

Dissertação de Mestrado

Expoentes de Lyapunov para o Estádio Circular

Autor

Luciano Coutinho dos Santos

Orientadoras

Sylvie Oliffson Kamphrost
Sônia Pinto de Carvalho

Financiamento: **CAPES**

Departamento de Matemática - ICEx - UFMG

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Bilhares | 3 |
| 1.1 | Mesa de Bilhar | 3 |
| 1.2 | Aplicação do Bilhar | 4 |
| 1.3 | Diferenciabilidade da Aplicação do bilhar | 5 |
| 2 | Expoentes de Lyapunov | 11 |
| 2.1 | Teorema de Oseledec | 14 |
| 2.2 | O Teorema de Oseledec e a Aplicação do Bilhar | 15 |
| 3 | Relação entre os Expoentes de Lyapunov do Fluxo e da Aplicação do bilhar | 19 |
| 3.1 | Idéia | 19 |
| 3.2 | Fluxo do Bilhar | 19 |
| 3.3 | Expoentes de Lyapunov para o Fluxo do Bilhar | 28 |
| 4 | Aplicação dos Resultados Estudados e Testes Computacionais | 38 |
| 4.1 | Introdução | 38 |
| 4.2 | Bilhar no Estádio Circular | 39 |
| 4.2.1 | Simulação Computacional de \mathcal{F} | 40 |
| 4.3 | Expoentes de Lyapunov | 41 |
| 4.3.1 | Triangularização de Matrizes | 43 |
| 4.3.2 | Algoritmo para Cálculo dos Expoentes de Lyapunov de \mathcal{F} | 44 |
| 4.3.3 | Expoentes de Lyapunov para o Fluxo do Bilhar | 45 |
| 4.4 | Testes Computacionais | 46 |
| | Referências Bibliográficas | 48 |

Capítulo 1

Bilhares

Nesse primeiro capítulo vamos estudar sucintamente o modelo matemático do bilhar.

1.1 Mesa de Bilhar

Seja Γ uma curva de \mathbb{R}^2 globalmente \mathcal{C}^1 , simples, fechada e convexa. Fazemos $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ onde cada Γ_i é uma curva de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 2$ e denotaremos por $|\Gamma| = \sum |\Gamma_i|$ o comprimento total da curva Γ . Aos extremos das Γ_i denominaremos pontos de *cola* (vide figura 1.1).

À região aberta \mathcal{B} , cujo bordo é Γ , denominamos **Mesa de Bilhar** e denominamos por $\overline{\mathcal{B}}$ seu fecho. (vide figura 1.1).

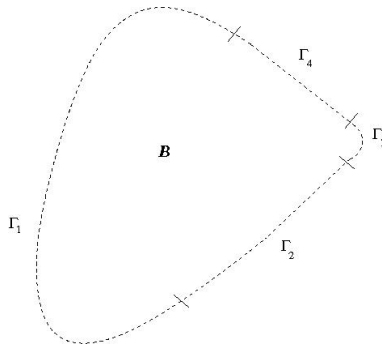


Figura 1.1: Mesa de Bilhar

Consideraremos Γ , orientada no sentido anti-horário e parametrizada pelo comprimento de arco, i.e, $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$, com $|\Gamma'(s)| = 1$. Aqui ' é a

derivada com relação a s . Assim, sem risco de confusão nos referiremos a um ponto $\Gamma(s)$ apenas como s .

1.2 Aplicação do Bilhar

Vamos construir uma aplicação a tempo discreto que nos ajudará a estudar o seguinte fenômeno:

Uma partícula se move livremente com velocidade constante igual a 1, no interior de uma região plana, limitada, com bordo suave por partes e sofrendo colisões elásticas com tal bordo.

Ou seja, dado um ponto s_0 do bordo Γ e um ângulo $\psi_0 \in (0, \pi)$ (entre a trajetória da partícula e o vetor tangente a Γ em s_0) essa aplicação, que denotaremos por \mathcal{F} , nos retorna um ponto s_1 , pertencente a Γ , de batida e um ângulo de saída ψ_1 de tal forma que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. (veja figura 1.2).

Observamos que como $\psi_0 \neq 0, \pi$ temos $s_1 \neq s_0$.

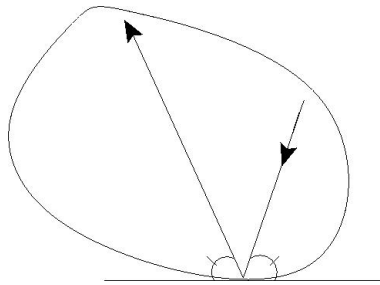


Figura 1.2: Aplicação do Bilhar

Seja $\mathcal{M} = [0, |\Gamma|) \times (0, \pi)$ o conjunto dos pontos (s, ψ) que definem as colisões da partícula. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s_0, \psi_0) &\mapsto (s_1(s_0, \psi_0), \psi_1(s_0, \psi_0)) \end{aligned}$$

A aplicação \mathcal{F} está bem definida em \mathcal{M} pois Γ é simples, convexa, fechada e globalmente \mathcal{C}^1 . Mais especificamente isto quer dizer que as correspondências $(s_0, \psi_0) \mapsto s_1(s_0, \psi_0)$ e $(s_0, \psi_0) \mapsto \psi_1(s_0, \psi_0)$ são de fato funções.

Seja $\mathcal{I} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ dada por $\mathcal{I}(s, \psi) = (s, \pi - \psi)$. Assim, sendo \mathcal{F}^{-1} a inversa de \mathcal{F} , temos $\mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{-1}$, \mathcal{F}^{-1} é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$$

Portanto \mathcal{F} é inversível e \mathcal{F}^{-1} difere de \mathcal{F} pela mudança de coordenadas \mathcal{I} .

1.3 Diferenciabilidade da Aplicação do bilhar

Fixado o sistema de coordenadas, descrito na seção 1.2, nosso objetivo nessa seção é mostrar que a aplicação \mathcal{F} é globalmente contínua em \mathcal{M} e um difeomorfismo \mathcal{C}^{k-1} em um subconjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} .

Vamos estudar as funções $s_1(s_0, \psi_0)$ e $\psi_1(s_0, \psi_0)$. Dados \tilde{s}_0 e \tilde{s}_1 pontos distintos de Γ , consideremos a trajetória do bilhar de \tilde{s}_0 a \tilde{s}_1 , i.e, $\mathcal{F}(\tilde{s}_0, \tilde{\psi}_0) = (\tilde{s}_1, \tilde{\psi}_1)$. Tomemos

$$\tilde{P}_0 = (x(\tilde{s}_0), y(\tilde{s}_0)) \quad \text{e} \quad \tilde{P}_1 = (x(\tilde{s}_1), y(\tilde{s}_1))$$

Fazendo se necessário uma rotação da curva Γ , sempre podemos supor $x'(\tilde{s}_0) \neq 0$, $x'(\tilde{s}_1) \neq 0$ e $x(\tilde{s}_0) \neq x(\tilde{s}_1)$, onde $'$ é a derivada com relação a s . Denotemos por $P_0 = (x(s_0), y(s_0))$ um ponto arbitrário numa vizinhança U_0 de \tilde{P}_0 e $P_1 = (x(s_1), y(s_1))$ ponto de uma vizinhança U_2 de \tilde{P}_1 . Podemos supor tais vizinhanças disjuntas pois $s_0 \neq s_1$. Por continuidade e reduzindo, se necessário, as vizinhanças U_0 e U_1 podemos sempre tomar $x'(s_0) \neq 0$, $x'(s_1) \neq 0$ e $x(s_0) \neq x(s_1)$.

Consideremos a trajetória do bilhar de P_0 até P_1 com ângulo de saída ψ_0 e de batida ψ_1 , ou seja $\mathcal{F}(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1)$.

Seja $\gamma_0 = \gamma(s_0)$ e $\gamma_1 = \gamma(s_1)$ os ângulos entre o vetor tangente e o eixo x positivo nos pontos P_0 e P_1 respectivamente.

Temos que

$$\tan(\gamma_0) = \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)} \quad \text{e} \quad \tan(\gamma_1) = \frac{y'(s_1)}{x'(s_1)}$$

Se $\omega \in (0, 2\pi)$ é o ângulo entre o eixo x e a trajetória do bilhar, é fácil ver (vide figura 1.3) que

$$\psi_0 = \omega - \gamma_0, \quad \psi_1 = \gamma_1 - \omega \quad (1.1)$$

$$\tan(\omega) = \frac{y(s_1) - y(s_0)}{x(s_1) - x(s_0)}$$

Resolvendo as equações acima para ψ_0 e ψ_1 obtemos:

$$\psi_0 = \arctan\left(\frac{y(s_1) - y(s_0)}{x(s_1) - x(s_0)}\right) - \arctan\left(\frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}\right) := G(s_0, s_1) \quad (1.2)$$

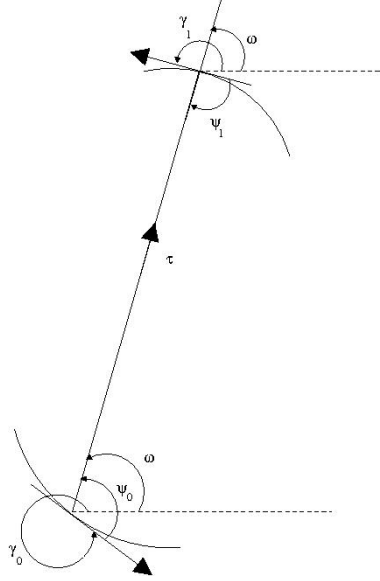


Figura 1.3:

$$\psi_1 = \arctan\left(\frac{y'(s_1)}{x'(s_1)}\right) - \arctan\left(\frac{y(s_1) - y(s_0)}{x(s_1) - x(s_0)}\right) := H(s_0, s_1) \quad (1.3)$$

Notemos que, como $x(s)$ e $y(s)$ são globalmente de classe \mathcal{C}^1 temos que as funções $H : U_0 \times U_1 \rightarrow (0, \pi)$ e $G : U_0 \times U_1 \rightarrow (0, \pi)$ são contínuas.

Por hora vamos verificar, utilizando a equação 1.2, que a função $s_1 = s_1(s_0, \psi_0)$ é globalmente contínua em \mathcal{M} , i.e. para todo $(s_0, \psi_0) \in [0, |\Gamma|] \times (0, \pi)$. Claramente isso vai implicar, pela equação 1.3, que o mesmo vale para $\psi_1 = \psi_1(s_0, \psi_0)$. E com isso \mathcal{F} será globalmente contínua em \mathcal{M} .

Consideremos $\tilde{U}_1 \subset U_1$ uma vizinhança compacta de P_1 em Γ . Definamos a função contínua $F_0 : U_0 \times (0, \pi) \times \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_0(s_0, \psi_0, s_1) = G(s_0, s_1) - \psi_0$$

A continuidade de $s_1(s_0, \psi_0)$ segue do seguinte lema cuja demonstração se encontra em (EL, cap III, pag. 162):

Lema 1. *Se F_0 é contínua e ξ é implicitamente definida por $F_0(s, \psi, \xi(s, \psi)) = 0$, então ξ é contínua.*

Pelo lema, s_1 é função contínua de (s_0, ψ_0) pois se (s_0, ψ_0, s_1) satisfaz 1.2 então $F_0(s_0, \psi_0, s_1) = 0$ e $F_0^{-1}(0)$ é o gráfico de $s_1(s_0, \psi_0)$.

No que se segue vamos mostrar que \mathcal{F} é de classe \mathcal{C}^{k-1} $k \geq 2$ em um

subconjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ de \mathcal{M} .

Considerando as funções G e H como definidas em 1.2 e 1.3, temos que, se excluirmos os pontos de *cola*, elas são de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Definamos, as seguintes funções de classe \mathcal{C}^{k-1}

$$F_1(s_0, \psi_0, s_1, \psi_1) = G(s_0, s_1) - \psi_1$$

$$F_2(s_0, \psi_0, s_1, \psi_1) = H(s_0, s_1) - \psi_1$$

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida no aberto $U = U_0 \times (0, \pi) \times U_1 \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^4$ por

$$F(s_0, \psi_0, s_1, \psi_1) = (F_1(s_0, \psi_0, s_1, \psi_1), F_2(s_0, \psi_0, s_1, \psi_1))$$

F é de classe \mathcal{C}^{k-1} e $a = (\tilde{s}_0, \tilde{\psi}_0, \tilde{s}_1, \tilde{\psi}_1)$ satisfaz $F(a) = \vec{0}$.

Considerando uma decomposição $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ tal que $a = (a_1, a_2)$ temos:

$$J = \det [\partial_2 F(a)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(a)}{\partial s_1} & \frac{\partial F_1(a)}{\partial \psi_1} \\ \frac{\partial F_2(a)}{\partial s_1} & \frac{\partial F_2(a)}{\partial \psi_1} \end{vmatrix}$$

e podemos ver, a partir de 1.2 e 1.3, que

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial G(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} & 0 \\ \frac{\partial H(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial G(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1}$$

Derivando 1.2 obtemos

$$\frac{\partial G(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} = \frac{\begin{vmatrix} x'(\tilde{s}_1) & y'(\tilde{s}_1) \\ x(\tilde{s}_1) - x(\tilde{s}_0) & y(\tilde{s}_1) - y(\tilde{s}_0) \end{vmatrix}}{[x(\tilde{s}_1) - x(\tilde{s}_0)]^2 + [y(\tilde{s}_1) - y(\tilde{s}_0)]^2} \quad (1.4)$$

Portanto, como F é de classe \mathcal{C}^{k-1} $k \geq 2$ temos que, onde 1.4 for não nulo poderemos usar o Teorema da Função Implícita para concluir que é possível escrever as funções implícitas $s_1 = s_1(s_0, \psi_0)$ e $\psi_1 = \psi_1(s_0, \psi_0)$ de classe \mathcal{C}^{k-1} . Ou seja, \mathcal{F} é de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Mas de fato 1.4 é não nula pois no numerador temos um determinante cujas linhas são vetores linearmente independentes. O denominador também é não nulo pois $\tilde{P}_0 \neq \tilde{P}_1$.

