externa* e a outra cônica de *cônica interna*. No que segue, vamos sempre denotar por C a cônica externa e K a interna e, estando bem determinados os papéis de cada cônica, diremos simplesmente que elas são n-Poncelet relacionadas ou Poncelet relacionadas por n-ágonos.

#### 2.3 A curva elíptica associada e o Teorema de Darboux

Apesar de definirmos inicialmente um *n*-ágono como conjunto ordenado de *n* pontos três a três não colineares, observe que o bilhar de Poncelet pode gerar polígonos "degenerados", onde vértices ou lados coincidem. Isso está relacionado com os pontos de interseção e as tangentes comuns às duas cônicas. De fato, se  $(x, \ell) \in C \times \check{K}$  com  $\ell$  sendo tangente comum às duas cônicas, iterando esse par teremos  $(x, \ell')$  para algum  $\ell' \in \check{K}$ , ou seja, o vértice x é contado duas vezes. Também, se  $x' \in C \cap K$  o par precedente é do tipo  $(x, \ell')$  para algum  $x \in C$ . Tais casos são apresentados na figura (2, p. 8). Então, para generalizar a definição de um polígono, somos levados a considerar os pares  $(x, \ell)$  ao invés dos vértices do polígono. Para a teoria de curvas elípticas que utilizaremos aqui, citamos [Har77, p.316-336].



Figura 2: Polígonos degenerados

Seguindo a construção do bilhar de Poncelet, seja  $x \in C$  e  $\ell \in \check{K}$ , tal que x está na reta  $\ell$ . Definimos então o conjunto

$$E = E_{C,K} := \{ (x,\ell) \in C \times \check{K} \mid x \in \ell \}.$$

Como conjunto de  $\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ , E é determinado pelas equações C(x) = 0,  $\check{K}(\ell) = 0$ ,  $\sum x_i \ell_i = 0$ .

Sobre esses pontos definimos o *Mapa de Poncelet*, que é a representação do processo descrito pelo bilhar de Poncelet:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{C,K} : \begin{array}{ccc} E_{C,K} & \to & E_{C,K} \\ (x,\ell) & \mapsto & (x',\ell'), \end{array}$$

onde x' é o segundo ponto de interseção da cônica externa C com a tangente  $\ell \in \ell'$  é a segunda tangente a K passando por x'. Observe que se  $x \in C \cap K$ , temos  $(x, T_x K) \in E_{C,K}$ , onde  $T_x K$  denota a reta tangente a K em x.

Observe que se a cônica K é não-singular, sua dual  $\check{K}$  também é não-singular. Uma vez que cônicas não-singulares são isomorfas à reta projetiva  $\mathbb{P}^1$ , podemos considerar o conjunto  $E_{C,K}$  como subconjunto de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Pode-se mostrar que E é uma curva nãosingular de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , usando, por exemplo, uma parametrização adequada para C e K(veja [Eva98]). Por construção de E, as projeções em cada coordenada,  $\pi_C$  e  $\pi_K$ , têm grau 2. Logo E é uma curva de bigrau (2, 2) e portanto possui gênero aritmético igual a 1 (veja [Sha, p. 241-243]).

Considere a projeção  $\pi_C : E \to C \cong \mathbb{P}^1$ . Os pontos de ramificação correspondem aos pontos de C a partir dos quais existe apenas uma tangente a K, ou seja, um ponto de  $C \cap K$ . Também, E é uma curva não-singular se, e somente se, temos quatro pontos de ramificação. Assim, quando os quatro pontos de interseção são distintos, mediante a escolha de um ponto  $O \in E$ , temos E uma curva elíptica.

Analogamente para a outra projeção,  $\pi_K : E \to \check{K} \cong \mathbb{P}^1$ , temos ramificação nos pontos de  $\check{K}$  correspondendo às tangentes comuns às duas cônicas, e teremos 4 pontos de ramificação se, e somente se, E for não-singular. Em particular concluímos que duas cônicas se encontram em quatro pontos distintos se, e somente se, existem quatro tangentes comuns distintas. Isto segue também da bem conhecida dualidade de cônicas.

Vamos então explicitar a equação da cúbica de  $\mathbb{P}^2$  que corresponde à curva elíptica  $E_{C,K}$ , com  $p_1, \dots, p_4$  os pontos de interseção distintos. Escolhemos  $O = (p_1, Tp_1K)$  e, por uma mudança de coordenadas podemos supor que a imagem de O pela projeção  $\pi_C$  é o ponto no infinito. Se a, b, c são os outros pontos de ramificação de  $\pi_C$ , isto é, as imagens por  $\pi_C$  dos pontos  $(p_i, T_{p_i}K)$ , (i = 2, 3, 4), então a curva elíptica E é isomorfa à cúbica plana de equação afim

$$y^{2} = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Além disso, se considerarmos a transformação linear fracionária que leva a em 0, b em1 e preserva o ponto no infinito, temos que a cúbica acima ainda é isomorfa a

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

onde  $\lambda \neq 0, 1$  (imagem de c pela transformação linear fracionária) é a razão cruzada dos quatro pontos.

Sobre a curva elíptica E com o ponto escolhido  $O \in E$ , temos definida uma estrutura de grupo, cuja operação é denotada por  $\dotplus$  e o ponto O é o elemento neutro. Nessas condições, o mapa de Poncelet, um automorfismo da curva, é descrito como uma translação, ou seja, existe  $T \in E$  tal que

$$\mathfrak{P}(x,\ell) = (x,\ell) \dotplus T. \tag{1}$$

Observe que T é determinado por

 $T := \mathfrak{P}(O).$ 

Isso pode ser verificado, por exemplo, descrevendo o mapa de Poncelet como composição dos morfismos (veja [Eva98]):

$$\begin{aligned} i_C : \quad E_{C,K} &\to \quad E_{C,K} \\ (x,\ell) &\mapsto \quad (x',\ell) \end{aligned}$$

е

$$i_K: E_{C,K} \rightarrow E_{C,K}$$
  
 $(x,\ell) \mapsto (x,\ell'),$ 

ou seja,  $i_C(x, \ell)$  determina o segundo ponto de interseção entre  $C \in \ell \in i_K(x, \ell)$  determina a segunda tangente a K passando por x, e portanto  $\mathfrak{P} = i_K \circ i_C$ .

Agora, dado  $x \in C \cong \mathbb{P}^1$ , seja  $L_x$  o polinômio de bigrau (1,0) cuja raíz corresponde ao ponto x. Assim, o ciclo de interseção de E com  $L_x$  é

$$L_x \cdot E = (x, \ell) + (x, \ell') = (x, \ell) + i_K(x, \ell).$$

Além disso, temos que dois divisores desse tipo são racionamente equivalentes, uma vez que  $div(L_x/L_y) = L_x \cdot E - L_y \cdot E$ .

Se escolhermos  $p \in C \cap K$ , vamos obter, para qualquer  $x \in C$ :

$$L_x \cdot E \equiv L_p \cdot E = (p, T_p K) + i_k(p, T_p K) = 2(p, T_p K),$$

onde $T_p K$ denota a reta tangente a K em p, e portanto

$$i_K(x,\ell) \equiv 2(p,T_pK) - (x,\ell).$$

Analogamente, para  $\ell \in \check{K}$ , definimos o polinômio  $L_{\ell}$  de bigrau (0,1). Daí podemos concluir que

$$i_C(x,\ell) \equiv (p,T_pK) + (p',T_pK) - (x,\ell)$$

Com essas expressões para  $i_C$  e  $i_K$  e escolhendo a origem de E como sendo o ponto  $(p, T_p K)$ , podemos calcular  $\mathfrak{P}(x, \ell)$ , mostrando a equação (1).

Assim, determinar em quantos passos o bilhar de Poncelet termina (se termina) equivale a calcular a ordem do automorfismo  $\mathfrak{P}_{C,K}$  que, por sua vez, equivale a calcular a ordem do ponto T.

Segue diretamente desse fato o Teorema de Darboux:

**Teorema 2.1** (G. Darboux). Sejam  $C \in K$  duas cônicas não-singulares com interseções transversais. Então  $C \in K$  são n-Poncelet relacionadas se, e somente se, o automorfismo  $\mathfrak{P}_{C,K}$  da curva elíptica associada  $E_{C,K}$  tem ordem n. Além disso, se  $C \in K$  são n-Poncelet relacionadas, então para qualquer ponto  $(x, \ell) \in E_{C,K}$  existe um n-ágono inscrito em C e circunscrito a K tendo x como vértice e  $\ell$  um lado tangente a K.

#### 2.4 A hipersuperfície $\mathcal{P}_n$

Dadas duas cônicas não-singulares com interseção transversal,  $C \in K$ , queremos agora determinar se são *n*-Poncelet relacionadas. Para isso vamos usar o *teorema de Cayley*, que determina a ordem de um ponto sobre uma curva elíptica. Tanto a demonstração desse teorema quanto sua aplicação no bilhar de Poncelet podem ser vistas no artigo [Har78]. Uma maneira alternativa é feita em [Dol06].

**Teorema 2.2** (Teorema de Cayley). Seja E uma curva elíptica com origem  $O \ e \ T \in E$ um ponto dado. Então T tem ordem finita n se, e somente se a seguinte condição é satisfeita: escolha funções racionais x e y sobre E tendo pólos de ordem 2 e 3 em O respectivamente, mas que sejam regulares nos demais pontos e com x(T) = 0. Então existe uma equação

$$y^{2} = (x - a)(x - b)(x - c)$$

onde a, b e c são distintos e não nulos, e escrevemos a série formal

$$y = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

A condição de ordem finita n é

Dadas cônicas não-singulares  $C \in K$  com interseção transversa e pontos de interseção  $p_1, \dots, p_4$ , escolhemos  $O = (p_1, T_{p_1}K) \in T = \mathfrak{P}(O) = (x', \ell')$ . Agora considere o feixe de cônicas com os  $p_i$ 's como pontos base:

$$D_t := \mathcal{V}(tC + K)$$

(com  $C \in K$  também denotando as equações das cônicas). Em coordenadas, se  $C \in K$  ainda denotam as matrizes simétricas representantes das cônicas, o discriminante pode ser escrito como det(tC + K). Portanto, o discriminante é um polinômio cúbico em t com raízes não nulas  $t_i$ , i = 2, 3, 4. Vamos usar o parâmetro t para determinar a função racional "x" do teorema de Cayley.

