

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

A Transição de Fase para Modelos de Percolação de Bootstrap

Cláudia Raquel Martins Corrêa

Orientador: Rémy Sanchis

Abril de 2008

Sumário

Capítulo 1. Introdução	5
Capítulo 2. Percolação de Bootstrap	7
Capítulo 3. O argumento de Straley	15
Capítulo 4. O Modelo Polarizado	19
Capítulo 5. Percolação de Bootstrap em volume finito	29
Capítulo 6. O expoente crítico ν	39
Capítulo 7. Apêndice	49
1. A σ -álgebra gerada pelos cilindros	49
2. Ergodicidade da medida	50
3. Demonstrações dos lemas geométricos	51
4. Alguns lemas técnicos	53
5. Alguns Resultados Heurísticos	54
Referências Bibliográficas	57

CAPÍTULO 1

Introdução

Os modelos de Percolação de Bootstrap são modelos de percolação de sítio dinâmicos que surgiram a partir da relação entre alguns modelos da mecânica estatística (Modelos de Ising e Dinâmica de Glauber) e a percolação. A dinâmica desses modelos tem início a partir de uma configuração de sítios vazios ou ocupados da rede hipercúbica d -dimensional onde os sítios ocupados são distribuídos de acordo com a medida produto de Bernoulli com parâmetro p . As atualizações são realizadas em unidades de tempo discreto da seguinte forma: os sítios ocupados permanecem ocupados e os vazios se tornam ocupados de acordo com a configuração de seus vizinhos. No modelo que estudaremos, um sítio se torna ocupado quando pelo menos q de seus vizinhos estão ocupados. No próximo capítulo definiremos de maneira formal esses modelos.

Uma das primeiras questões levantadas é a determinação do comportamento crítico e a análise da evolução desses modelos com a mudança de valores do parâmetro p . Mais precisamente, busca-se determinar a densidade inicial a partir da qual todos os sítios da rede hipercúbica d -dimensional se tornam, em algum momento, ocupados. Uma das principais ferramentas que usaremos para analisar este fenômeno é um procedimento de renormalização, através do qual comparamos diferentes valores de parâmetros quando modificamos as escalas de tempo e tamanho linear da rede. Denotaremos esta densidade crítica por p_c . Em um período em que não havia resultados rigorosos sobre esses modelos, foram realizadas simulações na tentativa de determinar p_c . Para um apanhado histórico dessas simulações, ver [1, 10].

Naturalmente, apesar do sistema ser infinito, simulações só podem ser realizadas em sistemas finitos. Considere um cubo de tamanho linear L e seja p_{50}^L a mais baixa concentração inicial tal que o cubo é inteiramente ocupado em pelo menos metade das simulações. A princípio, p_{50}^L tende a p_c quando L tende a infinito, ou seja, $p_{50}^L - p_c = F(L) = o(1)$. Deve-se, então, fazer uma hipótese de como é a função $F(L)$ (em inglês, *finite size scaling*). Baseando-se na escala do tamanho finito utilizada para transições de fase de segunda ordem em sistemas térmicos, assumia-se que

$$(1) \quad p_{50}^L - p_c \approx L^{-1/\nu}$$

onde ν é o expoente crítico do comprimento de correlação. Essa hipótese conduziu a $p_c = 0,035 \pm 0,005$ para $d = 2$, ver [2].

Contrariando os resultados obtidos nas simulações, Van Enter mostrou em [9] que $p_c = 0$ para $q = 2$ em qualquer dimensão, usando um simples argumento de contorno devido a Straley. Não é difícil ver que $p_c = 1$ quando $q > d$, o que torna o modelo particularmente interessante quando $q = d$, e, em [12], Roberto H. Schonmann provou

que, nesse caso, $p_c = 0$. As demonstrações desses resultados serão apresentadas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

Esses resultados mostram que a hipótese feita em (1) está errada. Aizenmann e Lobowitz, em [3], chegaram à escala correta provando que

$$(p_{50}^L - p_c)^{1/(d-1)} = \lambda / \ln L$$

para $q = 2$ em \mathbb{Z}^d . Além da prova deste resultado, apresentaremos no Capítulo 5 cotas uniformes para λ .

Como veremos no Capítulo 2, esse problema está relacionado ao de determinar a probabilidade da origem estar vazia no instante t . Em [12], Schonmann mostrou que essa probabilidade decai exponencialmente com taxa γ . O Capítulo 6 deste trabalho será dedicado ao estudo de γ , no sentido de analisar como ela se comporta quando p tende ao ponto crítico. Mostraremos que γ satisfaz a uma lei de potência

$$\gamma(p) \approx (p - p_c)^\nu$$

onde ν é denominado de expoente crítico. Estudaremos, então, os resultados de Andjel, Mountford e Schonmann obtidos em [5], onde eles determinam o valor exato desse expoente crítico. Cabe ressaltar que, em geral, é difícil determinar sequer a existência de expoentes críticos quanto mais determinar exatamente seu valor.

CAPÍTULO 2

Percolação de Bootstrap

Os modelos estudados nesta dissertação são modelos de percolação de sítios que evoluem com uma dinâmica discreta baseada em regras determinísticas locais. Eles serão definidos na rede hipercúbica $\mathbb{Z}^d = \{x : x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; x_i \in \mathbb{Z}\}$ onde \mathbb{Z} é o conjunto dos inteiros e d é a dimensão do espaço.

Definimos a rede hipercúbica d -dimensional como sendo o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, onde as arestas \mathbb{E}^d são o conjunto dos pares não-ordenados $\{x, y\}$ de \mathbb{Z}^d tais que $\|x - y\| = 1$. Aqui $\|\cdot\|$ é a norma da soma em \mathbb{Z}^d definida por $\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_d|$. Denotaremos, por simplicidade, a rede d -dimensional por \mathbb{Z}^d e chamaremos os vértices desse grafo de *sítios* e as arestas de *elos*. Assim diremos que um sítio s_1 é vizinho de um sítio s_2 se $\|s_1 - s_2\| = 1$. Cada sítio $s \in \mathbb{Z}^d$ possui $2d$ vizinhos. Para cada sítio s de \mathbb{Z}^d associaremos a cada instante de tempo $t \in \mathbb{N}$, uma variável aleatória $X_t(s)$, que poderá assumir os valores 0 ou 1. Diremos que um sítio está ocupado no instante t se $X_t(s) = 1$ e que um sítio está vazio neste mesmo instante se $X_t(s) = 0$. Dessa forma temos

$$X_t : \mathbb{Z}^d \mapsto \{0, 1\}$$

e $X_t \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ será denominada uma configuração.

O sistema terá início em $t = 0$, a partir de variáveis aleatórias $X_0(s)$ independentes e identicamente distribuídas, com distribuição de Bernoulli de parâmetro p , isto é : $P(X_0(s) = 1) = p$ e $P(X_0(s) = 0) = 1 - p$, $\forall s \in \mathbb{Z}^d$. O parâmetro $p \in [0, 1]$ é a densidade inicial.

As dinâmicas dos modelos que serão estudados nesta dissertação têm algumas características em comum. Sítios ocupados sempre permanecem ocupados. Além disso o status de ocupação de cada sítio em $t = t_0 + 1$ é determinado pelo status de ocupação dos sítios vizinhos em $t = t_0$.

O modelo de maior interesse neste capítulo é o que denominaremos de Modelo de Percolação de Bootstrap. A fim de defini-lo consideremos

$$B_s^t = \{s_i \in \mathbb{Z}^d; \|s - s_i\| = 1 \text{ e } X_t(s_i) = 1\},$$

o conjunto dos sítios vizinhos a s que estão ocupados no instante t . Dada uma configuração inicial $X_0 \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, esta evoluirá de acordo com as seguintes regras locais:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Se } X_t(s) = 1, \text{ então} & X_{t+1}(s) = 1. \\ \text{Se } X_t(s) = 0, \text{ então} & \begin{cases} X_{t+1}(s) = 1, \text{ quando } |B_s^t| \geq q, \\ X_{t+1}(s) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{cases}$$

Informalmente, um sítio ocupado sempre permanece ocupado e um sítio vazio é ocupado desde que pelo menos q de seus vizinhos estejam ocupados. O inteiro $q \in [0, 2d]$ é um parâmetro do modelo. Este modelo é chamado Percolação de Bootstrap. Notamos que a configuração inicial é aleatória, porém a dinâmica é determinística.

Denotaremos a medida de probabilidade correspondente ao processo $(X_t : t \geq 0)$ por $P_p(\cdot)$. O espaço de probabilidade associado a esse modelo dinâmico é:

$$(\Omega, \bar{\mathcal{F}}, P_p)$$

onde $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d \times \{0, 1, \dots\}}$ e $\bar{\mathcal{F}}$ é a σ -álgebra associada a Ω que é a σ -álgebra gerada pelos cilíndricos por \mathcal{F} (ver Apêndice 1).

Podemos definir outros modelos de Percolação de Bootstrap de maneira mais geral. Estes modelos serão necessários no decorrer da dissertação. Seja

$$V(s) = \{x \in \mathbb{Z}^d; \|s - x\| = 1\}$$

o conjunto dos primeiros vizinhos de s e $\mathcal{P}(V(s))$ o conjunto de todos os subconjuntos de $V(s)$. Dado $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(V(s))$, a dinâmica de um modelo é definida por:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Se } X_t(s) = 1, \text{ então} & X_{t+1}(s) = 1. \\ \text{Se } X_t(s) = 0, \text{ então} & \begin{cases} X_{t+1}(s) = 1, \text{ quando } B_s^t \in \mathcal{B}, \\ X_{t+1}(s) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{cases}$$

O conjunto de configurações \mathcal{B} determina a regra do modelo. Notamos que o modelo definido anteriormente é dado por $\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(V(s)); |B| \geq q\}$. Existe uma relação de ordem natural por inclusão entre dois modelos de Percolação de Bootstrap com regras determinadas por \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 . Diremos que o modelo \mathcal{B}_1 domina o modelo \mathcal{B}_2 se $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$, isto é, se um sítio vazio se torna ocupado com a regra \mathcal{B}_2 então o mesmo ocorre com a regra \mathcal{B}_1 .

Como para qualquer $s \in \mathbb{Z}^d$ e qualquer $t \in \mathbb{N}$ temos $X_t(s) \leq X_{t+1}(s)$ e $X_t(s) \in \{0, 1\}$, então $X_t(s)$ é sequência monótona limitada. Logo existe $X_\infty(s) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(s)$. Denominamos X_∞ de configuração limite.

Nosso objetivo será o de estudar a evolução do sistema com a dinâmica descrita por (2). Nesse sentido analisaremos a evolução das configurações em \mathbb{Z}^d no tempo. A primeira questão que se coloca é a de saber se a dinâmica leva a rede \mathbb{Z}^d a se tornar completamente ocupada, ou seja, $X_\infty(s) = 1$ para todo sítio $s \in \mathbb{Z}^d$, e ainda, para que valores do parâmetro p isto ocorrerá.

DEFINIÇÃO 1. Um ponto crítico para o Modelo de percolação de Bootstrap será definido por:

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1] : P_p(X_\infty(0) = 1) = 1\}.$$

Vemos então, que p_c é o menor valor da densidade inicial a partir da qual \mathbb{Z}^d será completamente ocupado. Essa afirmação se deve ao fato de que o evento de que a origem é ocupada em tempo finito é um evento invariante por translação, ou seja, calcular a probabilidade da origem ser ocupada em tempo finito é o mesmo que calcular a probabilidade de qualquer outro sítio de \mathbb{Z}^d ser ocupado em tempo finito.

Podemos ver que $p_c = 1$ quando $q > d$. De fato, se existe um hipercubo com lado de tamanho pelo menos 2, completamente vazio, em \mathbb{Z}^d , nenhum de seus sítios será ocupado pois os mesmos possuem pelo menos d vizinhos vazios. Como a probabilidade de um hipercubo centrado na origem ser completamente vazio é positiva, por ergodicidade (ver Apêndice 2), a probabilidade de existir alguma translação deste hipercubo, inteiramente vazia é 1. Desta forma, para $p < 1$, temos que $P_p(X_\infty(0) = 1) < 1$.

Nesta dissertação estudaremos os resultados de Van Enter [9] e Schonmann [12] para mostrarmos que, quando $q \leq d$, $p_c = 0$. Como $p_c = 1$ quando $q > d$ e $p_c = 0$, quando $q \leq d$, então quando $q = d$, denominaremos o modelo de Percolação de Bootstrap com Limiar Crítico.

Em [9], Van Enter usou um simples argumento do contorno, conhecido como Argumento de Straley, para mostrar que $p_c = 0$ para $q = 2$. Ele argumenta que para $q = 2$, um hipercubo d -dimensional completamente ocupado só pára de crescer se existir um contorno retangular de sítios vazios em sua volta e mostra que a probabilidade de existir um hipercubo completamente ocupado que não é rodeado por um contorno retangular de sítios vazios é 1. No Capítulo 3 mostraremos o resultado de Van Enter:

TEOREMA 1. (**Van Enter, 1987**) Para $q = 2$ em qualquer dimensão temos:

$$p_c = 0$$

O Modelo de Percolação de Bootstrap com Limiar Crítico foi estudado por Schonmann em [12] onde foi mostrado que, nesse caso, $p_c = 0$, isto é, para qualquer $p > 0$, a rede será completamente ocupada. Schonmann provou também que isso acontecerá exponencialmente rápido. A fim de mostrar esse resultado ele define

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t(0) = 1\}$$

o tempo em que a origem será ocupada e mostra que existem $\gamma, C \in (0, \infty)$ tais que

$$P_p(T > t) \leq C \exp(-\gamma t).$$

Nesse sentido definimos a taxa de decaimento exponencial da probabilidade da origem ser ocupada num tempo maior que t ,

$$(4) \quad \gamma(p) = \sup\{\gamma \geq 0 : \exists C < \infty \text{ tal que } P_p(T > t) \leq C \exp(-\gamma t)\}.$$

Utilizando uma técnica de acoplamento podemos ver que $\gamma(p)$ é não-decrescente em p . De fato, consideremos a variável aleatória $U_t(s) \sim U([0, 1])$ com distribuição uniforme

em $[0, 1]$ e definamos a seguinte variável aleatória

$$Y_t^p(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } U_t(s) \leq p; \\ 0, & \text{se } U_t(s) > p. \end{cases}$$

onde $p \in [0, 1]$. Sejam $p_1, p_2 \in [0, 1]$ tais que $p_1 \leq p_2$. Se $Y_t^{p_2}(s) = 0$, então $U_t(s) > p_2 \geq p_1$. Assim $Y_t^{p_1}(s) = 0$. Agora consideremos os eventos $E_1 = \{T^{p_1} > t_0\}$ e $E_2 = \{T^{p_2} > t_0\}$, onde T^{p_1} e T^{p_2} são os tempos nos quais a origem se torna ocupada no modelo com distribuição com parâmetros p_1 e p_2 respectivamente. Observemos que se o evento E_2 ocorre, então $Y_t^{p_2}(0) = 0$ para $t = 1, 2, \dots, t_0$. Assim $Y_t^{p_1}(0) = 0$ para $t = 1, 2, \dots, t_0$ e conseqüentemente E_1 também ocorre. Logo $E_2 \subset E_1$, o que implica $P(E_2) \leq P(E_1)$. Portanto

$$P_{p_2}(T > t) \leq P_{p_1}(T > t).$$

Dessa forma é natural definirmos um novo ponto crítico:

DEFINIÇÃO 2.

$$\pi_c = \inf\{p \in [0, 1] : \gamma(p) > 0\}$$

é o menor valor de p a partir do qual existe decaimento exponencial da probabilidade da origem ser ocupada num tempo maior que t .

Além disso, podemos escrever

$$p_c = \inf\{p \in [0, 1] : \lim_{t \rightarrow \infty} P_p(T > t) = 0\}.$$

Podemos ver que $p_c \leq \pi_c$. De fato, dado $p > \pi_c$, temos, pela definição 2, $P_p(T > t) \leq C \exp(-\gamma t)$ para $\gamma > 0$. Então $\lim_{t \rightarrow \infty} P_p(T > t) = 0$ e conseqüentemente $p > p_c$. Assim, para demonstrarmos o teorema seguinte, será suficiente provarmos que $\pi_c = 0$.

TEOREMA 2. (**Schonmann, 1992**) Para o Modelo de Percolação de Bootstrap com $q = d$, em qualquer dimensão, $p_c = \pi_c = 0$.

Apresentaremos a demonstração do Teorema 2 no Capítulo 4. Ela será realizada para outro modelo de percolação de bootstrap que será definido a seguir.

Consideremos o modelo onde um sítio s , vazio num instante t , fique ocupado no instante $t + 1$ se s possui pelo menos um sítio vizinho ocupado em cada uma das d diferentes direções. Neste caso, se $X_t(s) = 0$ e $|B_s^t \cap \{s \pm e_i\}| > 1$ então $X_{t+1}(s) = 1$, caso contrário $X_{t+1}(s) = 0$. Aqui os vetores e_i são os vetores canônicos, ou seja $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, onde a i -ésima coordenada é igual a 1 e todas as outras são nulas. O modelo definido desta forma é denominado Percolação de Bootstrap Polarizado.

Observemos que se há pelo menos um sítio ocupado, vizinho a s , em cada direção, então certamente há pelo menos d de seus vizinhos ocupados. Assim o modelo de Percolação com Limiar Crítico domina o modelo de Percolação Polarizado.