Com isso \mathcal{F} é de classe \mathcal{C}^{k-1} no subconjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ que obtemos retirando de \mathcal{M} o conjunto $\{(s, \psi); s \in \Gamma \text{ é um ponto de } \textit{cola}\}$ juntamente com suas imagens e pré imagens por \mathcal{F} (retirando as imagens e pré imagens garantimos

que qualquer iterada de \mathcal{F} será de classe \mathcal{C}^{k-1} em $\tilde{\mathcal{M}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \tilde{\mathcal{M}} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{M}} \\ (s_0, \psi_0) &\mapsto (s_1(s_0, \psi_0), \psi_1(s_0, \psi_0)) \end{aligned}$$

é de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Ao conjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ denominamos *Espaço de fase do Bilhar*.

Um fato muito importante de se observar é que se considerarmos em \mathcal{M} a medida de Lebesgue, temos que $\tilde{\mathcal{M}}$ possui medida total, mais que isso, $\tilde{\mathcal{M}}$ é a interseção enumerável de conjuntos abertos e densos em \mathcal{M} . De fato, o conjunto de pontos (s, ψ) onde s é um ponto de cola e $\psi \in (0, \pi)$, é composto pela união finita de segmentos de reta em \mathcal{M} e portanto é fechado de medida nula. As imagens e pré-imagens desse conjunto, por \mathcal{F} , são formadas pela união finita de curvas de comprimento finito em \mathcal{M} (SK, pag 231-233), portanto também possui medida nula. Assim é imediato que o complementar da união dos conjuntos descritos nesse parágrafo, é uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos em \mathcal{M} e possui medida de Lebesgue total.

Proposição 1. *Consideremos $\mathcal{F}(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1)$ e associados a s_0 e s_1 respectivamente sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) pontos do bordo de Γ .*

A derivada da aplicação do bilhar é dada por

$$D_{(s_0, \psi_0)}\mathcal{F} = \frac{1}{\sin \psi_1} \begin{bmatrix} \tau_{01}\kappa_0 - \sin \psi_0 & \tau_{01} \\ \kappa_1(\tau_{01}\kappa_0 - \sin \psi_0) - \kappa_0 \sin \psi_1 & \tau_{01}\kappa_1 - \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

onde $(s_0, \psi_0) \in \tilde{\mathcal{M}}$.

Prova:

Como descrito anteriormente sejam, ω o ângulo entre o eixo x positivo e a trajetória do bilhar, γ o ângulo anti-horário entre o eixo x positivo e o vetor tangente e τ_{01} a distância entre os dois pontos de colisão. Vale a pena observar que como a partícula se move com velocidade em módulo igual a 1 τ_{01} também é o tempo de voo entre as batidas. (vide figura 1.3)

Assim:

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \tau_{01} \cos \omega \\ y_1 - y_0 &= \tau_{01} \sin \omega \end{aligned} \quad (1.6)$$

E relembramos que

$$\omega = \gamma_0 + \psi_0 = \gamma_1 - \psi_1 \quad (1.7)$$

Se κ_0 é a curvatura de Γ em s_0 então:

$$\begin{aligned} dx_0 &= \cos \gamma_0 ds_0 \\ dy_0 &= \sin \gamma_0 ds_0 \\ d\gamma_0 &= \kappa_0 ds_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Diferenciando 1.7 e 1.6:

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\gamma_0 + d\psi_0 = d\gamma_1 - d\psi_1 \\
d\omega &= \kappa_0 ds_0 + d\psi_0 = \kappa_1 ds_1 - d\psi_1 \\
dx_1 - dx_0 &= d\tau_{01} \cos \omega - \tau_{01} \sin \omega d\omega \\
dy_1 - dy_0 &= d\tau_{01} \sin \omega + \tau_{01} \cos \omega d\omega
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Substituindo 1.8 nas duas últimas equações acima, obtemos

$$\cos \gamma_1 ds_1 - \cos \gamma_0 ds_0 = d\tau_{01} \cos \omega - \tau_{01} \sin \omega d\omega \tag{1.10}$$

$$\sin \gamma_1 ds_1 - \sin \gamma_0 ds_0 = d\tau_{01} \sin \omega + \tau_{01} \cos \omega d\omega \tag{1.11}$$

Agora, multiplicando 1.10 por $-\sin \omega$, 4.10 por $\cos \omega$ e somando as duas equações temos:

$$\begin{aligned}
\sin(\gamma_1 - \omega) ds_1 + \sin(\omega - \gamma_0) ds_0 &= \tau_{01} d\omega \\
\sin(\psi_1) ds_1 + \sin(\psi_0) ds_0 &= \tau_{01} d\omega
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Resolvendo 1.12 e 4.3 para ds_1 e $d\psi_1$

$$-\sin \psi_1 ds_1 = (\tau_{01} \kappa_0 + \sin \psi_0) ds_0 - \tau_{01} d\psi_0$$

$$\sin \psi_1 d\psi_1 = (\tau_{01} \kappa_0 \kappa_1 + \kappa_0 \sin \psi_1 + \kappa_1 \sin \psi_0) ds_0 - (\tau_{01} \kappa_1 + \sin \psi_1) d\psi_0$$

Dai

$$D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F} = \frac{1}{\sin \psi_1} \begin{bmatrix} \tau_{01} \kappa_0 - \sin \psi_0 & \tau_{01} \\ \kappa_1 (\tau_{01} \kappa_0 - \sin \psi_0) - \kappa_0 \sin \psi_1 & \tau_{01} \kappa_1 - \sin \psi_1 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

□

Como sabemos que, em $\tilde{\mathcal{M}}$, s_1 e ψ_1 são funções diferenciáveis (classe \mathcal{C}^{k-1}) de s_0 e ψ_0 e a curvatura κ é de classe \mathcal{C}^{k-2} temos que a derivada 1.5 é também de classe \mathcal{C}^{k-2} . Como

$$|\det D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}| = \left| \frac{\sin \psi}{\sin \psi_1} \right| \neq 0 \tag{1.14}$$

temos que $D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}$ é isomorfismo. Como \mathcal{F}^{-1} , dada por $\mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$, é também de classe \mathcal{C}^{k-1} temos que \mathcal{F} é difeomorfismo de classe \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 3$.

Lema 2. A aplicação \mathcal{F} preserva a medida $d\mu = \sin \psi ds d\psi$. Ou seja para qualquer boreliano $A \subset \tilde{\mathcal{M}}$

$$\mu(A) = \mu(\mathcal{F}(A)) \text{ i.e. } \int_{\mathcal{F}(A)} \sin \psi_1 ds_1 d\psi_1 = \int_A \sin \psi ds d\psi$$

Prova: De fato, sendo \mathcal{F} difeomorfismo \mathcal{C}^{k-1} temos pelo teorema da mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}(A)} \sin \psi_1 ds_1 d\psi_1 &= \int_A \sin \psi_1 |\det D_{(s,\psi)} \mathcal{F}| ds d\psi \\ &= \int_A \sin \psi ds d\psi \end{aligned} \tag{1.15}$$

Na última igualdade usamos 1.14.

□

Notemos que

$$\int_{\mathcal{M}} \sin \psi ds d\psi = 2|\Gamma|.$$

e a probabilidade

$$d\mu = \frac{1}{2|\Gamma|} \sin \psi ds d\psi$$

é invariante pelo bilhar. Vale chamar a atenção também para o fato de que o conjunto $\tilde{\mathcal{M}}$, dos pontos onde \mathcal{F} é de classe \mathcal{C}^{k-1} , possui medida μ total. Assim μ também é probabilidade invariante em \mathcal{M} .

Capítulo 2

Expoentes de Lyapunov

Quando estudamos um sistema dinâmico, uma das questões mais frequentes que se coloca é a da existência de caos em tal sistema. Existem muitas definições de caos mas a maioria delas concorda no que diz respeito à presença de sensibilidade nas condições iniciais.

O que estudaremos nessa seção é uma quantidade que mede esse fenômeno denominada Expoente de Lyapunov.

Antes de definirmos os expoentes de Lyapunov relembremos um importante resultado de teoria ergódica:

Teorema 1. (Teorema Ergódico de Birkhoff)

Seja $X \subset \mathbb{R}$ espaço com medida de Lebesgue finita, e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva medida. Se $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então

1. o limite: $g^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x))$ existe Lebesgue-*q.t.p.*;

2. $g^*(Tx) = g^*(x)$ Lebesgue-*q.t.p.*;

3. g^* é integrável e $\int_X g^*(x)dx = \int_X g(x)dx$;

Dizemos que uma aplicação $T : X \rightarrow X$ é ergódica se toda função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $g \circ T = g$ é constante *q.t.p.*

Demonstração: Ver (MAN, Ricardo Mañe).

Em caráter ilustrativo vamos primeiramente introduzir informalmente o conceito de expoentes de Lyapunov para uma aplicação diferenciável $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, onde a e b são números reais. Em seguida estendê-lo-emos para \mathbb{R}^m $m > 1$.

Sejam x_0 e $x_0 + \Delta h$, com Δh muito pequeno, condições iniciais próximas.

Queremos descrever o valor de $|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \Delta h)|$ com $n \gg 1$. Esse valor, que a princípio dependeria não apenas de x_0 e n mas também de Δh , vai medir o que acontece com a órbita de $x_0 + \Delta h$ com relação à de x_0 .

Primeiro notemos que:

$$|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \Delta h)| \approx |(f^n)'(x_0)| |\Delta h| \quad (2.1)$$

onde $'$ é a derivada de f^n com relação a x .

Para calcular a taxa média de expansão (contração) por iterada de f tomamos a raiz n -ésima em ambos os lados da equação acima

$$(|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \Delta h)|)^{\frac{1}{n}} \approx |(f^n)'(x_0)|^{\frac{1}{n}} |\Delta h|^{\frac{1}{n}} \quad (2.2)$$

Desenvolvendo o lado direito utilizando a regra da cadeia este se escreve como

$$\left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x)) \right|^{\frac{1}{n}} |\Delta h|^{\frac{1}{n}} \quad (2.3)$$

Tomando o logaritmo e usando suas propriedades, vem

$$\begin{aligned} \log\left(\left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x)) \right|^{\frac{1}{n}} |\Delta h|^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n} \log\left(\left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(f^i(x_0)) \right| |\Delta h|\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x_0))| + \log |\Delta h| \right) \end{aligned}$$

Quando n tende para infinito, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log |f^n(x_0) - f^n(x_0 + \Delta h)|^{\frac{1}{n}} \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x_0))| \right)$$

Assim parece natural definir, se o limite existir

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i(x_0))| \quad (2.4)$$

o expoente de Lyapunov de f em x_0 .

Desse raciocínio decorre, que para n suficientemente grande

$$|f^n(x_0) - f^n(x_0 + \Delta h)| \approx e^{n\lambda(x_0)}$$

e o termo do lado direito é a taxa média de afastamento (aproximação) das órbitas de x_0 e $x_0 + \Delta h$. Assim, se o limite em 2.4 existir, dependendo do

seu sinal poderemos caracterizar a órbita de x_0 em termos sensibilidade nas condições iniciais.

Se a função $\log |f'|$ for integrável, temos pelo teorema 1 que:

- o expoente de Lyapunov de f existe para *para quase todo* x em $[a, b]$.
- se a função f for ergódica usando o item 2 do teorema 1 temos que os expoentes de Lyapunov são constantes q.t.p.

No caso de \mathbb{R}^m sejam, $f : U \rightarrow U$ um difeomorfismo de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ com $\|\vec{v}\| = 1$ uma direção qualquer.

Sejam $x_0 \in U$ e $x_0 + t\vec{v}$, com t muito pequeno, condições iniciais próximas. Queremos descrever o valor de $\|f^n(x_0) - f^n(x_0 + t\vec{v})\|$ com $n \geq 1$. Esse valor, que a princípio dependeria não apenas de x_0 , n e \vec{v} mas também de t , vai medir o que acontece com a órbita de $x_0 + t\vec{v}$ com relação à de x_0 .

Notemos que:

$$\|f^n(x_0) - f^n(x_0 + t\vec{v})\| \approx \|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\| |t| \quad (2.5)$$

onde $D_{x_0}(f^n)\vec{v}$ é a derivada direcional da n -ésima iterada de f .

Pela Regra da Cadeia temos,

$$\|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\| = \|D_{f^{n-1}(x_0)}f \circ D_{f^{n-2}(x_0)}f \circ \dots \circ D_{x_0}f\vec{v}\| |t| \quad (2.6)$$

Apesar de não podermos desenvolver 2.6 em um produtório de normas como em 2.2, tomamos a raiz n -ésima em ambos os lados da equação 2.5 e obtemos

$$\|f^n(x_0) - f^n(x_0 + t\vec{v})\|^{\frac{1}{n}} \approx \|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\|^{\frac{1}{n}} |t|^{\frac{1}{n}} \quad (2.7)$$

tomando o logaritmo

$$\frac{1}{n} \log \|f^n(x_0) - f^n(x_0 + t\vec{v})\| \approx \frac{1}{n} \log \|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\| + \frac{1}{n} \log |t| \quad (2.8)$$

fazendo n tender para infinito, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f^n(x_0) - f^n(x_0 + t\vec{v})\| \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\| \quad (2.9)$$

onde o limite existir.

Assim parece natural definir o expoente de Lyapunov de f em x_0 na direção \vec{v} , se o limite existir, por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{x_0}(f^n)\vec{v}\| := \lambda_{\vec{v}}(x_0)$$

2.1 Teorema de Oseledec

Na seção anterior vimos que a existência de expoentes de Lyapunov para o caso unidimensional é garantida pelo teorema ergódico de Birkhoff. Para o caso m -dimensional, no ano (ano do artigo), Oseledec provou o teorema que leva seu nome e garante a existência dos expoentes de Lyapunov para o caso m -dimensional. Aqui enunciaremos uma versão desse teorema contida em (KH, Katok-Hasselblatt) adaptada para o sistema dinâmico gerado pela aplicação do bilhar.

