Existência de Soluções Radiais Positivas para o p-Laplaciano na Bola

Eduardo Rodrigues Rabelo[1]
Hamilton Prado Bueno (Orientador)
Grey Ercole (Co-Orientador)
Universidade Federal De Minas Gerais - UFMG
Departamento de Matemática
Dissertação de Mestrado

20 de maio de 2008

[1]edurora@ig.com.br

“Ninguém quer saber o que fomos,
o que possuíamos,
que cargo ocupávamos no mundo;
o que conta é a luz
que cada um já tenha conseguido
fazer brilhar em si mesmo.”
(Chico Xavier),

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida e por todas as bênçãos que me concedeu.

Aos meus pais, Mário Luiz Rodrigues Rabelo e Maria Imaculada de Oliveira Rabelo, que sempre me apoiaram em cada etapa da minha vida, me ajudando e me incentivando em tudo.

À minha namorada, Maria Antônia, que sempre esteve ao meu lado durante esta jornada e que tantas coisas deixamos de fazer para que eu estudasse.

Aos meus orientadores, Hamilton Prado Bueno e Grey Ercole, pela paciência, dedicação, companheirismo e principalmente pelos puxões de orelha nas horas merecidas.

Aos professores, Hélder Candido Rodrigues e Armando Gil Magalhães Neves, pela amizade, pelas horas de bate-papo e por todas as horas de trabalho que perderam me ajudando a preparar minhas apresentações.

Agradeço também a todos os professores do Departamento de Matemática da UFMG que de certa forma contribuíram para o meu crescimento.

Por último agradeço a todos os colegas de graduação e mestrado pela convivência e amizade durante todo o curso.

Sumário

Introdução

Neste trabalho vamos apresentar um resultado de existência e localização de soluções radiais positivas para dois problemas de Dirichlet. No primeiro capítulo, discutiremos o problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\Delta_p u = & q(|x|)f(u), & x \in B_1, \\ u(x) = & 0, & x \in \partial B_1, \end{array} \right. \tag{1}$$

em que:

- $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$;
- $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, $p > 1$;
- as funções $q : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Já, no Capítulo 2, trocaremos a função não-linear f por uma outra função não-linear, g, a qual é dependente do gradiente. Ou seja, discutiremos o seguinte problema de valor de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{rll} -\Delta_p u & = q(|x|)g(|\nabla u|), & x \in B_1, \\ u(x) & = 0, & x \in \partial B_1. \end{array} \right. \tag{2}$$

em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Em ambos os casos, o resultado que estudaremos é obtido como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Schauder e não requer nenhuma condição sobre o comportamento das funções não-lineares f e g no zero ou no infinito, diferentemente do que normalmente é visto na literatura, [10]. O método utilizado neste trabalho baseia-se naquele encontrado nos artigos [4] e [5]. Mostraremos que, cada vez que o gráfico da função não-linear f passa por uma região apropriada, existe pelo menos uma solução radial positiva para (1). Similarmente, se a função não-linear g passar por uma região apropriada, existirá ao menos uma solução radial positiva para (2).

Tanto no Capítulo 1, como no Capítulo 2, exibiremos um operador T, cujos pontos fixos nos fornecem as soluções radiais positivas supra citadas. Para garantir a existência destes pontos fixos utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, exposto no Apêndice C.

Finalmente, nos apêndices apresentaremos diversas definições e resultados básicos utilizados no trabalho. Dentre eles, os teoremas da Convergência Dominada e o de Arzelá-Ascoli.

Capítulo 1

Existência e Localização de Soluções Radiais Positivas para o Problema de Dirichlet na Bola

1.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo provaremos um resultado de existência e localização de soluções radiais positivas para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u = & q(|x|)f(u), \quad x \in B_1, \\ u(x) = & 0, \qquad\qquad x \in \partial B_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ e as funções $q : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Abordaremos o problema de Dirichlet (1.1) em seu sentido clássico; assim, suas soluções radiais têm a forma $u(r) = u(|x|)$, em que $u \in \mathbb{C}^1(B_1; \mathbb{R}) \cap \mathbb{C}(\overline{B_1}; \mathbb{R})$ é tal que $|u'|^{p-2}u' \in \mathbb{C}^1(B_1; \mathbb{R})$ e u satisfaz o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{n-1}) = & -r^{n-1}q(r)f(u(r)), \quad 0 < r < 1 \\ u(1) = & 0 = u'(0). \end{cases} \tag{1.2}$$

A correspondência entre os problemas (1.1) e (1.2) encontra-se demonstrada no Apêndice A.

Assumimos que a função q não seja identicamente nula em qualquer subintervalo de $[0, 1]$. Essa exigência será necessária para que a solução de (1.2) exista, como veremos posteriormente.

Nosso objetivo é mostrar que existirá pelo menos uma solução radial positiva para o problema de valor de fronteira (1.1). Tal solução radial será obtida como ponto fixo do operador $T : X \longrightarrow X$ definido por

$$(Tu)(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)f(u(s))ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \tag{1.3}$$

em que $u \in X$, $r \in [0,1]$ e $X = \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$ é o espaço de Banach das funções contínuas em $[0,1]$, com a norma do sup.

O operador T pode ser obtido de (1.2) por integração, de modo que os pontos fixos de T são soluções de (1.2). A demonstração desta afirmação encontra-se no Apêndice B.

Uma vez que as soluções radiais positivas do problema de valor de fronteira (1.1) são pontos fixos do operador T, definido por (1.3), utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para provar a existência de pelo menos um ponto fixo positivo.

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder) *Sejam X um espaço de Banach e $Y \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo. Se $f : Y \to Y$ for uma aplicação compacta, então f possui um ponto fixo.*

Esse resultado está demonstrado no Apêndice C.

1.2 Hipóteses sobre a não-linearidade f

Para que possamos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder precisamos, portanto, definir um conjunto Y não-vazio, limitado, fechado e convexo, o qual é invariante pelo operador T.

Nossa apresentação da solução do problema (1.3) será heurística. Assim, tentaremos obter hipóteses adequadas sobre a função f para que possamos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Essa apresentação heurística ficará bastante evidenciada quando da definição do conjunto Y, bem como da obtenção de condições que assegurem que $T(Y) \subset Y$.

Inicialmente, vamos considerar Y como sendo o subconjunto do espaço de Banach $X = \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$ das funções contínuas em $[0,1]$ com a norma do supremo dado por:

$$Y = \{u \in X : \Psi_\delta(r) \leq u(r) \leq \Phi_M(r)\}.$$

A grande dificuldade do nosso trabalho consiste em definir adequadamente as funções contínuas $\Phi_M(r)$ e $\Psi_\delta(r) \geq 0$ de modo a deixar o conjunto Y invariante pelo operador T. Observe que, se tivermos $f(0) = 0$, então $u \equiv 0$ será uma solução trivial de (1.1). Como não queremos impor $f(0) > 0$ para evitar a solução trivial, devemos escolher adequadamente a função Ψ_δ de modo que $u \equiv 0$ não pertença ao conjunto Y. Vamos encontrar hipóteses que permitam definir Ψ_δ adequadamente.

Nossas hipóteses sobre a não-linearidade f são

$$f(u) \geq k_2 \delta^{p-1}\,, \quad \delta \leq u \leq M, \tag{1.4}$$

(em que δ é uma constante positiva e k_2 será definido posteriormente) e

$$0 \leq f(u) \leq k_1 M^{p-1}\,, \quad 0 \leq u \leq M, \tag{1.5}$$

(em que M é uma constante positiva satisfazendo $\delta < M$ e k_1 será definido futuramente). Estamos denotando por u simplesmente a variável da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Discutiremos mais adiante a razão pela qual fizemos tais hipóteses sobre a função não-linear f.

Geometricamente, as hipóteses feitas sobre a função f correspondem à exigência de que seu gráfico passe por um "túnel" Γ dado por

$$\Gamma = \{(u,v) : k_2\delta^{p-1} \leq v \leq k_1 M^{p-1}, \delta \leq u \leq M\},$$

e permaneça abaixo da reta $v \equiv k_1 M^{p-1}, 0 \leq u \leq M$. (Veja a Figura (1.1).)