Definiremos agora um conceito fundamental que será usado ao longo da dissertação. Dado um subconjunto Z de \mathbb{Z}^d , a dinâmica restrita a Z , $(X_t^Z(s) : t = 0, 1, \dots)$ é a

dinâmica obtida considerando os sítios fora de Z vazios e fazendo o sistema evoluir dentro de Z . Mais precisamente

$$(5) \quad X_0^Z(s) = \begin{cases} X_0(s), & \text{se } s \in Z; \\ 0, & \text{se } s \notin Z. \end{cases} \quad \text{e} \quad X_t^Z(s) = 0 \text{ se } s \notin Z.$$

Diremos que um subconjunto finito Z de \mathbb{Z}^d é “internamente gerado” (i.g) por uma configuração $X \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, se a partir da configuração $X^Z(s)$, este subconjunto se torna totalmente ocupado. Definimos

$$R^d(N, p) = P_p\{Q_N^d \text{ é internamente gerado}\}$$

onde $Q_N^d = \{s \in \mathbb{Z}^d : |s_i| \leq N, i = 1, 2, \dots, d\}$, com $1 \leq N \in \mathbb{N}$ é o hipercubo d -dimensional com aresta de tamanho $2N + 1$, centrado na origem.

Definiremos ainda o “comprimento de correlação”

$$\xi_d(p) = \inf\{N : R^d(N, p) \geq 1 - 1/(2(2d - 1))\}$$

que é o menor valor do tamanho linear de um hipercubo a partir do qual a probabilidade deste hipercubo ser internamente gerado é próxima de 1.

Para a demonstração do Teorema 2, provaremos por indução que se $\pi_c(d - 1) = 0$, então $\xi_d(p) < \infty$ e também que $\gamma_d(p) \geq C_d/\xi_d(p)$. Para a verificação da última desigualdade usaremos um argumento de renormalização que consiste em tomar uma rede equivalente à rede \mathbb{Z}^d onde os sítios são hipercubos, e comparar o processo original com o processo na rede renormalizada, onde a probabilidade de cada sítio ser ocupado é igual a $R^d(N, p)$. Esse argumento também será usado na demonstração de outros teoremas que fazem parte deste trabalho.

Uma pergunta interessante a se fazer é como $\xi_d(p)$ se comporta quando $p \rightarrow 0$. Mais precisamente queremos saber como $\xi_d(p)$ diverge quando $p \rightarrow 0$. Para responder a essa pergunta precisaremos fazer um rigoroso estudo da função $R^d(N, p)$. Aizenmann e Lebowitz obtiveram um resultado importante a respeito desta função. Em [3], eles provam através do teorema seguinte, que $R^d(N, p)$, quando analisada como uma função de N para um valor baixo de p fixo, se comporta aproximadamente como uma função decau.

TEOREMA 3. (Aizenmann, Lebowitz, 1988) *Considere o modelo de Percolação de Bootstrap com $q = 2$, em \mathbb{Z}^2 . Seja $\lambda = p \ln N$. Existe $\lambda_c(p) > 0$ tal que,*

$$\text{Se } \lambda < \lambda_c(p), \text{ então } \lim_{p \rightarrow 0} R(N, p) = 0 \text{ e}$$

$$\text{se } \lambda > \lambda_c(p) \text{ então } \lim_{p \rightarrow 0} R(N, p) = 1.$$

Além disso, determinaremos constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$(6) \quad C_1 \leq \lambda_c \leq C_2.$$

Na realidade o Teorema acima foi provado para $q = 2$ em qualquer dimensão. No entanto a demonstração é inteiramente análoga à apresentada aqui. No Capítulo 5, apresentaremos a demonstração do Teorema 3.

Escrevendo $N = \exp(\lambda p^{-1})$ e usando as cotas (6), quando p tende a zero, obtemos

$$\exp(C_1/p) \leq \xi_2(p) \leq \exp(C_2/p).$$

Logo $\xi_2(p)$ diverge mais rápido que qualquer potência de $1/p$. Podemos observar que

$$\xi_d(p) \geq \xi_{d-1}(p) \geq \cdots \geq \xi_2(p) \geq \exp(C_1/p).$$

De fato, como $R^d(N, p) \leq R^{d-1}(N, p)$ para todo $d \geq 2$, se $N > \xi_d(p)$, então $R^{d-1}(N, p) \geq R^d(N, p) \geq 1 - \frac{1}{2(2d-1)} \geq 1 - \frac{1}{2[2(d-1)-1]}$, o que implica $N > \xi_{d-1}(p)$. Assim para dimensões maiores

$$\xi_d(p) \geq \exp(C_1/p)$$

e portanto $\xi_d(p)$ diverge mais rápido que qualquer potência de $1/p$ quando $p \rightarrow 0$.

Como dissemos anteriormente, provaremos que $\gamma_d(p) \geq C_d/\xi_d(p)$ para a demonstração do Teorema 2. Veremos que um resultado mais preciso a respeito de $\gamma(p)$ pode ser obtido.

Observemos que para o modelo polarizado $\gamma_d(p)$ é não-crescente em d . Para mostrar essa afirmação consideremos o espaço $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1} \subset \mathbb{Z}^d$ e a dinâmica $(d-1)$ -dimensional restrita a este espaço. Se um sítio vazio de $\{0\} \times \mathbb{Z}^{d-1}$ se torna ocupado pela dinâmica d -dimensional, então o mesmo ocorre na dinâmica $(d-1)$ -dimensional. Isto porque a dinâmica d -dimensional domina a dinâmica $(d-1)$ -dimensional. Dessa forma temos $P_p(T^{d-1} > t) \leq P_p(T^d > t)$, onde T^d denota o tempo que a origem será ocupada pela dinâmica d -dimensional. Logo, se $d_1 < d_2$, então $\gamma_{d_2}(p) \leq \gamma_{d_1}(p)$.

Na prova do Teorema 2 veremos que $\gamma_1(p) = 2 \ln[1/(1-p)]$. Como $\gamma_d(p) \leq \gamma_{d-1}(p)$ para todo $d \geq 2$, então em todas as dimensões, $\gamma_d(p) \leq 2 \ln[1/(1-p)]$. Em particular, $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma_d(p) = 0$. No Capítulo 6 estudaremos mais detalhadamente o comportamento da função $\gamma(p)$ para o Modelo Polarizado quando p se aproxima do ponto crítico $\pi_c = 0$.

No caso em que $\gamma(p)$ se comporta como uma potência de $(p - \pi_c)$ quando p é próximo de π_c , no sentido em que

$$\gamma(p) \approx (p - \pi_c)^\nu$$

ou, mais precisamente,

$$\lim_{p \searrow \pi_c} \frac{\log \gamma(p)}{\log(p - \pi_c)} \equiv \nu,$$

dizemos que ν é um “expoente crítico”.

Como $\gamma_d(p) \leq 2 \ln[1/(1-p)]$ e $\pi_c = 0$, então

$$\nu = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log \gamma(p)}{\log p} \geq \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log[-2 \ln(1-p)]}{\log p} = 1.$$

Logo $\nu \geq 1$ em todas as dimensões, desde que tal expoente crítico exista.

Em [4], Enrique Andjel verificou que, para o caso bi-dimensional, se ν existir, então $\nu \leq 2$. Assim $1 \leq \nu \leq 2$ para $d = 2$. Posteriormente a esse resultado, Andjel, Mountford e Schonmann, provaram em [5] que $\nu = 1$ para qualquer dimensão. Eles verificaram ainda que $\gamma(p) = -2 \ln(1 - p)$. Apresentaremos a prova destes resultados através do Teorema:

TEOREMA 4. (Andjel, Mountford, Schonmann, 1995) *Para o Modelo de Percolação Polarizado em qualquer dimensão,*

$$\gamma(p) = -2 \ln(1 - p) \text{ e } \nu = 1.$$

Apresentaremos a demonstração do Teorema 4 no Capítulo 6, onde definiremos taxas de decaimento exponencial equivalentes a $\gamma(p)$ e mostraremos que os expoentes críticos relacionados a essas taxas são iguais a ν e iguais a 1.

Uma das taxas de decaimento exponencial se refere à probabilidade de um hipercubo centrado na origem não ser internamente gerado: $1 - R^d(N, p)$. A demonstração usa o resultado de Mountford em [13], onde ele calcula explicitamente o valor dessa taxa. Para seu expoente crítico correspondente, é usado o resultado obtido por Andjel em [4], onde ele mostra que esse expoente crítico é igual a 1. A outra taxa de decaimento exponencial que definiremos será referente à probabilidade de um núcleo de um hipercubo não possuir todos os sítios ocupados pela dinâmica restrita a esse hipercubo. A equivalência entre as três taxas de decaimento exponencial descritas acima será obtida pelos Lemas 15 e 16 que serão enunciados e demonstrados também no Capítulo 6.

Com os resultados obtidos para o modelo polarizado, através dos Teoremas 2 e 4, observamos que a probabilidade da origem ainda estar vazia no instante t , tende a zero exponencialmente rápido com t e a taxa de decaimento exponencial correspondente a essa probabilidade também é igualmente pequena para valores baixos de p .

Porém Aizenman e Lebowitz, conjecturam e demonstram parcialmente em [3] que a função $1 - P_p(T > t)$ também se comporta aproximadamente como uma função degrau em termos do parâmetro $\lambda = p \ln t$, no sentido que existe λ_c crítico tal que, quando p tende a zero e o tempo tende ao infinito, $1 - P_p(T > t)$ tende a zero, se $\lambda < \lambda_c$ e tende a 1 se $\lambda > \lambda_c$. Eles indicam ainda uma maneira para encontrarmos constantes positivas C_1 e C_2 tais que $C_1 \leq \lambda_c \leq C_2$. Assim verificamos que para $d = 2$,

$$\exp(C_1/p) \leq \inf\{t : P_p(T > t) < \epsilon\} \leq \exp(C_2/p)$$

para cada $\epsilon > 0$. Consequentemente, para valores pequenos de p , o tempo necessário para que a origem seja susceptível de ser ocupada é extremamente grande e é certamente maior que $\exp(\lambda p^{-1})$. Além disso a origem será ocupada com probabilidade 1 muito rápido ao se esperar um tempo maior que $\exp(\lambda p^{-1})$.

Todas as funções definidas neste capítulo dependem não só da dimensão do espaço, como também da densidade inicial p . Dessa forma, para as demonstrações dos Teoremas, que serão apresentadas nos capítulos seguintes, indexaremos d e p a tais funções apenas quando houver necessidade.

CAPÍTULO 3

O argumento de Straley

O resultado obtido no Teorema 1 é particularmente interessante em duas dimensões, uma vez que em \mathbb{Z}^2 o modelo com parâmetro $q = 2$ corresponde exatamente ao modelo com limiar crítico ($q = d$).

Van Enter usou o argumento de Straley, que consiste na verificação de que para o Modelo de Percolação de Bootstrap, com $q = 2$, um hipercubo d -dimensional completamente ocupado poderá crescer levando \mathbb{Z}^d a se tornar inteiramente ocupada, a menos que exista um contorno retangular com todos os sítios vazios envolvendo tal hipercubo. Esse grande hipercubo instável é chamado de gota crítica.

Para entendermos esse argumento, consideremos inicialmente um quadrado em \mathbb{Z}^2 com todos os sítios ocupados. Observamos que basta a existência de um vizinho a esse quadrado ocupado, para que um de seus lados aumente em uma unidade (ver Figura 1).

Podemos, então, observar que o processo de ocupação dos sítios de \mathbb{Z}^2 permite que o quadrado se expanda até que encontre um contorno retangular de sítios vazios (ver Figura 2).

Como o Teorema 1 será demonstrado para qualquer dimensão, apresentaremos as definições de retângulo e contorno retangular em \mathbb{Z}^d .

Definiremos um retângulo em \mathbb{Z}^d como um conjunto de sítios da forma

$$R = \{s \in \mathbb{Z}^d; l_i \leq s_i \leq r_i; l_i, r_i \in \mathbb{Z}; i = 1, \dots, d\}.$$

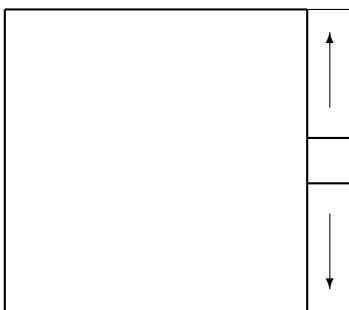


FIGURA 1. Dado um quadrado de sítios ocupados, se apenas um sítio vizinho dos sítios desse quadrados estiver ocupado esse quadrado expandirá.

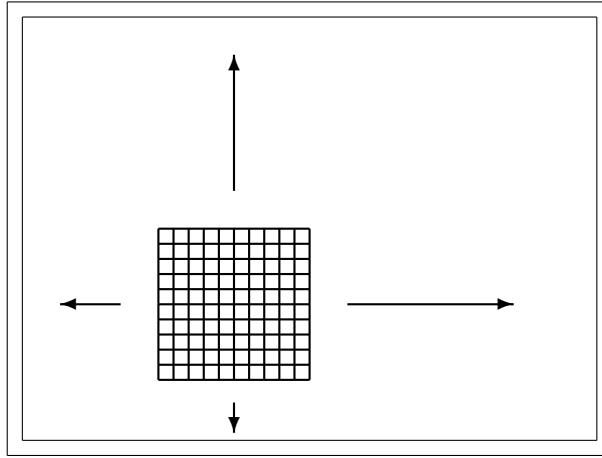


FIGURA 2. Um quadrado de sítios ocupados só para de crescer quando for circundado por um contorno retangular de sítios vazios.

Sua fronteira será definida por

$$\partial R = \{s \in R : s_i = l_i \text{ ou } s_i = r_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Um contorno retangular é um conjunto ∂R , para algum retângulo R . Diremos que um contorno retangular envolve um ponto s_0 , e denotaremos $s_0 \prec \partial R$, quando $s_0 \in R/\partial R$. Quando $s \prec \partial R$ para todo $s \in S$, denotaremos $S \prec \partial R$.

Consideremos agora $Q_N^d \prec \partial R$, onde ∂R é completamente vazio. Deixando que o sistema evolua tornando estática a dinâmica fora de ∂R , verificamos que a evolução se dará até que o conjunto $R/\partial R$ seja completamente ocupado. A idéia então para provar o Teorema 1 será mostrar que, com probabilidade positiva (e consequentemente com probabilidade 1, por ergodicidade) existe um hipercubo completamente ocupado que não é envolvido por nenhum contorno retangular de sítios vazios.

Prova do Teorema 1:

Sejam, um hipercubo Q_N^d e $0 < \varepsilon < 1$. Consideremos os eventos

$$J_N = \bigcup_{R; Q_N \prec \partial R} \{X_0(s) = 0 \forall s \in \partial R\}$$

e

$$J_{N,k} = \bigcup_{R; Q_N \prec \partial R, |\partial R|=k} \{X_0(s) = 0 \forall s \in \partial R\}$$

Consideremos também o conjunto $B_k = \{R; 0 \prec \partial R, |\partial R| = k\}$. Temos $J_N = \bigcup_{k=M}^{\infty} J_{N,k}$ onde $M = 2d(2N+1)^{d-1}$ é uma cota inferior para o tamanho do menor contorno retangular que envolve Q_N^d , sendo $(2N+1)^d$ a quantidade de sítios em cada face de Q_N^d . Assim

$$P_p(J_N) = P_p\left(\bigcup_{k=M}^{\infty} J_{N,k}\right) \leq \sum_{k=M}^{\infty} P_p(J_{N,k}) \leq \sum_{k=M}^{\infty} (1-p)^k |B_k|.$$

Veremos que $|B_k|$ pode ser cotado superiormente por um polinômio em k . Como

- (1) O número de formas possíveis para um retângulo de tamanho k é menor do que ou igual a k^{d-1} .
- (2) O número de retângulos de comprimento k e forma fixada ao redor da origem é menor do que ou igual a k^d .

Então $|B_k| < k^{d-1} \cdot k^d = k^{2d-1}$. Assim

$$(7) \quad P_p(J_N) < \sum_{k=M}^{\infty} (1-p)^k k^{2d-1}.$$

Como a série definida em (7) converge para qualquer $p > 0$, existe N_0 tal que

$$P_p(J_{N_0}) < \epsilon.$$

Dessa forma temos

$$P_p(J_{N_0}^c) = 1 - P_p(J_{N_0}) > 1 - \epsilon > 0$$

onde $J_{N_0}^c$ é o evento complementar de J_{N_0} , isto é, o evento em que não existe retângulo vazio em volta de $Q_{N_0}^d$. Por outro lado, a probabilidade de que $Q_{N_0}^d$ esteja completamente ocupado inicialmente é $p^{(2N_0+1)^d}$.

Consideremos agora o evento A em que alguma translação de $Q_{N_0}^d$ está inteiramente ocupada inicialmente e não é rodeada por nenhum contorno retangular de sítios vazios. Vemos então que

$$P_p(A) \geq p^{(2N_0+1)^d} P_p(J_{N_0}^c) > 0.$$

Observamos que o evento A é um evento invariante por translação. Como a medida é ergódica (ver Apêndice 2) e A ocorre com probabilidade positiva então $P_p(A) = 1$.

□

Como frisado anteriormente, o resultado deste capítulo vale em qualquer dimensão, porém seu real interesse ocorre quando a rede é bi-dimensional, pois, nesse caso, o modelo é de limiar crítico. No próximo capítulo, será demonstrado que, para o modelo com $q = d$, em qualquer dimensão, todos os sítios da rede serão ocupados em tempo finito.

CAPÍTULO 4

O Modelo Polarizado

Apresentaremos neste capítulo a demonstração do Teorema 2. A prova será realizada para o modelo Polarizado (um sítio vazio se torna ocupado se possui pelo menos um vizinho ocupado em cada uma das d diferentes direções), e, como vimos no Capítulo 2, este modelo é dominado pelo modelo com limiar crítico. Assim o teorema também é válido para este último modelo.

Provaremos que

$$\pi_c(d) = \inf\{p \in [0, 1] : \gamma_d(p) > 0\} = 0$$

para todo $d \geq 1$. Para isso precisaremos mostrar que

$$\gamma_d(p) = \sup\{\gamma \geq 0 : \exists C < \infty \text{ tal que } P_p(T > t) \leq C \exp(-\gamma t)\} > 0$$

para todo $p \in (0, 1]$, lembrando que T é o tempo em que a origem será ocupada.