Teorema 2. (Teorema Ergódico Multiplicativo Oseledec)(KH, Katok-Hasselblatt)

Sejam M uma variedade compacta riemanniana, N contido em M um conjunto aberto e denso e $F : N \rightarrow M$ uma aplicação C^k com $k \geq 1$. Denotemos por

$$\tilde{N} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(N)$$

o conjunto onde estão definidas todas as iteradas de F . Assuma que F preserva uma probabilidade μ em M e $\mu(\tilde{N}) = 1$. Suponhamos, para $x \in \tilde{N}$, que a função $\log^+ \|D_x F\|$ onde $\log^+ s = \max\{\log s, 0\}$, seja integrável com respeito à probabilidade μ . Então:

1. Existe um conjunto H satisfazendo $FH = H$ contido em \tilde{N} $\mu(H) = 1$ tal que para todo x em H existe uma decomposição DF -invariante do espaço tangente

$$\mathcal{T}_x M = E_x^1 \oplus E_x^2 \oplus \dots \oplus E_x^l \quad (2.10)$$

onde $l = l(x)$ depende de x e para todo vetor não nulo $v \in E_x^i$ existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |D_x F^n \vec{v}| := \lambda_x^{(i)} \quad (2.11)$$

Além disto, $l(x)$ (denominada multiplicidade de λ_x^i) e $\lambda_x^{(i)}$ são F -invariantes.

2. Para $S \subset T := \{1, 2, \dots, l(x)\}$ seja $E_S(x) := \bigoplus_{i \in S} E_x^i$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sin(\text{ang}(E_S(F^n(x)), E_{T-S}(F^n(x)))) = 0$$

onde $\text{ang}(\cdot)$ é o ângulo entre os respectivos espaços vetoriais.

Uma demonstração para esse resultado pode ser encontrada em (JPS, Jhonson, Keneth, George)

Vale a pena observar que se a medida for Ergódica então os expoentes de Lyapunov são constantes μ -q.t.p.

2.2 O Teorema de Oseledec e a Aplicação do Bilhar

Nessa seção vamos demonstrar que o teorema de Oseledec é aplicável ao bilhar.

Consideremos aqui a notação introduzida no capítulo 1. Pelo que vimos sabemos que \mathcal{F} é um difeomorfismo de classe C^{k-1} no conjunto $\tilde{\mathcal{M}}$. Vimos também que $\tilde{\mathcal{M}}$ é aberto, denso em \mathcal{M} e de medida μ total. Para finalizarmos a prova da aplicabilidade do teorema de Oseledec para \mathcal{F} , precisamos mostrar que $\log^+ \|D_{(s,\psi)}\mathcal{F}\|$ é integrável.

Proposição 2. *O teorema de Oseledec é aplicável ao Bilhar, ou seja,*

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \log^+ \|D_{(r,\psi)}\mathcal{F}\| d\mu < \infty$$

Prova: Relembremos que

$$D_{(s_0,\psi_0)}\mathcal{F} = \frac{1}{\sin \psi_1} \begin{bmatrix} \tau_{01}\kappa_0 - \sin \psi_0 & \tau_{01} \\ \kappa_1(\tau_{01}\kappa_0 - \sin \psi_0) - \kappa_0 \sin \psi_1 & \tau_{01}\kappa_1 - \sin \psi_1 \end{bmatrix}$$

Analisando essa equação podemos ver que

$$\|D_{(r_0,\psi_0)}\mathcal{F}\| \leq \frac{C}{\sin \psi_1}$$

onde C é uma constante que depende da curvatura e do diâmetro de Γ . Logo

$$\log^+ \|D_{(r_0,\psi_0)}\mathcal{F}\| \leq \log^+ C + \log^+ \left(\frac{1}{\sin \psi_1} \right) \leq |\log C| + |\log \sin \psi_1|.$$

Integrando a equação acima na probabilidade $d\mu = \frac{1}{2|\Gamma|} \sin \psi ds d\psi$ obtemos:

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \log^+ \|D_{(r,\psi)}\mathcal{F}\| d\mu \leq \int_{\tilde{\mathcal{M}}} \log C d\mu + \int_{\tilde{\mathcal{M}}} |\log \sin \psi_1| d\mu$$

substituindo $d\mu = \sin \psi d\psi ds$ temos:

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \log^+ \|D_{(r,\psi)}\mathcal{F}\| d\mu \leq |\log C| + \frac{1}{2|\Gamma|} \int_{\tilde{\mathcal{M}}} |\log \sin \psi_1| \sin \psi ds d\psi$$

como a aplicação do Bilhar preserva essa medida (ver seção(1.3)), a equação acima vira

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} \log^+ \|D_{(r,\psi)}\mathcal{F}\| d\mu \leq |\log C| + \frac{1}{2|\Gamma|} \int_{\mathcal{M}} |\log \sin \psi| \sin \psi ds d\psi$$

Com isso para garantir o afirmado no enunciado é imediato que basta mostrar a finitude de

$$\int_{\mathcal{M}} |\log \sin \psi| \sin \psi d\psi ds = \int_0^{|\Gamma|} \int_0^\pi |\log \sin \psi| \sin \psi d\psi ds := \mathcal{I}$$

Mas de fato, utilizando integração por partes temos

$$\mathcal{I} = |\Gamma| \left[-(\cos x + 1) \log \sin x + \log(1 - \cos x) - \cos x \right] \Big|_0^\pi$$

utilizando a Regra de L'Hopital obtemos

$$\int_0^{|\Gamma|} \int_0^\pi |\log \sin \psi| \sin \psi d\psi ds = |\Gamma|(2 - \log 4)$$

□

Lema 3. Dado $(s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}$, denotemos $\mathcal{F}^n(s, \psi) = (s_n, \psi_n)$ com $n \in \mathbb{N}$. Então, $\mu - q.t.p$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sin \psi_n}{n} = 0$$

Prova: Definamos a função

$$\begin{aligned} f : \tilde{\mathcal{M}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \psi) &\longmapsto \log \sin \psi \end{aligned}$$

e notemos que $\log \sin \psi_n = f(\mathcal{F}^n(s, \psi))$. Da prova da proposição anterior temos que f é integrável e como \mathcal{F} preserva a probabilidade μ , obtemos, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, que existe $\mu - q.t.p$ o seguinte limite:

$$f^*(s, \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{F}^i(s, \psi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \sin \psi_i$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \sin \psi_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \sin \psi_i + \frac{\log \sin \psi_n}{n} - \frac{\log \sin \psi_n}{n} \quad (2.12) \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \log \sin \psi_i - \frac{\log \sin \psi_n}{n} \end{aligned}$$

tomando o limite quando n tende a ∞ em ambos os lados da equação acima obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sin \psi_n}{n} = 0 \quad \mu - q.t.p$$

□

Sendo aplicável ao Bilhar, o teorema de Oseledec garante que existe um subconjunto H de medida 1 em $\tilde{\mathcal{M}}$ tal que para todo $(s, \psi) \in H$ valem:

- Existe uma decomposição $D_{(s,\psi)}\mathcal{F}$ -invariante

$$\mathcal{T}_{(s,\psi)}\mathcal{M} = E_{(s,\psi)}^{(1)} \oplus E_{(s,\psi)}^{(2)}$$

- números $\lambda_{(s,\psi)}^{(1)}$ e $\lambda_{(s,\psi)}^{(2)}$ que são dados por

$$\lambda_{(s,\psi)}^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log \|D_{(s,\psi)}\mathcal{F}^n \vec{v}\|$$

onde $\vec{v} \in E_{(s,\psi)}^{(i)}$, com $i = 1, 2$.

Temos então duas possibilidades para a multiplicidade de $\lambda_{(s,\psi)}^{(i)}$, ou ela é 2 e temos um único expoente de Lyapunov, ou ela é um e temos dois expoentes de Lyapunov distintos. Nesse caso, esses expoentes estão relacionados a dois subespaços vetoriais de dimensão 1, $E_{(s,\psi)}^{(1)}$ e $E_{(s,\psi)}^{(2)}$, de $\mathcal{T}_{(s,\psi)}\mathcal{M}$.

Proposição 3. *Se os dois expoentes da aplicação do bilhar são distintos então:*

$$\lambda_{(s,\psi)}^{(1)} + \lambda_{(s,\psi)}^{(2)} = 0$$

Prova: Tomemos em $\mathcal{T}_{(s,\psi)}\mathcal{M}$ um paralelogramo Π com lados na direção de $E_{(s,\psi)}^{(1)}$ e $E_{(s,\psi)}^{(2)}$, cujos tamanhos denotaremos por c e d respectivamente. Seja γ o ângulo agudo formado pelos lados do paralelogramo, dizemos que c , d e γ são os parâmetros do paralelogramo Π . Sabemos que a área de Π , $|\Pi|$, é dada por:

$$|\Pi| = c d \sin \gamma$$

Se considerarmos a imagem de Π por $D_{(s,\psi)}\mathcal{F}^n$ teremos em $\mathcal{T}_{\mathcal{F}^n(s,\psi)}\mathcal{M}$ um paralelogramo com parâmetros c_n , d_n e γ_n . E assim

$$|\det D_{(s,\psi)}\mathcal{F}^n| = \frac{c_n d_n \sin \gamma_n}{c d \sin \gamma} \quad (2.13)$$

Por outro lado, de 1.14 obtemos

$$|\det D_{(s,\psi)}\mathcal{F}^n| = \frac{\sin \psi}{\sin \psi_n}$$

Portanto

$$\frac{\sin \psi}{\sin \psi_n} = \frac{c_n d_n \sin \gamma_n}{c d \sin \gamma} \quad (2.14)$$

Tomando o logaritmo na igualdade acima e dividindo por n , obtemos:

$$\frac{\log \sin \psi - \log \sin \psi_n}{n} = \frac{1}{n} \log \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} + \frac{1}{n} \log \frac{c_n}{c} + \frac{1}{n} \log \frac{d_n}{d} \quad (2.15)$$

Pelo lema 3 temos que, quando $n \rightarrow \infty$ o lado esquerdo da equação acima vai para zero. No lado direito notamos que quando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \log \frac{c_n}{c} \rightarrow \lambda_{(s,\psi)}^{(1)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \log \frac{d_n}{d} \rightarrow \lambda_{(s,\psi)}^{(2)}$$

Dessa forma, pelo item 2 do teorema de Oseledec temos que $\frac{1}{n} \log \frac{\sin \gamma_n}{\sin \gamma} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a proposição está demonstrada.

□

Capítulo 3

Relação entre os Expoentes de Lyapunov do Fluxo e da Aplicação do bilhar

3.1 Idéia

No capítulo anterior vimos a definição dos expoentes de Lyapunov para aplicações discretas. No capítulo 1 construímos a aplicação do bilhar e vimos que ela é difeomorfismo \mathcal{C}^{k-1} Lebesgue *q.t.p.* Nesta parte do trabalho construiremos o fluxo do bilhar e vamos estudar a relação existente entre os seus expoentes de Lyapunov e os da aplicação do bilhar. Esta relação vai nos permitir calcular os expoentes de Lyapunov para o fluxo a partir dos da aplicação.

Nesse capítulo vamos seguir a idéia contida em (MC, pag x-y) e utilizaremos a notação adotada no capítulo 1.

3.2 Fluxo do Bilhar

Relembremos o problema do bilhar descrito na seção (1.2):

Uma partícula se move livremente com velocidade constante igual a 1, no interior de uma região plana, limitada com bordo suave por partes e sofrendo colisões elásticas com tal bordo.

Queremos construir uma aplicação Φ^t definida em um subconjunto $\Omega \subset \bar{\mathcal{B}} \times S^1$ que seja contínua em t e seja fluxo, i.e.,

$$\Phi^0 = I_\Omega \quad \text{e} \quad \Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Phi^r$$

onde I_Ω é a identidade em Ω e t, r números reais quaisquer.

No estudo de Φ^t que se segue, suporemos sempre $t > 0$, pois o caso $t < 0$ é análogo.

Seja (p_0, \vec{v}_0) , com $p_0 \in \overline{\mathcal{B}}$ e $\|\vec{v}_0\| = 1$. Como em \mathcal{B} o movimento é retílineo temos, supondo que não haja colisões no intervalo $[0, t]$:

$$\Phi^t(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + t\vec{v}_0, \vec{v}_0)$$

Suponhamos agora que haja uma única colisão em $t_1 \in (0, t]$. Então $\Phi^{t_1}(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + t_1\vec{v}_0, \vec{v}_0)$. No instante de colisão a direção do movimento muda de \vec{v}_0 para \vec{v}_1 seguindo a relação $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - 2\langle \vec{v}_0, \vec{n} \rangle \vec{n}$, onde \vec{n} é o vetor normal a Γ em $p_0 + t_1\vec{v}_0$ apontando para dentro de \mathcal{B} .

Esta mudança instantânea na direção do movimento torna a aplicação descontínua. Para remover a descontinuidade, faremos a seguinte identificação, no instante de colisão

$$(p_0 + t_1\vec{v}_0, \vec{v}_0) \simeq (p_0 + t_1\vec{v}_0, \vec{v}_1)$$

ou equivalentemente identificamos \vec{v}_0 com \vec{v}_1 (vide figura 3.1). Como no intervalo (t_1, t) o movimento é retílineo teremos então

$$\Phi^t(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + t_1\vec{v}_0 + (t - t_1)\vec{v}_1, \vec{v}_1)$$

e, com a indentificação, a aplicação Φ^t torna-se contínua.

Observemos que definindo, em $\overline{\mathcal{B}} \times S^1$, a projeção natural $\Pi(p, \vec{v}) = p$, temos que se $p \in \mathcal{B}$, $\Pi^{-1}(p)$ é S^1 , mas se $p \in \Gamma$ então, com a identificação, $\Pi^{-1}(p)$ é meio círculo.