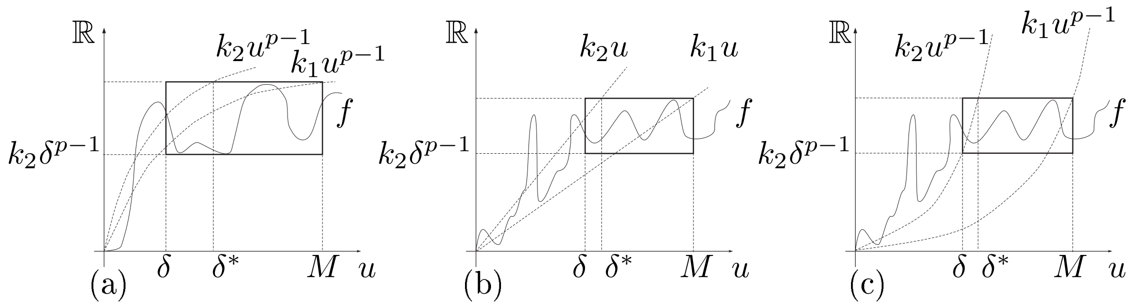

Figura 1.1: A não-linearidade f passa por um "túnel" Γ. A figura (a) mostra o caso $p < 2$, (b) o caso $p = 2$ e (c) o caso $p > 2$. Em todos os casos, estamos admitindo que $k_1 < k_2$.

Para a construção de um túnel como Γ – supondo k_1 e k_2 definidos e $k_1 < k_2$ – fixamos $M > 0$ arbitrário e determinamos a imagem de M pela função $k_1 M^{p-1}$. Dessa forma, obtemos a parte superior do túnel. Para a parte inferior, determinamos a imagem de $\delta < \delta^* := \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} M$ pela função $k_2\delta^{p-1}$.

Mostraremos que existirá pelo menos uma solução radial positiva para o problema (1.1), toda vez que o gráfico da função f passar por um túnel como Γ. Além disso, esta solução positiva é limitada por duas funções contínuas não negativas, a saber Ψ_δ e Φ_M.

Mostraremos também que, se $f(u) > 0$ para todo $0 \leq u \leq M$, então a não-linearidade f sempre passará por um túnel Γ.

Note que todas as hipóteses que fizemos até agora são vagas e somente passarão a fazer sentido após definirmos coerentemente as constantes positivas k_1, k_2 e δ e também as funções contínuas $\Psi_\delta(r)$ e $\Phi_M(r)$.

1.3 O Teorema de Existência e Localização

Denotando $v(r) = (Tu)(r)$, a igualdade (1.3) é escrita como

$$v(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

em que $u \in Y$, $r \in [0,1]$.

Nosso objetivo agora é encontrar funções Ψ_δ e Φ_M que definam Y, de modo que $v(r) \in Y$.

1.3.1 A função Φ_M

Começamos nosso estudo tentando encontrar a função contínua Φ_M, a qual limita superiormente nosso conjunto Y.

Assim, supondo que $u \in Y$ e que $\Phi_M \leq M$, decorre da relação (1.5) que

$$\begin{aligned} 0 \leq v(r) &\leq \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) k_1 M^{p-1} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \int_r^1 \left(k_1 M^{p-1} \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \end{aligned}$$

Agora, se definirmos $\Phi_M(r)$ por

$$\Phi_M(r) = M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

teremos $0 \leq v(r) \leq \Phi_M(r)$. Note que ainda não definimos a constante k_1. Precisamos fazê-lo de modo a garantir que $u(r) \leq M$, pois (1.5) – utilizada acima – faz uso dessa hipótese.

Para termos $\Phi_M(r) \leq M$ (o que garante $u(r) \leq M$), basta definirmos a constante k_1 por

$$k_1 = \left[\int_0^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \right]^{-(p-1)}. \tag{1.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi_M(r) &= M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\leq M \int_0^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&= M k_1^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.
\end{aligned}$$

Mas, como

$$k_1^{\frac{-1}{p-1}} = \int_0^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

verificamos que

$$\Phi_M(r) \leq M k_1^{\frac{1}{p-1}} k_1^{\frac{-1}{p-1}} = M.$$

Note que, com a definição de k_1, a função contínua $\Phi_M(r)$ está bem definida e, como consequência, nosso conjunto Y está bem definido superiormente.

Percebemos que, se tivéssemos suposto que $0 \leq f(u) \leq k_1 L$, ao invés de (1.5), obteríamos $L^{\frac{1}{p-1}} = M$, ou seja, $L = M^{p-1}$, justificando assim a hipótese (1.5).

1.3.2 A função Ψ_δ

Agora, ao cotar inferiormente a função $v(r)$, vamos definir uma função contínua Ψ_δ que garanta que $u \equiv 0$ não pertence ao conjunto Y.

Vamos utilizar a relação (1.4), supondo que $\Psi_\delta(r) \geq \delta$. Nesse caso, como $u \in Y$ teríamos $u(r) \geq \Psi_\delta(r) \geq \delta$ para $r \in [0, \alpha]$ e, portanto, de (1.4):

$$\begin{aligned}
v(r) &= \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\geq \int_r^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) k_2 \delta^{p-1} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\
&\geq \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \int_\alpha^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Observe que devido à condição de fronteira $u'(0) = 0$ em (1.2) é natural esperar que $u(0) > 0$, uma vez que desejamos encontrar uma solução positiva para o problema. Assim, para r em um intervalo da forma $[0, \alpha]$ podemos esperar que $u(r) \geq \delta$ para algum $\delta > 0$.

Voltando à relação (1.7), para tratarmos da expressão com a integral dupla, definimos, para $0 \leq r \leq 1$, a função auxiliar

$$\psi(r) = \int_r^1 \left(\int_0^r \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \tag{1.8}$$

Percebemos que a função $\psi(r)$, assim definida, além de contínua, é não-negativa, não-identicamente nula e que $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Portanto, existe um ponto $\alpha \in (0, 1)$ no qual a função ψ atinge o seu máximo.

Assim, reescrevendo (1.7), para $0 \leq r \leq \alpha$, temos

$$v(r) \geq \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \psi(\alpha).$$

Definindo

$$\begin{aligned} k_2 &= [\psi(\alpha)]^{-(p-1)} && (1.9)\\ &= \left[\int_\alpha^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \right]^{-(p-1)}, && (1.10) \end{aligned}$$

mostramos a desigualdade $v(r) \geq \delta$ para todo $0 \leq r \leq \alpha$. Assim, é natural definir $\Psi_\delta(r) \equiv \delta$ para todo $0 \leq r \leq \alpha$. Note que, dessa maneira, já evitamos que $u \equiv 0$ esteja no conjunto Y. Além disso, toda a nossa análise é consistente para os valores de r tais que $0 \leq r \leq \alpha$.

Precisamos agora completar a definição da função contínua $\Psi_\delta(r)$ para $\alpha < r \leq 1$, de modo a obtermos $v(r) \geq \Psi_\delta(r)$. Para isso, basta voltarmos à definição de $v(r)$. Para $\alpha < r \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} v(r) &= \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &\geq \int_r^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) k_2 \delta^{p-1} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. && (1.11) \end{aligned}$$

Comparando com a expressão usada para definir $\Psi_\delta(r)$ para $0 \leq r \leq \alpha$, é natural definir, para $\alpha \leq r \leq 1$,

$$\Psi_\delta(r) = \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \int_r^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Com essa definição (uma vez que $u \geq \Psi_\delta$), a desigualdade (1.11) nos garante que

$$v(r) \geq \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \int_r^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = \Psi_\delta(r)$$

de modo que a definição completa de $\Psi(r)$ é dada por

$$\Psi_\delta(r) = \begin{cases} \delta, & 0 \leq r \leq \alpha, \\ \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \int_r^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, & \alpha < r \leq 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

A função $\Psi_\delta(r)$ é contínua (pois $\Psi_\delta(\alpha) = \delta k_2^{\frac{1}{p-1}} \psi(\alpha) = \delta$) e $v(r) \geq \Psi_\delta(r)$ para todo $r \in [0, 1]$.

1.3.3 Compatibilidade das definições e hipóteses

Precisamos agora mostrar que todas as definições dadas são coerentes com as hipóteses feitas. Por exemplo, para que o "túnel" faça sentido, devemos provar que $k_1 < k_2$; e, para que o conjunto Y esteja bem definido, devemos ter $\Psi_\delta(r) \leq \Phi_M(r)$. Satisfeitas essas desigualdades, precisamos definir a constante positiva δ, necessária para que a hipótese (1.4) faça sentido.

Proposição 1 *As constantes k_1 e k_2 satisfazem $k_1 < k_2$.*

Demonstração: Basta notar que

$$\psi(\alpha) < \int_0^1 \left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta < \int_0^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Tendo em vista as definições (1.9) e (1.6), concluímos que

$$\left(\frac{1}{k_2}\right)^{1/(p-1)} < \left(\frac{1}{k_1}\right)^{1/(p-1)},$$

e, portanto, $k_1 < k_2$. ∎

Utilizando a proposição anterior, basta definirmos nossa constante positiva δ satisfazendo a relação $\delta < \delta^* := \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{p-1}} M$, e a mesma satisfará $\delta < M$.

Corolário 1 $k_2 \delta^{p-1} < k_1 M^{p-1}$.