A idéia será então mostrar primeiro que, para p suficientemente próximo de 1, $\gamma(p) > 0$. Em seguida, através de um procedimento de renormalização, que o mesmo vale para todo $p \in (0, 1]$. Temos,

PROPOSIÇÃO 5. *Para o Modelo Polarizado, existem constantes $\gamma_d(p), C(p) \in (0, \infty)$, tais que, para $p > 1 - 1/(2d - 1)$, temos*

$$P_p(T^d > t) \leq C(p) \exp(-\gamma_d(p)t).$$

Essa proposição será usada na demonstração do Teorema 2 e sua prova será apresentada ainda neste capítulo.

Prova do Teorema 2: Mostremos inicialmente que para $d = 1$, temos $\gamma(p) > 0$ para todo $p > 0$. Com efeito, se $d = 1$, um sítio de \mathbb{Z} se torna ocupado se o sítio da direita ou o sítio da esquerda estão ocupados. Então

$$\begin{aligned} P_p(T > t) &= P_p(X_0(s) = 0 \text{ para } s = -t, \dots, t) = (1 - p)^{2t+1} = \\ &= (1 - p)(1 - p)^{2t} = (1 - p) \exp\left(-2\left(\ln \frac{1}{1 - p}\right)t\right) \end{aligned}$$

Assim $\gamma_1(p) = 2 \ln \frac{1}{1 - p} > 0$ se $p \neq 0$. Portanto $\pi_c(1) = p_c(1) = 0$.

Admitindo, por ora o seguinte lema, usaremos um procedimento de renormalização para finalizar a demonstração do Teorema 2.

LEMA 6. *Suponha que $\pi_c(d - 1) = 0$ para o Modelo Polarizado. Então, para todo $p > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R^d(N, p) = 1.$$

Do Lema 6, segue que $\xi_d(p) = \inf\{N : R^d(N, p) \geq 1 - 1/(2(2d - 1))\} < \infty$.

Consideremos uma partição de \mathbb{Z}^d em hipercubos

$$(8) \quad Q_{N,s}^d = \{u \in \mathbb{Z}^d : u - s(2N + 1) \in Q_N^d\}$$

com $s \in \mathbb{Z}^d$, que são translações de Q_N^d . Definiremos a rede renormalizada obtida por essa partição, onde os sítios serão os hipercubos $Q_{N,s}^d$. Para simplificar a notação, denotaremos por s um sítio da rede renormalizada. A fim de definir a dinâmica na rede renormalizada, consideremos a seguinte variável aleatória:

$$(9) \quad \eta_\tau(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } Q_{N,s}^d \text{ possui todos seus sítios ocupados} \\ & \text{no tempo renormalizado } \tau; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Diremos que um sítio renormalizado s está inicialmente ocupado, se, na rede original, todos os sítios de $Q_{N,s}^d$ estiverem ocupados no tempo $(2N + 1)^d = |Q_N^d|$. Isso porque, se passadas $|\Gamma|$ unidades de tempo (tempo máximo para um subconjunto Γ se tornar completamente ocupado pela dinâmica interna de Γ), Γ não for internamente gerado, então não o será mais, pois a configuração final foi alcançada. Dessa forma, definimos $\tau = 0$ quando $t = (2N + 1)^d$. Assim, a probabilidade de um sítio renormalizado s ser inteiramente ocupado em $\tau = 0$ é maior ou igual a $R^d(N, p)$, ou seja, $P_p(\eta_0(s) = 1) \geq R^d(N, p)$. Se passadas $|Q_N^d|$ unidades de tempo, $Q_{N,s}^d$ não estiver completamente ocupado, declaramos todos os seus sítios vazios e consideramos $Q_{N,s}^d$ como um sítio renormalizado vazio.

Consideremos um tempo t no qual o sítio renormalizado s tem pelo menos um sítio vizinho renormalizado ocupado em cada uma das d diferentes direções. Pelo lema seguinte veremos que, no tempo $t + 2dN + 1$, s será ocupado.

LEMA 7. *Para o modelo polarizado, se em t_0 tivermos $Q_{N,s}^d$ ocupados, para todo $s \in \{s_0 + e_i, i = 1, \dots, d\}$ ou $s \in \{s_0 - e_i, i = 1, \dots, d\}$, então no instante $t_0 + 2dN + 1$, Q_{N,s_0}^d será completamenete ocupado.*

A demonstração do Lema 7 será feita no Apêndice, Seção 3.

Podemos então definir implicitamente o tempo renormalizado τ por

$$t = (2N + 1)^d + (2dN + 1)\tau.$$

Comparando os processos de percolação em unidades de tempo τ , podemos verificar que o processo que ocorre na rede renormalizada domina o processo com o modelo polarizado em \mathbb{Z}^d com parâmetro $R^d(N, p)$. Assim concluímos que

$$P_p(T^d > (2N + 1)^d + (2dN + 1)\tau) \leq P_{R^d(N,p)}(T^d > \tau)$$

ou equivalentemente

$$(10) \quad P_p(T^d > t) \leq P_{R^d(N,p)}(T^d > \tau),$$

para todo τ .

Agora tomemos $p_0 = 1 - 1/[2(2d - 1)] > 1 - 1/(2d - 1)$. Então $\forall p > 0$,

$$R^d(\xi_d(p), p) \geq p_0 > 1 - 1/(2d - 1).$$

Pela Proposição 5 existem $\gamma(p), C(p) \in (0, \infty)$ tais que $P_p(T^d > t) \leq C(p) \exp(-\gamma(p)t)$ para $p > 1 - 1/(2d - 1)$. Então

$$(11) \quad P_{R^d(\xi_d(p), p)}(T^d > \tau) \leq P_{p_0}(T^d > \tau) \leq C(p_0) \exp(-\gamma(p_0) \lfloor \tau \rfloor),$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte inteira. Assim por (10) e (11)

$$\begin{aligned} P_p(T^d > t) &\leq C(p_0) \exp\{-\gamma(p_0) \lfloor [t - (2N + 1)^d]/(2dN + 1) \rfloor\} \\ &\leq C(p_0) \exp[-\gamma(p_0)t/(3dN)] \cdot \exp[\gamma(p_0)(2N + 1)^d/(2dN + 1)] \\ &= C'(p) \exp[-(C_d/\xi_d(p))t] \end{aligned}$$

onde escolhemos $N = \xi_d(p)$ e tomamos $C_d = \gamma(p_0)/3d$ e

$$C'(p) = C(p_0) \exp[\gamma(p_0)(2N + 1)^d/(2dN + 1)].$$

Logo, pela definição de $\gamma(p)$, segue que $\gamma(p) \geq C_d/\xi_d(p) > 0$.

Por indução na dimensão d , concluímos que, para qualquer d , $\pi_c(d) = p_c(d) = 0$, o que prova o Teorema 2.

Assim para o Modelo com Limiar Crítico, $p_c = \pi_c = 0$, já que este é dominado pelo Modelo Polarizado.

□

Antes de provarmos a Proposição 5 e o Lema 6, definiremos alguns subconjuntos de \mathbb{Z}^d .

Lembremos que

$$Q_k^d = \{s \in \mathbb{Z}^d : |s_i| \leq k, i = 1, 2, \dots, d\}$$

denota o hipercubo d -dimensional de aresta $2k + 1$.

Denotaremos por

$$L_{((i_1, \dots, i_r), (a_1, \dots, a_r))}^d(k) = \{s \in \mathbb{Z}^d : s_{i_u} = a_u k \text{ para } u = 1, \dots, r \text{ e } |s_j| < k \text{ para } j \neq i_1, \dots, i_r\}$$

onde $r = 1, \dots, d$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq d$ e $a_u \in \{-1, 1\}$ para $u = 1, \dots, r$, os hipercubos $(d - r)$ -dimensionais de arestas iguais a $2k - 1$.

Por exemplo, se $d = 3$ temos:

$$\begin{cases} \text{se } r = 1, & \text{então } L_I^3(k) \text{ são quadrados de lado } 2k - 1; \\ \text{se } r = 2, & \text{então } L_I^3(k) \text{ são arestas de tamanho } 2k - 1; \\ \text{se } r = 3, & \text{então } L_I^3(k) \text{ são pontos.} \end{cases}$$

De maneira geral, quando $r = d$, L_I^d é um ponto. Tomemos para cada r fixo

$$\mathcal{I}_r = \{((i_1, i_2, \dots, i_r), (a_1, \dots, a_r)) : i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq d \text{ e } a_u \in \{-1, 1\} \text{ para cada } u = 1, \dots, r\}$$

que é o conjunto dos índices do conjunto definido acima. Denotaremos os elementos de \mathcal{I}_r por I e tomaremos $\mathcal{I} = \bigcup_{r=1}^d \mathcal{I}_r$. Assim, podemos escrever

$$Q_k^d = Q_{k-1}^d \bigcup \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} L_I^d(k) \right).$$

Precisaremos provar a seguinte proposição para mostrar o Lema 6.

PROPOSIÇÃO 8. *Para o Modelo Polarizado temos*

$$1 - R^d(N, p) \leq C_d(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d} N\right),$$

onde $C_d(p) < \infty$ é uma constante que pode depender da dimensão.

Prova: Provaremos por indução na dimensão. Para $d = 1$, podemos observar que basta que exista um sítio ocupado em Q_N^1 , para que o mesmo seja internamente gerado. Como $1 - R^1(N, p)$ é a probabilidade de Q_N^1 não ser internamente gerado, temos

$$1 - R^1(N, p) = (1 - p)^{2N+1} = (1 - p) \cdot \exp(-(2 \ln(1/(1 - p)))N).$$

Então

$$1 - R^1(N, p) \leq C(p) \exp\left(\frac{-\gamma_1(p)}{4^1} N\right),$$

onde $C(p) = 1 - p$ e $\gamma_1(p) = 8 \ln(1/(1 - p))$.

Suponhamos que a desigualdade valha para dimensões $2, \dots, d - 1$ e mostremos que a mesma também é verdadeira para dimensão d . Tomaremos $\gamma_d(p) > 0$, já que para $\gamma_d(p) = 0$ a desigualdade é sempre verdadeira.

Podemos observar que para Q_N ser internamente gerado, basta que $Q_{N/4}$ se torne completamente ocupado pela dinâmica restrita a Q_N , e que os conjuntos $L_I^d(k)$ sejam internamente gerados pela dinâmica $(d - r)$ -dimensional. Esta observação pode ser verificada pelo seguinte lema:

LEMA 9. *Se Q_{k-1}^d é completamente ocupado na configuração X e para cada $r \in \{1, \dots, d-1\}$ e $I \in \mathcal{I}_r$, $L_I^d(k)$ é internamente gerado pela dinâmica $(d-r)$ -dimensional por X , então Q_k^d é internamente gerado por X .*

A demonstração do Lema 9 será feita no Apêndice, Seção 3.

Seja $M = \lfloor N/4 \rfloor$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte inteira de um número. Consideremos o evento

$$F_N = \{L_I^d(k) \text{ é } (d-r) \text{ i.g. } \forall k > M; r = 1, \dots, d-1; I \in \mathcal{I}_r\},$$

onde $(d-r)$ i.g. significa “internamente gerado pela dinâmica $(d-r)$ -dimensional”, e seja $G_{N,M}$ o evento em que Q_M^d se torna completamente ocupado pela dinâmica d -dimensional restrita a Q_N^d .

Assim

$$(12) \quad 1 - R^d(N, p) \leq P_p(F_N^c) + P_p(G_{N,M}^c).$$

Verificaremos agora que $P_p(F_N^c) + P_p(G_{N,M}^c) \leq C(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d} N\right)$.

Seja o evento $F_r(k) = \{L_I^d(k) \text{ é } (d-r) \text{ i.g.}\}$ e tomemos $E_r = \bigcap_{k=M}^N F_r(k)$.

Podemos escrever $F_N = \bigcap_{r=1}^{d-1} E_r$. Assim

$$P_p(F_N^c) \leq \sum_{r=1}^{d-1} P_p(E_r^c) \text{ e}$$

$$P_p(E_r^c) \leq \sum_{k=M}^N P_p(F_r(k)^c).$$

Como $P_p(F_r(k)) = R^{d-r}(k-1, p)$, então

$$P_p(F_r(k)^c) = 1 - R^{d-r}(k-1, p).$$

E por hipótese de indução

$$\begin{aligned} P_p(F_r(k)^c) = 1 - R^{d-r}(k-1, p) &\leq C_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}(k-1)\right) \\ &= C'_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}k\right), \end{aligned}$$

onde $C'_{d-r}(p) = C_{d-r}(p) \exp\left(\frac{\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}\right)$. Assim

$$\begin{aligned} P_p(E_r^c) &\leq \sum_{k=M}^N C'_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}k\right) \leq C'_{d-r}(p) \sum_{k=M}^{\infty} \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}k\right) \\ &= C''_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}M\right) \leq C''_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}\frac{N}{4}\right), \end{aligned}$$

onde $C''_{d-r}(p) = C'_{d-r}(p)/[1 - \exp(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}})]$. Como $F_N = \bigcap_{r=1}^{d-1} E_r$ então

$$F_N^c = \bigcup_{r=1}^{d-1} E_r^c.$$

Segue portanto que

$$P_p(F_N^c) \leq \sum_{r=1}^{d-1} P_p(E_r^c) \leq \sum_{r=1}^{d-1} C''_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}\frac{N}{4}\right).$$

Sabemos que $\gamma_{d-r}(p) \geq \gamma_d(p)$ e $4^{d-r+1} \leq 4^d$. Podemos então concluir que

$$\exp\left(\frac{-\gamma_{d-r}(p)}{4^{d-r}}\frac{N}{4}\right) \leq \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d}N\right).$$

Logo

$$(13) \quad P_p(F_N^c) \leq \sum_{r=1}^{d-1} C''_{d-r}(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d}N\right) \leq C_1(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d}N\right),$$

onde $C_1(p)$ é uma constante que depende da dimensão.

Para uma cota superior para o evento $G_{N,M}^c$, seja $r(s) = \min\{n : s \in Q_n^d\}$, onde $s \in \mathbb{Z}^d$, isto é

$$r(s) = \|s\|_\infty = \max\{|s_i| : s = (s_1, \dots, s_d)\}.$$

Consideremos os seguintes eventos

$$H = \{\exists s \in Q_M^d : X_{N-r(s)}^{Q_N^d}(s) = 0\};$$

$$H' = \{\exists s \in Q_M^d : X_{N-r(s)}(s) = 0\} \text{ e}$$

$$H'' = \{\exists s \in Q_M^d : X_{N-M}(s) = 0\}.$$

Dado $s \in Q_N$, podemos observar que $N - r(s)$ é o tempo mínimo para que s se torne ocupado por influência de algum sítio fora de Q_N .

Como o evento $G_{N,M}^c$ está contido no evento em que pelo menos um sítio de Q_M^d permanece vazio, com o sistema evoluindo de acordo com a dinâmica restrita a Q_N^d , então $G_{N,M}^c \subset H$. Além disso, $N - r(s) \geq N - M$, o que implica $H' \subset H''$.

Assim

$$P_p(G_{N,M}^c) \leq P_p(H'') \leq \sum_{s \in Q_M^d} P_p(X_{N-M}(s) = 0) = |Q_M^d| P_p(X_{N-M}(0) = 0).$$

Sabemos, pela proposição 5, que

$$P_p(X_{N-M}(0) = 0) \leq P_p(T > N - M) \leq C_2(p) \exp(-\gamma_d(p)(N - M)).$$

Como $N - M \geq N/2$, então $\exp(-\gamma_d(p)(N - M)) \leq \exp(-\gamma_d(p)(N/2))$. O que implica

$$(14) \quad P_p(G_{N,M}^c) \leq |Q_M^d| C_2'(p) \exp[(-\gamma_d(p)/2)N].$$

Por (12), (13) e (14), temos

$$1 - R^d(N, p) \leq P_p(F_N^c) + P_p(G_{N,M}^c) \leq C_1(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d} N\right) + C_2(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{2} N\right).$$

Sendo $4^d > 2$, temos $\exp(-1/2) < \exp(-1/4^d)$. Logo

$$1 - R^d(N, p) \leq C(p) \exp\left(\frac{-\gamma_d(p)}{4^d} N\right),$$

onde $C(p) = C_1(p) + C_2(p)$.

□

PROVA DO LEMA 6. A origem será dita um sítio bom em uma configuração X , se $X(0) = 1$ e se $L_I^d(k)$ é internamente gerado pela dinâmica $(d - r)$ -dimensional pela configuração X para todo $k = 1, 2, \dots$; $r = 1, \dots, d - 1$ e $I \in \mathcal{I}_r$. Diremos ainda que um sítio s qualquer de \mathbb{Z}^d é um sítio bom se a origem for um sítio bom na configuração transladada θ_{-s} (ver Apêndice, Seção 2).

Definamos por $\alpha(p)$ a probabilidade da origem ser um sítio bom na configuração X tomada de acordo com a medida produto com densidade p .

