Existência e Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Equações Elípticas Quase Lineares sobre $\mathbb{R}$ com Perturbação

Maria José Alves

Belo Horizonte 07 de março de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Maria José Alves

Existência e Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Equações Elípticas Quase Lineares sobre $\mathbb{R}$ com Perturbação

Belo Horizonte

2008

Maria José Alves

Existência e Multiplicidade de Soluções para uma Classe de Equações Elípticas Quase Lineares sobre $\mathbb{R}$ com Perturbação

Tese apresentada ao corpo docente de Pós Graduação em Matemática do Instituto
de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador:
Olímpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Viçosa

Co-orientador:
Paulo César Carrião
Universidade Federal de Minas Gerais

Aos meus pais, Antônio e Ana.
Ao meu esposo, Roberto.
À minha filha, Bruna.

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço a Deus, por estar sempre comigo dando-me saúde e forças para realizar este trabalho.

Aos meus orientadores, Paulo César Carrião e Olímpio Hiroshi Miyagaki, por me aceitarem como aluna de doutorado, pela amizade, compreensão e dedicação em todos os momentos. Expresso também a minha admiração pela competência profissional que possuem, com o qual conduziram com segurança, determinação e paciência este trabalho, de forma excepcional.

Aos professores que compuseram minha banca, Daniel Cordeiro de Morais Filho, Emerson Alves Mendonça de Abreu , Gastão de Almeida Braga e Jesus Carlos da Mota, pelas sugestões apresentadas.

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da UFMG pelo carinho e respeito que sempre demonstraram por mim. Em especial ao Professor Ronaldo Brasileiro Assunção pelas inúmeras sugestões, correções e críticas.

Á minha família, que sempre me incentivou e me apoiou. Em particular, agradeço aos meus queridos pais, ao meu esposo e a minha filha, aos quais dedico este trabalho, que me incentivaram, vibraram comigo em cada vitória, pela paciência e amor com que suportaram os momentos difíceis, sempre ao meu lado e se abdicaram por vezes do pouco conforto para permitirem que eu me concentrasse nos estudos.

Resumo

Neste trabalho estamos interessados em obter um resultado de existência de pelo menos uma solução positiva (no caso homogêneo) e de duas soluções positivas (no caso não homogêneo) para uma classe de equações elípticas quase lineares em $\mathbb{R}$ envolvendo o operador p-Laplaciano, com uma perturbação não autônoma. O resultado de existência de solução do caso homogêneo é obtida como sendo um mínimo na variedade de Nehari. Para o caso não homogêneo, a primeira solução é obtida como sendo um mínimo local em uma vizinhança da origem e a segunda solução por argumentos do passo da montanha. Este problema é complexo pelo fato do operador não ser linear e de estarmos trabalhando em um sub-espaço de Banach de $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Devido a este fato, tivemos de provar a convergência q. t. p. em $\mathbb{R}$ da sequência dos gradientes .

Palavras-chave: Perturbação não autônoma, equação de Schrödinger, p-Laplaciano, método variacional.

Abstract

This paper is concerned with the existence of one positive solution (in the homogeneous case) and of two positive solutions (in the nonhomogeneous case) for a class of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}$ involving the p-Laplacian, with a non autonomous perturbation. By The existence of solution result in the homogeneous case is obtained as a minimum in the Nehari's manifold. In the nonhomogeneous case, the first solution is obtained as a local minimum in a neighborhood of 0 and the second one by a mountain-pass argument. The special features of the problem here is the "complex"structure of the nonlinear part which, in particular, oblige to work in the space $W^{1,p}(\mathbb{R})$. The main difficulty is the convergence of the sequences of derivatives $u'_n \to u'$.

Keywords: Non autonomous perturbations, Schrödinger equation, p-Laplacian, variational method.

Notações

$\equiv$	igualdade por definição
q. t. p.	quase todo ponto
$\bar{B}(0,R)$	bola fechada centrada em 0 e com raio R
$\|S\|$	medida do conjunto S
$p' \equiv \frac{p}{p-1}$	expoente conjugado de p
$\Delta_p u(x) \equiv [\|u'(x)\|^{p-2}u'(x)]'$	operador p-laplaciano
X^*	espaço dual do espaço X
$C_0^\infty(\mathbb{R})$	espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto em $\mathbb{R}$
$u_n \to u$	convergência forte (em norma)
$u_n \rightharpoonup u$	convergência fraca
$L^p(\mathbb{R})$	$\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável : $\int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|^p dx < \infty,$ $1 \leq p < \infty\}$ munido da norma $\|u\|_p \equiv \left[\int_{\mathbb{R}} \|u(x)\|^p dx\right]^{1/p}$
$W^{1,p}(\mathbb{R})$	$\{u \in L^p(\mathbb{R}) \mid$ existe $g \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$, munido da norma $\\|u\\| = \left[\int_{\mathbb{R}} (\|u(x)\|^p + \|u'(x)\|^p)\, dx\right]^{\frac{1}{p}}$
C_+	cone positivo das funções do espaço dual $(L^{s'}(\mathbb{R}))^*$ $\equiv L^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$ definido por: $\left\{f \in L^q(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx \geq 0,\right.$ para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}),\ u(x) \geq 0$ q. t. p sobre $\mathbb{R}$, onde $\left.\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right\}$
$(PS)_c$	sequência de Palais-Smale para o funcional I no nível $c \in \mathbb{R}$: é uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c$ e $\lim_{n\to\infty} \\|I'(u_n)\\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}))^*} = 0$.
$C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$	conjunto formado pelas funções $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, cuja derivada é hölder contínua com expoente α, $\alpha \in \mathbb{R} \cap (0,1)$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos os problemas de existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de equações diferenciais elípticas quase lineares sobre $\mathbb{R}$, envolvendo o operador p-Laplaciano, da forma

$$\begin{cases} Lu + V(x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u + g(x), \quad \text{em } \mathbb{R}, \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde o operador L é definido por

$$Lu \equiv -[|u'|^{p-2}u']' - K_0\{[(|u|^{\beta})']^{p-1}\}'|u|^{\beta-2}u, \tag{0.0.2}$$

$K_0 > 0$, $\beta > 1$, $p > 1$, $q \geq p\,\beta$, $g \in L^s(\mathbb{R})$, para algum $s \geq 1$ e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial satisfazendo a condição básica

(V_0) existe uma constante $\alpha_0 > 0$ tal que $\inf_{\mathbb{R}} V(x) \geq \alpha_0 > 0$.

Equações quase lineares do tipo

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

aparecem, naturalmente, como modelo de vários fenômenos físicos relacionados a vários tipos de funções f. Alguns destes problemas vêm de diferentes áreas da Matemática Aplicada e Física. Por exemplo, surgem na teoria de elasticidade não linear, reações e difusões, glaciologia, teoria de combustão, biologia das populações, leis de fluxos não lineares, sistemas de equações diferenciais parciais de Monge-Kantorovich e no estudo de fluidos não Newtonianos. Veja por exemplo, [21, 23, 27, 36, 48] e suas referências.

No caso onde $p = \beta = 2$, a equação (0.0.1) descreve a existência de soluções estacionárias para equações de Schrödinger quase lineares da forma

$$iz_t = -\Delta z + V(x)z - h(|z|^2)z - K_0\Delta f(|z|^2)f'(|z|^2)z \text{ em } \mathbb{R}^n, \qquad (0.0.3)$$

onde V é uma função potencial dada, K_0 é uma constante real, h e f são funções reais. O caso em que $f(s) = s$, foi usado na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas por Kurihura em [33]. Para $f(s) = (1+s)^{\frac{1}{2}}$, a equação (0.0.3) modela a canalização de um laser ultra curto de alta potência na matéria, veja Borovskii e Galkin[15] e De Bouard, Hayashi e Saut [16]. A equação (0.0.3) também aparece em Física dos Plasmas e Mecânica dos Fluidos (veja [8, 46]), em Mecânica e Teoria da Matéria Condensada (veja [28, 40], respectivamente).

Equações do tipo (0.0.1) aparecem também quando procuramos a existência de ondas solitárias em equações não lineares do tipo Klein-Gordon ([9, 54]) ou Schrödinger ([34, 45]).

O caso semilinear de (0.0.1), ou seja quando $p = \beta = 2$, correspondente a $K_0 = 0$, tem sido intensivamente estudado nos últimos anos, considerando vários tipos de funções g, veja por exemplo [9, 26, 31], bem como as suas referências. Sendo mas preciso, Rabinowitz em [47] (veja também [7, 19]) estudou o caso quando V satisfaz a condição de coercividade do tipo

$$(V_1) \qquad \lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty.$$

A situação no qual V é limitado e satisfaz a condição de periodicidade

$$(V_2) \qquad V(x+p) = V(x),\ x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},$$

foi estudada, ainda no caso semilinear, por exemplo, por Coti-Zelati e Rabinowitz [20], Kryszewski e Szulkin [32] e Montecchiari [41]. Outra situação, quando V tende assintoticamente a uma constante $\overline{V} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} V(x)$, isto é,

$$(V_{3'}) \qquad \lim_{|x|\to\infty} V(x) = \overline{V},\ \text{e } V \le \overline{V},$$

onde a última desigualdade é estrita sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida positiva, foi estudada por Noussair, Swanson e Yang em [42].

O problema (0.0.1) em $\mathbb{R}^n$, com $1 < p < n$, $K_0 = 0$ e $g = 0$, também foi considerado por Zhu e Yang [58].

Alves, Carrião e Miyagaki em [1] trataram o problema (0.0.1) quando $K_0 = 0$, $g = 0$ e V tende assintoticamente a uma função periódica V_p, isto é,

$$(V_3) \qquad \lim_{|x|\to\infty}[V(x) - V_p(x)] = 0 \ \text{ e } V(x) \leq V_p(x) \ ,$$

onde a última desigualdade é estrita sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida positiva.

Ainda no caso $K_0 = 0$, Rădulescu e Smets em [49] obtiveram um resultado de multiplicidade de soluções para o problema (0.0.1) quando $g \neq 0$ e $\beta = p = 2$.

O caso semilinear correspondente a $K_0 \neq 0$ e $4 \leq q + 1 \leq \frac{4n}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $q \geq 3$ se $n = 1, 2$, foi estudado, por exemplo, em [5, 37, 38, 39, 45]. Sendo mais específico, Liu, Wang e Wang em [39] estabeleceram a existência de solução, tanto com um único sinal quanto nodal do tipo "ground states", usando o método de Nehari. Poppenberg, Schmitt e Wang em [45] e Liu e Wang em [37], usando um argumento de minimização, obtiveram uma solução do problema (0.0.1), considerando $g = 0$ e com um multiplicador de Lagrange associado ao termo não linear. Em verdade, eles usaram o princípio de concentração e compacidade, devido a P.L. Lions, e o método de multiplicador de Lagrange e obtiveram uma solução positiva (u, θ), da equação

$$-u^{''} + V(x)u - K_0(u^2)^{''}u = \theta|u|^{p-1}u \ , \ x \in \mathbb{R}. \tag{0.0.4}$$

Em seguida, Liu, Wang e Wang em [38] usando mudança de variáveis, reduziram o problema quase linear (0.0.1) em $\mathbb{R}^n$ com $p = \beta = 2$ e $g = 0$ a um semilinear e seus resultados não dependia mais da constante θ. Para $n = 1$, usando uma técnica de aproximação variacional perturbativa, Ambrosetti e Wang em [5], também retiraram o multiplicador de Lagrange. Este argumento, usando mudança de variáveis, também foi utilizado por Colin e Jeanjean em [17], quando $p = \beta = 2$ e $V = 0$ e Severo [50], para $n \geq p > 1$, $\beta = 2$, $p \neq 2$ e $g = 0$. Note que no caso $K_0 \neq 0$ e $n = 1$, as idéias de Severo em [50] não se aplicam diretamente. Estes autores provaram a existência de soluções aplicando um resultado clássico dado por Berestycki e Lions [13], quando

$n = 1$ ou $n \geq 3$ e Berestycki, Gallouët e Kavian em [10], quando $n = 2$. Vale ressaltar que todos os artigos mencionados anteriormente consideraram os potenciais descritos acima. Ainda considerando $n = 2$, a equação (0.0.1) (sem o termo com expoente q), para $p = \beta = 2$ e g satisfazendo uma condição de crescimento envolvendo exponencial e o expoente crítico, foi tratada por exemplo, em [43].

Para provar a existência e multiplicidade de soluções estritamente positivas para problema (0.0.1), enfrentamos as seguintes dificuldades:

- Ao trabalhar com este operador envolvendo o p-Laplaciano, vemos que surgem de forma natural inúmeras dificuldades de ordem bastante técnicas, essencialmente pelo fato deste operador não ser linear e de estarmos trabalhando em um sub-espaço de Banach de $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Tivemos que provar uma desigualdade, do tipo Brézis e Lieb, isto é,

- Sejam $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$ e $v_n = u_n - u$. Então

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p \geq \liminf_{n\to\infty} |v_n'|v_n|^{\beta-1}|_p^p + |u'|u|^{\beta-1}|_p^p.$$

  O caso $p = 2$, foi provado por Poppenberg, Schmitt e Wang em [45]. Para $p \neq 2$, as idéias de Poppenberg, Schmitt e Wang não se aplicam diretamente e para obter este resultado tivemos que utilizar teoremas importantes da teoria de Análise, por exemplo, o Teorema de Arzelá Ascoli e o Teorema Hewitt-Stromberg (veja Apêndice A).

- Para o caso $p \neq 2$, tivemos também de provar a convergência da sequência das derivadas, isto é,

$$u_n' \to u' \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}, \text{ quando } n \to \infty,$$

  para uma sequência limitada (u_n) em um sub-espaço de Banach de $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

  Esta convergência foi obtida usando alguns argumentos obtido por Boccardo e Murat.

No Capítulo 1, vamos estudar o problema

$$\begin{cases} Lu + V(x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, \ \text{ em } \mathbb{R}, \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), u > 0 \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.0.5}$$

que corresponde ao problema (0.0.1) no caso onde $g(x) = 0$.

Usando a técnica desenvolvida por Ambrosetti and Wang em [5] e combinando o princípio de concentração e compacidade devido Lions, com um processo de minimização, vamos provar a existência de uma solução estritamente positiva para problema (0.0.5). Precisamente, obteremos o seguinte resultado

Teorema 0.1. *Sejam $\beta > 1$, $p > 1$ e $q \geq p\ \beta$ e suponha a condição (V_0). Se V satisfaz uma das condições (V_1), (V_2) ou (V_3) então o problema (0.0.5) tem no mínimo uma solução estritamente positiva.*

O Teorema 0.1 estende o artigo do Ambrosetti e Wang nos seguintes sentidos:

- Ele fez para $g(x) \equiv 0$, $p = 2$, $\beta = 2$ e $q = r + 1$.
- Ele considerou V assintótico a uma constante e nós consideramos V assintótico a uma função periódica.

O Capítulo 2, foi motivado pelo artigo do Rădulescu e Smets em [49], este autores fizeram uma extensão do trabalho de Tarantello em [55], para domínios ilimitados e operadores mais gerais, e provaram a existência de duas soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -div\,(|x|^{\alpha}\nabla u) = |u|^{2^*_\alpha - 2}u, \text{ em } \Omega, \\ \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ n \geq 2\ , \ \alpha \in (0,2), \ 2^*_\alpha = \frac{2n}{n-2+\alpha}. \end{cases}$$

Neste Capítulo, vamos aplicar o método variacional, considerando o caso $K_0 = 1$ e provaremos a existência de duas soluções estritamente positivas para o problema (0.0.1) (veja também Assunção, Carrião e Miyagaki [6] e Jeanjean em [30]). Nossos resultados são os seguintes:

Teorema 0.2. *Seja V uma função potencial limitada satisfazendo a condição (V_0) e uma das condições (V_2) ou (V_3). Suponha $K_0 = 1$, $\beta > 1$, $p > 1$ e $q \geq p\ \beta$ então o problema (0.0.1) tem no mínimo uma solução se $g \neq 0$ e $|g|_s$ for suficientemente pequena. Além disso, se $g \in C_+$ então esta solução é estritamente positiva.*

Teorema 0.3. *Seja V uma função potencial limitada satisfazendo a condição (V_0) e uma das condições (V_2) ou (V_3). Suponha $K_0 = 1$, $\beta > 1$, $p > 1$ e $q \geq p\ \beta$ então para cada $f \in C_+$ o problema (0.0.1) com $g = \epsilon f$ tem no mínimo duas soluções estritamente positivas, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.*

No Capítulo 3, seguindo argumentos utilizados por Arnold em [4] e Sotomayor em [52], vamos generalizar a potência q, retirando a sua dependência de β, precisamente, $q > p$ e vamos mostrar que a equação

$$Lu + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, \quad \text{em} \ \mathbb{R}, \tag{0.0.6}$$

terá duas soluções distintas.

Vamos provar o seguinte resultado

Teorema 0.4. *Para cada $\beta > 1$, $K_0 > 0$, $p > 1$ e $q > p$ a equação (0.0.6) possui uma solução estritamente positiva e uma solução estritamente negativa.*

—1—

Minimização sobre a variedade de Nehari

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é demonstrar o Teorema 0.1. Vamos considerar o problema (0.0.5), a saber,

$$\begin{cases} Lu + V(x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}, \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), u > 0 \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde o operador L é definido pela igualdade (0.0.2), $K_0 > 0$, $\beta > 1$, $p > 1$, $q \geq p\beta$ e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial satisfazendo a condição básica (V_0).

Vamos demonstrar que este problema possui uma solução positiva no subespaço de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ definido por

$$X \equiv \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} V(x)|u|^p dx < +\infty \right\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|^p \equiv \int_{\mathbb{R}} [|u'|^p + V(x)|u|^p] dx.$$

Devido a condição (V_0) obtemos que X está continuamente imerso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Observação 1.1. *Recordemos que a imersão de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ dentro de $L^s(\mathbb{R})$ para $s = \infty$ ou para $s \geq p$ é contínua, veja [13].*

O funcional energia $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, associado a equação (0.0.1) (veja Apêndice, seção A12) é dado por,

$$I(u) \equiv \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{p} \left[|u'|^p + V(x)|u|^p \right] + \frac{\beta^{p-1}}{p} K_0 |u|^{p(\beta-1)} |u'|^p - \frac{1}{q}|u|^q \right\} dx.$$

Temos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ (veja Apêndice, seção A12) e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} I'(u) \cdot v = & \int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^{p-2} u' \right] v' dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) \left[|u|^{p-2} u \right] v dx \\ & + K_0 \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1} (\beta - 1) \left[|u|^{p(\beta-1)-2} u |u'|^p \right] v dx \\ & + K_0 \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1} \left[|u|^{p(\beta-1)} |u'|^{p-2} u' \right] v' dx - \int_{\mathbb{R}} \left[|u|^{q-2} u \right] v dx, \end{aligned}$$

onde conclui-se que

$$I'(u) \cdot u = \|u\|^p + \beta^p K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p - |u|_q^q, \quad u \in X.$$

Seja M a variedade de Nehari definida no Apêndice, seção A11.

Vamos provar na próxima seção (veja Lema 1.2-(d)) que os pontos críticos do funcional I restrito a variedade de Nehari M são precisamente soluções fracas (veja a definição no apêndice, seção A12) do problema (0.0.5) .

Para provar o Teorema 0.1 vamos precisar de alguns resultados preliminares descritos nos lemas abaixo.

1.2 Lemas auxiliares

Lema 1.2. *Suponha $\beta > 1,\ p > 1$ e $q \geq p\,\beta$. Então*

(a) *M é uma variedade e $M \neq \emptyset$.*

(b) *Para qualquer $u \in X \backslash \{0\}$ com $I'(u) \cdot u < 0$, existe um único $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda u \in M$.*

(c) *existe $\rho > 0$ tal que $\|u\| \geq \rho$, para todo $u \in M$.*

(d) Se $\bar{u} \in M$ é um ponto crítico de I restrito a M, então $I'(\bar{u}) = 0$ e $\bar{u}$ é uma solução do problema (0.0.5).

(e) $m = \inf_{u \in M} I(u) \geq C > 0$, onde C é uma constante.

Prova:
(a) Vamos provar que M é de fato uma variedade. Para $u \in M$ temos que

$$\beta^p K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p = |u|_q^q - \|u\|^p. \tag{1.2.1}$$

Usando a igualdade (A.12.5) (veja Apêndice, seção A12) obtemos que

$$I''(u).u.u = p(1-\beta)\|u\|^p + (p\beta - q)|u|_q^q.$$

Como $\beta > 1$ e $q \geq p\beta$ concluimos que

$$I''(u) \cdot u \cdot u < 0 \tag{1.2.2}$$

e portanto 0 é um valor regular. Logo M é uma variedade.