Prova: Como $k_1 < k_2$, concluímos que

$$\delta < \delta^* := \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/(p-1)} M,$$

e, portanto, $k_2\delta^{p-1} < k_1 M^{p-1}$. $\blacksquare$

Vale a pena mencionar que a condição $k_2\delta^{p-1} < k_1 M^{p-1}$ é a condição de existência de um "túnel" como Γ. (Note que se esta expressão fosse uma igualdade o túnel seria um segmento de reta e consequentemente $f(u)$ precisaria ser constante no intervalo $[\delta, M]$).

Observação 1: Observe que, se $0 < f(u) \leq k_1 M^{p-1}$ para $0 \leq u \leq M$, então, definindo a constante c por $c = \min_{0\leq u\leq M} f(u)$, a condição de existência de um túnel Γ sempre será verificada. Ou seja, a não-linearidade f sempre passará por um túnel como Γ.

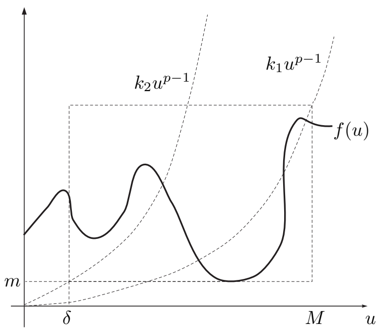

Figura 1.2: Se $0 < f(u) \leq k_1 M^{p-1}$ para $0 \leq u \leq M$, definindo $\delta = (m/k_2)^{1/(p-1)}$, em que $m = \min_{0\leq u\leq M} f(u)$, a não-linearidade f sempre passa por um "túnel" Γ. A figura ilustra o caso $p > 2$.

Proposição 2 *Vale a desigualdade* $\Psi_\delta(r) < \Phi_M(r), \;\; 0 \leq r < 1.$

Demonstração: É óbvio que, para $r = 1$, temos $\Psi_\delta(1) = \Phi_M(1) = 0$. Agora, para $0 \leq r < 1$, utilizamos o Corolário 1 e obtemos

$$\delta \int_r^1 \left(k_2 \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)} d\theta < M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

E portanto, para $\alpha \leq r < 1$, temos $\Psi_\delta(r) < \Phi_M(r)$, uma vez que

$$M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)} d\theta \leq \Phi_M(r).$$

Além disso, para $0 \leq r \leq \alpha$, temos que $\Psi_\delta(r) \equiv \Psi_\delta(\alpha) < \Phi_M(\alpha) \leq \Phi_M(r)$, pois

$$M \int_\alpha^1 \left(k_1 \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \leq M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\alpha \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta$$

neste intervalo. ∎

Note que, se tivéssemos suposto que $f(u) \geq k_2 L$, ao invés de (1.4), obteríamos $L^{\frac{1}{p-1}} = \delta$, ou seja, $L = \delta^{p-1}$, justificando assim a hipótese (1.4).

Após todos estes passos, provamos o seguinte resultado:

Lema 1 *O operador T, definido por* (1.3), *deixa invariante o conjunto Y, em que*

$$Y = \{u \in X : \Psi_\delta(r) \leq u(r) \leq \Phi_M(r)\},$$

ou seja, $T(Y) \subset Y$.

Lema 2 *O conjunto Y é não-vazio, limitado, fechado e convexo.*

Demonstração: Inicialmente, Y é não-vazio, pois $\Psi_\delta(r)$ e $\Phi_M(r)$ estão em Y. Além disso, Y é limitado pela proposição 2, uma vez que, se $u \in Y$, então $0 \leq u \leq \Phi_M \leq M$.

Afirmamos que Y é fechado. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência em Y uniformemente convergente para u em X. Então,

$$\Psi_\delta(r) \leq \lim_{n\to\infty} u_n(r) = u(r) \leq \Phi_M(r)\,,$$

provando o afirmado.

Agora, afirmamos que Y é convexo. De fato, dadas duas funções u e w em Y, temos que

$$0 \leq (1-t)u(r) + tw(r) \leq (1-t)\Phi_M(r) + t\Phi_M(r) = \Phi_M(r)\,,$$

e

$$(1-t)u(r) + tw(r) \geq (1-t)\Psi_\delta(r) + t\Psi_\delta(r) = \Psi_\delta(r)\,,$$

de onde decorre a afirmação. ∎

Lema 3 *O operador T, definido por* (1.3), *é compacto em Y.*

Demonstração: De acordo com a definição (3) do apêndice C, precisamos provar que:

(i) $T(Y)$ é relativamente compacto;

(ii) T é um operador contínuo.

Provaremos inicialmente (i). Para tal, consideramos $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em Y. Definimos $K = sup_{|w|\leq M}|f(w)|$ e $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}} = Tu_m$. Como,

$$v_m(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds\right)^{1/(p-1)} d\theta\,, \quad r \in [0,1]\,,$$

obtemos,

$$|v_m(r)| \leq K^{\frac{1}{p-1}} \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta\,, \quad r \in [0,1]\,.$$

Agora, consideraremos a sequência $v_m'(r)$, dada por

$$v_m'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Para tal sequência, uma vez que $\frac{s}{r} < 1$, obtemos

$$|v_m'(r)|^{p-1} \leq K\int_0^1 \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds \leq \int_0^1 q(s)ds.$$

Uma vez que $v_m'(r)$ é contínua e $v_m'(0) = 0$ (veja o Apêndice B), mostramos que $|v_m'(r)|$ é uniformemente limitada.

Portanto, como ambas $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{v_m'\}_{m\in\mathbb{N}}$ são sequências uniformemente limitadas, decorre do Teorema de Arzelá-Ascoli que existe uma subsequência $\{v_{m_j}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente para uma função $v \in Y$ em $[0,1]$. Isto prova que $T(Y)$ é relativamente compacto.

(ii) Para provar a continuidade do operador T, consideremos a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, a qual converge uniformemente para u em $[0,1]$.

Pelo item (i), sabemos que $T(Y)$ é relativamente compacto e, portanto, toda subsequência de $\{Tu_m\}$ possui subsequência convergente. Isto é, dada uma subsequência $\{Tu_{m_k}\}_{m_k\in\mathbb{N}}$ de $\{Tu_m\}$, existe uma subsequência $\{Tu_{m_k'}\}_{m_k'\in\mathbb{N}}$ de $\{Tu_{m_k}\}$ tal que $\{Tu_{m_k'}\}$ converge uniformemente para v. Vamos denotar essa subsequência por v_m.

Vamos verificar que $v = Tu$, de onde decorre a continuidade de T, de acordo com o Lema 9 do Apêndice C. Para ver isso, voltamos a expressão

$$v_m'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Note que o integrando na expressão acima é limitado por uma função integrável, pois

$$\left| \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s)) \right| \leq |q(s)f(u_m(s))| \leq Kq(s).$$

Além disso, como a função f é contínua e a convergência da sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniforme, temos para cada s fixado que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s)) \right) = \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u(s)).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right) &= \int_0^r \lim_{m\to\infty} \left(\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right) \\ &= \int_0^r \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)f(u(s))ds, \end{aligned}$$

e, portanto

$$\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \to \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u(s))ds,$$

quando $m \to \infty$.

Observe também que a integral $\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u(s))ds \right)^{1/(p-1)}$ é limitada para todo r, pois

$$\begin{aligned} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right)^{1/(p-1)} &\leq K^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} \\ &\leq K^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^r q(s)ds \right)^{1/(p-1)} < \infty. \end{aligned}$$

Além disso, para cada s fixado, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right)^{1/(p-1)} = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)f(u(s))ds \right)^{1/(p-1)}.$$

Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada ficamos com

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to\infty} \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = \\ &\qquad = \int_r^1 \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)f(u_m(s))ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta} \right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = Tu.$$

Consequentemente provamos que $Tu_m \to Tu$ pontualmente. Assim, como toda subsequência de Tu possui subsequência convergindo para v, decorre do Corolário 9, (ver Apêndice C), que $v = Tu$ e portanto T é contínuo. ■

Tendo em vista todos os resultados anteriores, resulta do Teorema do Ponto Fixo de Schauder o seguinte teorema:

Teorema 2 *Sejam* $q : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *e* f *funções contínuas, com* (1.4) *e* (1.5) *satisfeitas. Então, existe pelo menos uma solução radial positiva* u *para* (1.1), *com* $\Psi_\delta(r) \leq u(r) \leq \Phi_M(r)$ *se* $0 \leq r \leq 1$.

Observação 2: Notamos que, além de garantir a existência de soluções radiais para o problema (1.1), o teorema também afirma que elas se encontram entre $\Psi_\delta(r)$ e $\Phi_M(r)$. Se $0 < f(u) \leq k_1 M^{p-1}$ para $0 \leq u \leq M$ com $u \in \mathbb{R}$, então a existência de uma solução positiva para o problema (1.1) é garantida ao se definir o conjunto Y por

$$Y = \{u \in X : 0 \leq u \leq \Phi_M\}.$$

Nesse caso, o resultado obtido seria mais fraco, uma vez que simplesmente teríamos 0 (zero) como cota inferior para a solução. Como vimos na Observação 1, o método empregado possibilita uma localização muito mais precisa da solução encontrada.