Para cada t, traçamos a reta tangente a  $D_t$  em  $p_1$  que encontra C em um único ponto  $x_t$  além de  $p_1$ . Observe que os valores  $t = t_i$  são mapeados em  $p_i$  (adequando os índices), pois os zeros do discriminante det(tC + K) correspondem às cônicas singulares do feixe. Também, o valor  $t = \infty$  é mapeado em  $p_1$ , uma vez que  $D_{\infty} = C$ , e t = 0 é mapeado em x'. Portanto, de acordo com a discussão da seção (2.3), temos que  $E_{C,K}$  é equivalente à cúbica  $y^2 = \det(tC + K)$  com O correspondendo a  $t = \infty$  e T a t = 0. Enunciando o teorema de Cayley para a curva elíptica  $E_{C,K}$  temos:

**Proposição 2.1.** Sejam C e K cônicas não-singulares com interseção transversal e considere a expansão formal

$$\sqrt{\det(tC+K)} = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \cdots$$

da raiz quadrada do discriminante da forma quadrática tC + K. Então as cônicas  $C \in K$  são n-Poncelet relacionadas se, e somente se, valem as equações (2) do teorema de Cayley.

Agora, defina o conjunto

$$\mathcal{P}_n = \{(C, K) \mid C \in K \text{ são } n \text{-Poncelet relacionadas}\} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5.$$

O teorema de Cayley nos permite concluir que  $\mathcal{P}_n$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ . É conhecido que seu bigrau é  $(\frac{1}{4}T(n), \frac{1}{2}T(n))$ , onde T(n) é o número de elementos de ordem n do grupo abeliano  $\mathbb{Z}_n^2$  (ver [Dol06]). Na próxima seção vamos estudar as primeiras dessas hipersuperfícies.

### 3 Construindo cônicas Poncelet relacionadas

Mostramos na seção anterior que o conjunto  $\mathcal{P}_n$  dos pares de cônicas *n*-Poncelet relacionadas é uma hipersuperfície de  $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$  cuja equação é determinada através do teorema de Cayley. Assim, dadas cônicas  $C \in K$  (não-singulares e com interseção transversal) e um inteiro  $n \geq 3$ , pode-se determinar se  $C \in K$  são *n*-Poncelet relacionadas. Também cabe o problema inverso: dado  $n \geq 3$ , construir pares de cônicas que sejam *n*-Poncelet relacionadas, ou seja, um par  $(C, K) \in \mathcal{P}_n$ . Para isso, vamos usar caracterizações alternativas para cônicas Poncelet relacionadas. Estudaremos também os casos de cônicas Poncelet relacionadas por triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

#### 3.1 Dualidade no Bilhar de Poncelet

Sejam  $C \in K$  em  $\mathbb{P}^2$  duas cônicas não-singulares com interseção transversal. As duais dessas cônicas são as cônicas  $\check{C}, \check{K} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ , que também são não-singulares com interseção transversal.

Seja  $(x, \ell) \in E_{C,K}$ . A esse ponto de  $E_{C,K}$  fazemos corresponder, de forma única, um ponto de  $E_{\check{K},\check{C}}$  através do mapa

$$\begin{array}{rcl} E_{C,K} & \to & E_{\check{K},\check{C}} & \subset \check{K} \times C \\ (x,\ell) & \mapsto & (\check{\ell},\check{x}). \end{array}$$

Além disso, se  $\mathfrak{P}(x,\ell) = (x',\ell')$  em  $E_{C,K}$ , pela definição do mapa de Poncelet em  $E_{\check{K},\check{C}}$ , temos  $\mathfrak{P}(\check{\ell}',\check{x}') = (\check{\ell},\check{x})$ . Daí podemos concluir que:

**Proposição 3.1.** Uma cônica C é n-Poncelet relacionada com outra cônica K se, e somente se, a cônica dual  $\check{K}$  é n-Poncelet relacionada com a dual  $\check{C}$ .

No estudo das cônicas Poncelet relacionadas, destacamos dois conjuntos de pontos importantes: os quatro pontos da interseção  $C \cap K$ , que correspondem às quatro tangentes comuns de  $\check{C}$  e  $\check{K}$ , e as quatro tangentes comuns a C e K, que por sua vez correspondem aos quatro pontos de interseção de  $\check{C} \cap \check{K}$ . Como observado em (2.3, p. 8), esses são os pontos de ramificação das projeções  $E_{C,K} \to \mathbb{P}^1$  cujas órbitas no bilhar de Poncelet consistem em polígonos degenerados. Podemos assim identificar esses pontos nas degenerações do bilhar.

Se  $C \in K$  são duas cônicas *n*-Poncelet relacionadas, temos em geral uma órbita

$$(x_1, \ell_1) \mapsto \cdots \mapsto (x_i, \ell_i) \mapsto \cdots \mapsto (x_n, \ell_n) \mapsto (x_1, \ell_1)$$

com  $\ell_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ . A igualdade  $x_i = x_{i+1}$  implica que  $\ell_i = T_{x_i}C$  e é portanto uma tangente comum. Por dualidade, obtemos que se  $\ell_i = \ell_{i+1}$  então  $x_{i+1}$  é ponto de interseção. Enunciando:

**Proposição 3.2.** Sejam C e K duas cônicas não-singulares com interseção transversal. Considere uma órbita do bilhar de Poncelet

$$(x_1, \ell_1) \mapsto \cdots \mapsto (x_i, \ell_i) \mapsto \cdots (x_n, \ell_n)$$

Então:

- $\ell_i$  é tangente comum às duas cônicas se, e somente se,  $x_i = x_{i+1}$  (com  $x_{n+1} = x_1$ ).
- $x_i$  é ponto de interseção das cônicas se, e somente se,  $\ell_{i-1} = \ell_i$  (com  $\ell_0 = \ell_n$ ).

#### 3.2 Triângulos

Um primeiro exemplo de cônicas Poncelet relacionadas por um triângulo é dado pelo par de parábolas  $\mathcal{V}(y - x^2) \in \mathcal{V}(x - y^2)$ , mostrado na figura (3).



Figura 3: Bilhar de Poncelet em  $\mathbb{R}^2$ 

Antes de estudar esse exemplo, vamos primeiramente explicitar a equação da hipersuperfície  $\mathcal{P}_3$ .

Como discutido em (2.4), a equação que define  $\mathcal{P}_n$  provém da expansão em série de potências para  $\sqrt{\det(tC+K)}$ . Desenvolvendo o determinante, que é um polinômio de grau 3 (desde que *C* seja não-singular), obtemos (veja [Dol06])

$$D = \Delta t^3 + \Theta t^2 + \Theta' t + \Delta'.$$

onde  $\Delta = \det C, \, \Delta' = \det K, \, \Theta = \operatorname{tr} (K \cdot \operatorname{adj} C) \in \Theta' = \operatorname{tr} (C \cdot \operatorname{adj} K).$ 

A partir desses coeficientes, podemos calcular explicitamente a equação de  $\mathcal{P}_n$ . No caso n = 3, basta calcular o coeficiente  $A_2$  da série, que nos dá a equação

$$\Theta^{\prime 2} - 4\Theta \Delta^{\prime} = 0. \tag{3}$$

Registremos que se trata de uma equação de bigrau (2, 4).

Vamos dar uma demonstração geométrica para esse caso.

**Teorema 3.1.** Sejam C e K duas cônicas não-singulares. Existe um triângulo inscrito em C e circunscrito a K se, e somente se,  $\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0$ .

*Prova:* Suponha que há um triângulo inscrito em C e circunscrito a K. Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que  $C = \mathcal{V}(2T_0T_1 + 2T_0T_2 + 2T_1T_2)$ . Além disso, aplicando uma transformação que fixe C, podemos supor que o triângulo é o triângulo de referência  $\{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$ . Seja  $K = \mathcal{V}(G)$ , com

$$G = aT_0^2 + bT_1^2 + cT_2^2 + dT_0T_1 + eT_0T_2 + fT_1T_2.$$

Como K é tangente ao triângulo de referência, temos que os pontos (1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1) estão na cônica dual  $\check{K}$ . Como a matriz da cônica dual é, a menos de multiplicação por um número complexo, igual à matriz adjunta clássica adjK, essa condição implica que  $bc - \frac{f^2}{4} = ac - \frac{e^2}{4} = ab - \frac{d^2}{4} = 0$ . Então a equação de K pode ser reescrita na forma

$$G = \alpha^2 T_0^2 + \beta^2 T_1^2 + \gamma^2 T_2^2 - 2\alpha\beta T_0 T_1 - 2\alpha\gamma T_0 T_2 - 2\beta\gamma T_1 T_2.$$
(4)

Assim temos

$$\Theta = \operatorname{tr}\left( \begin{bmatrix} \alpha^{2} & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & \beta^{2} & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \gamma^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = -(\alpha + \beta + \gamma)^{2}$$
$$\Theta' = \operatorname{tr}\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha\beta\gamma^{2} & 2\alpha\beta^{2}\gamma \\ 2\alpha\beta\gamma^{2} & 0 & 2\alpha^{2}\beta\gamma \\ 2\alpha\beta^{2}\gamma & 2\alpha^{2}\beta\gamma & 0 \end{bmatrix} = 4\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha^{2} & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & \beta^{2} & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \gamma^{2} \end{vmatrix} = -4(\alpha\beta\gamma)^{2}$$

mostrando que  ${\Theta'}^2 - 4\Theta\Delta' = 0.$ 



Para a recíproca, considere uma reta  $\ell_1$  tangente a K e encontrando C nos pontos  $x \in y$ . Sejam  $\ell_2$  uma reta tangente a K passando por  $x \in \ell_3 \neq \ell_1$  uma reta tangente a K passando por y. O triângulo de lados  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  é circunscrito a K e tem dois de seus vértices  $x \in y$ , sobre C (figura ao lado). Novamente escolhemos coordenadas de modo que o triângulo seja o triângulo de referência. Então podemos supor que  $C = \mathcal{V}(aT_0^2 + 2T_0T_1 + 2T_0T_2 + 2T_1T_2)$ e  $K = \mathcal{V}(G)$  com G como em (4). Assim temos

$$\Theta = \operatorname{tr}\left( \begin{bmatrix} \alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & \beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 1 & 1-a & -1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma(1-a))$$

e os demais coeficientes são como anteriormente. Assim a equação  $\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0$  implica que  $\Theta = (\alpha + \beta + \gamma)^2$  o que ocorre se, e somente se, a = 0. Logo o triângulo (de referência) está inscrito em C.

A equação do conjunto  $\mathcal{P}_3$  nos permite verificar se um dado par de cônicas é Poncelet relacionado por triângulos. Também cabe o problema inverso: construir pares de cônicas que sejam Poncelet relacionadas por triângulos, ou seja, um par  $(C, K) \in \mathcal{P}_3$ . Para isso, vamos estudar uma caracterização alternativa para os pares de cônicas desse conjunto.