Antes de passarmos à demonstração de que a aplicação Φ^t é um fluxo, precisamos retirar do seu domínio o conjunto de medida nula Ω_0 formado pelos pontos (p_0, \vec{v}_0) , com $p_0 \in \Gamma$, que representam saídas na direção da tangente.

Também retiraremos do domínio de Φ^t os pontos cuja trajetória possui infinitas colisões em um intervalo de tempo finito. Esse conjunto também possui medida de Lebesgue nula. De fato, suponhamos que pudessemos ter (para (p_0, \vec{v}_0)) infinitas colisões em um intervalo de tempo $[0, t]$. Com isso teríamos uma sequência t_n de tempos, infinita e convergente, pois $[0, t]$ é compacto. Seja t_∞ o limite de tal sequência. Pela continuidade de Φ em t temos $\Phi^{t_n}(p_0, \vec{v}_0) \rightarrow \Phi^{t_\infty}(p_0, \vec{v}_0)$. Ou seja, a trajetória de (p_0, \vec{v}_0) não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas (SK, pag 219) mostra que o subconjunto de tais pontos (p_0, \vec{v}_0) possui medida de Lebesgue nula em $\overline{\mathcal{B}} \times S^1$.

Seja $\Omega \subset \overline{\mathcal{B}} \times S^1$ o conjunto que obtemos retirando de $\overline{\mathcal{B}} \times S^1$ o conjunto Ω_0 e o conjunto dos pontos cuja trajetória não está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, como em qualquer intervalo de tempo finito teremos no máximo um

número finito de colisões, para pontos em Ω , a partir daqui vamos sempre supor que haja no máximo uma colisão no intervalo $[0, t]$, pois os resultados se estenderão facilmente para o caso de várias colisões.

Lema 4. *A aplicação $\Phi^t : \Omega \longrightarrow \Omega$ é fluxo.*

Prova:

Observemos que $\Phi^0(p_0, \vec{v}_0) = (p_0, \vec{v}_0)$ logo $\Phi^0 \equiv I_\Omega$.

Quanto à propriedade $\Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Phi^r$, primeiramente notemos que se no intervalo $[0, t+r]$ não houver colisão é fácil ver que

$$\Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t = \Phi^t \circ \Phi^r$$

Suponhamos então que haja uma única colisão num instante t_1 satisfazendo $0 < r < t_1 < t$.

Com isso:

$$\Phi^{r+t}(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + t_1\vec{v}_0 + (t+r-t_1)\vec{v}_1, \vec{v}_1) \quad (3.1)$$

Por outro lado:

$$\Phi^t(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + t_1\vec{v}_0 + (t-t_1)\vec{v}_1, \vec{v}_1)$$

e segue que

$$\Phi^r(\Phi^t(p_0, \vec{v}_0)) = (p_0 + t_1\vec{v}_0 + (t+r-t_1)\vec{v}_1, \vec{v}_1)$$

donde

$$\Phi^{r+t} = \Phi^r \circ \Phi^t$$

Da mesma maneira

$$\Phi^r(p_0, \vec{v}_0) = (p_0 + r\vec{v}_0, \vec{v}_0)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi^t(\Phi^r(p_0, \vec{v}_0)) &= (p_0 + r\vec{v}_0 + (t_1-r)\vec{v}_0 + (t-(t_1-r))\vec{v}_1, \vec{v}_1) \quad (3.2) \\ &= (p_0 + t_1\vec{v}_0 + (t+r-t_1)\vec{v}_1, \vec{v}_1) \end{aligned}$$

donde

$$\Phi^{r+t} = \Phi^t \circ \Phi^r = \Phi^r \circ \Phi^t.$$

A prova dos outros casos é análoga.

□

Temos então um fluxo $\Phi^t : \Omega \longrightarrow \Omega$ contínuo no tempo e que modela o problema do bilhar.

Definimos em Ω as seguintes coordenadas: $q = (x, y, \omega)$ onde $(x, y) \in \overline{\mathcal{B}}$ e ω é o ângulo orientado entre o vetor velocidade \vec{v} e o eixo x positivo, vide figura ???. Assim, se $(x, y) \in \mathcal{B}$ então $\omega \in [0, 2\pi)$. Caso $(x, y) \in \Gamma$, ω , devido à identificação feita acima, varia apenas em um meio círculo menos as saídas na direção da tangente.

Sejam $q_i = (x_i, y_i, \omega_i)$, $q_f = (x_f, y_f, \omega_f)$ tais que $\Phi^t(q_i) = q_f$. Nessas coordenadas, se não houver colisão no intervalo $[0, t]$, temos:

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + t \cos \omega_i \\ y_f &= y_i + t \sin \omega_i \\ \omega_f &= \omega_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

No caso de haver uma única colisão em $t_i \in [0, t]$ a expressão do fluxo é obtida utilizando algumas variáveis intermediárias que caracterizam a colisão (vide figura abaixo).

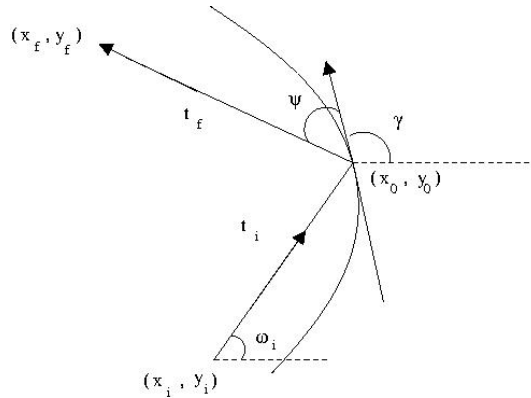


Figura 3.1: Esquema de uma colisão

Sejam (x_0, y_0) o ponto de colisão e $t_f = t - t_i$. Assim temos

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 - t_i \cos \omega_i \\ y_i &= y_0 - t_i \sin \omega_i \\ \psi &= \gamma - \omega_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} x_f &= x_0 + t_f \cos \omega_f \\ y_f &= y_0 + t_f \sin \omega_f \\ \omega_f &= \psi + \gamma \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde, como no capítulo 1, γ é o ângulo entre o eixo x positivo e o vetor tangente a Γ em (x_0, y_0) e ψ é o ângulo entre a direção de saída e o vetor tangente a Γ em (x_0, y_0) .

Uma observação importante de se fazer é que no caso $t_f = 0$, i.e, $t = t_i$ a equação para o movimento se reduz a 3.3. De fato, nesse caso, $\omega_f = \omega_i$ e $\Phi^{t_i}(x_i, y_i, \omega_i) = (x_0, y_0, \omega_i)$.

Se existirem n colisões no intervalo $[0, t]$ com instantes $0 < t_1, t_2, \dots, t_n < t$, o fluxo é dado por:

$$\Phi^t(q_i) = \Phi^{t-t_n} \circ \Phi^{t_n-t_{n-1}} \circ \dots \circ \Phi^{t_2-t_1} \circ \Phi^{t_1}(q_i) \quad (3.6)$$

Seja Ω_1 o conjunto formado pela união de $\Pi^{-1}(x, y)$, onde $(x, y) \in \Gamma$ é um ponto de *cola*, e $\Phi^t(\Pi^{-1}(x, y))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sabemos que, para cada ponto de *cola*, $\Pi^{-1}(x, y)$ é uma curva em Ω e que $\Phi^t(\Pi^{-1}(x, y))$ é uma variedade de dimensão 2, possuindo portanto medida de Lebesgue nula em Ω . Dessa forma, como temos finitos pontos *cola*, Ω_1 é fechado e de medida nula. Portanto o conjunto $\tilde{\Omega} = \Omega - \Omega_1$ é aberto denso e possui medida de Lebesgue total em Ω .

Proposição 4. *Se Γ é globalmente \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^k por partes, $k \geq 2$, então o fluxo do bilhar Φ^t é homeomorfismo em Ω e difeomorfismo de classe \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 2$ em $\tilde{\Omega}$.*

Prova:

1. Diferenciabilidade de Φ^t em $\tilde{\Omega}$

Sejam $\tilde{q}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\omega}_i)$ e $\tilde{q}_f = (\tilde{x}_f, \tilde{y}_f, \tilde{\omega}_f)$ pontos de $\tilde{\Omega}$ tais que $\Phi^t(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_f$ para $t > 0$.

Temos os seguintes casos:

1. Se $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ e $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f)$ pertencem a \mathcal{B} e não há colisão entre eles, então, pela equação 3.3, Φ^t é diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ .
2. O caso $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in \Gamma$ e $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f) \in \mathcal{B}$ é análogo ao anterior.

3. Se $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ e $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f)$ pertencem a \mathcal{B} e há uma única colisão entre eles num instante $\tilde{t}_i \in (0, t)$, denotemos por $(x(\tilde{s}_0), y(\tilde{s}_0)) = \Gamma(\tilde{s}_0)$ o ponto de colisão. Fazendo se necessário uma rotação da mesa podemos sempre supor $x(\tilde{s}_0) \neq \tilde{x}_i$ e $x'(\tilde{s}_0) \neq 0$, onde $'$ é a derivada em relação a s .

Afirmamos que, para provar o lema, é suficiente mostrar que $s_0 = s_0(x_i, y_i, \omega_i)$ é função de classe, pelo menos, \mathcal{C}^{k-1} , onde (x_i, y_i, ω_i) pertence a uma vizinhança \mathcal{U}_0 de \tilde{q}_i e a colisão acontece num instante t_i .

De fato, seja $\mathcal{U}_1 \subset [0, |\Gamma|)$ uma vizinhança de \tilde{s}_0 tal que $x'(s_0) \neq 0$ para todo $s_0 \in \mathcal{U}_1$. Temos, para $s_0 \in \mathcal{U}_1$, que:

- $t_i = \|(x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i)\|$
- $\cos \psi = \frac{\langle (x'(s_0), y'(s_0)), (x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i) \rangle}{\|(x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i)\|}$
- $\tan \gamma = \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}$

E assim $\psi = \psi(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$, $\gamma = \gamma(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ e $t_f = t - t_i = t_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ são funções de classe, pelo menos, \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 2$. Logo, pelas equações 3.4 e 3.5 temos que $\omega_f = \omega_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ é função de classe \mathcal{C}^{k-1} e portanto $x_f = x_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ e $y_f = y_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ são também \mathcal{C}^{k-1} .

Assim, no que se segue vamos mostrar que $s_0 = s_0(x_i, y_i, \omega_i)$ é de classe \mathcal{C}^k .

Pela continuidade de $x(s)$ e de $x'(s)$, podemos reduzir \mathcal{U}_1 , se necessário, de forma que para todo $s_0 \in \mathcal{U}_1$ temos $x'(s_0) \neq 0$ e $x(s_0) \neq x_i$.

Tomemos s_0 um ponto na vizinhança \mathcal{U}_1 e consideremos o movimento da partícula saindo de (x_i, y_i) na direção ω_i até (x_0, y_0) . Assim

$$\tan \omega_i = \frac{y(s_0) - y_i}{x(s_0) - x_i}$$

Sejam $U = \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1$ aberto de \mathbb{R}^4 e $G : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x_i, y_i, \omega_i, s_0) = \omega_i - \arctan \frac{y(s_0) - y_i}{x(s_0) - x_i}$$

G é claramente de classe \mathcal{C}^k e $G(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\omega}_i, \tilde{s}_0) = 0$. Dessa forma considerando a decomposição $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}$, pelo Teorema da Função Implícita o resultado fica provado se $\partial_2 G(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\omega}_i, \tilde{s}_0) \neq 0$. Mas, com efeito:

$$\frac{\partial G(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\omega}_i, \tilde{s}_0)}{\partial s_0} = \frac{\begin{vmatrix} x'(\tilde{s}_0) & y'(\tilde{s}_0) \\ x(\tilde{s}_0) - \tilde{x}_i & y(\tilde{s}_0) - \tilde{y}_i \end{vmatrix}}{[x(\tilde{s}_0) - \tilde{x}_i]^2 + [y(\tilde{s}_0) - \tilde{y}_i]^2} \quad (3.7)$$

é não nulo uma vez que $(x(\tilde{s}_0), y(\tilde{s}_0)) \neq (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ e os vetores $(x'(\tilde{s}_0), y'(\tilde{s}_0))$ e $(x(\tilde{s}_0) - \tilde{x}_i, y(\tilde{s}_0) - \tilde{y}_i)$ são l.i.

Assim, obtemos $s_0 = s_0(x_i, y_i, \omega_i)$ função de classe \mathcal{C}^k .

O último caso que falta analisarmos é $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in \mathcal{B}$ e $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f) \in \Gamma$. Mas para provar que nesse caso o fluxo também é \mathcal{C}^{k-1} observemos que para $t < 0$, Φ^t , é de classe \mathcal{C}^{k-1} nos casos a), b) e c) acima com demonstração análoga.

Portanto notamos que esse último caso é idêntico ao caso 2 para Φ^t com

$t < 0$. Como pelo caso b), Φ^{-t} , é de classe \mathcal{C}^{k-1} e $\Phi^t = (\Phi^{-t})^{-1}$ temos que Φ^t é também de classe \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 2$.

Para finalizar, suponhamos que existam n colisões no intervalo $(0, t)$. Se t_1, t_2, \dots, t_n são os instantes das colisões, segue da equação 3.6 que Φ^t é de classe \mathcal{C}^{k-1} , pois é a composta de aplicações de classe \mathcal{C}^{k-1} . Desde que provamos o mesmo para Φ^t com $t < 0$ temos que Φ^t é difeomorfismo \mathcal{C}^{k-1} $k \geq 2$ em $\tilde{\Omega}$.

2. Prova da continuidade de Φ^t em Ω .

Basta mostrarmos que Φ^t é homeomorfismo em $\Omega - \tilde{\Omega}$. Para isso procederemos de forma análoga à prova da diferenciabilidade. A diferença dessa demonstração para a da diferenciabilidade é que nos pontos de cola Γ é apenas \mathcal{C}^1 .