Para provar que $M \neq \emptyset$, fixe $u \in X \backslash \{0\}$ e defina

$$\Psi(t) = I(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|^p + \frac{\beta^{p-1}}{p} t^{p\beta} K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p - \frac{1}{q} t^q |u|_q^q.$$

Então

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= t^{p-1}\left[\|u\|^p + \beta^p t^{p(\beta-1)} K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p - t^{q-p}|u|_q^q\right] \\
&= t^{p-1} f(t),
\end{aligned}$$

onde

$$f(t) = \|u\|^p + \beta^p t^{p(\beta-1)} K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p - t^{q-p}|u|_q^q. \tag{1.2.3}$$

(b)

Caso 1 : se $q > p\beta$. Observe que

$$f'(t) = p(\beta - 1)\beta^p t^{p(\beta-1)-1} K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p - (q-p)t^{q-p-1}|u|_q^q.$$

Como $q > p$, impondo a condição $f'(t) = 0$, obtemos que

$$\hat{t} \equiv \left[\frac{p(\beta-1)\beta^p K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p}{(q-p)|u|_q^q}\right]^{\frac{1}{q-p\beta}}$$

satisfaz $f'(\hat{t}) = 0$. Desde que $f'(t) < 0$ para $t > \hat{t}$ e $f'(t) > 0$ se $0 < t < \hat{t}$ então $\hat{t}$ é o único ponto critico (de máximo) para f.

Como $f(0) = \|u\|^p > 0$ e $f(t) > 0$, para valores pequenos t e $f(t) < 0$, para valores grandes de t, então existe um único $\bar{t} > 0$ (pois f tem um único ponto crítico) tal que $f(\bar{t}) = 0$ e segue que $\bar{t}u \in M$.

Além disso, desde que $f(0) = \|u\|^p > 0$ e $f(1) = I^{'}(u) \cdot u < 0$ então $0 < \bar{t} < 1$.

Case 2 : se $q = p\beta$. Afirmamos que para todo $\epsilon > 0$ existe uma função $\Phi_\epsilon \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\epsilon|^p dx = 1$ e $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\epsilon'|^p dx = \epsilon^p$. Basta considerar a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\text{o suporte da } \phi \text{ está contido em } [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^{1} |\phi(x)|^p dx = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-1}^{1} |\phi'(x)|^p dx = \varepsilon^p, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Defina

$$\Phi_\epsilon(x) \equiv \epsilon^{\frac{1}{p}} \phi(\epsilon x).$$

Tomando as funções $|u_\epsilon|^\beta \equiv \Phi_\epsilon(x)$, obtemos que

$$||u_\epsilon|^{\beta-1}u_\epsilon'|_p^p = \frac{\epsilon^p}{\beta^p} \quad \text{e} \quad |u_\epsilon|_p^p = 1.$$

Correspondendo a tais u_ϵ encontramos

$$\begin{aligned} f(t) &= \|u_\epsilon\|^p + \beta^p t^{p(\beta-1)} K_0 \frac{\epsilon^p}{\beta^p} - t^{q-p} \\ &= \|u_\epsilon\|^p + t^{q-p}(K_0\epsilon^p - 1). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon^p < \frac{1}{K_0}$ obtemos que

$$f'(t) = (q-p)t^{(q-p)-1}(K_0\epsilon^p - 1) < 0, \text{ para todo} : t > 0.$$

Portanto f é decrescente. Desde que $f(0) = \|u_\epsilon\|^p > 0$ e $f(t) < 0$ quando $t \to \infty$, então existe um único $\bar{t}$ tal que $f(\bar{t}) = 0$. Da igualdade (1.2.3) obtemos que $f(1) = I'(u) < 0$. Assim $0 < \bar{t} < 1$. Segue também que $\bar{t}u_\epsilon \in M$.

(c) Desde que $u \in M$, da Observação 1.1, segue que

$$\|u\|^p = -K_0\beta^p|u'|u|^{\beta-1}|_p^p + |u|_q^q \leq |u|_q^q \leq C\|u\|^q$$

e

$$\|u\| \geq \left[\frac{1}{C}\right]^{\frac{1}{q-p}} \equiv \rho > 0.$$

(d) Seja $\chi(u) \equiv I^{'}(u) \cdot u$. Desde que $\bar{u} \in M$ é um ponto crítico de I restrito a M, segue de [24, Theorem 1.4.2], que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $I'(\bar{u}) = \lambda\chi'(\bar{u})$. Portanto $0 = I'(\bar{u}) \cdot \bar{u} = \lambda\chi'(\bar{u}) \cdot \bar{u}$.

Por outro lado, como I satisfaz a desigualdade (1.2.2), também obtemos que $\chi'(\bar{u}) \cdot \bar{u} = I''(\bar{u}) \cdot \bar{u} \cdot \bar{u} < 0$ e assim concluimos que $\lambda = 0$. Logo $I'(\bar{u}) = 0$ e $\bar{u}$ é uma solução da equação (0.0.5).

(e) Para cada $u \in M$, da igualdade (1.2.1) obtemos que

$$I|_M(u) = \frac{\beta - 1}{p\beta}\|u\|^p + \frac{q - p\beta}{pq\beta}|u|_q^q. \tag{1.2.4}$$

Desde que $\beta - 1 > 0$, $q - p\beta > 0$ and $\|u\| > \rho$ (Lema 1.2-(c)), concluimos que

$$I|_M(u) \geq \frac{\beta - 1}{p\beta}\rho^p > 0.$$

Portanto

$$m = \inf_{u \in M} I(u) > 0. \quad \blacksquare$$

No lema a seguir usaremos a seguinte definição:

Definição 1.3. *Dizemos que uma sequência* $(u_n) \subset M$ *é minimizante para* I *se* $I(u_n) \to m$ *quando* $n \to \infty$.

Lema 1.4. *Seja* $(u_n) \subset M$ *uma sequência minimizante para* I. *Então*

(*a*) u_n *é limitada em* X *e existe* $u \in X$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* X, *quando* $n \to \infty$,

(*b*) $\lim_{n\to\infty} |u_n|_q^q > 0$,

(*c*) *seja* $v_n = u_n - u$. *Então* $I'(u) \cdot u + \liminf_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n \leq 0$ *de onde conclui-se que* $I'(u) \cdot u \leq 0$ *ou* $\liminf_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n \leq 0$.

Para provar este Lema usaremos a seguinte proposição, cuja demonstração será feita posteriormente.

Proposição 1.5. *Sejam* $u_n \rightharpoonup u$ *fracamente em* $W^{1,p}(\mathbb{R})$, *quando* $n \to \infty$ *e* $v_n = u_n - u$. *Então*

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p \geq \liminf_{n\to\infty} |v_n'|v_n|^{\beta-1}|_p^p + |u'|u|^{\beta-1}|_p^p.$$

Observamos que no caso $p = 2$, este resultado foi provado em [45].

Assumindo esta Proposição, vamos concluir a prova do Lema 1.4, como segue.

Prova do Lema 1.4:(a) Seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para I. Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|I(u_n) - m| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Disto concluimos que

$$m - \epsilon \leq \frac{\beta - 1}{p\beta}\|u\|^p + \frac{q - p\beta}{pq\beta}|u|_q^q \leq m + \epsilon.$$

Portanto $\|u_n\|^p$ e $|u|_q^q$ são limitadas em X. Então podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X, quando $n \to \infty$.

(b) Desde que $u_n \in M$ para todo n, do Lema 1.2-(c) obtemos que

$$|u_n|_q^q = \|u_n\|^p + \beta^p K_0 |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p \geq \|u_n\|^p \geq \rho^p > 0.$$

(c) Seja $v_n = u_n - u$. Como $I'(u_n) \cdot u_n = 0$ segue que

$$|u_n|_q^q - \|u_n\|^p = \beta^p K_0 |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p.$$

Tomando o limite inferior na igualdade acima, usando o Lema de Brézis e Lieb (veja Apêndice, Lema A.2), o fato da sequência $(u_n) \subset M$ e a Proposição 1.5, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left[|v_n|_q^q + |u|_q^q - \|v_n\|^p - \|u\|^p\right] \geq \beta^p K_0 \liminf_{n\to\infty} |v_n'|v_n|^{\beta-1}|_p^p + \beta^p K_0 |u'|u|^{\beta-1}|_p^p.$$

Desde que

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} ||v_n||^p - \lim_{n\to\infty} |v_n|_q^q + \beta^p K_0 \liminf_{n\to\infty} |v_n'|v_n|^{\beta-1}|_p^p + I'(u)u,$$

então

$$\liminf_{n\to\infty} I'(v_n).v_n + I'(u).u \leq 0. \quad \blacksquare$$

Lema 1.6. *Seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para I tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X, quando $n \to \infty$. Se $u \in M$ então $I(u) = m$.*

Prova: Seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para I. Do Lema 1.4-(a) segue que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X, quando $n \to \infty$. De (1.2.4) concluimos que

$$m + o(1) = I(u_n) = \frac{q-p}{pq}\|u_n\|^p + \frac{(q-p\beta)}{pq}\beta^{p-1}||u_n|^{\beta-1}u_n^{'}|_p^p.$$

Da Proposição 1.5 e usando o fato da norma ser semi-continua inferiormente obtemos que

$$\begin{aligned}
m &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) \\
&\geq \frac{q-p}{pq}\|u\|^p + \frac{(q-p\beta)}{pq}\beta^{p-1}K_0||u|^{\beta-1}u^{'}|_p^p \\
&\quad + \frac{(q-p\beta)}{pq}\beta^{p-1}\liminf_{n\to\infty}||v_n|^{\beta-1}v_n^{'}|_p^p \\
&\geq \frac{q-p}{pq}\|u\|^p + \frac{(q-p\beta)}{pq}\beta^{p-1}K_0||u|^{\beta-1}u^{'}|_p^p = I(u).
\end{aligned}$$

Assim $I(u) \leq m$. Como $u \in M$, segue que $I(u) = m$. $\blacksquare$

Para provar a Proposição 1.5, usaremos o seguinte lema:

Lema 1.7. *Seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para I tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Então*

$$u_n' \to u' \ \ q.\ t.\ p.\ em\ \ \mathbb{R}, \quad quando\ n \to \infty.$$

A prova deste Lema segue adaptando alguns argumentos usados por Boccardo e Murat em [11] (veja também, [6] e [44]).

De fato, defina a família de funções

$$\tau_\eta(s) = \begin{cases} s, & \text{se} \quad |s| \le \eta \\ \eta\frac{s}{|s|}, & \text{se} \quad |s| > \eta. \end{cases}$$

Fixe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ e tome uma função corte $\phi_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\phi_K \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \le \phi_K \le 1 \ \text{ em } \ \mathbb{R} \ \text{ e } \ \phi_K = 1 \text{ em } K.$$

Considere a função teste $\phi_K \tau_\eta(u_n - u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Desde que $(u_n) \subset M$ é uma sequência minimizante para I, pelo Princípio Variacional de Ekeland (veja Apêndice, Teorema A.3 e [57]), podemos supor que u_n satisfaz

$$I(u_n) \to m \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0, \ \ \textit{quando} \ \ n \to \infty.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} o(1) &= I'(u_n)\phi_K\tau_\eta(u_n-u) - I'(u)\phi_K\tau_\eta(u_n-u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right](\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx \\ &+ K_0\int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx \\ &+ K_0\int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u_n|^{p(\beta-1)}|u_n'|^{p-2}u_n' - |u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right](\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx \\ &- \int_{\mathbb{R}}\left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo o termo $|u_n|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'$ dentro da quarta integral concluimos que

$$
\begin{aligned}
o(1) &= I'(u_n)\phi_K\tau_\eta(u_n-u) - I'(u)\phi_K\tau_\eta(u_n-u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[1+K_0\beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right]\left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right](\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx \\
&\quad + K_0\int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx \\
&\quad + K_0\int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right]|u'|^{p-2}u'(\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx. \qquad (1.2.5)
\end{aligned}
$$

Afirmativa 1.8. *Afirmamos que*

(a) *Se $V(x)$ é limitado então*

$$\left|\int_K V(x)\left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx\right| = o(1).$$

(b)

$$\left|\int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx\right| = o(1).$$

(c)

$$\left|\int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right]|u'|^{p-2}u'(\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx\right| = o(1).$$

(d)

$$\left|\int_K \left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx\right| \le C\eta.$$

(e)

$$\limsup_{n\to\infty} g_n \le C\eta,$$

onde

$$g_n \equiv \left| \int_K \left[1 + \beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right] \left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right] (\phi_K \tau_\eta(u_n - u))' dx \right|.$$

Assumindo a Afirmativa acima, concluimos a prova do Lema 1.7. De fato, defina as funções e_n por

$$e_n(x) = \left[1 + K_0\beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right] \left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right] (\tau_\eta(u_n - u))'.$$

Desde que $\left[1 + K_0\beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right] > 0$, da desigualdade (veja Apêndice, Lema A.1 e também [44, 51])

$$\left[|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right](x-y) \;\; \geq \;\; \begin{cases} C\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{se} \quad 1 < p < 2 \\ \\ C|x-y|^p & \text{se} \quad p \geq 2, \; \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.2.6}$$

concluimos que $e_n \geq 0$. Afirmamos também que

$$\int_{\mathbb{R}} e_n(x) dx < \infty.$$

De fato, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} \left[1 + \beta^{p-1}K_0|u_n|^{p(\beta-1)}\right] \left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right] (\tau_\eta(u_n - u))' \right| \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left[1 + \beta^{p-1}K_0|u_n|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{p}{p-1}} \left||u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left|\tau_\eta'(u_n - u)\right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Usando a Observação 1.1 e a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ concluimos que a primeira integral é limitada. A segunda integral é também limitada porque a função $\tau_\eta(u_n-u)$ é limitada em X.

Fixe θ com $0<\theta<1$. Considere um conjunto compacto $K\subset\mathbb{R}$ e defina

$$S_n^\eta = \{x\in K/|u_n-u|\leq\eta\} \text{ e } G_n^\eta = \{x\in K/|u_n-u|>\eta\}.$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_K e_n^\theta(x)dx = \int_{S_n^\eta} e_n^\theta(x)dx + \int_{G_n^\eta} e_n^\theta(x)dx \\
&\leq \left\{\int_{S_n^\eta}\left(e_n^\theta(x)\right)^{\frac{1}{\theta}}dx\right\}^\theta\left\{\int_{S_n^\eta}dx\right\}^{1-\theta} + \left\{\int_{G_n^\eta}\left(e_n^\theta(x)\right)^{\frac{1}{\theta}}dx\right\}^\theta\left\{\int_{G_n^\eta}dx\right\}^{1-\theta} \\
&= \left\{\int_{S_n^\eta} e_n(x)dx\right\}^\theta |S_n^\eta|^{1-\theta} + \left\{\int_{G_n^\eta} e_n(x)dx\right\}^\theta |G_n^\eta|^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Agora fixe η; então $|G_n^\eta|\to 0$ quando $n\to\infty$ porque $u_n\to u$ uniformemente em K e q. t. p., quando $n\to\infty$. Da limitação uniforme de (e_n) em $L^1(\mathbb{R})$ obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_K e_n^\theta(x)dx \leq (C\eta)^\theta\,|S_n^\eta|^{1-\theta}.$$

Fazendo $\eta\to 0$ conseguimos que $e_n^\theta\to 0$ em $L^1(K)$, quando $n\to\infty$. Portanto, cobrindo $\mathbb{R}$ por uma sequência de conjuntos compactos encaixantes, isto é, $\mathbb{R}=\cup K_i$, $K_1\subset K_2\subset K_3\subset ...$, o termo dentro da integral tende a zero q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n\to\infty$. Usando a desigualdade (1.2.6) e o fato de $\left[1+\beta^{p-1}K_0|u_n|^{p(\beta-1)}\right]>0$ concluimos que

$$u_n' \to u' \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}, \text{ quando } n\to\infty. \quad \blacksquare$$

Prova da Afirmativa 1.8:

(a) Desde que $\tau_\eta(u_n-u)$ é limitada em X, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli obtemos que $\tau_\eta(u_n-u)\to 0$ em conjuntos compactos de $\mathbb{R}$, quando $n\to\infty$. Portanto, como

V é limitada, o item (a) segue porque

$$|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \ \text{ é limitada em } L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}).$$

De fato, usando que u and $u_n \in L^p(\mathbb{R})$, a imersão $W^{1,p}(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$ é contínua, a desigualdade de Hölder e a desigualdade $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left\{ \int_K \left| |u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le \left[2^{\frac{p}{p-1}-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[2^{\frac{p-1}{p}-1} \right] \left\{ \left[\int_K \left| |u_n|^{p-2}u_n \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} + \left[\int_K \left| |u|^{p-2}u \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \right\} \\
&= \left\{ \left[\int_K |u_n|^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} + \left[\int_K |u|^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \right\} \\
&\le C[\|u_n\|^{p-1} + \|u\|^{p-1}].
\end{aligned}$$

(b) Temos que a sequência u_n é uniformente equicontínua. De fato, usando que u_n é limitada em K e a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_n(y)| &= \int_x^y |u_n(s)'| ds \\
&\le \left\{ \int_x^y (|u_n(s)'|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_x^y ds \right\}^{\frac{p-1}{p}} \qquad \le M|x-y|^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto segue do Teorema de Arzelá-Ascoli que existe uma subsequência de (u_n) (que denotaremos também por (u_n)) que converge uniformemente para u, em K, quando $n \to \infty$.

Por outro lado, u_n e $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, u_n' e $u' \in L^p(\mathbb{R})$ e τ_η é contínua em K e portanto $\tau_\eta(u_n - u) \to 0$ uniformemente quando $n \to \infty$. Logo dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|\tau_\eta(u_n - u)| < \epsilon$ em K, se $n \ge N$. Assim

$$\begin{aligned}
I :\equiv &\left| \int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p \right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx \right| \\
&\le \epsilon \int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p \right] dx \le M\epsilon.
\end{aligned}$$

Desde que ϵ é arbitrário segue que $I = o(1)$, quando $n \to \infty$.

(c) Note que pelo teorema de Arzelá-Ascoli obtemos que

$$\left||u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right| \to 0,$$

uniformemente em conjuntos compactos , quando $n \to \infty$. Agora, usando este fato e a desigualdade de Hölder, concluimos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_K \beta^{p-1}\left[|u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right]|u'|^{p-2}u'(\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx\right| \\
&\leq \beta^{p-1}\left\{\left[\int_K \left[\left||u_n|^{p(\beta-1)} - u|^{p(\beta-1)}\right||u'|^{p-2}u\right]^{\frac{p}{p-1}}dx\right]^{\frac{p-1}{p}}\right\} \\
&\quad \left\{\int_K \left[\tau_\eta'(u_n-u)\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M\left\{\int_K \left||u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right|^{\frac{p}{p-1}}|u'|^p dx\right\} \\
&= o(1), \text{ para algum } M > 0.
\end{aligned}$$

(d) Usando a desigualdade de Hölder, a limitação de ϕ_K e a Observação 1.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_K \left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right]\phi_K\tau_\eta(u_n-u)dx\right| \\
&\leq \eta\left\{\int_K \left||u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right|^{\frac{q}{q-1}}dx\right\}^{\frac{q-1}{q}} \\
&\leq \eta\left[2^{\frac{q}{q-1}-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left[2^{\frac{q-1}{q}-1}\right]\left\{\left[\int_K \left||u_n|^{q-2}u_n\right|^{\frac{q}{q-1}}dx\right]^{\frac{q-1}{q}} + \left[\int_K \left||u|^{q-2}u\right|^{\frac{q}{q-1}}dx\right]^{\frac{q-1}{q}}\right\} \\
&= \eta\left\{\left[\int_K |u_n|^q dx\right]^{\frac{q-1}{q}} + \left[\int_K |u|^q dx\right]^{\frac{q-1}{q}}\right\} \\
&\leq \eta N[\|u_n\|^{q-1} + \|u\|^{q-1}] := C\eta, \text{ para algum } C > 0 \text{ e } N > 0.
\end{aligned}$$

(e) Este item segue tomando o limite superior na equação (1.2.5) e usando os itens anteriores, de (a) à (d), da Afirmativa 1.8 . ■

Prova da Proposição 1.5:
Desde que $v_n = u_n - u$, obtemos que

$$\left||u_n|^{\beta-1}u_n'\right|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |v_n' + u'|^p \, |v_n + u|^{p(\beta-1)} \, dx.$$

Considere a desigualdade

$$|A+B|^p \geq |A|^p + |B|^p - \mu \left[|B|^{p-1}|A| + |A|^{p-1}|B| \right],$$

onde $A, B \in \mathbb{R}^+$ e $\mu = \mu(p)$ é uma constante positiva (veja Apêndice, seção A.1). Usando esta desigualdade, colocando os expoentes p e $p(\beta-1)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left||u_n|^{\beta-1}u_n'\right|_p^p \geq \int_{\mathbb{R}} \left\{ |v_n'|^p + |u'|^p - \mu \left[|u'|^{p-1}|v_n'| + |v_n'|^{p-1}|u'| \right] \right\} \\
&\left\{ |v_n|^{p(\beta-1)} + |u|^{p(\beta-1)} - \nu \left[|u|^{p(\beta-1)-1}|v_n| + |v_n|^{p(\beta-1)-1}|u| \right] \right\} dx \\
\equiv &\sum_{j=1}^{j=16} I_j,
\end{aligned}$$

onde as integrais I_j são definidas abaixo.

