Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Teoria de melhores constantes em análise geométrica: da escalar à vetorial

Ezequiel Rodrigues Barbosa

Orientador: Prof. Marcos da Silva Montenegro

Belo Horizonte - 19 de Setembro de 2008

Para minha esposa Tatiane e meu filho Davi.
A existência deles justifica a minha.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Marcos da Silva Montenegro, por compartilhar comigo os seus conhecimentos e sabedoria. Por ser comigo um profissional em busca da excelência. Por sua amizade. Pela compreensão nos momentos difíceis. Pela alegria e satisfação em trabalharmos juntos.

À minha esposa Tatiane, pelo amor, carinho e companheirismo. Sua presença ao meu lado é a minha força e inspiração.

À minha mãe Terezinha, pelos ensinamentos. Pela coragem e intrepidez com que encara a vida. Me sinto honrado em ser seu filho.

Aos meus irmãos Samuel e Marta, pelos incentivos que sempre me deram. Vocês moram em meu coração.

Aos Professores Jorge Hounie, Paolo Piccione, Rui Tojeiro e Nikolay Goussevskii, pela análise deste trabalho e pela fina participação como banca examinadora em minha defesa de tese.

Ao amigo Antônio Rosivaldo Gonçalves, por sua generosidade e sinceridade em nossa amizade acima de qualquer outra coisa. Pelo carinho e atenção de uma forma toda especial que tem comigo. Valeu, Gonan!

Aos professores do departamento de matemática da UFMG.

Aos meus colegas de pós-graduação, dentre os quais não poderia deixar de citar: Bafo, Gauchão, Heleno, Leandrovisky, Louis, Negão, Rodrigo Couto, Thiago, Tonescu e Viviane.

A Fapemig, que financiou minha pesquisa durante o doutorado.

Ao Deus todo poderoso, pela vida, pela capacidade de pensar e pelo misterioso toque que muda o percurso das coisas.

A grandeza de um ser humano não está no quanto ele sabe mas no quanto ele tem consciência que não sabe.

Augusto Cury

Sumário

Introdução geral **1**

0.1 Panorama histórico 1

0.2 Proposta e relevância 6

0.3 Organização e idéias 12

0.4 Produções geradas 14

1 Teoria escalar de melhores constantes **17**

1.1 O programa AB escalar 17

1.2 Respostas parciais 20

1.3 As contribuições escalares 23

1.3.1 Continuidade em relação ao parâmetro 23

1.3.2 Continuidade em relação à geometria 23

1.3.3 Continuidade em relação à função 24

1.3.4 Compacidade C^0 de funções extremais 24

2 Teoria vetorial de melhores constantes **27**

2.1 O programa AB vetorial 27

2.2 Respostas parciais 31

2.3 As contribuições vetoriais 34

2.3.1 Continuidade em relação às funções 34

2.3.2 Existência de aplicações extremais 35

2.3.3 Continuidade em relação à geometria 35

2.3.4 Compacidade C^0 de aplicações extremais 36

3 Demonstrações das contribuições escalares **37**

3.1 Demonstração do Teorema 1.3.1 37

3.2 Demonstração do Teorema 1.3.2 51

3.3 Demonstração do Teorema 1.3.3 65

3.4 Demonstração do Teorema 1.3.6 70

4 Demonstrações das contribuições vetoriais 75

4.1 Demonstração do Teorema 2.3.1 75

4.2 Demonstração do Teorema 2.3.2 82

4.3 Demonstração do Teorema 2.3.3 91

4.4 Demonstração do Teorema 2.3.4 93

4.5 Demonstração do Teorema 2.3.5 94

4.6 Demonstração do Teorema 2.3.6 94

5 Considerações finais 97

5.1 Exemplos e contra-exemplos 97

5.2 Conclusões finais 100

A Desigualdades de Sobolev uniformes 103

B Princípios de concentração 107

B.1 Princípio de concentração I 107

B.2 Princípio de concentração II 109

C Regularidade de soluções 113

D Estimativas de De Giorgi-Nash-Moser 117

E Soluções minimizantes 123

F Decomposição em bubbles 127

G Desigualdades locais envolvendo curvatura escalar 135

Referências bibliográficas 145

Introdução geral

0.1 Panorama histórico

No final dos anos 30, Sobolev [72] mostrou a existência de uma constante $A > 0$ tal que, para qualquer função real u suave de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\,,$$

onde $1 \leq p < n$ e $p^* = \frac{np}{n-p}$. Essa desigualdade é conhecida hoje como desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana e surgiu no estudo de estimativas *a priori* de soluções fracas de equações diferenciais parciais. Anos mais tarde, alguns autores observaram que a melhor constante associada à desiguadade de Sobolev Euclideana, a qual é dada por

$$A_0(p,n) = \sup_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{p/p^*}}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx}\,,$$

desempenha um papel importante em equações diferenciais parciais. Particularmente, no estudo de existência e compacidade de soluções de problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \text{ se } \partial\Omega \neq \emptyset\,, \end{cases}$$

onde Ω representa uma região de $\mathbb{R}^n$.

A década de 70 foi marcada por três trabalhos importantes devido a Aubin ([4], [5] e [6]). Um de seus principais objetivos era o estudo de um problema bem conhecido da geometria, o problema de Yamabe, o qual possui uma formulação analítica por meio de uma equação diferencial parcial geométrica. Nesses trabalhos, Aubin também introduziu noções de melhores constantes associadas à desigualdades de Sobolev Riemannianas e iniciou o desenvolvimento de uma teoria dentro da análise geométrica, conhecida atualmente como teoria escalar de melhores constantes, a qual tem importantes aplicações em geometria e análise. Uma série de avanços na matemática foram motivados por algumas questões importantes e a teoria escalar de melhores constantes não é exceção. A seguir, faremos uma breve descrição histórica de sua origem, a partir da Conjectura de Poincaré.

Em 1904, Poincaré [64] propôs a seguinte conjectura:

"Toda variedade topológica fechada, 3-dimensional e simplesmente conexa é homeomorfa à 3-esfera unitária Euclideana ."

Na década de 50, no entanto, provou-se que quaisquer variedades 3-dimensionais homeomorfas são também difeomorfas. Assim, a Conjectura de Poincaré pôde ser reenunciada como:

"Toda variedade diferenciável fechada, 3-dimensional e simplesmente conexa é difeomorfa à 3-esfera unitária Euclideana ."

Graças ao Teorema de Uniformização de Hadamard, a solução da Conjectura de Poincaré é então reduzida a mostrar que toda variedade diferenciável fechada, 3-dimensional e simplesmente conexa admite métricas de Einstein. Por outro lado, desde Hilbert [19], sabe-se que métricas de Einstein sobre uma variedade diferenciável compacta M de dimensão $n \geq 3$ podem ser vistas como pontos críticos do funcional de Hilbert-Einstein $\mathcal{I} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{I}(g) := v_g(M)^{\frac{2-n}{n}} \int_M Scal_g \, dv_g \,,$$

definido no espaço $\mathcal{M}$ de métricas Riemannianas sobre M, onde $v_g(M)$, dv_g e $Scal_g$ denotam, respectivamente, o volume, o elemento de volume e a curvatura escalar da métrica g. No entanto, a busca de pontos críticos do funcional $\mathcal{I}$ é uma tarefa árdua, uma vez que esse funcional não é limitado inferiormente nem superiormente. Em 1987, Kobayashi [60] e Schoen [69] propuseram, de maneira independente, um programa destinado à construção de métricas de Einstein. Precisamente, eles introduziram a constante

$$Y(M) = \sup_{g \in \mathcal{M}} \inf_{h \in [g]} \mathcal{I}(h) \,,$$

onde $[g]$ denota a classe conforme da métrica g e conjecturaram que $Y(M)$ é atingida por métricas de Einstein. Essa idéia é baseada na estratégia de solução do problema de Yamabe proposta por Yamabe em [78] e sustentada por uma série de propriedades envolvendo $Y(M)$. Precisamente, o problema de Yamabe consiste em buscar métricas de curvatura escalar constante e conformes à métrica g. Do ponto de vista analítico, este problema é equivalente a encontrar uma solução positiva $u \in C^\infty(M)$ da equação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g u = \lambda u^{2^*-1} \tag{1}$$

