

Dissertação de Mestrado

Ação de Terremotos em Espaços de
Teichmüller

Luana Giarola de Assis

Orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevkii

Belo Horizonte

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Ação de Terremotos em Espaços de
Teichmüller

Luana Giarola de Assis

Orientador: Nikolai Alexandrovitch Goussevkii

Belo Horizonte

22 de fevereiro de 2008

Dedicado a meus pais, meus avós e meu Déca.

Agradecimentos

Acredito que todos que se depararam com esta página já sentiram o peso do papel em branco. Já sentiram a importância de tantos nomes que passam à mente e a injustiça da escolha de alguns poucos para vencerem este branco. No entanto, mais injusto seria que o mesmo continuasse branco tendo tantos nomes, tantas personalidades, tanto conhecimento compartilhado na construção das páginas deste trabalho.

Em primeiro lugar e acima de tudo, agradeço a Deus. Apenas Ele poderia me fazer perseverar, a vencer meus próprios medos e angústias, a me superar a cada dia.

Agradeço aos meus pais pelo carinho, pela paciência, pelo apoio, pela torcida e amor incondicionais. Também aos meus avós Cândido e Ivone, tios Renata, Tarcísio e Ângela, sogros Carmem e Tito; cada um com seu jeito, com sua forma de apoiar, suportar a saudade e a ausência de tanto tempo dedicado aos estudos e pouco à família.

A meu André, não há palavras que possam mensurar tudo em que me ajudou, apoiou, ensinou, corrigiu, acalmou, dedicou, leu, falou, calou, cuidou ... Obrigada, Déca, mais uma vez.

Não posso me esquecer dos amigos, companheiros nos estudos, nas discussões matemáticas - idéias até podem surgir sozinhas, mas jamais poderão se solidificar na mente humana sem serem discutidas e compartilhadas - nos sofrimentos, nas provas, nos choros, nas gargalhadas, nos chocolates: Simone, Flávio Lemos, Gustavo Souza, Michel Spira, Cléber e Evilson. Parece que cada um segurou numa ponta e ajudou a jogar para cima. Obrigada Raquel, Carlos Gustavo (Gugu), Wander e Patrícia pelas horas e horas disponibilizadas para treinar minha apresentação e disposição para discutir minhas dúvidas. Agradeço aos amigos “não-matemáticos” Jorge, Delson, Cidinha e Wesley pelo grande apoio.

Ao Gustavo Souza, devo fazer um agradecimento em separado pois, sem o auxílio e amizade de que dispôs, não haveria as principais páginas a serem preenchidas. Você me ajudou num momento, que posso dizer, desesperador dessa dissertação. Ajudou a ver que seria possível e acreditar que isso, um dia, teria fim.

Nikolay, obrigada. É difícil agradecer ao orientador sem que outras pessoas pensem que seja falso, mas o senhor sabe que este agradecimento é justo. O senhor é mais que um professor, um educador, um orientador: é meu amigo. E me apoiou em tantos momentos difíceis. Acreditou que seria possível, que eu seria capaz, até me convenceu disso. Cobrou nos momentos de preguiça, acalmou nas horas de desespero, ensinou quando havia dúvidas, aconselhou e deu rumo ao meu caminho. Fez mais do que um orientador faria, mas não é apenas por isso que o chamo meu amigo. Mais uma vez, muito obrigada.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal enunciar e demonstrar o teorema de Thurston sobre terremotos, o qual afirma que quaisquer duas estruturas hiperbólicas sobre superfícies compactas diferem apenas por um terremoto à esquerda.

Afim de alcançarmos esse objetivo, serão necessários certos resultados relacionados a superfícies de Riemann, grupos Fuchsianos, espaços de módulos e de Teichmüller de superfícies de Riemann, estruturas hiperbólicas vistas como métricas Riemannianas e laminações geodésicas, bem como resultados sobre terremotos à esquerda.

Abstract

The purpose of this work is to present the Thurston theorem about the actions of the earthquakes on the Teichmüller space. This theorem says that two hyperbolic structures on a closed surface are related by one left earthquake. We provide an exposition of the theory of Teichmüller spaces and geodesic laminations.

Sumário

0	Introdução	5
1	Superfícies de Riemann	8
1.1	Grupos Fuchsianos	8
1.1.1	O plano complexo estendido	8
1.1.2	O grupo de transformações de Möbius	12
1.1.3	Modelos do plano hiperbólico	17
1.1.4	Isometrias do plano hiperbólico	20
1.1.5	Grupos Fuchsianos	22
1.2	Superfícies de Riemann	24
1.3	Uniformização	26
1.4	Espaços de Módulos e Espaços de Teichmüller	30
1.4.1	Espaços de módulos	30
1.4.2	Espaços de Teichmüller	30
1.4.3	Topologia no espaço de Teichmüller	34
1.4.4	Coordenadas de Fenchel-Nielsen em $T(S_g)$	36
1.5	Superfícies Hiperbólicas	39
1.5.1	Métricas Riemannianas	39
1.5.2	Espaços de Teichmüller e estruturas hiperbólicas	41

1.6	Envoltórias convexas	42
1.7	Laminações Geodésicas	43
2	Teorema de Thurston	49
2.1	Terremotos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$	49
2.2	Terremotos em superfícies hiperbólicas	68

Lista de Figuras

1.1	Projeção estereográfica	9
1.2	Inversão na reta	9
1.3	A inversão $i_L : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$	10
1.4	Inversão no círculo	11
1.5	A inversão $i_\Sigma : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$	12
1.6	Rotação: $g(z) = e^{i\theta}z = i_L \circ i_x$	14
1.7	Translação: $g(z) = a + z = i_{L_2} \circ i_{L_1}$	14
1.8	Dilatação: $g(z) = kz = i_{\Sigma_2} \circ i_{\Sigma_1}$, onde Σ_1 tem raio $R_1 = 1$ e Σ_2 tem raio $R_2 = \sqrt{k}$	15
1.9	Inversão: $g(z) = \frac{1}{z} = i_{\Sigma_1} \circ i_x$	15
1.10	Modelo do semi-plano superior \mathbb{H}	17
1.11	Modelo do disco de Poincaré	18
1.12	Retas paralelas no modelo de Klein \mathcal{K}	19
1.13	Retas perpendiculares em \mathcal{K}	20
1.14	Domínio fundamental do bitoro	29
1.15	Elementos de $Mod(S_g)$ preservam as fibras $\pi^{-1}([S, K])$	32
1.16	Decomposição do bi-toro em calças	37
1.17	Representação geométrica de E_Υ	42
1.18	Envoltória convexa do conjunto Υ	43
1.19	Direção da geodésica l no ponto p	44

1.20	A direção de uma folha num ponto p , pertencente à folha, varia continuamente com p	45
2.1	Terremoto elementar	50
2.2	Quando $Fix(g) \neq \emptyset$, existe único levantamento de g com pontos fixos	55
2.3	Família de levantamentos da fibra F	57
2.4	Dinâmica sobre os pontos fixos de g_1 e g_2	59
2.5	Vizinhança de $\mathcal{H}(f_0)$	60
2.6	Pontos de $Fix(g)$ estão próximos dos pontos de $Fix(f_0)$	61
2.7	Eixo da isometria de comparação separa fracamente A de B	65
2.8	Terremoto	67

Capítulo 0

Introdução

Objetivando enunciar e provar de forma clara e espontânea o teorema de Thurston sobre terremotos - que afirma que quaisquer duas estruturas hiperbólicas em uma superfície compacta diferem apenas por um terremoto à esquerda - percorreremos sobre uma vasta gama de definições e resultados correlacionados. Numa leitura preliminar, o primeiro capítulo poderá parecer um tanto desconexo em seus vários assuntos. Mas ficará claro, no decorrer do texto, a justificativa de suas exposições e suas relações com terremotos à esquerda sobre superfícies hiperbólicas, cuja definição será apresentada no segundo capítulo. Dentre tantos tópicos, veremos alguns resultados relacionados a superfícies de Riemann, grupos Fuchsianos, espaços de módulos e de Teichmüller de superfícies de Riemann, coordenadas de Fenchel-Nielsen de espaços de Teichmüller, estruturas hiperbólicas vistas como métricas Riemannianas e laminações geodésicas.

Veremos que espaços de Teichmüller de superfícies marcadas com gênero g estão em correspondência biunívoca com o espaço $\mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$, assumindo assim, a topologia Euclidiana induzida.

Tendo a finalidade de demonstrarmos o teorema de Thurston sobre terremotos no plano hiperbólico, introduziremos laminações geodésicas e aplicações de terremotos definidas sobre elas.

Como conseqüência, conseguiremos estender esse resultado a superfícies hiperbólicas completas, olhando para seus recobrimentos universais e considerando seus respectivos alargamentos Fuchsianos, em que o alargamento Fuchsiano de uma superfície completa é

uma compactificação desta a partir do conjunto de descontinuidades obtido pela ação do grupo fundamental sobre a fronteira de seu recobrimento universal.

Façamos uma análise mais detalhada dos capítulos.

No primeiro capítulo apresentaremos alguns dos principais conceitos da geometria hiperbólica plana e resultados que serão necessários para o desenvolvimento do estudo sobre superfícies de Riemann. Além disso, veremos a definição de grupos Fuchsianos e sua relação com superfícies de Riemann marcadas, assim como o Teorema de Uniformização de Riemann.

Apresentaremos as definições de espaços de módulos, de Teichmüller e as coordenadas de Fenchel-Nielsen para o espaço de Teichmüller de superfícies de Riemann de gênero $g \geq 2$ fechadas.

Definiremos, também, superfícies hiperbólicas a partir de métricas Riemannianas, as quais estará voltado o nosso interesse, e construiremos espaços de Teichmüller de superfícies Riemannianas que, como veremos, estará relacionado às classes de equivalência de métricas hiperbólicas, por isometrias homotópicas à identidade.

Por fim, introduziremos a idéia de laminações geodésicas sobre superfícies hiperbólicas e alguns resultados relacionados.

Não demonstraremos a maioria dos resultados apresentados neste capítulo, sendo as demonstrações facilmente encontradas nas bibliografias indicadas.

No segundo capítulo, apresentaremos a definição de terremotos à esquerda sobre laminações geodésicas do plano hiperbólico. A definição de terremotos à direita é similar, e estes podem ser vistos como o inverso de terremotos à esquerda.

Veremos que a idéia geométrica de terremotos à esquerda sobre laminações finitas, denominados terremotos simples, é bastante intuitiva e poderemos estendê-la a terremotos sobre laminações infinitas, os quais poderiam ser definidos como o fecho do conjunto de terremotos à esquerda sobre laminações finitas, visto que estes terremotos simples são densos no conjunto de todos os terremotos sobre laminações geodésicas.

Estenderemos a definição de terremotos ao plano hiperbólico juntamente com sua fronteira no infinito S_∞^1 (o qual chamaremos de terremotos no infinito) e, assim, ganharemos uma noção de continuidade (o limite de toda aplicação de terremoto sobre laminações do

plano é contínua).

Dessa forma, teremos construído a base para chegarmos ao teorema de Thurston sobre terremotos que, no texto, será apresentado como **Geologia é transitiva**. A demonstração deste teorema envolve uma fibração de $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, onde $PSL(2, \mathbb{R})$ é visto como subgrupo de $Homeo_+(S_{\infty}^1)$ pela sua ação natural na fronteira de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, e a percepção de que um subconjunto de $PSL(2, \mathbb{R})$, formado por XL -homeomorfismos, será homeomorfo ao plano hiperbólico. Após essas observações, iremos considerar o conjunto de pontos fixos de XL -homeomorfismos e seus fecho convexos (envoltórias convexas) e construir a aplicação contínua entre o conjunto dos XL -homeomorfismos e o conjunto formado por todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. A partir dessa aplicação e de suas propriedades, seremos capazes de concluir a prova do principal resultado deste texto.

Capítulo 1

Superfícies de Riemann

1.1 Grupos Fuchsianos

1.1.1 O plano complexo estendido

O plano estendido, também chamado de esfera de Riemann, é denotado por \mathbb{C}_∞ e é definido como sendo o plano \mathbb{C} juntamente com o ponto ideal ∞ . Podemos dotá-lo de uma topologia natural induzida pela topologia Euclidiana em $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; |x| = 1\}$ via projeção estereográfica definida a seguir.

Definição 1.1.1 *A projeção estereográfica $\pi : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow S^2$ é a aplicação dada por*

$$z = x + iy \longmapsto \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \text{ e } \pi(\infty) = N \quad (1.1)$$

onde $N = (0, 0, 1)$ é o pólo norte de S^2 .

Assim, a topologia no plano estendido \mathbb{C}_∞ é induzida por π de tal forma que a projeção π seja uma bijeção conforme. Os abertos de \mathbb{C}_∞ são os abertos de \mathbb{C} juntamente com as imagens inversas, através de π , de complementares de vizinhanças compactas de N .

As retas de \mathbb{C}_∞ são círculos passando pelo pólo norte N em S^2 e os círculos de \mathbb{C}_∞ são círculos que não passam por N em S^2 .

Existem duas aplicações contínuas importantes envolvendo retas e círculos de \mathbb{C}_∞ . Vamos defini-las a partir de aplicações de \mathbb{C} em \mathbb{C} .

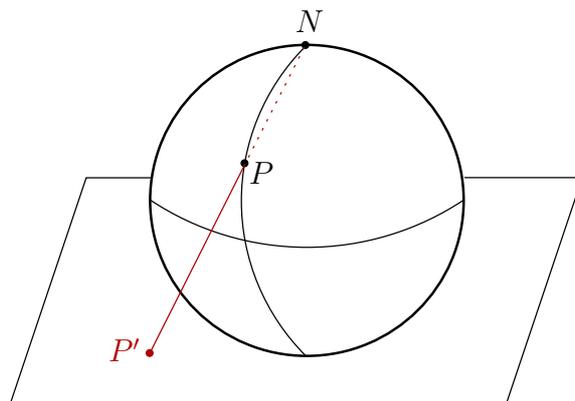


Figura 1.1: Projeção estereográfica

Definição 1.1.2 *Sejam L uma reta em \mathbb{C} e $i_L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação. Se i_L leva um ponto $Z \in \mathbb{C}$ no ponto $Z' = i_L(Z)$ tal que o segmento $\overline{ZZ'}$ seja perpendicular à reta L e o ponto médio do segmento $\overline{ZZ'}$ pertença à L , então i_L é dita uma reflexão em relação à reta L .*

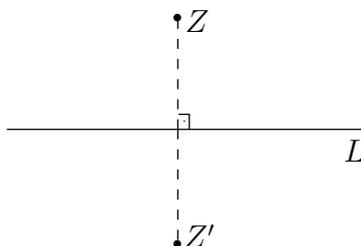


Figura 1.2: Inversão na reta

Para encontrarmos a aplicação de reflexão $i_L(Z)$, consideremos uma reta $L: ax+by = c$, onde a, b e $c \in \mathbb{C}$. O vetor $A = (a, b)$ é um vetor ortogonal à direção da reta L . Logo, um ponto $X = (x, y)$ pertence à L se, e somente se, $\langle A, X \rangle = c$, onde \langle, \rangle representa o produto interno Euclidiano. A reflexão em L transforma o ponto Z no ponto Z' , onde Z' pertence à reta ortogonal à reta L com vetor diretor A , como definimos em 1.1.2. Logo $Z' = Z + \lambda A$. O ponto médio entre Z e Z' é dado por $M = \left(\frac{Z + Z'}{2} \right)$ e pertence à reta L , ou seja, $\langle \frac{Z + Z'}{2}, A \rangle = c$. Desenvolvendo esta relação, chegamos a uma forma explícita para a reflexão i_L :

$$i_L(Z) = Z + 2 \left(\frac{c - \langle Z, A \rangle}{\langle A, A \rangle} \right) A \quad (1.2)$$

Proposição 1.1.3 *Propriedades da reflexão i_L :*

1. i_L é uma isometria anticonforme de \mathbb{C} ;
2. $i_L(Z) = Z \Leftrightarrow Z \in L$;
3. Sendo L' uma reta em \mathbb{C} , a imagem $i_L(L') = L' \Leftrightarrow L' \perp L$;
4. Sendo C um círculo em \mathbb{C} , a imagem $i_L(C) = C \Leftrightarrow C \perp L$;
5. $i_L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser estendida continuamente a uma reflexão em \mathbb{C}_∞ , tal que $i_L(\infty) = \infty$ (figura 1.3).

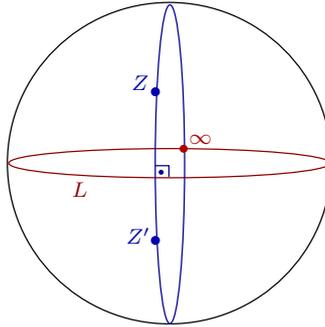


Figura 1.3: A inversão $i_L : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

Definição 1.1.4 *Sejam $\Sigma = \{X = (x, y) \in \mathbb{C} ; |Z - A| = R\}$ um círculo de raio R e centro A em \mathbb{C} e $i_\Sigma : \mathbb{C} - \{A\} \rightarrow \mathbb{C} - \{A\}$ uma aplicação. Se i_Σ leva um ponto $Z \in \mathbb{C} - \{A\}$, no ponto $Z' = i_\Sigma(Z) \in \overline{AZ}$ tal que os segmentos \overline{AZ} e $\overline{AZ'}$ satisfaçam a relação $\overline{AZ} \cdot \overline{AZ'} = R^2$, então i_Σ é dita uma reflexão em relação ao círculo Σ .*

Vamos proceder como fizemos com as reflexões i_L para que possamos entender melhor a reflexão i_Σ .

Consideremos um círculo Σ de centro $A = (x_a, y_a) \in \mathbb{C}$ e raio R . A equação dos pontos $(x, y) \in \Sigma$ é dada por $(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = R^2$. A reflexão do ponto $Z \in \mathbb{C} - \{A\}$

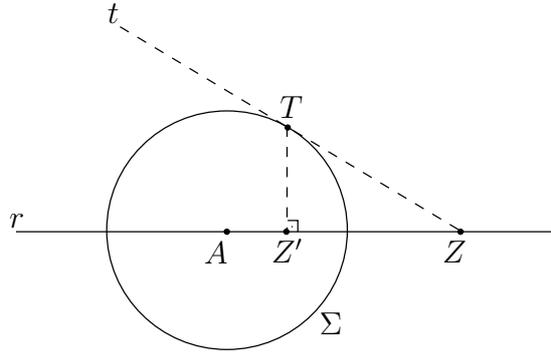


Figura 1.4: Inversão no círculo

em relação ao círculo Σ é descrita da seguinte forma: Consideremos a reta r suporte do segmento \overline{AZ} . Esta reta é dada por $r: X = A + \lambda \overrightarrow{AZ}$, onde $\overrightarrow{AZ} = Z - A$ é o vetor diretor do segmento que liga A a Z e λ varia em \mathbb{R} . Consideremos, também, uma tangente t ao círculo Σ que passa por Z . Tomemos o ponto $T \in (t \cap \Sigma)$ e façamos a projeção ortogonal do ponto T sobre a reta r . Assim, obteremos o ponto $Z' = A + \lambda \overrightarrow{AZ}$, para $\lambda = \frac{\|\overrightarrow{AZ'}\|}{\|\overrightarrow{AZ}\|}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana. Como Z' deve satisfazer à relação $\overline{AZ} \cdot \overline{AZ'} = R^2$, ou seja, $\|\overrightarrow{AZ'}\| = \frac{R^2}{\|\overrightarrow{AZ}\|}$; temos que $Z' = A + \frac{R^2}{\|\overrightarrow{AZ}\|^2} \overrightarrow{AZ}$. Portanto, chegamos a uma fórmula explícita para a reflexão em Σ :

$$i_{\Sigma}(Z) = A + R^2 \frac{Z - A}{\|Z - A\|^2} \tag{1.3}$$

Proposição 1.1.5 *Propriedades da reflexão i_{Σ} :*

1. $i_{\Sigma}(Z) = Z \Leftrightarrow Z \in \Sigma$;
2. $i_{\Sigma} \circ i_{\Sigma}(Z) = Z, \forall Z \in \mathbb{C} - \{A\}$;
3. Sendo L uma reta em $\mathbb{C} - \{A\}$, a imagem $i_{\Sigma}(L) = L \Leftrightarrow L \perp \Sigma$;
4. i_{Σ} troca o interior com o exterior de Σ ;
5. $i_{\Sigma} : \mathbb{C} - \{A\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{A\}$ pode ser estendida continuamente a uma reflexão em \mathbb{C}_{∞} , tal que o centro A corresponderá ao ponto ideal ∞ (figura 1.5).