Vamos retomar o exemplo das parábolas  $C = \mathcal{V}(y - x^2)$  e  $K = \mathcal{V}(x - y^2)$ . Os pontos de interseção são { $\mathbf{0} = (0:0:1), (1:1:1), (\xi:\xi^2:1), (\xi^2:\xi:1)$ }, onde  $\xi$  é uma raiz primitiva terceira da unidade. Tomando nosso ponto inicial como  $(x_1, \ell_1) = (\mathbf{0}, \mathcal{V}(X))$ , vamos aplicar o bilhar de Poncelet (ver figura (f.degenerado)). A tangente a K em  $\mathbf{0}$ , a reta  $\mathcal{V}(X)$ , encontra C também em  $(0:1:0) =: x_2$ . A segunda tangente a K a partir do ponto  $x_2$  é a reta  $\mathcal{V}(Z) =: \ell_2$ . Observe que nesse caso a reta no infinito  $\mathcal{V}(Z)$  é tangente comum a  $C \in K$  nos pontos  $x_2 \in (1:0:0)$  respectivamente. Isso implica que  $(x_3, \ell_3) = (x_2, \ell_1) \in (x_4, \ell_4) = (x_1, \ell_1)$  formando assim um triângulo degenerado. Situação análoga acontece para os outros pontos de interseção entre  $C \in K$ , observando que temos 4 tangentes comuns a  $C \in K$ , correspondentes aos 4 pontos de interseção das cônicas duais  $\check{C} \in \check{K}.$ 

Afirmamos que essa condição é necessária e suficiente para que C e K sejam Poncelet relacionadas por triângulos.

**Proposição 3.3.** Sejam C e K cônicas não-singulares com interseções transversais,  $p_1, \dots, p_4$  seus pontos de interseção e  $r_1, \dots, r_4$  suas quatro tangentes comuns. Então são equivalentes:

- 1. C e K são Poncelet relacionadas por triângulos.
- 2. Para algum ponto de interseção  $p_i$  temos  $\mathfrak{P}(p_i, T_{p_i}K) = (r_j \cap C, r_j)$ .
- 3. Para alguma tangente comum  $r_i$  temos  $\mathfrak{P}^2(r_i \cap C, r_i) = (p_j, T_{p_i}K)$ .

Além disso, o mapa de Poncelet  $\mathfrak{P}$  estabelece uma bijeção entre o conjunto dos pontos de  $C \cap K$  e suas tangentes comuns.

Obs.:

- A condição (iii) provém do mapa de Poncelet aplicado às cônicas duais, supondo (i)
   ⇔ (ii). Porém, ainda vamos mostrar essa condição de modo direto.
- 2. O mapa de Poncelet  $\mathfrak{P}$  estabelece uma bijeção entre os pontos de interseção e as tangentes comuns. Basta observar que, se (ii) ocorre para algum  $p_i \in C \cap K$ , a equivalência (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) e o Teorema de Darboux nos permite concluir que o mesmo ocorre para os outros 3 pontos de interseção. Conclusão análoga se faz sobre o item (iii). Assim, para cada ponto de interseção  $p_i$  existe uma única tangente comum  $r_j$  em sua órbita.

*Prova:* Suponha que C e K são Poncelet relacionadas por triângulos. Em geral, as órbitas em E são dadas por



onde  $\ell_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$ ,  $\ell_2 = \langle x_2, x_3 \rangle$  e  $\ell_3 = \langle x_3, x_1 \rangle$ . As equivalências seguem da proposição (3.2, p. 15).

((i)  $\Leftrightarrow$  (ii)): Tome  $x_1 = p_i \in C \cap K$ . De imediato temos  $\ell_3 = \ell_1$ , já que ambas são tangentes a K por definição e contêm  $p_i \in K$ . Conseqüentemente devemos ter  $x_2 = x_3$  que, por sua vez, implica que a reta  $\ell_2$  é tangente a C sendo portanto uma tangente comum.

Para a recíproca, como no exemplo das parábolas, é fácil verificar que temos o triângulo dado por  $(p_i, T_{p_i}K) \mapsto (r_j \cap C, r_j) \mapsto (r_j \cap C, T_{p_i}K) \mapsto (p_i, T_{p_i}K)$ . Pelo Teorema de Darboux, concluímos que C e K são Poncelet relacionadas por triângulos.

 $((i) \Leftrightarrow (iii))$ : Se C e K são Poncelet relacionadas por triângulos e a reta  $\ell_1$  é uma de suas tangentes comuns então temos obrigatoriamente  $x_2 = x_1$ , implicando que  $\ell_3 = \ell_2$ . Mas isso nos diz que  $x_3$  é um ponto de interseção, Conseqüentemente  $K^{x_3} \cap K = \{y_3\}$ , ou seja,  $x_3 = y_3$  é ponto de interseção de C e K.

Reciprocamente, a condição (iii) implica a formação do triângulo  $(r_j \cap C, r_j) \mapsto (r_j \cap, T_{p_i}K) \mapsto (p_i, T_{p_i}K) \mapsto (r_j \cap C, r_j)$ . A conclusão segue pelo Teorema de Darboux.

Isso nos motiva a considerar a seguinte configuração: escolhemos duas retas,  $\ell_1 \in \ell_2$ , e sobre a reta  $\ell_1$  um ponto  $x_1$ . Tomamos ainda o ponto  $x_2$  de interseção entre as retas. Tal configuração pode ser vista na figura (4).



Figura 4: Configuração de triângulos degenerados

Considere cônicas  $C \in K$  tais que o ponto  $x_1$  corresponda a um ponto de interseção, a reta  $\ell_2$  seja uma tangente comum tangenciando C no ponto  $x_2 \in \ell_1$  seja a reta tangente à cônica  $K \in x_1$ . Sob essas condições, a proposição 3.3 nos garante que  $C \in K$ , desde que sejam não-singulares e tenham interseções transversais, são Poncelet relacionadas por triângulos. Nesse caso, o triângulo formado pelo bilhar de Poncelet é dado por  $(x_1, \ell_1) \mapsto (x_2, \ell_2) \mapsto (x_2, \ell_1) \mapsto (x_1, \ell_1)$ . Na seção 4 estudaremos essa configuração na construção da hipersuperfície  $\mathcal{P}_3$ 

#### 3.3 Quadriláteros

Análogo ao que foi feito no caso de triângulos, podemos obter uma condição entre duas cônicas que seja equivalente a condição de serem Poncelet relacionadas por quadriláteros.

**Proposição 3.4.** Sejam  $C \in K$  cônicas não-singulares com interseção transversal,  $p_1, \dots, p_4$  seus pontos de interseção e  $r_1, \dots, r_4$  suas tangentes comuns. Então são equivalentes:

• C e K são Poncelet relacionadas por quadriláteros.

- Para algum ponto de interseção  $p_i$  temos  $\mathfrak{P}^2(p_i, T_{p_i}K) = (p_j, T_{p_j}K)$  (para algum  $j \neq i$ ).
- Para alguma tangente comum  $r_i$ , temos  $\mathfrak{P}^2(r_i \cap C, r_i) = (r_j \cap C, r_j) \ (j \neq i)$ .

*Prova:* Suponha que  $C \in K$  são Poncelet relacionadas por quadriláteros, com órbitas em E dadas, em geral, por

((i)  $\Leftrightarrow$  (ii)): Tome  $x_1 = p_i \in C \cap K$ . Temos obrigatoriamente  $\ell_4 = \ell_1$  e portanto  $x_2 = x_4$ . Daí concluímos que  $\ell_2 = \ell_3$ , logo  $x_3$  é outro ponto de interseção.

Para a recíproca, iteramos o bilhar de Poncelet obtendo

$$(p_i, T_{p_i}K) \mapsto (x, T_{p_i}K) \mapsto (p_j, T_{p_i}K) \mapsto (x, T_{p_i}K) \mapsto (p_i, T_{p_i}K)$$

Pelo Teorema de Darboux, concluímos que C e K são Poncelet relacionadas por quadriláteros.

((i) $\Leftrightarrow$  (iii)): Se C e K Poncelet relacionadas por quadriláteros e a reta  $\ell_1$  é uma de suas tangentes comuns então temos  $x_2 = x_1$ . Assim, como  $\ell_1 \neq \ell_2$  (caso contrário,  $x_1$  seria uma interseção dupla), concluímos que  $\ell_2 = \ell_4$  e portanto  $x_4 = x_3$ . Por fim, temos  $\ell_3$  uma tangente comum a C e K.

Reciprocamente, a condição (iii) implica a formação do quadrilátero

$$(r_i \cap C, r_i) \mapsto (r_i \cap C, \ell) \mapsto (r_j \cap C, r_j) \mapsto (r_j \cap C, \ell) \mapsto (r_i \cap C, r_i).$$

e novamente pelo Teorema de Darboux, concluímos que C e Ksão Poncelet relacionadas por quadriláteros. $\hfill \Box$ 

Para construir um par de cônicas Poncelet relacionadas por quadriláteros podemos considerar então duas configurações, cada uma baseada em uma das equivalências da proposição (3.4).

- Consideramos retas l₁ e l₂ e pontos x₁, x₂ e x₃ tais que x₁ ∈ l₁, x₃ ∈ l₂ e x₂ seja o ponto de interseção entre as retas. A cônica externa deverá conter os pontos x₁, x₂ e x₃ enquanto a cônica interna deverá ser tangente a l₁ em x₁ e a l₂ em x₃;
- 2. Consideramos retas l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub> e l<sub>3</sub> e pontos x<sub>1</sub> e x<sub>3</sub> tais que x<sub>1</sub> e o ponto de interseção entre l<sub>1</sub> e l<sub>2</sub> e x<sub>3</sub> o ponto de interseção entre l<sub>2</sub> e l<sub>3</sub>. A cônica externa deverá ser tangente a l<sub>1</sub> em x<sub>1</sub> e a l<sub>3</sub> em x<sub>3</sub> e a cônica interna deverá ser tangente as retas l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub> e l<sub>3</sub> (sem especificar os pontos de tangência).



Figura 5: Configurações de quadriláteros degenerados

Como exemplo, tome  $(0,1) \in \mathcal{V}(y-1)$  e  $(0,-1) \in \mathcal{V}(y+1)$ . Temos  $\mathcal{V}(x) = \langle (0,1), (0,-1) \rangle$ e portanto uma escolha quase obrigatória para o par de cônicas é  $C = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1)$  e  $K = \mathcal{V}((x-1)^2 + y^2 - 1)$  (ver figura 6).



Figura 6: Círculos Poncelet relacionados por quadriláteros

#### 3.4 Caso geral

Conhecidos os casos de triângulos e quadriláteros, torna-se fácil obter uma generalização para as proposições (3.3) e (3.4), pela aplicação do bilhar de Poncelet.

**Proposição 3.5.** Sejam C e K cônicas não-singulares com interseções transversais,  $p_1, \dots, p_4$  seus pontos de interseção e  $r_1, \dots, r_4$  suas quatro tangentes comuns. Então C e K são n-Poncelet relacionadas se, e somente se, para algum ponto de interseção  $p_i$ temos

$$\mathfrak{P}^m(p_i, T_{p_i}K) = (r_j \cap C, r_j) \qquad se \quad n = 2m + 1,$$
  
$$\mathfrak{P}^m(p_i, T_{p_i}K) = (p_j, T_{p_j}K) \qquad se \quad n = 2m.$$

$$\mathfrak{P}^{n-m}(r_j \cap C, r_j) = (p_i, T_{p_i}K) \qquad se \quad n = 2m+1,$$
  
$$\mathfrak{P}^{n-m}(r_i \cap C, r_i) = (r_j \cap C, r_j) \qquad se \quad n = 2m.$$

*Prova:* • Caso n = 2m + 1.