para alguma constante λ, onde $\Delta_g u = \mathrm{div}_g(\nabla_g u)$ representa o operador de Laplace-Beltrami associado à métrica g. O caminho seguido por Yamabe é baseado na parte de minimização de $Y(M)$, ou seja, na procura de métricas que realizem o ínfimo

$$\mu_g(M) = \inf_{h \in [g]} \mathcal{I}(h) \ ,$$

conhecido como invariante de Yamabe. Na verdade, Yamabe observou que $\mu_g(M)$ pode ser escrito analiticamente como

$$\mu_g(M) = \inf_{u \in C^\infty(M),\, u>0} \frac{\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla_g u|^2 dv_g + \int_M Scal_g \, u^2 \, dv_g}{\left(\int_M u^{2^*} \, dv_g \right)^{2/2^*}}$$

e que os mínimos são soluções de (1). Em 1968, Trudinger [75] encontrou um erro no trabalho de Yamabe e o corrigiu parcialmente. Em particular, o problema foi resolvido nos casos em que a curvatura escalar de g é não-positiva. Em 1976, Aubin [4] resolveu o problema de Yamabe no caso em que $n \geq 6$ e (M, g) não é localmente conformemente plana. A seguir, descreveremos a estratégia utilizada por Aubin ([4], [5]) e a relação entre o problema de Yamabe e melhores constantes.

Dada uma variedade Riemanniana compacta (M, g) de dimensão $n \geq 3$, denotemos por $H^{1,2}(M)$ o espaço de Sobolev definido como o completamento de $C^\infty(M)$ em relação à norma

$$||u||_{H^{1,2}(M)} = \left(\int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + \int_M u^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} .$$

O teorema de imersão de Sobolev garante que a imersão $H^{1,2}(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$ é contínua. Assim, existem constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $u \in H^{1,2}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^*} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq A \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + B \int_M u^2 \, dv_g \, . \tag{2}$$

A primeira melhor constante de Sobolev associada à (2) é definida por

$$A_0(2, g) = \inf\{ A \in \mathbb{R} : \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ tal que } (2) \text{ é válida} \} .$$

Em [6], Aubin observou que $A_0(2, g) = A_0(2, n)$. Em particular, $A_0(2, g)$ não depende da geometria. Em seguida, Aubin mostrou que

$$\mu_g(M) \leq \frac{4(n-1)}{(n-2) A_0(2, g)} \ ,$$

que a igualdade ocorre quando (M,g) é conforme à n-esfera unitária Euclideana $\mathbb{S}^n$ e que o problema de Yamabe tem solução quando a desigualdade é estrita. Mais ainda, Aubin mostrou que essa desigualdade é sempre estrita quando $n \geq 6$ e (M,g) é não conformemente plana. Esses resultados deram uma clara indicação do caminho para a solução completa do problema de Yamabe. Entretanto, o problema permaneceu em aberto por alguns anos e somente em 1984, Schoen [68] mostrou que a desigualdade acima também é estrita nos casos restantes $n = 3$, 4, 5 ou quando $n \geq 6$, (M,g) é localmente conformemente plana e não conformemente difeomorfa à n-esfera $\mathbb{S}^n$.

Outro principal objetivo dos trabalhos de Aubin foi iniciar o desenvolvimento da teoria escalar de melhores constantes, a qual está conectada com outras questões geométricas e analíticas. A seguir, introduziremos algumas definições básicas dessa teoria e mencionaremos algumas aplicações geométricas.

Dada uma variedade Riemanniana compacta (M,g) de dimensão $n \geq 2$, denotemos por $H^{1,p}(M)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Sobolev definido como o completamento de $C^\infty(M)$ em relação à norma

$$||u||_{H^{1,p}(M)} = \left(\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + \int_M |u|^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Quando $1 \leq p < n$, o teorema de imersão de Sobolev garante que a imersão $H^{1,p}(M) \hookrightarrow L^{p^*}(M)$ é contínua. Assim, existem constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B \int_M |u|^p \, dv_g \,. \tag{3}$$

A primeira melhor constante de L^p-Sobolev associada à (3) é definida por

$$A_0(p,g) = \inf\{A \in \mathbb{R} : \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ tal que } (3) \text{ é válida}\}$$

e, por Aubin [6], seu valor é igual à melhor constante Euclideana $A_0(p,n)$.

A primeira desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana ótima afirma que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,g) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B \int_M |u|^p \, dv_g \tag{4}$$

para alguma constante $B \in \mathbb{R}$. É bem conhecido na literatura ([8], [27], [30], [51]) que uma tal constante sempre existe para $1 \leq p \leq 2$ e que, em geral, não existe para $p > 2$.

A segunda melhor constante de L^p-Sobolev associada à (3) é definida por

$$B_0(p,g) = \inf\{B \in \mathbb{R} : \ (4) \ \text{é válida}\} \ .$$

Segue então que $B_0(p,g)$ está sempre bem definida para $1 \leq p \leq 2$.

A segunda desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana ótima afirma que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,g) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B_0(p,g) \int_M |u|^p \, dv_g \ . \tag{5}$$

Note que essa desigualdade é ótima em relação à primeira e à segunda melhores constantes de Sobolev no sentido que nenhuma delas pode ser diminuída.

Uma noção natural associada à (5) é a de função extremal. Uma função não-nula $u_0 \in H^{1,p}(M)$ é dita um extremal de (5), se

$$\left(\int_M |u_0|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} = A_0(p,g) \int_M |\nabla_g u_0|^p \, dv_g + B_0(p,g) \int_M |u_0|^p \, dv_g \ .$$

Quando $p = 2$, a segunda melhor constante $B_0(2,g)$ também está conectada ao problema de Yamabe. Precisamente, está relacionada à multiplicidade de soluções e esse fato foi observado por Hebey e Vaugon em [50].

As constantes $A_0(p,g)$ e $B_0(p,g)$ também desempenham um papel importante em outros problemas geométricos, como por exemplo no estudo das desigualdades isoperimétricas Riemannianas. A seguir, apresentaremos um breve panorama sobre esse tema.

Em $\mathbb{R}^2$, o problema isoperimétrico clássico é formulado da seguinte forma: determinar, dentre todas as regiões suaves e limitadas com comprimento de fronteira fixado, a que possui a maior área. A solução desse problema, se encontra em uma desigualdade isoperimétrica. Precisamente, para qualquer região suave e limitada Ω em $\mathbb{R}^2$ de área A e comprimento de fronteira L,

$$L^2 \geq 4\pi A \ ,$$

com igualdade se, e somente se, Ω é um disco. Em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, a desigualdade isoperimétrica é formulada da seguinte maneira: para qualquer região suave e limitada Ω em $\mathbb{R}^n$ de volume $v_\xi(\Omega)$ e área de fronteira $v_\xi(\partial\Omega)$, tem-se

$$\frac{v_\xi(\partial\Omega)}{v_\xi(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{v_\xi(\partial B^n)}{v_\xi(B^n)^{\frac{n-1}{n}}} = A_0(1,n)^{-1} \, ,$$

onde B^n denota a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e v_ξ denota as medidas Euclideanas $(n-1)$-dimensional e n-dimensional usuais. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Ω é uma bola. No contexto de variedades Riemannianas completas, existe uma questão conhecida como Conjectura de Cartan-Hadamard. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão $n \geq 2$, simplesmente conexa e de curvatura seccional não-positiva. Então, a conjectura afirma que, para qualquer região Ω em M com fecho compacto e fronteira suave, vale

$$\frac{v_g(\partial\Omega)}{v_g(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq n \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = A_0(1, n)^{-1},$$

onde ω_{n-1} denota o volume da esfera unitária Euclideana $\mathbb{S}^{n-1}$. Tal conjectura foi provada por Weil [76] no caso $n = 2$, por Croke [22] no caso $n = 4$, por Kleiner [59] no caso $n = 3$, e permanece em aberto para $n \geq 5$.