Capítulo 2

O Problema de Dirichlet na Bola com Não-Linearidade Dependente do Gradiente

2.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, utilizaremos o método descrito no capítulo anterior para provar um resultado de existência e localização de soluções radiais positivas para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= q(|x|)g(|\nabla u|), \quad x \in B_1, \\ u(x) &= 0, \qquad\qquad\qquad x \in \partial B_1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Problemas como este tem sido objeto de estudo de diversos autores como por exemplo [10], [1] e [2].

Antes de passarmos ao estudo do problema em questão, gostaria somente de salientar que todo o trabalho exposto neste capítulo não se encontra na literatura da área. Ao longo deste capítulo tentarei, sempre que possível, relacionar a situação descrita com aquela que foi tratada no capítulo 1.

Como estamos interessados em encontrar soluções radiais para o problema (2.1), procuraremos por soluções $u(r)$, as quais satisfazem o seguinte problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{n-1}) &= -r^{n-1}q(r)g(|u'(r)|), \quad 0 < r < 1, \\ u(1) &= 0 = u'(0). \end{cases} \tag{2.2}$$

Para provar a correspondência entre os problemas (2.1) e (2.2) basta utilizamos o Lema 7 do Apêndice A e o fato de que se $r = |x|$, então $|\nabla u(x)| = |u'(r)|$. (Ver o Apêndice C).

Assim como no capítulo anterior, suporemos que $q : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ e g sejam contínuas, com q não identicamente nula em qualquer subintervalo de $[0,1]$.

Nosso objetivo é mostrar que existe pelo menos uma solução radial positiva para o problema de valor de fronteira (2.1). Tal solução radial, $u(r)$, será obtida como ponto fixo de um operador $T : X \to X$, o qual pode ser obtido de (2.2) por integração. Desta forma, nosso operador é definido por

$$(Tu)(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) g(|u'(s)|) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \qquad (2.3)$$

em que $u \in X$, $r \in [0,1]$ e $X = \mathbb{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ é o espaço de Banach das funções $\mathbb{C}^1$ em $[0,1]$, com a norma $\| \cdot \|_1$.

Derivando o operador (2.3), obtemos

$$(Tu)'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) g(|u'(s)|) ds \right)^{1/(p-1)}. \qquad (2.4)$$

Para o operador de ponto fixo T definido por (2.3) temos:

Lema 4 *O operador T, definido por* (2.3)*, é compacto.*

Demonstração: Vamos provar inicialmente que $T(X)$ é relativamente compacto. Sejam $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X e $M > 0$ uma constante positiva tal que $\|u_m\|_1 \le M$. Defina $K = \sup_{t \le M} |g(t)|$ e $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}} = Tu_m$. Logo,

$$v_m(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) g(|u_m'(s)|) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta\,, \quad r \in [0,1]\,.$$

Como $\|u_m\|_1 \le M$, temos $|u_m'| \le M$ e portanto

$$|v_m(r)| \le K^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta\,, \quad r \in [0,1]\,.$$

Uma vez que $\left(\frac{s}{\theta}\right) < 1$ e $0 < \theta \le 1$, encontramos

$$\begin{aligned} |v_m(r)| &\le K^{\frac{1}{p-1}} \int_0^1 \left(\int_0^\theta q(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}} d\theta \\ &\le K^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^1 q(s) ds \right)^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Voltando à expressão (2.4), temos que a sequência $v_m'(r)$ é dada por

$$v_m'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) g(|u_m'(s)|) ds \right)^{1/(p-1)}.$$

Tirando o módulo, elevando ambos os lados a $(p-1)$ e usando a limitação $|u'_m| \leq M$ obtemos

$$|v'_m(r)|^{p-1} \leq K \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds\,, \quad r \in [0,1]\,.$$

Como $\left(\frac{s}{r}\right) < 1$, temos

$$\begin{aligned} |v'_m(r)|^{p-1} &\leq K \int_0^r q(s)ds\,, \\ &\leq K \int_0^1 q(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência equicontínua de funções uniformemente limitadas. Consequentemente decorre do Teorema de Arzelá-Ascoli que existe uma subsequência $\{v_{m_j}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente para a função $v \in X$ em $[0,1]$. Precisamos agora provar a equicontinuidade da sequência $\{v'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e desta forma concluir que existe uma subsequência $\{v'_{m_j}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente para a função $v' \in X$ em $[0,1]$. Isto concluirá a prova de que $T(X)$ é relativamente compacto.

Derivando (2.4) e tirando o módulo, obtemos

$$|v''_m(r)| = \left(\frac{1}{p-1}\right)\left[|v'_m(r)|^{2-p} q(r) g(|u'_m(r)|) + \left(\frac{n-1}{r}\right)|v'_m(r)|\right]. \tag{2.5}$$

Vamos agora tentar provar a limitação de $|v''_m(r)|$. Mas, observe que se $p > 2$, então $2-p$ é negativo e consequentemente o termo $|v'_m(r)|^{2-p}$ se inverte. Por tal motivo, vamos analisar separadamente dois casos: $1 < p \leq 2$ e $p > 2$.

Analisaremos primeiramente o caso $1 < p \leq 2$. Neste caso, provaremos que a expressão que se encontra entre colchetes em (2.5) é limitada.

No caso $1 < p \leq 2$, provaremos inicialmente a limitação da expressão $|v'_m(r)|^{2-p}$ $q(r)g(|u'_m(r)|)$. Uma vez que $|u'_m| \leq M$, ficamos com

$$\begin{aligned} |v'_m(r)|^{2-p} q(r) g(|u'_m(r)|) &= \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) g(|u'_m(s)|) ds\right)^{\frac{2-p}{(p-1)}} q(r) g(|u'_m(r)|) \\ &\leq K \left(\int_0^r q(s) K ds\right)^{\frac{2-p}{(p-1)}} q(r) \\ &\leq K^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^1 q(s) ds\right)^{\frac{2-p}{(p-1)}} q(r) < \infty. \end{aligned}$$

Agora, observe que para provar a limitação de $\left(\frac{n-1}{r}\right)|v'_m(r)|$ só precisamos nos preocupar com o caso $r < \epsilon$. Para $r \geq \epsilon$ temos que $\left(\frac{n-1}{r}\right)$ é limitado e $|v'_m(r)|$ é limitado como já vimos anteriormente. Para o caso $r < \epsilon$ utilizamos L´Hopital e obtemos

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{n-1}{r}\right)|v'_m(r)| = (n-1)\lim_{r\to 0} q(r)g(|u'_m(r)|) < \infty.$$

Vamos agora analisar o caso $p > 2$. Observe que, neste caso, não conseguimos cotar superiormente a expressão $|v'_m(r)|^{2-p}q(r)g(|u'_m(r)|)$, pois $|v'_m(r)|^{2-p}$ se inverte e, desta forma, passamos a obter

$$|v'_m(r)|^{2-p}q(r)g(|u'_m(r)|) \geq K^{\frac{1}{p-1}}\left(\frac{1}{\int_0^1 q(s)ds}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} q(r).$$

Para o caso $p > 2$, vamos provar que $|v'_m(r)|$ é Hölder contínua e, portanto, $|v'_(r)|$ é equicontínua. Para fazer isso, definimos uma função $\lambda(r)$ uniformemente lipschitziana e uma função Hölder contínua $\mu_\alpha(x)$. Decorre então da Proposição 5 do Apêndice C que a composta $\mu_\alpha \circ \lambda(r) = v'(r)$ é Hölder contínua, ou seja, que

$$|v'(r) - v'(s)| \leq K|r-s|^\alpha.$$

Definimos, para $r \in [0,1]$,

$$\lambda(r) = \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds. \tag{2.6}$$

Note que, para todo m e $0 < r \leq 1$, as funções (2.6) são de classe $\mathbb{C}^1$, com derivada dada por

$$\lambda'(r) = \left(\frac{1-n}{r}\right)\lambda(r) + q(r)g(|u'_m(r)|).$$

Pela Regra de L'Hopital,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+}\lambda(r) &= \frac{r^{n-1}q(r)g(u'(r))}{(n-1)r^{n-2}}\\
\lim_{r\to 0^+}\frac{\lambda(r)}{r} &= \frac{r^{n-1}q(r)g(u'(r))}{nr^{n-1}} = \frac{q(0)g(u'(0))}{n}\\
\lim_{r\to 0^+}\lambda'(r) &= (1-n)\frac{q(0)g(u'(0))}{n} + q(0)g(u'(0)) = \frac{q(0)g(u'(0))}{n},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

mostrando que $\lambda(r)$ é de classe $\mathbb{C}^1$ em $[0,1]$. Assim, existe $K > 0$ tal que

$$|\lambda(r) - \lambda(s)| \leq K|r-s|.$$

Definimos agora a função $\mu_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ por

$$\mu_\alpha(x) = x^\alpha \tag{2.8}$$

Queremos mostrar que a função μ_α é Hölder contínua:

$$|\mu_\alpha(R) - \mu_\alpha(S)| \leq |R - S|^\alpha, \quad \forall R, S \in \mathbb{R}_+. \tag{2.9}$$