Suponha que  $x_1 = p_i \in C \cap K$ . Como, por hipótese, as cônicas  $C \in K$  não são tangentes,  $\ell_1$  não é tangente comum, e portanto  $x_1 \neq x_2$ , e  $\ell_2 \neq \ell_1$ . Desse modo, por ser  $x_1$  um ponto de interseção,  $\ell_n = \ell_1 = T_{p_i}K$ , de onde concluímos que  $x_n = x_2$ . Conseqüentemente teremos  $\ell_{n-1} = \ell_2$  e portanto  $x_{n-1} = x_3$ . Podemos continuar esse processo até obter  $x_{m+1} = x_{m+2}$  e  $\ell_{m+2} = \ell_m$ . Daí concluímos que  $\ell_{m+1}$  é uma tangente comum.

Para a recíproca, seja m o menor inteiro tal que vale  $\mathfrak{P}^m(p_i, T_{p_i}K) = (r_j \cap C, r_j)$ , com  $p_i$  ponto de interseção entre as cônicas e  $r_j$  tangente comum. Suponha também que não há inteiro k < m tal que  $\mathfrak{P}^k(p_i, T_{p_i}K) = (p_j, T_{p_j}K)$  com  $p_j$  outro ponto de interseção. Consideramos então a órbita

$$\cdots \mapsto (x_0, \ell_0) \mapsto (x_1, \ell_1) \mapsto \cdots \mapsto (x_m, \ell_m) \mapsto (x_{m+1}, \ell_{m+1}) \mapsto \cdots$$

com  $x_1$  ponto de interseção e  $\ell_{m+1}$  tangente comum. Assim, devemos ter  $\ell_0 = \ell_1$  e  $x_{m+1} = x_{m+2}$ . A igualdade desse pontos implica que  $\ell_m = \ell_{m+2}$ , pois ambas são tangentes a K passando por  $x_{m+1}$  (=  $x_{m+2}$ ) e distintas de  $\ell_{m+1}$  (caso contrário teríamos  $x_{m+1}$  como ponto de interseção e portanto um ponto de bitangência entre as cônicas, possibilidade que estamos descartando). Daí então concluímos que  $x_m = x_{m+3}$  e portanto  $\ell_{m-1} = \ell_{m+3}$ , pois, por argumento análogo a anterior, ambas são tangentes a K passando por  $x_m$  (=  $x_{m+3}$ ) e distintas de  $\ell_m$  (caso contrário teríamos  $x_m$  um ponto de interseção, o que supomos não ocorrer). Procedendo desse modo chegamos a  $x_2 = x_n$  implicando que  $\ell_1 = \ell_n$  e por sua vez implicando que  $x_1 = x_{n+1}$ . Usando ainda que  $\ell_0 = \ell_1$ , decorre que  $(x_n, \ell_n) \mapsto (x_1, \ell_1)$ , ou seja, as cônicas são n-Poncelet relacionadas.

• Caso n = 2m.

Procedemos inicialmente de modo análogo ao caso anterior, mas agora chegamos a  $\ell_{m+1} = \ell_m$  e portanto  $x_{m+1}$  é ponto de interseção. A recíproca também é análoga.

A partir desse resultado, também podemos tentar generalizar as configurações de polígonos degenerados (figura 7). Vamos nos basear na equivalência relacionada aos pontos de interseção.

Iniciemos com o caso ímpar, n = 2m + 1. Tomamos m + 1 retas  $\ell_i$  e m + 1 pontos  $x_i$ , com  $i = 1, \dots, m + 1$ , tais que para  $i \ge 2$ ,  $x_i$  é determinado como interseção de  $\ell_{i-1}$  com  $\ell_i$  e  $x_1$  é um ponto em  $\ell_1$  (ver figura 7 (a)). As cônicas externas devem então passar



Figura 7: Configurações de *n*-ágonos degenerados

pelos pontos  $x_1, \dots, x_{m+1}$  sendo tangente à  $\ell_{m+1}$  em  $x_{m+1}$ . Já as cônicas internas devem ser tangentes às retas  $\ell_1, \dots, \ell_{m+1}$  sendo  $x_1$  o ponto de tangência em  $\ell_1$ .

Observe que essas condições são representadas por m+2 equações lineares, tanto para as cônicas externas quanto para as internas. Sabendo que uma cônica é determinada por 5 equações lineares independentes sobre seus coeficientes, temos então que, usando essa configuração, sempre é possível determinar um par de cônicas *n*-Poncelet relacionadas somente para os casos n = 3, 5 e 7.

Em questões de dimensão, é fácil ver que o conjunto de tais configurações tem dimensão 2m + 3. O conjunto das cônicas externas à configuração forma um fibrado projetivo de posto, pelo menos genericamente, 5 - (m+2), onde o 5 deve-se ao número de coeficientes projetivos de uma cônica. A mesma dimensão está associada às cônicas internas. Assim, os pares de cônicas satisfazendo tais condições em uma dada configuração têm dimensão 9, como já esperávamos, uma vez que  $\mathcal{P}_n$  é uma hipersuperfície de  $\subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ . Essas construções serão realizadas para o caso n = 3, na seção 4.

Agora para o caso par, n = 2m, consideramos m retas  $\ell_i$ ,  $i = 1, \dots, m \in m+1$  pontos  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ , tais que para  $i = 2, \dots, m$  os pontos  $x_i$  sejam determinados pela interseção das retas  $\ell_{i-1} \in \ell_i$ ,  $x_1$  pertença a  $\ell_1 \in x_{m+1}$  a  $\ell_m$  (veja 7(b)). Desse modo, as cônicas externas serão aquelas passando pelos m+1 pontos  $x_i$  e as internas serão as tangentes às m retas  $\ell_i$  com  $x_1$  o ponto de tangência em  $\ell_1 \in x_{m+1}$  o ponto de tangência  $x_{m+1} \in m \ell_m$ .

Nesse caso temos m + 1 condições lineares para as cônicas externas e m + 2 para as internas. Assim, somente será possível construir pares de cônicas Poncelet relacionadas sobre uma configuração geral nos casos n = 4 e 6.

Novamente analisando dimensões, temos que o conjunto de tais configurações tem dimensão 2m + 2, o conjunto das cônicas externas 5 - (m + 1) e para cônicas internas dimensão 5 - (m + 2). Também temos que os pares de cônicas satisfazendo tais condições em uma dada configuração têm dimensão 9.

#### 3.5 Pentágonos e Hexágonos

É bem conhecido que por 5 pontos gerais de  $\mathbb{P}^2$  existe uma única cônica não-singular que passa por eles. Usando isso e a dualidade do plano projetivo, torna-se fácil encontrar um par de cônicas Poncelet relacionadas por pentágonos.

Supomos inicialmente que temos 5 pontos em posição geral  $x_1, \dots, x_5$ . Por esses pontos passa uma única cônica não-singular, que será nossa cônica externa C. Para determinar a cônica interna usamos a dualidade de  $\mathbb{P}^2$ : consideramos os pontos  $\check{\ell}_1, \dots, \check{\ell}_5$ em  $\check{\mathbb{P}}^2$  duais às retas  $\ell_1, \dots, \ell_5$  que determinam os lados do pentágono. No plano projetivo dual, se  $\check{K}$  é a cônica passando por esses pontos, sua dual corresponde à cônica interna  $K \in \mathbb{P}^2$ .

Observe que o caso de pentágonos é o caso limite de liberdade irrestrita para a construção de pares de cônicas Poncelet relacionadas sobre polígonos gerais. A partir de hexágonos, os vértices estão necessariamente em posição especial para a existência. Tal restrição provém de um resultado clássico sobre cônicas por 6 pontos (veja [Ful69, p.123]):

**Teorema 3.2** (de Pascal). Um hexágono está inscrito em uma cônica não-singular se, e somente se, os lados opostos se encontram em três pontos colineares. Nesse caso dizemos que os seis pontos formam um hexágono de Pascal.

Isso nos permite construir a cônica externa. Para a cônica interna, usamos novamente a dualidade. Precisamos encontrar condições sobre os seis pontos sob as quais o dual de um hexágono de Pascal continue sendo um hexágono de Pascal. Para isso, verificamos a versão dual do Teorema de Pascal, ou seja, um teorema que dê condições para que uma cônica seja tangente a seis retas:

**Teorema 3.3** (Pascal dual). Um hexágono está circunscrito a uma cônica não-singular se, e somente se, as três retas formadas por vértices opostos são incidentes em um único ponto.

Prova: Dadas seis retas  $\ell_1, \dots, \ell_6$  no plano projetivo, sejam  $p_i := \ell_i \cap \ell_{i+1}$ , (com  $\ell_7 = \ell_1$ ). Assim, o dual desse hexágono corresponde ao hexágono de lados  $\check{p}_i$  e vértices  $\check{\ell}_i$ , com  $\check{\ell}_i = \check{p}_{i-1} \cap \check{p}_i$ . Com essa notação, exigir que uma cônica C seja tangente às seis retas  $\ell_i$  equivale a exigir que a cônica dual correspondente  $\check{C}$  passe pelos seis pontos  $\check{\ell}_i$ . Pelo teorema da Pascal, a cônica  $\check{C}$  contém os pontos  $\check{\ell}_i$  se, e somente se, eles formam um hexágono de Pascal. Isto significa que os pontos determinados pelas interseções de lados opostos do hexágono dual  $\check{p}_1 \cap \check{p}_4, \check{p}_2 \cap \check{p}_5$  e  $\check{p}_3 \cap \check{p}_6$  são colineares. Pela dualidade, os pontos de interseção de lados opostos correspondem às retas  $\langle p_1, p_4 \rangle$ ,  $\langle p_2, p_5 \rangle$  e  $\langle p_3, p_6 \rangle$  formadas pelos vértices opostos no hexágono original. A condição de que o hexágono dual seja um hexágono de Pascal é portanto equivalente a dizer que essas três retas são incidentes em um ponto. □



Figura 8: Hexágonos de Pascal

Para ver que essas condições são distintas, basta considerar o exemplo da figura 9. Temos um hexágono inscrito em um círculo, e portanto um hexágono de Pascal, cujas diagonais não se encontram em um mesmo ponto, ou seja, não é um hexágono de Pascal dual.