Uma formulação mais fraca da desigualdade isoperimétrica no contexto de uma variedade Riemanniana compacta (M, g), é dada da seguinte forma: para qualquer região suave $\Omega \subset M$,

$$\frac{v_g(\partial\Omega)}{v_g(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq n \left(\frac{\omega_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - B_0(1, g) v_g(\Omega)^{\frac{1}{n}} .$$

Em 2002, esta desigualdade foi estabelecida por Druet em [27]. A demonstração é baseada no estudo do comportamento de $B_0(p, g)$ para p próximo de 1 e em alguns resultados de existência de funções extremais associadas à (5). Para outros problemas geométricos e analíticos de interesse envolvendo melhores constantes de Sobolev, citamos por exemplo as referências [9], [12], [14], [16], [23], [26], [29], [35], [36], [37], [38], [42], [49], [56], [57], [58] e [80].

A teoria escalar de melhores constantes desenvolvida até então é extensa e trata de uma série de questões envolvendo as melhores constantes $A_0(p, g)$ e $B_0(p, g)$ e as desigualdades ótimas (4) e (5). Com o intuito de situar o leitor sobre a relevância das nossas contribuições, nesta tese apresentaremos um panorama detalhado dessa teoria.

0.2 Proposta e relevância

Um dos objetivos desta tese é contribuir para o desenvolvimento da teoria escalar de melhores constantes e, em especial, fornecer algumas respostas sobre a dependência da segunda melhor constante $B_0(p, g)$ em relação ao parâmetro p e à métrica g e estudar a compacidade C^0 de funções extremais. A seguir, detalharemos um pouco essas questões.

Em 1976, Aubin [6] e Talenti [73] encontraram, de maneira independente, o valor explícito da primeira melhor constante $A_0(p, g)$. Precisamente,

$$A_0(p,g) = \frac{1}{n^p}\left(\frac{n(p-1)}{n-p}\right)^{p-1}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n}}$$

para $1 < p < n$, e

$$A_0(1,g) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{p\to 1} A_0(p,g)\,,$$

onde Γ denota a função Gamma usual. Em particular, $A_0(p,g)$ não depende da geometria e depende continuamente do parâmetro p. O valor da segunda melhor constante $B_0(p,g)$, ao contrário, não é conhecido explicitamente, tem-se apenas algumas estimativas geométricas. Por outro lado, sabe-se que $B_0(p,g)$ depende da geometria, pois $B_0(p,\lambda g) = \lambda^{-1}B_0(p,g)$ para qualquer constante $\lambda > 0$ e, em alguns exemplos particulares, observa-se que também depende de p. Surgem então algumas questões relativas ao tipo de dependência:

(a) $B_0(p,g)$ depende continuamente do parâmetro p?

(b) $B_0(p,g)$ depende continuamente da métrica g em alguma topologia?

Neste trabalho, daremos algumas respostas parciais a essas duas questões. De fato, mostraremos que $B_0(p,g)$ é contínua em relação à primeira entrada para $1 \leq p < 2$ e em relação à segunda entrada sobre o espaço de métricas Riemannianas munido da topologia C^2.

Outra questão de interesse, ainda dentro da teoria escalar, diz respeito à compacidade C^0 de funções extremais. Denotemos por $E_p(g)$, o conjunto das funções extremais positivas u_p associadas à (5) tal que $||u_p||_{p^*} = 1$. Em [24], Djadli e Druet mostraram que o conjunto $E_p(g)$ é não-vazio e compacto na topologia C^0 para $n \geq 4$, para cada parâmetro $1 < p < 2$ e cada métrica g. Estamos interessados aqui na compacidade C^0 de funções extremais associadas à uma família de parâmetros p ou de métricas g. Precisamente, mostraremos que o conjunto

$$E_{r,s} = \bigcup_{r\leq p\leq s} E_p(g)$$

é compacto na topologia C^0 para cada $1 < r < s < 2$, e que o conjunto

$$E_p(\mathcal{G}) = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} E_p(g)$$

é compacto na topologia C^0 para cada subconjunto não-vazio $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ compacto em relação à topologia C^2 sobre o espaço de métricas Riemannianas $\mathcal{M}$.

A questão de existência de funções extremais associadas à (5) é importante no estudo de EDPs elípticas sobre variedades Riemannianas. Motivados pela busca de respostas mais completas a esta questão para $p = 2$, Hebey e Vaugon introduziram em [49] a noção de função crítica e através dessa, atingiram seus objetivos. Tal noção envolve a extensão de alguns resultados da teoria escalar clássica ao um contexto um pouco mais geral. Precisamente, dada uma função positiva $\beta \in C^0(M)$, existe uma constante $B \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $u \in H^{1,2}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^*} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq A_0(2,g) \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + B \int_M \beta(x) |u|^2 dv_g \,. \tag{6}$$

Por exemplo, é mostrado em [49] que em dimensões $n \geq 4$, tem-se

$$B_0(2,\beta,g) \min_M \beta \geq \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2,g) \max_M Scal_g \,, \tag{7}$$

onde

$$B_0(2,\beta,g) = \inf\{B \in \mathbb{R} : \; (6) \text{ é válida}\} \,,$$

e que existem funções extremais para (6) sempre que (7) é estrita. Nesse caso, tem-se também que o conjunto das funções extremais positivas associadas à (6) de L^2-norma unitária é compacto na topologia C^0. Esses resultados são então utilizados no estudo de funções extremais dentro da teoria escalar clássica de melhores constantes.

Outra principal meta desta tese é estender grande parte da teoria escalar de melhores constantes ao contexto vetorial. Esta é uma questão importante tanto do ponto de vista matemático, por envolver uma estrutura mais ampla e sua compreensão, quanto do ponto de vista de aplicações analíticas, por possibilitar o estudo de diversos sistemas de EDPs elípticas sobre variedades Riemannianas. A seguir, introduziremos algumas definições básicas e descreveremos algumas questões de interesse envolvidas na teoria vetorial.

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $H_k^{1,p}(M)$ o espaço de Sobolev vetorial $H^{1,p}(M) \times \ldots \times H^{1,p}(M)$ munido da norma

$$||U||_{H_k^{1,p}(M)} = \left(\int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \int_M |U|^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

onde

$$U = (u_1, \ldots, u_k) \,,$$

$$\int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_i|^p \, dv_g \, ,$$

$$\int_M |U|^p \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |u_i|^p \, dv_g \, .$$

Sejam $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea, isto é, $F(\lambda t) = \lambda^{p^*} F(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^k$ e $\lambda > 0$, e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea na segunda variável.

Quando $1 \leq p < n$, segue então da continuidade da imersão $H^{1,p}(M) \hookrightarrow L^{p^*}(M)$ que existem constantes $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_M F(U) \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A} \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \mathcal{B} \int_M G(x, U) \, dv_g \tag{8}$$

para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$.

A primeira melhor constante de L^p-Sobolev associada à (8) é definida por

$$A_0(p, F, G, g) = \inf\{\mathcal{A} \in \mathbb{R} : \text{ existe } \mathcal{B} \in \mathbb{R} \text{ tal que (8) é válida}\} \, .$$

A primeira desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana vetorial afirma que, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F(U) \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \mathcal{B} \int_M G(x, U) \, dv_g \tag{9}$$

para alguma constante $\mathcal{B} \in \mathbb{R}$. Como veremos mais tarde, uma conclusão simples, a qual segue diretamente da teoria escalar, é que uma tal constante sempre existe para $1 \leq p \leq 2$ e o valor da primeira melhor constante é dado por

$$\mathcal{A}_0(p, F, G, g) = M_F^{p/p^*} A_0(p, g) \, ,$$

onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$ e $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$.

A segunda melhor constante de L^p-Sobolev associada à (9) é definida por

$$\mathcal{B}_0(p, F, G, g) = \inf\{\mathcal{B} \in \mathbb{R} : \text{ (9) é válida}\} \, .$$

Segue então que $\mathcal{B}_0(p, F, G, g)$ está sempre bem definida para $1 \leq p \leq 2$.

A segunda desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana vetorial afirma que, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + \mathcal{B}_0(p,F,G,g)\int_M G(x,U)\, dv_g\ . \quad (10)$$

Note que esta desigualdade é ótima em relação à primeira e à segunda melhores constantes de Sobolev no sentido que nenhuma delas pode ser diminuída.