Sejam $R, S \in \mathbb{R}_+$. Suponhamos que $R > S$. Então colocando R^α em evidência na expressão $\frac{|R^\alpha - S^\alpha|}{|R-S|^\alpha}$, obtemos

$$\frac{|R^\alpha - S^\alpha|}{|R-S|^\alpha} = \frac{\left|R^\alpha\left(1 - \left(\frac{S}{R}\right)^\alpha\right)\right|}{\left|R\left(1 - \frac{S}{R}\right)\right|^\alpha} = \frac{\left|1 - \left(\frac{S}{R}\right)^\alpha\right|}{\left|1 - \frac{S}{R}\right|^\alpha}.$$

Chamando $T = \left(\frac{R}{S}\right) < 1$, ficamos com

$$\frac{|R^\alpha - S^\alpha|}{|R-S|^\alpha} = \frac{1 - T^\alpha}{(1-T)^\alpha}.$$

Defina para $x \in [0,1]$ a função

$$f(x) = \frac{1 - x^\alpha}{(1-x)^\alpha}.$$

Note que a função f assim definida é contínua em $[0,1)$. Para provar a continuidade em $x = 1$ usamos L´Hopital e obtemos

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{-\alpha(1-x)^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 1}(1-x)^{1-\alpha} = 0.$$

Além disso, f é diferenciável para $(0,1)$ e sua derivada é dada por

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1}(1-x)^\alpha + \alpha(1-x^\alpha)(1-x)^{\alpha-1}}{(1-x)^{2\alpha}}$$

.

Vamos procurar por máximos da função f no intervalo $[0,1]$. Igualando $f'(x) = 0$, obtemos

$$x^{\alpha-1}(1-x)^\alpha = (1-x^\alpha)(1-x)^{\alpha-1},$$

e, como $x \neq 1$, multiplicamos ambos os lados por $(1-x)^{1-\alpha}$ ficando com

$$x^{\alpha-1}(1-x) = 1 - x^\alpha.$$

Como esta igualdade somente é satisfeita para $x = 1$, o máximo da função $f(x)$ encontra-se nos extremos do intervalo $[0,1]$. Desta forma, o máximo de $f(x)$ é $f(0) = 1$ e, portanto, mostramos (2.9).

De acordo com o Teorema de Arzelá-Ascoli, $v'(r)$ é equicontínua. Como a família $v'(r)$ é uniformemente limitada, concluímos que $T(X)$ é relativamente compacto.

Para provar a continuidade do operador T, consideramos a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, a qual converge uniformemente para u em $[0,1]$. Como $T(X)$ é relativamente compacto, toda subsequência de $\{Tu_m\}$ possui subsequência convergente. Isto é, dada uma subsequência $\{Tu_{m_k}\}_{m_k\in\mathbb{N}}$ de $\{Tu_m\}$, existe uma subsequência $\{Tu_{m'_k}\}_{m'_k\in\mathbb{N}}$ de $\{Tu_{m_k}\}$ tal que $\{Tu_{m'_k}\}$ converge uniformemente para v e $\{(Tu)'_{m'_k}\}$ converge para v'. Vamos denotar essa subsequência por v_m.

Para provar a continuidade de T, provaremos que $v = Tu$ e que $v' = (Tu)'$. Para ver isso, voltamos à expressão

$$v'_m(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Note que o integrando na expressão acima é limitado por uma função integrável, pois

$$\left|\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)\right| \leq |q(s)g(|u'_m(s)|)| \leq Kq(s).$$

Além disso, como a função f é contínua e a convergência da sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uniforme, temos para cada s fixado que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)\right) = \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)ds\right) &= \int_0^r \lim_{m\to\infty}\left(\left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)\right)ds \\ &= \int_0^r \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds,\end{aligned}$$

e, portanto

$$\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)ds \to \int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds.$$

Desta forma, provamos que $(Tu_m)' \to (Tu)'$ pontualmente, quando $m \to \infty$.

Observe também que a integral $\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds\right)^{1/(p-1)}$ é limitada para todo r, pois

$$\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'_m(s)|)ds\right)^{1/(p-1)} \leq K^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)}$$

$$\leq K^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^r q(s)ds \right)^{1/(p-1)} < \infty.$$

Além disso, para cada s fixado, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u_m'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)} = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)}.$$

Utilizando novamente o Teorema da Convergência Dominada ficamos com

$$\lim_{m\to\infty} \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)g(|u_m'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta =$$

$$= \int_r^1 \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)g(|u_m'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta$$

$$= \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta = Tu.$$

Consequentemente provamos que $Tu_m \to Tu$ pontualmente. Portanto, como toda subsequência de Tu possui subsequência convergindo para v, decorre do Corolário 9, (ver Apêndice C), que $v = Tu$, $v' = (Tu)'$ e portanto T é contínuo. ■

Durante a demonstração da compacidade do operador T, provamos o seguinte resultado:

Corolário 2 *A solução radial positiva de* (2.1)*, $u(r)$, dada como ponto fixo do operador T definido por (2.3), pertence a $C^2(B_1)$, para $1 < p \leq 2$, e, se $p > 2$, em $C^{1,\alpha}(B_1)$, em que $\alpha = \frac{1}{p-1}$.*

Assim como no capítulo anterior, a ferramenta que utilizaremos para provar a existência de pontos fixos para o operador T, definido por (2.3), os quais são soluções radiais de (2.1), é o conhecido Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

2.2 O Teorema de Existência

Nosso objetivo agora é utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para provar que o operador T, definido em (2.3), possui um ponto fixo.

Inicialmente, precisamos definir um conjunto $Y \subset X = \mathbb{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, que seja não-vazio, limitado, fechado e convexo.

Observe que, para o conjunto Y ser limitado na topologia de X, deve existir uma constante positiva M tal que $\|u\|_1 \leq M$.

Precisamos agora impor sobre g algumas hipóteses, as quais nos permitirão aplicar o referido teorema.

Vamos supor que a função não-linear g satisfaça

$$0 \leq g(t) \leq k_1 M^{p-1}\,, \quad 0 \leq t \leq M, \tag{2.10}$$

em que M é uma constante positiva, k_1 será definido posteriormente e

$$g(0) > 0. \tag{2.11}$$

Esta hipótese garante que $u \equiv 0$ não é solução de (2.1).

Observe que este problema é bem mais simples que o problema discutido no capítulo 1. Uma vez que g satisfaz (2.11), não precisamos nos preocupar em encontrar uma limitação inferior para o conjunto Y, ou seja, mesmo colocando o 0 como limitação inferior, nossa solução neste conjunto Y será não trivial.

Voltando à equação (2.4) e fazendo $v(r) = (Tu)(r)$ e portanto, $v'(r) = (Tu)'(r)$, temos que

$$v'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Tirando o módulo, ficamos com

$$0 \leq |v'(r)| = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds\right)^{1/(p-1)}.$$

Supondo agora que $\|u\|_1 \leq M$ e utilizando as desigualdades (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq |v'(r)| &\leq \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)k_1 M^{p-1}ds\right)^{1/(p-1)} && (2.12)\\ &= M\left(k_1\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)} && (2.13)\\ &= Mk_1^{\frac{1}{p-1}}\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)}. && (2.14)\end{aligned}$$

Observe que a relação (2.10) só estará bem definida após definirmos a constante k_1 e garantir que $|u'(r)| \leq M$. Para definir k_1, precisaremos definir, para $r \in [0,1]$, a seguinte função auxiliar

$$\phi(r) = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds\right)^{1/(p-1)}. \tag{2.15}$$

Note que a função $\phi(r)$ é contínua, não-negativa, não identicamente nula e limitada. Como, $\phi(0) = 0$, existe um ponto $\alpha \in (0,1]$ no qual a função ϕ atinge o seu máximo.

Voltando à desigualdade (2.14), temos que

$$0 \leq |v'(r)| \leq Mk_1^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} = Mk_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(r).$$

Como $\alpha \in (0, 1]$ é ponto de máximo de $\phi(r)$, temos que

$$0 \leq |v'(r)| \leq Mk_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(\alpha).$$

Agora, para obtermos a relação $0 \leq |v'(r)| \leq M$, basta definirmos a constante k_1 por

$$k_1 = [\phi(\alpha)]^{-(p-1)},$$

ou seja,

$$k_1 = \left[\left(\int_0^\alpha \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} \right]^{-(p-1)}.$$

Observe que, após todos estes passos, provamos que nosso conjunto Y está bem definido com respeito à derivada de u. Além disso, o operador T aplica esse conjunto em um conjunto que respeita a mesma cota para u'.