Figura 9: Hexágono de Pascal não dual

Portanto, para construirmos um par de cônicas Poncelet relacionadas por hexágonos devemos nos restringir a seis pontos do plano que satisfaçam às duas condições, ou seja, os três pontos de interseções dos três pares de lados opostos são colineares e as três retas passando pelos três pares de pontos opostos são concorrentes em um único ponto. Por exemplo, a partir do hexágono {(-10, 0), (5, 5), (-5, -5), (10, 0), (-5, 5), (5, -5)}, que satisfaz às duas condições, obtemos o par de cônicas  $C = \mathcal{Z}(X^2 + 3Y^2 - 100Z^2)$  e  $K = \mathcal{Z}(2X^2 - 2Y^2 + 25Z^2)$  (veja figura 10).



Figura 10: Bilhar construído a partir de um hexágono de Pascal e Pascal dual ao mesmo tempo

## 4 Cônicas Poncelet relacionadas por triângulos

Estudaremos mais detalhadamente a hipersuperfície dos pares de cônicas relacionadas por triângulos. Retomamos a configuração de triângulos degenerados apresentada em 3.2.

### 4.1 Espaço de configurações

Vamos denotar por X o subconjunto de  $(\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2$  de tais configurações, ou seja

$$X := \{ (x_1, \ell_1, x_2, \ell_2) \in (\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2 \, | \, x_1 \in \ell_1 \ni x_2 \in \ell_2 \}.$$

Mostraremos que X se obtém por uma torre de fibrações. Considere  $\mathcal{U}$  o fibrado universal sobre  $\check{\mathbb{P}}^2$ , definido pela seqüência exata

$$\mathcal{U} \rightarrowtail \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}^{\oplus 3} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(1) \tag{5}$$

e  $\mathcal{V}$  o dual do quociente universal de  $\mathbb{P}^2$ , dado pela seqüência exata

$$\mathcal{V} \rightarrowtail \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \tag{6}$$

Temos a expressão para as classes de Chern de  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ ,

$$c(\mathcal{U}) = 1/(1+\check{h}) = 1-\check{h}+\check{h}^{2},$$

$$c(\mathcal{V}) = 1/(1+h) = 1-h+h^{2},$$
(7)

onde  $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$  e  $\check{h} = c_1(\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(1)).$ 

As projetivizações dos fibrados  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  coincidem:  $\mathbb{P}(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\mathcal{V}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3}) = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}}) = \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ . Trata-se da variedade de incidência ponto-reta, ou seja

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}) = \{(p,\ell) \in \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \mid p \in \ell\}$$

$$\mathbb{P}^2 \qquad \check{\mathbb{P}}^2.$$
(8)

Além disso, considere os subfibrados tautológicos de  $\pi_{\ell}^{\star}\mathcal{U}$  e  $\pi_{p}^{\star}\mathcal{V}$ , que denotamos por  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1)$  e  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(-1)$  respectivamente. Temos que  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1)$  se identifica com  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(-1)$  e  $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(-1)$  com  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(-1)$ . Todas essas relações estão descritas no diagrama de fibrados sobre  $\mathbb{P}^{2} \times \check{\mathbb{P}}^{2}$  (9).



Usando então os fibrados  $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ , a variedade X das configurações é definida como no diagrama (10).



O diagrama (10) é construído através de produtos fibrados. Assim, a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -fibração  $Y \to \check{\mathbb{P}}^2$  corresponde à escolha de dois pontos sobre uma reta dada, no caso da nossa configuração, a escolha de  $x_1$  e  $x_2$  sobre  $\ell_1$ , sendo portanto uma variedade de dimensão 4. Analogamente,  $Y' \to \mathbb{P}^2$  corresponde à escolha de duas retas passando por um ponto, aqui,  $\ell_1$  e  $\ell_2$  passando por  $x_2$  e também tem dimensão 4. X fica então definida pelo

produto fibrado entre Y e Y', sendo portanto dim X = 5.

No que segue, vamos considerar as projeções  $\pi_{x_1} : (\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2 \to \mathbb{P}^2$  e  $\pi_{x_2} : (\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2 \to \mathbb{P}^2$  correspondentes a cada ponto da configuração e  $\pi_{\ell_1} : (\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2 \to \check{\mathbb{P}}^2$  e  $\pi_{\ell_2} : (\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2 \to \check{\mathbb{P}}^2$  correspondentes às retas. Usaremos a seguinte notação:

$$h_{i} = \pi_{x_{i}}^{\star} c_{1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(1))$$

$$\check{h}_{i} = \pi_{\ell_{i}}^{\star} c_{1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(1)),$$
(11)

ou seja, as imagens recíprocas das classes hiperplanas de  $\mathbb{P}^2$  e  $\check{\mathbb{P}}^2$  correspondentes a cada ponto e reta da configuração.

A classe de X pode ser obtida como lugar dos zeros de três seções mostradas no diagrama de fibrados sobre  $(\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2$  (12). Tais seções representam as condições de incidência dos pontos nas retas.

$$\pi_{\ell_{1}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(-1)$$

$$\pi_{\ell_{1}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(1) \xrightarrow{0}{} X \times \mathbb{C}^{3} \xrightarrow{\pi_{\ell_{2}}^{\star}} \pi_{\ell_{2}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(1)$$

$$\pi_{x_{2}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2}}(-1).$$

$$(12)$$

Logo

$$[X] = (h_1 + \check{h}_1)(h_2 + \check{h}_2)(h_2 + \check{h}_1).$$
(13)

#### 4.2 Diagonal de X

Para uso futuro, vamos fazer o estudo da subvariedade  $Z \subset X$  das configurações cujos pontos e retas coincidem, ou seja,

$$Z := \{ (x_1 \in \ell_1 \ni x_2 \in \ell_2) \in X \mid x_1 = x_2, \ \ell_1 = \ell_2 \}.$$
(14)

Da definição de Z podemos observer que essa variedade é isomorfa à variedade de incidência ponto-reta e portanto dim Z = 3. Além disso, considere as variedades

$$\Delta = \{ (x_1 \in \ell_1 \ni x_2) \in Y \mid x_1 = x_2 \}$$

$$\Delta' = \{ (\ell_1 \ni x_2 \in \ell_2) \in Y' \mid \ell_1 = \ell_2 \}.$$
(15)

Ambas são também isomorfas à variedade de incidência ponto-reta e temos

$$Z = \pi_Y^\star \Delta \cap \pi_Y'^\star \Delta'.$$

onde  $\pi_Y \in \pi'_Y$  são as projeções de X sobre Y e Y' respectivamente.

Note que  $\Delta$  é um divisor de Cartier em Y; analogamente para  $\Delta' \subset Y'$ . Temos definidos os fibrados lineares  $\mathcal{O}_Y(\Delta) \in \mathcal{O}_{Y'}(\Delta')$ . Vamos exprimir a primeira classe de Chern em termos das classes hiperplanas. Para determinar  $c_1(\mathcal{O}_Y(\Delta))$ , considere as projeções  $\pi_{x_1 \in \ell_1} \in \pi_{x_2 \in \ell_1}$ . Daí temos que  $\Delta$  corresponde aos zeros da seção definida pelo diagrama de fibrados sobre  $\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \times \mathbb{P}^2$ :

$$\pi^{\star}_{x_{2}\in\ell_{1}}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1) \tag{16}$$

$$\pi^{\star}_{x_{1}\in\ell_{1}}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1) \xrightarrow{\mathcal{U}} \mathcal{U} \xrightarrow{\mathcal{U}} \pi^{\star}_{x_{1}\in\ell_{1}}Q.$$

Como  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1)$  se identifica com  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$  e usando a classe de Chern de  $\mathcal{U}$  (7, p. 27) obtemos

$$c_1(\mathcal{O}_Y(\Delta)) = h_1 + h_2 - \dot{h}_1.$$
 (17)

De modo análogo, usando as projeções  $\pi_{x_2 \in \ell_1}$ ,  $\pi_{x_2 \in \ell_2}$  e o fibrado  $\mathcal{V}$ , obtemos

$$c_1(\mathcal{O}_{Y'}(\Delta')) = \check{h}_1 + \check{h}_2 - h_2.$$
(18)

Assim, a classe de Z é dada por

$$[Z] = c_1(\mathcal{O}_Y(\Delta))c_1(\mathcal{O}_{Y'}(\Delta')) = (h_1 + h_2 - \check{h}_1)(\check{h}_1 + \check{h}_2 - h_2).$$
(19)

#### 4.3 Construindo $\mathcal{P}_3$

Agora, dada uma configuração  $(x_1 \in \ell_1 \ni x_2 \in \ell_2) \in X$ , queremos determinar cônicas  $C \in K$ , tais que o ponto  $x_1$  corresponda a um ponto de interseção, a reta  $\ell_2$  seja uma tangente comum às duas, tangenciando  $C \in x_2$ , e a reta  $\ell_1$  tangente à cônica  $K \in x_1$ . Sob essas condições, a proposição 3.3 nos garante que  $C \in K$ , desde que sejam não-singulares e tenham interseções transversais, são Poncelet relacionadas por triângulos. Nesse caso, um triângulo formado pelo bilhar de Poncelet é dado por  $(x_1, \ell_1) \mapsto (x_2, \ell_2) \mapsto (x_2, \ell_1)$ .

Observe que as condições impostas sobre a cônica externa C passar por um ponto dado e ser tangente a uma reta em um ponto dado, determinam equações lineares sobre seus coeficientes. O mesmo não ocorre com a cônica interna K, uma vez que a condição de tangência a uma reta é quadrática. Mas usando a dualidade podemos obter condições lineares também para a cônica K.

De fato, ao invés de considerarmos pares de cônicas (C, K) em  $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ , podemos olhar

para  $(C,\check{K}) \in \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$  através da aplicação racional

$$Adj: \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}^5 \tag{20}$$

que em coordenadas mapeia a matriz de uma cônica em sua matriz adjunta. O lugar de indeterminação dessa aplicação é o conjunto das retas duplas (matrizes de posto 1), a variedade de Veronese V. Quando restrito ao conjunto das cônicas não-singulares, mapeia uma cônica em sua dual: se [K] é a matriz da cônica não-singular K, a matriz de sua dual é  $[K]^{-1} = \frac{1}{\det[K]} \operatorname{adj}[K]$ . (veja a discussão sobre cônicas completas em [Har78, p. 297]).

Mais alguns fatos: realizando a explosão da variedade de Veronese em  $\mathbb{P}^5$ , obtemos  $\widetilde{\mathbb{P}}^5 := \operatorname{Bl}_V \mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ . A projeção  $\widetilde{\mathbb{P}}^5 \to \check{\mathbb{P}}^5$  é a explosão de  $\check{\mathbb{P}}^5$  em sua variedade de Veronese  $\check{V}$ . Além disso, se E e  $\check{E}$  são os divisores excepcionais das explosões de V e  $\check{V}$  respectivamente, temos que E se projeta sobre a variedade do discriminante  $\check{D}$  das cônicas em  $\check{\mathbb{P}}^5$  e, simetricamente,  $\check{E}$  se projeta em  $D \subset \mathbb{P}^5$ .