Seja $L = \{X_0(0) = 1\}$. Consideremos os seguintes eventos:

$$E = \{L_I^d(k) \text{ é } (d-r) \text{ i.g. } \forall k = 1, 2, \dots; r = 1, \dots, d-1; I \in \mathcal{I}_r\}$$

$$E_k = \{L_I^d(k) \text{ é } (d-r) \text{ i.g. } \forall r = 1, \dots, d-1, I \in \mathcal{I}_r\}$$

$$E_k^r = \{L_I^d \text{ é } (d-r) \text{ i.g. } \forall I \in \mathcal{I}_r\}.$$

Assim

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r=1}^{d-1} E_k^r \right) \text{ e } E \cap L = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r=1}^{d-1} (E_k^r \cap L) \right)$$

e ainda $P_p(E_k^r) = (R^{d-r}(k-1, p))^{C_{(r,d)}}$, onde $C_{(r,d)}$ é a cardinalidade de \mathcal{I}_r . Para todo $r = 1, \dots, d-1$ e para todo k os eventos E_k^r são independentes entre si e cada um deles é independente do evento L . Então

$$(15) \quad \alpha(p) = P_p(E \cap L) = \prod_{k=1}^{\infty} P_p \left(\bigcap_{r=1}^{d-1} (E_k^r \cap L) \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{d-1} P_p(E_k^r \cap L)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{d-1} P_p(E_k^r) P(L) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{d-1} R^{d-r}(k-1, p)^{C_{(d,r)}} p = p \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{r=1}^{d-1} R^r(k, p)^{C_{(d,r)}}.$$

Pela Proposição 8 temos:

$$1 - R^r(k, p) \leq C(p) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right).$$

Logo

$$R^r(k, p)^{C_{(d,r)}} \geq \left[1 - C(p) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right) \right]^{C_{(d,r)}}.$$

Tomando k suficientemente grande, podemos assumir que $C(p) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right) < 1$. Como $(1 - ax)^n \geq 1 - nax$ para $ax < 1$, onde n e a são constantes positivas (ver Apêndice, Lema 17), temos

$$\left[1 - C(p) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right) \right]^{C_{(d,r)}} \geq 1 - C(p) C_{(d,r)} \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right) =$$

$$= 1 - C_3(d, r) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right).$$

Então

$$\prod_{r=1}^{d-1} R^r(k, p)^{C_{(d,r)}} \geq \prod_{r=1}^{d-1} \left(1 - C_3(d, r) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right) \right).$$

Observemos que existe $r_0 \in \{1, \dots, d-1\}$ tal que

$$1 - C_3(d, r_0) \exp \left(\frac{-\gamma_{r_0}(p)}{4^{r_0}} k \right) \leq 1 - C_3(d, r) \exp \left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k \right),$$

para todo $r = 1, \dots, d-1$ e $r \neq r_0$.

Assim

$$\begin{aligned} \prod_{r=1}^{d-1} R^r(k, p)^{C(d,r)} &\geq \left[1 - C_3(d, r_0) \exp\left(\frac{-\gamma_{r_0}(p)}{4^{r_0}} k\right) \right]^{d-1} \\ &\geq 1 - C_4(d, r_0) \exp\left(\frac{-\gamma_{r_0}(p)}{4^{r_0}} k\right), \end{aligned}$$

onde $C_4(d, r_0) = (d-1)C_3(d, r_0)$ e a última desigualdade é válida pelo Lema 17 (ver apêndice, seção 4).

Pela Equação (15),

$$\alpha(p) \geq p \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - C_4(d, r_0) \exp\left(\frac{-\gamma_{r_0}(p)}{4^{r_0}} k\right) \right].$$

Pelo Lema 18 (ver apêndice, seção 4) e considerando $1 - C > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1 - Ca^k) &\geq 1 - \sum_{k=1}^n Ca^k \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} Ca^k = 1 - C \frac{a}{1-a} = \frac{1 - (1+C)a}{1-a} > 0. \end{aligned}$$

Substituindo a por $\exp(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r})$ e C por C_4 temos

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - C_4(d, r) \exp\left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k\right) \right] \geq 1 - C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-\gamma_r(p)}{4^r} k\right) > 0.$$

Logo $\alpha(p) > 0$.

Seja V_M o evento em que existe um sítio bom no interior de Q_M^d ($M = \lfloor N/4 \rfloor$). Se V_M ocorre, então $X(s) = 1$ para algum s de Q_M^d e $L_I^d(k)$ é internamente gerado pela configuração $\theta_{-s}X$ pela dinâmica $(d-r)$ -dimensional, para todo $r = 1, \dots, d-1$; $k = 1, 2, \dots$ e $I \in \mathcal{I}_r$.

Assim pelo Lema 9, com a evolução do sistema, Q_M^d será internamente gerado e consequentemente

$$0 < \alpha(p) \leq P_p(V_M) \leq P_p(G_{N,M}),$$

onde $G_{N,M}$ é o evento usado na prova do resultado anterior.

Tomando $V = \{ \text{existe um sítio bom em } \mathbb{Z}^d \}$, temos $V = \bigcup_{M=1}^{\infty} V_M$. Como $V_M \subset V_{M+1} \subset \dots$ e por ergodicidade $P_p(V) = 1$, já que V é invariante por translação e $P_p(V) \geq \alpha(p) > 0$, então $P_p(V) = \lim_{M \rightarrow \infty} P_p(V_M) = 1$.

Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_p(G_{N,M}) = 1.$$

Dado F_N o evento usado na prova do resultado anterior, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_p(F_N) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P_p(F_N^c)$$

$$\geq 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{d-1} C''_{d-r}(p) \exp\left(-\frac{\gamma_{d-r}(p)N}{4^{d-r}}\frac{N}{4}\right).$$

Por hipótese $\pi_c(d-1) = 0$. Então $0 < \gamma_{d-1}(p) \leq \gamma_{d-r}(p)$ e conseqüentemente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{d-1} C''_{d-r}(p) \exp\left(-\frac{\gamma_{d-r}(p)N}{4^{d-r}}\frac{N}{4}\right) = 0.$$

Assim

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_p(F_N) = 1.$$

Vimos anteriormente que $0 \leq 1 - R^d(N, p) \leq P_p(F_N^c) + P_p(G_N^c)$. Assim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - R^d(N, p) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} P_p(F_N^c) + \lim_{N \rightarrow \infty} P_p(G_N^c) \\ &= 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P_p(F_N) + 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P_p(G_N) = 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R^d(N, p) = 1.$$

□

PROVA DA PROPOSIÇÃO 5. Se $T > t$, a origem está vazia no tempo 0 (zero).

Seja

$$(16) \quad \omega_t(0) = \{s \in \mathbb{Z}^d : \text{para algum } n, 0 = s_0, s_1, \dots, s_n = s \\ \text{tal que } \|s_{i+1} - s_i\| = 1, i = 0, \dots, n-1 \text{ e } X_t(s_j) = 0 \text{ para } j = 1, \dots, n\}$$

o aglomerado vazio da origem no tempo t . E consideremos o seguinte conjunto:

$$D_k = \{s \in \mathbb{Z}^d : \|s\| = k\}.$$

Dessa forma definiremos o raio do aglomerado vazio da origem no instante t por

$$R_t(0) = \sup\{k : \omega_t(0) \cap D_k \neq \emptyset\}.$$

Convencionaremos que $\sup \emptyset = -\infty$. Podemos ver que o raio do aglomerado vazio da origem diminui pelo menos uma unidade a cada unidade de tempo decorrida, ou seja $R_{t+1}(0) \leq R_t(0) - 1$. De fato se $R_t(0) = k$, então todos os sítios em $\omega_t(0) \cap D_k$ tem d vizinhos ocupados, um em cada direção e conseqüentemente eles devem se tornar ocupados no tempo $t+1$. Com isso, observamos que se a origem se torna ocupada num tempo maior que t , então no tempo 0, o raio do aglomerado da origem não pode ser menor que t . Assim

$$P_p(T^d > t) \leq P_p(R_0(0) \geq t).$$

Se $R_0(0) \geq t$, então existe um caminho auto-evitante vazio a partir da origem de comprimento maior ou igual a t . Então

$$P_p(R_0(0) \geq t) \leq P_p(\cup_{l=t}^{\infty} \{\text{existe um caminho vazio de comprimento } l \text{ a partir da origem}\}).$$

Podemos verificar que o número de caminhos de comprimento l a partir da origem não é maior que $(2d - 1)^{l-1}(2d)$, isto porque a origem possui $2d$ vizinhos e cada um deles possui outros $2d - 1$ vizinhos. Assim

$$\begin{aligned} P_p(R_0(0) \geq t) &\leq \sum_{l=t}^{\infty} (1-p)^{l+1} (2d-1)^{l-1} (2d) \\ &= \frac{2d}{2d-1} (1-p) \sum_{l=t}^{\infty} [(1-p)(2d-1)]^l. \end{aligned}$$

A série acima converge se $(1-p)(2d-1) < 1$, ou seja, se $p > 1 - \frac{1}{2d-1}$. Neste caso

$$P_p(R_0(0) \geq t) \leq \frac{2d}{2d-1} (1-p) \frac{[(1-p)(2d-1)]^t}{1 - (1-p)(2d-1)}.$$

Logo

$$P_p(T^d > t) \leq P_p(R_t(0) \geq t) \leq C(p) \exp(-\gamma(p)t),$$

onde $C(p) = \frac{2d(1-p)}{2d-1} \frac{1}{1-(1-p)(2d-1)} > 0$ e $\gamma(p) = -\ln[(1-p)(2d-1)] > 0$.

□

Podemos observar que o comprimento de correlação $\xi_d(p)$ diverge quando p tende a 0. Isso porque vimos que $\gamma(p) > C_d/\xi_d(p)$ e $\gamma(p) \leq -2 \ln(1-p)$, ou seja $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma(p) = 0$. No capítulo seguinte provaremos que a divergência de $\xi_d(p)$ se dá mais rapidamente que a divergência de $1/p$ quando p tende a zero. Isso será feito a partir de uma análise rigorosa da função $R^d(N, p)$.

CAPÍTULO 5

Percolação de Bootstrap em volume finito

Em [3], Aizenmann e Lebowitz analisaram rigorosamente os efeitos do volume finito na Percolação de Bootstrap para modelos com $q = 2$. Neste capítulo, apresentaremos a demonstração do resultado obtido por esses autores. O objetivo principal aqui, será a busca de uma escala que relacione o tamanho linear de uma região finita com o valor da densidade inicial p , no sentido de descobrir o quão grande deve ser L para que Q_L seja internamente gerado. Verificaremos que o processo pelo qual hipercubos grandes são internamente gerados diz respeito a existência de gotas críticas nestes hipercubos.

Aizenmann e Lebowitz mostraram que a escala correta que relaciona p e L é

$$L \approx \exp[O(p^{-1/(d-1)})]$$

e que existe uma transição de fase para $R(L, p)$ no parâmetro $\lambda = p^{1/(d-1)} \ln L$. Eles verificaram isso mostrando que $R(L(p), p)$ se comporta aproximadamente como uma função degrau quando p tende a $p_c = 0$. Demonstraremos este resultado para \mathbb{Z}^2 através do Teorema 3 (enunciado no capítulo 2). Mais precisamente, mostraremos que o comportamento de $R(L, p)$ nos dois regimes descritos no Teorema 3 é dado por:

$$(17) \quad R(L, p) = \exp\{-p^{-1}[\lambda_c - \lambda + o(1)]\} \text{ para } o(1) < \lambda < \lambda_c \text{ e}$$

$$(18) \quad R(L, p) \geq 1 - \exp(-const \times L) \text{ para } \lambda > \lambda_c$$

e ainda temos as cotas:

$$C_1 \equiv 2^{-3} \sup\{g(z); z \geq 0\} \leq \lambda_c \leq \int_0^\infty [g(z)/z] dz \equiv C_2,$$

onde $g(z) = z \ln[1 - \exp(-z)]^{-1}$. Posteriormente, em um resultado surpreendente ([11]), foi determinado explicitamente $\lambda_c = \frac{\pi^2}{18}$.

Consideraremos $P_p(X_0(s) = 1) = 1 - e^{-p}$ e $P_p(X_0(s) = 0) = e^{-p}$. Naturalmente $1 - e^{-p} \approx p$ para $p \approx 0$.

Neste capítulo assumiremos

$$R(L, p) = P_p(Q_{L/2} \text{ é internamente gerado }).$$

Analisaremos $R(L, p)$ a partir de duas possíveis escalas para L , uma polinomial em p (como veremos, esta será a ordem do tamanho da gota crítica) e outra exponencial.

Usaremos n para o tamanho linear do quadrado $Q_{n/2}$ quando estivermos considerando a escala polinomial. Neste caso mostraremos que

$$(19) \quad R(n, p) \approx \exp[-p^{-1}(\hat{\sigma} + o(1))],$$

onde $\hat{\sigma}$ é uma constante que será estimada. A idéia para demonstrar o Teorema 3 será, então, mostrar que

$$(20) \quad R(L, p) \approx (L/n)^2 R(n, p),$$

estabelecendo-se cotas precisas. Teremos assim

$$R(L, p) \approx (L/n)^2 \exp[-p^{-1}(\hat{\sigma} + o(1))].$$

Precisaremos, então, determinar a escala para $L(p)$ de modo que $(L/n)^2$ seja da mesma ordem do que $\exp[-p^{-1}(\hat{\sigma} + o(1))]$, quando p tende a zero, ou seja, se $L(p) \approx \exp[p^{-1}(\lambda + o(1))]$, então $R(L, p) \approx \exp[-p^{-1}(\hat{\sigma}/2 - \lambda + o(1))]$.

Quando a escala para L passa a ser da ordem de $\exp(\lambda p^{-1})$, mostraremos, através do lema seguinte, que o mecanismo pelo qual regiões na escala L são internamente geradas envolve a ocorrência de gotas críticas na configuração inicial. Usaremos este fato para verificar uma forma precisa da Equação (20).

LEMA 10. *Seja $L \in (n(p), \exp(p^{-2}/16))$ e $n(p) = p^{-3}$. Considere os seguintes eventos:*

$$A_1(L) = \{Q_{L/2} \text{ é internamente gerado } \};$$

$$A_2(L) = \{Q_{L/2} \text{ contém uma translação do quadrado } Q_{n(p)/2} \text{ internamente gerada } \};$$

$$A_3(L) = \{Q_{L/2} \text{ contém uma translação do quadrado } Q_{n(p)/2} \text{ internamente gerada, centrada em um dos pontos da subrede } [n(p)/2]\mathbb{Z}^2 \}.$$

Então, para $p \rightarrow 0$, temos

$$P_p(A_i(L) \Delta A_j(L)) \leq 2 \exp(-p^{-2}/8)$$

para todos $i, j = 1, 2, 3$.

O lema nos diz então que para $L \in (n(p), \exp(p^{-2}/16))$ e $n(p) = p^{-3}$, os eventos $A_i(L)$, com $i = 1, 2, 3$, são quase equivalentes. Dessa forma poderemos estimar $R(L, p)$, já que é fácil calcular cotas precisas para a probabilidade do evento $A_3(L)$. De fato, temos

$$A_3(L) = \cup \{Q_{n(p)/2} \text{ é internamente gerado } \}$$

onde, com um pequeno abuso de notação, a união é sobre todas as translações de $Q_{n(p)/2}$ centradas em pontos da subrede $[n(p)/2]\mathbb{Z}^2$. Logo

$$P_p(A_3(L)) \leq \sum R(n, p) = \left(\frac{L}{n/2}\right)^2 R(n, p) = 4(L/n)^2 R(n, p).$$

Uma cota inferior para $P_p(A_3(L))$ é obtida ao observarmos que, se pelo menos uma translação de $Q_{n(p)/2}$ centrada em pontos da subrede $n(p)\mathbb{Z}^2$ dentro de $Q_{L/2}$ é internamente gerada, então $A_3(L)$ ocorre. Assim

$$P_p(A_3(L)) \geq 1 - [1 - R(n, p)]^{(L/n)^2} \geq 1 - \exp[-R(n, p)(L/n)^2].$$

Temos então

$$(21) \quad 1 - \exp[-R(n, p)(L/n)^2] - O(e^{-1/p^2}) \leq 1 - [1 - R(n, p)]^{(L/n)^2} - O(e^{-1/p^2}) \\ \leq R(L, p) \leq 4(L/n)^2 R(n, p) + O(e^{-1/p^2})$$

que é uma forma mais precisa para a expressão de (20) .

Consideremos agora a função $\sigma(L, p)$ definida implicitamente por:

$$(22) \quad R(L, p) \equiv \exp[-\sigma(L, p)p^{-1}]$$

Observamos que a análise do comportamento desta função remete à análise do comportamento de $R(L, p)$. Nesse sentido $\sigma(L, p)$ desempenhará papel crucial na demonstração do Teorema 3.

Analisando $\sigma(n, p)$ como uma função de n , o próximo lema garante que a mesma é aproximadamente constante para $n \in [p^{-1}/\epsilon, \exp(\epsilon p^{-1})]$, onde ϵ é uma quantidade pequena que tende a zero mais devagar que qualquer potência de p .

LEMA 11. *Para cada p , dado um par de números positivos $a \gg 1 \gg b$, tal que $a > 4 \ln p^{-1}$, existe $\hat{\sigma}(p) > 0$ tal que, $\sigma(\cdot, p)$, como uma função de n , é aproximadamente constante por todo regime*

$$(23) \quad ap^{-1} \leq n \leq \exp(bp^{-1}),$$

satisfazendo:

$$(24) \quad |\sigma(n, p) - \hat{\sigma}(p)| \leq 4b + \exp(-a/4).$$

Por (24) e pela definição de $\sigma(n, p)$, obtemos cotas precisas para a expressão de (19).

Provaremos as cotas para λ_c através do seguinte lema:

LEMA 12. *Para todo n e p , $\sigma(n, p)$ definida em (22) satisfaz:*

$$(25) \quad 4^{-1}g(2np) \leq \sigma(n, p) \leq 2 \int_0^\infty \frac{g(z)}{z} dz$$

onde $g(z) = z \ln[1 - \exp(-z)]^{-1}$.

Faremos a demonstração do Lema 11, seguida da demonstração do Teorema 3.

Prova do Lema 11:

Consideremos os seguintes eventos independentes

$$(26) \quad J_l = \{ \text{existe pelo menos um sítio ocupado em cada um dos 4 lados de } Q_l \}.$$

Fixemos $k = ap^{-1}$. Se o quadrado $Q_{k/2}$ for internamente gerado e se $\forall l \in [k/2, n/2]$, J_l ocorrer, então $Q_{n/2}$ será internamente gerado.