Note que ainda não tratamos da função u na definição do conjunto. Assim, esse conjunto pode não ser limitado e fechado. Agora passamos à função u, que vai ser trabalhada como integral de u'.

Integrando $v'(r)$ e substituindo a condição de contorno $v(1) = 0$, obtemos

$$0 \leq v(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)g(|u'(s)|)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Como $|u'(r)| \leq M$, utilizamos novamente as desigualdades (2.10) e obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq v(r) &\leq \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)k_1 M^{p-1} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= M \int_r^1 k_1^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s)ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \\ &= M \int_r^1 k_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(\theta)d\theta \leq M \int_r^1 k_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(\alpha)d\theta = M \int_r^1 d\theta \leq M, \end{aligned}$$

e, portanto, se definirmos o conjunto Y por

$$Y = \{u \in X : 0 \leq \|u(r)\|_1 \leq M\},$$

podemos concluir que este conjunto satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Ou seja, acabamos de provar o seguinte resultado:

Lema 5 *O operador T, definido por* (2.3)*, deixa invariante o conjunto Y, em que*

$$Y = \{u \in X : 0 \leq \|u(r)\|_1 \leq M\},$$

ou seja, $T(Y) \subset Y$.

Para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, falta somente verificar as hipóteses sobre o conjunto Y. Veja o lema a seguir.

Lema 6 *O conjunto Y é não-vazio, limitado, fechado e convexo.*

Demonstração: Inicialmente, Y é claramente não-vazio. Além disso, Y é limitado pela sua própria definição.

Afirmamos que Y é fechado. De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência em Y uniformemente convergente para u. Como X é um espaço de Banach, temos que $u \in X$. Então

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n(r)\|_1 = \|u(r)\|_1 \leq M\,,$$

provando o afirmado.

Agora, afirmamos que Y é convexo. De fato, dadas duas funções u e w em Y, temos que

$$0 \leq (1-t)\|u(r)\|_1 + t\|w(r)\|_1 \leq (1-t)M + tM = M\,,$$

e

$$(1-t)\|u(r)\|_1 + t\|w(r)\|_1 \geq (1-t)0 + t0 = 0\,,$$

de onde decorre a afirmação. ■

Após todos estes passos, decorre imediatamente do Teorema do Ponto Fixo de Schauder, o seguinte resultado de existência:

Teorema 3 *Sejam $q : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ e g funções contínuas, com* (2.10) *e* (2.11) *satisfeitas. Então, existe pelo menos uma solução radial positiva u para o problema de valor de fronteira* (2.1)*, com $0 \leq \|u(r)\|_1 \leq M$, para $0 \leq r \leq 1$.*

2.2.1 Considerações Sobre a Localização

Neste trabalho, temos grande interesse não somente em provar a existência de soluções positivas radiais para os problemas propostos, mas também em obter uma localização para estas soluções.

Nesta seção vamos tentar obter uma função contínua Φ_M a qual limita superiormente a solução radial garantida pelo teorema de existência da seção anterior. Para isso, seja $v(r)$ ponto fixo de T.

Então,

$$0 \leq v(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) g(|v'(s)|) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

E, como $|v'| \leq M$, podemos utilizar (2.10). Ficamos com

$$\begin{aligned} 0 \leq v(r) &\leq \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) k_1 M^{p-1} ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= \int_r^1 \left(k_1 M^{p-1} \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta \\ &= M \int_r^1 k_1^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \end{aligned}$$

Definimos, para $0 \leq r \leq 1$ a seguinte função

$$\Phi_M(r) = M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta. \qquad (2.16)$$

Concluímos que o ponto fixo $v(r)$ satisfaz $0 \leq v(r) \leq \Phi_M$. Além disso, a cota superior Φ_M é melhor do que a cota superior M. Veja a proposição à seguir:

Proposição 3 *A função Φ_M satisfaz $\Phi_M(r) \leq M$.*

Demonstração: De fato, como

$$\Phi_M(r) = M \int_r^1 \left(k_1 \int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta$$

e

$$\phi(r) = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) ds \right)^{1/(p-1)},$$

temos que

$$\Phi_M(r) = M \int_r^1 k_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(\theta) d\theta \leq M \int_r^1 d\theta \leq M \int_0^1 d\theta = M. \blacksquare$$

Feito isto, nosso teorema de existência de soluções radiais positivas para o problema (2.1), pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 4 *Sejam $q : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ e g funções contínuas, com (2.10) e (2.11) satisfeitas. Então existe pelo menos uma solução radial positiva u para o problema de valor de fronteira (2.1), com $0 \leq u(r) \leq \Phi_M(r)$ e $0 \leq |u'(r)| \leq M k_1^{\frac{1}{p-1}} \phi(r)$ para $0 \leq r \leq 1$.*

Apêndice A

No lema a seguir, escrevemos o problema de valor de fronteira (1.1) na sua forma radial (1.2).

Lema 7 *As soluções radiais positivas de (1.1) também são soluções do sistema*

$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{n-1}) & = -r^{n-1}q(r)f(u(r)), \quad 0 < r < 1 \\ u(1) = 0 & = u'(0). \end{cases}$$

Demonstração: Uma vez que,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u(r)) = u'(r)\frac{x_i}{r},$$

decorre que $\nabla u = \frac{u'(r)}{r}x$ e $|\nabla u(|x|)| = |u'(r)|$. Logo,

$$-\Delta_p u(r) = -div\left(|\nabla u(r)|^{p-2}\nabla u(r)\right) = -div\left(|u'(r)|^{p-2}\frac{|x|^{p-2}}{r^{p-2}}u'(r)\frac{x}{r}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)\left(\frac{x^2}{r^2}\right) + (|u'(r)|^{p-2}u'(r))\left(\frac{r - x_i\left(\frac{x_i}{r}\right)}{r^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{d}{dr}\left(|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)\frac{1}{r^2}r^2 - \frac{|u'(r)|^{p-2}u'(r)}{r^2}\left(nr - \frac{r^2}{r}\right).$$

E portanto,

$$\frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)) + \frac{|u'(r)|^{p-2}u'(r)}{r}(n-1) = -q(r)f(u(r)). \tag{17}$$

Agora, utilizando fatores integrantes, encontramos

$$\frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)r^{n-1}) = -r^{n-1}q(r)f(u(r)), \tag{18}$$

para $0 < r < 1$.

A condição de fronteira é satisfeita se $u(1) = 0$. A condição $u'(0) = 0$ é necessária para que exista a derivada da função radial u em $x = 0$. ∎

Corolário 3 *As soluções radiais positivas de* (1.2) *também são soluções do problema*

$$\begin{cases} |u'(r)|^{p-2}[(p-1)u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r)] & = -q(r)f(u(r)), \quad r \in (0,1), \\ u'(0) & = 0 = u(1). \end{cases}$$

Demonstração: Suponhamos que $u'(r) \leq 0$ em (17), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(|u'(r)|^{p-2}u'(r)) + \frac{|u'(r)|^{p-2}u'(r)}{r}(n-1) & \\ &= (p-1)(-u'(r))^{p-2}u''(r) + (-u'(r))^{p-1}\,\frac{(n-1)}{r} \\ &= (-u'(r))^{p-2}\left[(p-1)u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{r}\right] \\ &= |u'(r)|^{p-2}\left[(p-1)u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{r}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Desta forma, temos que

$$|u'(r)|^{p-2}\left[(p-1)u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{r}\right] = -q(r)f(u(r))\,, \quad r \in (0,1).\blacksquare$$

Apêndice B

Neste apêndice, provaremos um lema o qual é de fundamental importância para o trabalho. Através dele, nosso problema de encontrar soluções radiais positivas para os problemas em estudo passa a ser um problema de encontrar pontos fixos, em um subconjunto Y, para o operador T definido no próprio lema.

Lema 8 *Suponhamos que $f(u) \geq 0$, se $u \geq 0$. Uma função $u(r)$ em Y é solução positiva de* (1.1) *se, e somente se, for ponto fixo do operador $T : Y \subset X \to X$ definido por*

$$(Tu)(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Demonstração: Integrando a equação (18), obtida no Apêndice A, temos

$$|u'(r)|^{p-2} u'(r) r^{n-1} = -\int_0^r s^{n-1} q(s) f(u(s)) ds$$

Desta equação concluímos que $u'(r) \leq 0$, de modo que

$$(-u'(r))^{p-1} r^{n-1} = \int_0^r s^{n-1} q(s) f(u(s)) ds.$$

Assim,

$$-u'(r) = \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)}.$$

Integrando de r a 1 e utilizando a condição de fronteira, obtemos

$$u(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(u(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta.$$

Portanto, mostramos que uma solução de (1.2) é dada como ponto fixo do operador T definido por (1.3).