Nesse contexto, temos naturalmente a noção de aplicação extremal. Uma aplicação não-nula $U_0 \in H_k^{1,p}(M)$ é dita um extremal de (10), se

$$\left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U_0|^p\, dv_g + \mathcal{B}_0(p,F,G,g)\int_M G(x,U_0)\, dv_g\ .$$

Observe que essas definições básicas, claramente estendem aquelas já conhecidas no contexto escalar ($k = 1$).

A teoria vetorial de melhores constantes desenvolvida aqui considera uma série de questões envolvendo as melhores constantes $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$ e $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ e as desigualdades ótimas (9) e (10). Algumas dessas seguem diretamente da teoria escalar. Entretanto, outras são complexas, como por exemplo o comportamento de $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ em relação a todos os parâmetros envolvidos e o problema de existência e compacidade C^0 de aplicações extremais. Todas essas questões serão abordadas em detalhe na tese para $1 \leq p \leq 2$. Por exemplo, comparando com o resultado de existência de função extremal obtido em [49] e mencionado acima, mostramos que aplicações extremais de (8) existem quando $p = 2$, $n \geq 4$, F é de classe C^1 e

$$\mathcal{B}_0(2,F,G,g)\min_{x\in M} G(x,t_0) > \frac{n-2}{4(n-1)}\mathcal{A}_0(2,F,G,g)\max_M Scal_g$$

para todo ponto de máximo $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$ de F. Note que essa desigualdade estende completamente (7) no caso estrito. Em particular, aplicações extremais de (10) sempre existem quando $Scal_g \leq 0$.

Como já mencionado, parte da teoria vetorial de melhores constantes não segue diretamente da teoria escalar. A seguir, destacaremos algumas diferenças importantes entre as duas situações.

A primeira diz respeito a natureza de funções vetoriais que satisfazem condições de homogeneidade. De fato, no caso escalar ($k = 1$), segue diretamente das condições de homogeneidade que $F(t) = |t|^{p^*}$ e $G(x,t) = \beta(x)|t|^p$, a menos de multiplicação por uma constante, e observe que tais funções são sempre de classe C^1. Já no caso vetorial ($k \geq 2$), existem exemplos de funções homogêneas que são apenas contínuas. Exemplos explícitos são dados por $F(t) = |t|_\mu^{p^*}$ e $G(x,t) = \beta(x)|t|_\mu^p$, onde $|\cdot|_\mu$ denota a μ-norma definida por

$|t|_\mu = \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}$ para $1 \leq \mu < \infty$ e $|t|_\infty = \max\{|t_i| : i = 1, \ldots, k\}$. A ausência de regularidade de F ou de G gera um obstáculo natural para o estudo de várias questões, uma vez que os argumentos são fortemente baseados em equações de Euler-Lagrange satisfeitas por pontos críticos de funcionais diretamente associados às desigualdades de Sobolev em discussão. Por exemplo, quando F e G são de classe C^1, uma aplicação extremal $U = (u_1, \ldots, u_k)$ é automaticamente solução fraca do sistema de equações

$$-\mathcal{A}_0(p, F, G, g)\Delta_{p,g}u_i + \frac{1}{p}\mathcal{B}_0(p, F, G, g)\frac{\partial G(x, U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*}\frac{\partial F(U)}{\partial t_i}\ ,\ i = 1, \ldots, k\ , \qquad (S)$$

onde $\Delta_{p,g}u = \mathrm{div}_g(|\nabla_g u|^{p-2}\nabla_g u)$ denota o operador de Laplace-Beltrami generalizado associado à métrica g. Nessa situação, faz sentido falar em equações de Euler-Lagrande e estudar algumas propriedades de soluções de (S). Entretanto, sem assumir regularidade de F e G, a abordagem se torna bastante restrita.

A segunda diferença está no fato que, mesmo quando as funções F e G são suaves e, nesse caso, o estudo de soluções de (S) pode ser efetuado, as soluções obtidas podem mudar de sinal. E mesmo que fossem não-negativas, princípios de máximo falham em geral para (S). De fato, existem exemplos de sistemas em que soluções não-triviais e não-negativas não são necessariamente positivas. Já no caso escalar, encontra-se diretamente soluções positivas e a positividade desempenha um papel importante.

Essas diferenças juntamente com a necessidade de se desenvolver algumas ferramentas teóricas no contexto vetorial, tornam o problema de extensão bastante desafiador. É também importante ressaltar que, mesmo no caso suave, esse problema não é tão simples. Embora, a teoria desenvolvida aqui se aplica a uma função contínua F possuindo derivada fraca limitada sobre conjuntos limitados, e isto inclui o exemplo das μ-normas, por simplicidade, assumiremos regularidade C^1. Já a função G será requerida apenas contínua para $p = 2$ e de classe C^1 na segunda variável para $p \neq 2$. A seguir, resumiremos nossa estratégia para contornar os vários obstáculos.

Primeiramente, no caso $p = 2$, aproximamos na topologia C^0_{loc} a função G por funções contínuas postivas G_α, 2-homogêneas e de classe C^1 na segunda variável. A idéia central é mostrar que todos os resultados obtidos para as funções G_α, se estendem também a função G. Para isso, a primeira dificuldade que surge é garantir que as segundas melhores constantes associadas às funções G_α se aproximam da segunda melhor constante associada à função G. O próximo passo, é garantir a existência de aplicações extremais associadas às funções G_α. Nesse ponto, utilizamos uma desigualdade local envolvendo curvatura escalar e um resultado de decomposição em bubbles. Por sua vez, esses dois ingredientes são obtidos graças a uma caracterização das aplicações extremais como combinações lineares envolvendo apenas pontos de máximo da função F e funções extremais da teoria escalar. Após encontrarmos aplicações extremais associadas à função G_α, provamos que estas convergem a uma aplicação extremal associada à função G. Em todo esse processo, necessitamos desenvolver, no contexto vetorial, uma série de resultados teóricos não disponíveis na literatura, os quais são bem conhecidos no contexto escalar, como por exemplo estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para $p = 2$ e $p \neq 2$, decomposição em bubbles de soluções de (S) e desigualdades de Sobolev vetoriais locais envolvendo curvatura escalar.

0.3 Organização e idéias

Esta tese é composta de cinco capítulos. Para melhor organização e comodidade do leitor, apresentamos no final da tese as ferramentas teóricas em formato de apêndice.

No Capítulo 1, apresentamos um panorama detalhado da teoria escalar de melhores constantes desde sua origem e destacamos nossas contribuições a essa teoria.

No Capítulo 2, descrevemos alguns problemas de interesse dentro da teoria vetorial de melhores constantes e enunciamos nossas principais contribuições. Incluimos nesse capítulo, alguns resultados básicos sobre desigualdades de Sobolev Euclideanas vetoriais. Precisamente, mostramos que a melhor constante associada à desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p \, dx\,,$$

é dada por

$$\mathcal{A}_0(p, F, n) = M_F^{p/p^*} A_0(p, g)\,,$$

onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$ e $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \ \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$. Além disso, fornecemos uma caracterização das aplicações extremais correspondentes, como sendo constituídas das aplicações do tipo $U_0 = u_0 t_0$, onde u_0 é uma função extremal associada à desigualdade de L^p-Sobolev escalar Euclideana e t_0 é um ponto de máximo de F em $\mathbb{S}_p^{k-1}$. Também destacamos alguns fatos da teoria vetorial que são extensões diretas de resultados correspondentes da teoria escalar. Isso pode ser visto através de um argumento simples de redução ao caso escalar, o qual consiste em tomar, nas desigualdades de Sobolev Riemannianas vetoriais, aplicações da forma $U = ut_0$, onde $u \in H^{1,p}(M)$ e $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ é um ponto de máximo de F.