Tomemos $\tilde{q}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\omega}_i)$ e $\tilde{q}_f = (\tilde{x}_f, \tilde{y}_f, \tilde{\omega}_f)$ pontos de Ω tais que $\Phi^t(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_f$ para $t > 0$.

Claramente Φ^t é contínua em ambos os casos a) e b).

Para provar a continuidade no caso c), analogamente à prova da diferenciabilidade, denotemos por $\tilde{t}_i \in (0, t)$ o instante de colisão e por $(x(\tilde{s}_0), y(\tilde{s}_0)) = \Gamma(\tilde{s}_0)$ o ponto de colisão. Fazendo se necessário uma rotação da mesa podemos sempre supor $x(\tilde{s}_0) \neq \tilde{x}_i$ e $x'(\tilde{s}_0) \neq 0$, onde $'$ é a derivada em relação a s .

Afirmamos que, para provar o lema, é suficiente mostrar que $s_0 = s_0(x_i, y_i, \omega_i)$ é função, pelo menos, contínua, onde (x_i, y_i, ω_i) pertence a uma vizinhança \mathcal{U}_0 de \tilde{q}_i e a colisão acontece num instante t_i .

De fato, suponhamos s_0 pertencente a uma vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset [0, |\Gamma|]$ de \tilde{s}_0 . Se $x'(s_0) \neq 0$, temos por definição:

- $t_i = \|(x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i)\|$
- $\cos \psi = \frac{\langle (x'(s_0), y'(s_0)), (x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i) \rangle}{\|(x(s_0) - x_i, y(s_0) - y_i)\|}$
- $\tan \gamma = \frac{y'(s_0)}{x'(s_0)}$

E assim $\psi = \psi(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$, $\gamma = \gamma(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ e $t_f = t - t_i = t_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ são, pelo menos, contínuas. E com isso pelas equações 3.4 e 3.5 temos que: $\omega_f = \omega_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ é contínua e portanto $x_f = x_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ e $y_f = y_f(x_i, y_i, \omega_i, s_0)$ são também contínuas.

A função $s_0 = s_0(x_i, y_i, \omega_i)$ é de classe \mathcal{C}^1 . De fato isso pode ser mostrado da mesma forma que o fizemos na prova da diferenciabilidade do fluxo, lembrando que aqui a função

$$G(x_i, y_i, \omega_i, s_0) = \omega_i - \arctan \frac{y(s_0) - y_i}{x(s_0) - x_i}$$

é \mathcal{C}^1 e ainda podemos usar o teorema da função implícita para concluir que s_0 é função de classe \mathcal{C}^1 de (x_i, y_i, ω_i) .

Para o caso $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in \mathcal{B}$ e $(\tilde{x}_f, \tilde{y}_f) \in \Gamma$ o tratamento é análogo ao da prova da diferenciabilidade de Φ^t considerando os mesmos casos anteriores para $t < 0$. Dessa forma para $t \in \mathbb{R}$ temos Φ^t homeomorfismo nos casos acima.

Se existirem n colisões no intervalo $(0, t)$ com instantes t_1, t_2, \dots, t_n , segue da equação 3.6 que Φ^t é contínuo, pois é a composta de aplicações de contínuas. Desde que provamos o mesmo para Φ^t com $t < 0$ temos que Φ^t é homeomorfismo Ω .

Portanto provamos que Φ^t , é um homeomorfismo em Ω e difeomorfismo \mathcal{C}^{k-1} , com $k \geq 2$ em $\tilde{\Omega}$.

□

Fixado tempo t , vamos calcular a expressão para a derivada de Φ^t em $\tilde{\Omega}$. Se não temos colisão, diferenciando 3.3, obtemos:

$$\begin{aligned} dx_f &= dx_i - t \sin \omega_i d\omega_i \\ dy_f &= dy_i + t_i \cos \omega_i d\omega_i \\ d\omega_f &= d\omega_i \end{aligned}$$

Na forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ d\omega_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \sin \omega_i \\ 0 & 1 & t \cos \omega_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ d\omega_i \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

e

$$D_{q_i} \Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \sin \omega_i \\ 0 & 1 & t \cos \omega_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponhamos, agora uma única colisão em $t_i \in (0, t)$.

Relembremos, da equação 1.8, que

$$\begin{aligned} dx_0 &= \cos \gamma ds_0 \\ dy_0 &= \sin \gamma ds_0 \\ d\gamma &= \kappa ds_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde κ é a curvatura de Γ em (x_0, y_0) .

Diferenciando as equações 3.4, 3.5 obtemos:

$$\begin{aligned} dx_i &= dx_0 - dt_i \cos \omega_i + t_i \sin \omega_i d\omega_i \\ dy_i &= dy_0 - dt_i \sin \omega_i - t_i \cos \omega_i d\omega_i \\ d\psi &= d\gamma - d\omega_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx_f &= dx_0 + dt_f \cos \omega_f - t_f \sin \omega_f d\omega_f \\
dy_f &= dy_0 + dt_f \sin \omega_f + t_f \cos \omega_f d\omega_f \\
d\omega_f &= d\psi + d\gamma
\end{aligned}$$

Substituindo 3.9 nas duas equações acima obtemos:

$$\begin{aligned}
dx_i &= \cos \gamma ds_0 - dt_i \cos \omega_i + t_i \sin \omega_i d\omega_i \\
dy_i &= \sin \gamma ds_0 - dt_i \sin \omega_i - t_i \cos \omega_i d\omega_i \\
d\omega_i &= \kappa ds_0 - d\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx_f &= \cos \gamma ds_0 + dt_f \cos \omega_f - t_f \sin \omega_f d\omega_f \\
dy_f &= \sin \gamma ds_0 + dt_f \sin \omega_f + t_f \cos \omega_f d\omega_f \\
d\omega_f &= d\psi + \kappa ds_0
\end{aligned}$$

Usando que $d\omega_i = \kappa ds_0 - d\psi_i$, $d\omega_f = d\psi + \kappa ds_0$ e $dt_f = -dt_i$ podemos então reescrever as equações acima na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ d\omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma + \kappa t_i \sin \omega_i & -\cos \omega_i & -t_i \sin \omega_i \\ \sin \gamma - \kappa t_i \cos \omega_i & -\sin \omega_i & t_i \cos \omega_i \\ \kappa & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds_0 \\ dt_i \\ d\psi \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ d\omega_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma - \kappa t_f \sin \omega_f & -\cos \omega_f & -t_f \sin \omega_f \\ \sin \gamma + \kappa t_f \cos \omega_f & -\sin \omega_f & t_f \cos \omega_f \\ \kappa & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds_0 \\ dt_i \\ d\psi \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Denotemos, respectivamente, por A e C as matrizes em 3.10 e 3.11. Calculando seus determinantes obtemos $\det A = -\sin \psi$ e $\det C = -\sin \psi$. Portanto, como $0 < \psi < \pi$, $\sin \psi \neq 0$ e A é inversível. Logo

$$D_{q_i} \Phi^t := D(\gamma, \omega_f, t_i, \omega_i, \kappa, s) = CA^{-1} \quad (3.12)$$

é a derivada do fluxo.

Notemos aqui que a derivada depende da curvatura de Γ , que é descontínua nos pontos de cola, por isso aqui é fundamental que o conjunto considerado seja apenas o $\tilde{\Omega}$.

Proposição 5. *O fluxo preserva a probabilidade*

$$d\nu = \frac{1}{2\pi|\mathcal{B}|} dx dy d\omega$$

que é medida de Lebesgue em Ω

Prova:

Tanto em 3.18 quanto em 3.12, temos $\det D_{q_i} \Phi^t = 1$ e com isso o resultado segue do teorema da mudança de variáveis.

O fator de normalização $2\pi|\mathcal{B}|$ é o valor da medida de Lebesgue da variedade Ω e $|\mathcal{B}|$ é a área de \mathcal{B} .

□

3.3 Expoentes de Lyapunov para o Fluxo do Bilhar

No capítulo 1 provamos que dada uma região \mathcal{B} com curva de fronteira Γ , globalmente \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^k por partes, $k \geq 2$ e com comprimento $|\Gamma|$, podemos definir uma aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ onde $\mathcal{M} = [0, |\Gamma|) \times (0, \pi)$ que denominamos por aplicação do bilhar. Essa aplicação modela o movimento retilíneo de uma partícula em \mathcal{B} com velocidade constante e sofrendo colisões elásticas com Γ , seguindo a regra *ângulo de incidência igual a ângulo de reflexão*. Ou seja, dado (s_0, ψ_0) , onde s_0 é um ponto de Γ e ψ_0 o ângulo com o vetor tangente, \mathcal{F} nos retorna (s_1, ψ_1) , onde s_1 representa o ponto de batida em Γ e ψ_1 o ângulo de saída. Provamos que \mathcal{F} é homeomorfismo em \mathcal{M} e difeomorfismo de classe \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 2$ no conjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ que obtivemos retirando de \mathcal{M} o conjunto $\{\mathcal{F}^l(s, \psi) : s \text{ é ponto de cola, } \psi \in (0, \pi), l \in \mathbb{Z}\}$ de medida de Lebesgue nula em \mathcal{M} . Mostramos também que \mathcal{F} preserva a probabilidade $d\mu = \frac{1}{2|\Gamma|} \sin \psi ds d\psi$ em $\tilde{\mathcal{M}}$.

Denotamos por

$$\tau(s, \psi) = \|\Gamma(s) - \Gamma(\Pi_s(\mathcal{F}(s, \psi)))\|$$

onde $(s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}$ e $\Pi_s(s, \psi) = s$, a distância na mesa entre o ponto de saída partícula e o próximo ponto de colisão. Como o módulo da velocidade é 1 temos que $\tau(s, \psi)$ também é o tempo de vôo da partícula entre as colisões.

Dessa forma, sendo $\tau(s, \psi)$ limitada pelo diâmetro de \mathcal{B} e contínua em \mathcal{M} (pois \mathcal{F} o é) temos que τ é μ -integrável e denotaremos por:

$$\bar{\tau} = \int_{\tilde{\mathcal{M}}} \tau(s, \psi) d\mu$$

a média espacial de τ . Aqui μ é a probabilidade invariante pelo bilhar.

Vamos agora fazer uma mudança de coordenadas em $\tilde{\Omega}$. Dado $(x, y, \omega) \in \tilde{\Omega}$ vamos escrevê-lo como (s, ψ, r) onde $(s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}$ e $r \in [0, \tau(s, \psi))$. Fixemos

$(x, y, \omega) \in \tilde{\Omega}$. A reta que passa por (x, y) e tem inclinação ω , intercepta Γ em dois pontos $s_- \neq s_+$. Definimos $s(x, y, \omega) := s_-$ e $\psi(x, y, \omega) := \gamma(x, y, \omega) - \omega$ onde γ é o ângulo entre o vetor tangente a Γ em s_- e o eixo x positivo. Seja r a distância em \mathcal{B} entre os pontos (x, y) e s_- . Com isso, nas novas coordenadas, (x, y, ω) se escreve como (s_-, ψ, r) .

Assim

$$\tilde{\Omega} = \{(s, \psi, r); (s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}, 0 \leq r \leq \tau(s, \psi)\}$$

Observemos que nessas coordenadas $\tilde{\mathcal{M}}$ é dado por $\{(s, \psi, 0); (s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}\}$.

Proposição 6. *O fluxo preserva $d\rho = \sin \psi ds dr d\psi$*

Prova:

Pela proposição 5 temos que o fluxo preserva $dx dy d\omega$. Assim, para provarmos que o fluxo preserva $d\rho$ basta verificarmos que

$$dx dy d\omega = \sin \psi ds dr d\psi$$

Mas, de fato, pela equação 3.5 temos que

$$dx \wedge dy \wedge d\omega = \sin \psi ds \wedge dr \wedge d\psi$$

portanto, como os elementos de volume acima são iguais segue que

$$dx dy d\omega = \sin \psi ds dr d\psi.$$

□

Lema 5. *Seja \mathcal{F} a aplicação do bilhar. Então o limite*

$$\bar{\tau}(s, \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\mathcal{F}^i(s, \psi)) \quad (3.13)$$

existe μ -q.t.p em $\tilde{\mathcal{M}}$:

Prova:

Esse resultado segue do Teorema Ergódico de Birkhoff, sendo τ integrável e \mathcal{F} transformação que preserva a probabilidade μ .

□

Corolário 1. *Se $q = (x, y, \omega) \in \tilde{\Omega}$ e $n(q, T)$ é o número de colisões que a partícula sofre com o borbo da mesa no intervalo $[0, T]$, então o limite*

$$\bar{\tau}(q) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n(q, T)}$$

existe ν -q.t.p. em $\tilde{\Omega}$.

Prova:

Como o módulo do vetor velocidade da partícula na mesa é 1, temos

$$T = \sum_{i=0}^{n(q,T)} \tau(\mathcal{F}^i(s, \psi)) + t_0 \quad (3.14)$$

onde t_0 é a soma dos tempos antes da primeira batida e depois da última batida, $s \in \Gamma$ é o primeiro ponto de colisão da partícula com Γ partindo de $(x, y) \in \mathcal{B}$ e ψ o ângulo de saída nessa batida.

Assim o limite

$$\bar{\tau}(q) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{n(q, T)} \sum_{i=0}^{n(q, T)} \tau(\mathcal{F}^i(s, \psi)) \quad (3.15)$$

é igual a 3.13 e a existência está provada para os pontos de $\tilde{\mathcal{M}}$ onde 3.13 existe. Para finalizar vamos verificar que o conjunto dos pontos onde o limite 3.15 não existe possui medida ν nula em $\tilde{\Omega}$. Denotemos por $N \subset \tilde{\mathcal{M}}$ o conjunto dos pontos onde 3.13 não existe. Pelo lema 5, $\mu(N) = 0$. Assim, o conjunto dos pontos $q \in \tilde{\Omega}$ onde o limite 3.15 não existe tem medida ν nula uma vez que ele está contido no subconjunto $\{(s, \psi, r); (s, \psi) \in N, 0 \leq r \leq \tau(s, \psi)\}$ de $\tilde{\Omega}$ que, pela proposição 6, possui medida ν nula em $\tilde{\mathcal{M}}$.