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| v_n' |v_n|^{\beta-1} \right|^p dx,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \left| v_n' |u|^{\beta-1} \right|^p dx,$$

$$I_3 = -\nu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^p \, |u|^{p(\beta-1)-1}|v_n| dx,$$

$$I_4 = -\nu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^p \, |v_n|^{p(\beta-1)-1}|u| dx,$$

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}} \left|u'|v_n|^{\beta-1}\right|^p dx,$$

$$I_6 = \int_{\mathbb{R}} \left|u'|u|^{\beta-1}\right|^p dx,$$

$$I_7 = -\nu \int_{\mathbb{R}} |u'|^p \, |v_n|^{p(\beta-1)-1}|u|dx,$$

$$I_8 = -\nu \int_{\mathbb{R}} |u'|^p \, |u|^{p(\beta-1)-1}|v_n|dx,$$

$$I_9 = -\mu \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1} \, |v_n|^{p(\beta-1)}|v_n'|dx,$$

$$I_{10} = -\mu \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1} \, |u|^{p(\beta-1)}|v_n'|dx$$

$$I_{11} = \mu\nu \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1} \, |u|^{p(\beta-1)-1}|v_n'||v_n|dx,$$

$$I_{12} = \mu\nu \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1} \, |v_n|^{p(\beta-1)-1}|v_n'||u|dx,$$

$$I_{13} = \mu\nu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^{p-1} \, |u|^{p(\beta-1)-1}|v_n||u'|dx,$$

$$I_{14} = \mu\nu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^{p-1} \, |v_n|^{p(\beta-1)-1}|u||u'|dx,$$

$$I_{15} = -\mu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^{p-1} \, |v_n|^{p(\beta-1)}|u'|dx$$

e

$$I_{16} = -\mu \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^{p-1} \, |u|^{p(\beta-1)}|u'|dx,$$

onde $\nu = \nu(p(\beta-1))$ e $\mu = \mu(p)$ são contantes positivas.

Claramente, desde que $I_j \geq 0$ se $j = 2, 5, 11, 12, 13$ e 14, a Proposição estará provada se demonstrarmos que as outras integrais convergem para zero, quando $n \to \infty$, exceto para $j = 1$ e $j = 6$.

Desde que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ então

$$\text{dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } R > 0 \text{ tal que } |u(x)| < \varepsilon \ \text{ se } \ |x| > R. \tag{1.2.7}$$

Como a sequência (v_n) é limitada em X, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (veja Apêndice, seção A.7, Teorema A.8) também temos que $v_n \to 0$ uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$. Portanto, dado $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ concluimos que

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ se } |x| \leq R. \tag{1.2.8}$$

Usando (1.2.7) e (1.2.8) e o fato de $\{v_n\}$ ser limitado em $L^\infty(\mathbb{R})$, obtemos que

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^p |u|^{p(\beta-1)-1} |v_n| dx \\ &\leq |u|_\infty^{p(\beta-1)-1} \frac{\varepsilon}{2} \int_{|x|\leq R} |v_n'|^p + \varepsilon C \int_{|x|>R} |v_n'|^p. \end{aligned}$$

Portanto $I_3 \to 0$ quando $n \to \infty$. Analogamente, $I_4 \to 0$ quando $n \to \infty$.

Desde que $u' \in L^p(\mathbb{R})$ e usando o mesmo argumento acima obtemos que $I_7, I_8 \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como antes, $|v_n|_\infty$ é limitado e juntamente com (1.2.8) e a desigualdade de Hölder concluimos que

$$\begin{aligned} I_9 &\equiv \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1} |v_n|^{p(\beta-1)-1} |v_n'| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} C_1 \left[\int_{|x|\leq R} |u'|^p dx\right]^{\frac{p}{p-1}} \left[\int_{|x|\leq R} |v_n'|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + C \left[\int_{|x|>R} |u'|^p\right]^{\frac{p}{p-1}} \left[\int_{|x|>R} |v_n'|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Desde que $u' \in L^p(\mathbb{R})$ então dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher R tal que $\int_{|x|>R} |u'|^p dx < \varepsilon$. Logo $I_9 \to 0$ quando $n \to \infty$.

Recordando que $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, pelo Lema 1.7 temos que $v_n' \to 0$ q. t. p. em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$. Desde que $|u'|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})$ e $v_n' \rightharpoonup 0$ fracamente em $L^p(\mathbb{R})$ quando

$n \to \infty$, pelo Teorema A.9 (veja Apêndice, seção A.8) concluimos que

$$I_{10} \equiv \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-1}|u|^{p(\beta-1)-1}|v_n'|dx$$

tende a zero, quando $n \to \infty$.

Argumentando como no caso I_{10} e usando o fato que $|v_n'|^{p-1}$ é também limitado em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})$ e $v_n' \rightharpoonup 0$ fracamente em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$, obtemos que

$$I_{15}, I_{16} \text{ tendem a zero, quando } n \to \infty. \quad \blacksquare$$

1.3 Prova do Teorema 0.1

Seja $(u_n) \subset M$ uma sequência minimizante para I. Do Lema 1.4-(a), u_n é limitada em X e portanto $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X, quando $n \to \infty$. Provaremos o Teorema 0.1 distinguindo as três condições que o potencial V satisfaz.

Caso I (V_1 é assumido). De (V_0) e (V_1) temos que X está continuamente e compactamente imerso no espaço $L^{s+1}(\mathbb{R})$, para todo $s \geq p$ (veja Bartsh e Wang em [7]). Assim $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Usando o Lema 1.4-(b) segue que $u \neq 0$.

Seja $v_n = u_{n-u}$. Vamos provar que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p = 0$ e então $u_n \to u$ em X, quando $n \to \infty$.

Suponha por contradição que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p \to l > 0$. Então temos, passando a uma subsequência,

$$I'(v_n) \cdot v_n = \|v_n\|^p + \beta^p K_0 |v_n'|v_n|^{\beta-1}|_p^p - |v_n|_q^q \geq \|v_n\|^p - |v_n|_q^q.$$

Tomando o limite inferior, quando $n \to \infty$, de ambos os lados e usando o fato do $\lim_{n\to\infty} |v_n|_q^q = 0$, concluimos que

$$\liminf_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n > 0.$$

Do Lema 1.4-(c) temos que $I'(u)\cdot u < 0$. Desde que $u \neq 0$, pelo Lema 1.2-(b) existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda u \in M$. Usando o Lema de Brézis e Lieb A.2 (veja Apêndice, seção A.2), obtemos que a sequência (u_n) satisfaz

$$\|u_n\|_p^p = \|v_n\|_p^p + \|u\|_p^p + o(1), \text{ quando } n \to \infty \tag{1.3.1}$$

e

$$|u_n|_q^q = |v_n|_q^q + |u|_q^q + o(1), \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.3.2}$$

Segue de (1.3.1), (1.3.2) e da definição de m dado pelo Lema 1.2-(e) que

$$\begin{aligned} m + o(1) &= I(u_n) \\ &= \frac{\beta-1}{p\beta}\|v_n\|^p + \frac{\beta-1}{p\beta}\|u\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|v_n|_q^q + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|u|_q^q + o(1) \\ &\geq \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda^{-p}\|\lambda u\|^p + \lambda^{-q}\frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda u|_q^q + o(1). \end{aligned}$$

Desde que $0 < \lambda < 1$ então

$$m > \frac{\beta-1}{p\beta}\|\lambda u\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda u|_q^q = I(\lambda u)|_M,$$

que contradiz o fato de $\lambda u \in M$. Portanto $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p = 0$.

Caso II (V_2 é assumido). Desde que u_n satisfaz o Lema 1.4-(b) então u_n não converge para zero em $L^q(\mathbb{R})$, $n \to \infty$. Logo por um resultado devido a Lions, veja Apêndice, seção A.9, Lema A10 (veja também [57, Lema 1.21]) afirmamos que existe $\gamma, r > 0$ e $y_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{y_n-r}^{y_n+r} |u_n(x)|^p dx \geq \gamma > 0. \tag{1.3.3}$$

Podemos assumir que y_n é um múltiplo inteiro do período p de V, se necessário, tome a constante r suficientemente grande em (1.3.3).

Defina $\overline{u}_n(x) \equiv u_n(x + y_n)$. Desde que V é periódico então $(\overline{u}_n)$ é também uma sequência minimizante, limitada em X e satisfaz (1.3.3) para $y_n = 0$. Isto implica que $\overline{u}_n \rightharpoonup \overline{u}$ fracamente em X, quando $n \to \infty$. Portanto $u \neq 0$.

Vamos provar que $I'(u) \cdot u = 0$. O resultado segue dos Lema 1.6 e Lema 1.2-(d).

Suponha por contradição que $I'(u) \cdot u \neq 0$.

Se $I'(u) \cdot u < 0$, do Lema 1.2-(b) existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda u \in M$. Desde que (u_n) é uma sequência minimizante para I, argumentando como no *caso I* chegamos a uma contradição.

Se $I'(u) \cdot u > 0$, do Lema 1.4-(c) concluimos que $\liminf_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n < 0$. Assim, passando a uma subsequência, $\lim_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n < 0$. Então para n suficientemente grande, do Lema 1.2-(b) existe $0 < \lambda_n < 1$ tal que $\lambda_n v_n \in M$. Além disso, tem-se que $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$.

De fato, se $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n = 1$, tomando uma subsequência tal que, $\lambda_n \to 1$ quando $n \to \infty$, concluimos que

$$I'(v_n) \cdot v_n = I'(\lambda_n v_n) \cdot \lambda_n v_n + o(1), \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n = 0$. Mas isto é uma contradição porque $\lim_{n\to\infty} I'(v_n) \cdot v_n < 0$. Portanto $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$.

Argumentando como no *caso I*, encontramos que

$$\begin{aligned} m + o(1) &= \frac{\beta-1}{p\beta}\|v_n\|^p + \frac{\beta-1}{p\beta}\|u\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|v_n|_q^q + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|u|_q^q + o(1) \\ &\geq \frac{\beta-1}{p\beta}\|v_n\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|v_n|_q^q + o(1) \\ &= \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_n^{-p}\|\lambda_n v_n\|^p + \lambda_n^{-q}\frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n v_n|_q^q + o(1). \end{aligned}$$

Desde que $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$, segue que

$$m > \frac{\beta-1}{p\beta}\|\lambda_n v_n\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n v_n|_q^q = I(\lambda_n v_n)|_M,$$

que é uma contradição porque $\lambda_n v_n \in M$. Portanto $I'(u) \cdot u = 0$.

Caso III (V_3 é assumido). Seja

$$I_p(u) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{p} \left[|u'|^p + V_p(x)|u|^p \right] + \frac{\beta^{p-1}}{p} K_0 ||u|^{\beta-1}u'|^p - \frac{1}{q}|u|^q \right\} dx.$$

vamos usar as notações $m_p,\ M_p,\ I_p'$ e $\bar{\lambda}_u$ para este caso.
Do *Caso II* sabemos que I_p tem um ponto crítico $\bar{u} \in M_p$, onde

$$M_p = \left\{ u \in X \setminus \{0\} :\ I_p'(u) \cdot u = 0 \right\}.$$

A prova de que $\bar{u} > 0$ em $\mathbb{R}$, vai ser feita no final deste capítulo. Demonstraremos este fato aplicando o Princípio do Máximo de Vázquez. Veremos que esta prova independe das condiçãoes impostas sobre o potencial V. Então a partir de agora vamos asssumir que $\bar{u} > 0$.

Se V não é constante, de (V_3) concluimos que $I'(\bar{u}) \cdot \bar{u} < I_p(\bar{u}) \cdot \bar{u} = 0$. Portanto do Lema 1.2-(b) existe um único $0 < \lambda_{\bar{u}} < 1$ tal que $\lambda_{\bar{u}}\bar{u} \in M$.

Por outro lado, usando novamente (V_3) temos que

$$\begin{aligned} I(\lambda_{\bar{u}}\bar{u}) &= \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_{\bar{u}}^p \int_{\mathbb{R}} \left[|\bar{u}'|^p + V(x)|\bar{u}|^p \right] dx + \lambda_{\bar{u}}^p \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\bar{u}|_q^q \\ &< \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_{\bar{u}}^p \int_{\mathbb{R}} \left[|\bar{u}'|^p + V_p(x)|\bar{u}|^p \right] dx + \lambda_{\bar{u}}^p \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\bar{u}|_q^q \\ &= I_p(\bar{u}) = m_p\,. \end{aligned}$$

Logo

$$m \leq I(\lambda_{\bar{u}}\bar{u}) < m_p\,. \tag{1.3.4}$$

Seja (u_n) uma sequência minimizante para I. Pelo Lema 1.4-(a) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em X, quando $n \to \infty$. Vamos provar que $u \neq 0$ e $I'(u) \cdot u = 0$ e o resultado segue do Lema 1.6 e Lema 1.2-(d).

Suponha que $u \equiv 0$. De (V_3), dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|V(x) - V_p(x)| \leq \varepsilon \ \text{ se } \ |x| > R, \tag{1.3.5}$$

e

$$|V(x) - V_p| \leq 2|V_p| \ \text{ se } |x| \leq R. \tag{1.3.6}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u \equiv 0$ fracamente em X, quando $n \to \infty$, então $|u_n|_p^p \to 0$, quando $n \to \infty$, em partes compactas de $\mathbb{R}$. Logo

$$|u_n|_p^p \leq \frac{\varepsilon}{R} \ \text{ if } \ |x| \leq R, \ \text{para algum } R > 0. \tag{1.3.7}$$

Segue de (1.3.5), (1.3.6) e (1.3.7) que

$$\begin{aligned} I(u_n) - I_p(u_n) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p} \left[V(x) - V_p\right] |u_n|^p dx \\ &\leq \frac{2N}{p} \int_{|x| \leq R} |u_n|^p dx + \frac{\varepsilon}{p} \int_{|x|>R} |u_n|^p dx \\ &\leq \frac{4NR}{p} \frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon}{p} \|u_n\|^p, \ \text{para algum } N > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} I_p(u_n) = \lim_{n\to\infty} I(u_n) = m. \tag{1.3.8}$$

Analogamente, temos que

$$\lim_{n\to\infty} I_p'(u_n) \cdot u_n = \lim_{n\to\infty} I'(u_n) \cdot u_n = 0. \tag{1.3.9}$$

Então existe uma subsequência (n_k) e $\bar{\lambda}_{n_k} > 0$ tal que $\bar{\lambda}_{n_k} u_{n_k} \equiv \bar{\lambda}_n u_n \in M_p$.

Vamos provar que $\bar{\lambda}_n$ é limitado. Observe que

$$0 = \bar{\lambda}_n^p \|u_n\|^p + \beta^p \bar{\lambda}_n^{p\beta} K |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p - \bar{\lambda}_n^q |u_n|_q^q + o(1).$$

Disto obtemos que

$$\|u_n\|^p = \bar{\lambda}_n^{p(\beta-1)} \left[\bar{\lambda}_n^{q-p\beta} |u_n|_q^q - \beta^p K |u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p\right] + o(1). \tag{1.3.10}$$

Como $\|u_n\|^p$ e $|u_n'|u_n|^{\beta-1}|_p^p$ são limitadas, usando o Lema 1.4-(b) deduzimos que $\bar{\lambda}_n$ é limitado.

Por outro lado, $\bar{\lambda}_n$ não converge para zero, quando $n \to \infty$; caso contrário,

$$\begin{aligned} 0 < m &\leq I(\bar{\lambda}_n u_n) \\ &= \frac{\beta - 1}{p\beta} \bar{\lambda}_n^p \|u_n\|^p + \bar{\lambda}_n^q \frac{q - p\beta}{pq\beta} |u|_q^q \to 0, \text{ quando } n \to \infty, \end{aligned}$$

que é uma contradição.

Usando (1.3.8), a propriedade da variedade de Nehari, isto é, $I(\lambda u) \leq I(u)$, para todo $u \in M$, $\lambda > 0$ e o fato de $u_n \in M$, concluimos que

$$\begin{aligned} m_p &\leq I_p(\bar{\lambda}_n u_n) = I(\bar{\lambda}_n u_n) + o(1) \\ &\leq I(u_n) + o(1) = m + o(1), \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade foi usado que $\bar{\lambda}_n$ é limitado. Mas esta desigualdade contradiz (1.3.4). Portanto $u \neq 0$.

Seja $v_n = u_n - u$. Agora vamos provar que

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty} I_p^{'}(v_n) \cdot v_n + I^{'}(u) \cdot u. \tag{1.3.11}$$

De fato, do Lema 1.4-(c) concluimos que

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \liminf_{n\to\infty} I^{'}(v_n)\cdot v_n + I^{'}(u)\cdot u \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} (V(x)-V_p(x))|v_n|^p dx \right. \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[|v_n'|^p + V_p(x)|v_n|^p\right] dx + \beta^{p-1}||v_n|^{\beta-1}v_n'|_p^p - |v_n'|_q^q\Big] + I^{'}(u)\cdot u \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[I_p^{'}(v_n)\cdot v_n + \int_{\mathbb{R}} (V(x)-V_p(x))|v_n|^p dx\right] + I^{'}(u)\cdot u.
\end{aligned}
$$

Por (V_3) e aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}} (V_p - V)\left[|u_n|^p - |u|^p\right] dx\right| \\
&= \int_{|x|\leq R} (V_p - V)\left||u_n|^p - |u|^p\right| dx + \int_{|x|>R} (V_p - V)\left||u_n|^p - |u|^p\right| dx = o(1).
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\left|\int_{\mathbb{R}} (V_p - V)|v_n|^p dx\right| = o(1), \text{ quando } n \to \infty
$$

e

$$
0 \geq \liminf_{n\to\infty} I_p^{'}(v_n).v_n + I^{'}(u).u.
$$

Se $I'(u)\cdot u < 0$, do Lema 1.2-(b) existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda u \in M$. Desde que (u_n) é uma sequência minimizante e $u \neq 0$, argumentando como no *Caso I* chegamos a uma contradição.

Se $I'(u)\cdot u > 0$, de (1.3.11) concluimos que $\liminf_{n\to\infty} I_p'(v_n)\cdot v_n < 0$. Assim, passando uma subsequência, $\lim_{n\to\infty} I_p'(v_n)\cdot v_n < 0$. Agora vamos argumentar como na prova do *Caso II*, onde obtemos, do Lema 1.2-(b), para n suficientemente grande, que existe $0 < \lambda_n < 1$ tal que $\lambda_n v_n \in M_p$. Além disto, tem-se que $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$. Caso contrário, se $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n = 1$, passando a uma subsequência, $\lambda_n \to 1$ quando $n \to \infty$, concluimos que

$$
I_p'(v_n)\cdot v_n = I_p'(\lambda_n v_n)\cdot \lambda_n v_n + o(1).
$$

Portanto $\lim_{n\to\infty} I_p'(v_n)\cdot v_n = 0$ e isto é uma contradição. Logo $\limsup_{n\to\infty}\lambda_n < 1$.

Observe que

$$\begin{aligned} m + o(1) &= I(u_n) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_n^{-p}\left[|\lambda_n v_n'|^p + V_p(x)|\lambda_n v_n|^p\right]dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_n^{-p}\left[V(x) - V_p(x)|\lambda_n v_n|^p\right]dx \\ &\quad + \lambda_n^{-q}\frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n v_n|_q^q + o(1). \end{aligned}$$

Desde que $\limsup_{n\to\infty}\lambda_n < 1$, por (V_3) segue que

$$m > \frac{\beta-1}{p\beta}\|\lambda_n v_n\|^p + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n v_n|_q^q = I_p(\lambda_n v_n)|_{M_p},$$

que é uma contradição porque $\lambda_n v_n \in M_p$. Portanto $I'(u).u = 0$.

Logo provamos que o problema (0.0.5) possui uma solução $u \neq 0$ se uma das condições V_1, V_2 ou V_3 for satisfeita.