Desse modo, considerando a configuração dual  $(\check{\ell}_2 \in \check{x}_2 \ni \check{\ell}_1 \in \check{x}_1)$  temos de  $\check{K}$  deve passar pelo ponto  $\check{\ell}_2$  e ser tangente à reta  $\check{x}_1$  em  $\check{\ell}_1$ . Agora, a cônica  $\check{K}$  satisfaz condições lineares análogas às da cônica externa C. Em termos práticos, do estudo das cônicas externas segue o das cônicas internas através da dualidade no plano projetivo  $\mathbb{P}^2$ .

#### 4.4 Os fibrados de cônicas externas/internas

Podemos assim encontrar fibrados vetoriais  $\mathcal{E} \to X$  e  $\mathcal{I} \to X$  cuja fibra sobre um ponto de X é o espaço vetorial das cônicas externas e internas respectivamente da configuração associada. Mais precisamente, será necessário mudar a base X, através de uma explosão, para garantir que tenhamos fibrados vetoriais. O que vamos obter a princípio com essa construção é uma variedade  $\overline{\mathcal{P}}_3$ , que se relaciona com a variedade original  $\mathcal{P}_3$ pela aplicação Adj descrita acima. Vamos estudar isoladamente cada uma das condições impostas sobre as cônicas externas.

#### • Passar por um ponto

Seja  $\mathcal{A} \to \mathbb{P}^2$  o fibrado vetorial no qual a fibra sobre um ponto  $x \in \mathbb{P}^2$  é o conjunto das equações quadráticas representando cônicas que contêm o ponto, sendo portanto de posto 5. Considere o subfibrado tautológico sobre  $\mathbb{P}^2$ , ou seja,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^3$ . Dualizando e tomando a 2<sup>a</sup> potência simétrica obtemos  $S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$ . Na fibra sobre  $x \in \mathbb{P}^2$ , temos que o núcleo da aplicação induzida é justamente o conjunto das formas bilineares simétricas que se anulam em x, ou seja, a fibra  $\mathcal{A}_x$ . Assim obtemos a seqüência exata que determina o fibrado vetorial  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} \longrightarrow S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2). \tag{21}$$

#### • Tangenciar reta em um ponto

Agora seja  $\mathcal{B} \to \mathbb{P}(\mathcal{V})$  o fibrado vetorial tal que a fibra sobre  $(x \in \ell)$  são as equações quadráticas que representam cônicas tangentes à reta  $\ell$  em x. Para determinar  $\mathcal{B}$ , vamos usar basicamente essa identificação: a reta  $\ell$  ser tangente a cônica C no ponto x significa que a restrição de C a  $\ell$  é uma quádrica singular sobre  $\ell \cong \mathbb{P}^1$  correspondente ao ponto xcontado com duplicidade (ver figura ao lado).

Observe que o dual do fibrado universal  $\mathcal{U}$  (veja 5, p. 26) corresponde, na fibra sobre  $\ell \in \check{\mathbb{P}}^2$ , às formas lineares sobre (ou restritas a) a reta  $\ell$ . Logo,  $S_2\mathcal{U}^{\vee}$  corresponde, em fibras, a formas bilineares simétricas sobre retas de  $\mathbb{P}^2$ , ou mais grosseiramente, quádricas em um  $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$  variável.

Seja  $\pi_{\ell} : \mathbb{P}(\mathcal{U}) \to \check{\mathbb{P}}^2$  o fibrado projetivo associado a  $\mathcal{U}$ , (veja 8, p. 27). Cada ponto de  $\mathbb{P}(\mathcal{U})$  corresponde à escolha de uma reta com um ponto marcado. A restrição de uma forma bilinear simétrica  $b \in S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2}^{\oplus 3}$  a uma reta (variável) de  $\mathbb{P}^2$  é dada pelo homomorfismo  $\rho : S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2}^{\oplus 3} \xrightarrow{\vee} \pi_{\ell}^* S_2 \mathcal{U}^{\vee}$ , definindo uma forma bilinear simétrica  $\bar{b} \in \pi_{\ell}^* S_2 \mathcal{U}^{\vee}$ . Para exemplificar, tome  $\ell = \mathcal{Z}(X)$ . Então, na fibra sobre  $\ell$ , temos  $\bar{b} = b(0, \bar{Y}, \bar{Z})$ . Podemos verificar daí que o núcleo  $\Sigma_1$  de  $\rho$  corresponde a formas bilineares simétricas em  $S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2}^{\oplus 3}$ , nulas sobre uma reta variável.

A avaliação de uma forma bilinear simétrica no ponto dado sobre a reta pode ser obtida do seguinte modo: com a identificação  $u \cdot v \mapsto u \otimes v + v \otimes u$  temos  $S_2 \mathcal{U}^{\vee} \to \mathcal{U}^{\vee} \otimes \mathcal{U}^{\vee}$ . Além disso, a partir da seqüência tautológica  $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(-1) \to \pi_{\ell}^* \mathcal{U}$  derivamos  $\pi_{\ell}^* \mathcal{U}^{\vee} \otimes \pi_{\ell}^* \mathcal{U}^{\vee} \twoheadrightarrow \pi_{\ell}^* \mathcal{U}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(1)$ . Daí definimos o mapa

$$\upsilon: \pi_{\ell}^{\star} S_2 \mathcal{U}^{\vee} \twoheadrightarrow \pi_{\ell}^{\star} \mathcal{U}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(1)$$

O mapa v, na fibra sobre  $(x \in \ell)$ , associa a  $\overline{b} \in \pi_{\ell}^{\star} S_2 \mathcal{U}^{\vee}$  um homomorfismo  $\overline{\overline{b}}$  definido por

onde estamos usando a identificação  $Hom(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \mathcal{F}^{\vee} \otimes \mathcal{G}.$ 

Para exemplificar, tome x = (0:0:1) e  $\ell = \mathcal{Z}(X)$ . Assim, a restrição de uma forma quadrática b à reta  $\ell$  se escreve  $\overline{b} = \alpha \overline{Y}^2 + \beta \overline{Y} \overline{Z} + \gamma \overline{Z}^2$  e

$$\overline{\overline{b}} = 2\alpha \overline{Y} \otimes \overline{Y}(x) + \beta \overline{Y} \otimes \overline{Z}(x) + \beta \overline{Z} \otimes \overline{Y}(x) + 2\gamma \overline{Z} \otimes \overline{Z}(x) = = \beta \overline{Y} + 2\gamma \overline{Z}.$$

Vemos que  $\overline{\overline{b}} = 0 \iff \beta = \gamma = 0 \iff x \text{ é ponto singular de } \overline{b} = \rho(b).$ 

Com essa interpretação do mapa v, podemos verificar que seu núcleo é o subfibrado  $\Sigma_2$  de  $\pi_\ell^\star S_2 \mathcal{U}^\vee$  das formas quadráticas singulares no ponto marcado. Temos, por construção, a seqüência exata

$$\Sigma_2 \longrightarrow \pi_\ell^* S_2 \mathcal{U}^{\vee} \xrightarrow{\upsilon} \pi_\ell^* \mathcal{U}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}}(1).$$
<sup>(22)</sup>

Finalmente,  $\mathcal{B}$  pode ser tomado como  $\rho^{-1}(\Sigma_2)$ . Temos assim o diagrama de fibrados sobre  $\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2$ 

onde  $\mathcal{B}$  é determinado por exemplo, pela seqüência exata horizontal do meio. Anotemos o formulário de classes de Chern e Segre, (veja 5, p. 26).

$$c_{1}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(1)) = h;$$

$$c(\mathcal{B}) = 1 - 2h - \check{h} + 3h^{2} + 3h\check{h} - 6h^{2}\check{h};$$

$$s(\mathcal{B}) = 1 + 2h + \check{h} + h^{2} + h\check{h} + \check{h}^{2},$$
(24)

#### 4.4.1 Cônicas Externas

A partir da variedade X que parametriza as configurações  $(x_1 \in \ell_1 \ni x_2 \in \ell_2)$  (veja figura 4) consideremos as projeções



onde  $\pi_{x_1}$  é a projeção correspondente ao ponto  $x_1$  da configuração e  $\pi_{(x_2 \in \ell_2)}$  corresponde a incidência  $(x_2 \in \ell_2)$ . Como nossa cônica externa deve passar pelo ponto  $x_1$  e ser tangente à reta  $\ell_2$  em  $x_2$ , consideramos os fibrados  $\mathcal{A} \to \mathbb{P}^2$  e  $\mathcal{B} \to \mathbb{P}(\mathcal{U})$  como definidos na seção anterior. Passando às imagens recíprocas pelas projeções  $\pi_{x_1}$  e  $\pi_{(x_2 \in \ell_2)}$ , estudamos o diagrama

Juntando as seqüências exatas (21) e (23) obtemos o diagrama de fibrados sobre  $(\mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2)^2$ abaixo

com seqüências verticais exatas. Os núcleos dos mapas  $\varphi \in \varepsilon \oplus v$  são iguais a  $\pi_{x_1}^* \mathcal{A} \cap \pi_{x_2 \in \ell_2}^* \mathcal{B}$ . Caçando no diagrama, deduzimos que, para cada  $x \in X$  o homomorfismo  $(\varepsilon \oplus v)_x$  é sobrejetivo na fibra se e só se  $\varphi_x$  o for. A imagem do mapa

$$\varphi \otimes 1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)} : \pi_{x_2 \in \ell_2}^{\star} \mathcal{B} \otimes \pi_{x_1}^{\star} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \longrightarrow I(2) \otimes \pi_{x_1}^{\star} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) = I \subset \mathcal{O}_X$$

é o ideal I do lugar onde tanto  $\varphi$  como  $\varepsilon \oplus \upsilon$  não são sobrejetivos. Veremos que se trata do lugar em que coincidem tanto os pontos  $x_1$ ,  $x_2$  como as retas  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ . Observemos que  $\pi_{x_1}^* \mathcal{A} \cap \pi_{x_2 \in \ell_2}^* \mathcal{B} = \operatorname{Nuc} \varphi = \operatorname{Nuc} (\varepsilon \oplus \varphi)$  é um subfeixe de  $S_2 \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)^2}^{\oplus 3}$ , mas não um subfibrado, como se perceberá da análise local que passamos a fazer. Para tanto, vamos definir a seguinte parametrização de um aberto do espaço de configurações  $(x_1 \in \ell_1 \ni x_2 \in \ell_2) \in X$ :

#### •Coordenadas locais

O ponto  $x_1$  pode ser parametrizado por

$$(s,t) \mapsto (s:t:1)$$
 (coordenadas em  $\mathbb{P}^2$ )

e a reta  $\ell_1$  passando por esse ponto por

$$u \mapsto (1:u:-(s+tu))$$
 (coordenadas em  $\mathbb{P}^2$ ).

Por sua vez, o ponto  $x_2 \in \ell_1$  é dado por

$$v \mapsto (s - uv : t + v : 1)$$

e a reta  $\ell_2 \ni x_2$  por

$$w \mapsto (1: u + w: -(s + tu) - w(t + v)).$$

Em suma, s, t, u, v, w proporcionam coordenadas locais no espaço X.