□

Seja $\mathcal{T}_q \tilde{\Omega}$ o espaço tangente à variedade $\tilde{\Omega}$ no ponto q .

Definição 1. *O expoente de Lyapunov para o fluxo no ponto $q \in \tilde{\Omega}$, na direção $\vec{u} \in \mathcal{T}_q \tilde{\Omega}$ é dado por:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q \Phi^T(\vec{u})\| := \lambda_{\vec{u}}(q)$$

onde o limite existir.

Lema 6. *Sejam $t, \alpha \in \mathbb{R}$ números reais quaisquer.*

1) $\lambda_{\vec{u}}(q)$ é Φ^t -invariante.

Prova:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\bar{u}}\Phi^t(q) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_{\Phi^t(q)}\Phi^T \bar{u}\| & (3.16) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q\Phi^{(T+t)}\bar{u}\| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T+t}{T} \frac{1}{T+t} \log \|D_q\Phi^{(T+t)}\bar{u}\| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+t} \log \|D_q\Phi^{(T+t)}\bar{u}\| \\
&= \lambda_{\bar{u}}(q)
\end{aligned}$$

2) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\lambda_{\alpha\bar{u}}(q) = \lambda_{\bar{u}}(q)$.

Prova:

$$\begin{aligned}
\lambda_{(\alpha\bar{u})}q &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q\Phi^T(\alpha\bar{u})\| \text{ sendo } D_q\Phi^t \text{ linear} & (3.17) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(|\alpha| \|D_q\Phi^T\bar{u}\|) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log |\alpha| + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q\Phi^T\bar{u}\| \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q\Phi^T\bar{u}\| \\
&= \lambda_{\bar{u}}(q)
\end{aligned}$$

□

Pelo lema acima, como $\mathcal{T}_q\tilde{\Omega}$ tem dimensão três, teremos no máximo três expoentes de Lyapunov distintos para o fluxo do bilhar em cada ponto $q \in \tilde{\Omega}$. Também observamos que decompondo $\mathcal{T}_q\tilde{\Omega}$ numa soma direta de subespaços $D\Phi^t$ -invariantes o estudo dos expoentes de Lyapunov em $\mathcal{T}_q\tilde{\Omega}$ se reduzirá ao estudo do expoentes em cada subespaço da decomposição.

Assim, seja

$$\mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega} = \{c(\sin \omega, \cos \omega, 0) : c \in \mathbb{R}\}$$

o espaço vetorial unidimensional na direção do fluxo e

$$\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega} = \{dq : \cos \omega dx + \sin \omega dy = 0\}$$

seu complemento ortogonal de dimensão dois.

Lema 7. *A decomposição*

$$\mathcal{T}_q\tilde{\Omega} = \mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega} \oplus \mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$$

é $D_q\Phi^t$ -invariante.

Prova:

Se no intervalo $[0, t]$ não temos colisão então

a) $\mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$ é $D_q \Phi^t$ invariante.

Tomemos $\vec{u} = (c \sin \omega, c \cos \omega, 0)$ $c \in \mathbb{R}$, vetor em $\mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$. Usando 3.18 temos

$$\begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ d\omega_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \sin \omega \\ 0 & 1 & t \cos \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \cos \omega \\ c \sin \omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

e portanto $D_q \Phi^t \vec{u} = (c \sin \omega, c \cos \omega, 0) \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^0 \tilde{\Omega}$.

b) $\mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$ é $D_q \Phi^t$ invariante.

Tomando $\vec{u} = (dx_i, dy_i, d\omega)$ $c \in \mathbb{R}$, vetor em $\mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$. Por 3.18 temos

$$\begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ d\omega_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \sin \omega \\ 0 & 1 & t \cos \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ d\omega \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

e

$$\begin{pmatrix} dx_f \\ dy_f \\ d\omega_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_i - t \sin \omega \\ dy_i + t \cos \omega \\ d\omega \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

portanto $\cos \omega dx_f - \sin \omega dy_f = \cos \omega dx_i - \sin \omega dy_i = 0$, a última igualdade vem do fato de $\vec{u} \in \mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$. Assim $D_q \Phi^t \vec{u} = (dx_f, dy_f, d\omega) \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^\perp \tilde{\Omega}$.

Se tivermos uma única colisão em t_i pertencente a $[0, t]$.

a) $\mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$ é $D_q \Phi^t$ invariante

Considere $\vec{u} = (dx_i, dy_i, d\omega_i) \in \mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$, ou seja, $\vec{u} = (c \sin \omega, c \cos \omega, 0)$ $c \in \mathbb{R}$.

Vamos verificar que:

$$D_q \Phi^t(\vec{u}) \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^0 \tilde{\Omega}$$

Pela equação 3.10 temos:

$$\cos \gamma ds - \cos \omega_i dt_i = c \cos \omega_i \quad (3.21)$$

$$\sin \gamma ds - \sin \omega_i dt_i = c \sin \omega_i \quad (3.22)$$

$$d\psi = \kappa ds$$

multiplicando a primeira e segunda linha por $\sin \omega_i$ e $-\cos \omega_i$ respectivamente, e depois somando obtemos:

$$-\sin(\omega_i - \gamma) ds = -\sin \psi ds = 0$$

como $\sin \psi \neq 0$ segue que

$$ds = 0 \quad \text{e} \quad d\psi = 0 \quad (3.23)$$

onde a segunda igualdade vem da equação $d\psi = \kappa ds$. Das equações 3.21 e 3.22 temos $dt_i = -c$.

Substituindo esses valores em 3.11, encontramos:

$$dx_f = c \cos \omega_f$$

$$dy_f = c \sin \omega_f$$

$$d\omega_f = 0$$

Donde $D_q \Phi^t \vec{u} \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^0 \tilde{\Omega}$.

b) $\mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$ é $D_q \Phi^t$ invariante.

Seja $\vec{u} = (dx_i, dy_i, d\omega_i) \in \mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$. Vamos mostrar que

$$D_q \Phi^t(u) \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^\perp \tilde{\Omega}.$$

Como consequência das equações 3.10 e 3.11 temos respectivamente

$$\cos \omega_i dx_i + \sin \omega_i dy_i = \cos \psi ds - dt_i$$

e

$$\cos \omega_f dx_f + \sin \omega_f dy_f = \cos \psi ds + dt_f$$

Mas como $dt_i = -dt_f$ temos que a quantidade

$$\cos \omega dx + \sin \omega dy$$

é preservada. Portanto se $\cos \omega_i dx_i + \sin \omega_i dy_i = 0$ então $\cos \omega_f dx_f + \sin \omega_f dy_f = 0$. Consequentemente $D_q \Phi^t(\vec{u}) \in \mathcal{T}_{\Phi^t(q)}^\perp \tilde{\Omega}$.

□

Definição 2. Dado $q \in \tilde{\Omega}$. Definimos o tempo de colisão como

$$t(q) = \min\{t > 0; \Phi^t(q) \in \tilde{\mathcal{M}}\}$$

Assim a projeção em $\tilde{\mathcal{M}}$ pelo fluxo do bilhar é dada por

$$\begin{aligned} P : \tilde{\Omega} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{M}} \\ q &\longmapsto \Phi^{t(q)}(q) \end{aligned}$$

Como, pela proposição 4 o fluxo Φ^t e $t(q)$ são aplicações \mathcal{C}^{k-1} , $k \geq 2$ temos que P também o é. Denotemos por $D_q P : \mathcal{T}_q \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathcal{T}_{(s,\psi)} \tilde{\mathcal{M}}$, onde

$(s, \psi) = P(q)$, sua derivada no ponto $q \in \tilde{\Omega}$.

Denotaremos por $z = (s, \psi)$ um ponto em $\tilde{\mathcal{M}}$ e $dz = (ds, d\psi)$ um vetor de $\mathcal{T}_z\tilde{\mathcal{M}}$.

No que se segue vamos estudar os expoentes de Lyapunov para o fluxo nos subespaços $\mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$ e $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$.

Seja $dq = (c \sin \omega, c \cos \omega, 0) \in \mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$. O expoente de Lyapunov na direção dq é, nulo, uma vez que, da prova da invariância de $\mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$, segue que

$$\|D_q\Phi^t(dq)\| = \|dq\| = |c| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e portanto

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \|D_q\Phi^T(dq)\|}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log |c|}{T} = 0.$$

Vamos estudar os expoentes de Lyapunov em $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$.

Sabemos que D_qP é uma aplicação linear do espaço vetorial tridimensional $\mathcal{T}_q\tilde{\Omega}$ no espaço bidimensional $\mathcal{T}_z\tilde{\mathcal{M}}$.

O núcleo de D_qP é $\mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$. De fato, dado $dq \in \mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$, da equação 3.23 temos que $D_qP(dq) = dz = 0$. Identicamente, se $D_qP(dq) = dz = 0$ então pela equação 3.11 obtemos que $dq \in \mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$.

Dessa forma se considerarmos a restrição, $D_q^\perp P$, de D_qP a $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$ temos um isomorfismo.

Sejam $z \in \tilde{\mathcal{M}}$ ponto onde os expoentes de Lyapunov existem para \mathcal{F} e $\lambda_{dz}(z)$ o expoente na direção dz .

Seja $dq = (dx, dy, d\omega) \in \mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$ a única pré-imagem de dz por $D_q^\perp P$.

O próximo passo é comparar as normas

$$\|dq\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (d\omega)^2}$$

e

$$\|dz\| = \sqrt{(ds)^2 + (d\psi)^2}$$

Para isso colocamos em $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$ as coordenadas $(d\xi, d\omega)$ onde

$$d\xi = -\sin \omega dx + \cos \omega dy$$

De fato $(d\xi, d\omega)$ definem coordenadas em $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$, uma vez que o vetor dx_i , sendo ortogonal a $\mathcal{T}_q^0\tilde{\Omega}$, pertence a $\mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$.

Assim, como $dq \in \mathcal{T}_q^\perp\tilde{\Omega}$

$$\|dq\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (d\omega)^2} = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\omega)^2}.$$

Pela equação 3.10 segue que

$$-d\xi = \sin \psi ds + t(q)d\omega$$

Comod $\omega = \kappa ds + d\psi$ temos

$$-d\xi = (\sin \psi + t(q)\kappa)ds + t(q)d\psi$$

que na forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} -d\xi \\ d\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \psi + t(q)\kappa & t(q) \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ d\psi \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

portanto

$$\begin{aligned} -ds &= \frac{d\xi + t(q)d\omega}{\sin \psi} \\ d\psi &= \frac{\kappa d\xi + (t(q) + \sin \omega)d\omega}{\sin \psi} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{pmatrix} -ds \\ d\psi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin \psi} \begin{pmatrix} 1 & t(q) \\ \kappa & \sin \psi + t(q)\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\omega \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Fazendo $A = \begin{pmatrix} \sin \psi + t(q)\kappa & t(q) \\ \kappa & 1 \end{pmatrix}$ e tomando a norma em ambos os lados de 3.24, obtemos

$$\|dq\| \leq \|A\| \|dz\|$$

Mas, se considerarmos a norma matricial da soma, temos:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sin \psi + t(q)\kappa + t(q) + k + 1 \\ &= \sin \psi + (t(q) + 1)(\kappa + 1) \\ &\leq 1 + (t(q) + 1)(\kappa + 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Fazendo $\hat{t}(q) = \max \{t(q), 1\}$, da equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq 1 + (t(q) + 1)(\kappa + 1) \leq \hat{t}(q) + 2\hat{t}(q)(\kappa + 1) \\ &= \hat{t}(q)(1 + 2(\kappa + 1)) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como κ é limitada em $\tilde{\mathcal{M}}$, existe constante $K > 0$ tal que $(2\kappa + 3) \leq K$. Portanto temos que

$$\|dq\| \leq K \hat{t}(q) \|dz\|.$$

De forma análoga, utilizando 3.25 podemos mostrar também que

$$\|dz\| \leq K \frac{\hat{t}(q)}{\sin \psi} \|dq\|$$

Assim

$$\log \|dq\| = \log \|dz\| + \mathcal{O}(\log \sin \psi) + \mathcal{O}(\log \hat{t}(q)) \quad (3.28)$$

Lema 8. Dado $q \in \tilde{\Omega}$, seja $\Phi^T(q)$ $T \in \mathbb{R}$ a trajetória da partícula. Então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\log \hat{t}(\Phi^T(q))}{T} \right) = 0$$

Prova: Por definição, $1 \leq \hat{t}(\Phi^T(q)) \leq \text{diam } \mathcal{B}$, onde $\text{diam } \mathcal{B}$ é o diâmetro da região \mathcal{B} . Portanto

$$0 \leq \frac{\log \hat{t}(\Phi^T(q))}{T} \leq \frac{\text{diam } \mathcal{B}}{T}$$

para todo $T \in \mathbb{R}$. Tomando o limite quando $T \rightarrow \infty$, temos o resultado procurado. □

Consideremos a trajetória $\Phi^t(q)$ durante um intervalo de tempo finito $[0, T]$. De 3.28 temos

$$\log \|D_q \Phi^T(dq)\| = \log \|D_z \mathcal{F}^n(dz)\| + \mathcal{O}(\log \sin \psi_n) + \mathcal{O}(\log \hat{t}(\Phi^T(q))) \quad (3.29)$$

onde $n = n(q, T)$ é o número de colisões em $[0, T]$ e ψ_n é a ψ -coordenada de $\mathcal{F}^n(z)$. Assim

$$\log \|D_q \Phi^T(dq)\| = \frac{\log \|D_z \mathcal{F}^n(dz)\|}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\log \sin \psi_n}{n}\right) + \mathcal{O}(\log \hat{t}(\Phi^T(q))) \quad (3.30)$$

Finalmente, dividindo ambos os lados de 3.30 por T , tomando o limite quando T vai para infinito, temos, pelos lemas 3 e 8:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q \Phi^T(dq)\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log \|D_z \mathcal{F}^n(dz)\|}{n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n}{T} \quad (3.31)$$

Portanto pelo corolário 1 e pela definição de expoentes de Lyapunov segue que

$$\lambda_{dq}(q) = \frac{1}{\bar{\tau}(q)} \lambda_{dz}(z)$$

onde $\bar{\tau}(q)$ é como no corolário 1.