6. $i_\Sigma : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$ é uma aplicação anticonforme.

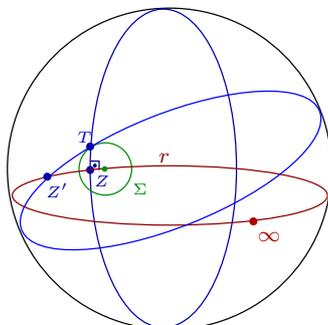


Figura 1.5: A inversão $i_\Sigma : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$

1.1.2 O grupo de transformações de Möbius

Uma transformação de Möbius agindo em \mathbb{C}_∞ é uma composição finita de reflexões em retas e círculos, como vimos em 1.1.2 e 1.1.4, respectivamente. Claramente, uma transformação de Möbius é um homeomorfismo de \mathbb{C}_∞ nele mesmo.

Definição 1.1.6 (Grupo Geral de Möbius) *O grupo geral de Möbius agindo sobre \mathbb{C}_∞ , denotado por $GM(\mathbb{C}_\infty)$, é o grupo das transformações de Möbius juntamente com a operação de composição.*

No entanto, tomando uma orientação em \mathbb{C}_∞ , toda reflexão é uma aplicação anti-conforme que reverte a orientação de \mathbb{C}_∞ . Neste estudo, teremos maior interesse em transformações de Möbius que preservam a orientação de \mathbb{C}_∞ .

Definição 1.1.7 (Grupo de Möbius) *O grupo de Möbius agindo sobre \mathbb{C}_∞ é o sub-grupo de $GM(\mathbb{C}_\infty)$ consistindo de todas as transformações de Möbius que preservam orientação em \mathbb{C}_∞ . Este grupo é denotado por $Möb(\mathbb{C}_\infty)$.*

Cada uma das aplicações de $Möb(\mathbb{C}_\infty)$ é uma transformação linear fracionária da forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.4}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. Podemos perceber que, a cada transformação $g \in \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$, está associada uma matriz $M_g \in GL(2, \mathbb{C})$, grupo das matrizes não singulares 2×2 com entradas complexas,

$$M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde a operação composição corresponde à operação de multiplicação de matrizes.

Além disso, as matrizes $M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $M_h = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ determinam a mesma transformação de Möbius em $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$, pois

$$h(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{az + b}{cz + d} = g(z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Daí, podemos observar que cada transformação de Möbius g pode ser representada por um par de matrizes $\pm M_g$ do grupo $SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$.

Podemos melhorar ainda mais essa correspondência.

Teorema 1.1.8 *O grupo das transformações de Möbius $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ é isomorfo ao grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, onde*

$$PSL(2, \mathbb{C}) \approx SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id_2\}$$

é o grupo projetivo das matrizes 2×2 com entradas complexas homogêneas e Id_2 é a matriz identidade 2×2 .

Tanto a identidade do grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, quanto a transformação identidade de $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ serão denotadas por id a partir de agora.

Teorema 1.1.9 *O grupo $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ é gerado pelas seguintes transformações:*

1. *Rotações da forma $g(z) = e^{i\theta}z$;*
2. *Traslações da forma $g(z) = a + z$;*
3. *Dilatações da forma $g(z) = kz$, onde $k > 0$ e $k \neq 1$;*

4. Inversões da forma $g(z) = \frac{1}{z}$.

Vamos relacionar as transformações geradoras do grupo $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$, dadas no teorema 1.1.9, às reflexões definidas em 1.1.2 e 1.1.4.

Teorema 1.1.10 *Cada uma das aplicações geradoras relacionadas no teorema 1.1.9 é uma composição de duas reflexões em retas ou círculos.*

As demonstrações destes fatos são apresentadas em [6] e [9].

Uma idéia geométrica do teorema 1.1.10 segue nas figuras 1.6, 1.7, 1.8 e 1.9.

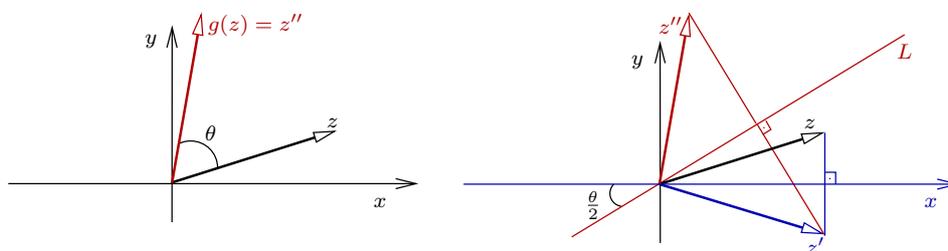


Figura 1.6: Rotação: $g(z) = e^{i\theta} z = i_{L_2} \circ i_{L_1}$

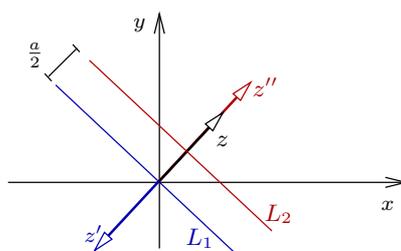


Figura 1.7: Translação: $g(z) = a + z = i_{L_2} \circ i_{L_1}$

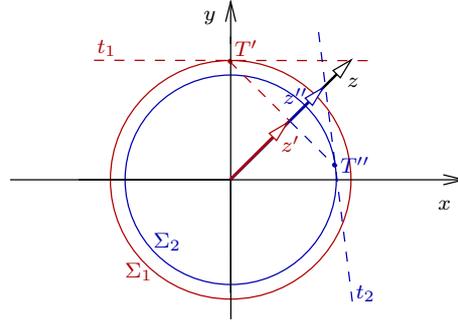


Figura 1.8: Dilatação: $g(z) = kz = i_{\Sigma_2} \circ i_{\Sigma_1}$, onde Σ_1 tem raio $R_1 = 1$ e Σ_2 tem raio $R_2 = \sqrt{k}$.

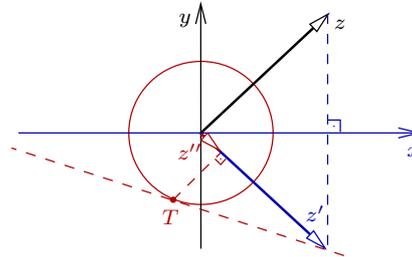


Figura 1.9: Inversão: $g(z) = \frac{1}{z} = i_{\Sigma_1} \circ i_x$

Os elementos de $\text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ podem ser classificados de acordo com o número de pontos fixos pela sua ação em \mathbb{C}_∞ como parabólicos, elípticos ou hiperbólicos, sendo que os elementos hiperbólicos podem ser simplesmente hiperbólicos ou loxodrômicos.

Um ponto $z \in \mathbb{C}_\infty$ é fixo por uma aplicação $g \in \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$, $g \neq id$, quando

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Rightarrow z = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{\sqrt{(d - a)^2 - 4cb}}{2c} \Rightarrow z = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{\sqrt{tr^2(g) - 4}}{2c},$$

onde $tr^2(g) = tr^2(M_g)$ e $tr(g) = |tr(M_g)| = |a + d|$ é o módulo do traço da matriz M_g associada a g . Observemos, então, que o número de pontos fixos de g está associado ao traço da matriz M_g .

1. Elementos parabólicos possuem apenas um ponto fixo em \mathbb{C}_∞ , ou seja, $tr(g) = 2$.
2. Elementos elípticos possuem dois pontos fixos complexos conjugados em \mathbb{C}_∞ , com $tr(g) < 2$.

3. Elementos hiperbólicos possuem dois pontos fixos em \mathbb{C}_∞ , um atrator e outro repulsor, com $\text{tr}(g) > 2$. Se forem simplesmente hiperbólicos, então $\text{tr}^2(g) \in [4, +\infty)$. Se forem loxodrômicos, então $\text{tr}^2(g) \notin [0, +\infty)$.

Mais detalhes sobre este assunto podem ser vistos em [7] e [9].

Teorema 1.1.11 *Sejam f e g duas transformações de Möbius diferentes da identidade. Então, f e g são conjugadas se, e somente se, $\text{tr}^2(g) = \text{tr}^2(f)$.*

Uma demonstração deste fato pode ser vista em [2].

Assim, podemos concluir o seguinte resultado:

Proposição 1.1.12 *Seja g uma transformação de Möbius diferente da identidade.*

- *Se g for parabólica, então g é conjugada a translações que deixam o semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z = (x, y) \in \mathbb{C}_\infty ; y > 0\}$ invariante (observemos que, com essa notação, estamos pensando em $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$, adicionando um ponto no infinito por compactificação de Alexandrovitch e, assim, temos $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}_\infty$). Seu ponto fixo fica na fronteira $\partial\mathbb{H}$.*
- *Se g for elíptica, então g é conjugada a rotações que deixam invariante todo disco da forma $\{z \in \mathbb{C}_\infty ; |z| = a\}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Seus pontos fixos nunca ficam na fronteira desses discos.*
- *Se g for hiperbólica, então g é conjugada a dilatações que deixam invariante todo semi-plano cuja fronteira seja uma reta passando pela origem. Seus pontos fixos ficam na fronteira desses semi-planos.*
- *Se g for loxodrômica, então g não deixa nenhum semi-plano ou disco invariantes.*

Mais detalhes sobre transformações de Möbius podem ser vistos em [2], [7], [9], [10] e [12].

1.1.3 Modelos do plano hiperbólico

Vamos apresentar três modelos bastante utilizados para o plano hiperbólico. Ao longo do texto, usaremos a notação $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ para o plano hiperbólico, independentemente do modelo considerado.

O primeiro modelo é o modelo do semi-plano superior. Consideremos o semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0\}$. As retas hiperbólicas do modelo do semi-plano superior para o plano hiperbólico são semi-círculos Σ e semi-retas L , ambos ortogonais ao eixo real.

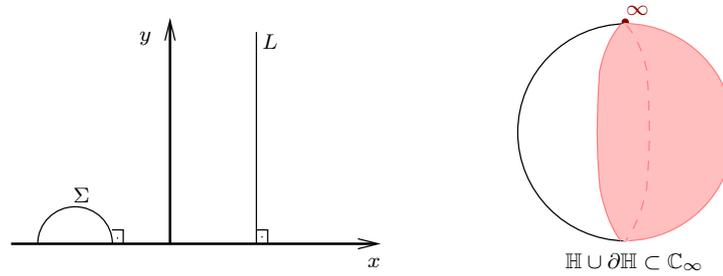


Figura 1.10: Modelo do semi-plano superior \mathbb{H}

Observação 1.1.13 As reflexões em retas hiperbólicas da forma L de \mathbb{H} , cujas equações são da forma $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$, são representadas por

$$i_L(z) = -\bar{z} + 2a \tag{1.5}$$

Esta equação está de acordo com a fórmula dada em (1.2).

As reflexões em retas hiperbólicas da forma Σ de \mathbb{H} , cujas equações são da forma $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, onde $A = (a, 0)$ é o centro, com $a \in \mathbb{R}$, e R é o raio de Σ , são representadas por

$$i_{\Sigma}(z) = a + R^2 \frac{1}{\bar{z} - a} \tag{1.6}$$

Esta equação está de acordo com a fórmula dada em (1.3).

As aplicações i_L e i_{Σ} são homeomorfismos anticonformes de \mathbb{H} .

Definição 1.1.14 *Sejam z, w dois pontos em \mathbb{H} . A métrica em \mathbb{H} é dada por $\mathbf{d}(z, w) = \inf |\gamma|$ e é dita a métrica hiperbólica do modelo \mathbb{H} , onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ são caminhos ligando z a w com $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ e*

$$|\gamma| = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt.$$

Proposição 1.1.15 *Sejam $z, w \in \mathbb{H}$. A métrica hiperbólica \mathbf{d} definida em 1.1.14 pode ser representada pela equação:*

$$\mathbf{d}(z, w) = \log \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right) \tag{1.7}$$

O segundo modelo, apresentado aqui, é o modelo do disco unitário ou modelo do disco de Poincaré. Consideremos, agora, o disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$. As retas hiperbólicas do modelo do disco unitário para o plano hiperbólico são os diâmetros de D e arcos de círculos ortogonais a ∂D .

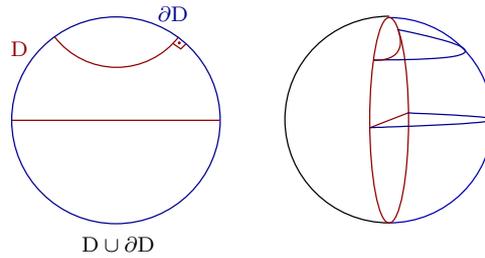


Figura 1.11: Modelo do disco de Poincaré

Definição 1.1.16 *Sejam $z, w \in D$. A métrica em D é dada por $\mathbf{d}_1(z, w) = \inf |\gamma|$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ com $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$ e*

$$|\gamma| = \int_0^1 \frac{2}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt,$$

e é dita a métrica hiperbólica do modelo D .

Proposição 1.1.17 *Sejam $z, w \in D$. A métrica hiperbólica \mathbf{d}_1 definida em 1.1.16 pode ser obtida da equação:*

$$\mathbf{d}_1(z, w) = \text{arc cosh} \left(\frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} \right) \tag{1.8}$$

As demonstrações das proposições enunciadas nesta seção, até aqui, são apresentadas em [2].

O terceiro modelo, chamado de modelo projetivo ou modelo de Beltrami-Klein, é muito útil pelo fato de que a métrica neste modelo é a própria métrica Euclidiana. Dessa forma, problemas de convexidade em geometria hiperbólica são transferidos a problemas de convexidade em geometria Euclidiana. No entanto, este não é um modelo conforme do plano hiperbólico. Passemos a defini-lo.

O modelo de Beltrami-Klein da geometria hiperbólica consiste de um disco aberto no plano Euclidiano (que é o mesmo do modelo D) no qual as cordas abertas correspondem às retas hiperbólicas. Apenas para diferenciarmos os modelos, usaremos a notação \mathcal{K} para o disco no modelo de Beltrami-Klein.

Definição 1.1.18 *Sejam $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ as coordenadas Euclidianas de dois pontos do disco \mathcal{K} . A distância entre eles em \mathcal{K} é dada por*

$$\mathbf{d}_2(z, w) = \text{arc cosh} \left(\frac{1 - xu - yv}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)(1 - u^2 - v^2)}} \right) \quad (1.9)$$

Duas retas l e m de \mathcal{K} são consideradas paralelas quando não possuem interseção em \mathcal{K} (figura 1.12).

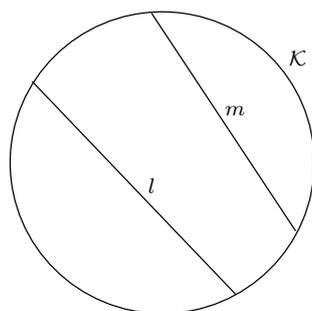


Figura 1.12: Retas paralelas no modelo de Klein \mathcal{K}

Duas retas l e m de \mathcal{K} são consideradas perpendiculares sob duas condições (figura 1.13):

1. Se uma das duas retas (suponhamos l) for um diâmetro do disco \mathcal{K} , elas serão hiperbolicamente perpendiculares quando o forem no sentido Euclidiano.

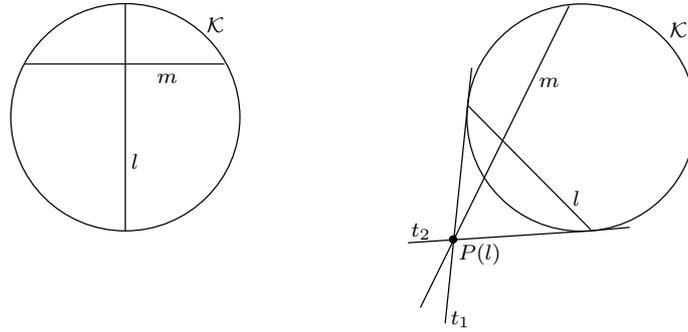


Figura 1.13: Retas perpendiculares em \mathcal{K}

2. Se nenhuma das duas for um diâmetro do disco, consideramos as duas retas tangentes t_1 e t_2 ao círculo nos pontos extremos de l , no plano Euclidiano. O ponto de interseção $P(l) = t_1 \cap t_2$ é dito polo da reta l . Assim, m será perpendicular à l se sua extensão Euclidiana passar por $P(l)$.

A relação entre os modelos de Poincaré e de Klein se dá pela seguinte correspondência: seja $z = (x, y)$ um vetor, com $|z| < 1$, representando um ponto no modelo do disco de Poincaré D . Então, o ponto w correspondente a z no modelo de Klein é dado por $w = \frac{2z}{1 + x^2 + y^2}$. Reciprocamente, seja $w = (u, v)$ um vetor, com $|w| < 1$, representando um ponto no modelo de Klein \mathcal{K} . Então, o ponto z correspondente a w no modelo do disco de Poincaré é dado por $z = \frac{w}{1 + \sqrt{1 - u^2 - v^2}}$.

1.1.4 Isometrias do plano hiperbólico

Uma isometria é uma aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$ que preserva distâncias em relação às métricas dadas nos espaços X e Y . A notação usada para o grupo de isometrias do plano hiperbólico no modelo do semi-plano superior é $\mathcal{I}som(\mathbb{H})$ e no modelo do disco unitário é $\mathcal{I}som(D)$.

Lema 1.1.19 *Toda aplicação $g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in M(\mathbb{C}_\infty)$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$ é uma isometria de \mathbb{H} em relação à métrica dada em 1.1.14.*

Lema 1.1.20 *O conjunto de todas as aplicações $g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \text{Möb}(\mathbb{C}_\infty)$ tais que*

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$ é isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$ (grupo projetivo das matrizes 2×2 de entradas reais homogêneas).

Teorema 1.1.21 *Toda isometria de $\mathcal{I}som(\mathbb{H})$ pode ser representada por uma das seguintes formas:*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ou

$$f(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$.

Assim o grupo de isometrias $\mathcal{I}som(\mathbb{H})$ é isomorfo ao grupo gerado por $PSL(2, \mathbb{R}) \cup \{i\}$, onde i é uma das reflexões em retas hiperbólicas consideradas na observação 1.1.13 (podemos considerar i como sendo a reflexão $i : z \mapsto -\bar{z}$).

Mais ainda, o grupo $\mathcal{I}som(\mathbb{H})$ é gerado por reflexões em retas hiperbólicas de \mathbb{H} .

Observemos que toda aplicação do grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ preserva orientação em \mathbb{H} e que a aplicação i reverte orientação em \mathbb{H} . Assim, o grupo de isometrias que preservam orientação em \mathbb{H} , denotado por $\mathcal{I}som^+(\mathbb{H})$, é isomorfo ao grupo $PSL(2, \mathbb{R})$. Uma demonstração desta observação pode ser vista em [5].