Logo $R(k, p) \cdot P_p(\bigcap_{l=k/2}^{n/2} J_l) \leq R(n, p)$.

Como $P_p(J_l) \geq \{1 - \exp[-p(2l+1)]\}^4$, onde $(2l+1)$ é a quantidade de sítios em cada lado de Q_l , então

$$\begin{aligned} \frac{R(n,p)}{R(k,p)} &\geq P_p\left(\bigcap_{l=k/2}^{n/2} J_l\right) = \prod_{l=k/2}^{n/2} P_p(J_l) = \prod_{l=k/2}^{n/2} \{1 - \exp[-p(2l+1)]\}^4 \\ &= \exp\left(-4 \sum_{l=k/2}^{n/2} \ln[1 - \exp(-p(2l+1))]^{-1}\right). \end{aligned}$$

Seja $f(s) = \ln[1 - \exp(-ps)]^{-1}$. Fazendo $s = 2l+1$, temos

$$2 \sum_{l=k/2}^{n/2} \ln[1 - \exp(-p(2l+1))]^{-1} \leq \int_k^{n+1} f(s) ds.$$

Assim

$$(27) \quad R(n,p) \geq R(k,p) \exp\left(-2 \int_k^{n+1} \ln[1 - \exp(-ps)]^{-1} ds\right).$$

Fazendo a mudança de variável $s = zp^{-1}$, obtemos:

$$(28) \quad \int_k^{n+1} \ln[1 - \exp(-ps)]^{-1} ds = \int_{kp}^{(n+1)p} [g(z)/z] p^{-1} dz \leq p^{-1} \int_{kp}^{\infty} [g(z)/z] dz,$$

sendo $g(z)$ a função definida no Lema 12.

Então

$$R(n,p) \geq R(k,p) \exp\left(-2p^{-1} \int_{kp}^{\infty} [g(z)/z] dz\right).$$

Como $a = kp$ temos

$$\int_{kp}^{\infty} [g(z)/z] dz = \int_a^{\infty} [g(z)/z] dz = \int_a^{\infty} \ln[1 - \exp(-z)]^{-1} dz.$$

Observemos ainda que, como $z > a > 0$, então $\ln[1 - \exp(-z)]^{-1} < Ce^{-z}$. Assim

$$\begin{aligned} 2p^{-1} \int_a^{\infty} \ln[1 - \exp(-z)]^{-1} dz &\leq 2p^{-1} C \int_a^{\infty} e^{-z} dz \\ &= 2p^{-1} C \exp(-a) \leq p^{-1} \exp(-a/2), \end{aligned}$$

para a suficientemente grande. Logo

$$(29) \quad R(n,p) \geq R(k,p) \exp[-p^{-1} \exp(-a/2)].$$

Seja S_l a coleção de retângulos com maior lado de tamanho l e

$$S(l,p) = \max_{R \in S_l} P_p(R \text{ é i.g.}).$$

Tomemos ainda

$$R_1(k,p) = \max_{l \in [(k-2)/2, k]} S(l,p).$$

Usaremos agora um lema geométrico que será demonstrado no Apêndice 3.

LEMA 13. Para todo $k \geq 1$, uma condição necessária para uma região $Q_{L/2}$, com $L/2 \geq k$, ser internamente gerada é que ela contenha pelo menos uma região retangular internamente gerada cujo tamanho do lado maior está no intervalo $[k, 2k + 2]$.

Pelo Lema 13, se $Q_{n/2}$ é internamente gerado, então existe em $Q_{n/2}$ pelo menos uma região retangular internamente gerada de lado maior em $[(k - 2)/2, k]$, assim

$$(30) \quad R(n, p) \leq (kn)^2 R_1(k, p),$$

onde $(kn)^2$ é uma cota superior para o número de retângulos de lado maior $l \in [(k - 2)/2, k]$ em $Q_{n/2}$. Por outro lado, seja $R \in S_l$, com $l \in [(k - 2)/2, k]$. Se R é internamente gerado e cada segmento de comprimento $(k - 2)/2$ adjacente a R tem pelo menos um sítio ocupado, então $Q_{k/2}$ é internamente gerado, ou seja,

$$\begin{aligned} R(k, p) &\geq P_p(R \text{ é i.g.}) \left(1 - \exp\left(-\frac{k-2}{2}p\right)\right)^{2k} = \\ &= P_p(R \text{ é i.g.}) \exp\{-2k \ln[1 - \exp(-p(k-2)/2)]^{-1}\}. \end{aligned}$$

Pela definição de $R_1(k, p)$, temos

$$R(k, p) \geq R_1(k, p) \exp\{-2k \ln[1 - \exp(-p(k-2)/2)]^{-1}\}.$$

Como $kp = a$, segue que $-p(k-2)/2 \leq -a/3$. Então

$$k \ln[1 - \exp(-p(k-2)/2)] \geq (a/p) \ln[1 - e^{-a/3}].$$

Além disso $-\ln(1 - \exp(-a/3)) \leq 2 \exp(-a/3)$, para a suficientemente grande. Assim

$$R(k, p) \geq R_1(k, p) \exp(-2ap^{-1} \exp^{-a/3}).$$

Temos ainda que $-2ap^{-1} \exp^{-a/3} \geq -p^{-1} \exp(-a/4)$. Logo

$$R(k, p) \geq R_1(k, p) \exp[-p^{-1} \exp(-a/4)].$$

Assim por (30),

$$(31) \quad R(n, p) \leq k^2 n^2 R(k, p) \exp[p^{-1} \exp(-a/4)].$$

Por (29) temos,

$$\sigma(n, p) = -p \ln R(n, p) \leq -p \ln[R(k, p)] + \exp(-a/2)$$

e, por (31), temos,

$$\sigma(n, p) \geq -p \ln[R(k, p)] - p \ln[(kn)^2] - \exp(-a/4).$$

Definindo $\hat{\sigma}(p) = -\ln[R(k, p)]p$ temos

$$-p \ln[(kn)^2] - \exp(-a/4) \leq \sigma(n, p) - \hat{\sigma}(p) \leq \exp(-a/2).$$

Logo

$$|\sigma(n, p) - \hat{\sigma}(p)| \leq \exp(-a/4) + p \ln(kn)^2.$$

Como $k \leq n \leq \exp(bp^{-1})$, então $p \ln(kn)^2 \leq 4b$ e assim

$$|\sigma(n, p) - \hat{\sigma}(p)| \leq 4b + \exp(-a/4).$$

□

PROVA DO TEOREMA 3. Primeiramente mostraremos:

(I) $R(L, p) = o(1)$ para $2\lambda < \hat{\sigma}(p)$ e

(II) $R(L, p) = 1 - o(1)$ para $L \leq \exp(p^{-2}/16)$ e $2\lambda > \hat{\sigma}(p)$

onde $R(k, p) = \exp[-\hat{\sigma}(p)p^{-1}]$.

Em seguida, usaremos o mesmo procedimento de renormalização utilizado na demonstração do Teorema 2 para mostrar que $R(L, p) = 1 - o(1)$, também no caso em que $L > \exp(p^{-2}/16)$.

(Prova de (I)) Pela segunda desigualdade em (21) e por (31), temos

$$R(L, p) \leq 4(L/n)^2 R(n, p) + O(e^{-p^{-2}}) \leq 4L^2 k^2 \exp[-\hat{\sigma}(p)p^{-1} + 4p^{-1} \exp(-a/4)].$$

Como $L = \exp(\lambda p^{-1})$ e $\exp(-a/4) < p$, (pois $a > 4 \ln p^{-1}$) então

$$\begin{aligned} R(L, p) &\leq (2k)^2 \exp[2\lambda p^{-1} - \hat{\sigma}(p)p^{-1} + 4] \\ &= \exp\{-p^{-1}[\hat{\sigma}(p) - 2\lambda + p(-2 \ln(2k) + 4)]\}. \end{aligned}$$

Logo

$$(32) \quad R(L, p) \leq \exp\{-p^{-1}[(\hat{\sigma}(p) - 2\lambda) + o(1)]\}.$$

Para a desigualdade contrária usaremos que

$$R(L, p) \geq 1 - [1 - R(n, p)]^{(L/n)^2} - O(e^{-p^{-2}}) \geq (L/n)^2 R(n, p)[1 - (L/n)^2 R(n, p)].$$

Vimos anteriormente que

$$(L/n)^2 R(n, p) \leq \exp\{-p^{-1}[(\hat{\sigma}(p) - 2\lambda) + o(1)]\} = o(1).$$

Como $2\lambda < \hat{\sigma}(p)$ então $1 - (L/n)^2 R(n, p) = O(1)$.

Por (29), temos

$$(L/n)^2 R(n, p) \geq \exp[2\lambda p^{-1} - 2 \ln n - \hat{\sigma}(p)p^{-1} - p^{-1} \exp(-a/2)].$$

Como $a \geq \ln p^{-4}$, então $-a/2 < \ln p^2$. Logo

$$(L/n)^2 R(n, p) \geq \exp\{-p^{-1}[\hat{\sigma}(p) - 2\lambda + p(2 \ln n + p^2)]\}.$$

Assim

$$R(L, p) \geq \exp\{-p^{-1}[(\hat{\sigma}(p) - 2\lambda) + o(1)]\} O(1).$$

Concluimos que (I) é satisfeita.

(Prova de (II)) Por (I) verificamos que $(L/n)^2 R(n, p) \geq \exp\{-p^{-1}[\hat{\sigma}(p) - 2\lambda + o(1)]\}$. Pela primeira desigualdade em (21) e como $2\lambda > \hat{\sigma}(p)$,

$$\begin{aligned} R(L, p) &\geq 1 - \exp[-R(n, p)(L/n)^2] - O(e^{-p^{-2}}) \geq \\ &\geq 1 - \exp\{-\exp[-p^{-1}(\hat{\sigma}(p) - 2\lambda) + o(1)]\} = 1 - o(1) \end{aligned}$$

Logo (II) é satisfeita.

Para obtermos uma cota inferior melhor para $R(L, p)$ e estendermos o resultado para $L > \exp(p^{-2}/16)$ usaremos um argumento de renormalização. Consideremos a rede renormalizada assim como definimos no Capítulo 4, onde os sítios serão quadrados $Q_{L_0/2}$, para algum $L_0 \geq 1$. Para cada configuração inicial de sítios ocupados em \mathbb{Z}^2 , obtemos uma configuração na rede renormalizada considerando um sítio (quadrado $Q_{L_0/2}$) como ocupado se $Q_{L_0/2}$ é internamente gerado. Executamos então neste sistema, o modelo polarizado.

Dado L um múltiplo de L_0 , observamos que se $Q_{(L/L_0)/2}$ na rede renormalizada é internamente gerado pelo modelo polarizado, então $Q_{L/2}$ é internamente gerado na rede original. Assim

$$(33) \quad \tilde{R}(L/L_0, R(L_0, p)) \leq R(L, p),$$

onde \tilde{R} é a função R para o modelo polarizado.

Consideremos os seguintes conjuntos de \mathbb{Z}^2 :

$$\begin{aligned} N &= \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2 : -k \leq s_1 \leq k \text{ e } s_2 = k\}; \\ S &= \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2 : -k \leq s_1 \leq k \text{ e } s_2 = -k\}; \\ E &= \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2 : s_1 = k \text{ e } -k \leq s_2 \leq k\} \text{ e} \\ O &= \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2 : s_1 = -k \text{ e } -k \leq s_2 \leq k\}. \end{aligned}$$

Usaremos agora um lema para encontrarmos uma cota superior para a probabilidade de $Q_{k/2}$ não ser internamente gerado pelo modelo Polarizado.

LEMA 14. *Seja A_k o evento em que existem dois caminhos*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ e } (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

tais que $x_1 \in N$ e $x_n \in S$ e $y_1 \in E$ e $y_n \in O$ e ainda $x_i, y_i \in Q_{k/2}$ e $X(x_i) = X(y_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Para o Modelo Polarizado, se A_k ocorre, então $Q_{k/2}$ é internamente gerado.

Prova do Lema 14: Se existem caminhos (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) tais que $x_1 \in N$ e $x_n \in S$ e $y_1 \in E$ e $y_n \in O$ e ainda $x_i, y_i \in Q_{k/2}$ e $X(x_i) = X(y_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, então existe um sítio s_j que pertence a ambos os caminhos. Além disso não existe contorno retangular de sítios vazios em torno de s_j . Logo $Q_{k/2}$ será internamente gerado. \square

Pelo Lema 14, temos

$$1 - \tilde{R}(k, p) \leq P_p(A_k^c).$$

Como A_k^c é o evento em que existe em \mathbb{Z}_*^2 (rede dual de \mathbb{Z}^2) pelo menos um dos dois caminhos (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) , com $x_i, y_i \in Q_{k/2}$ e $X(x_i) = X(y_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, então

$$(34) \quad P_p(A_k^c) \leq 2P_p(\{\exists \text{ um caminho } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ em } \mathbb{Z}_*^2 \text{ tal que} \\ x_1 \in N, x_n \in S; x_i \in Q_{k/2} \text{ e } X(x_i) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n\}) \\ \leq 2 \sum_{\delta} (1-p)^{|\delta|},$$

onde o somatório é sobre todos os caminhos “norte-sul” em $Q_{k/2}$. Assim

$$P_p(A_k^c) \leq 2 \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\delta: |\delta|=n} (1-p)^n.$$

Uma cota superior para a quantidade de caminhos norte-sul de tamanho n em $Q_{k/2}$ é $k7^n$. Portanto

$$P_p(A_k^c) \leq 2k \sum_{n=k}^{\infty} [7(1-p)]^n.$$

A série acima converge para $p > 6/7$. Neste caso, $\sum_{n=k}^{\infty} [7(1-p)]^n = \frac{[7(1-p)]^k}{1-7(1-p)}$. Dessa forma, para alguma constante $C > 0$, temos,

$$(35) \quad 1 - \tilde{R}(k, p) \leq 2k \frac{[7(1-p)]^k}{1-7(1-p)} \leq (1-p)^{Ck}.$$

Logo

$$(36) \quad \tilde{R}(k, p) \geq 1 - (1-p)^{Ck}$$

Fixado $p_0 = 13/14$, de modo que (36) seja satisfeita, escolhemos $L_0 = \exp[p^{-1}(\hat{\sigma}(p) + o(1))]$ para ser o menor valor de L tal que $R(L, p) \geq p_0$. Assim $\tilde{R}(L/L_0, R(L_0, p)) \geq \tilde{R}(L/L_0, p_0)$. Pelas Equações (33) e (36),

$$R(L, p) \geq \tilde{R}(L/L_0, R(L_0, p)) \geq \tilde{R}(L/L_0, p_0) \geq 1 - (1-p_0)^{C(L/L_0)}.$$

Logo

$$R(L, p) \geq 1 - \exp(-C \cdot L).$$

□

Passamos agora à demonstração dos outros lemas usados.

Prova do Lema 10:

Seja G o evento em que cada segmento linear de comprimento $n(p)/4$, alinhado a um dos eixos principais, tem pelo menos um sítio ocupado. Assim G^c é o evento em que existe pelo menos um segmento linear de comprimento $n(p)/4$ alinhado a um dos eixos principais, inteiramente vazio.

A probabilidade de um segmento linear de comprimento $n(p)/4$ estar inteiramente vazio é $\exp(-pn(p)/4)$. Logo

$$(37) \quad P_p(G^c) \leq 2L^2 \exp(-pn(p)/4),$$

pois $2L^2$ é uma cota superior para o número de tais segmentos lineares. Verifiquemos agora que $A_i(L)\Delta A_j(L) \subset G^c$ para $i, j = 1, 2, 3$. Usaremos a observação elementar que se $(A_i \cap G) \subset A_j$ e $(A_j \cap G) \subset A_i$, então $(A_i - A_j) \subset G^c$ e $(A_j - A_i) \subset G^c$, o que implica $A_i(L)\Delta A_j(L) \subset G^c$.

i) $A_1 \cap G \subset A_2$

Se A_1 ocorre, então, pelo Lema 13, existe um retângulo internamente gerado de lado maior no intervalo $[n(p)/2, n(p) + 2]$. Como G também ocorre, então cada lado maior desse retângulo possui pelo menos um sítio vizinho ocupado, já que tem comprimento maior ou igual à $n(p)/2$. O processo de ocupação continua até que os lados menores atinjam tamanho $n(p)$ e conseqüentemente os lados maiores, quando os menores já tiverem atingido tamanho $n(p)/2$. Assim $Q_{L/2}$ conterá uma região $Q_{n(p)/2}$ internamente gerada, ou seja, A_2 ocorre.

ii) $A_2 \cap G \subset A_3$ e $A_1 \cap G \subset A_3$.

As demonstrações das inclusões acima são análogas e por isso provaremos somente a primeira. Se A_2 ocorre, então existe uma translação de $Q_{n/2}$ internamente gerada. Pelo Lema 13, existe um retângulo nesta translação, de lado maior no intervalo $[n(p)/4, n(p)/2 + 2]$ que é internamente gerado. Um tal retângulo está necessariamente contido em uma translação de $Q_{n/2}$ centrada na rede $[n/2]\mathbb{Z}^2$. Como G também ocorre, esta última translação de $Q_{n/2}$ será internamente gerada.

Finalmente, as inclusões $A_3 \cap G \subset A_1$, $A_3 \cap G \subset A_2$ e $A_2 \cap G \subset A_1$ são imediatas.

Então, pela Equação (37),

$$P_p(A_i(L)\Delta A_j(L)) \leq 2L^2 \exp(-pn/4)$$

Como $L \leq \exp(p^{-2}/16)$ e $n(p) = p^{-3}$, então

$$2L^2 \exp(-pn/4) \leq 2 \exp(-p^{-2}/8).$$

□

Prova do Lema 12:

Considerando os eventos J_l definidos em (26) e observando que

$$\bigcap_{l=0}^{n/2} J_l \subset \{Q_{n/2} \text{ é internamente gerado}\},$$

concluimos que

$$R(n, p) \geq \exp\left(-2 \int_0^{n+2} \ln[1 - \exp(-ps)]^{-1} ds\right),$$

por um argumento análogo ao usado na obtenção de (27) do Lema 11.