Temos que $(|u_n|)$ é também uma sequência minimizante para I, pois $m = I(u_n) = I(|u_n|)$. Assim $u \geq 0$.

Resta mostrar que $u > 0$. Vamos provar este fato aplicando o Princípio do Máximo de Vázquez (veja Apêndice, Teorema A.7). Para aplicar Vázquez, temos que fazer uma mudança de variáveis para eliminar o termo não linear (o termo que é multiplicado por K_0) do operador L, definido pela igualdade (0.0.2). Vamos usar um argumento desenvolvido por Liu, Wang e Wang em [38] (veja também [17] para $p = 2$ e Severo em [50] para $p \neq 2$, $\beta = 2$ e $n \geq p > 1$).

Vamos fazer a mudança de variáveis $u = f(v)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definido por

$$f(0) = 0, \;\; f(-t) = -f(t) \text{ em } (-\infty, 0]$$

e

$$f'(t) = \frac{1}{\left[1 + \beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}}} \text{ em } [0,\infty).$$

Observação 1.9. *A função f existe pois é solução de uma equação diferencial ordinária. De fato, defina a função*

$$g(t,f) = \frac{1}{[1+\beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}]^{\frac{1}{p}}}\ .$$

Temos que g é limitada em $[0,\infty)$ e portanto f é lipschitziana em todo sub-intervalo de $(-\infty,0]$. Devido a um resultado de EDO (Sotomayor, Proposição 4, pag.15), o problema

$$f'(t) = g(t,f),\ f(0) = 0,$$

tem uma única solução $\phi(t)$ definida no intervalo $[0,b]$, tal que $\phi(0) = 0$. Agora, considere o problema

$$f'(t) = g(t,f),\ f(b) = \phi(b).$$

Usando novamente o fato de f ser lipschitiziana, podemos estender $\phi(t)$ para todo t pertencente a $[0,c]$, com $c > b$. Logo, podemos estender $\phi(t)$ para todo t em $[0,\infty)$. Além disso, como f é ímpar, a solução $\phi(t)$ vai estar definido em toda reta.

Além disso, f é $C^2(\mathbb{R})$ e invertível. De fato, provamos acima que a função f é unicamente definida. Portanto f é invertível. Como f' é de classe C^1 no intervalo $[0,\infty)$ então f é de classe C^2.

Portanto se u é uma solução clássica do problema (0.0.5), fazendo a mudança de variáveis $u = f(v)$, obtemos a seguinte equação

$$-\Delta_p v \equiv -(|v'|^{p-2}v')' = \frac{1}{[1+\beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}]^{\frac{1}{p}}} H(x,v), \quad x \text{ em } \mathbb{R}, \tag{1.3.12}$$

onde

$$H(x,v) = -V(x)|f(v)|^{p-2}f(v) + |f(v)|^{q-2}f(v).$$

Logo

$$-(|v'|^{p-2}v')' + \left[V(x)|f(v)|^{p-2}f(v)\right] f'(v) = f'(v)\left[|f(v)|^{q-2}f(v)\right], \quad x \text{ em } \mathbb{R}.$$

Como $u \neq 0$ então $v \neq 0$. Desde que $f' > 0$ e f é crescente, obtemos que

$$-(|v'|^{p-2}v')' + \left[V(x)|f(v)|^{p-2}f(v)\right] f'(v) \geq 0, \quad \text{q. t. p. em } \mathbb{R}.$$

Defina, como em Vázquez (veja Apêndice, seção A6)

$$\beta(s) \equiv \left[V(x)|f(v)|^{p-2}f(v)\right] f'(v).$$

Pelo Lema 2.1-(c), (e) temos que

$$[\beta(s)s]^{-\frac{1}{p}} \geq \left[\frac{1}{\beta}f(s)|f(v)|^{p-2}f(v)\right]^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{f(s)} \geq \frac{1}{|s|}.$$

Portanto

$$\int_0^1 [\beta(s)s]^{-\frac{1}{p}}\, ds = \infty.$$

Então, aplicando o Princípio do Máximo de Vázquez obtemos que $v > 0$ em $\mathbb{R}$. Como f é crescente $u = f(v)$ é também estritamente positiva em $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

—2—

Multiplicidade de soluções

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos uma perturbação não autônoma do problema (0.0.5), a saber,

$$\begin{cases} Lu + V(x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u + g(x), \ \text{ em } \ \mathbb{R}, \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde o operador L é definido pela igualdade (0.0.2), $K_0 > 0$, $\beta > 1$, $p > 1$, $q \geq p\beta$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in L^s(\mathbb{R})$ para algum $s \geq 1$ e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial satisfazendo a condição básica (V_0).

Considerando $K_0 = 1$, vamos provar, via o método variacional, a existência de duas soluções positivas para o problema (0.0.1).

Seja $I : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (0.0.1),

$$\begin{aligned} I(u) \ \ \equiv \ \ & \int_{\mathbb{R}} \{\frac{1}{p} \left[|u'|^p + V(x)|u|^p\right] dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^{p-1}}{p} |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p dx \\ & - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q}|u|^q - g(x)u(x)\}dx \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

e sua derivada de Fréchet dada pela expressão

$$
\begin{aligned}
I'(u)\cdot z \;=\; & \int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^{p-2}u'\right] z' dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|u|^{p-2}u\right] z dx \\
& + \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^{p}\right] z dx \\
& + \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right] z' dx \\
& - \int_{\mathbb{R}} \left[|u|^{q-2}u\right] z dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) z(x) dx. \qquad (2.1.2)
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar mais adiante que soluções fracas do problema (0.0.1) são obtidas como limite fraco de uma determinada sequência. Devido a segunda integral na expressão de I, bem como a segunda integral na expressão de I', possuir termo com a potência crítica da imersão de Sobolev, não podemos usar teoremas de convergência para obter o resultado.

Para contornar essa dificuldade, vamos usar a mudança de variáveis definida no final do Capítulo 1 para eliminar o termo não linear do operador L (o termo que é multiplicado por K_0). Seja $u = f(v)$, onde a função f é dada por

$$f(0) = 0, \quad f(-t) = -f(t) \text{ em } (-\infty, 0]$$

e

$$f'(t) = \frac{1}{\left[1+\beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}}} \text{ em } [0, \infty).$$

Temos também que f satisfaz as seguintes propriedades dadas no lema abaixo

Lema 2.1.
(a) f é unicamente definida, $C^2(\mathbb{R})$ e invertível.

(b) $|f'(t)| \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) $|f(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) $\frac{f(t)}{t} \to 1$, quando $t \to 0$.

(e) Para $t \geq 0$ temos que $\frac{1}{\beta} f(t) \leq t f'(t) \leq f(t)$.

(f) $|f(t)| \leq \beta^{\frac{1}{p\beta}}|t|^{\frac{1}{\beta}}$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(g) $\frac{f(t)}{t^{\frac{1}{\beta}}} \to C > 0$, *quando* $t \to \infty$.

Prova

(a) Foi demonstrado na Observação 1.9.

A prova do item (b) é imediata e a do item (c) segue do teorema do valor médio.

(d) Como uma consequência do teorema do valor médio para integrais, vemos que

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{\left[1 + \beta^{p-1}|f(s)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}}} ds = t \frac{1}{\left[1 + \beta^{p-1}|f(\xi)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}}}$$

onde $\xi \in (0, t)$. Desde que $f(0) = 0$ concluimos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\left[1 + \beta^{p-1}|f(\xi)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}}} = 1.$$

(e) Para provar a primeira desigualdade definimos a função $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $H(t) = \beta t - \left[1 + \beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} f(t)$. Desde que $H(0) = 0$ e usando a definição de f obtemos que

$$H'(t) = (\beta - 1)\frac{1}{1 + \beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}} = (\beta - 1)\left[f'(t)\right]^p \geq 0 \ \text{ para todo } \ t \geq 0.$$

Logo H é uma função não decrescente e a primeira desigualdade está provada. A segunda desigualdade é obtida de modo semelhante.

(f) Para mostrar (f), integramos $f'(t)\left[1 + \beta^{p-1}|f(t)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} = 1$ e obtemos

$$\int_0^t f'(s)\left[1 + \beta^{p-1}|f(s)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} ds = t, \ \text{para } t > 0.$$

Usando a mudança de variável $y = f(s)$, obtemos

$$t = \int_0^{f(t)} \left[1+\beta^{p-1}y^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} dy \geq \beta^{\frac{p-1}{p}} \int_0^{f(t)} y^{\beta-1}dy = \beta^{\frac{p-1}{p}} \frac{f(t)^\beta}{\beta} = \beta^{-\frac{1}{p}} f(t)^\beta.$$

Portanto o item (f) está provado para $t \geq 0$. Para $t < 0$ usamos o fato que f é ímpar.

(g) A desigualdade (e) implica que para todo $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{t^{\frac{1}{\beta}}}\right) = \frac{\beta f'(t)t - f(t)}{t^{\frac{\beta+1}{\beta}}} \geq 0.$$

Logo a função $\frac{f(t)}{t^{\frac{1}{\beta}}}$ é não decrescente para $t > 0$. Este fato juntamente com a estimativa (f), mostra o item (g). $\blacksquare$

Portanto se u é uma solução clássica do problema (0.0.1), fazendo a mudança de variáveis $u = f(v)$, obtemos a equação (1.3.12), a saber,

$$-\Delta_p v \equiv -(|v'|^{p-2}v')' = \frac{1}{[1+\beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}]^{\frac{1}{p}}} H(x,v), \quad x \text{ em } \mathbb{R},$$

onde

$$H(x,v) = -V(x)|f(v)|^{p-2}f(v) + |f(v)|^{q-2}f(v) + g(x).$$

O funcional energia associado a equação (1.3.12) dado por

$$J(v) \equiv \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{p}\left[|v'|^p + V(x)|f(v)|^p\right] - \frac{1}{q}|f(v)|^q - g(x)f(v) \right\} dx \tag{2.1.3}$$

e sua derivada de Fréchet

$$\begin{aligned} J'(v)\cdot w = \quad & \int_{\mathbb{R}} \left[|v'|^{p-2}v'\right] w'dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|f(v)|^{p-2}f(v)f'(v)\right] wdx \\ & - \int_{\mathbb{R}} \left[|f(v)|^{q-2}f(v)f'(v)\right] wdx - \int_{\mathbb{R}} g(x)f'(v)wdx, \qquad (2.1.4) \end{aligned}$$

são bem definidos no espaço $W^{1,p}(\mathbb{R})$, devido a Observação 1.1 do Capítulo 1, a função f satisfazer os itens (b) e (c) do Lema 2.1 e o fato do potencial V ser limitado.

Para provar o Teorema 0.2 e o Teorema 0.3, motivado por argumentos usados em Tarantello [55], Rădulescu e Smets [49], Assunção, Carrião and Miyagaki em [6], necessitaremos de alguns preliminares que serão descritos pelos lemas abaixo.

2.2 Preliminares para o Teorema 0.2

Lema 2.2. *Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I. Então existe uma subsequência de (u_n) (também denotada por (u_n)) tal que*

(a) $u_n \rightharpoonup u$, *fracamente em* $W^{1,p}(\mathbb{R})$, *quando* $n \to \infty$.

(b) $u_n \to u$ *q. t. p em* $\mathbb{R}$, *quando* $n \to \infty$.

(c) $u_n' \to u'$ *q. t. p em* $\mathbb{R}$, *quando* $n \to \infty$.

Prova:

Como $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ é sequência limitada, existe uma subsequência (ainda denotada da mesma forma) fracamente convergente para uma função $u \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$. Portanto, vale o item (a).

Usando o item (a) e passando a uma subsequência, temos a convergência em quase todo ponto em $\mathbb{R}$. Logo, vale o item (b).

A prova do item (c) segue adaptando argumentos usados em Boccardo e Murat [11] (veja também, [6] e [44]) e será feita a seguir.

Defina a família de funções

$$\tau_\eta(s) = \begin{cases} s, & \text{se} \quad |s| \le \eta \\ \eta\frac{s}{|s|}, & \text{se} \quad |s| > \eta. \end{cases}$$

Fixe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ e tome a função corte $\phi_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\phi_K \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \phi_K \leq 1 \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } \phi_K = 1 \text{ em } K.$$

Considere a função teste $\phi_K \tau_\eta(u_n - u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o functional I obtemos que

$$\begin{aligned}
o(1) &= I'(u_n)\phi_K \tau_\eta(u_n - u) - I'(u)\phi_K \tau_\eta(u_n - u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[1 + \beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right] \left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right] (\phi_K \tau_\eta(u_n - u))' dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} V(x) \left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta - 1) \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1} \left[|u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right] |u'|^{p-2}u'(\phi_K \tau_\eta(u_n - u))' dx \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx. \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

Afirmativa 2.3. *Afirmamos que*

(a) *Se $V(x)$ é limitado então*

$$|\textstyle\int_K V(x) \left[|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx| = o(1).$$

(b) $|\int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx| = o(1).$

(c) $|\int_K \left[|u_n|^{p(\beta-1)} - |u|^{p(\beta-1)}\right] |u'|^{p-2}u'(\phi_K \tau_\eta(u_n - u))' dx| = o(1).$

(d) $|\int_K \left[|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u\right] \phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx| \leq C\eta.$

(e) $|\int_{\mathbb{R}} g(x)\phi_K \tau_\eta(u_n - u) dx| = o(1).$

(f) $\limsup_{n\to\infty} g_n \le C\eta,$

onde

$$g_n \equiv |\int_K \left[1+\beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}\right]\left[|u_n'|^{p-2}u_n' - |u'|^{p-2}u'\right](\phi_K\tau_\eta(u_n-u))'dx|.$$

Assumindo a Afirmativa 2.3, a prova do item (c) do Lema 2.2 é análogo a prova do Lema 1.7 do Capítulo 1. ∎

Prova da Afirmativa 2.3:

A prova dos itens (a) até (d) seguem como no Lema 1.7 do Capítulo 1 (veja também, [2, Lema 4.2]). A conclusão do item (e) segue do fato de $g \in L^s(\mathbb{R})$, para algum $s \ge 1$ e (u_n) ser limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$. O item (f) é obtido tomamando o limite superior na equação (2.2.1) e usando os itens de (a) até (e). ∎

Lema 2.4. *$(v_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ é uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional J definido em (2.1.3) se e somente se $u_n = f(v_n) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ é também uma sequência $(PS)_c$ limitada para o funcional I definido em (2.1.1). Além disso, $v_n' \to v'$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$.*

Prova: Para concluir a primeira parte do Lema vamos provar que

(a) $I(u_n) = J(v_n)$;

(b) Se a sequência (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ então a sequência (u_n) é também limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$;

(c) Toda sequência $(PS)_c$ para o funcional J é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Usando que $u_n' = f'(v_n)\cdot v_n'$, o item (a) segue porque

$$|v_n'|^p = |u_n'|^p + \beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}|u_n'|^p.$$

De fato,

$$|u_n'|^p + \beta^{p-1}|u_n|^{p(\beta-1)}|u_n'|^p = |f'(v_n)\cdot v_n'|^p + \beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}|f'(v_n)\cdot v_n'|^p$$
$$= |f'(v_n)\cdot v_n'|^p\left[1+\beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}\right] = |f'(v_n)\cdot v_n'|^p|f'(v_n)|^{-p} = |v_n'|^p.$$

O item (b) segue do Lema 2.1-(c). De fato,

$$\|u_n\| = \|f(v_n)\| \leq \|v_n\| \leq M.$$

Prova o item (c): Usando o Lema 2.1-(e), a desigualdade de Hölder, (V_0) e a Observação 1.1 do Capítulo 1, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta}c_1 + \frac{1}{q}|J'(v_n)|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}))^*} \cdot \|v_n\| + 1 \geq \frac{1}{\beta}J(v_n) - \frac{1}{q}J'(v_n) \cdot v_n \\
= \; & \left(\frac{1}{p\beta} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}} [|v_n'|^p + V(x)|f(v_n)|^p dx] \\
& - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q\beta}\right) \int_{\mathbb{R}} g(x) f(v_n) dx \\
\geq \; & \left(\frac{1}{p\beta} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}} [|v_n'|^p + V_0|f(v_n)|^p dx] - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q\beta}\right) \int_{\mathbb{R}} g(x) f(v_n) dx \\
\geq \; & C_1 \left(\frac{1}{p\beta} - \frac{1}{q}\right) \|v_n\|^p - \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q\beta}|g|_s\right) |v_n|_{s'} \\
\geq \; & C_1 \left(\frac{1}{p\beta} - \frac{1}{q}\right) \|v_n\|^p - C \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{q\beta}\right) |g|_s \|v_n\|.
\end{aligned}$$

Portanto v_n é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Agora vamos provar que $v_n' \to v'$. Recordemos que $u_n' \to u'$, $u_n \to u$ q. t. p. em $\mathbb{R}$ quando $n \to \infty$ (Lemma 2.2) e $[f^{-1}]'(u_n)$ é continua, porque

$$\left[f^{-1}\right]'(t) = \frac{1}{f'(f(-t))} = \left[1 + \beta^{p-1} t^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{quando} \;\; t \geq 0.$$

Usando estes fatos concluimos que

$$v_n' = \left[f^{-1}\right]'(u_n) u_n' \to \left[f^{-1}\right]'(u) u' = v' \;\; \text{q. t. p. em } \mathbb{R}, \;\; \text{quando } \; n \to \infty. \;\; \blacksquare$$

A próxima proposição diz que toda solução fraca da equação (1.3.12) é uma solução fraca da equação (0.0.1).

Proposição 2.5. *Seja $u = f(v)$. Então v é um ponto crítico do funcional J se e somente se u é um ponto crítico do funcional I. Além disso, se $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ então $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$.*

Prova:

Temos pelo Lema (2.1)-(b), (c) que $|u|^p \leq |f(v)|^p \leq |v|^p$ and $|u'|^p \leq |f'(v)v'|^p \leq |v'|^p$. Portanto $\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}} (|u|^p + |u'|^p)\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|v\| \leq \infty$. Desde que v é um ponto crítico do funcional J então v é uma solução fraca do problema (1.3.12). Usando o fato que $f \in C^2(\mathbb{R})$ e que $v \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ (veja [22, 51]), concluimos que $u = f(v) \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$. Logo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$.

A prova da equivalência: v é um ponto crítico do funcional J se e somente se u é um ponto crítico do funcional I, segue se provarmos que

$$I'(u) \cdot z = J'(v) \cdot w, \text{ se } z = f'(v) \cdot w. \tag{2.2.2}$$

Para provar a igualdade (2.2.2), usaremos novamente que $u' = f'(v) \cdot v'$ e $z' = [f'(v)]' \cdot w \ + \ f'(v) \cdot w'$, onde

$$f''(v) = -\beta^{p-1}(\beta-1)|f'(v)|^{p+2}|f(v)|^{p(\beta-1)-2}f(v)v'.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
& |u'|^{p-2}u'z' + \beta^{p-1}|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'z' + \beta^{p-1}(\beta-1)|u|^{p(\beta-1)-1}|u'|^p z \\
= \ & |f'(v)v'|^{p-2}f'(v)v'z'\left[1+\beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}\right] \\
& +\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)-1}|f'(v)v'|^p z \\
= \ & |f'(v)v'|^{p-2}f'(v)v'z'|f'(v)|^{-p} + \beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)-1}|f'(v)v'|^p z \\
= \ & z'|v'|^{p-2}v'|f'(v)|^{-1} + \beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)-1}|f'(v)v'|^p z \\
= \ & |v'|^{p-2}v'|f'(v)|^{-1}\left[-\beta^{p-1}(\beta-1)|f'(v)|^{p+2}|f(v)|^{p(\beta-1)-2}f(v)v'w\right. \\
& \left.+f'(v)w'\right] + \beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)-1}|f'(v)v'|^p f'(v)w \\
= \ & |v'|^{p-2}v'w'.
\end{aligned}$$

Portanto a igualdade (2.2.2) está provada.
■

Agora vamos provar que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale para o funcional J, no nível $c \in \mathbb{R}$, é uma solução fraca do problema (1.3.12).

Lema 2.6. *Seja $(v_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional J no nível $c \in \mathbb{R}$. Se a sequência (v_n) converge fracamente para algum $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$ então v_0 é uma solução fraca do problema (1.3.12).*

Prova:

Considere uma função arbitrária $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Desde que $J'(v_n) \cdot \phi \to 0$ quando $n \to \infty$ vamos provar que $J'(v_0) \cdot \phi = 0$. Portanto, por argumento de densidade, concluimos que $J'(v_0) \cdot w = 0$, para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Logo $J'(u_0) = 0$ e u_0 é uma solução fraca do problema (0.0.1).