Consideremos a isometria $F : (\mathbb{H}, \mathbf{d}) \longrightarrow (D, \mathbf{d}_1)$ dada por $F(z) = \frac{z - i}{z + i}$. O grupo de isometrias $\mathcal{I}som(D)$ é da forma

$$\mathcal{I}som(D) \cong F \circ \mathcal{I}som(\mathbb{H}) \circ F^{-1} \tag{1.10}$$

Devido à relação (1.10), juntamente com o teorema 1.1.21, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 1.1.22 *Toda isometria de $\mathcal{I}som(D)$ pode ser representada por uma das seguintes formas:*

$$g(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

ou

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}},$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Mais ainda, o grupo $\mathcal{I}som(D)$ é gerado por reflexões em retas hiperbólicas de D .

As demonstrações dos teoremas apresentados nesta seção estão em [2], [6] e [12].

A partir de agora, denotaremos as isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ por $\mathcal{I}som(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$, independentemente do modelo considerado. Isso se justifica pela relação (1.10).

1.1.5 Grupos Fuchsianos

Iniciaremos esta seção com algumas propriedades da ação de grupos sobre espaços topológicos.

Definição 1.1.23 (Propriedades da ação de grupos) *Seja Γ um grupo agindo sobre um espaço topológico X por homeomorfismos. Consideremos esta ação efetiva, ou seja, o único elemento de Γ que age trivialmente sobre X é a identidade id de Γ .*

1. *A ação é dita livre quando nenhum ponto de X for fixado pela ação de qualquer elemento $\gamma \in \Gamma$, com $\gamma \neq id$.*
2. *A ação é dita discreta quando Γ for um subconjunto discreto do grupo de homeomorfismos de X , com a topologia compacto-aberta.*
3. *A ação de Γ tem órbita discreta quando todo elemento $x \in X$ tiver uma vizinhança aberta $U \subset X$ tal que o conjunto $\{\gamma \in \Gamma ; \gamma(x) \in U\}$ for finito.*
4. *A ação de Γ é dita descontínua em $x \in X$ quando existir uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x tal que o conjunto $\{\gamma \in \Gamma ; \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$ for finito. Γ é dito descontínuo quando agir descontinuamente em todo $x \in X$.*
5. *Supondo X localmente compacto, a ação de Γ é dita propriamente descontínua quando, para todo compacto $K \subset X$, o conjunto $\{\gamma \in \Gamma ; \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ for finito. Em outras palavras, a ação de Γ é propriamente descontínua quando, para todo ponto $x \in X$, a Γ -órbita de x , dada por $\Gamma x = \{\gamma(x) ; \gamma \in \Gamma\}$, for localmente finita.*

Notemos que a ação descontínua de um grupo Γ em um espaço X define uma relação de equivalência entre os elementos de X da seguinte forma: $x, y \in X$ são equivalentes quando existir $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(x) = y$. O conjunto das classes de equivalência determinadas pela ação de Γ é denotado por X/Γ .

Teorema 1.1.24 *Seja Γ um subgrupo do grupo de Möbius $Möb(\mathbb{C}_\infty)$. Se Γ age descontinuamente em algum aberto não-vazio de \mathbb{C}_∞ , então Γ é discreto.*

A recíproca desse teorema é falsa. Um contra-exemplo pode ser visto em [2].

No entanto, a recíproca é válida para certos subgrupos especiais de $Möb(\mathbb{C}_\infty)$.

Definição 1.1.25 *Seja Γ um subgrupo de $Möb(\mathbb{C}_\infty)$. Γ é dito Fuchsiano quando existir um disco Γ -invariante D no qual Γ aja descontinuamente. D é Γ -invariante quando $\gamma(D) = D, \forall \gamma \in \Gamma$.*

Observação 1.1.26 *Uma transformação $g \in Möb(\mathbb{C}_\infty)$ deixa um disco invariante se, e somente se, $tr^2(g) \geq 0$. Logo, um grupo Fuchsiano não possui elementos loxodrômicos.*

Esses grupos são de extrema importância no contexto de superfícies de Riemann que serão discutidas na seção 1.2.

Teorema 1.1.27 *Seja Γ um subgrupo de $Möb(\mathbb{C}_\infty)$ que deixa o plano hiperbólico $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$ Γ -invariante. Então Γ é descontínuo se, e somente se, for discreto.*

Demonstrações dos teoremas apresentados anteriormente podem ser encontradas em [2], [12] ou [13].

Corolário 1.1.28 *Seja Γ um subgrupo do grupo $\mathcal{I}som(\mathbb{H}_\mathbb{R}^2)$ de isometrias de $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$. São equivalentes:*

1. Γ é um grupo discreto;
2. A órbita de um ponto em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$ (portanto, as órbitas de todos os pontos) é discreta em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$;
3. Γ age descontinuamente em todos os pontos de $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$ (Γ é descontínuo em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$);
4. A ação de Γ é propriamente descontínua em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$;
5. Γ é um grupo Fuchsiano.

Exemplo 1.1.29 O grupo $PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ g(z) = \frac{az + b}{cz + d} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}$, chamado de grupo modular, é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Logo, é um grupo Fuchsiano e age descontinuamente em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Suponhamos que um grupo Γ esteja agindo sobre o plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Um ponto $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \sqcup S_{\infty}^1$ é dito um ponto limite de Γ quando existirem um ponto z no conjunto regular de Γ (ie, z é um ponto no qual todo elemento de Γ age livremente e descontinuamente) e uma seqüência γ_n de elementos distintos de Γ tais que $\gamma_n(z) \rightarrow x$.

Definição 1.1.30 O conjunto de todos os possíveis pontos limites de Γ -órbitas Γz , onde $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, é chamado de conjunto limite e é denotado por $\Delta(\Gamma)$.

Proposição 1.1.31 Suponha Γ um grupo Fuchsiano agindo sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Sejam $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ um ponto e γ_n uma seqüência de elementos distintos de Γ . Se $\gamma_n(z)$ possuir um ponto limite $x \in \mathbb{C}_{\infty}$, então $x \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S_{\infty}^1$. Assim, para todo grupo Fuchsiano Γ , o conjunto limite $\Delta(\Gamma) \subset S_{\infty}^1$.

Vamos enunciar mais alguns resultados interessantes sobre conjuntos limites, todos eles muito bem detalhados em [9].

Teorema 1.1.32 Seja Γ um grupo Fuchsiano agindo sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Então:

- a) Se $\Delta(\Gamma)$ contiver mais de um ponto, então ele será o fecho do conjunto de pontos fixos das transformações hiperbólicas de Γ .
- b) O conjunto limite é Γ -invariante.
- c) Se $\Delta(\Gamma)$ contiver mais de dois pontos, há duas possibilidades: ou $\Delta(\Gamma) = S_{\infty}^1$, ou $\Delta(\Gamma)$ é um subconjunto de S_{∞}^1 que não é denso em parte alguma de S_{∞}^1 .

1.2 Superfícies de Riemann

Consideremos uma superfície S_g de gênero g (variedade topológica de dimensão 2).

Definição 1.2.1 Uma estrutura analítica em S_g é um atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, onde $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ é uma cobertura aberta de S_g e $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow D_\alpha$ é um homeomorfismo de U_α num disco aberto $D_\alpha \subset \mathbb{C}$, $\forall \alpha \in A$. Além disso, as aplicações de mudança de coordenadas, definidas $\forall \alpha, \beta \in A$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ devem ser aplicações analíticas.

Observemos que, se a superfície S_g for fechada, o conjunto de índices A poderá ser tomado como um conjunto finito.

Definição 1.2.2 Uma superfície de Riemann é definida por uma superfície juntamente com uma estrutura analítica e é representada por (S_g, K) , onde $K = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$.

Seria interessante definirmos certas estruturas sobre superfícies de Riemann, tais como distâncias entre pontos, ângulos entre curvas, etc.

Sejam $S = (S_g, K)$ uma superfície de Riemann e $p \in S$ um ponto sobre ela. Dadas duas curvas μ_1 e μ_2 em S passando por p , definimos o ângulo θ entre elas da seguinte forma:

Definição 1.2.3 Tome $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ uma carta da estrutura analítica contendo p , ou seja, $p \in U_\alpha$ e φ_α é o homeomorfismo correspondente a U_α .

As imagens de μ_1 e μ_2 pelo homeomorfismo φ_α são curvas em \mathbb{C} que passam pelo ponto $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{C}$ e formam ângulo euclidiano θ_α em \mathbb{C} .

O ângulo θ entre μ_1 e μ_2 é, então, dado pelo ângulo θ_α em $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$.

Lembrando que um homeomorfismo analítico é uma aplicação conforme, temos que as aplicações de mudança de coordenadas são aplicações conformes e, desta forma, o ângulo θ está bem definido.

Vamos, agora, analisar aplicações entre superfícies de Riemann.

Consideremos $S' = (S'_g, K')$ e $S'' = (S''_g, K'')$ duas superfícies de Riemann e uma aplicação $f : S' \longrightarrow S''$ entre elas.

Definição 1.2.4 A aplicação f é uma aplicação analítica em $p \in S'$ quando, ao considerarmos cartas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de K' contendo p , e $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ em K'' contendo $f(p)$; a composta

$\psi_\beta \circ f \circ (\varphi_\alpha)^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$, entre abertos de \mathbb{C} , for analítica em p .

A aplicação f é dita analítica quando o for para qualquer ponto $p \in S'$.

Duas superfícies de Riemann $S' = (S'_{g'}, K')$ e $S'' = (S''_{g''}, K'')$ são ditas superfícies conformemente equivalentes quando existir uma bijeção analítica (ou seja, aplicação conforme) $f : S' \longrightarrow S''$ entre elas. Observemos que, neste caso, teremos $g' = g''$, já que f é um homeomorfismo e g é um invariante topológico.

Claramente, essa relação entre superfícies de Riemann é uma relação de equivalência. Denotaremos as classes de equivalência de superfícies conformemente equivalentes por $[S_g, K]$.

1.3 Uniformização

Nesta seção, faremos a ligação entre superfícies de Riemann e grupos Fuchsianos, dada pelo teorema de uniformização de Riemann. Para isso, relembremos a definição de recobrimentos em espaços topológicos.

Definição 1.3.1 *Sejam X e B espaços topológicos, $\pi : X \longrightarrow B$ uma função contínua e sobrejetiva. A tripla (X, π, B) é dita um recobrimento quando, $\forall b \in B$, existir uma vizinhança aberta $U \subset B$ tal que $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, onde cada U_α é um aberto em X e $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U$ é um homeomorfismo. A cobertura de B , dada pelas vizinhanças abertas de cada $b \in B$, é chamada de cobertura distinguida do recobrimento.*

Proposição 1.3.2 *Seja $\pi : X \longrightarrow X/\Gamma$ a projeção canônica, onde Γ é um grupo que age livremente e propriamente descontinuamente em X . Então $(X, \pi, X/\Gamma)$ é um recobrimento.*

A demonstração desta proposição pode ser vista em [11].

Quando X for um espaço topológico simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, teremos que o recobrimento $\pi : X \longrightarrow X/\Gamma$ será um recobrimento universal e Γ será chamado de grupo de aplicações de recobrimento com a propriedade de que $\pi \circ \gamma = \pi, \forall \gamma \in \Gamma$.

Proposição 1.3.3 *Seja Γ um subgrupo discreto do grupo de isometrias $\mathcal{I}som^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$, cuja ação seja livre sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Então $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ é uma superfície de Riemann.*

Demonstração: (1.3.3)

Já sabemos que o grupo de isometrias que preservam orientação de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é isomorfo ao grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ e é denotado por $\mathcal{I}som^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$.

Além disso, todos os homeomorfismos analíticos de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ são dessa forma (Teorema de Liouville).

Seja Γ um subgrupo de $\mathcal{I}som^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$. Γ age sem pontos fixos (a ação é livre) e propriamente descontinuamente em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, ou seja, Γ é um grupo Fuchsiano.

Dessa forma, temos que a projeção canônica $\pi : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ é um recobrimento universal e Γ é o grupo de aplicações de recobrimento (ou seja, $\pi \circ \gamma = \pi, \forall \gamma \in \Gamma$).

Podemos definir uma única estrutura analítica no quociente $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ que faz de π uma aplicação analítica.

Sabemos que, dado $[p] \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$, existe vizinhança aberta de $[p]$, $[U_p] \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$, tal que $\pi^{-1}([U_p]) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$ seja a órbita de $[U_p]$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ e, para cada $\alpha \in A$, $\pi|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \longrightarrow [U_p]$ é um homeomorfismo.

Escolhendo $p_0 \in \pi^{-1}([p])$ existe único aberto em $\pi^{-1}([U_p])$ contendo p_0 , digamos, U_0 . Dessa forma, os demais abertos de $\pi^{-1}([U_p])$ poderão ser denotados por $U_p^{\gamma} = \gamma U_0$, onde $\gamma \in \Gamma$. O aberto U_0 , apenas para homogeneizar a notação, será denotado por $U_p^{\gamma_0}$.

Variando o ponto $[p] \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$, construímos o atlas $K = \{[U_p], \varphi_p^{\gamma}\}$, onde $\varphi_p^{\gamma} = \left(\pi|_{U_p^{\gamma}}\right)^{-1} : [U_p] \longrightarrow U_p^{\gamma}$. Vamos mostrar que esse atlas K define uma estrutura analítica em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ e, assim, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ é uma superfície de Riemann. Os homeomorfismos φ_p^{γ} podem ser visto sob a forma $\varphi_p^{\gamma} = \gamma \circ \varphi_p^{\gamma_0}$, onde $\varphi_p^{\gamma_0} = \left(\pi|_{U_p^{\gamma_0}}\right)^{-1}$ é o homeomorfismo que leva $[p]$ em p_0 , em que p_0 fora previamente fixado.

Já temos que φ_p^{γ} são homeomorfismos e que $\bigsqcup [U_p]$ forma uma cobertura aberta de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$. Falta, apenas, verificarmos que as aplicações de mudança de coordenadas são analíticas.

Sejam $[U_p]$ e $[U_q]$ abertos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ tais que $[U_p] \cap [U_q] \neq \emptyset$. Fixemos $p_0 \in \pi^{-1}([p])$ e $q_0 \in \pi^{-1}([q])$ e, conseqüentemente, teremos fixado $U_p^{\gamma_0}$ e $U_q^{\gamma_0}$, em que $p_0 \in U_p^{\gamma_0}$ e $q_0 \in U_q^{\gamma_0}$.

Há duas possibilidades: ou $U_p^{\gamma_0} \cap U_q^{\gamma_0} \neq \emptyset$ ou $U_p^{\gamma_0} \cap U_q^{\gamma_0} = \emptyset$.

Caso $U_p^{\gamma_0} \cap U_q^{\gamma_0} \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas $\varphi_q^{\gamma_0} \circ (\varphi_p^{\gamma_0})^{-1} : \varphi_p^{\gamma_0}([U_p] \cap [U_q]) \longrightarrow \varphi_q^{\gamma_0}([U_p] \cap [U_q])$ é a própria identidade de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ e, portanto, é analítica.

Caso $U_p^{\gamma_0} \cap U_q^{\gamma_0} = \emptyset$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $U_p^{\gamma_0} \cap \gamma U_q^{\gamma_0} \neq \emptyset$ e, assim, a mudança de coordenadas será dada pela aplicação $\varphi_q^{\gamma} \circ (\varphi_p^{\gamma_0})^{-1} = \gamma \circ \varphi_q^{\gamma_0} \circ (\varphi_p^{\gamma_0})^{-1} = \gamma \circ id = \gamma$ que é analítica.

Portanto, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ é uma superfície de Riemann, onde Γ é um grupo Fuchsiano. \square

Mais adiante, veremos que não só $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ será uma superfície de Riemann, como também admitirá uma métrica hiperbólica a qual concederá uma estrutura hiperbólica a $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$.

A proposição 1.3.3 é um caso particular do teorema 1.3.5 que veremos em seguida.

Definição 1.3.4 (Domínio fundamental) *Um domínio fundamental ou, simplesmente, domínio para a ação de um grupo Fuchsiano Γ sobre o plano hiperbólico (no modelo do semi-plano superior) é um subconjunto aberto $D(\Gamma) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. não existem quaisquer dois pontos de $D(\Gamma)$ que sejam equivalentes pela ação de Γ ;
2. $\forall w \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, existe um elemento g_w de Γ tal que $g_w(w) \in \overline{D(\Gamma)}$;
3. a fronteira relativa de $D(\Gamma)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ consiste de pedaços de arcos analíticos;
4. para todo arco $a \subset \overline{D(\Gamma)}$, existem um arco $a' \subset \overline{D(\Gamma)}$ e um elemento $g \in \Gamma$ tais que $g(a) = a'$.

Um domínio fundamental da forma

$$D_z(\Gamma) = \{z' \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 ; \mathbf{d}(z', z) < \mathbf{d}(g(z'), z) \forall g \in \Gamma, g \neq id\}, \quad (1.11)$$

onde $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é um ponto que só é fixo pela identidade $id \in \Gamma$, é chamado de domínio de Dirichlet ou polígono de Poincaré.

Teorema 1.3.5 *Sejam $D \subset \mathbb{C}_{\infty}$ um domínio e G um subgrupo de $\text{Möb}(\mathbb{C}_{\infty})$ que age descontinuamente em D e o deixa invariante (ou seja, G é um grupo Fuchsiano com disco invariante D). Então D/G é uma superfície de Riemann.*

Uma demonstração deste fato é dada em [2].

Exemplo 1.3.6 A figura 1.14 é um domínio fundamental para a ação de Γ sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, onde Γ é gerado pelas quatro isometrias que identificam os lados do polígono de comprimentos iguais. A órbita do polígono pela ação de Γ forma um ladrilho (ou látice) do plano. O quociente $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$ é um bitoro.

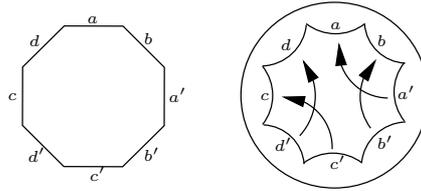


Figura 1.14: Domínio fundamental do bitoro

Teorema 1.3.7 (Teorema de Uniformização de Riemann) Uma superfície de Riemann S simplesmente conexa é conformemente equivalente a uma dentre as seguintes: \mathbb{C}_{∞} , $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ou \mathbb{C} .

Teorema 1.3.8 Seja S uma superfície de Riemann. Então S é conformemente equivalente à uma das seguintes superfícies:

1. Esfera de Riemann S^2 (conformemente equivalente ao plano estendido \mathbb{C}_{∞});
2. Plano complexo \mathbb{C} ;
3. Plano furado, ou seja, $\mathbb{C} - \{0\}$;
4. \mathbb{C}/Δ , onde Δ é um reticulado determinado por dois vetores em \mathbb{C} linearmente independentes sobre \mathbb{R} , Δ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
5. $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2/\Gamma$, onde Γ é um grupo de homeomorfismos analíticos de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ propriamente descontínuo e livre de torção.

Demonstrações destes fato são apresentadas em [1], [7], [8] ou [12].

1.4 Espaços de Módulos e Espaços de Teichmüller

Primeiramente, faremos a construção do espaço de Teichmüller como uma classe de equivalência de superfícies de Riemann marcadas. Depois, veremos a ligação entre essa construção e o espaço das classes de equivalência de superfícies de Riemann pela relação de isotopia.

Veremos, ainda, a facilidade de trabalharmos com espaços de Teichmüller em lugar de espaços de módulos.

1.4.1 Espaços de módulos

Definição 1.4.1 *O conjunto das classes de superfícies de Riemann de gênero g fechadas conformemente equivalentes é chamado de espaço de módulos e é denotado por $M(S_g)$.*

Não mostramos o fato de que $M(S_g)$ é um espaço topológico, mas isso ficará claro ao final deste capítulo. Devemos apenas adiantar que a topologia em $M(S_g)$ não é uma topologia simples. Para vermos isso, basta observarmos que dois pontos do espaço de módulos de S_g , $[S_g, K]$ e $[S_g, L]$ serão próximos quando as classes de estruturas analíticas conformemente equivalentes K e L forem próximas.