Fazendo a mudança de variável $s = zp^{-1}$, obtemos $ds = p^{-1}dz$ e

$$\int_0^{n+2} \ln[1 - \exp(-ps)]^{-1} ds = p^{-1} \int_0^{(n+2)p} \ln[1 - \exp(-z)]^{-1} dz \leq p^{-1} \int_0^\infty g(z)/z dz.$$

Logo

$$(38) \quad R(n, p) \geq \exp\left(-2p^{-1} \int_0^\infty g(z)/z dz\right).$$

Para a desigualdade contrária consideremos uma partição de $Q_{n/2}$ em $n/2$ fatias disjuntas, de largura 2, paralelas a um eixo da rede. Seja H o evento em que existe pelo menos um sítio ocupado em cada uma dessas fatias. Observemos que

$$\{Q_{n/2} \text{ é internamente gerado}\} \subset H.$$

Assim $R(n, p) \leq P_p(H)$. Como $P_p(H) = [1 - \exp(-2pn)]^{n/2}$, onde $2n$ é a quantidade de sítios em cada fatia, então

$$R(n, p) \leq [1 - \exp(-2pn)]^{n/2} = \exp\{(-n/2) \ln[1 - \exp(-2pn)]^{-1}\}.$$

Além disso

$$g(2np) = 2np \ln[1 - \exp(-2np)]^{-1}.$$

Então

$$(39) \quad R(n, p) \leq \exp\left(-\frac{g(2np)}{4p}\right).$$

Logo

$$4^{-1}g(2np) \leq \sigma(n, p) \leq 2 \int_0^\infty \frac{g(z)}{z} dz$$

pelas Desigualdades (38) e (39).

□

CAPÍTULO 6

O expoente crítico ν

Neste capítulo estaremos interessados no estudo da função

$$\gamma_d(p) = \sup\{\gamma \geq 0 : \exists C < \infty \text{ tal que } P_p(T > t) \leq C \exp(-\gamma t)\}.$$

Analisaremos seu comportamento quando p se aproxima do ponto crítico π_c . Lembrando que

$$\pi_c = \inf\{p \in [0, 1] : \gamma(p) > 0\} = 0$$

pelo Teorema 2.

Na prova do Teorema 2, no Capítulo 4 vimos que $\gamma_1(p) = -2 \ln(1 - p)$. E como $\gamma_d(p)$ é decrescente em d , então $\gamma_d(p) \leq -2 \ln(1 - p)$ para todo $d \geq 1$. O Teorema 4 que será provado neste capítulo nos diz que a igualdade é válida para todo $d \geq 1$. Portanto $\lim_{p \rightarrow 0} \gamma(p) = 0$. Contudo podemos nos perguntar se existe um expoente crítico correspondente $\nu \in (0, \infty)$ tal que $\gamma(p) \approx (p - \pi_c)^\nu$. Veremos que a resposta a essa pergunta é positiva e provaremos também que

$$\nu = \lim_{p \searrow \pi_c} \frac{\log \gamma(p)}{\log(p - \pi_c)} = 1.$$

Provaremos o Teorema 4 definindo taxas de decaimento exponencial equivalentes a $\gamma(p)$ e mostrando que os expoentes críticos correspondentes a elas são iguais a ν .

Denotaremos por

$$\gamma_R(p) = \sup\{\gamma \geq 0 : \exists C < \infty, \text{ tal que } 1 - R(N, p) \leq C \exp(-\gamma N), \forall N > 0\}$$

a taxa de decaimento exponencial da probabilidade de Q_N não ser internamente gerado. O expoente crítico correspondente a $\gamma_R(p)$ será denotado por ν_R . Como $\pi_c = 0$, então podemos escrever

$$\nu_R \equiv \lim_{p \searrow 0} \frac{\log \gamma_R(p)}{\log p}.$$

Andjel mostrou em [4] que para o modelo polarizado em \mathbb{Z}^2 , $\nu_R = 1$ e Mountford provou em [13] que para o modelo polarizado, em todas as dimensões

$$\gamma_R(p) = -2 \ln(1 - p).$$

Essas afirmações ainda não são suficientes para verificarmos o Teorema 4. Precisaremos definir outra taxa de decaimento exponencial.

Dados $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{Z}^d$, com $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, nós dizemos que Γ_1 é gerado pela dinâmica restrita à Γ_2 por uma configuração $X \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ se, a partir desta configuração, deixando

o sistema evoluir de acordo com a dinâmica restrita à Γ_2, Γ_1 se torna inteiramente ocupado. Definimos

$$S(N, p) = P_p(\{Q_N \text{ é gerado pela dinâmica restrita a } Q_{2N}\}) \text{ e}$$

$$\gamma_S(p) = \sup\{\gamma \geq 0 : \exists C < \infty, \text{ tal que } 1 - S(N, p) \leq C \exp(-\gamma N), \forall N > 0\}$$

a taxa de decaimento exponencial da probabilidade de Q_N não ser gerado pela dinâmica restrita à Q_{2N} . O expoente crítico correspondente a $\gamma_S(p)$ será denotado por

$$\nu_S \equiv \lim_{p \searrow 0} \frac{\log \gamma_S(p)}{\log p}.$$

Para mostrarmos que $\nu = 1$, veremos que $\nu = \nu_R = \nu_S$ através do próximo lema e pela desigualdade $\gamma_R(p) \leq \gamma_S(p)$ que pode ser facilmente verificada, pois claramente $R(N, p) \leq S(N, p)$.

LEMA 15. *Para todos os modelos de percolação de Bootstrap aqui definidos e para todo $0 \leq p \leq 1$,*

$$\frac{1}{2(d+1)} \gamma_S(p) \leq \gamma(p) \leq \gamma_S(p).$$

Para verificarmos que $\gamma(p) = -2 \ln(1-p)$, veremos através do próximo lema que $\gamma_R(p) \leq \gamma(p)$.

LEMA 16. *Para o Modelo Polarizado $\gamma_R(p) \leq \gamma(p)$ para todo $p \in [0, 1]$ em qualquer dimensão.*

PROVA DO TEOREMA 4: O Lema 15 garante $\nu = \nu_S$, desde que os limites $\lim_{p \searrow 0} \frac{\log \gamma_S(p)}{\log p}$ e $\lim_{p \searrow 0} \frac{\log \gamma(p)}{\log p}$ existam.

Seja o evento $Y = \{X_0(s) = 0 \text{ para todo } s \in \{-2N, \dots, 2N\} \times \{0\}\}$. Se Y ocorre então nenhum sítio do conjunto $\{-N, \dots, N\} \times \{0\}$ será ocupado pela dinâmica restrita à Q_{2N} , já que eles possuem em uma mesma direção dois vizinhos vazios que não podem se tornar ocupados pela dinâmica restrita a Q_{2N} . Assim

$$P_p(Y) \leq 1 - S(N, p).$$

Como

$$(40) \quad P_p(Y) = (1-p)^{4N+1} = \exp[-(4N+1) \ln(1-p)^{-1}] = \\ = \exp[-4N \ln(1-p)^{-1}] \exp[-\ln(1-p)^{-1}],$$

então

$$1 - S(N, p) \geq C(p) \exp\{-[4 \ln(1-p)^{-1}]N\},$$

onde $C(p) = 1-p$. Logo $\gamma_S(p) \leq -4 \ln(1-p) = 2\gamma_R(p)$. Como $\gamma_R(p) \leq \gamma_S(p)$, então $\nu_R = \nu_S$.

Sabemos que $\nu_R = 1$, resultado obtido por Andjel em [4]. Logo $\nu = \nu_R = \nu_S = 1$.

Como $\gamma(p) \leq -2 \ln(1-p)$ e $\gamma_R(p) = -2 \ln(1-p)$, então pelo Lema 16

$$-2 \ln(1-p) = \gamma_R(p) \leq \gamma(p) \leq -2 \ln(1-p).$$

Logo $\gamma(p) = -2 \ln(1 - p)$. □

Antes de passarmos à prova dos Lemas 15 e 16, enunciaremos outros modelos de Percolação de Bootstrap que serão necessários no decorrer das demonstrações destes lemas.

Consideremos um modelo de Percolação de Bootstrap onde um sítio s , vazio no instante t , fique ocupado no instante $t + 1$, se s possui pelo menos um sítio vizinho ocupado em cada uma das d diferentes direções, fixada uma orientação para cada direção. O modelo definido desta forma é denominado Percolação de Bootstrap Orientado. Para cada uma das 2^d possíveis escolhas para o conjunto $\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\}$, temos um modelo orientado. Neste caso se $X_t(s) = 0$ e $\{s \pm e_1, s \pm e_2, \dots, s \pm e_d\} \subset B_s^t$ então $X_{t+1}(s) = 1$, caso contrário $X_{t+1}(s) = 0$. Lembrando que B_s^t é o conjunto dos sítios vizinhos a s que estão ocupados no instante t . Quando o conjunto escolhido é $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, denominamos o modelo de Modelo Básico Orientado.

Podemos verificar que o modelo de Percolação de Bootstrap Polarizado domina todos os modelos orientados. De fato, se há pelo menos um sítio vizinho a s em cada direção, fixada uma orientação, então certamente há pelo menos um vizinho ocupado em cada direção.

Prova do Lema 15:

Provaremos primeiro que $\gamma(p) \leq \gamma_S(p)$. Podemos supor $\gamma(p) > 0$, pois caso contrário não há nada a se mostrar. Dado $\gamma_2 < \gamma(p)$, existe $C_2 < \infty$ tal que $P_p(T > N) \leq C_2 \exp(-\gamma_2 N)$.

Se Q_N não é gerado pela dinâmica restrita a Q_{2N} , então até o instante N , Q_N não é inteiramente ocupado. Além disso, se $X_t(s) = 0$ para $s \in Q_N$ e $t \leq N$ na dinâmica d -dimensional restrita à Q_{2N} , então s também é vazio nesse mesmo instante se o sistema evolui de acordo com o modelo polarizado pela dinâmica X . Assim

$$\begin{aligned} 1 - S(N, p) &\leq P_p\left(\bigcup_{s \in Q_N} \{X_N(s) = 0\}\right) \\ &\leq |Q_N| P_p(T > N), \end{aligned}$$

pois o evento $\{X_N(s) = 0\}$ é invariante por translação. Então

$$1 - S(N, p) \leq (2N + 1)^d C_2 \exp(-\gamma_2 N).$$

Seja $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma(p)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2 - \epsilon$. Assim

$$1 - S(N, p) \leq (2N + 1)^d C_2 \exp(-\gamma_1 N - \epsilon N).$$

Logo existe $C_1 > C_2(2N + 1)^d \exp(-\epsilon N)$, tal que $1 - S(N, p) \leq C_1 \exp(-\gamma_1 N)$, o que implica $\gamma_1 \leq \gamma_S(p)$. Logo

$$\gamma(p) \leq \gamma_S(p).$$

Observemos que para o modelo de Percolação de Bootstrap com $q > d$, temos $\pi_c = 1$, ou seja, $\gamma(p) = 0$ para todo $p \in [0, 1)$. Além disso se tivermos Q_1 completamente

vazio, então Q_N não será gerado pela dinâmica restrita a Q_{2N} , pois os sítios de Q_1 nunca serão ocupados, já que os mesmos possuem pelo menos d vizinhos vazios. Assim

$$(1-p)^{3^d} = P_p(X_0(s) = 0, \forall s \in Q_1) \leq 1 - S(N, p).$$

Neste caso vemos então que $\gamma_s(p) = \gamma(p)$ para todo p .

Provaremos então a outra desigualdade apenas para os modelos de percolação com $q \leq d$.

Definiremos um caminho orientado positivamente de tamanho n em \mathbb{Z}^d por uma sequência

$$(s_1, s_2, \dots, s_n),$$

onde $s_i \in \mathbb{Z}^d$ e $s_{i+1} - s_i \in \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. E denotaremos por Ξ_n^+ o conjunto de todos os caminhos orientados positivamente em \mathbb{Z}^d de tamanho n .

Consideremos

$$(41) \quad \zeta_t(0) = \{s \in \mathbb{Z}^d : \exists v \in \Xi_n^+ \text{ tal que } s_1 = 0, s_n = s \text{ e } X_t(s_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

o aglomerado orientado vazio da origem no tempo t . Se $X_t(0) = 1$ então assumiremos $\zeta_t(0) = \emptyset$. Definiremos o raio do aglomerado orientado vazio da origem no instante t por

$$\begin{aligned} A_t(0) &= \sup\{1 + \sum_{i=1}^d |s_i| : s \in \zeta_t(0)\} \\ &= 1 + \sup\{\|s\| : s \in \zeta_t(0)\}. \end{aligned}$$

Quando $\zeta_t(0) = \emptyset$, $A_t(0) = 0$.

Consideremos os hipercubos $Q_{N,k}$, definidos em (8) e

$$\bar{Q}_{N,k} = \{u \in \mathbb{Z}^d : u - (2N+1)k \in Q_{2N}\},$$

com $k \in \mathbb{Z}^d$, de lados $2N+1$ e $4N+1$, respectivamente. Lembremos que $Q_{N,k}$ e $\bar{Q}_{N,k}$ são translações de Q_N e Q_{2N} respectivamente pelo vetor $(2N+1)k$.

Usaremos novamente um argumento de renormalização. Consideremos a rede renormalizada, assim como no Capítulo 4, onde seus sítios serão as translações definidas por (8). Por facilidade de notação denotaremos os sítios da rede renormalizada apenas por k . Assim como no Capítulo 4, o status de ocupação dos sítios renormalizados será definido pela variável aleatória $\eta_\tau(k)$. Para definirmos o tempo renormalizado τ , consideremos :

$$\varphi(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } Q_{N,k} \text{ é gerado pela dinâmica restrita a } \bar{Q}_{N,k} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observemos que a um tempo $(4N+1)^d$, todos os $Q_{N,k}$ que correspondem a um k com $\varphi(k) = 1$ devem ser completamente ocupados, pois se até o instante $(4N+1)^d = |Q_{N,k}|$, $Q_{N,k}$ não for inteiramente ocupado é porque a dinâmica alcançou a configuração final. Dessa forma podemos dizer que um sítio k da rede renormalizada

está ocupado se passado um tempo $t = (4N + 1)^d$, $\varphi(k) = 1$. Em vista do Lema 7, o tempo renormalizado será definido implicitamente por

$$t = (4N + 1)^d + (2dN + 1)\tau.$$

Logo

$$P_p(\eta_0(k) = 1) \geq P_p(\varphi(k) = 1) = S(N, p).$$

Definamos o aglomerado orientado vazio da origem na rede renormalizada por

$$(42) \quad \zeta(0) = \{k \in \mathbb{Z}^d : \exists v = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \Xi_n^+ \text{ tal que} \\ k_1 = 0, k_n = k \text{ e } \varphi(k_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

e seu respectivo raio por

$$B(0) = 1 + \sup\{\|s\| : s \in \zeta(0)\}.$$

Seja $M = (4N + 1)^d$. Como observamos anteriormente, se até o instante $t = M$, $Q_{N,k}$ não for inteiramente ocupado, então não o será mais. Temos então

$$\zeta_M(0) \subset \bigcup_{k \in \zeta(0)} Q_{N,k}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \sup\{\|s\| : s \in \zeta_M(0)\} &\leq \sup\{\|s\| : s \in \bigcup_{k \in \zeta_M(0)} Q_{N,k}\} \\ &\leq \sup\{\|s - (2N + 1)k\| + (2N + 1)\|k\| : s \in \bigcup_{k \in \zeta_M(0)} Q_{N,k}\} \\ &\leq dN + (2N + 1)B(0). \end{aligned}$$

Então

$$A_M(0) \leq B(0)(2N + 1) + dN.$$

Dado $r > 0$, consideremos, $N = \lfloor r^\delta \rfloor$, com $0 < \delta < 1/d$.

Para cada $\epsilon > 0$ definamos o evento $F_\epsilon = \{B(0) > r(1 - 2\epsilon)/(2N + 1)\}$. Então

$$F_\epsilon^c = \{B(0) \leq r(1 - 2\epsilon)/(2N + 1)\}.$$

Seja $\epsilon > 0$, tal que F_ϵ^c ocorre. Então $A_M(0) \leq r(1 - 2\epsilon) + dN$. Como $N = \lfloor r^\delta \rfloor$, para $0 < \delta < 1/d$, então $r^\delta > N$, e conseqüentemente $r > N^{1/\delta} > N^d \geq dN$, sendo a última desigualdade válida para $N \geq 3$ e $d \geq 2$. Podemos assumir r suficientemente grande tal que $N \geq 3$. Logo $A_M(0) \leq r(1 - 2\epsilon) + r \leq r(2 - \epsilon)$. Dessa forma temos

$$(43) \quad P_p(A_M(0) > r(2 - \epsilon)) \leq P_p(F_\epsilon).$$

Agora faremos uma comparação do modelo que estamos considerando com um modelo que tem a mesma dinâmica até o instante $(4N + 1)^d$ e depois evolui de acordo com o modelo básico orientado. Tal comparação não trará prejuízo à conclusão do teorema, já que a classe de modelos ($q \leq d$) aqui assumida domina o modelo básico orientado. Em [12], Schonman mostrou que para o modelo básico orientado

$$T = \inf\{t \geq 0 : X_t(0) = 1\} = A_0(0).$$

Assim

$$P_p(T > M + t) = P_p(A_0(0) > M + t) \leq P_p(A_M(0) > t).$$

Como $N < r^\delta$ então $(4N + 1)^d < (4r^\delta + 1)^d < 5^d r^{\delta d}$, onde a última desigualdade é válida para r grande. Logo

$$P_p(T > 5^d r^{\delta d} + t) \leq P_p(T > (4N + 1)^d + t) \leq P_p(A_M(0) > t).$$

Em particular

$$P_p(T > 5^d r^{\delta d} + r(2 - \epsilon)) \leq P_p(A_M(0) > r(2 - \epsilon)) \leq P_p(F_\epsilon),$$

onde a última desigualdade é válida por (43).