Prova de que $J'(v_0) \cdot \phi = 0$, para $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
0 = &\lim_{n\to\infty} J'(v_n) \cdot \phi \\
= &\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} \left[|v_n'|^{p-2} v_n' \right] \phi' dx - \int_{\mathbb{R}} \left[|f(v_n)|^{q-2} f(v_n) f'(v_n) \right] \phi dx \right. \\
&\left. + \int_{\mathbb{R}} V(x) \left[|f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n) \right] \phi dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f'(v_n) \phi dx \right].
\end{aligned}
$$

Denotemos as integrais acima por $J_1(v_n) \cdot \phi$, $J_2(v_n) \cdot \phi$, $J_3(v_n) \cdot \phi$ e $J_4(v_n) \cdot \phi$, respectivamente. Vamos provar que $J_i(v_n) \cdot \phi \to J_i(v_0) \cdot \phi$ quando $n \to \infty$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$.

Temos que $|v_n'|^{p-2} v_n'$ é limitado em $L^{p'}(\mathbb{R})$ onde $p' = \frac{p}{p-1}$. Usando este fato juntamente com o Lema 2.4, obtemos que $|v_n'|^{p-2} v_n' \rightharpoonup |v_0'|^{p-2} v_0'$ quando $n \to \infty$. Desde que ϕ' é limitado em $L^p(\mathbb{R})$, pelo Teorema A.9 (veja apêndice, secão A.8) concluimos que $J_1(v_n) \cdot \phi \to J_1(v_0) \cdot \phi$, quando $n \to \infty$.

Note que (v_n) converge fracamente para algum $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$ então, pelo Lema 2.2, $v_n \to v_0$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$. Segue que $f(v_n) \to f(v_0)$ e $f'(v_n) \to f'(v_0)$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$ (porque $f \in C^2(\mathbb{R})$). Como antes, desde que $V(x)$ é limitado é suficiente provar que $|f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n)$ é limitado em $L^{p'}(\mathbb{R})$ para concluir que $J_3(v_n) \cdot \phi \to J_3(v_0) \cdot \phi$, quando $n \to \infty$.

De fato, pelo Lema 2.1 obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left|V(x)|f(v_n)|^{p-2}f(v_n)f'(v_n)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx| \\
&\leq M\int_{\mathbb{R}} |f(v_n)|^p|f'(v_n)|^{\frac{p}{p-1}}dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |v_n|^p dx \leq \|v_n\|^p < \infty.
\end{aligned}
$$

Argumentando como no caso J_3 e usando a Observação 1.1, também provamos que
$|f(v_n)|^{q-2}f(v_n)f'(v_n)$ é limitado em $L^{\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R})$. Portanto, segue que $J_2(v_n)\cdot\phi \to J_2(v_0)\cdot\phi$ quando $n \to \infty$.

A convergência da integral J_4 segue diretamente do Teorema da Convergência Dominada , porque $g \in L^s(\mathbb{R})$ para algum $s \geq 1$ e f' é continua. ■

2.3 Prova do Teorema 0.2

Vamos provar que existe um número $c < 0$ e $R > 0$ tal que o funcional J possui uma sequência (v_n), $(PS)_c$, limitada, isto é

$$||v_n|| \leq R, \quad J(v_n) \to c \text{ e } J'(v_n) \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde

$$c = \inf\left\{J(v)/v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \;\; e \;\; v \in \bar{B}_R\right\},$$

$$\bar{B}_R = \left\{v \in W^{1,p}(\mathbb{R})/\|v\| \leq R\right\}.$$

Vamos mostrar que c é assumido para algum $v_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $J'(v_0) = 0$.

Usando o Princípio Variacional de Ekeland (veja Apêndice, Teorema A.3) obtemos a seguinte resultado:

Afirmativa 2.7. *Existe uma sequência $(v_n) \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap \bar{B}_R$ tal que*

$$J(v_n) \to c, \quad J'(v_n) \to 0 \quad em \quad (W^{1,p}(\mathbb{R}))^* \quad quando \quad n \to \infty,$$

Assumindo esta Afirmativa, temos que a sequência (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}) \cap \bar{B}_R$ e portanto $v_n \rightharpoonup v$ converge fracamente, quando $n \to \infty$ e $v_n \to v$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.6, obtemos que v é uma solução do problema (1.3.12) e $J'(v) = 0$.

Observe também que pela definição de c e usando que $g \neq 0$, conclui-se que $c < J(0) = 0$.

Agora vamos provar que $J(v_0) = c$. Temos que (v_n) satisfaz

$$
\begin{aligned}
c + o(1) &= J(v_n) \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} \left[|v_n'|^p + V(x)|f(v_n)|^p\right] dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |f(v_n)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(v_n) dx
\end{aligned}
$$

e, para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
0 &= J'(v_n)\cdot w \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[|v_n'|^{p-2}v_n'\right] w' dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|f(v_n)|^{p-2} f(v_n) f'(v_n)\right] w dx \\
&- \int_{\mathbb{R}} \left[|f(v_n)|^{q-2} f(v_n) f'(v_n)\right] w dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f'(v_n) w dx.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $w = w_n = \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}$ obtemos que

$$
\begin{aligned}
w_n' &= f'(v_n)v_n' \left[1 + \beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + f(v_n)\beta^{p-1}\frac{1}{p}p(\beta-1)\left[1 + \beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}\right]^{\frac{1}{p}-1} |f(v_n)|^{p(\beta-1)-2} f(v_n) f'(v_n) v_n' \\
&= v_n' + \beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}|f'(v_n)|^p v_n' \\
&= v_n' \left[1 + \frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1 + \beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right].
\end{aligned}
$$

Observe que w_n é limitada (pelo Lema 2.1-(e)) e portanto

$$
\begin{aligned}
0 &= J'(v_n)\cdot w_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} |v_n'|^p \left[1 + \frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1 + \beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right] dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)|f(v_n)|^p dx \\
&- \int_{\mathbb{R}} |f(v_n)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(v_n) dx.
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}}|f(v_n)|^q dx &= -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}}|v_n'|^p\left[1+\frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right]dx \\
&\quad -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}}V(x)|f(v_n)|^p dx+\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}}g(x)f(v_n)dx.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&c+o(1)=J(v_n) \\
&\quad=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\left[1+\frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right]\right)|v_n'|^p dx \\
&\qquad+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}}V(x)|f(v_n)|^p dx+\left(\frac{1}{q}-1\right)\int_{\mathbb{R}}g(x)f(v_n)dx.
\end{aligned}
$$

Vamos provar que $c \geq J(v)$. Usando este fato, a definição de c e o fato que $v \in \bar{B}_R$ concluimos que $J(v) = c$.

Denotaremos as integrais acima por $J_1(v_n)$, $J_2(v_n)$ e $J_3(v_n)$, respectivamente. Para provar a desigualdade $c \geq J(v)$ usaremos o Lema de Fatou nas integrais $J_1(v_n)$ e $J_2(v_n)$.

De fato, se definirmos

$$
h_n^1(x)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\left[1+\frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right]\right)|v_n'|^p,
$$

desde que $v_n \to v$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, $v_n' \to v'$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$ e f é continua, temos que

$$
h_n^1(x) \to \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\left[1+\frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}}\right]\right)|v'|^p \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}.
$$

Usando a observação 1.1 e o Lema 2.1-(c) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} h_n^1(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\left[1 + \beta^{p-1}(\beta-1)\|v_n\|^{p(\beta-1)}\right]\right)|v_n'|^p dx \leq C\|v_n\|^p < \infty,$$

ou seja, $h_n^1 \in L^1(\mathbb{R})$. Definindo $a \equiv \beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}$ afirmamos que

$$1 + \frac{(\beta-1)a}{1+a} < 1 + \beta - 1 = \beta$$

e portanto

$$\begin{aligned} h_n^1(x) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\left[1 + \frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v_n)|^{p(\beta-1)}}\right]\right)|v_n'|^p \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\beta\right)|v_n'|^p \\ &= \frac{q-p\beta}{pq}|v_n'|^p \geq 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \inf J_1(v_n) \geq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\left[1 + \frac{\beta^{p-1}(\beta-1)|f(v)|^{p(\beta-1)}}{1+\beta^{p-1}|f(v)|^{p(\beta-1)}}\right]\right)|v'|^p dx. \quad (2.3.1)$$

Agora vamos definir

$$h_n^2(x) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)V(x)|f(v_n)|^p.$$

Observe que, quando $n \to \infty$,

$$h_n^2(x) \to \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)V(x)|f(v)|^p \text{ q. t. p em } \mathbb{R},$$

porque $v_n \to v$ q. t. p. sobre $\mathbb{R}$ e f é continua.

Desde que

$$h_n^2(x) \geq 0 \text{ e } h_n^2 \in L^1(\mathbb{R}),$$

novamente usando Lema de Fatou, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \inf J_2(v_n) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}} V(x)|f(v)|^p dx. \tag{2.3.2}$$

Note que a prova da convergência da integral,

$$J_3(v_n) \to J_3(v), \tag{2.3.3}$$

segue direto aplicando o Teorema da Convergência Dominada porque $g \in L^s(\mathbb{R})$ para algum $s \geq 1$ e f é continua. Tomando o limite inferior na igualdade (2.7), usando (2.3.1), (2.3.2) e (2.3.3) concluimos que $c \geq J(v)$.

Observação 2.8. *Desde que $g \in C_+$, a função v pode ser substituido por $|v|$ e então obtemos uma solução não negativa para o problema (0.0.1). Além disso, do fato de $g \in C_+$ temos também que $g \geq 0$ q. t. p em $\mathbb{R}$. Então aplicando o Teorema de Vázquez concluimos que v é estritamente positiva. Portanto a prova do Teorema 0.2 está completa.*

■

Prova da Afirmativa 2.7:

Pelo Lema 2.1-(d), existem constantes $R_1 > 0$ e $C_1 = C_1(R_1) > 0$ tais que

$$|f(v)| \geq C_1|v| \;\; se \;\; |v| \leq R_1. \tag{2.3.4}$$

Usando a desigualdade de Hölder, (2.3.4), Lema 2.1-(c), a condição (V_0) e a Observação 1.1 obtemos que

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{p} \left[|v'|^p + V(x)|f(v)|^p \right] - \frac{1}{q}|f(v)|^q - g(x)f(v) \right\} dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p} \left[|v'|^p + V_0 C_1 |v|^p \right] dx - \frac{C_2}{q}\|v\|^q - \int_{\mathbb{R}} g(x)f(v)dx. \end{aligned}$$

Seja $C = C(R_1) \equiv \min\{1, V_0 C_1^p\}$. Pela desigualdade de Young, concluimos que

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1}{p} C\|v\|^p - \frac{C_2}{q}\|v\|^q - C_3|g|_s\|v\| \\ &\geq \frac{1}{p}(C - \epsilon^p)\|v\|^p - \frac{C_2}{q}\|v\|^q - C_\epsilon |g|_s^{p'}. \end{aligned}$$

Fixando $\epsilon \in (0,1)$, tome números reais $R < R_1$, $\delta_1 > 0$, $\rho_1 > 0$ tais que $J(v) \geq \rho_1$ se $\|v\| = R$ e $|g|_s < \delta_1$. Portanto J é limitado inferiormente sobre $\bar{B}_R$.

Vamos provar que J é semi-continuo inferiormente em $\bar{B}_R$. Relembrando que J é semi-continuo inferiormente em $\bar{B}_R$, se e somente se, para todo z_n tal que $z_n \to z$ em $\bar{B}_R$, quando $n \to \infty$, obtém-se que $\liminf_{n\to\infty} J(z_n) \geq J(z)$.

Observe que

$$\begin{aligned} \liminf\nolimits_{n\to\infty} J(z_n) = \liminf\nolimits_{n\to\infty} \Big\{ &\tfrac{1}{p}\textstyle\int_{\mathbb{R}} |z_n'|^p dx + \tfrac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z_n)|^p dx \\ &- \tfrac{1}{q}\textstyle\int_{\mathbb{R}} |f(z_n)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(z_n) dx \Big\}. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Denotaremos as integrais acima por $J_1(z_n)$, $J_2(z_n)$, $J_3(z_n)$ and $J_4(z_n)$, respectivamente. Desde que $|\cdot|_p$ é semi-continua inferiormente então

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |z_n'|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}} |z'|^p dx. \tag{2.3.6}$$

Usando o Lema 2.1-(b), o Teorema do Valor Médio e a Observação 1.1, concluimos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} |f(z_n) - f(z)|^p dx \right| \leq M \int_{\mathbb{R}} |z_n - z|^p \leq C\|z_n - z\|^p \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto $f(z_n) \to f(z)$ in $L^p(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Logo, pelo Teorema A.11 (veja Apêndice, seção A10), existe uma subsequência de $(f(z_n))$ (que denotaremos também por $(f(z_n))$) e $h \in L^p(\mathbb{R})$ tal que

$$f(z_n) \to f(z) \ \text{ q. t. p. em } \ \mathbb{R}, \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

e

$$|f(z_n)| \leq h(x), \quad \text{para todo n e } h \in L^p(\mathbb{R}).$$

Desde que V é limitado, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z_n)|^p dx \to \int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z)|^p dx \ \text{ quando, } \ n \to \infty. \tag{2.3.7}$$

Analogamente, provamos que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(z_n)|^q dx \to \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^q dx, \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.3.8}$$

E como $g \in L^s(\mathbb{R})$, para algum $s \geq 1$, obtemos que

$$J_4(z_n) \to \int_{\mathbb{R}} g(x) f(z) dx, \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.3.9}$$

Assim, usando (2.3.6), (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9) na igualdade (2.3.5), concluimos que

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J(z_n) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} |z_n'|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z_n)|^p dx \right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |f(z_n)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(z_n) dx \right\}\\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} |z_n'|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z)|^p dx\\
&\quad -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |f(z)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(z) dx\\
&\geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} |z'|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} V(x)|f(z)|^p dx\\
&\quad -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |f(z)|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(z) dx = J(z).
\end{aligned}
$$

Portanto J é semi-continuo inferiormente em $\bar{B}_R$.

Desde que J é semi-continuo inferiormente e limitado sobre $\bar{B}_R$, pelo Princípio Variacional de Ekeland (veja Apêndice, Teorema A.3), obtemos que para qualquer n inteiro positivo, existe uma sequência (v_n) tal que

$$
c \leq J(v_n) \leq c + \frac{1}{n} \tag{2.3.10}
$$

e

$$
J(w) \geq J(v_n) - \frac{1}{n}\|v_n - w\|, \ \text{ para todo } \ w \in \bar{B}_R. \tag{2.3.11}
$$

Afirmamos que $\|v_n\| < R$, para todo n suficientemente grande. Caso contrário, se $\|v_n\| = R$ para infinitos n, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\|v_n\| = R$ para todo $n \geq 1$. Disto segue, pela escolha de ρ_1 que $J(v_n) \geq \rho_1 > 0$. Combinando este resultado com a desigualdade (2.3.10) e fazendo $n \to \infty$ concluimos que $0 < \rho_1 \leq \lim I(v_n) = c < 0$ e isto é uma contradição.

Finalmente vamos provar que $\|J'(v_n)\|^*_{(W^{1,p}(\mathbb{R}))} \to 0$, $n \to \infty$.

De fato, para qualquer $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ tal que $\|v\| = 1$, vamos definir $w_n = v_n + tv$. Para um n fixado temos que $\|w_n\| \leq \|v_n\| + t < R$, se t é suficientemente pequeno. Usando a desigualdade (2.3.11) obtemos que

$$J(w_n) = J(v_n + tv) \geq J(v_n) - \frac{|t|}{n}\|v\|.$$

Portanto

$$\frac{J(v_n + tv) - J(v_n)}{|t|} \geq -\frac{1}{n}\|v\| = -\frac{1}{n}.$$

Fazendo $t \to 0^+$ concluimos que

$$J'(v_n) \cdot v \geq -\frac{1}{n}.$$

Usando um argumento similar para $t \to 0^-$, obtemos que $J'(v_n) \cdot v \leq \frac{1}{n}$, para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $\|v\| = 1$. Portanto

$$\|J'(v_n)\|^*_{(W^{1,p}(\mathbb{R}))} = \sup_{\|v\|=1} |J'(v_n) \cdot v| \leq \frac{1}{n} \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

e (v_n) é uma sequência $(PS)_c$. ■

2.4 Preliminares para o Teorema 0.3

Vamos definir o funcional energia $I_0 : X \to \mathbb{R}$ do problema (0.0.5) pela igualdade (2.1.1), com $g \equiv 0$ (que corresponde ao funcional I do problema (0.0.1) sem a perturbação g). Pelo Teorema 0.1 (veja também Alves, Carrião e Miyagaki em [2]) sabemos que este problema tem uma solução positiva $\bar{u}$, tal que $I_0(\bar{u}) = m$ onde

$$m = \inf_{u \in M} I_0(u)$$

e M é a variedade Nehari associada ao funcional I_0, definida no Apêndice, seção A11.

Agora vamos provar que I possui a geometria do passo da montanha.

Lema 2.9. *(Geometria do Passo da Montanha). O funcional I satisfaz*

(a) $I(0) = 0$,

(b) *existe uma constante positiva* ρ *e* R *tal que* $I(u) \geq \rho$ *se* $\|u\| = R$,

(c) *existe uma constante positiva* $R_1 > R$ *e* $z \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ *tal que* $I(z) < 0 = I(0)$ *se* $\|z\| > R_1$.

Prova: O item (a) é imediato. Usando desigualdade de Hölder, desigualdade de Young (veja Apêndice A.1, desigualdade 3) , a condição (V_0) e a Observação 1.1 do Capítulo 1, obtemos que

$$
\begin{aligned}
I(u) \quad &\equiv \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\left[|u'|^p + V(x)|u|^p\right] + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^{p-1}}{p} K_0 |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q}|u|^q - \int_{\mathbb{R}} g(x)u(x)dx \\
&\geq \quad \frac{C_1}{p}\|u\|^p - \frac{C_2}{q}\|u\|^q - C_3|g|_s\|u\| \\
&\geq \quad \frac{C_1}{p}\|u\|^p - \frac{C_2}{q}\|u\|^q - \frac{\epsilon^p}{p}\|u\|^p - C_\epsilon\left[|g|_s\right]^{p'} \\
&= \quad \left(\frac{C_1}{p} - \frac{\epsilon^p}{p}\right)\|u\|^p - \frac{C_2}{q}\|u\|^q - C_\epsilon\left[|g|_s\right]^{p'}.
\end{aligned}
$$

Fixando $\epsilon \in (0,1)$, podemos encontrar $R > 0$, $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno e $\rho > 0$ tal que $I(u) \geq \rho$ se $\|u\| = R$ e $|g|_s < \delta_1$. Portanto o item (b) está provado.

Para provar o item (c), é suficiente observar que $I_0(t\bar{u}) \to -\infty$, quando $t \to \infty$ (porque $q > p$). Então existe $t_0 > 0$ tal que $I_0(t\bar{u}) < 0$ se $t \geq t_0$. Deste fato, juntamente com $g \in C_+$, obtemos que

$$I(t\bar{u}) = I_0(t\bar{u}) - t\int_{\mathbb{R}} g(x)u(x)dx < 0, \quad \text{se} \quad t \geq t_0.$$

Defina $z \equiv t\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, segue que para todo $t \geq t_0$, $\|z\| > R$ e $I(z) < 0$. ■

Observação 2.10. *Segue do Lema 2.9, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz em [3], feita por Brézis e Nirenberg [14](veja Apêndice Teorema A.5), que existe uma sequência* $(z_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$, $(PS)_{c_1}$ *tal que*

$$I(z_n) \to c_1, \quad I'(z_n) \to 0 \quad em \quad (W^{1,p}(\mathbb{R}))^*, \quad quando \quad n \to \infty,$$

onde

$$c_1 = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in h} I(u) > 0,$$

com

$$\Gamma = \left\{ h \in C([0,1], W^{1,p}(\mathbb{R})) : \ h(0) = 0 \ \ e \ \ h(1) = t_0 \bar{u} \right\}.$$

2.5 Prova do Teorema 0.3

Recordemos que v_0 é uma solução para o problema (1.3.12), dada pelo Lema 2.6, tal que $J(v_0) = c$. Então segue da prova do Lema 2.4-(a) que $I(u_0) = J(v_0) = c$, onde $u_0 = f(v_0)$ é uma solução fraca para o problema (0.0.1), dada pela Proposição 2.5.