Devido à dificuldade de definirmos uma topologia boa em $M(S_g)$, passamos a considerar mais uma característica da superfície S_g : o primeiro grupo de homotopia ou grupo fundamental de S_g , $\pi_1(S_g, q)$ (grupo das classes de homotopia de curvas fechadas com ponto base q em S_g).

1.4.2 Espaços de Teichmüller

Definição 1.4.2 *Uma superfície de Riemann marcada é o trio (S_g, K, C) , onde $C = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ são os geradores do grupo fundamental*

$$\pi_1(S_g, q) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

em que $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ são os comutadores de a_i e b_i .

Ao conjunto ordenado $C = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ é dado o nome de marcação.

Observemos que, dadas duas marcações num mesmo ponto base $q \in S_g$, existe um automorfismo do grupo fundamental entre elas. Apenas para recordarmos, o grupo fundamental de S_g independe da escolha do ponto base $q \in S_g$ fixado. Logo, podemos denotar $\pi_1(S_g, q)$ apenas por $\pi_1(S_g)$.

Consideremos o conjunto $\widehat{T}(S_g)$ como o conjunto de todas as superfícies de Riemann marcadas. Duas superfícies marcadas $S' = (S', K', C')$ e $S'' = (S'', K'', C'')$ em $\widehat{T}(S_g)$ são ditas equivalentes, isto é, $S' \sim S''$, quando existir $f : S' \rightarrow S''$ tal que:

1. f é um homeomorfismo;
2. f é uma aplicação analítica;
3. o isomorfismo $f^* : \pi_1(S_g) \rightarrow \pi_1(S_g)$, induzido por f , satisfaz: $f^*(a'_i) = a''_i$ e $f^*(b'_i) = b''_i \forall i = 1, \dots, g$.

Podemos perceber que a relação \sim é uma relação de equivalência em $\widehat{T}(S_g)$.

Definição 1.4.3 *O conjunto das classes de equivalência de superfícies de Riemann marcadas de gênero g é chamado espaço de Teichmüller e denotado por $T(S_g)$, ou seja, $T(S_g) = \widehat{T}(S_g) / \sim$.*

Observemos, ainda, que duas superfícies equivalentes pela relação \sim determinam um mesmo ponto no espaço de módulos $M(S_g)$, pois são conformemente equivalentes. Logo, podemos considerar uma projeção $\pi : T(S_g) \rightarrow M(S_g)$ (mapa de esquecimento). No entanto, essa projeção não chega a ser um recobrimento. Na verdade, teremos um recobrimento ramificado, isto é, exceto por um conjunto discreto de pontos $X \subset T(S_g)$, a projeção π restrita a $T(S_g) - X$, $\pi|_{T(S_g) - X} : T(S_g) - X \rightarrow M(S_g)$, é um recobrimento.

Definimos o grupo modular $Mod(S_g)$ por

$$Mod(S_g) = Homeo_+(S_g) / isotopia \tag{1.12}$$

onde $Homeo_+(S_g)$ é o conjunto de todos os homeomorfismos de S_g que preservam orientação.

Lembrando que todo homeomorfismo $\gamma : S_1 \rightarrow S_2$ determina uma estrutura analítica em S_1 via pullback da estrutura analítica de S_2 que é conformemente equivalente a esta,

podemos indagar se o efeito da ação do grupo modular sobre o espaço de Teichmüller seria efetivo sobre o espaço de módulos. Na verdade, o grupo modular não altera pontos do espaço de módulos, sua ação é efetiva apenas sobre o espaço de Teichmüller $T(S_g)$. Assim, podemos definir a projeção $\pi : T(S_g) \longrightarrow T(S_g)/Mod(S_g)$, onde $T(S_g)/Mod(S_g) = M(S_g)$. Devido ao fato de que a ação grupo modular sobre $T(S_g)$ possa vir a ter uma quantidade discreta de pontos fixos, a projeção π não determina um recobrimento, mas sim um recobrimento ramificado.

$$\begin{array}{ccc} (S, K, C) & \xrightarrow{\gamma} & (S, K, C') \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ [S, K] & \xrightarrow{id} & [S, K] \end{array}$$

Figura 1.15: Elementos de $Mod(S_g)$ preservam as fibras $\pi^{-1}([S, K])$

Exemplo 1.4.4 (Espaço de Teichmüller de toros)

Consideremos um toro T^2 orientado, com estrutura analítica X de acordo com sua orientação e com marcação $\{\alpha, \beta\}$, onde $\pi_1(T^2) = \langle \alpha, \beta \rangle$; $\alpha\beta = \beta\alpha$.

O recobrimento universal de T^2 é dado por $p : \mathbb{C} \longrightarrow (T^2, X) = \mathbb{C}/G$, onde G é gerado por duas translações $g_1(z) = z + w_1$ e $g_2(z) = z + w_2$. Seja $\tau = \frac{w_1}{w_2}$. Sabemos que $\tau \notin \mathbb{R}$ (caso contrário, o quociente \mathbb{C}/G não seria uma superfície compacta de gênero 1). Sem perda de generalidade, podemos supor $Im[\tau] > 0$ (essa representação do toro é dita uma base normalizada de G). Assim, $\tau \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ (no modelo do semi-plano superior \mathbb{H} para o plano hiperbólico).

Consideremos outra estrutura analítica X' em T^2 , também de acordo com a orientação dada. Assim, $p' : \mathbb{C} \longrightarrow (T^2, X') = \mathbb{C}/G'$, também é um recobrimento universal, onde G' é gerado por $g'_1(z) = z + w'_1$ e $g'_2(z) = z + w'_2$. Seja $\tau' = \frac{w'_1}{w'_2}$, com $Im[\tau'] > 0$.

Como p e p' são recobrimentos universais, os grupos de aplicações de recobrimento G e G' são isomorfos a $\pi_1(T^2)$. Vimos que X e X' determinam o mesmo ponto no espaço de Teichmüller $T(T^2)$ se, e somente se, existir homeomorfismo holomorfo $f : (T^2, X) \longrightarrow (T^2, X')$ homotópico à identidade de T^2 (relembremos que, assim, o isomorfismo entre G e

G' preserva a marcação dada em T^2 , pois o levantamento $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induzirá o mesmo isomorfismo que a identidade).

O levantamento $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de f é da forma $F(z) = az + b$, com $a \neq 0$. F induzir o mesmo isomorfismo que a identidade significa que $F(z + w_1) = F(z) + w'_1$ e $F(z + w_2) = F(z) + w'_2$.

Logo $az + aw_1 + b = az + b + w'_1$ e $az + aw_2 + b = az + b + w'_2$, o que implica que $a = \frac{w'_1}{w_1} = \frac{w'_2}{w_2}$ e, portanto, $\tau = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w'_1}{w'_2} = \tau'$.

Dessa forma, concluímos que a aplicação $\psi : T(T^2) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, dada por $(T^2, \mathcal{X}, \{g_1, g_2\}) \mapsto \tau = \frac{w_1}{w_2}$ está bem definida. Além disso, a aplicação ψ é uma bijeção. Vejamos:

(Injetividade) Suponhamos que $\psi(T^2, \mathcal{X}, \{g_1, g_2\}) = \psi((T^2, \mathcal{X}', \{g'_1, g'_2\}))$, ou seja, $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w'_1}{w'_2}$. Seja $\tau = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w'_1}{w'_2}$. Assim, a aplicação $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ entre os recobrimentos universais de $(T^2, \mathcal{X}, \{g_1, g_2\})$ e $(T^2, \mathcal{X}', \{g'_1, g'_2\})$ será da forma $F(z) = \tau z$, que é uma aplicação conforme. Como $F(w_i) = w'_i$ para $i = 1, 2$, temos que F induz isomorfismo entre os grupos de aplicações de recobrimento que preserva a marcação de T^2 . Portanto, $(T^2, \mathcal{X}, \{g_1, g_2\})$ e $(T^2, \mathcal{X}', \{g'_1, g'_2\})$ determinam o mesmo ponto no espaço de Teichmüller de T^2 .

(Sobrejetividade) Consideremos $\tau \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Escolhamos $w_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ e tomemos $w_1 = \tau w_2$. Assim, $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ é uma base normalizada de um grupo G , gerado pelas translações $g_1 : z \mapsto z + w_1$ e $g_2 : z \mapsto z + w_2$. Podemos construir um recobrimento universal $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$ cujas aplicações de recobrimento sejam dadas pelos elementos de G . Mas \mathbb{C}/G define um toro (T^2, \mathcal{X}) com marcação $\{g_1, g_2\}$ induzida por G . Portanto $\psi(T^2, \mathcal{X}, \{g_1, g_2\}) = \tau$.

Portanto, o espaço de Teichmüller de toros é $T(T^2)$ está em correspondência biunívoca com o plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Podemos ver, então, que é possível induzirmos uma topologia sobre o espaço $T(T^2)$ oriunda da topologia do plano $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Nosso objetivo, agora, é definirmos uma topologia boa no espaço de Teichmüller de uma superfície de Riemann qualquer (não necessariamente toros).

1.4.3 Topologia no espaço de Teichmüller

Para construirmos uma topologia no espaço de Teichmüller iremos utilizar a relação entre superfícies de Riemann e grupos Fuchsianos, vista em 1.3, e faremos mais: relacionaremos superfícies de Riemann marcadas a grupos Fuchsianos.

Teorema 1.4.5 *Duas superfícies de Riemann (S_g, K_1) e (S_g, K_2) são conformemente equivalentes se, e somente se, existir F no grupo de Möbius de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $F \circ \Gamma_1 \circ (F)^{-1} = \Gamma_2$, onde $(S_g, K_1) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma_1$, $(S_g, K_2) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma_2$ e Γ_1, Γ_2 são subgrupos de $\mathcal{I}som^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$.*

Em outras palavras, o espaço de módulos $M(S_g)$ pode ser identificado com o conjunto das classes de conjugação de grupos Fuchsianos.

A demonstração deste fato se dá observando que levantamentos $F : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ de homeomorfismos analíticos f entre (S_g, K_1) e (S_g, K_2) (via recobrimento universal) são, também, homeomorfismos analíticos; e que $\gamma_2 \circ F \circ \gamma_1$ são, ainda, levantamentos de f , $\forall \gamma_1 \in \Gamma_1$ e $\forall \gamma_2 \in \Gamma_2$.

Como $\pi : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma = [S_g, K]$ é um recobrimento universal, temos que o grupo de aplicações de recobrimento Γ é isomorfo ao grupo fundamental $\pi_1(S_g)$. Dessa forma, poderemos verificar a relação entre grupos Fuchsianos e o espaço de Teichmüller $T(S_g)$.

Seja $(S_g, K) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma$ uma superfície de Riemann e fixemos $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g-1}, \alpha_{2g}\}$ uma marcação sobre ela. Alteramos a notação da marcação de S_g apenas para facilitar a demonstração do lema 1.4.6 a seguir.

Consideremos o conjunto X de todos os monomorfismos $\chi : \pi_1(S_g) \rightarrow \Gamma$ com as seguintes propriedades:

- $\chi(\pi_1(S_g))$ é discreto;
- para uma marcação C fixada sobre S_g , $\chi \in X$ é tal que:
 - $\chi(\alpha_{2g})$ tem 0 como seu ponto fixo repulsor e ∞ como seu ponto fixo atrator;
 - $\chi(\alpha_{2g-1})$ tem 1 como um ponto fixo.

Lema 1.4.6 *Seja $\gamma_i = \chi(\alpha_i) : z \mapsto \gamma_i(z)$, onde $\gamma_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \in PSL(2, \mathbb{R})$ com $a_i \geq 0$ e $b_i > 0$ se $a_i = 0$. Então a aplicação $\mathcal{F}_g : X \rightarrow \mathbb{R}^{6g-6}$ dada por $\chi \mapsto (a_1, b_1, c_1, \dots, a_{2g-2}, b_{2g-2}, c_{2g-2})$ é injetiva.*

Demonstração: A relação dos comutadores $\prod_{i \text{ ímpar}} [\alpha_i, \alpha_{i+1}] = 1$ nos dá a equação matricial $\eta M_{\gamma_{2g-1}} = M_{\gamma_{2g}} M_{\gamma_{2g-1}} (M_{\gamma_{2g}})^{-1}$, onde $\eta = \prod_{i \text{ ímpar e } i < 2g-2} [\gamma_i, \gamma_{i+1}] : z \mapsto \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$.

Devemos mostrar que a equação matricial acima, juntamente com o conhecimento de \mathcal{F}_g , poderá ser resolvida para os coeficientes de γ_{2g-1} e γ_{2g} .

Por definição de χ , $c_{2g} = b_{2g} = 0$ e $\lambda = a_{2g} = (d_{2g})^{-1}$. A equação matricial, juntamente com a relação $a'd' - b'c' = 1$, implica que os coeficientes satisfazem:

1. $(a' - 1)a_{2g-1} + b'c_{2g-1} = 0$;
2. $c'a_{2g-1} + (d' - \lambda^{-2})c_{2g-1} = 0$;
3. $c'b_{2g-1} + (d' - 1)d_{2g-1} = 0$;
4. $(a' - \lambda^{-2})b_{2g-1} + b'd_{2g-1} = 0$;
5. como $\gamma_{2g-1}(1) = 1$, $a_{2g-1} + b_{2g-1} = c_{2g-1} + d_{2g-1}$.

As equações 1 a 4 têm solução única $a_{2g-1} = b_{2g-1} = c_{2g-1} = d_{2g-1} = 0$, a menos que $\lambda^2 = \frac{1 - a'}{d' - 1}$. Como a solução trivial não é possível, podemos considerar λ como sendo a raiz positiva de $\frac{1 - a'}{d' - 1}$.

Assim, as equações 1, 3 e 5, juntamente com a condição do determinante $a_{2g-1}d_{2g-1} - b_{2g-1}c_{2g-1} = 1$, têm única solução com $a_{2g-1} \geq 0$. Os outros coeficientes podem ser calculados a partir desta solução e, portanto, a aplicação \mathcal{F}_g é injetiva. \square

Teorema 1.4.7 $\mathcal{F}_g(X)$ é uma parametrização das superfícies de Riemann marcadas de gênero g .

Demonstração: Se $x \in \mathcal{F}_g(X)$, então x determina um grupo Fuchsiano G_x e um conjunto de geradores ordenados $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}\}$ de G_x . Esses geradores dão uma marcação $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g-1}, \alpha_{2g}\}$ da superfície $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / G_x$. Assim, x determina uma superfície marcada. A recíproca segue diretamente do teorema de Uniformização de Riemann, mas não é trivial. \square

Mais detalhes sobre as demonstrações de 1.4.6 e 1.4.7 podem ser vistos em [1].

Assim, podemos concluir que o espaço de Teichmüller $T(S_g)$ é homeomorfo ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^{6g-6} e possui topologia induzida desse espaço, tendo dimensão real igual a $6g - 6$.

1.4.4 Coordenadas de Fenchel-Nielsen em $T(S_g)$

Antes de definirmos as coordenadas de Fenchel-Nielsen, precisamos de alguns resultados relacionando superfícies de Riemann a calças, cuja definição vem a seguir 1.4.8.

O domínio $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 2, |z - 1| \geq \frac{1}{2}, |z + 1| \geq \frac{1}{2}\}$ é dito uma calça (padrão), onde as três componentes de fronteira são ordenadas da seguinte forma:

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 2\} \quad (1.13)$$

$$\gamma_2 = \left\{z \in \mathbb{C} ; |z - 1| = \frac{1}{2}\right\} \quad (1.14)$$

$$\gamma_3 = \left\{z \in \mathbb{C} ; |z + 1| = \frac{1}{2}\right\} \quad (1.15)$$

Definição 1.4.8 (Calças) *Um espaço topológico \mathcal{P}^2 juntamente com um homeomorfismo $h : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ é dito uma calça.*

Cada calça é uma superfície com bordo, cujo interior é uma superfície de Riemann, orientada com três componentes de fronteira ordenadas (cuja ordem é induzida por h).

A métrica que será usada sobre calças será definida a *posteriori*.

Teorema 1.4.9 *Uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ fechada pode ser dividida em $2g - 2$ calças, obtidas ao cortarmos a superfície S ao longo de $3g - 3$ curvas simples e fechadas.*

Seja $S = (S_g, K)$ uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ fechada. Consideremos um conjunto de curvas disjuntas, simples e fechadas que decompõem S em uma união de calças. Como S tem gênero g , precisamos de $3g - 3$ curvas para dividi-la em $2g - 2$ calças.

A classe de homotopia de cada uma dessas curvas sempre contém uma única geodésica em S . Assim, podemos substituir o conjunto de curvas considerado anteriormente pelo conjunto de geodésicas homotópicas às curvas da decomposição original.

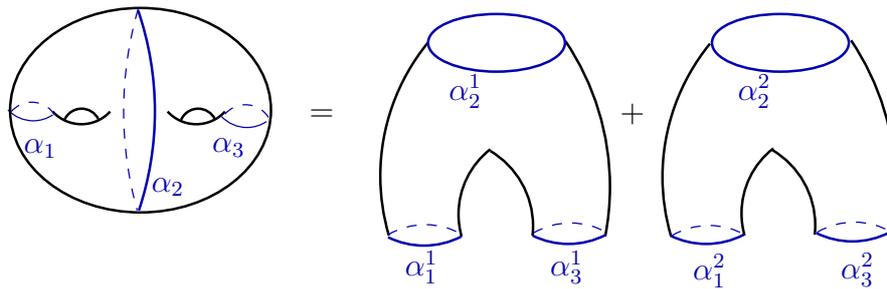


Figura 1.16: Decomposição do bi-toro em calças

Dessa forma, podemos supor que o conjunto de curvas que decompõem S em calças é formado por geodésicas. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3g-3}$ essas geodésicas e $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{2g-2}$ as calças da decomposição de S . Os comprimentos l_i das geodésicas α_i são invariantes por homeomorfismos analíticos e, assim, já contamos com $3g - 3$ invariantes da superfície S .

Teorema 1.4.10 *A estrutura analítica de uma calça \mathcal{P} é unicamente determinada pelos comprimentos de suas três curvas de fronteira α_1, α_2 e α_3 .*

Reciprocamente, para quaisquer l_1, l_2, l_3 reais positivos, existe uma calça \mathcal{P} cujas curvas de fronteira α_1, α_2 e α_3 têm comprimentos l_1, l_2 e l_3 , respectivamente.

Uma demonstração deste teorema é apresentada em [17].

A pergunta que cabe neste momento é se podemos recuperar a superfície S após essa decomposição em calças, ou seja, a partir dos dados obtidos após o corte ao longo das geodésicas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3g-3}$.

A resposta é afirmativa, mas ainda faltam dados importantes para a reconstrução de S . Observemos que o comprimento das geodésicas nos informa muito sobre S_g (pois, pelo teorema 1.4.10, eles recuperam as calças da decomposição de S_g separadamente), mas não nos diz como colar as componentes de fronteira das calças da decomposição de S de forma que possamos obter exatamente a mesma superfície S , ou seja, considerando a mesma estrutura analítica K previamente escolhida. Precisamos de mais dados, a saber, os ângulos em que as componentes de fronteira das calças da decomposição de S devem ser coladas.

Consideremos uma calça \mathcal{P}_k da decomposição e denotemos por $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \alpha_{3,k}$ as geodésicas de fronteira, ordenadas e orientadas, dessa calça. Em cada uma dessas geodésicas,

existem dois pontos distinguidos que podem ser encontrados da seguinte forma: seja $\gamma_{i,i+1}$, onde $i = 1 \dots 3$ e $\gamma_{3,4} = \gamma_{3,1}$, o arco da geodésica em \mathcal{P}_k que liga a componente de fronteira $\alpha_{i,k}$ à componente de fronteira $\alpha_{i+1,k}$ e é ortogonal a ambas (desse modo, tal arco é unicamente definido). O ponto inicial ξ_i^1 de $\gamma_{i,i+1}$ é o primeiro dos dois pontos distinguidos, e o ponto final ξ_i^2 de $\gamma_{i-1,i}$ é o segundo ponto distinguido da componente de fronteira $\alpha_{i,k}$.