Observe que v = 0 representa geometricamente que os pontos  $x_1, x_2 \in \ell_1$  coincidem; dualmente, w = 0 representa  $\ell_1 = \ell_2$ , retas contendo  $x_2$ .

Seja C a cônica de equação  $a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XZ + 2a_{23}YZ$ . Para que essa seja a cônica externa em nossa configuração ela deve satisfazer as condições de passar pelo ponto  $x_1$  e ser tangente à reta  $\ell_2$  no ponto  $x_2$ . Como essas condições nos dão três equações lineares nos coeficientes da equação da cônica e o espaço vetorial das equações de cônicas tem dimensão 6, temos que o espaço das cônicas externas da nossa configuração tem dimensão maior ou igual a 3. Queremos encontrar uma base para o espaço das cônicas externas, analisando como varia a dimensão desse espaço.

Explicitamente, as condições sobre a cônica C definem um sistema linear cuja matriz de coeficientes é

$$\begin{bmatrix} s^2 & t^2 & 1 & st & s & t \\ (s-uv)^2 & (t+v)^2 & 1 & (s-uv)(t+v) & s-uv & t+v \\ -2(s-uv)(u+w) & 2t+2v & 0 & -tu-2uv - tw - vw + s & -u-w & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz desse sistema linear tem posto mínimo 2, já que existe menor  $2 \times 2$  sempre não-nulo, por exemplo,  $\begin{vmatrix} 1 & t+v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ .

A matriz corresponde à trivialização local de  $\varepsilon \oplus v$ , cf. (26).

Seja  $I_3$  o ideal de  $\mathbb{C}[s, t, u, v, w]$  gerado pelos menores  $3 \times 3$  da matriz de coeficientes do sistema. Esse ideal é um ideal de Fitting (veja [Eis96, p. 492]), logo invariante por mudanças de bases. Para simplificar seu cálculo, podemos primeiramente escalonar a matriz do sistema. Assim obtemos

$$\begin{bmatrix} * & * & 1 & * & * & 0\\ 2svw - u^2v^2 - 2uv^2w & -v^2 & 0 & uv^2 + tvw + v^2w & vw & 0\\ * & * & 0 & * & * & 1 \end{bmatrix},$$

da qual concluímos que  $I_3 = \langle v^2, vw \rangle = \langle v \rangle \langle v, w \rangle$ . Depois de dividir a segunda linha da matriz por v, vemos que seu posto cai ao mínimo se, e somente se, v = 0 = w. Geometricamente, essa condição corresponde ao caso em que os pontos  $x_1$  e  $x_2$  coincidem, assim como as retas  $\ell_1 \in \ell_2$ . (ver figura 4).

Para obter soluções para esse sistema, podemos primeiramente eliminar o fator v das entradas da segunda linha da matriz de coeficientes. Isto ilustra o fato geral de que complementar do aberto de regularidade de um mapa racional cujo domínio é não singular (no caso, X) e contradomínio projetivo (aqui a grassmanniana de subespaços de dimensão 3 de  $S_2 \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)^2}^{\oplus 3}$ ) tem codimensão  $\geq 2$ .

A matriz de coeficientes é

$$\begin{bmatrix} * & * & 1 & * & * & 0 \\ 2sw - u^2v - 2uvw & -v & 0 & uv + tw + vw & w & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 1 \end{bmatrix},$$

Considerando agora o ideal  $\langle v, w \rangle$ , fazemos v gerador principal mediante explosão, escrevendo  $w = \tilde{w}v$ . Assim a segunda linha da matriz de coeficientes é novamente divisível por v. Operando a divisão por -v obtemos

$$\begin{bmatrix} * & * & 1 & * & * & 0 \\ u^2 + 2uv\tilde{w} - 2s\tilde{w} & 1 & 0 & -u - t\tilde{w} - v\tilde{w} & -\tilde{w} & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 1 \end{bmatrix},$$

que agora possui posto constante, máximo, exatamente 3. Isto fornece um subfibrado de  $S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}}$  × X de posto 3, cujas fibras coincidem com as de Nuc  $\varphi$  sobre um aberto denso.

O que fizemos localmente com esse processo corresponde a realizar a explosão desse aberto afim de X ao longo da variedade  $\mathcal{V}(v, w)$ . Globalmente obtemos a explosão  $\beta$  :  $\widetilde{X} = \operatorname{Bl}_Z X \to X$ , onde Z, o centro de explosão, é a subvariedade de X das configurações onde os pontos e retas coincidem ((veja 14, p. 28)).

A variedade  $\widetilde{X}$  é tal que a imagem de  $\beta^{\star}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$  em  $S_2 \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^{\oplus 3^{\vee}} = S_2 \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)^2}^{\oplus 3^{\vee}} \times X$ coincide, sobre um aberto denso, com o fibrado vetorial de posto 3 das cônicas externas,  $\mathcal{E} \longrightarrow S_2 \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^{\oplus 3^{\vee}}$ ,

$$\beta^{\star}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow S_2 \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^{\oplus 3^{\vee}} \longrightarrow \pi_{x_1}^{\star} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \oplus \pi_{x_2 \in \ell_2}^{\star} \mathcal{Q}.$$

Sobre  $\widetilde{X}$ , omitindo a imagem recíproca por  $\beta$ , temos o diagrama de homomorfismos



onde  $\mathcal{E} = \operatorname{Nuc} \beta^* \varphi$  é localmente livre de posto 3. O ideal  $\widetilde{I}$ , transformado total de I, é igual a  $\pi_Y^* \mathcal{O}_Y(-\Delta) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E)$  onde  $\pi_Y : X \to Y$  é a projeção de X em Y; a hipersuperfície  $\Delta$  é definida em (15, p. 28) e, por fim,  $E \subset \widetilde{X}$  é o divisor excepcional da explosão  $\beta$ .

Assim, temos determinada a classe de Segre total de  $\mathcal{E}$ ,

$$s(\mathcal{E}) = s(B)c(\pi_Y^*\mathcal{O}_Y(-\Delta) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)).$$

Mas já conhecemos  $s(\mathcal{B})$ , por (24, p. 32):

$$s(\mathcal{B}) = 1 + 2h_2 + \check{h}_2 + h_2^2 + h_2\check{h}_2 + \check{h}_2^2$$

onde aplicamos a notação explicada em (11, p. 28). Também, escrevendo

$$e := c_1(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)),$$

classe do divisor excepcional, e usando (17, p. 29) calculamos

$$c(\pi_Y^{\star}\mathcal{O}_Y(-\Delta)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))=1-h_2+h_1+\check{h}_1-e.$$

#### 4.4.2 Cônicas Internas

Para as cônicas internas, procedemos de modo análogo. Sejam  $\overline{\mathcal{A}} \to \check{\mathbb{P}}^2$  o fibrado das cônicas de  $\check{\mathbb{P}}^2$  passando por um ponto fixado e  $\overline{\mathcal{B}} \to \mathbb{P}(V)$  o fibrado das cônicas em  $\check{\mathbb{P}}^2$  tangentes a uma reta dada em um ponto dado. Considerando as projeções  $\pi_{\ell_2} : X \to \check{\mathbb{P}}^2$  e  $\pi_{x_1 \in \ell_1} : X \to \mathbb{P}(V)$  obtemos diagramas semelhantes ao caso de cônicas externas (veja 25 e 26).

Se  $\psi : \pi_{x_1 \in \ell_1}^{\star} \overline{\mathcal{B}} \to \pi_{\ell_2}^{\star} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$  é o mapa cujo núcleo é  $\pi_{\ell_2}^{\star} \overline{\mathcal{A}} \cap \pi_{x_1 \in \ell_1}^{\star} \overline{\mathcal{B}}$ , considere o mapa induzido  $\widetilde{\psi} : \pi_{x_1 \in \ell_1}^{\star} \overline{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow J(2)$ , onde J(2) é o feixe imagem de  $\psi$ . O feixe de ideais J, lugar onde  $\psi$  não é sobrejetor, é obtido tensorizando o mapa  $\widetilde{\psi}$  por  $\pi_{\ell_2}^{\star} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ , como anteriormente:

$$\pi_{x_1\in\ell_1}^{\star}\overline{\mathcal{B}}\otimes\pi_{\ell_2}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\twoheadrightarrow J(2)\otimes\pi_{\ell_2}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)=J\subset\mathcal{O}_X.$$

Novamente, podemos verificar por contas locais que J é o lugar em que coincidem os pontos e retas da configuração. A diferença está que, localmente, o ideal de Fitting é dado por  $\langle w \rangle \langle v, w \rangle$ , ou seja, temos um fator w ao invés do fator v obtido no caso de cônicas externas. Reportando-nos à parametrização da seção anterior, vemos que a equação w = 0corresponde à condição  $\ell_1 = \ell_2 \ni x_2$ .

Assim, precisamos novamente realizar a explosão  $\beta : \widetilde{X} = \operatorname{Bl}_Z X \to X$ , donde obtemos o subfibrado vetorial de posto 3 das cônicas internas,  $\mathcal{I} \longrightarrow S_2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3^{\vee}}$ . Por fim, do mapa  $\beta^* \varphi$  obtemos a seqüência exata

$$\mathcal{I} \rightarrowtail \overline{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow \pi_{Y'}^{\star} \mathcal{O}_{Y'}(-\Delta') \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2),$$

onde  $\pi'_Y : X \to Y'$  é a projeção de X em Y'; a hipersuperfície  $\Delta'$  é definida em (15, p. 28).

Podemos agora determinar também a classe de Segre para  $\mathcal{I}$ .

Dessa forma, determinamos fibrados vetoriais  $\mathcal{E} \to \widetilde{X} \in \mathcal{I} \to \widetilde{X}$  como descritos no início da seção. Considerando os fibrados projetivos associados temos o diagrama de fibrações



e portanto

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\widetilde{X}} \mathbb{P}(\mathcal{I}) \subseteq \widetilde{X} \times \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$$

é a variedade dos pares de cônicas que satisfazem configurações de  $\widetilde{X}$ .

Em  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_{\widetilde{X}} \mathbb{P}(\mathcal{I})$  consideramos a projeção sobre  $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5$ . Através da proposição (3.3), podemos concluir que a restrição dessa projeção ao aberto dos pares de cônicas não-singulares com interseção transversa tem como imagem a variedade  $\overline{\mathcal{P}}_3$ , relacionada com a variedade  $\mathcal{P}_3$  das cônicas Poncelet relacionadas por triângulos através do mapa racional Adj (20, p. 30).

#### 4.5 Bigrau de $\mathcal{P}_3$

Com as construções dos fibrados vetoriais das cônicas externas e internas feitas na seção anterior, podemos determinar explicitamente o bigrau da variedade das cônicas Poncelet relacionadas por triângulos  $\overline{\mathcal{P}_3}$ , e conseqüentemente, o bigrau de  $\mathcal{P}_3$ .