O Capítulo 3 é dedicado às demonstrações dos resultados sobre a dependência da segunda melhor constante $B_0(p,g)$ em relação ao parâmetro p e à geometria e sobre a compacidade C^0 de funções extremais. Demonstramos primeiro a continuidade de $B_0(p,g)$ para $1 \leq p < 2$. A idéia geral é a seguinte. Supondo que a continuidade falha, surgem naturalmente duas possíveis alternativas. Uma delas é diretamente eliminada de acordo com a definição de $B_0(p,g)$. A outra alternativa implica a existência de uma sequência minimizante, concentrando em um ponto, associada a uma família de funcionais indexados pelo parâmetro p. A continuidade em $p = 1$ segue de estimativas a priori uniformes sobre a sequência minimizante obtidas por Druet em [30]. Já a continuidade em $p \in (1,2)$ depende de um estudo refinado de concentração sobre a mesma sequência, a fim de obtermos a segunda contradição. Tal estudo requer uma versão uniforme em p de desigualdades de Sobolev assintoticamente ótimas (Apêndice A). A demonstração da continuidade de $B_0(p,g)$ em relação à geometria, se baseia nessas mesmas idéias. Procedemos inicialmente por contradição. Novamente, encontramos duas alternativas possíveis. Uma delas é diretamente descartada da definição de $B_0(p,g)$. A outra alternativa leva à existência de uma sequência minimizante, também concentrando em um ponto, associada a funcionais dependentes de métricas. Durante o estudo de concentração sobre esta sequência, surgem algumas dificuldades técnicas relacionadas à convergência de métricas Riemannianas. De fato, necessitamos de um controle nas expansões de Cartan sobre sistemas de coordenadas geodésicas associadas a uma sequência de métricas. A convergência na topologia C^2 requerida é importante nesse ponto. Para $p = 2$, construimos então um contra-exemplo mostrando que a condição de convergência de métricas na topologia C^2 é também necessária. Finalizamos esse capítulo com as demonstrações dos resultados de compacidade C^0 de funções extremais. Demonstramos primeiro a compacidade de $E_{r,s}$. Para isso, partimos de uma sequência de funções extremais $(u_p)_p \subset E_{r,s}$ e mostramos que converge fracamente a uma função u em $H^{1,q}(M)$, onde $r \leq q \leq s$ é tal que $p \to q$. Nesse ponto, usamos o resultado de continuidade de $B_0(p,g)$ sobre p. Em seguida, assumimos que $u \equiv 0$ e, através de um estudo de concentração sobre a sequência $(u_p)_p$, similar àquele realizado na demonstração da continuidade, obtemos uma contradição. Finalmente, utilizando um princípio de concentração (Seção B.1 do Apêndice B), mostramos que a convergência de $(u_p)_p$ é forte em $H^{1,q}(M)$. Procedendo então com técnica do tipo blow-up, concluímos que $(u_p)_p$ converge a u em C^0. A demonstração da compacidade C^0 de $E_p(\mathcal{G})$, segue o mesmo espírito dessa que acabamos de descrever.

O Capítulo 4 é dedicado as demonstrações das contribuições à teoria vetorial. Inicialmente, tratamos o caso $p = 2$. Primeiro, mostramos que a segunda melhor constante

$\mathcal{B}_0(p, F, G, g)$ é contínua em relação às funções F e G. Em seguida, provamos a existência de aplicações extremais de (10) para G suave. Finalmente, estendemos a existência de aplicações extremais para G apenas contínua. Baseado nas idéias utilizadas no caso $p = 2$, mostramos a existência de aplicações extremais de (10) para $p \neq 2$. O capítulo então se encerra com a demostração da continuidade de $\mathcal{B}_0(p, F, G, g)$ em relação à geometria. As ferramentas teóricas utilizadas nesse capítulo estão contidas na Seção B.2 do Apêndice B e nos Apêndices C, D, E, F e G.

No Capítulo 5, fornecemos alguns exemplos de existência e não-existência de aplicações extremais. Exploramos exemplos que mostram que as hipóteses dos principais resultados não são necessárias e outros que contrastam com o caso escalar. Por fim, apresentamos as conclusões finais.

O Apêndice contém as ferramentas teóricas necessárias nas demonstrações dos teoremas desta tese e é composto dos seguintes tópicos:

I. Desigualdades de Sobolev Riemannianas uniformes em p: utilizadas na demonstração do princípio de concentração escalar mencionado abaixo;

II. Um princípio de concentração escalar: utilizado no estudo de compacidade C^0 de funções extremais em relação ao parâmetro p;

III. Um princípio de concentração vetorial: utilizado no estudo de desigualdades de Sobolev locais envolvendo a curvatura escalar;

IV. Regularidade de soluções fracas de (S): ingrediente básico em todas as demonstrações dos resultados vetoriais;

V. Estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para soluções fracas de (S): utilizado no estudo de concentração de sequências minimizantes;

VI. Soluções minimizantes de (S): ingrediente básico na maior parte das demonstrações dos resultados vetoriais;

VII. Decomposição em bubbles de soluções de (S): ingrediente básico na maior parte das demonstrações dos resultados vetoriais;

VIII. Desigualdades de Sobolev vetoriais locais envolvendo curvatura escalar: utilizada na demonstração da existência de aplicações extremais para $p = 2$.

0.4 Produções geradas

Ao longo do doutorado, além das contribuições apresentadas nesta tese, obtivemos, em paralelo, outros resultados intimamente relacionados e que têm sido divulgados juntamente com aqueles expostos aqui. A seguir, listamos todos os trabalhos produzidos na linha de teoria de melhores constantes desde então.

1. E. Barbosa, M. Montenegro - *On the continuity of the second Sobolev best constant*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 345 (2007) 579-582.
2. E. Barbosa, M. Montenegro - *A note on extremal functions for sharp Sobolev inequalities*, EJDE, 87 (2007) 1-5.
3. E. Barbosa, M. Montenegro - *The second Sobolev best constant along the Ricci flow*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series 39 (2008), 1-19.
4. E. Barbosa, M. Montenegro - *A note on scalar curvature type problems in dimension 4*, J. Math. Anal. Appl., 344 (2008) 699-702.
5. E. Barbosa - *Extremal maps in Sobolev type inequalities: some remarks*, Bull. Sci. Math.. À aparecer em 2008.
6. E. Barbosa, M. Montenegro - *On the p-dependence of Riemannian L^p-Sobolev best constants.* Preprint.
7. E. Barbosa, M. Montenegro - *On the geometric dependence of Riemannian Sobolev best constants.* Preprint.
8. E. Barbosa, M. Montenegro - *New examples of multiple metrics for the prescribed scalar curvature problem.* Preprint.
9. E. Barbosa, M. Montenegro - *Extremal maps in best constants vector theory: Part I.* Preprint.
10. E. Barbosa, M. Montenegro - *Extremal maps in best constants vector theory: Part II.* Preprint.

CAPÍTULO 1

Teoria escalar de melhores constantes

Neste capítulo, apresentaremos as questões que compõem o programa AB escalar. Tal programa norteia a teoria escalar de melhores constantes cujo início, como já mencionado, se deu na década de 70 com os trabalhos de Aubin. Destacaremos algumas respostas parciais e, finalmente, enunciaremos nossas contribuições.

1.1 O programa AB escalar

Para $1 \leq p < n$, $n \geq 2$, a desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana ótima afirma que, para qualquer função $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx, \tag{1.1}$$

onde $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ denota o completamento do espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em relação à norma

$$||u||_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e $p^* = \frac{np}{n-p}$ é o expoente crítico com respeito à imersão de Sobolev $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. O número real $A_0(p,n)$ é chamado de melhor constante de L^p-Sobolev Euclideana e é igual a

$$A_0(p,n) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n), \\ ||u||_{p^*} = 1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \, .$$

Uma função não-nula $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é dita um extremal de (1.1), se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} = A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \, .$$

Duas questões importantes relacionadas à desigualdade (1.1) são:

(a) (1.1) possui função extremal?

(b) Qual o valor exato de $A_0(p,n)$?

Estas questões foram estudadas e respondidas em 1976, de maneira independente, por Aubin [6] e Talenti [73]. As funções extremais, para $1 < p < n$, são precisamente dadas por

$$u(x) = a u_0(b(x - x_0)) \, ,$$

onde $a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e

$$u_0(x) = \left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{n}{p^*}} \, . \tag{1.2}$$

No caso $p = 1$, as funções extremais são precisamente as funções características de bolas em $\mathbb{R}^n$. Além disso, a melhor constante é dada por

$$A_0(p,n) = \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^p \left(\frac{n-p}{n(p-1)}\right) \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(n+1-\frac{n}{p})\omega_{n-1}}\right)^{\frac{p}{n}} \, ,$$

para $1 < p < n$, e

$$A_0(1,n) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{p \to 1} A_0(p,n) \, ,$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária Euclideana $\mathbb{S}^{n-1}$.