Os pontos distinguidos assim construídos são intrínsecos à calça \mathcal{P}_k .

Para recuperarmos a superfície, precisamos colar as calças. Duas curvas de fronteira (da mesma ou de calças diferentes) só podem ser coladas se seus comprimentos forem iguais. Ao colarmos duas superfícies de fronteira de forma que os primeiros de seus pontos distinguidos se sobreponham, teremos que o ângulo de colagem será zero. Tomando em \mathcal{P}_k a métrica hiperbólica, temos que a distância medida na direção da orientação de $\alpha_{i,k}$ entre os pontos ξ_i^1 e ξ_j^1 de componentes de fronteira $\alpha_{i,k}$ e $\alpha_{j,l}$ (onde l poderá ser igual a k , caso as curvas de fronteira pertençam a uma mesma calça) é denotada por θ_{ij} .

A essa posição relativa θ_{ij} dos pontos ξ_i^1 e ξ_j^1 é dado o nome de ângulo de colagem entre as componentes de fronteira das calças da decomposição de S , pois nos informa como recuperar a superfície S .

No entanto, mesmo sendo chamados de ângulos, podemos observar que, ao rodarmos uma curva de fronteira de uma calça de um ângulo 2π e colarmos essa curva com outra componente de fronteira (da mesma ou de outra calça), teremos uma estrutura analítica equivalente à original. Porém, teremos um ponto diferente no espaço de Teichmüller. Essa rotação é dita Dehn twist (ou torção de Dehn). Assim $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$.

De posse das observações anteriores, podemos concluir o seguinte resultado:

Teorema 1.4.11 *A aplicação*

$$(\mathbb{R}_+)^{3g-3} \times (\mathbb{R})^{3g-3} \longrightarrow T(S_g) \quad (1.16)$$

$$(l_1, \dots, l_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3}) \longmapsto [X] \quad (1.17)$$

é uma bijeção. Assim, $T(S_g)$ tem dimensão real $6g - 6$.

Definição 1.4.12 *Os números reais $l_1, \dots, l_{3g-3}, \theta_1, \dots, \theta_{3g-3}$ (onde l_1, \dots, l_{3g-3} são positivos) são as coordenadas de Fenchel-Nielsen do espaço de Teichmüller da superfície de Riemann S .*

Mais detalhes sobre a construção das coordenadas de Fenchel-Nielsen e demonstrações dos resultados apresentados nessa seção podem ser vistos em [1], [6] e [8].

1.5 Superfícies Hiperbólicas

Os objetos de maior interesse neste estudo são superfícies de Riemann tais que sejam capazes de dotá-las de uma métrica hiperbólica.

1.5.1 Métricas Riemannianas

Vimos, no Teorema de Uniformização de Riemann 1.3.7 e no teorema 1.3.8, que os recobrimentos universais de superfícies de Riemann S são \mathbb{C}_∞ , \mathbb{C} ou $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$. Uma métrica ρ é definida em S a partir da métrica $\hat{\rho}$ em \hat{S} , recobrimento universal de S , via projeção do recobrimento $p : \hat{S} \rightarrow S$. A superfície S juntamente com uma métrica ρ é chamada de superfície Riemanniana.

Dessa forma, existem três tipos de superfícies Riemannianas principais:

- Curvatura $+1$. Neste caso a superfície S é chamada superfície elíptica e seu recobrimento universal é \mathbb{C}_∞ ;
- Curvatura 0 . Neste caso a superfície S é chamada superfície parabólica ou Euclidiana e seu recobrimento universal é \mathbb{C} ;
- Curvatura -1 . Neste caso a superfície S é chamada superfície hiperbólica e seu recobrimento universal é $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$.

Esta última é nosso objeto de maior interesse pois, como veremos ainda nesta seção, a métrica Riemanniana de uma superfície hiperbólica é chamada de estrutura hiperbólica e estará em correspondência com as estruturas analíticas, já vistas em 1.2.

Observação 1.5.1 *O modelo do semi-plano superior \mathbb{H} pode ser munido com a métrica Riemanniana de curvatura seccional constante igual a -1 dada por*

$$(ds_{\mathbb{H}})^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (1.18)$$

Juntamente com essa métrica, o modelo \mathbb{H} é também denominado plano de Lobachevski.

O bordo (ou esfera no infinito) de \mathbb{H} é a compactificação de Alexandrovitch a um ponto $\widehat{\mathbb{R}^1} = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ da reta $\mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = 0\}$. Ele é denotado por $\partial\mathbb{H}$ ou S_∞^1 e é homeomorfo a S^1 .

Já o modelo do disco unitário D pode ser munido com a métrica Riemanniana de curvatura seccional constante igual a -1 dada por

$$(ds_D)^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (1.19)$$

O bordo de D é a esfera S^1 e é denotado por ∂D ou, também, por S_∞^1 . Ele é compatível com a descrição do bordo $\partial\mathbb{H}$ de \mathbb{H} . No modelo de Klein, o bordo de \mathcal{K} também é o círculo S_∞^1 .

Assim, o bordo do plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ será denotado por S_∞^1 .

Teorema 1.5.2 *Qualquer superfície hiperbólica completa, conexa e simplesmente conexa é isométrica a $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.*

A demonstração deste fato é apresentada em [5].

Definição 1.5.3 *Seja S uma superfície de Riemann sem bordo. Um atlas A de S é dito hiperbólico quando:*

1. $\forall (U, \varphi) \in A, \varphi(U) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$;
2. se (U, φ) e $(U', \varphi') \in A$ forem tais que $U \cap U' \neq \emptyset$ então, para cada componente conexa $V \subset U \cap U'$, existirá uma isometria $\gamma \in \mathcal{I}som^+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ tal que $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ coincida com γ sobre $\varphi(V)$.

Todo atlas hiperbólico se estende a um único mapa maximal. Um atlas maximal de S é dito uma estrutura hiperbólica em S .

Todo atlas hiperbólico induz uma métrica Riemanniana de curvatura constante igual a -1 sobre S . Reciprocamente, toda métrica Riemanniana de curvatura constante igual a -1 sobre S é obtida dessa forma, pois tais métricas são localmente isométricas ao plano

hiperbólico. Sendo assim, tanto faz pensarmos que uma estrutura hiperbólica sobre S é uma métrica hiperbólica ou um atlas hiperbólico maximal sobre S . Mais detalhes sobre essa correspondência podem ser vistos em [3].

1.5.2 Espaços de Teichmüller e estruturas hiperbólicas

Vale lembrarmos que estruturas hiperbólicas sobre superfícies hiperbólicas são, também, estruturas analíticas (como vimos na seção 1.2). Dessa forma, superfícies hiperbólicas são, em particular, superfícies de Riemann.

Havíamos definido espaços de Teichmüller de superfícies de Riemann equivalentes. No entanto, ao restringir-nos ao espaço de Teichmüller de superfícies hiperbólicas equivalentes, estaremos lidando com classes de equivalência de métricas sobre superfícies de Riemann e, assim, trabalharemos com classes de métricas hiperbólicas em superfícies Riemannianas. Isso nos dará propriedades mais “geométricas” para os espaços de Teichmüller.

A definição usual, segundo Thurston, para uma estrutura hiperbólica sobre uma superfície é uma classe de equivalência de métricas hiperbólicas, onde duas métricas são equivalentes quando forem isométricas por uma isometria isotópica à identidade.

Podemos observar que essa definição já relaciona estruturas hiperbólicas a espaços de Teichmüller. Porém, essa definição ainda não é apropriada para estudarmos estruturas hiperbólicas sobre superfícies Riemannianas via seus recobrimentos universais, já que quaisquer dois destes recobrimentos universais são difeomorfos por uma aplicação isotópica à identidade e, dessa forma, existe uma única estrutura hiperbólica possível sobre o recobrimento universal $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Assim, precisamos de uma relação de equivalência menor, que deixe transparecer mais informações.

Definição 1.5.4 *Uma estrutura hiperbólica relativa sobre $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$ é uma métrica hiperbólica completa sobre o plano hiperbólico, a menos da relação em que duas métricas são equivalentes quando existir uma isometria F entre elas tal que:*

1. F seja isotópica à identidade;
2. F se estenda continuamente para a identidade no infinito.

Em símbolos, essa definição quer dizer que duas métricas d_1 e d_2 serão equivalentes $d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow$ existir uma isometria $F : (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, d_1) \longrightarrow (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, d_2)$ isotópica à identidade tal que F se estenda continuamente para $id : S_{\infty}^1 \longrightarrow S_{\infty}^1$.

Observando que aplicações contínuas do círculo nele mesmo compostas à direita ou à esquerda por quaisquer elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ são ainda contínuas, uma estrutura hiperbólica relativa é dita contínua no infinito quando existir uma isometria para estrutura hiperbólica usual que se estenda continuamente a uma aplicação contínua no infinito.

1.6 Envoltórias convexas

Como veremos no capítulo seguinte, será necessário que tenhamos em mente a idéia de uma envoltória convexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Consideremos S_{∞}^1 a fronteira do plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ e seja Υ um conjunto qualquer de pontos sobre ela. Consideremos o conjunto $E_{\Upsilon} = \{p \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 ; p \text{ pertença a alguma geodésica completa de } \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \text{ cujos fins pertençam a } \Upsilon\}$ (figura 1.17).

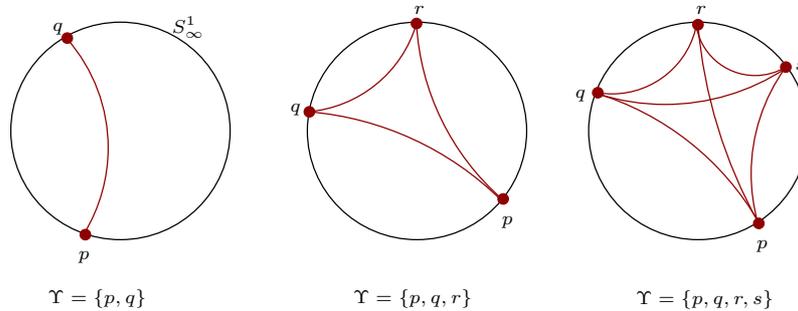


Figura 1.17: Representação geométrica de E_{Υ}

Definição 1.6.1 A envoltória convexa do conjunto $\Upsilon \subset S_{\infty}^1$, denotada por $\mathcal{H}(\Upsilon)$, é o completamento métrico com relação à $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \sqcup S_{\infty}^1)$ da região delimitada por E_{Υ} , ou seja,

$$\mathcal{H}(\Upsilon) = \overline{Env(E_{\Upsilon})} \subset (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \sqcup S_{\infty}^1) \tag{1.20}$$

onde $\overline{Env(E_{\Upsilon})}$ é o fecho do envelope convexo de Υ .

Por exemplo, se Υ consistir de um único ponto, então $\mathcal{H}(\Upsilon) = \Upsilon$. Se Υ consistir de dois pontos distintos p e q , então E_Υ será a geodésica completa de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ ligando p e q . Assim, $\mathcal{H}(\Upsilon) = \overline{E_\Upsilon}$. Se Υ consistir de três pontos distintos p , q e r , então E_Υ será o triângulo hiperbólico ideal determinado por esses pontos. Para uma visualização geométrica desses conceitos, veja figura 1.18.

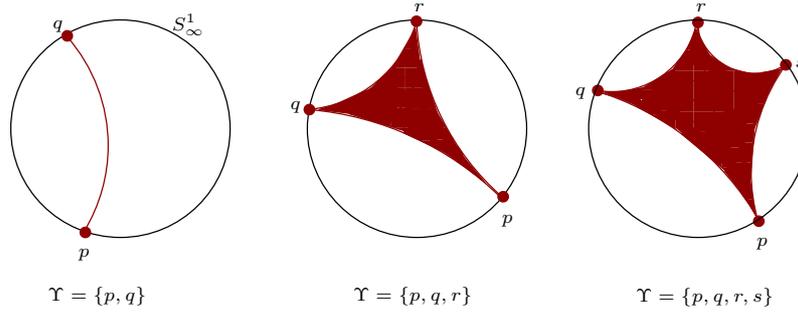


Figura 1.18: Envoltória convexa do conjunto Υ

1.7 Laminações Geodésicas

Seja S uma superfície hiperbólica fechada. Uma geodésica em S é dita simples quando não possuir auto-interseções transversais.

Definição 1.7.1 *Uma laminação geodésica λ sobre S é um subconjunto fechado e não-vazio L de S (chamado de local de λ) juntamente com uma folheação desse conjunto por geodésicas simples e completas. Em outras palavras, para qualquer ponto p sobre o local de λ , existe uma vizinhança U de p sobre a superfície S tal que $L \cap U$ é dado por uma estrutura produto $X \times (0, 1)$, onde cada $x \times (0, 1)$ é um pedaço de geodésica. As geodésicas dessa estrutura produto atribuídas a diferentes vizinhanças precisam coincidir. As geodésicas contidas em L são chamadas de folhas da laminação λ . O local L da laminação λ é a união disjunta de suas folhas.*

As componentes do complementar de uma laminação são chamadas de lacunas da laminação. As lacunas juntamente com as folhas da laminação são chamadas de *strata*.

O conjunto formado por todas as laminações geodésicas de uma superfície S é denotado por $GL(S)$.

Por exemplo, a união disjunta finita de geodésicas simples e fechadas forma uma laminação. Exemplos menos triviais são obtidos ao incluirmos folhas infinitas espiralando em volta de folhas fechadas.

Se $\lambda \in GL(S)$ for uma laminação e $\mu \subset \lambda$ for um conjunto fechado dado por algumas folhas de λ , então $\mu \in GL(S)$. μ é dita uma sublaminação geodésica de λ .

Definição 1.7.2 Consideremos $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cong D \subset \mathbb{R}^2$ uma carta e α uma reta fixa em \mathbb{R}^2 . Sejam $p \in U$ um ponto e l uma geodésica através de p . Definimos a direção de l em p (figura 1.19), com respeito a φ e a α , como sendo o ângulo $[v]$ entre $\varphi(l)$ e a reta Euclidiana paralela à α que passa por $\varphi(p)$. Observemos que a direção $[v]$ depende de α e que ela está bem definida, já que as aplicações de mudança de coordenadas são conformes.

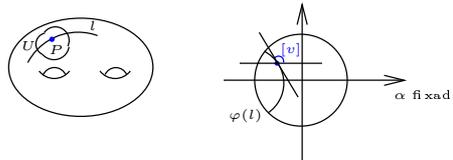


Figura 1.19: Direção da geodésica l no ponto p

Lema 1.7.3 Seja L um subconjunto fechado de S tal que $L = \bigcup_{p \in L} l_p$, onde l_p é uma geodésica através de p . Se quaisquer duas geodésicas de L ou coincidirem ou forem disjuntas, então a direção de l_p em p com respeito a qualquer carta varia continuamente com p .

Demonstração: (1.7.3) Tomemos $p \in L$ e l_p a geodésica de λ que passa por p . Consideremos uma vizinhança aberta $U = U_\alpha \cap L$ de p (U é a interseção de uma carta que contém p com L). Existem pontos em U que pertencem à mesma geodésica l_p e pontos em U que estão em outra geodésica de L que interceptam U .

Para quaisquer dos dois casos, o fato de $q \in U$ estar próximo de p implica que a direção $[v_q]$ de l_q em q está próxima da direção $[v_p]$ de l_p em p . Isso é bastante claro quando p e q pertencem à mesma geodésica de L .

Para o caso em que q pertença a uma outra geodésica l_q de L , as geodésicas l_p e l_q terão interseção se suas direções estiverem longe uma da outra. Mas, por hipótese, isso não é possível (figura 1.20). \square

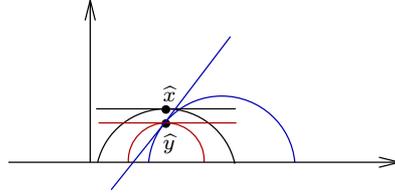


Figura 1.20: A direção de uma folha num ponto p , pertencente à folha, varia continuamente com p

Seja λ uma laminação em $GL(S)$ e $D : \lambda \rightarrow \mathbb{P}(S)$ a aplicação que associa, a cada ponto $p \in \lambda$, sua direção tangente à folha l de λ que passa por p no ponto p . $\mathbb{P}(S)$ é dito o fibrado projetivizado por linhas de S . Pelo lema 1.7.3, concluímos que D é uma aplicação contínua.

Lema 1.7.4 *Seja L uma união não vazia e disjunta de geodésicas em S . Então o fecho \bar{L} de L é uma laminação, onde L é o local de uma laminação λ .*

Demonstração: (1.7.4) Devemos mostrar que, \bar{L} é uma união disjunta de geodésicas simples. Seja p_n uma seqüência de pontos em L convergindo para um ponto p em S . Seja l_n a geodésica que contém p_n na decomposição de L em geodésicas simples.

Relembremo-nos da aplicação $D : \lambda \rightarrow \mathbb{P}(S)$. Como D é contínua, passando a uma subsequência, podemos assegurar que direção de l_n em p_n converge quando $n \rightarrow \infty$, em que as direções são medidas em alguma carta fixada contendo p . Seja l a geodésica através de p com essa direção limite.

Se q é um ponto sobre l cuja distância a p é d , consideremos q_n o ponto sobre l_n tal que a distância a p_n também seja d . Então $q_n \rightarrow q$ quando $n \rightarrow \infty$ e, assim, l está contida em \bar{L} . Portanto \bar{L} é uma união de geodésicas.

Se duas geodésicas l e $l' \subset \bar{L}$ se interseptam transversalmente em $p \in S$, podemos encontrar, pelo lema 1.7.3, geodésicas β e $\beta' \subset L$ passando próximas a p , cujas direções

se aproximam arbitrariamente das direções de l e l' em p . Quando essa aproximação é suficientemente próxima, β e β' devem se interceptar perto de p . Mas isso não é possível, pois L é uma união disjunta de geodésicas. Logo, l e $l' \subset \bar{L}$ são disjuntas. Assim, mesmo que p_n possua cada um de seus pontos em folhas distintas $l_n \in L$, as direções tangentes às folhas l_n em p_n se aproximam assintoticamente da direção tangente à folha l em p .

Um argumento similar mostra que as folhas de \bar{L} são simples e, com isso, concluímos a prova de que \bar{L} é uma laminação geodésica. \square

Lema 1.7.5 *Uma laminação geodésica λ em uma superfície hiperbólica orientável S não é densa em parte alguma de S .*

Demonstração: (1.7.5) Como S é fechada e hiperbólica, ela tem característica de Euler estritamente negativa. Assim, não existe um campo vetorial contínuo o qual não se anula definido sobre toda a superfície S . Caso contrário, o número de Euler do fibrado que, por definição, é igual à característica de Euler de S , seria 0; o que é um absurdo. Segue que qualquer laminação λ de S é um subconjunto próprio de S (caso contrário, $D : \lambda = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma)$ seria uma seção contínua do fibrado projetivizado por linhas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 / \Gamma$).

Seja \mathcal{X} a pré-imagem de λ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. \mathcal{X} é um fechado de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ decomposto como reunião disjunta de geodésicas simples e completas, ou seja, $\mathcal{X} \in GL(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$.

Observemos que \mathcal{X} é Γ invariante e, além disso, provar que λ possui interior vazio é equivalente a provar que \mathcal{X} possui interior vazio.