Vamos mostrar agora, que se $v(r)$ é ponto fixo do operador T, definido por (1.3), estão $v(r)$ é, de fato, solução de (1.1). Para tal, mostraremos que $v(r)$ é solução do problema de valor de fronteira (1.2).

Inicialmente, como $v(r)$ é ponto fixo de T, temos

$$v(r) = \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta,$$

e, consequentemente, $v(1) = 0$.

Afirmamos que $v(r)$ é diferenciável em $[0, 1]$.

Derivando $v(r)$ para $0 < r \leq 1$, obtemos

$$v'(r) = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right)^{1/(p-1)}, \quad r \in (0, 1).$$

Para provarmos a existência da derivada em $r = 0$, e que $v'(0) = 0$, utilizaremos a definição de $v'(0)$:

$$v'(0) = \lim_{r \to 0^+} \frac{v(r) - v(0)}{r} \tag{20}$$

$$= -\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r} \int_r^1 \left(\int_0^\theta \left(\frac{s}{\theta}\right)^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right)^{1/(p-1)} d\theta, \tag{21}$$

e, como o limite anterior é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, aplicamos L´Hopital e obtemos

$$v'(0) = -\lim_{r \to 0} \left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right)^{1/(p-1)} = 0.$$

Voltando a expressão para a derivada $v'(r)$, e elevando ambos os lados a $p - 1$, ficamos com

$$(v'(r))^{p-1} = -\left(\int_0^r \left(\frac{s}{r}\right)^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right).$$

Agora, passando r^{n-1} para o outro lado da igualdade, obtemos

$$(v'(r))^{p-1} r^{n-1} = -\left(\int_0^r s^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right).$$

Como $v'(r) \leq 0$, temos

$$|v'(r)|^{p-2} v'(r) r^{n-1} = -\left(\int_0^r s^{n-1} q(s) f(v(s)) ds \right),$$

e, consequentemente,

$$\frac{d}{dr}\left(|v'(r)|^{p-2} v'(r) r^{n-1}\right) = -r^{n-1} q(r) f(v(r)).$$

Após todos estes passos, provamos que $v(r)$ é, de fato, solução do problema de valor de fronteira (1.1). ■

Apêndice C

Nesta apêndice apresentamos algumas definições e resultados que foram utilizados neste trabalho.

Definição 1 *X é dito ser um* **Espaço de Banach** *se é um espaço vetorial normado completo.*

Definição 2 *Um subconjunto E de um espaço topológico Y é dito ser* **relativamente compacto** *se seu fecho, $\overline{E}$, é compacto.*

Definição 3 *Sejam M e N espaços métricos. Um operador $T : M \to N$ é* **compacto** *se T for contínuo e se $T(M)$ for relativamente compacto em N.*

Definição 4 *Sejam Z um conjunto qualquer e A um conjunto de funções $f : Z \to \mathbb{R}$. O conjunto A é* **limitado pontualmente** *em Z se $\{f(z) : f \in A, z \in Z\}$ é um conjunto limitado. Em outras palavras, se existe uma função $\phi : Z \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(z)| < \phi(z) \quad \forall\, f \in A,\ \forall\, z \in Z.$$

O conjunto A é **uniformemente limitado** *se existe uma constante M tal que*

$$|f(z)| < M \quad \forall\, f \in A,\ z \in Z.$$

Definição 5 *Seja (X, dist) um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $F \subset X$ é* **totalmente limitado** *se, para todo $\epsilon > 0$, existem pontos $x_1, \ldots, x_m \in F$ (em que m depende de ϵ) tais que*

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\epsilon(x_i).$$

Definição 6 *Sejam S um espaço métrico e X um espaço de Banach. Um subconjunto $A \subset C^0(S, X)$ é (uniformemente)* **equicontínuo** *se, dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que se $x, y \in S$ e $d(x, y) < \delta$, então*

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon \quad \forall\, f \in A.$$

Definição 7 *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços métricos satisfaz uma condição de Hölder de ordem $\alpha > 0$, se existe uma constante real C tal que*

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq C d_X(p, q)^\alpha\,, \quad \forall p, q \in X.$$

É fácil ver que essas funções formam um subespaço do espaço das funções contínuas, que será denotado por $C^{0,\alpha}(X, Y)$. Se $\alpha = 1$, dizemos que f é (uniformemente) lipschitziana com constante de Lipschitz C.

Observe que um conjunto $A \subset C^{0,\alpha}(X, Y)$ é um conjunto equicontínuo.

Proposição 4 *Sejam $f : X \to Y$ uma função uniformemente lipschitziana com constante de Lipschitz K e $h : Y \to Z$ uma função α-Hölder. Então a função composta $h \circ f : X \to Z$ satisfaz uma condição de Hölder de ordem alpha > 0.*

Demonstração:
Sejam p e q dois elementos quaisquer de X. Como h é α-Hölder, sabemos que existe uma constante positiva C tal que

$$d_Z(hof(p), hof(q)) \leq C d_X(f(p), f(q))^\alpha.$$

Além disso, como f é uniformemente lipschitziana ficamos com

$$d_Z(hof(p), hof(q)) \leq C d_X(f(p), f(q))^\alpha \leq C K^\alpha d_X(p, q)^\alpha,$$

e consequentemente, $hof : X \to Z$ é Hölder contínuo com parâmetro α. ■

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer será utilizado para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Teorema 5 (Teorema do Ponto-Fixo de Brouwer) *Sejam B_1 a bola fechada unitária com centro em 0 e $f : B_1 \subset \mathbb{R}^n \to B_1$ uma aplicação contínua. Então f possui um ponto fixo, isto é, existe um ponto $x \in B_1$ tal que $f(x) = x$.*

Corolário 4 *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ for um conjunto convexo e compacto, então toda aplicação contínua de K em K possui um ponto fixo.*

A demonstração destes dois resultados pode ser encontrada em [8].

O Teorema do Ponto Fixo de Schauder é o método que empregamos para obter soluções radiais positivas.

Teorema 6 (Teorema de Ponto Fixo de Schauder) *Sejam X um espaço de Banach e $Y \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado, limitado e convexo. Se $f : Y \to Y$ for uma aplicação compacta, então f possui um ponto fixo.*

Demonstração: Visto que f é compacta, $\overline{f(Y)}$ é compacto. Desta forma, dada uma cobertura de $\overline{f(Y)}$, conseguimos obter uma subcobertura finita para $\overline{f(Y)}$. Sendo assim, dado $\epsilon > 0$, existem elementos $x_i \in Y$ tais que

$$\overline{f(Y)} \subset \bigcup_{i=1}^{n=n(\epsilon)} B_\epsilon(f(z_i)) = \bigcup_{i=1}^{n=n(\epsilon)} B_\epsilon(x_i).$$

Sejam E_Y o espaço gerado por $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e

$$K_\epsilon := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad 0 \le \lambda_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Se $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K_\epsilon$ e $v = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\lambda}_i x_i \in K_\epsilon$, temos que

$$(1-t)u + tv = \sum_{i=1}^{n} ((1-t)\lambda_i + t\widetilde{\lambda}_i) x_i.$$

Como

$$0 \le (1-t)\lambda_i + t\widetilde{\lambda}_i \le 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} ((1-t)\lambda_i + t\widetilde{\lambda}_i) = 1$$

provamos que K_ϵ é convexo. (O conjunto K_ϵ é chamado envoltória convexa dos pontos $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.)

Afirmamos que $K_\epsilon \subset Y$. Para demonstrar tal fato, aplicamos indução no número de termos n da definição de K_ϵ, os casos $n = 1$ e $n = 2$ sendo óbvios. Como hipótese de indução, admitamos como válido que, se $0 \le \alpha_i \le 1$ e $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 1$, então $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \in Y$.

Suponhamos agora que $0 \le \lambda_i \le 1$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, com $\lambda_n \neq 1$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i} \right) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \lambda_n x_n,$$

a hipótese de indução garante que o termo entre parênteses está em Y. A convexidade de Y então garante que o lado direito da igualdade está em Y, provando a nossa afirmação. Como Y é limitado, K_ϵ é limitado.

Agora, provemos que K_ϵ é fechado. Seja $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em K_ϵ, com $u_m \to u$. Por definição, $u_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_m} x_i$, com $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i_m} = 1$, e $0 \le \lambda_{i_m} \le 1$. Passando a subseqüências, se necessário, podemos supor que, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, cada sequência $\{\lambda_{i_m}\}$ converge para um $\lambda_i \in [0, 1]$. Dessa forma, obtemos que $u_m \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ e, portanto, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in K_\epsilon$, provando que K_ϵ é fechado.