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$ e $\beta \in C^0(M)$ uma função positiva. Quando $1 \leq p < n$, o teorema de imersão de Sobolev garante que existem constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_M |\nabla_g u|^p dv_g + B \int_M \beta(x)|u|^p dv_g \, . \tag{$I_g^p(\beta)$}$$

A primeira melhor constante de L^p-Sobolev associada à $(I_g^p(\beta))$ é definida por

$$A_0(p,\beta,g) = \inf\{A \in \mathbb{R} : \text{ existe } B \in \mathbb{R} \text{ tal que } (I_g^p(\beta)) \text{ é válida}\} \, .$$

A primeira desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana ótima afirma que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,\beta,g) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B \int_M \beta(x)|u|^p \, dv_g \tag{$I_{g,opt}^p(\beta)$}$$

para alguma constante $B \in \mathbb{R}$.

A segunda melhor constante de L^p-Sobolev associada à $(I^p_{g,opt}(\beta))$ é definida por

$$B_0(p,\beta,g) = \inf\{B \in \mathbb{R} : \ (I^p_{g,opt}(\beta)) \text{ é válida}\} \ .$$

Note que quando $\beta \equiv 1$, essas constantes são precisamente $A_0(p,g)$ e $B_0(p,g)$.

A segunda desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana ótima afirma que, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,\beta,g) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B_0(p,\beta,g) \int_M \beta(x)|u|^p \, dv_g \, . \quad (J^p_{g,opt}(\beta))$$

Uma função não-nula $u_0 \in H^{1,p}(M)$ é dita um extremal para a desigualdade $(J^p_{g,opt}(\beta))$, se

$$\left(\int_M |u_0|^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = A_0(p,\beta,g) \int_M |\nabla_g u_0|^p \, dv_g + B_0(p,\beta,g) \int_M \beta(x)|u_0|^p \, dv_g \, .$$

O programa AB escalar consiste de várias questões de interesse envolvendo as melhores contantes $A_0(p,\beta,g)$ e $B_0(p,\beta,g)$, e as desigualdades ótimas $(I^p_{g,opt}(\beta))$ e $(J^p_{g,opt}(\beta))$. Para melhor organização, a seguir dividiremos esse programa em duas partes: o programa A e o programa B.

O programa A é constituído de alguns problemas envolvendo $A_0(p,\beta,g)$ e $(I^p_{g,opt}(\beta))$. São eles:

Questão 1A: Qual o valor exato (ou estimativas) de $A_0(p,\beta,g)$?

Questão 2A: A desigualdade $(I^p_{g,opt}(\beta))$ é válida?

Questão 3A: A validade de $(I^p_{g,opt}(\beta))$ implica em alguma obstrução geométrica?

Questão 4A: $A_0(p,\beta,g)$ depende continuamente de g em alguma topologia?

Questão 5A: $A_0(p,\beta,g)$ depende continuamente de β em alguma topologia?

Questão 6A: $A_0(p,\beta,g)$ depende continuamente do parâmetro p?

Questão 7A: Qual o papel da geometria sobre essas questões?

O programa B é composto de algumas questões envolvendo $B_0(p,\beta,g)$ e $(J^p_{g,opt}(\beta))$. São elas:

Questão 1B: Qual o valor exato (ou estimativas) de $B_0(p,\beta,g)$?

Questão 2B: $B_0(p,\beta,g)$ depende continuamente de g em alguma topologia?

Questão 3B: $B_0(p,\beta,g)$ depende continuamente de β em alguma topologia?

Questão 4B: $B_0(p,\beta,g)$ depende continuamente do parâmetro p?

Questão 5B: A desigualdade $(J^p_{g,opt}(\beta))$ possui função extremal?

Questão 6B: O conjunto das funções extremais de L^{p^*}-normas unitárias é compacto na topologia C^0?

Questão 7B: Qual o papel da geometria sobre essas questões?

1.2 Respostas parciais

Alguns autores têm buscado respostas relativas aos programas A e B. As primeiras foram dadas por Aubin em [6]. Precisamente, Aubin mostrou que $A_0(p,\beta,g) = A_0(p,n)$ para todo $1 \leq p < n$ e toda função positiva $\beta \in C^0(M)$. Note que a primeira melhor constante da teoria escalar não depende da geometria e nem da função β, e depende continuamente do parâmetro p. Assim, as questões 1A, 4A, 5A e 6A foram respondidas inicialmente. Em [6], Aubin também respondeu positivamente a questão 2A no caso em que $1 \leq p \leq 2$ e (M,g) possui curvatura seccional constante, e conjecturou que seu resultado seria válido para variedades Riemannianas compactas quaisquer. Anos mais tarde, essa conjectura foi provada por Hebey e Vaugon [51] no caso $p = 2$, por Druet [27] no caso $p = 1$, e, independentemente, por Aubin e Li [8] e Druet [30] no caso $1 < p < 2$. Um fato que merece destaque é a restrição que surge com respeito ao valor de p. Enquanto a desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana ótima é claramente válida para $1 \leq p < n$, a desigualdade L^p-Sobolev Riemanniana ótima é válida, em geral, somente para $1 \leq p \leq 2$. Esse fenômeno se deve a geometria da variedade e foi observado por Druet em [28]. De fato, Druet mostrou que se (M,g) tem curvatura escalar positiva em algum ponto e $2 < p < \frac{n+2}{3}$, então qualquer que seja $B \in \mathbb{R}$, existe uma função $w_B \in H^{1,p}(M)$ tal que

$$\left(\int_M |w_B|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} > A_0(p,\beta,g)\int_M |\nabla_g w_B|^p\, dv_g + B\int_M |w_B|^p\, dv_g\ .$$

Entretanto, quando (M,g) é o toro *flat* $\mathbb{T}^n$, $(I^p_{g,opt}(\beta))$ é válida para todo $1 \leq p < n$. Druet ainda observou que existe uma rigidez geométrica associada à primeira constante ótima, ou seja, se $4 < p < \frac{n+4}{5}$ e $(I^p_{g,opt}(\beta))$ é válida sobre (M,g), então g é *flat* e M é recoberta pelo toro $\mathbb{T}^n$. Em particular, esses resultados fornecem respostas parciais às questões 2A, 3A e 7A.

Em relação ao programa B, várias questões têm sido discutidas no caso clássico $\beta \equiv 1$ e apenas algumas no caso geral. Vejamos algumas respostas parciais.

Primeiramente, no que diz respeito à questão 1B, algumas estimativas foram dadas para $B_0(p,g)$ nos trabalhos de Aubin ([4] e [6]) e Hebey-Vaugon [50]. Em [4], Aubin estabeleceu a seguinte estimativa geométrica para $n \geq 4$,

$$B_0(2,g) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2,g) Scal_g\ .$$

Em [6], ele mostrou que, no caso da esfera unitária Euclideana $\mathbb{S}^n$, tem-se

$$B_0(p,g) = \omega_n^{-\frac{p}{n}}$$

para todo $1 \leq p \leq 2$. Em [50], Hebey e Vaugon encontraram alguns valores exatos para $B_0(2,g)$. Por exemplo, se $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ e g é a métrica produto usual, tem-se

$$B_0(2,g) = \frac{1+(n-2)^2}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\,;$$

se $M = \mathbb{P}^n$ é o espaço projetivo e g é a métrica canônica induzida da métrica Euclideana de $\mathbb{S}^n$, tem-se

$$B_0(2,g) = \frac{n+2}{(n-2)\omega_n^{2/n}}\,.$$

Em geral, o valor explícito de $B_0(p,g)$ não é conhecido. Por outro lado, sabe-se que $B_0(p,g)$ depende da geometria, pois $B_0(p,\lambda g) = \lambda^{-1}B_0(p,g)$ para qualquer constante $\lambda > 0$.