Vamos supor, por absurdo, que não. Então existirá aberto $U \subseteq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $U \subseteq \mathcal{X}$.

Consideremos p um ponto em U e $l \in \mathcal{X}$ uma folha passando por p . Seja α um arco geodésico fechado inteiramente contido em U , que intersepte a foja l transversalmente em p .

As folhas $l_q \in \mathcal{X}$ que passam por pontos $q \in \alpha$ determinam uma faixa R em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ delimitada pelas folhas de \mathcal{X} que passam pelas duas extremidades de α . Estas constituem a fronteira de R e possuem, pelo menos, duas extremidades distintas b_1 e b_2 em S_{∞}^1 , que formam um intervalo conexo $(b_1, b_2) \subset S_{\infty}^1$. A faixa R é Γ invariante, por construção.

Relembremo-nos da definição de ponto limite, vista em 1.1.30. Como o grupo Γ é Fuchsiano, pelo teorema 1.1.32, o conjunto $\Delta(\Gamma)$ dos pontos limites de Γ satisfaz $\Delta(\Gamma) = S_\infty^1$.

Assim, existe um elemento hiperbólico $\gamma \in \Gamma$ com ponto fixo x contido no intervalo (b_1, b_2) . Sem perda de generalidade, podemos supor x atrator.

Considerando um domínio fundamental F para a ação de Γ (definição 1.3.4) e, pelo fato de R ser Γ invariante, existirá um domínio fundamental F' na órbita de F , próximo de x , inteiramente contido em R . Mas a projeção de F' pelo recobrimento $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}_\mathbb{R}^2/\Gamma$ é a própria superfície $S = \mathbb{H}_\mathbb{R}^2/\Gamma$. Como $R \subset \lambda'$, a projeção de R está contida em λ . Assim, lembrando que $F' \subset R$, temos que $\lambda = S$, o que é um absurdo. Portanto, λ' possui interior vazio em $\mathbb{H}_\mathbb{R}^2$. \square

Lema 1.7.6 *Seja l uma folha não-compacta de uma laminação $\lambda \in GL(S)$. Então o conjunto dos pontos de acumulação de l formam uma sublaminação de λ .*

Demonstração: (1.7.6) Consideremos uma seqüência infinita de pontos p_n sobre alguma semi-geodésica de l , convergindo para um ponto p . Como a laminação λ é fechada, temos que $p \in \lambda$. Seja l_p a folha de λ que passa por p .

Para cada $k \in \mathbb{R}$, com $k > 0$, e para cada ponto $q \in \lambda$, seja $q \pm k$ o par de pontos que dista k de q e estão situados na folha $l_q \in \lambda$ que passa por q .

Observemos que $p \pm k$ é o limite da seqüência $p_n \pm k$ sobre a semi-geodésica de l escolhida. Observemos, também, que a folha l_p pode ser inteiramente percorrida pelos pares de pontos $p \pm K$ (bastando variar $k \in \mathbb{R}_+$). Assim, todo ponto de l_p é ponto de acumulação de l e, portanto, o conjunto dos pontos de acumulação de l é a união de algumas folhas de λ , sendo assim uma sublaminação. \square

Um dado interessante que ainda não discutimos é a existência de uma topologia sobre o conjunto de laminações geodésicas que fará deste um espaço métrico compacto.

Definição 1.7.7 (Métrica de Hausdorff) *Sejam S uma superfície hiperbólica e $K(S)$ o conjunto formado por todos os subconjuntos compactos de S .*

$K(S)$ pode ser munido de uma métrica definida como segue:

$$d(Y, Y') = \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ ; Y \subset N_\varepsilon(Y') \text{ e } Y' \subset N_\varepsilon(Y)\} \quad (1.21)$$

onde $Y, Y' \in K(S)$ e $N_\varepsilon(Y)$ é a vizinhança tubular de raio ε de Y .

Da mesma forma, o conjunto $K(\mathbb{P}(S))$ dos subconjuntos compactos do fibrado projetivizado por linhas de S pode ser munido com a métrica dada em (1.21), bastando tomar os compactos Y e Y' em $K(\mathbb{P}(S))$.

Os espaços métricos $K(S)$ e $K(\mathbb{P}(S))$ são localmente compactos. Mais ainda, como a superfície S é compacta, o espaço $K(S)$ é compacto.

Proposição 1.7.8 *O conjunto $GL(S)$, munido com a topologia induzida pela métrica de Hausdorff em $K(S)$, é um espaço compacto.*

Mais detalhes sobre laminações podem ser encontrados, principalmente, em [15] e, também, em [5].

Capítulo 2

Teorema de Thurston

2.1 Terremotos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$

Neste capítulo, chegaremos ao resultado do nosso trabalho que, em resumo, nos diz que duas estruturas hiperbólicas em uma superfície diferem, apenas, por um terremoto à esquerda. A idéia do que vem a ser um terremoto é o que introduziremos agora.

Um terremoto à esquerda é, intuitivamente, uma mudança na estrutura hiperbólica a qual é obtida pela ruptura à esquerda ao longo de um certo conjunto de geodésicas, como visto na definição 1.7.1, chamadas de falhas ou defeitos. A união dessas geodésicas é chamada de zona falha ou zona defeituosa.

O exemplo mais simples de um terremoto à esquerda sobre o plano hiperbólico é obtido por corte e re-colagem. Passemos a explicá-lo:

Exemplo 2.1.1 *Consideremos o plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, visto como no modelo do disco D , e uma geodésica q do plano.*

Ao cortarmos o plano ao longo de q , dividimo-lo em dois semi-planos A e B que, juntamente com suas fronteiras, irão constituir a strata do plano. A geodésica q passa a ser, tanto a fronteira de A , como a fronteira de B , $\partial A = q = \partial B$.

Consideremos uma aplicação E do plano nele mesmo que preserve a geodésica q e funcione como uma isometria restrita a cada stratum do plano, mas que não seja, necessariamente, uma isometria global. Suponhamos que E desloque para a esquerda, de uma

distância d , a fronteira de A . Estamos considerando como esquerda a nossa noção de esquerda, vista como se estivéssemos em A . Em outras palavras, a isometria $E|_q$ é um deslocamento no sentido positivo com respeito à orientação da fronteira ∂A de A , induzida pela orientação de A .

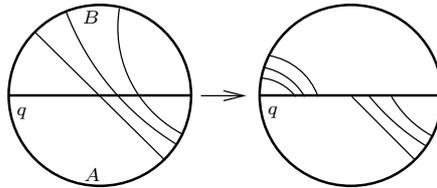


Figura 2.1: Terremoto elementar

Assim, colamos novamente os dois semi-planos A e B pela aplicação E (que funciona como uma aplicação de colagem), anexando a fronteira de B à fronteira de A . Tais terremotos são ditos terremotos à esquerda elementares.

Para essa definição fazer sentido, é necessário que o plano hiperbólico tenha uma orientação. Essa orientação sempre será preservada, pois estaremos considerando apenas isometrias do plano hiperbólico que preservem a orientação no decorrer deste capítulo.

O procedimento de corte e colagem ainda não define uma estrutura hiperbólica sobre o plano hiperbólico, já que a aplicação (que será chamada de aplicação de terremoto) entre o plano hiperbólico e a nova variedade hiperbólica é descontínua. No entanto, como estamos trabalhando com o plano hiperbólico, podemos pensar no círculo no infinito, onde o limite da aplicação de terremoto é contínua, e induzir uma estrutura hiperbólica da fronteira ideal para o interior do disco.

Para identificarmos dois planos hiperbólicos que diferem por um dado terremoto elementar, podemos usar qualquer homeomorfismo entre os dois planos hiperbólicos que se estenda a uma aplicação contínua no infinito. Em todo caso, o terremoto determina uma estrutura hiperbólica relativa sobre $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$.

De um jeito similar, podemos construir terremotos à esquerda cujas falhas são conjuntos finitos de geodésicas disjuntas. Também podemos construir terremotos à esquerda cujas falhas são conjuntos enumeráveis de geodésicas. O que realmente precisamos, contudo, é de uma definição para terremotos à esquerda cujas falhas consistam de um conjunto

fechado arbitrário de geodésicas disjuntas, ou seja, sobre uma laminação.

Definição 2.1.2 *Se λ é uma laminação geodésica sobre o plano hiperbólico, uma aplicação λ -terremoto à esquerda E é uma bijeção (possivelmente descontínua) do plano hiperbólico sobre o plano hiperbólico a qual é uma isometria sobre cada stratum de λ . Além disso, E deve satisfazer à condição de que, para quaisquer duas strata $A \neq B$ de λ , a isometria de comparação $cmp(A, B) = (E_A)^{-1} \circ (E_B) : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ seja uma transformação hiperbólica, cujo eixo separa fracamente A e B , que translada para a esquerda, visto a partir de A .*

E_A e E_B se referem a isometrias do plano hiperbólico inteiro, as quais coincidem com restrições de E para as respectivas strata.

Uma reta l separa fracamente dois conjuntos A e B quando qualquer caminho que ligar um ponto $a \in A$ a um ponto $b \in B$ intersepar l .

O eixo de uma transformação hiperbólica g de $\text{Möb}(\mathbb{C}_{\infty})$ é a geodésica do plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ que liga os dois pontos fixos dessa transformação, que ficam na fronteira $\partial\mathbb{H} = S_{\infty}^1$ do plano. O eixo da transformação g é invariante pela ação de g .

A translação para a esquerda é definida como antes: a direção de translação ao longo de l deve coincidir com a orientação induzida da componente de A em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 - l$. Um caso excepcional é o seguinte: se uma dentre duas strata for uma reta contida no fecho da outra, então a isometria de comparação pode ser trivial.

Definição 2.1.3 *Um terremoto à esquerda sobre o plano hiperbólico é uma estrutura consistindo de:*

- duas cópias do plano hiperbólico, chamadas fonte e alvo do terremoto;
- duas laminações geodésicas λ_s e λ_t sobre os planos hiperbólicos fonte e alvo, respectivamente;
- uma aplicação λ_s -terremoto à esquerda E entre os planos fonte e alvo, a qual leva as strata de λ_s nas strata de λ_t .

Um terremoto à direita é definido similarmente. O inverso de um terremoto à esquerda é um terremoto à direita. Eles são obtidos pela troca dos planos hiperbólicos fonte e alvo, pela troca das laminações λ_s e λ_t , e usando a inversa da aplicação λ_s -terremoto à esquerda.

Proposição 2.1.4 (Terremotos à esquerda simples são densos) *Seja λ uma laminação finita. Se uma aplicação $E : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ for uma isometria sobre cada stratum de λ , então E é dita uma aplicação λ -terremoto à esquerda se, e somente se, as aplicações de comparação para strata adjacentes forem transformações hiperbólicas as quais transladam para a esquerda e separam fracamente as folhas de λ . Aplicações de terremoto à esquerda com laminações finitas são densas no conjunto de todas as aplicações de terremoto à esquerda, na topologia de convergência uniforme sobre conjuntos compactos.*

Isso nos diz que terremotos à esquerda poderiam ter sido, alternativamente, definidos como o fecho do conjunto dos terremotos à esquerda que possuem laminações finitas. Tais terremotos são chamados de terremotos à esquerda simples.

Demonstração: (2.1.4) Primeiramente, precisamos verificar que, se s e t são transformações hiperbólicas com eixos disjuntos tais que eles transladam na mesma direção, então o eixo de $s \circ t$ separa o eixo de s do eixo de t , onde transladar na mesma direção significa que a região entre os eixos de s e de t induzem uma orientação sobre os eixos a qual coincide com uma das direções da translação e não coincide com a outra.

Uma forma de vermos isso é olhando para o círculo no infinito: no intervalo cortado pelo eixo de s (ou pelo eixo de t), ambos s e t estão movendo pontos na mesma direção. Isso força $s \circ t$ a ter um ponto fixo em cada um dos dois intervalos entre os eixos de s e de t , já que a composição mapeia um desses intervalos nele mesmo e, a inversa da composição mapeia o outro desses intervalos nele mesmo.

Por indução sobre o número de *strata* separando duas *strata* da laminação finita λ , segue que a isometria de comparação de um par arbitrário de *strata* irá deslocar para a esquerda se todas as isometrias de comparação de *strata* adjacentes também o fizerem.

Provaremos, agora, a densidade de terremotos à esquerda simples no conjunto de todos os terremotos à esquerda.

Primeiro, observemos que a imagem de um conjunto compacto por uma aplicação de terremoto à esquerda tem um diâmetro finito e, assim, um fecho compacto.

Dado um λ -terremoto à esquerda E , para qualquer subconjunto compacto K do plano hiperbólico, existe um subconjunto finito de *strata* que intersectam K tal que a união das imagens da *strata* desse conjunto finito no gráfico de $E \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é ε -denso no gráfico de E restrito a K .

Definimos um novo terremoto à esquerda F pela condição de que as isometrias obtidas por restrição de F a sua *strata* são exatamente as isometrias obtidas por restrição de E para o escolhido conjunto finito de *strata*. Observemos que a *strata* de F é o conjunto finito de *strata* de E escolhido. As retas (geodésicas) que separam fracamente *strata* adjacentes de F são eixos de certas isometrias de comparação de E . Estas são disjuntas, pois quaisquer duas são separadas por, pelo menos, uma *strata*. Então elas formam uma laminação que é respeitada por F . A aplicação de terremoto simples F se aproxima de E no conjunto K . \square

Proposição 2.1.5 (Terremoto no infinito) *Uma aplicação λ -terremoto $E : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ induz uma única aplicação $E_{\infty} : S_{\infty}^1 \longrightarrow S_{\infty}^1$ tal que $\widehat{E} : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup S_{\infty}^1 \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup S_{\infty}^1$ dada por $\widehat{E}|_{S_{\infty}^1} = E_{\infty}$ e $\widehat{E}|_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} = E$ seja uma aplicação contínua em cada ponto $x \in S_{\infty}^1$.*

Demonstração: (2.1.5) Primeiramente, devemos nos certificar de que E_{∞} está bem definida.

Se os fechos de A e B se intersectarem no infinito, então E_A e E_B devem coincidir nessa interseção (que consiste de um ou dois pontos), pois o eixo da isometria de comparação $cmp(A, B)$ deve atingir esses pontos no infinito.

Se um ponto $x \in S_{\infty}^1$ não está no fecho de nenhum *stratum* de λ , então ele possui uma base de vizinhanças em D consistindo de vizinhanças limitadas por folhas l_i de λ . Olhando para os diâmetros das imagens $E(l_i)$, concluímos que eles tendem a zero pois, caso contrário, um ponto limite em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ dessas imagens estaria sobre a imagem de algum *stratum*, o que contraria o fato de que E preserva a propriedade de separação. Isso determina um único ponto o qual definimos ser $E_{\infty}(x)$.

Isso define uma aplicação bijetiva do círculo nele mesmo a qual preserva ordem circular. Qualquer aplicação com essa propriedade é contínua. \square

Como no caso de um terremoto elementar, um terremoto à esquerda arbitrário determina uma estrutura hiperbólica relativa sobre $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$. Na verdade, a aplicação de terremoto, a menos da relação de equivalência por pós-composição (composição pela esquerda) com isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, determina uma estrutura hiperbólica relativa. Essa relação de equivalência sobre aplicações terremotos é uma boa relação: as classes de equivalên-

cia são descritas pela laminação associada a um terremoto à esquerda juntamente com a coleção de isometrias de comparação. Vejamos, agora, o teorema principal deste texto.

Teorema 2.1.6 (Geologia é transitiva) *Quaisquer duas estruturas hiperbólicas relativas contínuas sobre $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$ diferem por um terremoto à esquerda. O terremoto é único, exceto por existir um leque de escolhas para a aplicação terremoto sobre qualquer folha onde ele tenha descontinuidades. As escolhas são aplicações que possuem a mesma imagem, diferindo apenas por translações variando entre os valores limites a folha.*

Equivalentemente, todo homeomorfismo de S_{∞}^1 em S_{∞}^1 que preserve orientação surge como o valor limite E_{∞} de uma única aplicação de terremoto à esquerda E , a menos do mesmo conjunto de ambigüidades. Essa equivalência se deve ao teorema 2.1.5, lembrando que o homeomorfismo E_{∞} induz uma estrutura hiperbólica da fronteira ideal para o interior do disco.

Demonstração: (2.1.6)

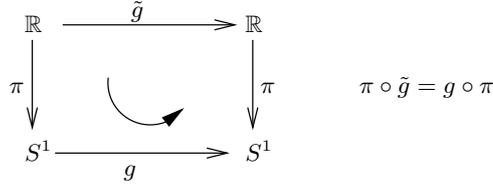
Fixemos $f : S^1 \rightarrow S^1$ um homeomorfismo qualquer que preserve orientação tal que o conjunto de pontos fixos de f não seja vazio.

O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ possui uma ação natural na fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = S_{\infty}^1$ do plano hiperbólico. Para vermos isso, basta lembrarmos de que $PSL(2, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $Möb(\mathbb{C}_{\infty})$ e olharmos para $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ dentro de \mathbb{C}_{∞} . Consideremos então, $PSL(2, \mathbb{R})$ como subgrupo de $Homeo_+(S_{\infty}^1)$.

Provaremos o teorema olhando para o conjunto das classes laterais à esquerda do grupo de isometrias, $PSL(2, \mathbb{R}) \cdot f$, que é constituído pelos elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, visto como subgrupo de $Homeo_+(S_{\infty}^1)$, passando por f . Essa classe lateral, enquanto grupo topológico, é homeomorfa a $PSL(2, \mathbb{R})$ e, assim, é uma variedade de dimensão 3. Denotaremos $PSL(2, \mathbb{R}) \cdot f$ por C .

Escolhamos um ponto de referência $x_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Existe uma fibração por círculos $\bar{p} : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ sobre $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, com projeção $\gamma \mapsto \gamma(x_0)$. Essa fibração induz uma fibração de $p : C \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ dada por $\gamma \circ f \mapsto \gamma(x_0)$.

Consideremos $g \in Homeo_+(S^1)$. Podemos levantar g a um homeomorfismo $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do recobrimento universal \mathbb{R} de forma que o diagrama a seguir comute.



$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}_{\infty}$ é a projeção do recobrimento dada, por exemplo, por $t \mapsto e^{i2\pi t}$.

A condição de levantamento dada pelo diagrama anterior implica que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x + 1) = \tilde{g}(x) + 1$. Também, implica que quaisquer dois levantamentos \tilde{g}_1 e \tilde{g}_2 de g satisfazem à condição $e^{i2\pi\tilde{g}_1(t)} = e^{i2\pi\tilde{g}_2(t)}$. Assim, como toda função contínua de \mathbb{R} sobre \mathbb{Z} (com a topologia discreta) é constante, temos que \tilde{g}_1 e \tilde{g}_2 diferem por uma constante inteira, isto é, $\tilde{g}_2 = \tilde{g}_1 + m$ por algum inteiro m .

Outra conclusão que podemos tirar a respeito do levantamento de g : \tilde{g} é monótono, pois é um homeomorfismo de \mathbb{R} e, se \tilde{g} preservar orientação, ele será crescente. Caso \tilde{g} reverta orientação, ele será decrescente.

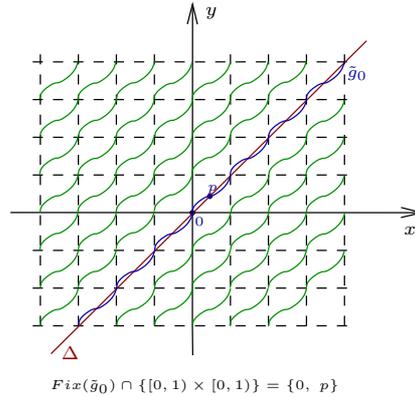


Figura 2.2: Quando $Fix(g) \neq \emptyset$, existe único levantamento de g com pontos fixos

Alguns elementos de $C = PSL(2, \mathbb{R}) \cdot f$ têm pontos fixos ao agirem sobre o círculo, outros não têm nenhum. Podemos investigar os pontos fixos do homeomorfismo g olhando para os pontos de interseção do gráfico de um levantamento $\tilde{g} \in Homeo_+(\mathbb{R})$ com a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = y\}$. Para o caso que $Fix(g) \neq \emptyset$, devemos observar que existirá um único levantamento \tilde{g} de g que também terá pontos fixos (figura 2.2).