Podemos observar que $5^d r^{\delta d} + r(2 - \epsilon) = 5^d r^{\delta d} - \epsilon r + 2r < r$ para r suficientemente grande. Assim

$$(44) \quad P_p(T > r) \leq P_p(F_\epsilon).$$

Para uma cota superior para $P_p(F_\epsilon)$, observemos que se F_ϵ ocorre, então para $m = \lfloor r(1 - 2\epsilon)/(2N + 1) \rfloor$, existe um caminho $(0 = k_0, k_1, \dots, k_m = k)$ na rede renormalizada tal que $\|k_i - k_{i-1}\| = 1$, $i = 0, \dots, m - 1$ e $\varphi(k_j) = 0$ para $j = 1, \dots, m$. Observemos que se $\|k' - k''\| \geq d + 1$, então $\bar{Q}_{N,k'} \cap \bar{Q}_{N,k''} = \emptyset$. Assim, as variáveis aleatórias do conjunto $\{\varphi(k) : k \in \mathbb{Z}^d\}$ são dependentes apenas para um número finito de sítios k . Em particular as variáveis aleatórias

$$\varphi(k_1), \varphi(k_{1+(d+1)}), \dots, \varphi(k_{1+\lfloor (m-1)/(d+1) \rfloor \cdot (d+1)})$$

são mutuamente independentes e conseqüentemente

$$F_\epsilon \subset \bigcup_{\rho} \left(\bigcap_{i=1}^h \varphi(k_{1+i(d+1)}) = 0 \right),$$

onde a união é sobre os caminhos $(0, k_1, \dots, k_m)$ e $h = \lfloor (m - 1)/(d + 1) \rfloor$. Logo

$$P_p(F_\epsilon) \leq d^{m-1} (P_p(\varphi(0) = 0))^h.$$

Como $m - 1 > \frac{r(1-2\epsilon)}{(2N+1)} - 2$ e para r suficientemente grande, $2N + 1 \leq 2r^\delta$, então

$$m - 1 > \frac{r^{1-\delta}(1 - 2\epsilon)}{2} - 2.$$

Observamos ainda que $h > \frac{m-1}{d+1} - 1$. Então

$$h > \frac{r^{1-\delta}(1 - 3\epsilon)}{2(d+1)} - \frac{2}{d+1} - 1 + \frac{\epsilon r^{1-\delta}}{2(d+1)}.$$

Para r suficientemente grande temos $\frac{\epsilon r^{1-\delta}}{2(d+1)} - \frac{2}{d+1} - 1 > 0$. Assim

$$h > \frac{r^{1-\delta}(1 - 3\epsilon)}{2(d+1)}.$$

Além disso, $\frac{r(1-2\epsilon)}{(2N+1)} > m - 1$ e $r^\delta < 2N + 1$. Assim

$$m - 1 < \frac{r(1 - 2\epsilon)}{r^\delta} = r^{1-\delta}(1 - 2\epsilon) < r^{1-\delta}.$$

Logo

$$P_p(F_\epsilon) \leq d^{r^{1-\delta}} (1 - S(\lfloor r^\delta \rfloor, p))^{\frac{r^{1-\delta}(1-3\epsilon)}{2(d+1)}}.$$

Seja $0 < \gamma < \gamma_S(p)$. Estamos considerando $\gamma_S(p) > 0$, pois caso contrário não há o que mostrar. Pela definição de $\gamma_S(p)$, existe $C_1 < \infty$, tal que

$$1 - S(\lfloor r^\delta \rfloor, p) \leq C_1 \exp(-\gamma \lfloor r^\delta \rfloor) = C_1 \exp(\gamma\epsilon) \exp(-\gamma r^\delta) = C_2 \exp(-\gamma r^\delta),$$

onde $\epsilon = r^\delta - \lfloor r^\delta \rfloor$ e $C_2 = C_1 \exp(\gamma\epsilon)$. Assim

$$\begin{aligned} P_p(F_\epsilon) &\leq d^{r^{1-\delta}} C_2^{r^{1-\delta}(1-3\epsilon)/(2(d+1))} \exp[-\gamma r(1-3\epsilon)/2(d+1)] \\ &\leq d^{r^{1-\delta}} C_2^{r^{1-\delta}} \exp[-\gamma r(1-3\epsilon)/2(d+1)] = d^{r^{1-\delta}} C_2^{r^{1-\delta}} \exp\left(\frac{-\epsilon\gamma r}{2(d+1)}\right) \exp\left(\frac{-\gamma r(1-4\epsilon)}{2(d+1)}\right). \end{aligned}$$

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} d^{r^{1-\delta}} C_2^{r^{1-\delta}} \exp\left(\frac{-\epsilon\gamma r}{2(d+1)}\right) = 0$, então existe $C_3 < \infty$ tal que

$$d^{r^{1-\delta}} C_2^{r^{1-\delta}} \exp\left(\frac{-\epsilon\gamma r}{2(d+1)}\right) < C_3.$$

Logo

$$P_p(F_\epsilon) \leq C_3 \exp[-\gamma r(1-4\epsilon)/2(d+1)].$$

Assim por (44)

$$P_p(T > r) \leq C_3 \exp[-\gamma r(1-4\epsilon)/2(d+1)]$$

e portanto $\gamma(p) > \gamma(1-4\epsilon)/2(d+1)$, $\forall \gamma < \gamma_S(p)$ ou equivalentemente

$$\gamma < 2\gamma(p)(d+1)/(1-4\epsilon), \forall \gamma < \gamma_S(p).$$

Pela definição de $\gamma_S(p)$, temos $\gamma_S(p) \leq 2\gamma(p)(d+1)/(1-4\epsilon)$ ou seja $\gamma(p) \geq \frac{1-4\epsilon}{2(d+1)}\gamma_S(p)$.

Como ϵ é arbitrário, podemos considerá-lo tão pequeno que

$$\gamma(p) \geq \frac{1}{2(d+1)}\gamma_S(p).$$

□

Prova do Lema 16:

Na demonstração anterior definimos o aglomerado orientado vazio da origem no instante t , $\zeta_t(0)$. Consideremos agora $\zeta_t^+(0)$ e $\zeta_t^-(0)$ os aglomerados vazios orientados da origem no instante t , com o sistema evoluindo de acordo com o modelo básico orientado e com o modelo orientado onde $X_{t+1}(s) = 1$ se $X_t(s) = 0$ e $\{-e_1, \dots, -e_d\} \subset B_s^t$ ou $X_t(s) = 1$, respectivamente. Denotaremos por $A_t^+(0)$ e $A_t^-(0)$ seus respectivos raios.

Feremos uso mais uma vez de um argumento de renormalização. Assim como no Capítulo 4 e na demonstração do lema anterior, consideraremos os sítios da rede renormalizada pelas translações de Q_N definidas em (8) e os denotaremos por k . A variável aleatória que irá definir a dinâmica também será $\eta_\tau(s)$, que foi definida em (9), onde o tempo renormalizado τ também é definido implicitamente por

$$t = (2N+1)^d + (2dN+1)\tau.$$

Observamos também que

$$P_p(\eta_0(s) = 1) \geq R(N, p).$$

Sejam

$$(45) \quad \zeta(0)^+ = \{k \in \mathbb{Z}^d : \exists v = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \Xi_n^+ \text{ tal que} \\ k_1 = 0, k_n = k \text{ e } \eta_0(k_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

e

$$(46) \quad \zeta(0)^- = \{k \in \mathbb{Z}^d : \exists v = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \Xi_n^- \text{ tal que} \\ k_1 = 0, k_n = k \text{ e } \eta_0(k_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$$

os aglomerado vazios orientados na rede renormalizada, com o sistema evoluindo de acordo com o modelo básico orientado e com o modelo orientado onde $X_{t+1}(s) = 1$ se $X_t(s) = 0$ e $\{-e_1, \dots, -e_d\} \subset B_s^t$ ou $X_t(s) = 1$, respectivamente. Denotaremos por $B^+(0)$ e $B^-(0)$ seus respectivos raios. Tomemos $N = \lfloor r^\delta \rfloor$ onde $0 < \delta < 1/d$.

Denotemos por T^+ e T^- os instantes em que a origem será ocupada com o sistema evoluindo de acordo com o modelo básico orientado e com o modelo definido anteriormente pelo conjunto $\{-e_1, \dots, -e_d\}$, respectivamente. Como o modelo polarizado domina qualquer modelo orientado, então

$$(47) \quad P_p(T > (2N + 1)^d + t) \leq P_p(T^+ > (2N + 1)^d + t, T^- > (2N + 1)^d + t).$$

Seja agora $M = (2N + 1)^d$. Novamente pela proposição 4.1 de [12] temos

$$P_p(T^+ > M + t, T^- > M + t) \leq P_p(A_M^+(0) > t, A_M^-(0) > t).$$

Podemos verificar ainda que $A_M^\pm(0) \leq B^\pm(0)(2N + 1) + dN$, ou equivalentemente

$$B^\pm(0) \geq \frac{A_M^\pm(0) - dN}{(2N + 1)}.$$

Assim

$$(48) \quad P_p(A_M^+(0) > t, A_M^-(0) > t) \leq \\ P_p(B^+(0) > (t - dN)/(2N + 1), B^-(0) > (t - dN)/(2N + 1))$$

$$= [P_p(B^+(0) > (t - dN)/(2N + 1), B^-(0) > (t - dN)/(2N + 1) | \eta_0(0) = 0)] \cdot P_p(\eta_0(0) = 0) + \\ [P_p(B^+(0) > (t - dN)/(2N + 1), B^-(0) > (t - dN)/(2N + 1) | \eta_0(0) = 1)] \cdot P_p(\eta_0(0) = 1).$$

Os eventos $\{B^+(0) > (t - dN)/(2N + 1) | \eta_0(0) = 0\}$ e $\{B^-(0) > (t - dN)/(2N + 1) | \eta_0(0) = 0\}$ são independentes pois, fixando o status da origem eles dependem de conjuntos disjuntos de sítios. E como

$$P_p(B^+(0) > (t - dN)/(2N + 1), B^-(0) > (t - dN)/(2N + 1) | \eta_0(0) = 1) = 0,$$

então por (47) e (48), temos

$$(49) \quad P_p(T > (2N+1)^d + t) \leq P_p\left(B^+(0) > \frac{t-dN}{2N+1} \mid \eta_0(0) = 0\right) \cdot P_p\left(B^-(0) > \frac{t-dN}{2N+1} \mid \eta_0(0) = 0\right) \cdot P_p(\eta_0(0) = 0) \\ = P_p(\eta_0(0) = 0)^{-1} \cdot P_p\left(B^+(0) > \frac{t-dN}{2N+1}\right) \times P_p\left(B^-(0) > \frac{t-dN}{2N+1}\right).$$

Observemos que para r suficientemente grande temos $(2N+1)^d \leq 3^d r^{d\delta}$. Assim

$$P_p(T > 3^d r^{d\delta} + t) \leq P_p(T > (2N+1)^d + t).$$

Trocando t por $r(1-\epsilon)$ temos

$$P_p(T > 3^d r^{d\delta} + r(1-\epsilon)) \leq P_p\left(B^+(0) > \frac{r(1-\epsilon) - dN}{2N+1}\right) \cdot P_p\left(B^-(0) > \frac{r(1-\epsilon) - dN}{2N+1}\right).$$

Tomemos os seguintes eventos

$$F_\epsilon^+ = \left\{ B^+(0) > \frac{r(1-\epsilon) - dN}{2N+1} \right\} \text{ e } F_\epsilon^- = \left\{ B^-(0) > \frac{r(1-\epsilon) - dN}{2N+1} \right\}.$$

Como $3^d r^{d\delta} + r(1-\epsilon) = 3^d r^{d\delta} - r\epsilon + r < r$ para r suficientemente grande, então

$$P_p(T > r) \leq P_p(F_\epsilon^+) \cdot P_p(F_\epsilon^-).$$

Se F_ϵ^+ e F_ϵ^- ocorrem então para $m = \lfloor \frac{r(1-\epsilon) - dN}{2N+1} \rfloor$ existem na rede renormalizada, caminhos $(0 = k_0, k_1, \dots, k_m = k)$ e $(0 = -k_0, -k_1, \dots, -k_m = k)$. Como as variáveis aleatórias $\{\eta_0(k)\}$ são independentes então

$$P_p(T > r) \leq d^{2(m-1)} [P_p(\eta_0(0) = 0)]^{2(m-1)} \\ \leq d^{2r^{1-\delta}} [1 - R(\lfloor r^\delta \rfloor, p)]^{2r^{1-\delta}}.$$

Dado $0 < \gamma < \gamma_R(p)$, existem $C_1, C_2 < \infty$ tais que

$$1 - R(\lfloor r^\delta \rfloor, p) \leq C_1 \exp(-\gamma \lfloor r^\delta \rfloor) = C_1 \exp(\gamma\epsilon) \exp(-\gamma r^\delta),$$

onde $\epsilon = r^\delta - \lfloor r^\delta \rfloor$. O que implica

$$1 - R(\lfloor r^\delta \rfloor, p) \leq C_2 \exp(-\gamma r^\delta),$$

onde $C_2 = C_1 \exp(\gamma\epsilon)$.

Assim

$$P_p(T > r) \leq (C_2 d)^{2r^{1-\delta}} \exp(-2\gamma r) = (C_2 d)^{2r^{1-\delta}} \exp(-\gamma r) \exp(-\gamma r).$$

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} (C_2 d)^{2r^{1-\delta}} \exp(-\gamma r) = 0$, então existe $C_3 < \infty$ tal que

$$C_3 > (C_2 d)^{2r^{1-\delta}} \exp(-\gamma r).$$

Assim $P_p(T > r) \leq C_3 \exp(-\gamma r), \forall \gamma < \gamma_R$.

Então $\gamma(p) \geq \gamma, \forall \gamma < \gamma_R$, o que implica $\gamma(p) \geq \gamma_R(p)$. Logo $\gamma_R(p) \leq \gamma(p)$.

□

CAPÍTULO 7

Apêndice

1. A σ -álgebra gerada pelos cilindros

Seja $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$. Chamaremos de evento cilíndrico o conjunto das configurações de Ω nas quais fixamos o estado de um número finito de sítios e deixamos variar o estado do restante da rede, ou seja:

$$C_{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}^{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n} = \{\omega \in \Omega \mid X_{s_i} = a_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

onde $a_i \in \{0, 1\}$ e $s_i \in \mathbb{Z}^d$. Para não carregar a notação denotaremos esse evento cilíndrico apenas por C , sempre que não houver risco de ambigüidades.

Seja \mathcal{C} o conjunto dos eventos cilíndricos de Ω . Seja $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ as uniões finitas de conjuntos cilíndricos. Vamos mostrar que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ é uma álgebra de conjuntos.

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n \mid C_i \in \mathcal{C}\}$$

De fato temos que $\emptyset \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Tomamos $\emptyset = C_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{s_1, s_2, \dots, s_n}$, onde para algum i , tem-se $s_i = 1$ e $a_i = 0$. Seja $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$. Então

$$C^c = (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n)^c = C_1^c \cap C_2^c \cap \dots \cap C_n^c.$$

Como $C^c = \{\omega \in \Omega \mid X_{s_i} \neq a_i \text{ para pelo menos um dos } i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{C}$, então cada um dos conjuntos C_i^c é um conjunto de \mathcal{C} .

Temos também que a interseção de dois cilíndricos é um cilíndrico. De fato, sejam C_1 e C_2 conjuntos de \mathcal{C} tais que

$$C_1 = C_{a_1, a_2, \dots, a_n}^{s_1, s_2, \dots, s_n} \text{ e } C_2 = C_{b_1, b_2, \dots, b_n}^{l_1, l_2, \dots, l_n}.$$

Assim, $C_1 \cap C_2 = \{\omega \in \Omega \mid X_{s_i} = a_i \text{ e } X_{l_i} = b_i, i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{C}$. Observemos que se $s_i = l_j$ com $a_i \neq b_j$, então $C_1 \cap C_2 = \emptyset \in \mathcal{C}$.

Dessa forma podemos verificar que a interseção finita de conjuntos cilíndricos é um conjunto cilíndrico. Tomando

$$C_1^c \cap C_2^c \cap \dots \cap C_n^c = (C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n)^c \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset$$

temos então que complementar de cilíndricos é um conjunto de \mathcal{A} .

Temos também que a união finita de elementos de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ pertence a $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Concluimos que \mathcal{A} é uma álgebra.

Definamos a medida de um conjunto cilíndrico como:

$$(50) \quad m(C_{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}^{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n}) = p^{\#\{a_i=1\}} \cdot (1-p)^{\#\{a_i=0\}}$$

Podemos ver que m é uma medida em \mathcal{A} . Logo, pelo Teorema de Extensão de Hahn (ver, por exemplo, [6]), existe única medida μ na σ -álgebra \mathcal{F} que contém \mathcal{A} , a qual é uma extensão de m .

2. Ergodicidade da medida

Seja (X, \mathcal{B}, m) um espaço de probabilidade. Dizemos que um transformação $T : X \rightarrow X$ preserva medida se T é mensurável e $m(T^{-1}B) = m(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.

Então, se considerarmos os espaços de probabilidade descritos no Apêndice 1 e T uma translação, podemos verificar que T preserva medida.

Dizemos ainda que um transformação T é embaralhadora ¹ se dados $A, B \in \mathcal{B}$, então $m(A \cap T^{-n}B)$ tende a $m(A) \cdot m(B)$ (quando $n \rightarrow \infty$). T será ergódica se para todo $A \in \mathcal{B}$ com $T^{-1}(A) = A$ tivermos $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$.