Passemos agora às outras questões. Em [24], Djadli e Druet mostraram que $(J^p_{g,opt}(1))$ sempre possui função extremal quando $n \geq 4$ e $1 < p < 2$. Além disso, o conjunto $E_p(g)$, das funções extremais positivas de L^{p^*}-norma unitária é compacto na topologia C^0. Isso responde as questões 5B e 6B para $p \neq 2$. Quando $n \geq 4$ e $p = 2$, eles também mostraram que, no mínimo, uma das seguintes asserções ocorre:

(a) existe função extremal para $(J^2_{g,opt}(1))$;

(b) $B_0(2,g) = \frac{n-2}{4(n-1)}A_0(2,g)\max\limits_M Scal_g$.

Em particular, se $Scal_g \leq 0$, segue que $(J^2_{g,opt}(1))$ possui função extremal. Uma função extremal existe também no caso em que $Scal_g$ é constante. Isso segue de uma combinação do resultado acima com a solução do problema de Yamabe. De fato, seja $u_0 \in C^\infty(M)$ uma solução positiva da equação de Yamabe

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u_0 + Scal_g u_0 = \mu_g(M)u_0^{2^*-1} \quad \text{em} \quad M$$

tal que $\int_M |u_0|^{2^*} dv_g = 1$, onde $\mu_g(M)$ denota o invariante de Yamabe. Note que u_0 existe graças aos trabalhos de Aubin [4] e Schoen [68]. Quando (M,g) é conforme à n-esfera unitária Euclideana $\mathbb{S}^n$, sabe-se que

$$\mu_g(M) = \frac{4(n-1)}{(n-2)A_0(2,g)}\,,$$

tal que, nesse caso, claramente u_0 é extremal de $(J^2_{g,opt}(1))$. Se (M,g) não é conforme à $\mathbb{S}^n$, temos

$$\mu_g(M) < \frac{4(n-1)}{(n-2)A_0(2,g)}$$

e, consequentemente,

$$A_0(2,g)\int_M |\nabla_g u_0|^2\, dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)}A_0(2,g)Scal_g \int_M |u_0|^2\, dv_g < \left(\int_M |u_0|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Porém, essa última desigualdade implica que

$$B_0(2,g) > \frac{n-2}{4(n-1)}A_0(2,g)Scal_g\,,$$

e assim, a afirmação segue. Em [24], também é provado que o conjunto $E_2(g)$ é compacto na topologia C^0 quando a desigualdade acima ocorre. Em outros trabalhos, Druet [25] e Druet e Hebey [32] mostraram que $E_2(g)$ não é compacto quando (M,g) é isométrica à n-esfera unitária Euclideana. Em relação à dualidade (a)-(b) do resultado referido acima, sabe-se que todas possibilidades podem ocorrer. Por exemplo, para métricas conformes e não-isométricas à métrica usual de $\mathbb{S}^n$, tem-se que (a) não ocorre e (b) ocorre. Já quocientes apropriados de $\mathbb{S}^n$ são exemplos em que (a) ocorre e (b) não ocorre. Finalmente, $\mathbb{S}^n$ é um exemplo em que ambos (a) e (b) ocorrem. Essa dualidade nos leva naturalmente às seguintes questões:

Q.1 Existe alguma variedade Riemanniana compacta, não-conformemente difeomorfa à $\mathbb{S}^n$ tal que (a) não ocorre e (b) ocorre?

Q.2 Existe alguma variedade Riemanniana compacta não-isométrica à $\mathbb{S}^n$ tal que ambos (a) e (b) ocorrem?

Q.3 Existe alguma variedade Riemanniana compacta com curvatura escalar não-constante tal que (a) ocorre?

Respostas positivas às questões Q.1 e Q.2, baseadas na noção de funções críticas, foram dadas por Hebey e Vaugon em [49]. Exemplos de variedades com curvatura escalar mudando de sinal ou positiva e não-constante tal que $(J^2_{g,opt}(\beta))$ possui função extremal foram dados por Barbosa em [10] e por Barbosa e Montenegro em [11], respondendo a questão Q.3. Assim, os resultados acima respondem parcialmente as questões 5B, 6B e 7B.

A situação geral tem sido abordada apenas em [49]. Nesse trabalho é provado que para $n \geq 4$, tem-se a estimativa geométrica

$$B_0(2,\beta,g)\min_M \beta \geq \frac{n-2}{4(n-1)}A_0(2,\beta,g)\max_M Scal_g\,. \tag{1.3}$$

Além disso, existe função extremal para $(J^2_{g,opt}(\beta))$ sempre que essa desigualdade é estrita.

1.3 As contribuições escalares

Nesta seção, enunciaremos nossas contribuições à teoria escalar de melhores constantes, as quais respondem parcialmente as questões 2B, 3B, 4B e 6B.

1.3.1 Continuidade em relação ao parâmetro

Primeiramente, respondemos parcialmente a questão 4B com o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$, então a função*

$$p \mapsto B_0(p, \beta, g)$$

é contínua para $1 \leq p < 2$.

Por comodidade, o resultado acima é demonstrado no caso clássico ($\beta \equiv 1$) embora os argumentos empregados também se aplicam ao caso geral.

1.3.2 Continuidade em relação à geometria

A seguir, enunciaremos os resultados sobre dependência contínua em relação à geometria, os quais respondem a questão 2B.

Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão $n \geq 2$. Denote por $\mathcal{M}_2$ o espaço de métricas Riemannianas sobre M quando munido da topologia C^2 e por $\mathcal{M}_\infty$, quando munido da topologia de Fréchet usual.

Teorema 1.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$, então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_2 \mapsto B_0(2, \beta, g)$$

é contínua. Além disso, a topologia C^2 é sharp.

Teorema 1.3.3. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 2$ e $1 \leq p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_2 \mapsto B_0(p, \beta, g)$$

é contínua.

Uma consequência direta dos dois teoremas acima é a seguinte:

Corolário 1.3.1. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$ e $1 \leq p \leq 2$ or $n = 2, 3$ e $1 \leq p < \sqrt{n}$, então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_\infty \mapsto B_0(p, \beta, g)$$

é contínua.

Os resultados acima são provados no caso clássico e seguem, em sua generalidade, diretamente daqueles correspondentes na teoria vetorial.

1.3.3 Continuidade em relação à função

A seguir, enunciaremos os resultados de continuidade da segunda melhor constante da teoria escalar em relação à função β.

Teorema 1.3.4. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$, então a aplicação*

$$\beta \in C^0(M) \mapsto B_0(2, \beta, g)$$

é contínua.

Teorema 1.3.5. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 2$ e $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, então a aplicação*

$$\beta \in C^0(M) \mapsto B_0(p, \beta, g)$$

é contínua.

Os dois teoremas acima seguem da teoria vetorial. Assim, as suas demonstrações serão consideradas somente no contexto vetorial.

1.3.4 Compacidade C^0 de funções extremais

Nesta subseção, enunciaremos os resultados sobre compacidade C^0 de funções extremais. Tais resultados são tratados sob três óticas. A primeira é do ponto de vista do parâmetro p, a segunda é em relação à geometria e a terceira está relacionada com a função β. Embora nossos resultados sejam válidos em geral, por simplicidade, os provaremos apenas no caso clássico.

Denote por $E_p(\beta, g)$ o conjunto das funções extremais $u \in H^{1,p}(M)$ de $(J^p_{g,opt}(\beta))$ tal que $||u||_{p^*} = 1$. Segue do Teorema 2.3.4 da teoria vetorial, o qual enunciaremos no próximo capítulo, que o conjunto $E_p(\beta, g)$ é não-vazio quando $n \geq 4$ e $1 < p < 2$.

Para cada $1 < r < s < 2$, considere o conjunto

$$E_{r,s}(\beta, g) = \bigcup_{r \le p \le s} E_p(\beta, g) \ .$$

O resultado de compacidade de funções extremais em relação ao parâmetro p é:

Teorema 1.3.6. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$, então o conjunto $E_{r,s}(\beta, g)$ é compacto na topologia C^0 para cada $1 < r < s < 2$.*

Passemos agora ao problema de compacidade C^0 de funções extremais em relação à geometria.