Acabamos de provar que

Teorema 3. *Seja $q \in \tilde{\Omega}$ e $(s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}$ tais que $P(q) = (s, \psi)$ e $\lambda_{(s, \psi)}^{(1)}$ e $\lambda_{(s, \psi)}^{(2)}$ são os expoentes de Lyapunov para \mathcal{F} em (s, ψ) . Então existem os três expoentes de Lyapunov para o fluxo, λ_q^0 , λ_q^1 e λ_q^2 satisfazendo:*

- Para $\bar{u} \in \mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$ temos $\lambda_q^0 = \lambda_{\bar{u}}^0(q) = 0$
- Para $\bar{u} \in \mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$ temos

$$\lambda_q^i = \lambda_{\bar{u}}^i(q) = \frac{1}{\bar{\tau}(q)} \lambda^i(s, \psi)$$

onde $(s, \psi) = P(q)$ e $i = 1, 2$.

Mostramos que os expoentes de Lyapunov do fluxo e da aplicação estão relacionados. Mais especificamente vimos que para o fluxo e um é sempre nulo e os outros dois estão relacionados com os da aplicação do Bilhar e se a aplicação possui expoente de Lyapunov não nulo então o fluxo também possui.

Capítulo 4

Aplicação dos Resultados Estudados e Testes Computacionais

4.1 Introdução

Nesse capítulo vamos focar nossa atenção em um exemplo de bilhar ergódico, o Bilhar no Estádio Circular pois nesse caso temos que os expoentes de Lyapunov são constantes q.t.p.

O estádio circular é uma região \mathcal{B} , do plano, limitada e com bordo Γ composto por dois semi-círculos de raio unitário unidos por dois segmentos de reta de comprimento $2h$, $h > 0$ (vide 4.1).

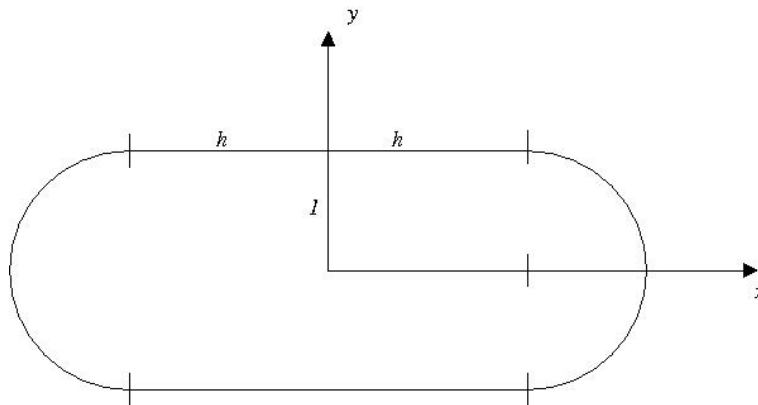


Figura 4.1: Estádio Circular

Em 1974, Bunimovich (BF) mostrou que a aplicação do bilhar em Γ , para todo $h > 0$, é ergódica e possui expoente de Lyapunov positivo em quase todo ponto.

Observemos que Γ é globalmente \mathcal{C}^1 e \mathcal{C}^∞ por partes. Assim podemos aplicar toda a teoria desenvolvida nos capítulos 1, 2 e 3 para a aplicação e fluxo do bilhar no estádio circular.

Nosso objetivo nesse capítulo é elaborar um algoritmo para cálculo dos expoentes de Lyapunov da aplicação do bilhar e, usando os resultados do capítulo 3, obter os expoentes de Lyapunov para o fluxo.

4.2 Bilhar no Estádio Circular

Fixado $h > 0$, dividimos a curva Γ em quatro partes que serão parametrizadas independentemente, no sentido anti-horário e de forma que nos pontos de *cola* ela seja \mathcal{C}^1 , veja figura 4.2.

Assim parametrizamos Γ da seguinte forma:

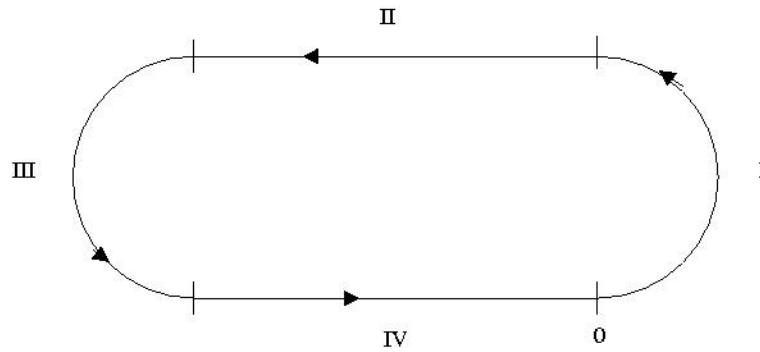


Figura 4.2: Estádio Circular com segmentos de parametrização marcados

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\sin(s) + h, -\cos(s)) & 0 \leq s \leq \pi \quad \text{(I)} \\ (-s + \pi + h, 1) & \pi < s < \pi + 2h \quad \text{(II)} \\ (\sin(s - 2h) - h, -\cos(s - 2h)) & \pi + 2h \leq s \leq 2\pi + 2h \quad \text{(III)} \\ (s - 2\pi - 3h, -1) & 2\pi + 2h < s \leq 2\pi + 4h \quad \text{(IV)} \end{array} \right.$$

Nessa fórmula, as regiões **I** e **II** estão parametrizadas pelo ângulo que o vetor tangente faz com o eixo x . Os segmentos de reta foram parametrizados de forma que nos pontos de *cola* o estádio seja de classe \mathcal{C}^1 , ou seja,

diferenciável e com derivada contínua. Denotando por $\Gamma'(s)$ o vetor tangente a Γ no ponto s , temos $\|\Gamma'(s)\| = 1 \forall s \in [0, 2\pi + 4h)$ e portanto Γ está parametrizada pelo comprimento de arco.

Vimos no capítulo 1, seção 1.3, que, sendo $\mathcal{M} = [0, 2\pi + 4h) \times (0, \pi)$, podemos definir o homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s_0, \psi_0) &\longmapsto (s_1, \psi_1) \end{aligned}$$

que denominamos aplicação do bilhar. Aqui $s_0, s_1 \in \Gamma$ e ψ_0, ψ_1 são, respectivamente, o ângulo que a trajetória do bilhar faz com $\Gamma'(s_0)$ e $\Gamma'(s_1)$. Construimos um subconjunto $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, retirando de \mathcal{M} o conjunto $\{(s, \psi); s \in \{0, \pi, \pi + 2h, 2\pi + 2h\} \text{ e } \psi \in (0, \pi)\}$ juntamente com suas imagens e pré imagens por \mathcal{F} . O conjunto $\tilde{\mathcal{M}}$ é aberto, denso e possui medida de Lebesgue total em \mathcal{M} . Em $\tilde{\mathcal{M}}$ a aplicação \mathcal{F} é difeomorfismo \mathcal{C}^∞ com derivada

$$D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F} = \frac{1}{\sin \psi_1} \begin{bmatrix} \tau_{01} \kappa_0 - \sin \psi_0 & \tau_{01} \\ \kappa_1 (\tau_{01} \kappa_0 - \sin \psi_0) - \kappa_0 \sin \psi_1 & \tau_{01} \kappa_1 - \sin \psi_1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde τ_{01} é a distância em \mathbb{R}^2 entre s_0 e s_1 e, κ_0 (resp. κ_1) é a curvatura de Γ em s_0 (resp. s_1).

Observemos que

$$\kappa(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in (0, \pi) \cup (\pi + 2h, 2\pi + 2h) \\ 0 & \text{se } s \in (\pi, \pi + 2h) \cup (2\pi + 2h, 2\pi + 4h) \end{cases}$$

De 4.1 temos:

$$|\det D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}| = \frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_1} > 0 \quad (4.2)$$

Na proposição 1 mostramos que \mathcal{F} preserva a probabilidade

$$d\mu = \frac{1}{4\pi + 8\pi h} \sin \psi ds d\psi$$

em $\tilde{\mathcal{M}}$.

4.2.1 Simulação Computacional de \mathcal{F}

A aplicação \mathcal{F} é definida implícitamente. Para implementá-la, utilizamos resultados básicos de geometria que nos ajudam a simular os choques da partícula com o estádio. Fazemos $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$.

Dados, um ponto $s_0 = (x_0, y_0)$ em Γ e uma direção ψ_0 com $\Gamma'(s_0)$, \mathcal{F}

associa ao par (s_0, ψ_0) o par (s_1, ψ_1) . O ponto $s_1 = (x_1, y_1)$ é determinado pela interseção da reta que passa por s_0 , tem ângulo ψ_0 com o vetor $\Gamma'(s_0)$, e a curva $\Gamma(s)$. Como $\Gamma(s)$ é composta por segmentos de reta e semi-círculos, para determinarmos o próximo ponto de colisão s_1 , fazemos ou interseção de reta com reta ou de reta com círculo. Isso equivale a resolver equações de primeiro ou segundo grau. O valor de ψ_1 (ângulo de batida) é determinado observando a lei de reflexão do bilhar (ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão) vide figura 4.2.1.

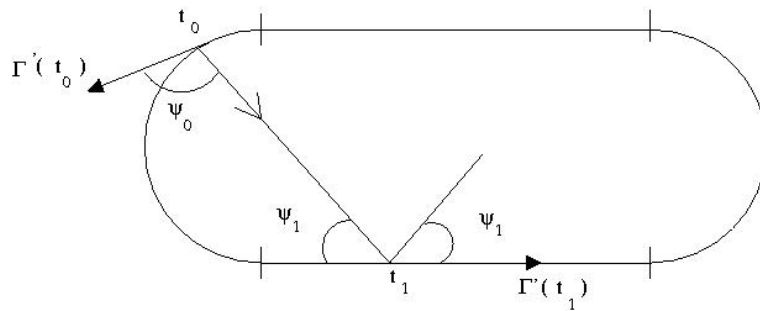


Figura 4.3: Trajetória no Estádio Circular

4.3 Expoentes de Lyapunov

Relembremos do capítulo 2 que, por definição, os expoentes de Lyapunov para \mathcal{F} , num ponto (s_0, ψ_0) e direção \vec{u} , são dados por:

$$\lambda_{\vec{u}}(s_0, \psi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{(s_0, \psi_0)}(\mathcal{F}^n) \vec{u}\| \quad (4.3)$$

onde $D_{(s_0, \psi_0)}\mathcal{F}^n$ é a n -ésima derivada de \mathcal{F} .

Pela regra da cadeia, fazendo $z_i = \mathcal{F}^i(s_0, \psi_0)$, temos

$$D_{(s_0, \psi_0)}\mathcal{F}^n = D_{z_{n-1}}\mathcal{F} D_{z_{n-2}}\mathcal{F} \cdots D_{z_1}\mathcal{F} D_{z_0}\mathcal{F} \quad (4.4)$$

Vimos, aplicando o Teorema de Oseledet's à aplicação do bilhar, que tais expoentes existem $\mu - q.t.p$ em $\tilde{\mathcal{M}}$.

A seguir apresentamos um resultado que nos será muito útil no final desse capítulo pois ele afirma que os expoentes de Lyapunov da aplicação do bilhar independe do sistema de coordenadas adotado. Esse resultado é válido também para o fluxo do bilhar.

Proposição 7. *Seja*

$$g : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}} \\ (s, \psi) & \longmapsto & (\sigma, \zeta) \end{array}$$

uma mudança de coordenadas, onde $\overline{\mathcal{M}}$ é o fecho de \mathcal{M} . Se \mathcal{G} é a aplicação do bilhar nas coordenadas (σ, ζ) então os expoentes de Lyapunov de \mathcal{G} são os mesmos de \mathcal{F} .

Prova:

Dado $(s, \psi) \in \tilde{\mathcal{M}}$ com $g(s, \psi) = (\sigma, \zeta)$, seja

$$\lambda_{\vec{u}}(s, \psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_{(s, \psi)}(\mathcal{F}^n) \vec{u}\| \quad (4.5)$$

o expoente de Lyapunov para \mathcal{F} em (s, ψ) .

É claro que, para todo n natural, $(g \circ \mathcal{F}^n)(s, \psi) = (\mathcal{G}^n \circ g)(s, \psi)$. Pela regra da cadeia, temos

$$D_{\mathcal{F}^n(s, \psi)} g D_{(s, \psi)} \mathcal{F}^n(\vec{u}) = D_{g(s, \psi)} \mathcal{G}^n D_{(s, \psi)} g(\vec{u})$$

que implica em

$$\|D_{\mathcal{F}^n(s, \psi)} g D_{(s, \psi)} \mathcal{F}^n(\vec{u})\| = \|D_{(\sigma, \zeta)} \mathcal{G}^n D_{(s, \psi)} g(\vec{u})\|$$

e

$$\|D_{\mathcal{F}^n(s, \psi)} g\| \|D_{(s, \psi)} \mathcal{F}^n(\vec{u})\| \geq \|D_{(\sigma, \zeta)} \mathcal{G}^n(\vec{w})\|$$

onde $\vec{w} = D_{(s, \psi)} g(\vec{u})$. Se $K = \sup\{\|D_{(s, \psi)} g\|\}$ então

$$K \|D_{(s, \psi)} \mathcal{F}^n(\vec{u})\| \geq \|D_{(\sigma, \zeta)} \mathcal{G}^n(\vec{w})\|$$

Tomando o logaritmo e dividindo ambos os lados por n obtemos

$$\frac{\log K}{n} + \frac{\log \|D_{(s, \psi)} \mathcal{F}^n(\vec{u})\|}{n} \geq \frac{\log \|D_{(\sigma, \zeta)} \mathcal{G}^n(\vec{w})\|}{n}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_{\vec{u}}(s, \psi) \geq \lambda_{\vec{w}}(\sigma, \zeta)$$

onde $\lambda_{\vec{w}}(\sigma, \zeta)$ é o expoente de Lyapunov para \mathcal{G} no ponto (σ, ζ) .