Vamos agora definir, para $1 \le i \le n$

$$g_i(x) := \{\epsilon - ||x - x_i|| \ , \quad se \ ||x - x_i|| < \epsilon\}$$

e também

$$\pi_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}.$$

(Podemos notar que o denominador é não-nulo, pois $x \in Y$ pertence ao menos a uma das bolas abertas $B_\epsilon(x_i)$ da subcobertura, e nesse caso $g_i(x) \in (0, \epsilon]$.)

Também temos que $\pi_\epsilon(Y) \in K_\epsilon$, o que resulta ao considerarmos $\lambda_i = \frac{g_i(x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}$.

Além disso, π_ϵ é contínua, por ser composta de funções contínuas.

Em consequência de nossas definições, temos também que

$$||\pi_\epsilon(x) - x|| = \left|\left| \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \right|\right| = \left|\left| \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \right|\right| < \epsilon.$$

Agora vamos definir $f_\epsilon : K_\epsilon \to K_\epsilon$ por

$$f_\epsilon = \pi_\epsilon \circ f \circ i,$$

em que $i : K_\epsilon \to Y$ é a inclusão canônica.

Notemos que K_ϵ está contido no subespaço Y finitamente gerado por $x_1, x_2, ..., x_n$. Como K_ϵ é fechado e limitado segue que K_ϵ é compacto. Desta forma, sendo f_ϵ contínua, segue do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que f_ϵ possui um ponto fixo x_ϵ. Além disso, pela relação anterior temos

$$||f(x_\epsilon) - x_\epsilon|| = ||f(x_\epsilon) - \pi_\epsilon(f(x_\epsilon))|| < \epsilon.$$

Consideremos então uma sequência $\epsilon_j \to 0$ e a sequência dos respectivos pontos fixos (x_{ϵ_j}) dos operadores $f_{\epsilon_j}(x)$. Como Y é compacto, a sequência $\{x_{\epsilon_j}\}_1^\infty$ admite uma subsequência convergente $x_{\epsilon_j} \to x \in Y$.

Afirmamos que x é ponto fixo de f. De fato, temos que

$$||f(x_{\epsilon_j}) - x_{\epsilon_j}|| < \epsilon_j,$$

e sendo f contínua, temos que $f(x_{\epsilon_j}) \to f(x)$ quando $\epsilon \to 0$, desse modo, temos $f(x) = x$. ■

Uma versão mais geral do que esta para o Teorema do Ponto Fixo de Schauder pode ser encontrada em [6].

Os resultados que se seguem, foram utilizados para provar a compacidade do operador T.

Lema 9 *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço de Banach X, tal que, toda subsequência contenha uma subsequência convergindo para o mesmo limite u. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para u.*

Demonstração:
Suponhamos, por contradição, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não convirja para u. Dessa forma, existem ϵ_0 e uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $d(u_{n_j}, u) > \epsilon_0$.
Consideremos, então, a subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Por hipótese, existe uma subsequência (que também denotaremos por (u_{n_j})) tal que $(u_{n_j}) \to u$, o que é uma contradição pois, para todo $j \in \mathbb{N}$, é válido que $d(u_{n_j}, u) > \epsilon_0$. ■

Teorema 7 *São equivalentes as seguintes afirmações sobre um subconjunto F de um espaço métrico (X, dist):*

(*i*) *F é compacto;*

(*ii*) *F é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência de pontos em F possui uma subsequência que converge para um ponto de F;*

(*iii*) *(F, dist) é completo e totalmente limitado.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [3], p. 222.

Corolário 5 *São equivalentes as seguintes afirmações à respeito de um conjunto $F \subset X$, em que X é um espaço métrico completo:*

(*i*) *F é relativamente compacto em X;*

(*ii*) *Toda sequência de pontos em F possui uma subsequência convergente;*

(*iii*) *F é totalmente limitado.*

A demonstração deste Corolário é imediata do Teorema anterior.

Teorema 8 (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Sejam S um espaço métrico compacto e X um espaço de Banach. Seja $A \subset C^0(S, X)$. Então A é relativamente compacto se, e somente se, A for limitado e equicontínuo, isto é, se A satisfizer*

(*i*) $\sup_{f\in A}\sup_{x\in S} |f(x)| \leq C$;

(*ii*) *A é equicontínuo.*

Demonstração:
Suponhamos que sejam válidos os items (*i*) e (*ii*). Vamos mostrar que A pode ser coberto por um número finito de bolas abertas de raio $r > 0$. Seja portanto $r > 0$ dado. Uma vez que A é equicontínuo, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $V(x)$ tal que, se $y \in V(x)$, então $|f(x) - f(y)| < r$, para todo $f \in A$. As vizinhanças abertas $V(x)$ formam uma cobertura aberta do conjunto compacto S, de forma que existe uma subcobertura finita $V(x_1), \ldots, V(x_m)$ do conjunto S. Como

A é limitado, os conjuntos $A_{x_i} := \{f(x_i); f \in A\} \subset X$ $(i = 1, \ldots, m)$ são limitados, donde também a sua união

$$A_r := \bigcup_{i=1}^{m} A_{x_i} \subset X.$$

Escolha pontos $a_i \in X$ de forma que as bolas $B(a_1, r), \ldots, B(a_k, r)$ cubram A_r. Em particular, para $i = 1, \ldots, m$ temos que

$$f(x_i) \in B(a_{\sigma(i)}, r),$$

em que $\sigma : \{1, \ldots, m\} \mapsto \{1, \ldots, k\}$ é uma função. Para cada função $\sigma : \{1, \ldots, m\} \mapsto \{1, \ldots, k\}$, seja

$$A_\sigma := \{f \in A; |f(x_i) - a_{\sigma(i)}| < r \ \forall\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Então o número finito de conjuntos A_σ cobre A. Para completar a demonstração, vamos mostrar que cada A_σ tem diâmetro no máximo igual a $4r$ (ou seja, que dado o $r > 0$ original, devemos trabalhar com o raio $r/4$). Suponhamos, portanto, que $f, g \in A_\sigma$ e $x \in X$. Então $x \in V(x_i)$ para algum i e

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - a_{\sigma(i)}| + |a_{\sigma(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \\ &< 4r, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração desta implicação.

Agora mostraremos a reciproca. Dado $\epsilon > 0$, suponhamos que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m_\epsilon} B(f_i, \epsilon),$$

onde as funções $f_i \in C^0(S, X)$ dependem de ϵ. Dado $f \in A$, existe então i_0 tal que

$$\|f\|_{\sup} \leq \epsilon + \|f_{i_0}\|_{\sup} \leq \epsilon + \max_{i=1,\ldots,n_\epsilon} \|f_i\|_{\sup} < \infty,$$

o que mostra que A é um conjunto limitado. Além disto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &\leq 2\epsilon + \max_{1 \leq i \leq n_\epsilon} |f_i(x) - f_i(y)|, \end{aligned}$$

em que o último termo tende a zero quando $x \to y$, para qualquer ϵ. ■

Teorema 9 (Teorema de Arzelá-Ascoli) *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Seja F uma família equicontínua de funções $\Phi : X \to \mathbb{R}$, isto é, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x - y\| < \delta$, então $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \epsilon$ para toda $\Phi \in F$. Se F for uniformemente limitada (isto é, se existe $M > 0$ tal que $\|\Phi\| < M$ para todo $\Phi \in F$), então toda sequência Φ_n de elementos de F possui uma subsequência Φ_{n_k} uniformemente convergente em X.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [7].

Teorema 10 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis, que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável. Se existir uma função integrável* g*, tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu$$

A demonstração do Teorema da Convergência Dominada pode ser encontrada em [9].

Referências Bibliográficas

[1] Darko Zubrinic, *Solvability of quasilinear elliptic equations with strong dependence on the gradient*, Abstr. Appl. Anal. 5, no. 3, 159–173, (2000).

[2] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*, J. Diff. Eqs. 199, 96–114, (2004).

[3] E. L. Lima, *Espaçõs Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, (1994).

[4] G. Ercole e A. Zumpano, *Existence of positive radial solutions for the n-dimensional p-Laplacian*, Nonlinear Analysis 44, 355–360, (2001).

[5] G. Ercole e A. Zumpano, *Positive solutions for the p-Laplacian in annulli*, Proc. Roy. Soc. Edin. 132A, 595–610, Edimburgo, (2002).

[6] H. Amann, *Lectures on some fixed point theorems*, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, (1973).

[7] Jorge Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Rhode Island, (1998).

[9] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, New York, (1976).

[10] Zhiyong Wang e Jihui Zhang, *Positive solutions for one-dimensional p-Laplacian boundary value problems with dependence on the first order derivative*, J. Math. Anal. Appl. 314, 618–630, (2006).