Se \tilde{g}_0 for o único levantamento de g cujo $graf(\tilde{g}_0)$ intersepte o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, então $Fix(g)$ está em correspondência biunívoca com $graf(\tilde{g}_0) \cap \{[0, 1] \times [0, 1]\} \cap \Delta$.

Suponhamos, agora, que o homeomorfismo g seja tal que $Fix(g) \neq \emptyset$. g será dito um XL -homeomorfismo (*extreme left homeomorphism*) se existir um levantamento $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que possua ao menos um ponto fixo e que satisfaça $\tilde{g}(x) \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$. Geometricamente, isso significa que o gráfico de \tilde{g} fica inteiramente acima da diagonal Δ , podendo apenas tocá-lo nos pontos fixos \tilde{g} . Menos formalmente, isso nos diz que g move pontos no sentido anti-horário sobre S^1 , exceto pelos pontos que são fixos.

Seja XL o subconjunto de todos os XL -homeomorfismos pertencentes a C .

Lema 2.1.7 (*XL é homeomorfo ao plano hiperbólico*) *A fibração $p : C \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ leva $XL \subset C$ homeomorficamente sobre o plano hiperbólico.*

Demonstração: (2.1.7) A idéia é mostrarmos que cada fibra da fibração $p : C \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ possui exatamente um ponto de XL , isto é, XL é uma seção do fibrado.

Sejam $F \subset C$ uma fibra de C sobre $\theta \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ e $f_0 \in F$ um elemento dessa fibra. Pelo que já vimos, f_0 se escreve como $f_0 = \gamma_0 \cdot f$, onde $f : S^1 \rightarrow S^1$ é o homeomorfismo em $Homeo_+(S^1)$ que fixamos desde o princípio, $\gamma_0 \in PSL(2, \mathbb{R})$ é a isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ tal que $p(f_0) = \gamma_0(x_0) = \theta$. Quaisquer outros elementos $f_\alpha \in F$ se escrevem como $f_\alpha = (\gamma_\alpha \circ \gamma_0) \cdot f$, onde γ_α é um elemento elíptico fixando θ .

A menos de uma conjugação de $\gamma_\alpha \circ \gamma_0$ por elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos assumir que γ_α age como uma rotação na fronteira S_∞^1 (θ passa a ser a origem do disco unitário). Para enfatizar este fato, trocaremos a notação γ_α por R_α , em que α passa a ter o significado de parâmetro angular da rotação R_α (um número real não-negativo que depende de f_α). Assim, $f_\alpha = (R_\alpha \circ \gamma_0) \cdot f$.

Neste momento, é bom lembrarmos que uma rotação $R_\alpha \in Homeo_+(S^1)$ a um parâmetro angular α é uma função do círculo que aplica, a cada ponto $p \in S^1$, uma rotação de um ângulo $2\pi\alpha$, sendo dada por $z \mapsto (e^{i2\pi\alpha})z$. Além disso, R_α se levanta à translação $T_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (via recobrimento), dada por $x \mapsto x + \alpha$.

Sendo assim, podemos reescrever f_α como $f_\alpha = R_\alpha \circ (\gamma_0 \cdot f) = R_\alpha \circ f_0$. Variando o parâmetro de rotação α , percorremos toda a fibra F de C . Dessa forma, podemos completar a prova olhando para o recobrimento universal.

Seja $\tilde{f}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f_0 em $Homeo_+(\mathbb{R})$. Se $(R_\alpha \circ f_0)$ for outro ponto de F , então este se levanta a $(T_\alpha \circ \tilde{f}_0) = (\tilde{f}_0 + \alpha) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

A família $\{\tilde{f}_0 + \alpha\}_{\alpha} \in \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ se constitui do conjunto de todos os levantamentos dos elementos da fibra F . Os gráficos de $(\tilde{f}_0 + \alpha)$ são obtidos ao transladarmos o gráfico de \tilde{f}_0 de uma distância $\alpha \in \mathbb{R}$ ao longo do eixo y , como mostra a figura 2.3.

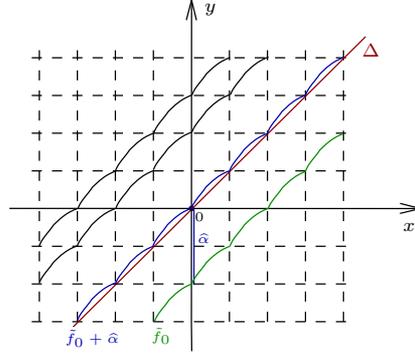


Figura 2.3: Família de levantamentos da fibra F

Olhando para $\tilde{f}_\alpha(0) = \tilde{f}_0(0) + \alpha$, definamos $\hat{\alpha} = -\tilde{f}_0(0)$.

Como \tilde{f}_0 é monótona, então $\tilde{f}_0(x) - \tilde{f}_0(0) \geq 0$ e, assim,

$$\inf_{x \in [0,1]} \{\tilde{f}_0(x) + \hat{\alpha}\} = 0. \tag{2.1}$$

O ponto \hat{x} que realiza este ínfimo será um ponto fixo de $\tilde{f}_0 + \hat{\alpha}$. Como estamos trabalhando com homeomorfismos que preservam a orientação, teremos $\hat{x} = 0$.

Assim, $\tilde{f}_0 + \hat{\alpha}$ é o levantamento do único ponto de XL sobre a fibra F (cada fibra tem exatamente um XL -homeomorfismo) e mostramos que $p|_{XL} : XL \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é uma bijeção.

Falta mostrarmos que essa bijeção é, de fato, um homeomorfismo.

A continuidade de $p|_{XL}$ segue, diretamente, da continuidade de p . Já a continuidade de $(p|_{XL})^{-1}$ depende, apenas, de interpretarmos corretamente a inversão.

De fato, o ínfimo de uma função contínua depende continuamente da função, o que nos dá uma aplicação contínua $\text{inf} : \text{Homeo}_+([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$, onde a topologia em $\text{Homeo}_+([0, 1])$ é a topologia da convergência uniforme sobre conjuntos compactos. A determinação do ponto de XL em uma fibra da fibração $p : C \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ pela condição dada em 2.1 implica, imediatamente, que $(p|_{XL})^{-1}$ é contínua. \square

Dado $g \in XL$, associamos seu conjunto de pontos fixos $Fix(g) \subset S^1$. Vamos considerar a envoltória convexa (ou fecho convexo) $\mathcal{H}(Fix(g)) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \sqcup S_{\infty}^1$ de $Fix(g)$, como vimos na seção 1.6. Vamos denotar essa envoltória por $\mathcal{H}(g)$. O fecho convexo, considerado no sentido hiperbólico, coincide com o fecho convexo euclidiano se usarmos o modelo projetivo \mathcal{K} para $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, tal que a compactificação do plano hiperbólico seja o disco ordinário no plano euclidiano e retas hiperbólicas sejam retas euclidianas (relembremo-nos do modelo de Beltrami-Klein, visto na seção 1.1.3).

Os conjuntos $\mathcal{H}(g)$, freqüentemente, consistem de um único ponto sobre S_{∞}^1 . Na verdade, para qualquer $g \in XL$ e qualquer $x \in Fix(g)$, se g for composto à esquerda por uma transformação parabólica a qual fixa x e move todos os outros pontos no sentido anti-horário, o homeomorfismo resultante estará, também, em XL e possuirá x como seu único ponto fixo.

Outras possibilidades são quando $Fix(g)$ consistir de dois pontos (neste caso, $\mathcal{H}(g)$ é uma reta hiperbólica compactificada), quando $Fix(g)$ consistir de um conjunto finito de pontos (neste caso, $\mathcal{H}(g)$ é um polígono ideal compactificado), ou quando $Fix(g)$ consistir de um conjunto infinito de pontos.

Dessa forma, a cada XL -homeomorfismo associamos seu fecho convexo construindo, assim, uma aplicação $\mathcal{H} : XL \rightarrow K(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$, onde $K(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ é o conjunto de todos os compactos de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Lema 2.1.8 (Fechos convexos não se cruzam) *Se g_1 e g_2 forem elementos de XL que possuam, pelos menos, dois pontos fixos e tais que $\mathcal{H}(g_1) \neq \mathcal{H}(g_2)$, então $\mathcal{H}(g_2)$ está contido no fecho de uma única componente de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 - \mathcal{H}(g_1)$.*

Demonstração: (2.1.8)

Consideremos dois elementos g_1 e $g_2 \in XL$, com dois ou mais pontos fixos, tais que $g_1 \neq g_2$. Sejam p_1 e q_1 dois pontos fixos de g_1 e p_2 e q_2 dois pontos de g_2 , todos distintos. Consideremos, ainda, l_1 e l_2 geodésicas completas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ com fins em $\{p_1, q_1\}$ e $\{p_2, q_2\}$, respectivamente. Suponhamos, por absurdo, que essas geodésicas se intersequem transversalmente num ponto $\xi \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Ao aplicarmos g_1^{-1} (que também é um XL -homeomorfismo) sobre a configuração da figura 2.4, temos que g_1^{-1} preserva a reta l_1 deixando p_1 e q_1 fixos, e leva p_2 e q_2 em

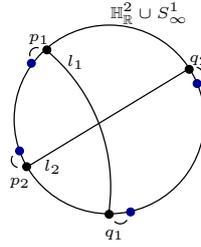


Figura 2.4: Dinâmica sobre os pontos fixos de g_1 e g_2

pontos $g_1(p_2)$ e $g_1(q_2)$ no sentido horário em S_{∞}^1 , respectivamente. Como g_2 é um XL -homeomorfismo, aplicando g_2 após termos aplicado g_1^{-1} , teremos que os pontos $g_1(p_2)$ e $g_1(q_2)$ são levados em pontos no sentido anti-horário em S_{∞}^1 , mas que não ultrapassam os pontos p_2 e q_2 , pois estes são pontos fixos de g_2 (g_2 preserva ordem circular). Além disso, g_2 leva os pontos p_1 e q_1 em pontos $g_2(p_1)$ e $g_2(q_1)$, também em sentido anti-horário. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, é necessário que existam quatro pontos fixos, dois pontos fixos atratores (um entre p_1 e p_2 e outro entre q_1 e q_2 , em sentido anti-horário, conforme figura 2.4) e dois pontos fixos repulsores (um entre q_2 e p_1 e outro entre p_2 e q_1). Como um elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ que fixa três ou mais pontos é a identidade, $g_2 \circ g_1^{-1}$ é a identidade de S_{∞}^1 e segue que $g_1 = g_2$, absurdo. Logo, as geodésicas l_1 e l_2 não podem ter interseção transversal.

Aplicando o mesmo raciocínio a todas as geodésicas completas ligando pares de pontos em $\mathcal{H}(g_i) \cap S_{\infty}^1$ (para $i = 1, 2$) concluímos o resultado. \square

Os fechados $\mathcal{H}(g)$; $g \in XL$ formarão as componentes da strata de uma aplicação de terremoto. A dificuldade que ainda resta para construirmos uma aplicação de terremoto é mostrar que o fecho dessas *strata* cobrem todo o plano hiperbólico juntamente com sua fronteira, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \sqcup S_{\infty}^1$ (ou seja, $\forall x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, devemos mostrar que existe algum XL -homeomorfismo g tal que $x \in \mathcal{H}(g)$).

A razão desses fechados cobrirem todo o disco está relacionada com o teorema de Brouwer que diz que, qualquer aplicação do disco nele mesmo, que seja a identidade na fronteira, é sobrejetiva. A correspondência $g \mapsto \mathcal{H}(g)$ que leva XL para subconjuntos do disco é, na verdade, parecida com uma aplicação contínua do disco no disco. Para visualizarmos essa similaridade, consideremos o conjunto $G \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, que descreve o

gráfico dessa correspondência, ou seja, $G = \{(p(g), x) ; x \in \mathcal{H}(g)\}$. Seria plausível que G fosse, topologicamente, um disco e que pudesse ser aproximado por um disco o qual fosse o gráfico de uma função contínua. O que iremos provar está relacionado a isto, mas é ligeiramente diferente (uma propriedade de “continuidade” para \mathcal{H}).

Proposição 2.1.9 (Continuidade de \mathcal{H}) *Para todo $f_0 \in XL$ e para toda vizinhança U de $\mathcal{H}(f_0) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, existe uma vizinhança V de f_0 em $XL \subset C = PSL(2, \mathbb{R}) \cdot f$ tal que $g \in V \Rightarrow \mathcal{H}(g) \subset U$.*

Demonstração: (2.1.9) Podemos assumir que a vizinhança U seja convexa (caso contrário, podemos trocá-la por $\text{int}(\overline{\text{Env}(U)})$). Nesse caso, a convexidade implica que, se $g \in XL$ for tal que $\text{Fix}(g) \subset (U \cap S_{\infty}^1)$, então $\mathcal{H}(g) \subset U$ (figura 2.5).

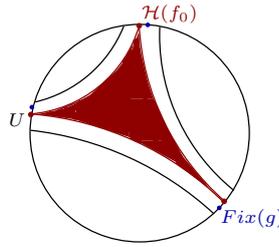


Figura 2.5: Vizinhança de $\mathcal{H}(f_0)$

Tomando $f_0 \in XL$, existe vizinhança W de f_0 suficientemente pequena, na topologia da convergência uniforme de $\text{Homeo}_+(S^1)$, tal que, se $g \in W$, então cada ponto $x \in \text{Fix}(g)$ está suficientemente próximo de um ponto de $\text{Fix}(f_0)$, na topologia induzida de \mathbb{C}_{∞} em $S^1 \subset \mathbb{C}_{\infty}$, de forma a garantir que x pertença ao aberto $U \cap S_{\infty}^1$ (figura 2.6).

Tomando $V = W \cap XL$, obtemos a vizinhança desejada. □

Vimos, pelo lema 2.1.7, que o conjunto XL é homeomorfo a um disco aberto. Ele possui uma compactificação natural \overline{XL} para um disco fechado, induzida da compactificação do plano hiperbólico $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup S_{\infty}^1$. Estenderemos a aplicação \mathcal{H} para o círculo no infinito de XL (o qual também chamaremos de S_{∞}^1) a uma aplicação $\overline{\mathcal{H}} : \overline{XL} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$ pondo $\overline{\mathcal{H}}|_{XL} = \mathcal{H}$ e levando um ponto de $\partial(\overline{XL})$ ao ponto de S_{∞}^1 que lhe é correspondente, isto é, $\overline{\mathcal{H}}(x) = \{x\}$, onde $x \in \partial(\overline{XL}) = S_{\infty}^1$.

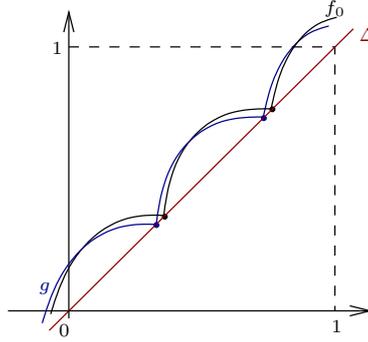


Figura 2.6: Pontos de $Fix(g)$ estão próximos dos pontos de $Fix(f_0)$

Proposição 2.1.10 (Continuidade de $\overline{\mathcal{H}}$) *A proposição precedente 2.1.9 também é válida para a extensão de \mathcal{H} para \overline{XL} .*

Demonstração: (2.1.10) Precisamos mostrar que, para qualquer $x \in S_{\infty}^1 = \partial XL$ e para qualquer vizinhança U de $x = \mathcal{H}(x)$ em $S_{\infty}^1 = \partial \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, existe uma vizinhança V de x em XL que consiste de homeomorfismos cujos conjuntos de pontos fixos estão todos contidos em U .

Qualquer $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ pode ser escrita na forma $\gamma = (\tau \circ \rho)$, onde τ é um elemento hiperbólico cujo eixo passa através de x_0 e leva x_0 para $\gamma(x_0)$ e ρ é um elemento elíptico fixando x_0 . Tomaremos x_0 como sendo o centro do disco.

Se $\gamma(x_0)$ estiver próximo de $x \in S_{\infty}^1$, no sentido Euclidiano, então τ translada de uma distância grande. Se $(\gamma \circ f_0)$ possuir algum ponto fixo y , o qual não está próximo de x , então $\tau^{-1}(y)$ está próximo do ponto diametralmente oposto x' . Consideremos que $(\gamma \circ f_0)$ se aplique a pontos na vizinhança de y . Um ponto y_1 próximo a y na direção horária é levado em um ponto na direção horária de $f_0(y)$ (visto que a distância é estimada por constantes da continuidade uniforme de f_0). Então ρ leva y e y_1 para um par de pontos que distam exatamente a mesma quantidade, já que $(\rho \circ f_0)(y) = \tau^{-1}(y)$ está próximo do antípoda de x , y_1 está também próximo desse ponto antípoda. Agora, τ expande o intervalo entre os dois pontos por um fator muito grande. Se τ for escolhido de forma que supere qualquer contração f_0 causada no intervalo, então y_1 se moverá no sentido horário e, assim, $(\gamma \circ f_0)$ não será um XL -homeomorfismo.

A única possibilidade, então, é que os pontos fixos de um XL -homeomorfismo próximo

de x estejam próximos de $x = \mathcal{H}(x)$. □

Vamos, agora, mostrar que todo ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ está em $\mathcal{H}(g)$ para algum $g \in XL$. Para isso, utilizaremos o modelo projetivo de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, que identificamos com o disco fechado \overline{XL} , conforme comentamos anteriormente.

A idéia principal é aproximarmos a função $\overline{\mathcal{H}}$ por uma função contínua, usando em \overline{XL} a métrica induzida pela métrica Euclidiana em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ (novamente, estamos considerando o modelo projetivo de Beltrami-Klein para o plano hiperbólico).

As medidas naturais nos fechos convexos $\mathcal{H}(g)$ são as medidas de Lebesgue padrão 0-dimensional, 1-dimensional e 2-dimensional, induzidas do disco $D \subset \mathbb{C}_{\infty}$. Vamos denotar qualquer uma dessas medidas por μ , a dimensão utilizada ficará clara no contexto. Utilizaremos, também, a métrica induzida em XL através do pullback da medida μ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, também denotada por μ .

Dada uma aplicação $f_0 \in XL$, denotemos por $h(f_0)$ o centro de massa de $\mathcal{H}(f_0)$, com respeito a medida μ , tomando o modelo projetivo \mathcal{K} do plano hiperbólico a fim de garantir que $h(f_0) \in \mathcal{H}(f_0)$. Assim, temos a aplicação $h : XL \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, dada por

$$h(f_0) = \frac{1}{\int_{\mathcal{H}(f_0)} d\mu} \left\{ \left[\int_{\mathcal{H}(f_0)} \operatorname{Re}(z) d\mu \right] + i \left[\int_{\mathcal{H}(f_0)} \operatorname{Im}(z) d\mu \right] \right\},$$

pensando em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ como conjunto de pontos, isto é, $\{z \in \mathbb{C}_{\infty} ; \|z\| \leq 1\}$

Consideremos uma *bump function* β no disco $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ suportada numa vizinhança pequena ao redor da origem, de raio $\varepsilon > 0$ fixo, isto é, uma função contínua positiva tal que $\int \beta = 1$, com suporte compacto contido numa ε -vizinhança da origem.