Podemos provar que se T é embaralhadora, então T é ergódica. De fato, considere um espaço de probabilidade (X, \mathcal{B}, m) . Tomando $A, A^c \in \mathcal{B}$ e T uma transformação embaralhadora, temos que $m(A^c \cap T^{-n}A)$ tende a $m(A) \cdot m(A^c)$. Como A é invariante por T , então $T^{-n}A = A$ e consequentemente

$$m(A^c \cap T^{-n}A) = m(A^c \cap A) = m(\emptyset) = 0.$$

Logo $m(A) \cdot m(A^c) = 0$, o que implica $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$.

Voltando ao espaço de medida alvo de nosso estudo $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, queremos mostrar que as translações são embaralhadoras, logo ergódicas.

Sejam A e B dois eventos cilíndricos de \mathcal{F} . Dessa forma existe n_0 tal que $T^{-n_0}B$ e A são eventos que dependem de conjuntos disjuntos de sítios.

Assim $P_p(A \cap T^{-n_0}B) = P_p(A) \cdot P_p(T^{-n_0}B)$. Como B é cilíndrico e T preserva medida, então $P_p(A \cap T^{-n_0}B) = P_p(A) \cdot P_p(B)$, como queríamos.

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que para todo evento $A \in \mathcal{F}$ existe um cilíndrico $A_0 \in \mathcal{F}$, tal que $P(A \Delta A_0) < \varepsilon$. Tomemos então dois eventos A e B invariantes por translações e A_0 e B_0 dois eventos cilíndricos com a propriedade descrita acima.

Então temos

$$\begin{aligned} |P_p(A \cap T^{-n}B) - P_p(A) \cdot P_p(B)| &= \\ &= |P_p(A \cap T^{-n}B) - P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0) + P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0) - \\ &\quad - P_p(A_0) \cdot P_p(B_0) + P_p(A_0) \cdot P_p(B_0) - P_p(A) \cdot P_p(B)| \\ &\leq |P_p(A \cap T^{-n}B) - P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0)| + |P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0) - \\ &\quad P_p(A_0) \cdot P_p(B_0)| + |P_p(A_0) \cdot P_p(B_0) - P_p(A) \cdot P_p(B)|. \end{aligned}$$

¹Na literatura de língua inglesa o termo usado é “mixing”

Como $P_p(A \Delta A_0) < \varepsilon$ e $P_p(B \Delta B_0) < \varepsilon$, então $|P_p(A_0) \cdot P_p(B_0) - P_p(A) \cdot P_p(B)| = 0$.

Temos também que $|P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0) - P_p(A_0) \cdot P_p(B_0)| < \varepsilon/2$.

Como $P_p((A_0 \cap T^{-n}B_0) \Delta (A \cap T^{-n}B)) < \varepsilon/2$ pois

$$(A_0 \cap T^{-n}B_0) \Delta (A \cap T^{-n}B) \subset (A_0 \Delta A) \cup (T^{-n}B_0 \Delta T^{-n}B).$$

De fato se $\omega \in (A_0 \cap T^{-n}B_0) \Delta (A \cap T^{-n}B)$ então

$$(51) \quad \omega \in (A_0 \cap T^{-n}B_0) \text{ e } \omega \in (A \cap T^{-n}B)$$

ou

$$(52) \quad \omega \in (A \cap T^{-n}B) \text{ e } \omega \in (A_0 \cap T^{-n}B_0)$$

Se (51) acontecer, então $\omega \in (A \Delta A_0)$ ou $\omega \in (T^{-n}B \Delta T^{-n}B_0)$. Se (52) acontecer, também temos $\omega \in (A \Delta A_0) \cup (T^{-n}B \Delta T^{-n}B_0)$.

Então $|P_p(A \cap T^{-n}B) - P_p(A_0 \cap T^{-n}B_0)| < \varepsilon/2$.

Logo $|P_p(A \cap T^{-n}B) - P_p(A) \cdot P_p(B)| < \varepsilon$, donde segue

$$P_p(A \cap T^{-n}B) \longrightarrow P_p(A) \cdot P_p(B).$$

3. Demonstrações dos lemas geométricos

PROVA DO LEMA 7. Lembremos que $Q_N^d = \{s \in \mathbb{Z}^d : |s_i| \leq N, i = 1, \dots, d\}$.

Seja

$$S_l = \{s \in Q_N^d : s_1 + s_2 + \dots + s_d = l\}.$$

Para $l = -dN$ ou $l = dN$, S_l é um hiperplano que intercepta Q_N^d em um de seus vértices. No tempo $t = 1$, S_{dN} possui um sítio ocupado, já que $Q_{N,k}^d$ é completamente ocupado em $t = 0$. O mesmo vale para S_{-dN} . No tempo $t = 2$, S_{dN-1} possui mais de um sítio ocupado. Prosseguindo dessa forma, vemos que as regiões S_l são não vazias para $l = -dN, \dots, dN$. Além disso

$$Q_N^d = \bigcup_{l=-dN}^{dN} S_l$$

Se $s \in S_l$ então para $i = 1, \dots, d$, $s + e_i \in S_{l+1}$ ou então $s + e_i$ pertence a algum hipercubo $Q_{N,k}^d$, neste caso, quando s está em um dos vértices de S_l . Assim

$$s + e_i \in S_{l+1} \cup \left(\bigcup_{k=1}^d Q_{N,k}^d \right).$$

Então a um tempo $t \geq 1$, todos os conjuntos S_l , para $l = dN, dN - 1, \dots, dN + 1 - t$ serão completamente ocupados. Logo para $t = 2dN + 1$, $Q_N^d = \bigcup_{l=-dN}^{dN} S_l$ será completamente ocupado. \square

PROVA DO LEMA 9. Uma importante observação sobre a geometria dos conjuntos $L_I^d(k)$ é que se $s \in L_I^d(k)$ para algum $I = [(i), (a)] \in \mathcal{I}$ então $s - ae_i \in Q_{k-1}^d$. De fato, se $s \in L_I^d(k)$ para algum $I = [(i), (a)] \in \mathcal{I}$, então para algum i , $s_i = \pm k$ e para o restante das coordenadas temos $|s_j| < k$. Então $s - ae_i = (s_1, \dots, k-1, \dots, s_d)$ ou $s - ae_i = (s_1, \dots, -k+1, \dots, s_d)$ onde $k-1$ e $-k+1$ ocupam a i -ésima coordenada. Como $|k-1| = |-k+1| = k-1$, pois $k \geq 1$ e $|s_j| < k \Rightarrow |s_k| \leq k-1$, então, $s - ae_i \in Q_{k-1}^d$.

Podemos também observar que se $s \in L_I^d(k)$ para algum $I = ((i_1, \dots, i_r), (a_1, \dots, a_r)) \in \mathcal{I}$ e para algum $r \in \{2, \dots, d\}$, então $s - a_{i_u} e_{i_u} \in \bigcup_{J \in \mathcal{I}_{r-1}} L_J^d(k)$, para todo $s = 1, \dots, r$.

Chamemos de *hiperfaces* as regiões $L_I^d(k)$ de Q_k^d . Suponhamos que estas hiperfaces sejam internamente geradas na dinâmica $(d-r)$ -dimensional. Para que elas sejam internamente geradas na dinâmica d -dimensional é preciso que cada sítio de $L_I^d(k)$ possua pelo menos um vizinho ocupado em cada uma das d direções. Mas podemos observar que cada sítio de $L_I^d(k)$ já possui $d-r$ vizinhos ocupados, pois por hipótese Q_{k-1}^d é completamente ocupado.

Assim pela primeira observação feita acima, a cada instante que um 0 se torna 1 na dinâmica $(d-1)$ -dimensional restrita a algum $L_I^d(k)$, $I \in \mathcal{I}$, o mesmo ocorre com respeito à dinâmica d -dimensional restrita à Q_k^d . Consequentemente $\bigcup_{I \in \mathcal{I}_1} L_I^d(k)$ deve ser completamente ocupado nesta última dinâmica a um tempo Θ_1 .

As hiperfaces $L_I^d(k)$, $I \in \mathcal{I}_2$, serão internamente geradas pela dinâmica $(d-r)$ -dimensional pela configuração no tempo Θ_1 .

Pela segunda observação feita acima $\bigcup_{I \in \mathcal{I}_2} L_I^d(k)$ se tornará completamente ocupado, pela dinâmica d -dimensional restrita à Q_k^d em um tempo Θ_2 .

Indutivamente podemos verificar que $\bigcup_{r=1}^{d-1} (\bigcup_{I \in \mathcal{I}_2} L_I^d(k))$ se tornará completamente ocupado pela dinâmica d -dimensional restrita à Q_k^d a um tempo quase certamente finito Θ_{d-1} .

Logo no tempo $\Theta_{d-1} + 1$, Q_k^d se tornará completamente ocupado pela mesma dinâmica.

□

PROVA DO LEMA 13. Diremos que uma configuração em \mathbb{Z}^d é estacionária se seus sítios ocupados formarem uma coleção de retângulos separados por uma distância maior ou igual a 2.

Podemos considerar que a configuração restrita à $Q_{L/2}$ que gera $Q_{L/2}$ é determinada por uma construção algorítmica definida em etapas. Tal construção garantirá em cada etapa a existência de uma coleção de regiões retangulares (possivelmente se sobrepondo), as quais são internamente geradas. Definamos a coleção na n -ésima etapa por C_n .

Seja C_1 a coleção de todos os retângulos internamente gerados de lado maior 1 em $Q_{L/2}$ (podemos considerar como todos os sítios ocupados em $Q_{L/2}$). Se $Q_{L/2}$ é internamente gerado podemos garantir que existem, em $Q_{L/2}$, pelo menos dois retângulos de lado

maior 1 internamente gerados a uma distância menor ou igual à 2, pois caso contrário teríamos uma configuração estacionária impedindo $Q_{L/2}$ de ser internamente gerado.

Na etapa seguinte tomamos $C_2 = C_1 \cup \{\text{coleção de retângulos em } Q_{L/2} \text{ formados pela menor região retangular que contém um par de retângulos de } C_1 \text{ distantes não mais que } 2\}$. Obviamente tais retângulos são internamente gerados.

Procedendo assim, teremos na n -ésima etapa $C_n = C_{n-1} \cup \{\text{coleção de todos os retângulos em } Q_{L/2} \text{ formados pela menor região retangular que contém um par de retângulos de } C_{n-1} \text{ os quais estão a uma distância menor que } 2\}$. Aqui o tamanho do lado maior dos retângulos não ultrapassa $2\theta + 2 \leq 2n + 2$, onde θ é o tamanho do lado maior das regiões retangulares de C_{n-1} .

Assim o lema segue da observação que o tamanho do lado maior de cada retângulo em C aumenta no processo, mas não ultrapassa $2k + 2$ na k -ésima etapa. \square

4. Alguns lemas técnicos

LEMA 17. *Sejam n e a constantes positivas. Então*

$$(1 - ax)^n \geq 1 - nax$$

desde que $ax < 1$.

Prova: Temos

$$\frac{d}{dx}[(1 - ax)^n] = -na(1 - ax)^{n-1}$$

e

$$\frac{d}{dx}[1 - nax] = -na.$$

Como $ax < 1$ então $1 > 1 - ax > 0$ e conseqüentemente $-na(1 - ax)^{n-1} \geq -na$. Para $x = 0$ obtemos a igualdade. Logo a desigualdade segue.

\square

\square

LEMA 18. *Dados $a < 1$, C uma constante positiva e n um número natural, temos*

$$\prod_{k=1}^n (1 - Ca^k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n Ca^k.$$

Prova: (existe algum erro na prova desse lema?)

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (1 - Ca^k) &= (1 - Ca)(1 - Ca^2) \dots (1 - Ca^n) \\ &= 1 - C \sum_{k=1}^n a^k + \dots \end{aligned}$$

Para algum k_0 temos $1 - Ca^k < 1$ para todo $k \leq k_0$.

Como

$$\frac{d}{da} \left(\prod_{k=1}^{k_0} (1 - Ca^k) \right) = -C \sum_{k=1}^{k_0} ka^{k-1} \left(\prod_{i=1, i \neq k}^{k_0} (1 - Ca^i) \right)$$

e

$$\frac{d}{da} \left(1 - C \sum_{k=1}^{k_0} a^k \right) = -C \sum_{k=1}^{k_0} ka^{k-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(\prod_{k=1}^{k_0} (1 - Ca^k) \right) &\geq \frac{d}{da} \left(1 - C \sum_{k=1}^{k_0} a^k \right) \\ \Rightarrow \prod_{k=1}^{k_0} (1 - Ca^k) &\geq 1 - C \sum_{k=1}^{k_0} a^k \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

5. Alguns Resultados Heurísticos

Como mencionado no Capítulo 5, o mecanismo pelo qual um hipercubo $Q_{L/2}$, para L suficientemente grande, é internamente gerado envolve a ocorrência de gotas críticas em $Q_{L/2}$. Neste sentido, fixado um valor para p , buscaremos encontrar L suficientemente grande para que exista em $Q_{L/2}$ uma gota crítica de tamanho linear N .

Para $q = 3$ e $d = 3$, Schonmann observou que um cubo de aresta N se torna instável se suas faces são internamente geradas no modelo onde $d = 2$ e $q = 2$ (ver Lema 9). Como vimos no Capítulo 5, Aizenmann e Lebowitz mostraram que um quadrado de lado N é internamente gerado se

$$N \approx \exp[O(1/p)]$$

por esses resultados, uma gota crítica em $d = 3$ terá tamanho linear dessa ordem. A probabilidade de $Q_{N/2}^3$ estar inteiramente ocupado em $t = 0$ é

$$p^{N^3} = p^{[\exp(O(1/p))]^3} = p^{\exp(O(3/p))} = p^{\exp(O(1/p))}.$$

Devemos então encontrar L de modo que exista, em $Q_{L/2}^3$, uma gota crítica, ou seja, uma translação de Q_N inteiramente ocupada. A probabilidade de não existir um cubo de tamanho linear N inteiramente ocupado em $Q_{L/2}^3$ é

$$[1 - p^{\exp(O(1/p))}]^{(L/N)^3}.$$

Estamos interessados nos valores de L que fazem esta probabilidade tender a zero. Temos que

$$[1 - p^{\exp(O(1/p))}]^{(L/N)^3} \approx 0 \text{ se } (L/N)^3 \geq (1/p)^{\exp(O(1/p))},$$

ou seja,

$$L^3 \geq N^3 (1/p)^{\exp(O(1/p))}.$$

Como $N^3 = \exp(O(1/p))$, então

$$L^3 \geq \exp(O(1/p)) (1/p)^{\exp(O(1/p))} = (1/p)^{\exp(O(1/p))}.$$

Assim $L^3 = (1/p)^{\exp(O(1/p))}$, ou equivalentemente

$$\ln L^3 = \ln(1/p)^{\exp(O(1/p))} = \exp(O(1/p)) \ln(1/p).$$

Como $\ln(1/p) = O(1/p)$ e $\ln L^3 = 3 \ln L$ então $\ln L = \exp(O(1/p))(1/p)$ e portanto

$$\ln[\ln L] = O(1/p) + \ln(1/p) = O(1/p),$$

ou seja

$$(53) \quad p = O\left(\frac{1}{\ln(\ln L)}\right).$$

Usando o mesmo argumento, podemos ver que, para outras dimensões, no Modelo com Limiar Crítico, um fator \ln , extra, é acrescentado ao denominador de (53), para cada dimensão adicional, isto é, para dimensão d ,

$$p = O\left(\frac{1}{\ln^{d-1} L}\right).$$

Esse resultado foi obtido de modo rigoroso em [7], no caso tri-dimensional e, em [8] para qualquer dimensão.

Referências Bibliográficas

- [1] Joan Adler, *Bootstrap Percolation*, Physica A., **171**, 453-470, (1991).
- [2] J Adler, A Aharony, *Diffusion percolation. I. Infinite time limit and bootstrap percolation*, Journal of Physics A, **21**, no. 6, 1387-1404, (1988).
- [3] M.Aizenmann and J.L.Lebowitz *Metastability effects in bootstrap percolation*, J.Phys.A:Math. Gen., **21**, 3801-3813, (1988).
- [4] E.D.Andjel, *Characteristic exponents for two-dimensional bootstrap percolation*, The Annals of Probability, **21**, 926-935, (1993).
- [5] E.D.Andjel, T.S.Mountford e R.H.Schonmann, *Equivalence of exponential decay rates for bootstrap percolation like cellular automata*, Ann. Inst. Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques, **31** N.1, 13-25, (1995).
- [6] R Bartle, *The elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York (1966).
- [7] R. Cerf, Cirillo, *Finite Size Scaling in three-dimensional Bootstrap Percolation*, Annals of Probability, **27**, no. 4, 1837-1850, (1999).
- [8] R. Cerf, F. Manzo, *The Threshold regime of finite volume Bootstrap Percolation*, Stochastic Process and their Applications, **101**, no. 1, 69-82, (2002).
- [9] A van Enter *Proof of Straley's Argument for Bootstrap Percolation*, Journal of Statistical Physics, **107**, N.3-4, 943-945,(1987).
- [10] A.C.D. van Enter, Joan Adler, e J.A.M.S. Duarte, *Finite-Size Effects for Some Bootstrap Percolation Models*, Journal of Statistical Physics, **60**, N.3-4, 323, (1990).
- [11] A. Holroyd, *Sharp Metastability Threshold for two-dimensional Bootstrap Percolation*, Probability Theory and Related Fields, **125**, no.2, 195-224, (2003).
- [12] R. Schonmann, *On the behavior of some cellular automata related to Bootstrap Percolation*, Ann Probability, **20**, 174, (1992q12).
- [13] T.S.Mountford, *Rates for the probability of larges cubes being non-internally spanned in modified bootstrap percolation*, Probability Theory and Related Fields, **93**, 159-167, (1992).