Considerando agora, para todo n natural, $(\mathcal{F}^n \circ g^{-1})(\sigma, \zeta) = (g^{-1} \circ \mathcal{G}^n)(\sigma, \zeta)$ e procedendo da mesma forma que acima obtemos

$$\lambda_{\vec{u}}(s, \psi) \leq \lambda_{\vec{w}}(\sigma, \zeta).$$

□

4.3.1 Triangularização de Matrizes

Seja A é uma matriz real 2×2 , denotaremos por A' a matriz transposta de A . Uma matriz A é ortogonal se $AA' = I$, onde I é a matriz identidade.

Teorema 4. *Decomposição QR* Se A é uma matriz 2×2 invertível com determinante positivo, então existe uma única matriz ortogonal Q tal que $A = QR$, onde R é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.

Prova:

Tomemos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Por hipótese $\det A = ad - bc > 0$. Definamos

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \beta = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Assim $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Se fizermos $Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ então:

$$QQ' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix} = I$$

Q é ortogonal. Mas

$$Q'A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2 + c^2} & ab - \beta d \\ 0 & b\beta + \alpha d \end{bmatrix} := R$$

é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos. De fato $\sqrt{a^2 + c^2} > 0$ e $b\beta + \alpha d = \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$. Assim $A = QR$. E a existência das matrizes Q e R está provada.

O processo de construção da matriz Q acima é denominado Rotação de Givens, nome este sugerido pelo fato de a matriz Q' ser a matriz de rotação do vetor (a, c) do ângulo

$$\theta = \arctan \frac{c}{a}$$

no sentido horário.

Para unicidade, suponhamos duas decomposições de A

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2 \tag{4.6}$$

Como A é invertível, R_1 e R_2 também são. Assim, da equação 4.6 temos $R_1 R_2^{-1} = Q_1' Q_2$ e conseqüentemente

$$(R_1 R_2^{-1})^{-1} = (Q_1' Q_2)^{-1} = (Q_1' Q_2)' = (R_1 R_2^{-1})'.$$

Logo $R_1 R_2^{-1}$ é ortogonal e, sendo triangular superior com os elementos da diagonal positivos, concluímos que $R_1 R_2^{-1} = I$ e $R_1 = R_2$.

Portanto 4.6 implica $Q_1 = Q_2$.

□

4.3.2 Algoritmo para Cálculo dos Expoentes de Lyapunov de \mathcal{F}

Dado $(s_0, \psi_0) \in \tilde{\mathcal{M}}$, para calcular os expoentes de Lyapunov de \mathcal{F} nesse ponto utilizamos um algoritmo proposto por Eckman e Ruelle (ER) baseado na demonstração de Jhonson, Palmer e Sell para o Teorema de Oseledet's (JPS).

No que se segue apresentamos uma descrição desse algoritmo.

Consideremos 4.4 escrito da seguinte forma

$$M = J_{n-1} J_{n-2} \cdots J_0. \quad (4.7)$$

onde $J_i = D_{z_i} \mathcal{F}$. Pela equação 4.2, cada J_i é invertível e $\det J_i > 0$.

Pelo teorema da decomposição QR, existem únicas matrizes Q_i ortogonal e T_i triangular tais que $J_i = Q_i T_i$, com $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Fazendo

$$\begin{cases} J_0 = Q_0 T_0 \\ J_i Q_{i-1} = Q_i T_i \end{cases}$$

e substituindo em 4.7 obtemos

$$\begin{aligned} M &= Q_{n-1} T_{n-1} Q_{n-2}^{-1} Q_{n-2} T_{n-2} Q_{n-3}^{-1} \cdots Q_0 T_0 \\ &= Q_{n-1} T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1 T_0 \\ &= Q_{n-1} T^n \end{aligned}$$

onde $T^n = T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1 T_0$, é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos e Q_{n-1} é ortogonal.

Por (JPS), os expoentes de Lyapunov para \mathcal{F} em (s_0, ψ_0) são dados por:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \log T_{kk}^i \quad (4.8)$$

onde $k = 1, 2$ e T_{kk}^i é o k -ésimo elemento da diagonal da matriz T_i .

Com isso, calculando $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \log T_{kk}^{(i)}$ para m suficientemente grande teremos uma boa aproximação dos expoentes de Lyapunov da aplicação do bilhar em (s_0, ψ_0) .

Conforme relatamos na introdução, \mathcal{F} é ergódica e, portanto, seus expoentes são constantes μ -q.t.p. Assim daqui em diante, vamos denotá-los simplesmente por λ_1 e λ_2 .

Baseados no processo descrito acima implementamos o algoritmo para cálculo dos expoentes de Lyapunov para a aplicação \mathcal{F} .

4.3.3 Expoentes de Lyapunov para o Fluxo do Bilhar

Pelo capítulo 3 temos, definido o fluxo do bilhar $\phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$, veja seção 3.2 para definição de $\tilde{\Omega}$. Na proposição 4 mostramos que Φ^t é difeomorfismo C^∞ . Vimos também que o fluxo preserva a probabilidade

$$d\nu = \frac{1}{2\pi(2h + \pi)} dx dy d\omega$$

em $\tilde{\Omega}$.

No corolário 1 provamos que, dado $q \in \tilde{\Omega}$, o tempo médio entre colisões, dado pelo limite $\bar{\tau}(q) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{n(q,T)}$ existe e é igual à distância media entre os pontos de colisão

$$\bar{\tau}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\mathcal{F}^i(s, \psi)) \quad (4.9)$$

onde (s, ψ) é tal que s é o primeiro ponto de colisão da partícula com Γ e ψ o ângulo de saída. Em termos da projeção P definida na seção 3.3 isso quer dizer $(s, \psi) = P(q)$.

Como \mathcal{F} ergódica o valor do tempo médio entre colisões,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(\mathcal{F}^i(s, \psi)),$$

não depende de (s, ψ) , assim o denotaremos simplesmente por $\bar{\tau}$.

Vimos também que, em $\mathcal{T}_q \tilde{\Omega}$, temos uma decomposição $D\Phi^t$ -invariante dada por

$$\mathcal{T}_q \tilde{\Omega} = \mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega} \oplus \mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$$

Definimos o expoente de Lyapunov em um ponto $q \in \tilde{\Omega}$ e direção \vec{u} , para Φ^t , por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_q \Phi^T(\vec{u})\| := \lambda_{\vec{u}}(q)$$

Provamos que se $\vec{u} \in \mathcal{T}_q^0 \tilde{\Omega}$ então o expoente de Lyapunov na direção \vec{u} é sempre nulo. Por outro lado em $\mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$, pelo teorema 3, temos que os expoentes de Lyapunov do fluxo são dados por:

$$\lambda_{\vec{w}}(q) = \frac{1}{\bar{\tau}(q)} \lambda_{\vec{u}}(s, \psi)$$

onde: $(s, \psi) = P(q)$, $\lambda_{\vec{u}}(s, \psi)$ é o expoente de Lyapunov para \mathcal{F} em (s, ψ) na direção \vec{u} , $\vec{w} = (D_q^\perp P)^{-1}(\vec{u})$ e $\bar{\tau}(q)$ o tempo médio entre colisões.

Como $\bar{\tau}(q) = \bar{\tau}$ e os expoentes de Lyapunov para \mathcal{F} são λ_1 e λ_2 temos que os expoentes de Lyapunov do fluxo em $\mathcal{T}_q^\perp \tilde{\Omega}$, Λ_1 e Λ_2 são dados por:

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\bar{\tau}} \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\bar{\tau}} \quad (4.10)$$

4.4 Testes Computacionais

Abaixo apresentamos uma tabela com os valores do expoente de Lyapunov positivo para o fluxo e para a aplicação do bilhar em função do parâmetro h .

| h | λ_1 | $\bar{\tau}$ | Λ_1 |
|-------|-------------|--------------|-------------|
| 0.250 | 0.75 | 2.346 | 0.323 |
| 0.500 | 0.89 | 1.95 | 0.390 |
| 0.750 | 0.93 | 2.07 | 0.418 |
| 1.000 | 0.93 | 2.18 | 0.430 |
| 1.250 | 0.92 | 2.26 | 0.433 |
| 1.500 | 0.89 | 2.33 | 0.432 |
| 1.750 | 0.87 | 2.39 | 0.431 |
| 2.000 | 0.84 | 2.45 | 0.430 |
| 2.250 | 0.81 | 2.49 | 0.426 |
| 2.500 | 0.78 | 2.53 | 0.422 |
| 2.750 | 0.76 | 2.57 | 0.418 |
| 3.000 | 0.74 | 2.60 | 0.413 |
| 3.250 | 0.71 | 2.63 | 0.410 |
| 3.500 | 0.69 | 2.65 | 0.405 |
| 3.750 | 0.67 | 2.67 | 0.401 |
| 4.000 | 0.65 | 2.70 | 0.398 |
| 4.250 | 0.63 | 2.71 | 0.393 |
| 4.500 | 0.62 | 2.73 | 0.389 |
| 4.750 | 0.60 | 2.75 | 0.386 |
| 5.000 | 0.58 | 2.76 | 0.381 |

Para obter os valores da tabela acima procedemos da seguinte forma: Fixado $h > 0$, tomamos, em $\tilde{\mathcal{M}}$, dez condições iniciais. Para cada condição inicial, executamos o programa para 10^7 iterações e obtemos uma aproximação para o expoente de \mathcal{F} para a respectiva condição inicial. Depois disso tomamos a média aritmética dos expoentes das dez condições iniciais e esse será aproximadamente o expoente de Lyapunov λ_1 da Aplicação do bilhar. O valor de $\bar{\tau}$ foi obtido de forma análoga, calculando a média 4.9 para $n = 10^7$.

Esse procedimento de tomar médias faz-se necessário pelo fato de não estarmos calculando exatamente o valor do limites, seja em 4.8 ou em 4.9.

Depois de calculado o expoente de Lyapunov para o fluxo utilizando 4.10, a última coluna da tabela foi obtida dividindo esse expoente pelo fator $\sqrt{\frac{4+\pi}{4h+\pi}}$. que é a razão entre as áreas do estádio com $h = 1$ e $h \neq 1$. Fizemos essa mudança de escala para compararmos nossos resultados com *Benettin-Strelcyn* (BS).

Nesse artigo eles permitem variar tanto h como o raio, r , dos semi-círculos que compoem o estádio circular. Assim a área do estádio é dada por $A(h, r) = 4hr + \pi r^2$ e fixando a razão $\frac{h}{r}$ os expoentes de Lyapunov para diferentes valores de h e r (consequentemente diferentes áreas, A e \bar{A}) se relacionam como:

$$\Lambda\left(\frac{h}{r}, \bar{A}\right) = \sqrt{\frac{A}{\bar{A}}} \Lambda\left(\frac{h}{r}, A\right).$$

Fixando $A(1, 1)$ Benettin-Strelcyn calcula o expoente de Lyapunov para o fluxo em função da razão $\frac{h}{r}$. Como no nosso caso o raio r é sempre igual a um e não fixamos o valor da área, a mudança de escala fez-se necessária.

Conforme podemos verificar no gráfico da figura 4.4, nosso resultado

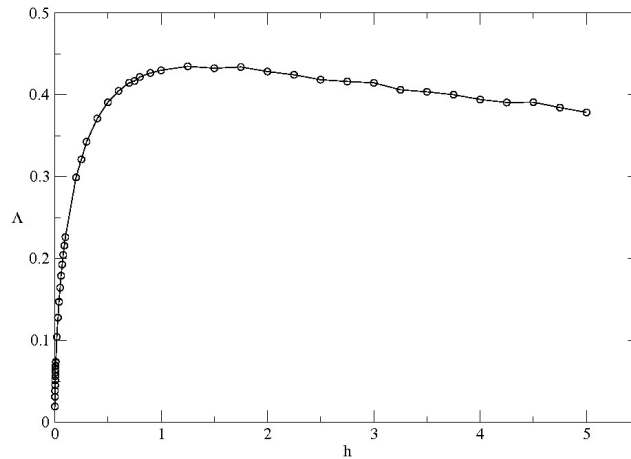


Figura 4.4: Expoente de Lyapunov para o fluxo em função de h

está de acordo com *Benettin-Strelcyn* (BS), essa comparação pode ser feita uma vez que na proposição 7 mostramos que os expoentes de Lyapunov independem das coordenadas adotadas.

Referências Bibliográficas

- [EL] LIMA, E L.; *Análise Real* Vol. 2
- [SK] KATOK, B.; STRELCYN, J.M *Invariant manifolds, entropy and billiards;. smooth maps with singularities.*Lect. Notes Math., Vol. 1222.
- [MAN] MAÑÉ, R. *Introdução à teoria ergódica.* Rio de Janeiro: IMPA, 1982.
- [MC] MARKARIAN, R; CHERNOV, N. *Chaotic Billiards*
- [JPS] RUSSEL, JOHNSON A.; PALMER, KENNETH J.; SHELL, GEORGE R.: *Ergodic Properties of Linear Dynamical Systems*, SIAM J. MATH. ANAL. Vol 18 (USA) (1987)
- [BF] L.A. BUNIMOVICH, *Funct. Anal. Appl.* 8-254 (1974)
- [ER] J.-P ECKMANN AND RUELLE, *Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors*, Rev Modern Phys. 57 (1985) pp 617-656
- [BS] G. BENETTIN AND J.-M. STRELCYN, *Numerical Experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy*, Phys. Rev. A 17, 773 (1978)
- [KH] HASSELBLATT B.; KATOK A. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1995.