Vamos formar a convolução à esquerda da função h pela *bump function* β , denotada por $\beta \star h : XL \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, dada por:

$$(\beta \star h)(f_0) = \int_{V_{f_0}} \beta(p(g) - p(f_0))h(g) d\mu(g) \tag{2.2}$$

A convolução de β por h é a média dos valores de h sobre uma vizinhança pequena em XL , com pesos distribuídos por β .

Proposição 2.1.11 (Propriedades da convolução) *São válidas as seguintes propriedades para a convolução $\beta \star h$:*

- a) $\beta \star h$ é contínua;
- b) $\beta \star h$ leva XL sobrejetivamente em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 - N_{\infty}^{\varepsilon}$, onde N_{∞}^{ε} é uma vizinhança de S_{∞}^1 cujo raio depende somente de ε ;
- c) Para cada $f_0 \in XL$, $(\beta \star h)(f_0)$ está contido numa envoltória convexa de $\bigcup_{g \in V_{f_0}} \mathcal{H}(g)$.

Além disso, $Env \left(\bigcup_{g \in V_{f_0}} \mathcal{H}(g) \right)$ está contido numa pequena vizinhança de $\mathcal{H}(f_0)$, donde segue que o mesmo vale para $(\beta \star h)(f_0)$.

Demonstração: (2.1.11)

- a) Sejam g_1 e g_2 elementos próximos em XL . Como a restrição $p|_{XL} : XL \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é contínua, temos $p(g_1)$ e $p(g_2)$ próximos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Logo $p(g) - p(g_1)$ e $p(g) - p(g_2)$ também estarão próximos $\forall g \in XL$. Como β é contínua, segue que $\beta(p(g) - p(g_1))$ e $\beta(p(g) - p(g_2))$ são números reais próximos e concluímos que $\beta(p(g) - p(f_0))$ depende continuamente de f_0 .

Observemos, ainda, que $h|_{V_{f_0}}$ é limitada $\forall f_0 \in XL$.

Portanto, $\int_{V_{f_0}} \beta(p(g) - p(f_0)) h d\mu(g)$ é contínua.

- b) Segue do fato de que $\beta \star h$ está próximo da identidade em $S_{\infty}^1 = \partial XL$. Portanto (por consideração de grau), ele é sobrejetivo, exceto por uma possível vizinhança pequena de S_{∞}^1 , a qual depende do tamanho de ε .

- c) Dado $f_0 \in XL$, o fato de que $Env \left(\bigcup_{g \in V_{f_0}} \mathcal{H}(g) \right)$ está contido em uma pequena vizinhança conexa de $\mathcal{H}(f_0)$ (cujo tamanho depende de ε) segue diretamente do lema 2.1.10. Assim, resta apenas mostrar que $\beta \star h$ pertence a $\bigcup_{g \in V_{f_0}} \mathcal{H}(g)$.

Isso segue do fato de que $(\beta \star h)(f_0)$ é uma média ponderada pela função (a função β distribui os pesos) dos centros de massas das envoltórias convexas $\mathcal{H}(g)$, quando g percorre a vizinhança V_{f_0} de f_0 .

□

Finalmente, tomemos $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ e escolhamos um número $\varepsilon = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de forma a garantir que x pertença à $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 - N_{\infty}^{\varepsilon}$, conforme 2.1.11 **b**. Assim, x pertencerá à imagem $\beta \star h : XL \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Lembremo-nos de que ε determinará o raio do suporte de β . Definamos a seqüência de números naturais $j_i = \{n + i\}_{i=1}^{\infty}$. Então, $\frac{1}{j_i} < \varepsilon \forall i$. Seja β_i uma seqüência de *bump functions* de suportes em vizinhanças de raio $\frac{1}{j_i}$ em torno da origem de $D = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup S_{\infty}^1$. Então, $\forall i$ existe uma função $f_i \in XL$ tal que $(\beta \star h)(f_i) = x$. Os diâmetros de $\text{supp}(\beta_i)$ são tais que seus diâmetros tendem à zero quando $i \rightarrow \infty$.

Como \overline{XL} é compacto, então a seqüência construída f_i possui ponto de acumulação g , que pode ser escolhido no interior de \overline{XL} , sendo limite de uma subseqüência f_m de f_i . Escolhendo vizinhanças $V_{g,m}$ de raio $\frac{1}{m}$ de g em XL , somando ao fato de que $(\beta_m \star h)(f_m) = x$ e à propriedade da convolução 2.1.11 **c**, concluímos que $x \in U_m \forall m$, onde U_m são vizinhanças conexas de $\mathcal{H}(g)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ com raios tendendo a zero quando $m \rightarrow \infty$. Como $\mathcal{H}(g)$ é fechado e convexo, a única forma disto ser possível é quando $x \in \mathcal{H}(g)$.

Provamos, então, que todo $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ está em $\mathcal{H}(g)$ para algum XL -homeomorfismo g .

Juntando todos os resultados obtidos até agora, concluímos que a união das geodésicas completas e das componentes dos bordos de regiões convexas de dimensão dois da imagem $\mathcal{H}(XL) = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ de XL por \mathcal{H} formam uma laminação geodésica $\lambda \in GL(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$.

Para completar a prova da existência de um terremoto, devemos construir uma aplicação λ -terremoto que seja compatível com $f \in \text{Homeo}_+(S^1)$ no infinito, em que f está fixado desde o início da demonstração deste teorema.

Para cada *stratum* A de λ , escolhamos uma aplicação $f_A \in XL$ tal que $\mathcal{H}(f_A) \supset A$. A escolha é naturalmente única quando o *stratum* A for uma região principal de λ .

Definamos E sobre o *stratum* A como sendo γ_A^{-1} , onde $f_A = \gamma_A \circ f$.

Temos que $\gamma_A^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$, isto é, γ_A é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Esta definição força E de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ nele mesmo ser uma bijeção a qual coincida com f no infinito.

Resta mostrar as isometrias de comparação $\text{cmp}(A, B) = \gamma_A \circ \gamma_B^{-1} = f_A \circ f_B^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$ são transformações hiperbólicas, cujos eixos separam fracamente A e B , as quais transladam para a esquerda visto a partir de A .

Sejam I e J os dois intervalos em S_{∞}^1 os quais separam A de B (figura 2.7), e tais que

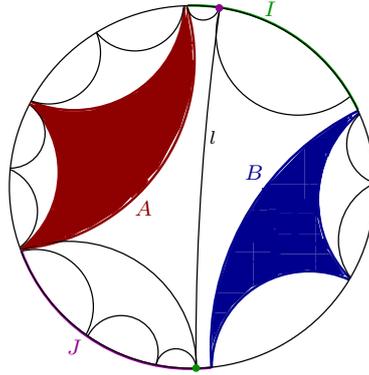


Figura 2.7: Eixo da isometria de comparação separa fracamente A de B

I esteja à esquerda de J vistos a partir de A (permitindo a possibilidade de que um deles, ou ambos, seja um intervalo degenerado).

Afirmamos que o homeomorfismo f_A leva I em si mesmo. De fato, $\mathcal{H}(f_A) \supset A$ e, portanto, todos os pontos fixos de $f_A : S_{\infty}^1 \rightarrow S_{\infty}^1$, onde $f_A \in XL$, estão em I . Analogamente, f_B^{-1} também leva I em si mesmo.

Logo, $cmp(A, B)$ leva I nele mesmo e, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, ela possui algum ponto fixo no intervalo. Similarmente, $cmp(B, A) = cmp(B, A)^{-1}$ deve possuir um ponto fixo em J .

Portanto, $cmp(A, B) = f_A \circ f_B^{-1}$ leva I em si mesmo e, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, segue que $cmp(A, B)$ possui ponto fixo em I . Um raciocínio análogo mostra que $cmp(A, B)$ possui ponto fixo no interior de J . Então $cmp(A, B)$ é hiperbólica e seu eixo é a geodésica completa ligando esses pontos fixos, a qual separa fracamente A de B . A direção da translação ao longo do eixo vai do intervalo J para o intervalo I , pois a isometria f_A leva I em si mesmo. Logo, pela nossa escolha de I e J , temos uma translação para a esquerda vista a partir de A . Portanto, concluímos que a aplicação E que construímos é, na verdade, uma aplicação de terremoto à esquerda.

Neste momento, é imprescindível observarmos que, para o caso em que f não possua pontos fixos, teremos uma laminação $\lambda = \emptyset$ e, assim, basta obtermos uma isometria E que coincida com f restrita a S_{∞}^1 .

A unicidade parte do teorema principal de forma fácil. Suponhamos que E' seja qualquer terremoto com os mesmos valores limites em S_{∞}^1 da aplicação de terremoto

E construído anteriormente. Se A for um *stratum* qualquer de E' , então a composta $h = \gamma \circ E'$ de E' por uma isometria a qual torna h a identidade sobre A age como um XL -homeomorfismo sobre S_{∞}^1 , com dois ou mais pontos fixos. Dessa forma, A é um *stratum* de E e os dois terremotos à esquerda coincidem sobre A , a menos que esta seja uma folha na qual eles sejam descontínuos. \square

Corolário 2.1.12 *Quaisquer duas estruturas hiperbólicas relativas contínuas sobre $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$ diferem por um único terremoto à direita, exceto sobre folhas onde o terremoto possui descontinuidades.*

O corolário segue imediatamente do teorema, bastando inverter orientação.

Exemplo 2.1.13 (Terremoto à direita)

Dada uma aplicação do círculo nele mesmo, o teorema 2.1.6 nos dá um procedimento razoavelmente construtivo para encontrarmos um terremoto à esquerda com dados valores limites.

Para ilustrarmos, vamos considerar uma aplicação de terremoto à esquerda elementar L o qual desloca por uma distância d ao longo de uma falha l e vamos encontrar o terremoto à direita correspondente.

Consideremos p um ponto sobre l e escolhamos coordenadas tais que p seja o centro de um disco. Existe um XL -homeomorfismo h nas co-classes de L o qual age como uma transformação hiperbólica que move em direções opostas, de uma distância $\frac{d}{2}$, os lados de l . Se h for composto por uma rotação adequada, obteremos um XD -homeomorfismo g (*extreme right homeomorphism*). Os pontos fixos por g não podem estar nos pontos finais de l , então g é diferenciável em seus pontos fixos. Podemos nos convencer, através da figura 2.8, que a derivada de um XL -homeomorfismo (quando existir) tem que ser 1.

Uma pequena reflexão mostra que o *stratum* contendo p é uma folha. Ele pode ser construído desenhando as duas retas perpendiculares a l a uma distância $d/4$ em cada lado de p , a folha é uma das retas diagonais m conectando seus pontos finais em S_{∞}^1 . A aplicação de terremoto à direita R correspondente a L tem como sua laminação o conjunto de todas as retas que encontram l com o mesmo ângulo α que m faz com l . R age como

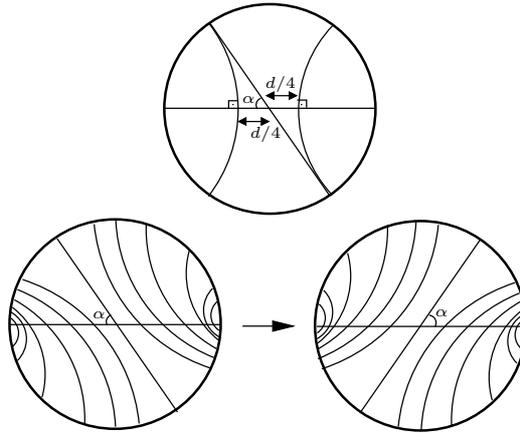


Figura 2.8: Terremoto

a identidade sobre l e leva cada folha de sua laminação na folha que encontra l no mesmo ponto com o complementar do ângulo α .

Existem outras aplicações $f_{\alpha,\beta}$ as quais podem ser descritas de forma similar, agindo como identidade sobre l e enviando a folheação por retas que encontram l com ângulo α para a folheação por retas que encontram l com ângulo β . Essas não são aplicações de terremotos, exceto quando α e β forem ângulos complementares. A razão intuitiva é que o espaçamento entre as folhas da folheação não é preservado, exceto quando α e β forem ângulos complementares. A parte da definição que é violada é que o eixo da isometria de comparação não pode encontrar o *stratum* que está sendo comparado.

Um procedimento similar serve para encontrar a aplicação de terremoto à direita correspondente a qualquer terremoto à esquerda simples. As folhas da laminação do terremoto à direita dividem-se em um número finito de grupos. As folhas em qualquer grupo fazem um ângulo constante com a reta a qual é o eixo da isometria de comparação entre duas *strata* do terremoto à esquerda. Se há, ou não, um grupo de folhas para uma dada isometria de comparação e, em caso afirmativo, quão grande ele é, depende da quantidade de deslocamentos ao longo das falhas do terremoto à esquerda e do espaçamento entre as folhas.

2.2 Terremotos em superfícies hiperbólicas

O teorema do terremoto se estende, sem dificuldades, para superfícies hiperbólicas gerais, mesmo para superfícies de gênero infinito ou com muitos fins. Para construirmos essa generalização, precisamos estender as definições.

Definição 2.2.1 *Uma aplicação de terremoto à esquerda entre duas superfícies é uma bijeção entre as superfícies, juntamente com um levantamento a uma aplicação entre os recobrimentos universais, a qual seja uma aplicação de terremoto à esquerda. Uma aplicação de terremoto à direita é definida similarmente.*

Se existir uma folha fechada na laminação do terremoto sobre a superfície, então a aplicação entre as superfícies não determina o levantamento: existirá um número infinito de levantamentos distintos, diferindo por *twists* (torções) ao longo das geodésicas, que determinariam diferentes terremotos, apesar do mapa físico ser o mesmo. Devido a estes exemplos, é útil ressaltar que o levantamento está incluso como parte dos dados (por isso, uma aplicação terremoto determina uma classe de homotopia bem definida de aplicações contínuas).

Definição 2.2.2 *Seja M uma superfície hiperbólica completa. O alargamento Fuchsiano de M é definido por $\overline{M} = (\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup \Omega) / \pi_1(M)$, onde Ω é o domínio de descontinuidades de $\pi_1(M^2)$ quando este age sobre o círculo no infinito. \overline{M} é uma superfície com bordo.*

É interessante observarmos que, quando M for uma superfície compacta, o conjunto de descontinuidades $\Omega = \emptyset$. Assim, $\overline{M} = M$. No caso em que M não seja uma superfície compacta, o alargamento Fuchsiano funciona como uma compactificação de M , de forma que o teorema principal deste texto poderá ser interpretado, inclusive, no contexto de superfícies completas.

Estruturas hiperbólicas relativas estão definidas sobre $(M, \partial\overline{M})$ exatamente como para $(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2, S_{\infty}^1)$. Uma estrutura hiperbólica relativa sobre $(M, \partial\overline{M})$ é uma classe de equivalência de métricas hiperbólicas sobre M , onde $\rho_1 \sim \rho_2$ quando existir homeomorfismo $f : (M, \rho_1) \rightarrow (M, \rho_2)$ tal que:

1. $f \cong id$, onde $id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade;

2. f se estenda continuamente a um homeomorfismo $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ isotópico à identidade que coincida com a identidade $id : \partial\bar{M} \rightarrow \partial\bar{M}$.

Uma estrutura hiperbólica relativa M_1 sobre \bar{M} é dita contínua quando existir uma métrica representante de sua classe de equivalência tal que a aplicação identidade entre M_1 e a estrutura hiperbólica usual de M se estenda continuamente a um homeomorfismo contínuo de $\partial\bar{M}$ para $\partial\bar{M}_1$.

O significado do alargamento Fuchsiano de uma superfície hiperbólica completa se dá através de sua estreita relação com a compactificação do plano hiperbólico:

Proposição 2.2.3 (Continuidade no infinito) *Se $h : M_1 \rightarrow M_2$ for um homeomorfismo entre superfícies hiperbólicas e $\tilde{h} : \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ for um levantamento de h para seus recobrimentos universais, então h se estende a uma aplicação contínua $\bar{h} : \bar{M}_1 \rightarrow \bar{M}_2$ se, e somente se, \tilde{h} se estender a uma aplicação contínua $\tilde{h} : \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$.*

Demonstração: (2.2.3) Se \tilde{h} se estende continuamente para $\tilde{h} : \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2}$, uma extensão contínua de h é construída diretamente como $\tilde{h}|_{(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 \cup \Omega)}$ módulo $\pi_1(M_1)$.

Reciprocamente, suponha que \bar{h} seja uma extensão contínua de h . Uma base de vizinhanças do círculo no infinito para \bar{M}_2 pode ser formada usando dois tipos de conjuntos: semi-planos limitados por eixos de elementos hiperbólicos e semi-planos limitados por retas as quais tenham ambos os pontos finais (ou fins) em Ω . Na verdade, o primeiro tipo de conjunto é suficiente se $\Omega = \emptyset$ e o segundo tipo é suficiente caso contrário. Como uma função monótona deixa de ser injetiva somente sobre um número enumerável de intervalos, então todas, exceto um conjunto enumerável de arcos com os pontos finais em Ω , têm pré-imagem que convergem em ambos os fins e, assim, são suficientes para formar uma base de vizinhanças.

Para qualquer ponto p sobre o círculo no infinito para \bar{M}_1 , existe um único ponto q sobre o círculo no infinito para \bar{M}_2 tal que uma base de vizinhanças para p é levada a uma família de conjuntos co-final numa base de vizinhanças para q . Isso significa que existe uma única extensão contínua de \tilde{h} . \square

Corolário 2.2.4 (Terremotos sobre superfícies) *Seja M uma superfície hiperbólica completa. Se N_1 e N_2 forem duas estruturas hiperbólicas relativas contínuas sobre $(M, \partial\bar{M})$, então existe um terremoto à esquerda entre $(N_1, \partial\bar{M})$ e $(N_2, \partial\bar{M})$.*

Demonstração: (2.2.4) Como existe um homeomorfismo entre os alargamentos Fuchsianos, pela proposição 2.2.3, existe um homeomorfismo entre os recobrimentos universais compactificados. Pelo teorema 2.1.6 (geologia é transitiva), existe um terremoto entre os recobrimentos universais. O terremoto pode ser tomado equivariante com respeito à ação do grupo fundamental de M , isso se as escolhas forem feitas consistentemente em suas descontinuidades. Logo, temos induzida uma aplicação de terremoto entre as superfícies.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Abikoff, William. *The real analytic theory of Teichmüller space*. Lecture Notes in Mathematics 820. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [2] Beardon, Alan F. *The geometry of discrete groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] Buser, Peter. *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Birkhäuser. Boston, 1992.
- [4] Canary, R. D. Epstein, D. B. A. Green, P. *Notes on notes of Thurston*. Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984), 3–92. London Mathematical Society. Lecture Note Series 111, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [5] Casson, Andrew J. Bleiler, Steven A. *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*. London Mathematical Society. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] Felipe, Bruno Z. *Dissertação de Mestrado: Coordenadas do espaço de Teichmüller*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.
- [7] Gardiner, Frederick P. *Teichmüller Theory and Quadratic Differentials*. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [8] Jost, Jürgen. *Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics*. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [9] Katok, Svetlana. *Fuchsian Groups*. Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press, 1992.

-
- [10] Lehto, Olli. *Univalente Functions and Teichmüller Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [11] Lima, Elon Lages. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. 2ª edição. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1998.
- [12] Maskit, B. *Kleinian groups*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [13] Sepälä, Mika. Sorvali, Tuomas. *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces*. North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 1992.
- [14] Soares, Márcio G. *Cálculo em uma variável complexa*. 2ª edição. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [15] Souza, Gustavo H. C. *Dissertação de Mestrado: Estruturas hiperbólicas em variedades tridimensionais compactas que fibram sobre o círculo*. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- [16] Thurston, William P. *Earthquakes in two-dimensional hyperbolic geometry*. Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984), 91–112. London Mathematical Society Lecture Note Series 112, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [17] Thurston, William P. *Three-dimensional geometry and topology*. Volume 1. Princeton University Press, Princeton, 1997.