Pelo Lema 2.9 e a Observação 2.10, existe uma sequência não negativa, $(PS)_{c_1}$, $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ (porque $g \in C_+$, podemos considerar a sequência $|u_n|$) tal que

$$I(u_n) \to c_1, \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad (W^{1,p}(\mathbb{R}))^*, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a condição (V_0) e a Observação 1.1, concluimos que

$$\begin{aligned}
c_1 \quad & + \frac{1}{q} |I'(u_n)|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}))^*} \cdot \|u_n\| + 1 \geq I(u_n) - \frac{1}{q} I'(u_n) \cdot u_n \\
= \quad & \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} [|u_n'|^p + V(x)|u_n|^p dx] + \left(\frac{\beta^{p-1}}{p} - \frac{\beta^p}{q} \right) ||u_n|^{\beta-1} u_n'|_p^p \\
& - \left(1 - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} g(x) u_n(x) dx \\
\geq \quad & \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} [|u_n'|^p + V_0 |u_n|^p dx] - \left(1 - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} g(x) u_n(x) dx \\
\geq \quad & C_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p - \left(1 - \frac{1}{q} \right) |g|_s |u_n|_{s'} \\
\geq \quad & C_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u_n\|^p - C \left(1 - \frac{1}{q} \right) |g|_s \|u_n\|.
\end{aligned}$$

Portanto a sequência (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Pelo Lema 2.4, (v_n) é também uma sequência $(PS)_{c_1}$ e limitada para o funcional funcional J. Portanto $v_n \rightharpoonup v_1$ fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$ e do Lema 2.6, v_1 é uma solução fraca do problema (1.3.12). Pela Proposição 2.5, $u_1 \equiv f(v_1)$ é uma solução fraca do problema (0.0.1). Pela Observação 2.8 temos que v_1 é estritamente positiva. Como f é crescente então u_1 é também estritamente positiva. Vamos provar que $u_0 \neq u_1$ mostrando que $I(u_0) \neq I(u_1)$. Faremos isto argumentando como Rădulescu e Smets em [49].

Lema 2.11. *Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R})$ a sequência $(PS)_{c_1}$ para o funcional I dada acima, tal que $u_n \rightharpoonup u_1$, fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Então ou a sequência (u_n) converge fortemente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ ou $c_1 \geq m + I(u_1)$.*

Assumindo este Lema por enquanto, segue que ou $u_n \to u_1$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$ e neste caso concluimos que

$$I(u_1) = \lim_{n\to\infty} I(u_n) = c_1 > 0 > c = I(u_0);$$

ou

$$c_1 = \lim_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(u_1) + m.$$

Supondo $I(u_1) = I(u_0) = c$, obtemos que $c_1 \geq c + m$ e isto contradiz o Lema seguinte.

Lema 2.12. *Sejam c, c_1 e m definidos anteriormente e a função $f \in C_+$ que satisfazendo $|f|_{L^s(\mathbb{R})} = 1$. Então existem números reais $R > 0$ e $\delta_2 = \delta_2(R)$ tais que $c_1 < c + m$ para toda função $g = \epsilon f$ sempre que $\epsilon < \delta_2$, onde R é dado na prova da Afirmativa 2.7.*

Portanto o Teorema 0.3 fica provado se escolhermos $0 < \epsilon < \delta$ onde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. ■

Prova do Lema 2.11:

Pelo Lema 2.6 e a Proposição 2.5, se $u_n \to u_1$ quando $n \to \infty$, pela continuidade do funcional I, obtemos que u_1 é um ponto crítico de I e $I(u_1) = c_1$.

Por outro lado, se a sequência (u_n) não converge fortemente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, definimos $z_n = u_n - u_1$ e obtemos que $z_n \rightharpoonup 0$, fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Assim podemos assumir que

$$\|z_n\| \to \gamma > 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty. \tag{2.5.1}$$

Temos que $u_n \rightharpoonup u_1$, fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$ e $g \in L^s(\mathbb{R})$ para algum $s \geq 1$, então segue disto juntamente com a Observação 1.1 e o Teorema A.9 (veja Apêndice, seção A.8) que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) z_n(x) dx \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to \infty.$$

Assim

$$I(z_n) = I_0(z_n) + o(1).$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \left[I(u_n) - I(u_1) - I(z_n)\right] = \liminf_{n\to\infty} \\
&\left\{\frac{1}{p}\|u_n\|^p + \frac{\beta^{p-1}}{p}||u_n|^{\beta-1}u_n'|_p^p - \frac{1}{q}|u_n|_q^q - \int_{\mathbb{R}} g u_n dx \right. \\
&-\frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{\beta^{p-1}}{p}||u_1|^{\beta-1}u_1'|_p^p + \frac{1}{q}|u_1|_q^q + \int_{\mathbb{R}} g u_1 dx \\
&\left. -\frac{1}{p}\|z_n\|^p - \frac{\beta^{p-1}}{p}||z_n|^{\beta-1}z_n'|_p^p + |z_n|_q^q + \int_{\mathbb{R}} g z_n dx \right\}.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.5 do Capítulo 1 (para $p = 2$ veja [45]), isto é,

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n' u_n^{\beta-1}|_p^p \geq \liminf_{n\to\infty} |z_n' z_n^{\beta-1}|_p^p + |u_1' u_1^{\beta-1}|_p^p,$$

e as identidades dadas pelo Lema de Brézis e Lieb (veja Apêndice, Lema A.2),

$$\begin{aligned}
||u_n||^p - ||u_1||^p - ||z_n||^p &= o(1), \;\text{quando}\; n \to \infty, \\
|u_n|_q^q - |u_1|_q^q - |z_n|_q^q &= o(1), \;\text{quando}\; n \to \infty,
\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

obtemos que

$$\liminf_{n\to\infty} [I(u_n) - I(u_1) - I(z_n)] \geq 0.$$

Portanto tomando uma subsequência, se necessário, segue que

$$\lim_{n\to\infty} [I(u_n) - I(u_1) - I(z_n)] \geq 0,$$

onde conclui-se que

$$c_1 + o(1) = I(u_n) \geq I(u_1) + I(z_n) + o(1) = I_0(z_n) + I(u_1) + o(1). \tag{2.5.3}$$

Analogamente, usando o Lema 2.6 e a Proposição 2.5, obtemos que

$$o(1) = I'(u_n) \cdot u_n \geq I'(u_1) \cdot u_1 + I'(z_n) \cdot z_n + o(1) = I_0'(z_n) \cdot z_n + o(1).$$

Logo

$$I_0'(z_n) \cdot z_n \leq o(1). \tag{2.5.4}$$

Se $\lim_{n\to\infty} I_0'(z_n) \cdot z_n < 0$, então, para n suficientemente grande, pelo Lema 1.2 existe $\lambda_n \in]0, 1[$ tal que $\lambda_n z_n \in M$. Além disso temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1. \tag{2.5.5}$$

Caso contrário, se $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n = 1$, então ao longo de uma subsequência, temos que $\lambda_n \to 1$, quando $n \to \infty$. Portanto

$$I_0'(z_n) \cdot z_n = I_0'(\lambda_n z_n) \cdot \lambda_n z_n + o(1).$$

Assim $\lim_{n\to\infty} I_0'(z_n)\cdot z_n = 0$. Mas isto é uma contradição. Logo $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n < 1$.

Desde que $\lambda_n z_n \in M$, pela desigualdade (2.5.3) temos que

$$\begin{aligned}
&c_1 + o(1) = I(u_n) \geq I_0(z_n) + I(u_1) + o(1)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\left[|z_n'|^p + V(x)|z_n|^p\right] + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^{p-1}}{p}|z_n|^{p(\beta-1)}|z_n'|^p\\
&- \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q}|z_n|^q + I(u_1) + o(1)\\
&\lambda_n^{-p}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\left[|\lambda_n z_n'|^p + V(x)|\lambda_n z_n|^p\right] + \int_{\mathbb{R}} \frac{\beta^{p-1}}{p}\lambda_n^{-p\beta}|\lambda_n z_n|^{p(\beta-1)}|\lambda_n z_n'|^p\\
&-\lambda_n^{-q}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{q}|\lambda_n z_n|^q + I(u_1) + o(1)\\
&= \frac{\beta-1}{p\beta}\lambda_n^{-p}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\left[|\lambda_n z_n'|^p + V(x)|\lambda_n z_n|^p\right] + \lambda_n^{-q}\frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n z_n|_q^q + I(u_1) + o(1).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.5.5) e tomando o limite superior na desigualdade acima obtemos que

$$\begin{aligned}
c_1 \quad &\geq \frac{\beta-1}{p\beta}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\left[|\lambda_n z_n'|^p + V(x)|\lambda_n z_n|^p\right] + \frac{q-p\beta}{pq\beta}|\lambda_n z_n|_q^q + I(u_1)\\
&= I_0(\lambda_n z_n)|_N + I(u_1) + o(1) = m + I(u_1)
\end{aligned}$$

e o Lema 2.11 está provado.

Agora, vamos estudar o caso onde $\lim_{n\to\infty} I_0'(z_n)\cdot z_n = 0$. Desde que a desigualdade (2.5.3) é satisfeita, basta provar que

$$I_0(z_n) \geq m + o(1). \tag{2.5.6}$$

Vamos definir

$$\chi_n \equiv I_0'(z_n).z_n,$$

$$\varphi_n \equiv \int_{\mathbb{R}} \left[|z_n'|^p + V(x)|z_n|^p\right],$$

$$\theta_n \equiv \int_{\mathbb{R}} \beta^p |z_n|^{p(\beta-1)}|z_n'|^p$$

e

$$\psi_n \equiv \int_{\mathbb{R}} |z_n|^q.$$

Portanto

$$0 = \lim_{n\to\infty} I_0'(z_n).z_n = \lim_{n\to\infty} \chi_n = \lim_{n\to\infty} \left[\varphi_n + \theta_n - \psi_n\right]. \tag{2.5.7}$$

Usando que V satisfaz a condição (V_0), obtemos que

$$\varphi_n \geq C\|z_n\|^p \to \gamma > 0. \tag{2.5.8}$$

Note também que

$$\psi_n \; e \; \theta_n \;\text{ são números finitos e não negativos.} \tag{2.5.9}$$

Segue da igualdade (2.5.7) que

(a) $\chi_n = 0$, exceto um número finito de índices n, ou

(b) existe uma subsequência (χ_{n_j}) tal que $\chi_{n_j} \to 0$, quando $n \to \infty$ e $\chi_{n_j} \neq 0$ para todo j.

Se ocorrer o item (a), obtemos que $z_n \in M$ e portanto $m \leq I_0(z_n)$. Assim a desigualdade (2.5.6) é verificada.

Se ocorrer o item (b), a prova da desigualdade (2.5.6) segue adaptando alguns argumentos usados por Rădulescu e Smets em [49] (veja também [1] e [6]).

Necessitamos da seguinte a afirmativa:

Afirmativa 2.13. *Existe uma sequência* $(t_n) \subset \mathbb{R}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1$$

e

$$I_0'(t_n z_n) \cdot t_n z_n = 0.$$

Admitindo essa Afirmativa por enquanto, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} [I_0(z_n) - I_0(t_n z_n)] &= \frac{1}{p}(1 - t_n^p) + \frac{\beta^{p-1}}{p}(1 - t_n^{p\beta})\| |z_n|^{\beta-1} z_n' \|_p^p \\ &\quad - \frac{1}{q}(1 - t_n^q)\|z_n\|_q^q = 0.\end{aligned}$$

E desde que $t_n z_n \in M$, conseguimos que

$$I_0(z_n) = I_0(t_n z_n) + o(1) \geq m + o(1).$$

Isto completa a prova do Lema 2.11 .

Prova da Afirmativa 2.13:

Seja $t = 1 + \tau$, onde $\tau > 0$ é suficientemente pequeno. Usando a definição de χ_n, φ_n, θ_n, *e* ψ_n obtemos que

$$\begin{aligned}
&I_0'((1+\tau)z_n).(1+\tau)z_n = (1+\tau)^p\varphi_n + (1+\tau)^{p\beta}\theta_n - (1+\tau)^q\psi_n \\
&= \varphi_n(1+\tau)^p + (1+\tau)^{p\beta}\theta_n - (1+\tau)^q(\varphi_n + \theta_n - \chi_n) \\
&= \left[(1+\tau)^p - (1+\tau)^q\right]\varphi_n + \left[(1+\tau)^{p\beta} - (1+\tau)^q\right]\theta_n - (1+\tau)^q\chi_n \\
&= \tau(p-q)\varphi_n + \varphi_n o(\tau) + (p\beta - q)\tau\theta_n + \theta_n o(\tau) + (1+\tau)^q\chi_n \\
&= \tau\left[(p-q)\varphi_n + (p\beta-q)\theta_n\right] + \varphi_n o(\tau) + \theta_n o(\tau) + (1+\tau)^q\chi_n.
\end{aligned}$$

Defina

$$\tau_n \equiv \frac{K|\chi_n|}{\varphi_n(q-p) + \theta_n(q-p\beta)}, \quad \text{onde } K > 1 \text{ é uma constante.}$$

Usando (2.5.7), (2.5.8) e (2.5.9) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&I_0'((1+\tau_n)z_n)\cdot(1+\tau_n)z_n = \frac{K|\chi_n|}{\varphi_n(q-p) + \theta_n(q-p\beta)}\left[(p-q)\varphi_n + (p\beta-q)\theta_n\right] \\
&+\varphi_n o(\tau_n) + \theta_n o(\tau_n) + \left[1 + \frac{K|\chi_n|q}{\varphi_n(q-p) + \theta_n(q-p\beta)} + o(\tau_n)\right]\chi_n \\
&= -K|\chi_n| + \chi_n + \frac{K|\chi_n|q}{\varphi_n(q-p) + \theta_n(q-p\beta)} + \varphi_n o(\tau_n) + \theta_n o(\tau_n) + \chi_n o(\tau_n).
\end{aligned}$$

Usando que $K > 1$, o $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, (2.5.8) e (2.5.9), concluimos que

$$I_0'((1+\tau_n)z_n)\cdot(1+\tau_n)z_n < 0, \quad \text{para n suficientemente grande.}$$

Analogamente,

$$I_0'((1-\tau_n)z_n)\cdot(1-\tau_n)z_n > 0, \quad \text{para n suficientemente grande.}$$

Portanto existe $t_n \in (1-\tau_n, 1+\tau_n)$ tal que

$$I_0'(t_n z_n).t_n z_n = 0. \qquad \blacksquare$$

Prova do Lema 2.12:

A prova deste Lema segue usando a seguinte afirmativa.

Afirmativa 2.14. $\sup_{t\geq 0} I(t\bar{u}) < m + c$, *onde* $\bar{u}$ *é a solução do problema (0.0.1), considerando* $g(x) = 0$.

Prova: Necessitamos provar que $c + m > 0$, para $\delta_1 > 0$ e $R > 0$ dados na prova do Teorema 0.2. De fato, seja u uma solução do problema (0.0.1) obtida pelo Teorema 0.2. Desde que $I'(u).u = 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} c = I(u) \quad &= \quad \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] \int_{\mathbb{R}} [|u'|^p + V(x)|u|^p] + K_0 \beta^{p-1} \left[\frac{q - p\beta}{pq}\right] ||u|^{\beta-1} u'|_p^p \\ &\quad - \left[1 - \frac{1}{q}\right] \int_{\mathbb{R}} g(x) u(x) dx. \end{aligned}$$

Usando o fato do segundo termo ser positivo, a condição (V_0), a desigualdade de Hölder e a Observação 1.1, concluimos que

$$c \;\; \geq \;\; \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] C\|u\|^p - \left[1 - \frac{1}{q}\right] |g|_s \|u\|,$$

onde C é uma constante. Aplicando a desigualdade de Young, encontramos que

$$c \;\; \geq \;\; \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] C\|u\|^p - \frac{\lambda^p}{p}\|u\|^p - \frac{M}{p'\lambda^{p'}} \left[1 - \frac{1}{q}\right]^{p'} |g|_s^{p'}, \quad \left(p' = \tfrac{p}{p-1}\right).$$

Agora tomando a constante $\lambda \equiv \left(1 - \frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p}}$ e argumentando como [49] (veja também [6]) tem-se que

$$\frac{\lambda^p}{p} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

e

$$\frac{M}{p'\lambda^{p'}}\left[1 - \frac{1}{q}\right]^{p'} = \frac{M}{p'\lambda^{p.\frac{p'}{p}}}\left[1 - \frac{1}{q}\right]^{p'} = \frac{M}{p'}\left[\frac{q-1}{q}\right]^{p'}\frac{1}{\left(1 - \frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{p-1}}} \equiv \mu > 0.$$

Então

$$c \;\; \geq \;\; \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] C\|u\|^p - \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] C\|u\|^p - \mu|g|_s^{p'} = -\mu|g|_s^{p'}. \qquad (2.5.10)$$

Escolhendo $|g|_s$ suficientemente pequeno, obtemos que o número negativo c tende a zero e desde que $m > 0$ concluimos que $c + m > 0$.

Como $c + m > 0 = I(0)$ e o funcional I é contínuo, existe $t' > 0$ e $\epsilon' > 0$, satisfazendo $0 < |g|_s < \epsilon'$, tal que

$$\sup_{t \in [0\,,\,t']} I(t\bar{u}) < m + c, \;\; \text{se} \;\; |g|_s < \epsilon' < \delta_1.$$

Assim, para concluir a Afirmativa (2.14) basta provar que

$$\sup_{t \geq t'} I(t\bar{u}) < m + c, \;\; \text{se} \;\; |g|_s \;\; \text{é suficientemente pequena.}$$

Mas, desde que $I(\bar{u}) = m$, usando uma propriedade da variedade de Nehari para o funcional I_0, precisamente, $I_0(\lambda u) \leq I_0(u)$, para todo u pertencente a variedade e $\lambda > 0$, temos que

$$
\begin{aligned}
I(t\bar{u}) &\leq \sup_{t\geq t'} I(t\bar{u}) \\
&\leq \sup_{t\geq t'} \Bigg[\int_{\mathbb{R}} \frac{t^p}{p} \left[|\bar{u}'|^p + V(x)|\bar{u}|^p \right] + \frac{\beta^{p-1}}{p} K_0 t^{p\beta} ||\bar{u}|^{\beta-1}\bar{u}'|_p^p - \frac{t^q}{q}|\bar{u}|_q^q \\
&\quad -t' \int_{\mathbb{R}} g(x)\bar{u}(x)dx \Bigg] \\
&= \sup_{t\geq t'} \left[I_0(t\bar{u}) - t' \int_{\mathbb{R}} g(x)\bar{u}(x)dx \right] \\
&\leq \sup_{t\geq 0} I_0(t\bar{u}) - t' \int_{\mathbb{R}} g(x)\bar{u}(x)dx \\
&\leq I_0(\bar{u}) - t' \int_{\mathbb{R}} g(x)\bar{u}(x)dx \\
&= m - t' \int_{\mathbb{R}} g(x)\bar{u}(x)dx = m - t'\epsilon a_0,
\end{aligned}
$$

onde $a_0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{u}(x)dx$ é positivo porque $f \in C_+$, $|f|_s = 1$ e $g = \epsilon f$. De (2.5.10) e do fato que $|g|_s = \epsilon^s |f|_s = \epsilon^s < \epsilon$ with $\epsilon \leq \epsilon''$ segue que

$$c \geq -\mu |g|_s^{p'} > -\mu \epsilon^{p'}.$$

Escolhendo $\epsilon'' > 0$, suficientemente pequeno, tal que $-t'\epsilon a_0 < -\mu\epsilon^{p'}$, for all $\epsilon < \epsilon''$, concluimos que

$$I(t\bar{u}) < m + c.$$

Para terminar a prova do Lema 2.12 basta tomar $\delta_2 = min\{\epsilon', \epsilon''\}$. ■

—3—

Órbitas homoclínicas para o problema autônomo

Neste capítulo vamos demonstrar o Teorema 0.4. Para isto consideraremos o problema autônomo (0.0.6), a saber

$$Lu + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, \text{ em } \mathbb{R},$$

onde o operador L é definido pela igualdade (0.0.2), $\beta > 1$, $K_0 > 0$, $p > 1$ e $q > p$. Renomeando

$$u' = |v|^{\frac{-p+2}{p-1}} v, \tag{3.0.1}$$

obtemos que

$$|u'|^{p-2}u' = |v|^{\frac{p-2}{p-1}} |v|^{\frac{-p+2}{p-1}} v = v.$$

Então

$$v = |u'|^{p-2}u' \tag{3.0.2}$$

e portanto

$$v' = \left[|u'|^{p-2}u'\right]'. \tag{3.0.3}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\{[(|u|^{\beta})']^{p-2}(|u|^{\beta})'|u|^{\beta-2}u &= \left\{\left[\beta|u|^{\beta-2}uu'\right]^{p-2}\left[\beta|u|^{\beta-2}u\right]\right\}'|u|^{\beta-2}u \\
&= \left\{\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-1}|u'|^{p-2}u'\right\}'|u|^{\beta-2}u \\
&= \left\{\left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-1}v'\right\}'|u|^{\beta-2}u \\
&= \beta^{p-1}|u|^{\beta-2}u\left\{(p-1)\left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-2}(\beta-1)|u|^{\beta-2}u'v\right. \\
&\quad \left. + \left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-1}v'\right\}.
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (0.0.6) e usando que $v = |u'|^{p-2}u'$, obtemos o seguinte sistema sobre $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} u' = |v|^{\frac{-p+2}{p-1}} v \\ \\ v' = \left[1 + K_0\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^p\right]^{-1} [|u|^{p-2}u - |u|^{q-2}u \\ \qquad -K_0\,(p-1)(\beta-1)\beta^{p-1}\left(|u|^{\frac{p(\beta-2)}{p-1}}u\right)^{p-1} v^{\frac{p}{p-1}}]. \end{cases} \tag{3.0.4}$$

Note que $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$ são pontos singulares do sistema (3.0.4).