Para obter a relação precisa entre os bigraus das duas variedades, lembramos da explosão da variedade de Veronese em  $\mathbb{P}^5$ , discutida no início da seção (4.3, p. 29). Definimos  $H_i := c_i(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1))$  as primeiras classes de Chern das imagens recíprocas do fibrado  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$ pelas projeções  $\pi_1 \in \pi_2$  de  $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ . Do mesmo modo, definimos  $\check{H}_2$  a partir da imagem recíproca de  $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^5}(1)$  pela projeção  $\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5 \to \check{\mathbb{P}}^5$ . Contas locais nos mostram a relação entre as classes  $H_2 \in H_2$ :

$$2H_2 = \check{H}_2 + \check{E}_2$$

Além disso, pode-se inferir de (3) que a variedade  $\mathcal{P}_3$  não contém a variedade de Veronese e que  $[\mathcal{P}_3] = 2H_1 + 4H_2$  no grupo de Chow de  $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ . Passando a  $\mathbb{P}^5 \times \widetilde{\mathbb{P}}^5$ , podemos escrever  $[\mathcal{P}_3] = 2H_1 + 2(\check{H}_2 + \check{E})$  que, por fim, se projeta em

$$\left[\overline{\mathcal{P}}_3\right] = 2H_1 + 2\check{H}_2$$

Observe que, como discutido no início da seção (4.3, p. 29), o bigrau de  $\overline{\mathcal{P}_3}$  deveria ser simétrico, digamos (a, a). Mostraremos diretamente que a = 2, empregando as informações coletadas sobre os fibrados  $\mathcal{E}, \mathcal{I}$ .

Com a notação acima, o ciclo associado à hipersuperfície  $\overline{\mathcal{P}}_3$  é dado por

$$[\overline{\mathcal{P}}_3] = aH_1 + a\check{H}_2 \in \mathcal{A}_9(\mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5)$$

e portanto a pode ser escrito, por exemplo, como

$$a = \int_{\overline{\mathcal{P}}_3} H_1^4 \check{H}_2^5.$$

Para calcular a vamos então aplicar algumas propriedades fundamentais da teoria de interseção. Citamos como referência [Vai06].

Seja  $\pi$  a projeção definida no final da seção anterior, tal que Im  $\pi = \overline{\mathcal{P}_3}$ . Observe que essa projeção é um mapa 4 : 1, uma vez que uma configuração em  $\widetilde{X}$  envolve apenas um ponto de interseção entre as cônicas externa e interna e estamos supondo que nossas cônicas têm interseção transversa, ou seja, há 4 pontos distintos de interseção. Assim, temos a torre de fibrações



Então, desenvolvendo a expressão para a:

$$4a = 4 \int_{\overline{\mathcal{P}}_{3}} c_{1}(\pi_{1}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{5}}(1))^{4} c_{1}(\pi_{2}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{5}}(1))^{5} = = 4 \int_{\overline{\mathcal{P}}_{3}} \pi_{*}[c_{1}(\pi^{\star}\pi_{1}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{5}}(1))^{4} c_{1}(\pi^{\star}\pi_{2}^{\star}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{5}}(1))^{5}] = = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})\times_{\tilde{X}}} c_{1}(\pi_{\mathcal{E}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^{4} c_{1}(\pi_{\mathcal{I}}^{\star}\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(1))^{5}.$$

Tomando imagem direta, vem

$$4a = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \pi_{\mathcal{E}^{\star}} [c_1(\pi_{\mathcal{E}}^{\star} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^4 c_1(\pi_{\mathcal{I}}^{\star} \mathcal{O}_{\mathcal{I}}(1))^5] =$$

$$= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^4 [\pi_{\mathcal{E}^{\star}} \pi_{\mathcal{I}}^{\star} (c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(1))^5)] =$$

$$= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^4 [p_{\mathcal{E}}^{\star} p_{\mathcal{I}^{\star}} (c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(1))^5)] =$$

$$= \int_{\widetilde{X}} (p_{\mathcal{E}^{\star}} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^4) (p_{\mathcal{I}^{\star}} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{I}}(1))^5) =$$

$$= \int_{\widetilde{X}} s_2(\mathcal{E}) s_3(\mathcal{I}).$$

Agora devemos calcular as sucessivas imagens diretas do ciclo  $s_2(\mathcal{E})s_3(\mathcal{I})$ , tarefa facilitada utilizando um software matemático como o Maple (veja os detalhes na §4.6). Iniciamos com  $\beta : \widetilde{X} \to X$ , lembrando que  $E = \mathbb{P}(\mathcal{N})$  é a projetivização do fibrado normal de Z em X.

Usando as expressões obtidas para as classes de Segre de  $\mathcal{E} \in \mathcal{I}$ , indicadas nas seções 4.4.1, p. 33 e 4.4.2, p. 36, podemos escrever

$$s_2(\mathcal{E})s_3(\mathcal{I}) = \sum_{i=0}^2 f_i(h_1, h_2, \check{h}_1, \check{h}_2)e^i$$

onde os  $f_i$ 's são polinômios de grau total 5 - i. Considere agora a inclusão  $j : E \hookrightarrow \widetilde{X}$ . Pela fórmula de auto-interseção temos

$$e^{i} = e^{i-1} \cap [E]_{\widetilde{X}} = j_{*}(c_{1}(j^{*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E))^{i-1} \cap [E]_{E}) = j_{*}(j^{*}e^{i-1})$$

onde  $j^*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1)$ . Daí, pela definição da classe de Segre para o fibrado normal  $\mathcal{N}$ , temos

$$\int_{\widetilde{X}} s_2(\mathcal{E}) s_3(\mathcal{I}) = \int_X f_0 + \int_Z -f_2.$$

Para finalizar usamos as classes de  $X \in Z$  como calculadas em (13, p. 28) e (19, p. 29),

ou seja,

$$\int_X f_0 + \int_Z -f_2 = (f_0 - f_2 \cap [Z]) \cap [X] = 8$$

e portanto

$$a = \frac{1}{4} \int_{\widetilde{X}} s_2(\mathcal{E}) s_3(\mathcal{I}) = 2.$$

Assim, temos que o bigrau de  $\overline{\mathcal{P}}_3$  é (2,2) confirmando que o bigrau de  $\mathcal{P}_3$  é (2,4).

#### 4.6 Cálculos em MAPLE

```
#cálculo da classe de Segre de E: sE = sB*cL
sB := 1 + (2*h2+hd2)*T+(h2^2+h2*hd2+hd2^2)*T^2;
cL := 1 + (-e - h2 - h1 + hd1 + 2*h1)*T;
#simplificador
si:=proc(f)sort(collect(expand(
mtaylor(mtaylor(mtaylor(mtaylor(
f,h1,3),h2,3),hd1,3),hd2,3)),T))
end;
sE := si(sB*cL);
s2E:= expand(coeftayl(sE,T=0,2));
s2E := -h2^2-2*h2*e+2*h2*h1+2*h2*hd1+hd2^2-hd2*e+hd2*h1+hd2*hd1
#classe de Segre de I ("dual" de E): sI = sBd*cLd
sBd := 1 + (2*hd1+h1)*T+(hd1^2+hd1*h1+h1^2)*T^2;
cLd := 1 + (-e - hd2 - hd1 + h2 + 2*hd2)*T;
sI := mtaylor(sBd*cLd,T,6);
s3I:= expand(coeftayl(sI,T=0,3));
#Cálculo de \int_(~X) (s2e*s3I)
C:=si(s2E*s3I);
#Coeficientes de C como polinômio em e = classe do
#divisor excepcional --- C = f0 + f1*e + f2*e^2
f0:=expand(coeftayl(C,e=0,0)):
f2:=expand(coeftayl(C,e=0,2)):
f3:=expand(coeftayl(C,e=0,3));
#Cálculo de \int_Z (-f2)
degZ:= -f2;
#Classe do centro de explosão Z = diag F
cZ:=(h2+h1-hd1)*(hd2+hd1-h1);
#Classe de X em (P2xP2dual)^2
cX:=(h1+hd1)*(h2+hd2)*(h2+hd1);
#Cálculo de \int_X (f0-f2*Z)
```

```
degX:=si(f0+degZ*cZ);
#Cáculo final do grau
deg:=si(degX*cX);
#deg := 8*h2^2*hd2^2*h1^2*hd1^2
coeftayl(deg,[h1,h2,hd1,hd2]=[0,0,0,0],[2,2,2,2]);
#8
```

## 5 Considerações finais: Bilhar de Poncelet e Criptografia?

Tratamos aqui do problema de Poncelet no plano projetivo complexo, analisando condições sobre a ordem do bilhar e tratando os primeiros casos. Porém, frente ao atual interesse em curvas elípticas para aplicações em criptografia, também se torna interessante o estudo do bilhar de Poncelet sobre corpos finitos. Para esse propósito, a construção de pares de cônicas n-Poncelet relacionadas para um dado n, preferencialmente para n grande, é a questão de maior relevância. Isso se justifica no fato de que a segurança dos sistemas criptográficos baseados no problema do logaritmo discreto, isto é, determinar ordem de elementos de um grupo, está na escolha de elementos de ordem alta em um grupo (ver [Sma99]). O estudo de métodos para a construção de pares de cônicas Poncelet relacionadas poderia então levar a implementações alternativas de sistemas criptográficos em curvas elípticas.

## Referências

- [BR87] H. Bos and C. Kers & F. Oort & D. Raven. Poncelet's Closure Theorem. Expo. Math. 5, 289-364, 1987. 1
- [Dol06] I. Dolgachev. Topics in Classical Algebraic Geometry part I. 2006. 1, 2.1, 2.4, 2.4, 3.2
- [Eis96] D. Eisenbud. Commutive Algebra with a view toward algebraic geometry, volume 150 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1996. 4.4.1
- [Eva98] Kátia Maria Evangelista. *n-ágonos de Poncelet.* mestrado UFPE, 1998. 2.3, 2.3
- [Ful69] W. Fulton. Algebraic curves: An Introduction to Algebraic Geometry. W.A Benjamin, 1969. 3.5
- [Har77] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Springer-Verlarg, 1977. 2.3
- [Har78] P. Griffiths & J. Harris. On Cayley's Explicit Solution to Poncelet's Porism. Enseign. Math. 24, 31-40, 1978. 1, 2.1, 2.4, 4.3
- [Pon62] J.-V. Poncelet. Applications d'Analyse et de Géométrie, volume 1. Imprimerie de Mallet-Bachelier, 1862. 1, 2.1
- [Sha] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry* 1, volume 1. Springer-Verlag. 2.3
- [Sma99] I. Blake & G. Seroussi & N. Smart. Elliptic Curves in Crypthography. Cambridge University Press, 1999. 5
- [Vai06] I. Vainsencher. Characteristic classes in algebraic geometry. 2006. 4.5