Defina a função energia $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$E(u,v) = \frac{1}{p}\left[1 + K_0\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^p\right]|v|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{q}|u|^q - \frac{1}{p}|u|^p\right].$$

Vamos mostrar que $E(\gamma(t))$ é constante ao longo das órbitas $\gamma(t) \equiv (u(t), v(t)) \in C^1\backslash\{(0,0)\}$ do sistema (3.0.4).

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E(u,v) = E_u \cdot u' + E_v \cdot v' \\
&= K_0|v|^{\frac{p}{p-1}}\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-1}(\beta-1)|u|^{\beta-2}u' + \frac{1}{p-1}\left[|u|^{q-2}u - |u|^{p-2}u\right]u' \\
&+\frac{1}{p-1}\left[1 + K_0\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^p\right]|v|^{\frac{p}{p-1}-2}vv' \\
&= K_0|v|^{\frac{p}{p-1}}\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^{p-1}(\beta-1)|u|^{\beta-2}u' + \frac{1}{p-1}\left[|u|^{q-2}u - |u|^{p-2}u\right]u' \\
&+\frac{1}{p-1}\left[|u|^{p-2}u - |u|^{q-2}u - K_0(p-1)(\beta-1)\beta^{p-1}\left(|u|^{\frac{p(\beta-2)}{p-1}}u\right)^{p-1}|v|^{\frac{p}{p-1}}\right]|v|^{\frac{-p+2}{p-1}}v \\
&= K_0\beta^{p-1}(\beta-1)\left(|u|^{\frac{p(\beta-2)}{p-1}}u\right)^{p-1}|v|^{\frac{p}{p-1}}u' + \frac{1}{p-1}\left[|u|^{q-2}u - |u|^{p-2}u\right]u' \\
&+\frac{1}{p-1}\left[|u|^{p-2}u - |u|^{q-2}u - K_0(\beta-1)(p-1)\beta^{p-1}\left(|u|^{\frac{p(\beta-2)}{p-1}}u\right)^{p-1}|v|^{\frac{p}{p-1}}\right]|v|^{\frac{-p+2}{p-1}}v.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (3.0.2) obtemos que $\frac{d}{dt}E(u,v) = 0$.

Note que sobre a órbita $\alpha(t) \equiv (0,0)$, a função energia $E(\alpha(t)) = E((0,0)) = 0$.

Agora, considere uma órbita $\gamma(t) \equiv (u(t), v(t)) \neq (0,0)$ tal que $E(\gamma(t)) = E((u(t), v(t))) = 0$. Desde que E é constante ao longo das órbitas $\gamma(t)$, obtemos que

$$|v|^{\frac{p}{p-1}} = \frac{p}{p-1}\frac{1}{p}|u|^p \frac{\left[1 - \frac{p}{q}|u|^{q-p}\right]}{1 + K_0\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u\right)^p}\ .$$

Portanto

$$v = \pm|u|^{p-1}\frac{\left[1 - \frac{p}{q}|u|^{q-p}\right]^{\frac{p-1}{p}}}{\left\{(p-1)\left[1 + K_0\beta^{p-1}\left(|u|^{\beta-2}u(t)\right)^p\right]\right\}^{\frac{p-1}{p}}}\ . \tag{3.0.5}$$

Vamos analisar a órbita γ distinguindo dois casos:

Caso 1: $u > 0$.
Neste caso, pela equação (3.0.5) obtemos que no plano uv, a órbita γ é simétrica em relação ao eixo $\overrightarrow{0u}$ e corta esse eixo em $u(t) = a \equiv \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q-p}} > 1$. No ponto $(a, 0)$, por (3.0.4) e usando o fato que $q > p$, obtemos que o vetor $\gamma'(t) = (u', v')|_{(a,0)} = (0, v')$, tangente a órbita $\gamma(t)$ possui v' negativo e é perpendicualar ao eixo $\overrightarrow{0u}$. Como $q > p$, obtemos que a função energia é positiva para $u > a$, por exemplo veja figura 3.3 e figura 3.4. Além disso a curva formada por $\alpha(t) \cup \gamma(t)$, com $u > 0$ contém o ponto $(1, 0)$ no seu interior, por exemplo veja figura 3.1 e figura 3.2.

Além disso, analisando a função E, observamos que a energia nos pontos interiores a curva $\alpha(t) \cup \gamma(t)$ é negativa, por exemplo veja figura 3.3.

Note que a órbita $\gamma(t)$ está contida no compacto $K \equiv \alpha(t) \cup \gamma(t)$ e portanto tem a seguinte propriedade

$$\gamma(t) = (u(t),\ v(t)) \to 0,\ \text{quando}\ |t| \to \infty.$$

E pelo sistema (3.0.4) vemos também que

$$\gamma'(t) = (u'(t), v'(t)) \to 0,\ \text{quando}\ |t| \to \infty.$$

Deste dois fatos concluimos que a órbita γ é homoclínica.

Caso 2: $u < 0$.
Como o gráfico da função $v(t)$ é simétrico em relação a origem, de modo análogo a *Caso* 1 obtemos uma órbita $\theta(t)$, com $u(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ que é homoclínica e a curva $\theta(t) \cup \alpha(t)$, com $u(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, contém o ponto $(-1, 0)$ no seu interior, por exemplo veja figura 3.2 e figura 3.4.

Portanto, o Teorema 0.4 segue do *Caso* 1 e *Caso* 2.

Observação 3.1. *Note que a região interior a curva $\alpha(t) \cup \gamma(t)$ possui somente órbitas fechadas. De fato, seja P um ponto interior a curva $\alpha(t) \cup \gamma(t)$ tal que $E(p) \neq E(1,0)$ e $E(p) \neq E(0,0)$. Se a órbita que passa por P não é fechada, pelo Teorema de Poincaré-Bendixson, (veja Apêndice, Teorema A.4), esta órbita tende aos pontos singulares $(1,0)$ ou $(0,0)$. Como a energia é constante ao longo das órbitas, conclui-se que $E(p) = E(1,0)$ ou $E(p) = E(0,0)$, que é uma contradição. Portanto todas órbitas no interior da curva $\alpha(t) \cup \gamma(t)$ são fechadas.*

Observação 3.2. *Desde que $q > p$ obtemos que a função energia restrita ao segmento compreendido entre os pontos $(1,0)$ e $(a,0)$, isto é, $E(0,v) = \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{q}|u|^q - \frac{1}{p}|u|^p\right]$ é uma função negativa e crescente. Além disso, temos também que $E(u,0) = |v|^{\frac{p}{p-1}} > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$. Destes dois fatos e usando que a energia é constante sobre as órbitas, concluimos que na região exterior e muito próxima a curva $\alpha(t) \cup \gamma(t)$ não existe nenhuma órbita em que a energia seja zero sobre ela. Portanto a órbita γ é isolada.*

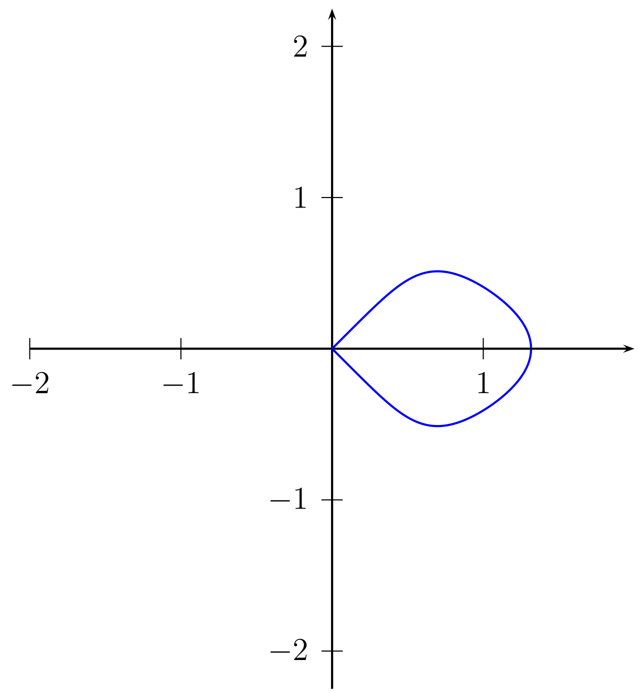

Figura 3.1: Gráfico da órbita $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ com $u > 0$, $p = 2$, $\beta = 3$ e $q = 6$.

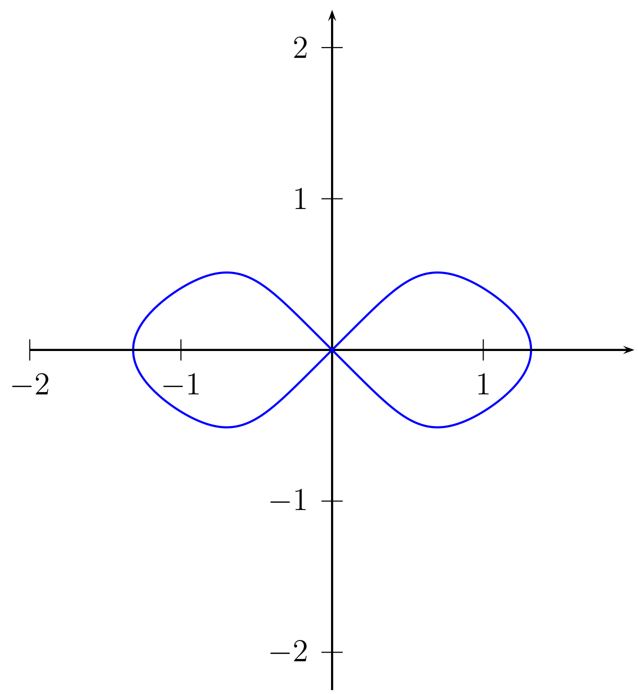

Figura 3.2: Gráficos: órbita $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ com $u > 0$ e órbita $\theta(t) = (u(t), v(t))$ com $u < 0$, no caso $p = 2$, $\beta = 3$ e $q = 6$.

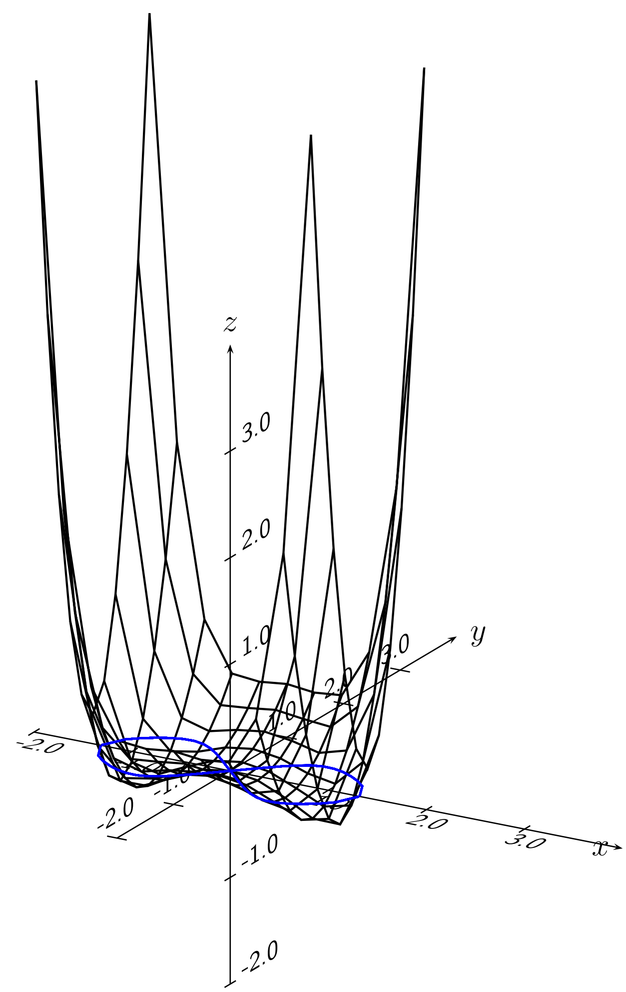

Figura 3.3: Gráfico da superfície $E(u,v)$ com $p = 2$, $\beta = 3$ e $q = 6$.

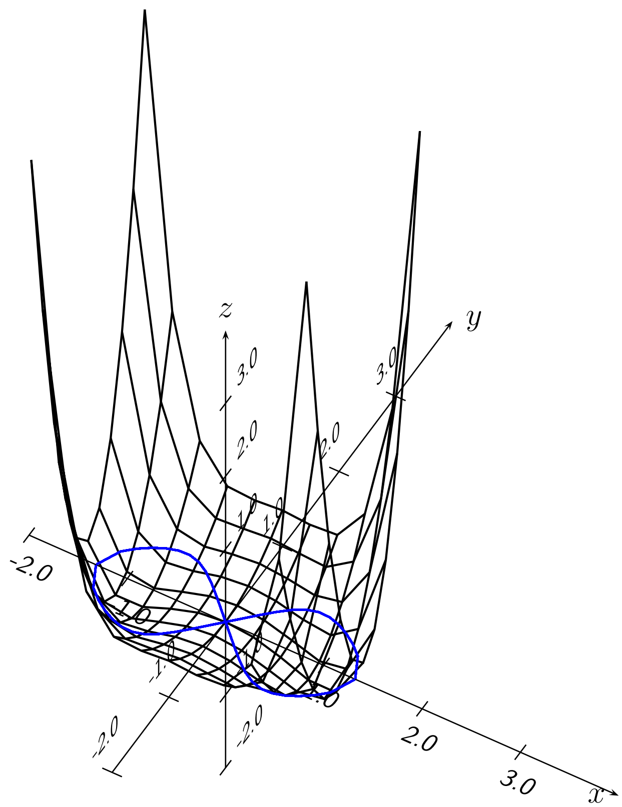

Figura 3.4: Gráfico da superfície $E(u, v)$ com $p = 2$, $\beta = 3$ e $q = 6$.

—4—

Conclusão

Neste trabalho, mostramos a existência de duas soluções positivas para o problema (0.0.1). A garantia da existência dessas duas soluções é devido a presença da perturbação g, com norma $|g|_s$ suficientemente pequena, que faz com que funcional energia possua dois pontos críticos, um com energia negativa (obtida pelo Princípio Variacional de Ekeland) e outro com energia positiva (dado pela Geometria do Passo da Montanha).

Para provar existência da primeira solução, Teorema 0.2, tivemos que demonstrar que soluções fracas do problema (0.0.1) foram obtidas como limite fraco de uma determinada sequência $(PS)_c$ (Lema 2.6) e esse resultado foi conseguido usando o teorema de convergência, Teorema A.9 (veja Apêndice). Pelo fato das expressões do funcional energia associado I e de sua derivada de Fréchet I' terem termos com a potência crítica da imersão de Sobolev, não pudemos aplicar esse teorema de convergência diretamente no funcional I e I'. Por isso foi necessário fazer uma mudança de variável, obtendo um problema equivalente ao anterior (no sentido da Prosição 2.5), cujo o funcional energia associado não possuisse termos com potência crítica da imersão de Sobolev na sua expressão .

Para obter a segunda solução, Teorema 0.3, tivemos de provar primeiro a existência de solução positiva, Teorema 0.1, para o problema (0.0.5), sem a perturbação g, e em seguida, provamos os Lema 2.11 e Lema 2.12, os quais fazem uma comparação entre os níveis de energia, da primeira solução, da segunda solução e o nível de energia (positivo) do caso $g = 0$.

No Capítulo, usando problemas autônomos, obtivermos uma generalização na potência q, retirando a sua dependência de β, precisamente $q > p$, e conseguimos provar que a equação (0.0.6) admite duas soluções distintas. Vale ressaltar que, para fazer essa generalização, usamos uma ferramenta poderosa de Sistemas Dinâmicos, que não se aplica para problemas não autônomos.

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, P. C. Carrião e O. H. Miyagaki, *Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth*, J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), 133-146.

[2] M. J. Alves, P. C. Carrião e O. H. Miyagaki, *Soliton solutions for a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$, Adv. Nonl. Studies 7 (2007), 579-597.

[3] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[4] V. Arnold, *Equations Differentialles Ordinaires*, Ed. MIR, Moscou, 1974.

[5] A. Ambrosetti e Z. Q. Wang, *Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$, Discrete Cont. Dynamical Syst. 9 (2003), 55-68.

[6] R. B. Assunção, P. C. Carrião e O. H. Miyagaki, *Critical singular problems via concentration -compactness lemma*, J. Math. Anal. Appl. 326(2007), 137 -154.

[7] T. Bartsh e Z. Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^n$, Comm. P.D.E. 20 (1995), 1725 -1741.

[8] F. Bass e N. N. Nasanov, *Nonlinear electromagnetic spin waves*, Physics Reports 189 (1990), 165-223.

[9] H. Berestycki e P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I: existence of a ground state*, J. Math. Anal. Appl. 82 (1983), 313-346.

[10] H. Berestycki, T. Galouët e O. Kavian, *Equations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 297 (1983), 307-310.

[11] L. Boccardo e F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear Anal. 19 (1992), 581-597.

[12] H. Brézis, *Analyse functionnelle - Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[13] H. Brézis e E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 486-490.

[14] H. Brézis e L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[15] A. Borovskii e A. Galkin, *Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter*, JETP 77 (1983), 562-573.

[16] A. De Bouard, N. Hayashi e J. Saut, *Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger Equation*, Comm. Math. Phys 189 (1997), 73-105.

[17] M. Colin e L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger Equation: A dual approach*, Nonlinear Anal. 56 (2004), 213-226.

[18] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, secund edition, Springer-Verlag, New York, 1990.

[19] D. G. Costa, *On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^n$, Elect. J. Diff. Eqns, 7 (1994), 1-14.

[20] V. Coti-Zelati e P. H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 1217-1269.

[21] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boudaries.* Vol.1. Elliptic equations. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman, Bostom, MA, 1985.

[22] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ *Local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications, 7(8)(1983), 827-850.

[23] P. Drábek, A. Kufner e F. Nicolosi, *Quasilinear elliptic equations with degeneratios and singularities*, Walter de Gruyter , Berlim (1977).

[24] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47(1974), 324 -353.

[25] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, vol. 19, 1998.

[26] A. Floer e A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger with a bounded potential.* J. Funct. Anal. 69, (1986), 397-408.

[27] R. Glowinski e J. Rappaz, *Approximation of nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid flow model in glaciology.* Math. Model. Numer. Anal. 37, (2003), 175-186.

[28] R. W. Hasse, *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equation*, Z. Physik B, 37 (1980), 83-87.

[29] E. Hewitt e K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1955.

[30] L. Jeanjean, *Two positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations*, Diff. Int. Eqns. 10 (1997), 609-624.

[31] L. Jeanjean e K. Tanaka, *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on* $\mathbb{R}^n$, Indiana Univ. Math. 54 (2005), 443-464.

[32] W. Kryszewski e A. Szulkin, *Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation*, Adv. Differential Equations 3 (1998), 441-472.

[33] S. Kurihura, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*, J. Phys. Soc. Japan 50(1981), pp. 3262-3267.

[34] H. Lange, M. Poppenberg e H. Teismann, *Nash-Moser methods for the solution of quasilinear Schrödinger equations*, Comm. P. D. E. 24 (1999), 1399-1418.

[35] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the locally compact case*, Ann. I. H. P. Anal. Nonlin. 1 (1984), 109-145 and 223-283.

[36] C. Liu, *Weak solutions for a viscous p-laplacian operator*. Elect. J. Diff. Eqns (63) (2003), 1-13.

[37] J. Q. Liu e Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 441-448.

[38] J. Q. Liu, Y. Q. Wang e Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Diff. Eqns. 187 (2003), 473-493.

[39] J. Q. Liu, Y. Q. Wang e Z. Q. Wang, *Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari Method*, Comm. P.D.E. 29 (2004), 879-901.

[40] V. G. Makhankov e V. K. Fedyanin, *Nonlinear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory*, Physics Reports 104 (1984), 1-86.

[41] P. Montecchiari, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^n$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 95 (1996), 217-252.

[42] E. S. Noussair, C. A. Swanson e J. Yang, *Quasilinear elliptic problems with critical exponentes: The critical exponential case*, Nonlinear Anal. 20 (1993), 285-301.

[43] J. M. do Ó, O. H. Miyagaki e S. H. M. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: The critical exponential case*, Nonlinear Anal. 67 (2007), 3357-3372.

[44] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second school on nonlinear functional analysis e appl. diff. eqns., I.C.T.P.I., Trieste, 1997.

[45] M. Poppenberg, K. Schmitt e Z. Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Cal. Var. P.D. E. 14 (2002), 329-344.

[46] G. R. W. Quispel e H. W. Capel, *Equation of motion for the Heisenberg spin chain*, Physica 110A (1982), 41-80.

[47] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, ZAMP 43 (1992), 270-291.

[48] M. Ramaswamy e R. Shivaji, *Multiple positive solutions for classes of p-laplacian equations*, Diff. Integ. Eqns 17 (11-12) (2004), 1255-1261.

[49] V. Rădulescu e D. Smets, *Critical singular problems on infinite cones*, Nonlinear Anal. 54 (2003), 1153-1164.

[50] U. B. Severo, *Existence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian in the whole* $\mathbb{R}^n$, pre-print (2007).

[51] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non linéaire dans* $\mathbb{R}^n$, Lectures Notes in Math. N^0 665, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[52] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[53] D. W. Stroock, *A Concise introduction to the theory of integration*, second edition, Birkhäuser, Boston, 1994.

[54] W. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys., 55 (1977), 149-162.

[55] G., Tarantello, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. I. H. P. Anal. Nonlin. 9 (1992) 281-304.

[56] J. L. Vázquez, *A strong maximun principle for some quasilinear elliptic equations*, App. Math. Optim 12 (1984), 191-202.

[57] M. Willem, *Minimax theorems,* Birkhäuser, Boston, 1996.

[58] Z. Xiping e Y. Jianfu, *On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domains*, Ata Math. Scientia 7 (1987), 341-359.

—A—

Apêndice

A.1 Desigualdades

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\mu = \mu(p)$ é uma constante positiva e p, p' expoentes conjugados, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Então

$$|a+b|^p \geq |a|^p + |b|^p - \mu\left[|b|^{p-1}|a| + |a|^{p-1}|b|\right].$$

Referência. Stroock [53, pág. 122].

Desigualdades de Young : Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e p, p' expoentes conjugados. Então

2. $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$.

3. $ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p'}$, onde $\varepsilon > 0$ e $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{p'}{p}}(p')^{-1}$.

Referência. Evans [25, pág. 622].

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$. Então

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Lema A.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante $C = C(p)$ tal que*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle_e \geq \begin{cases} C\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & se \quad 1 < p < 2, \\ C|x-y|^p & se \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{A.1.1}$$

Referência. Peral [44, Lema A.0.5, pág. 78] e Simon [51, Lema 2.1].

A.2 Lema de Brézis e Lieb

Lema A.2. *(Brézis e Lieb). Sejam* (Ω, μ) *espaço de medida e* $(f_n) : \Omega \to \mathcal{C}$ *(* $\mathcal{C}$ *é o conjunto dos números complexos) funções mensuráveis. Suponha que*

1. *as funções* f_n*, para* $n = 1, 2, 3, ..., \infty$*, sejam uniformemente limitadas em* $L^p(\Omega)$*, para algum* $0 < p < \infty$ *e*
2. $f_n \to f$ *q. t. p em* Ω*.*

Então

$$\lim_{n\to\infty} \left[|f_n|_p^p - |f_n - f|_p^p \right] = |f|_p^p.$$

Referência. Brézis e Lieb [13, Teorema 1, pág. 487].

A.3 Princípio Variacional de Ekeland

Teorema A.3. *Seja* (X, d) *espaço métrico completo com métrica* d *e seja* $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *uma função semicontínua inferiormente. Suponhamos que* J *seja limitada inferiormente e definamos*

$$c \equiv \inf_{x\in X} J(x).$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$*, existe* u_ε *tal que*

$$c \leq J(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon$$

e para todo $x \in X$ *tal que* $x \neq u_\varepsilon$*, temos*

$$J(x) - J(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0.$$

Referência. Ekeland [24].

A.4 Teorema de Poincaré-Bendixson

Sejam Δ um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ e $X : \Delta \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^k, $k \geq 1$.

Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ a curva integral de X passando pelo ponto P definida no seu intervalo máximo I_p, $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = \infty$ define-se o conjunto

$$\omega(p) \equiv \{q \in \Delta;\text{ existe uma sequência } (t_n),\text{ com } t_n \to \infty \text{ e } \varphi(t_n) \to q,\text{ quando } n \to \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$ define-se o conjunto

$$\alpha(p) \equiv \{q \in \Delta;\text{ existe uma sequência } (t_n) \text{ com } t_n \to -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \to q,\text{ quando } n \to \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados respectivamente de conjuntos $\omega - limite$ e $\alpha - limite$ de p.

Vamos definir por $\gamma_p^+ \equiv \{\varphi(t,p); t \geq 0\}$ a semi-órbita positiva conduzida pelo ponto p.

Teorema A.4. *Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ a curva integral de X, definida para todo $t \geq 0$, tal que γ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset \Delta$. Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p)$. Tem-se as seguintes alternativas:*

(a) *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*

(b) *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.*

(c) *Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.*

Referência. Sotomayor [52, Teorema (Poincaré-Bendixson), pág. 248].

A.5 Teorema do Passo da Montanha

Teorema A.5. *(Sem a condição $(PS)_c$). Sejam E espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ função de classe C^1. Suponhamos que existam vizinhança U da origem em E e constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tais que $\Phi \geq \rho$, para todo $u \in \partial U$,*

$$\Phi(0) < \rho \quad e \quad \Phi(v) < \rho, \;\; para\ algum \quad v \notin U.$$

Definimos

$$c \equiv \inf_{P \in \mathcal{P}} \max_{w \in P} \Phi(w) > 0,$$

em que $\mathcal{P}$ denota a classe de caminhos contínuos em E unindo a origem a $v \notin U$. Então existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$\Phi(u_n) \to c \quad e \quad \Phi'(u_n) \to 0 \quad em \quad E^*, \;\; quando\, n \to \infty.$$

Referência. Brézis e Nirenberg [14, Teorema 2.2].

A.6 Princípio do Máximo de Vázquez

Considere a equação

$$\Delta_p v(x) + \beta(v(x)) = h(x) \text{ em } \Omega,$$

onde $\Delta_p v = div\,(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$, ∇v é o gradiente de v, $p > 1$.

Definição A.6. *Seja $x_0 \in \partial\Omega$. Se existe uma bola aberta $B_R(x_1) \subset \Omega$ tal que $\bar{B} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ então podemos escolher um vetor unitário*

$$\nu = \frac{x_1 - x_0}{|x_1 - x_0|},$$

onde ν é um vetor unitário normal a $\partial\Omega$ no ponto x_0 apontando para o interior da bola.

Teorema A.7. *Seja $v \in C^1(\Omega)$ com $\Delta_p v \in L^2_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ q. t. p. em Ω, $\Delta_p v \leq \beta(v)$ q. t. p em Ω, com $\beta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, contínua, não decrescente, tal que $\beta(0) = 0$. Suponha que $\beta(s) = 0$, para algum $s > 0$ ou $\beta(s) > 0$, para todo $s > 0$ e satisfaz a condição*

$$\int_0^1 [\beta(s)s]^{-\frac{1}{p}}\, ds = \infty.$$

Se v não é identicamente nula em Ω então v é estritamente positiva em Ω.

Além disso, se $v \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$, para algum $x_0 \in \partial\Omega$ satisfazendo $u(x_0) = 0$ e a definição A.6 então

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Referência. Vázquez [56, Teorema 5, pág. 200].

A.7 Teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema A.8. *Suponha que (f_k), $k = 1, 2, 3, ...$, é uma sequência de funções, $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que as funções f_k sejam equicontínuas e*

$$|f_k(x)| \leq M, \text{ para todo } k = 1, 2, 3, ... \text{ e } x \in \mathbb{R}^n, \text{para alguma constante } M.$$

Então existe uma subsequência $(f_{k_j}) \subset (f_k)$, $j = 1, 2, 3, ...$ e uma de função contínua f tal que

$$f_{k_j} \to f \text{ uniformente em conjuntos compactos de } \mathbb{R}^n.$$

Referência. Conway [18, Teorema 3.8, pág. 175] e Evans [25, pág. 622].

A.8 Teorema Hewitt-Stromberg

Teorema A.9. *Suponha que $1 < p < \infty$ e que a sequência (f_n) seja limitada em $L^p(\mathbb{R})$. Se*

$$f_n \to f \text{ q. t. p. em } \mathbb{R}, \text{ então } f_n \rightharpoonup f \text{ fracamente em } L^p(\mathbb{R}), \text{ ou seja}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n g \, d\mu = \int_E fg \, d\mu, \text{ para toda } g \in L^{p'}(E), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Referência. Hewitt and Stromberg [29, Teorema 13.44, pág. 207].

A.9 Lema de Concentração e Compacidade

Lema A.10. *(P. L. Lions,1984). seja $r > 0$ e $2 \leq q < \infty$. Se a sequência (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ e*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \to 0, \ \textit{quando } n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R})$ para todo $2 < p < \infty$.

Referência. Lions [35, Lema I.1, pág. 115].

A.10 Teorema de convergência em $L^p(\mathbb{R})$

Teorema A.11. *Seja f_n uma sequência em $L^p(\mathbb{R})$ e $f \in L^p(\mathbb{R})$, para $1 \leq p < \infty$, tais que $|f_n - f|_p \to 0$, quando $n \to \infty$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) da sequência (f_n) tais que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q. t. p. em $\mathbb{R}$, quando $n \to \infty$.

(b) Existe uma função $h \in L^p(\mathbb{R})$ tal que $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q. t. p. em $\mathbb{R}$, para todo k.

Referência. Brézis [12, Teorema IV.9), pág. 58].

A.11 Definição da variedade de Nehari

Seja $I : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. Defina

$$M = \{u \in X\backslash\{0\} : I'(u) \cdot u = 0\}.$$

M é chamada de variedade de Nehari associada ao funcional I.

A.12 Definição de solução fraca e regularidade do funcional I

Vamos considerar o problema (0.0.1), a saber,

$$\begin{cases} Lu + V(x)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u + g(x), \ \text{ em } \mathbb{R}, \\ \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}), u \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde o operador L é definido por

$$Lu \equiv -[|u'|^{p-2}u']' - K_0\{[(|u|^{\beta})']^{p-1}\}'|u|^{\beta-2}u,$$

$K_0 > 0$, $\beta > 1$, $p > 1$, $q \geq p\,\beta$, $g \in L^s(\mathbb{R})$, para algum $s \geq 1$ e $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial verificando a condição (V_0).

Multiplicando a equação (0.0.1) por uma função $z \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, integrando por partes e usando o fato que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ (pois $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}[|u|^{q-2}u]zdx + \int_{\mathbb{R}} g(x)zdx &= \int_{\mathbb{R}}[|u'|^{p-2}u']z'dx + \int_{\mathbb{R}}[V(x)|u|^{p-2}u]zdx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} K_0\{[(|u|^{\beta})']^{p-1}\}[|u|^{\beta-2}uz]'dx.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} K_0\{[(|u|^{\beta})']^{p-1}\}[|u|^{\beta-2}uz]'dx \\ = &\int_{\mathbb{R}} K_0\beta^{p-1}(\beta-1)[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^{p}]zdx + \int_{\mathbb{R}} K_0\beta^{p-1}[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u']z'dx.\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}[|u'|^{p-2}u']z'dx + \int_{\mathbb{R}}[V(x)|u|^{p-2}u]zdx + \int_{\mathbb{R}} K_0\beta^{p-1}(\beta-1)[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^{p}]zdx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} K_0\beta^{p-1}[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u']z'dx - \int_{\mathbb{R}}[|u|^{q-2}u]zdx - \int_{\mathbb{R}} g(x)zdx = 0. \quad \text{(A.12.1)}\end{aligned}$$

Desde que o espaço das funções $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, a igualdade (A.12.1) é válida para todo $z \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Defina o funcional energia $I : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$
\begin{aligned}
I(u) \quad \equiv \quad & \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^p + V(x)|u|^p\right] dx + \frac{\beta^{p-1}}{p} K_0 \int_{\mathbb{R}} |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p dx \\
& -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}} |u|^q dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) u dx. \qquad \text{(A.12.2)}
\end{aligned}
$$

Para mostrar a existência da derivada de Fréchet do funcional I, usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. O existência da derivada de Fréchet do quarto termo da expressão de I é imediato. Vamos provar a existência da derivada de Fréchet para o segundo termo da expressão de I. Os demais termos estão provados no livro do Willem, [57] em [57, Proposição 1.12, pág. 9].

Vamos definir $J : W^{1,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$
J(u) = \frac{\beta^{p-1}}{p}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p dx.
$$

Provaremos que

$$
\begin{aligned}
J'(u) \cdot z \quad = \quad & \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta - 1)\left[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right] z dx \\
& + \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right] z' dx. \qquad \text{(A.12.3)}
\end{aligned}
$$

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \lambda < 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{t}\left[|u + tz|^{p(\beta-1)}|u' + tz'|^p - |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p\right] = \\
& \beta^{p-1}(\beta - 1)\left[|u + \lambda tz|^{p(\beta-1)-2}(u + \lambda tz)|u' + \lambda tz'|^p\right] z \\
& +\beta^{p-1}\left[|u + \lambda tz|^{p(\beta-1)}|u' + \lambda tz'|^{p-2}(u' + \lambda tz)\right] z'.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade 4 do Apêndice, seção A.1, a desigualdade de Hölder, o fato de

$0 < |t| < 1$, $0 < \lambda < 1$ e $u,\ z \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ estarem continuamente imerso em $L^\infty(\mathbb{R})$, obtemos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|t|}|\left[|u+tz|^{p(\beta-1)}|u'+tz'|^p - |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p\right]| \leq \\ &C_1|u'+z'|^p + C_2|u'+z'|^{p-1}z' \in L^1(\mathbb{R}),\end{aligned} \tag{A.12.4}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas.

Vamos definir a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(t) = J(u+tz)$. Note que $p(0) = J(u)$, $p'(t) = J'(u+tz) \cdot z$ e que $J'(u) \cdot z = p'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[J(u+tz) - J(u)]$. Então

$$J'(u) \cdot z = p'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\frac{\beta^{p-1}}{p}\left[\int_{\mathbb{R}} |u+tz|^{p(\beta-1)}|u'+tz'|^p dx - \int_{\mathbb{R}} |u|^{p(\beta-1)}|u'|^p dx\right].$$

Então

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[J(u+tz) - J(u) - J'(u)\cdot tz\right] = \\ &\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t}\left\{\frac{\beta^{p-1}}{p}|u+tz|^{p(\beta-1)}|u'+tz'|^p dx - \frac{\beta^{p-1}}{p}|u|^{p(\beta-1)}|u'|^p\right. \\ &\left. -\ \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right]tz - \beta^{p-1}\left[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right]tz'\right\}dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade (A.12.4), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e passar o limite para dentro do sinal de integração e obtermos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[J(u+tz) - J(u) - J'(u)\cdot tz\right] = 0$$

Logo a igualdade (A.12.3) segue .

Então temos que a derivada de Fréchet do funcional I é dada por

$$
\begin{aligned}
I'(u)\cdot z = & \int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^{p-2}u'\right] z'dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|u|^{p-2}u\right] zdx \\
& + K_0 \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^{p}\right] zdx \\
& + K_0 \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right] z'dx - \int_{\mathbb{R}} \left[|u|^{q-2}u\right] zdx - \int_{\mathbb{R}} g(x)zdx.
\end{aligned}
$$

Definição A.12. *Dizemos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ é uma solução fraca do problema (0.0.5) se u satisfaz a igualdade (A.12.1), isto é, $I'(u)\cdot v = 0$, para toda $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Agora vamos provar que o funcional energia I é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}),\mathbb{R})$. Temos que sua derivada de Fréchet é dada por

$$
I'(u)\cdot z = \sum_{i=1}^{1=6} I_i'(u)\cdot z,
$$

onde

$$
I_1'(u)\cdot z = \int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^{p-2}u'\right] z'dx,
$$

$$
I_2'(u)\cdot z = \int_{\mathbb{R}} V(x)\left[|u|^{p-2}u\right] zdx,
$$

$$
I_3'(u)\cdot z = \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}(\beta-1)\left[|u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^{p}\right] zdx,
$$

$$
I_4'(u)\cdot z = \int_{\mathbb{R}} \beta^{p-1}\left[|u|^{p(\beta-1)}|u'|^{p-2}u'\right] z'dx,
$$

$$I_5'(u) \cdot z = -\int_{\mathbb{R}} \left[|u|^{q-2}u\right] z dx$$

e

$$I_6'(u) \cdot z = -\int_{\mathbb{R}} g(x)z(x)dx.$$

Seja $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Vamos provar que

$$|I_i'(u_n) \cdot z - I_i'(u) \cdot z| \to 0, \text{ quando } n \to \infty \text{ , para todo } n = 1, 2, ..., 6.$$

A continuidade dos termos $I_1'(u) \cdot z$, $I_2'(u) \cdot z$, $I_5'(u) \cdot z$ e $I_6'(u) \cdot z$, seguem por argumentos semelhantes, utilizados por Willem em [57, Proposição 1.12, pág. 9].

O termo $I_3'(u) \cdot z$ também é contínuo. De fato, note que

$$|I_3'(u_n) \cdot z - I_3'(u) \cdot z| = C_1 \left| \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right] z dx \right|.$$

Desde $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$, obtemos que $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Além disso, $|u_n' - u'|_p \leq M\|u_n - u\|$, onde concluimos que $u_n' \to u'$ em $L^p(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$. Portanto existe uma função h pertecente a $L^p(\mathbb{R})$ tal que $|u_n'(x)| \leq h(x)$ q. t. p. em $\mathbb{R}$.

Defina

$$f_n(x) = \left[|u_n|^{p(\beta-1)-2}u_n|u_n'|^p - |u|^{p(\beta-1)-2}u|u'|^p\right] z.$$

Note que $f_n \to 0$ q. t. p. em $\mathbb{R}$. Usando o fato de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ está imerso em $L^\infty(\mathbb{R})$ e a Observação 1.1 obtemos que $|f_n| \leq C\left[|h(x)|^p + |u'|^p\right] \in L^1(\mathbb{R})$ e o resultado segue pelo Teorema da Convergência Dominada.

Agora vamos provar a continuidade do termo I_4. Observe que

$$|I_4'(u_n) \cdot z - I_4'(u) \cdot z| = C_2 \left| \int_{\mathbb{R}} \left[|u_n|^{p(\beta-1)} |u_n'|^p u_n' - |u|^{p(\beta-1)} |u'|^{p-2} u' \right] z' dx \right|.$$

Desde $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R})$, quando $n \to \infty$ então existe uma função l pertecente a $L^p(\mathbb{R})$ tal que $|u_n(x)| \leq l(x)$ q. t. p. em $\mathbb{R}$.

Defina

$$k_n(x) = \left[|u_n|^{p(\beta-1)-1} |u_n| |u_n'|^p u_n' - |u|^{p(\beta-1)-1} |u| |u'|^{p-2} u' \right] z'.$$

Observe que $f_n \to 0$ q. t. p. em $\mathbb{R}$. Usando que $W^{1,p}(\mathbb{R})$ está imerso em $L^\infty(\mathbb{R})$, a desigualdade de Hölder e a Obsevação 1.1 obtemos que $|k_n|(x) \leq C \left[|h(x)|^{p-1} l(x) + |u'|^{p-1} u \right] \in L^1(\mathbb{R})$ e o resultado segue novamente pelo Teorema da Convergência Dominada. Portanto $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Note que, se definirmos $\gamma(u) \equiv I'(u) \cdot u$, desde que γ é contínuo, podemos obter γ' que é dado pela expressão abaixo.

$$\begin{aligned} \gamma'(u) \cdot u & \\ & \equiv p\|u\|^{p-1} + p\beta^{p+1} K_0 |u^{(\beta-1)} u'|_p - q|u|_q - \int_{\mathbb{R}} g \; u dx. \end{aligned} \tag{A.12.5}$$