Considere um subconjunto não-vazio $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}_2$ tal que

$$B_0(2, \beta, g) \min_M \beta > \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2, \beta, g) \max_M Scal_g$$

para toda métrica $g \in \mathcal{G}$. Denote por $E_p(\beta, \mathcal{G}) = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} E_p(\beta, g)$. O Teorema 2.3.3 da teoria vetorial garante a existência de funções extremais de $(J^2_{g,opt}(\beta))$ para cada $g \in \mathcal{G}$.

Nosso resultado de compacidade em relação à geometria para $p = 2$ é:

Teorema 1.3.7. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$ e $\mathcal{G}$ é compacto em $\mathcal{M}_2$, então $E_2(\beta, \mathcal{G})$ é compacto na topologia C^0.*

Nosso resultado de compacidade em relação à geometria para $p \neq 2$ é:

Teorema 1.3.8. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Seja $n \geq 2$, $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$ e $\mathcal{G}$ é compacto em $\mathcal{M}_2$, então $E_p(\beta, \mathcal{G})$ é compacto na topologia C^0.*

Finalmente, enuciaremos agora os nossos resultados de compacidade em relação à função.

Considere um subconjunto não-vazio $\mathcal{F} \subset C^0(M)$ de funções positivas. Denote por

$$E_p(\mathcal{F}, g) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{F}} E_p(\beta, g) \ .$$

Nosso resultado de compacidade em relação à função para $p = 2$ é:

Teorema 1.3.9. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$ e $\mathcal{F}$ é compacto em $C^0(M)$, então $E_2(\mathcal{F}, g)$ é compacto na topologia C^0.*

Nosso resultado de compacidade em relação à função para $p \neq 2$ é:

Teorema 1.3.10. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Seja $n \geq 2$, $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$ e $\mathcal{F}$ é compacto em $C^0(M)$, então $E_p(\mathcal{F}, g)$ é compacto na topologia C^0.*

CAPÍTULO 2

Teoria vetorial de melhores constantes

Neste capítulo, destacaremos um resultado preliminar sobre desigualdades de Sobolev Euclideanas vetoriais, introduziremos algumas notações básicas associadas ao contexto Riemanniano vetorial e apresentaremos o programa AB associado. Por fim, mencionaremos algumas respostas parciais a esse programa e enunciaremos nossas contribuições.

2.1 O programa AB vetorial

Sejam $n \geq 2$, $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $\mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Sobolev Euclideano vetorial $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$||\nabla U||_{\mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde

$$U = (u_1, \ldots, u_k) \,,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p \, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \, dx \,.$$

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea. Nesse caso, para $1 \leq p < n$, segue diretamente, de (1.1), a existência de uma constante $\mathcal{A} > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U) \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p \, dx \tag{2.1}$$

para todo $U \in \mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$.

A melhor constante de L^p-Sobolev Euclideana associada à (2.1) é

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = \inf\{\mathcal{A} \in \mathbb{R} : \ (2.1) \text{ é válida}\}\,.$$

A desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana vetorial ótima afirma que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\, dx \tag{2.2}$$

para todo $U \in \mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$.

Uma aplicação não-nula $U_0 \in \mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$ é dita um extremal de (2.2), se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U_0)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = \mathcal{A}_0(p,F,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_0|^p\, dx\ .$$

Duas questões básicas relacionadas à (2.2) são:

(a) Qual o valor exato de $\mathcal{A}_0(p,F,n)$?

(b) $(I^p_{opt}(F))$ possui aplicação extremal?

Essas duas perguntas são respondidas no seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. *Para cada $1 \leq p < n$, temos*

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\,,$$

onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}^{k-1}_p} F$ e $\mathbb{S}^{k-1}_p = \{t \in \mathbb{R}^k :\ \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$. Além disso, $U_0 \in \mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação extremal de (2.2) se, e somente se, $U_0 = t_0 u_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}_p$ tal que $M_F = F(t_0)$ e alguma função extremal $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de (1.1).

Demonstração: Pela p^*-homogeneidade de F, tem-se

$$F(t) \leq M_F \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^k$. Assim, usando as desigualdades de Minkowski e a de Sobolev escalar Euclideana (1.1), encontramos para qualquer $U \in \mathcal{D}^{1,p}_k(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \sum_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \tag{2.3}$$

$$\leq M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^p\, dx = M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\, dx\ .$$

Daí, segue imediatamente que

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) \leq M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \ .$$

Por outro lado, escolhendo $U_0 = t_0 u_0$ com $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $M_F = F(t_0)$ e $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uma função extremal de (1.1), temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U_0)\, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0|^{p^*} dx \right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0|^p dx$$

$$= M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (t_0 u_0)|^p dx = M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_0|^p \ dx \ .$$

Assim, concluímos que

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)$$

e que aplicações da forma $U_0 = t_0 u_0$, como construídas acima, são aplicações extremais. Portanto, resta mostrarmos que toda aplicação extremal de (2.2) tem essa forma. De fato, seja $U \in \mathcal{D}_k^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação extremal de (2.2). Nesse caso, U satisfaz (2.3) com igualdades no lugar das três desigualdades. Agora, observe que a segunda igualdade corresponde à desigualdade de Minkowski. Isso implica que existem $t \in \mathbb{R}^k$, com $|t|_p = 1$, e $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $U = tu$. Finalmente, segue, da primeira igualdade, que $F(t) = M_F$ e, da terceira igualdade, que u é uma função extremal de (1.1). ■

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $H_k^{1,p}(M)$ o espaço de Sobolev vetorial $H^{1,p}(M) \times \ldots \times H^{1,p}(M)$ munido da norma

$$||U||_{H_k^{1,p}(M)} = \left(\int_M |\nabla_g U|^p \ dv_g + \int_M |U|^p \ dv_g \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

onde

$$U = (u_1, \ldots, u_k) \ ,$$

$$\int_M |\nabla_g U|^p \ dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_i|^p \ dv_g \ ,$$

$$\int_M |U|^p \ dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |u_i|^p \ dv_g \ .$$

Sejam $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea na segunda variável. Essas são as condições mínimas sobre F e G requeridas nas definições a seguir.

Quando $1 \leq p < n$, segue, do teorema de imersão de Sobolev, a existência de constantes $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A} \int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + \mathcal{B} \int_M G(x, U)\, dv_g \qquad (I_g^p(F,G))$$

para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$.

A primeira melhor constante de L^p-Sobolev associada à $(I_g^p(F,G))$ é definida por

$$A_0(p, F, G, g) = \inf\{\mathcal{A} \in \mathbb{R} : \text{ existe } \mathcal{B} \in \mathbb{R} \text{ tal que } (I_g^p(F,G)) \text{ é válida}\} \ .$$

A primeira desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana vetorial ótima afirma que, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + \mathcal{B} \int_M G(x, U)\, dv_g \qquad (I_{g,opt}^p(F,G))$$

para alguma constante $\mathcal{B} \in \mathbb{R}$.

A segunda melhor constante de L^p-Sobolev associada à $(I_{g,opt}^p(F,G))$ é definida por

$$\mathcal{B}_0(p, F, G, g) = \inf\{\mathcal{B} \in \mathbb{R} : \ (I_{g,opt}^p(F,G)) \text{ é válida}\} \ .$$

A segunda desigualdade de L^p-Sobolev Riemanniana vetorial ótima afirma que, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + \mathcal{B}_0(p, F, G, g) \int_M G(x, U)\, dv_g \ . \qquad (J_{g,opt}^p(F,G))$$

Uma aplicação não-nula $U_0 \in H_k^{1,p}(M)$ é dita um extremal para a desigualdade $(J_{g,opt}^p(F,G))$, se

$$\left(\int_M F(U_0)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} = \mathcal{A}_0(p, F, G, g) \int_M |\nabla_g U_0|^p\, dv_g + \mathcal{B}_0(p, F, G, g) \int_M G(x, U_0)\, dv_g \ .$$

O programa AB vetorial é constituido de várias questões abordando as melhores contantes $\mathcal{A}_0(p, F, G, g)$ e $\mathcal{B}_0(p, F, G, g)$, e as desigualdades ótimas $(I_{g,opt}^p(F,G))$ e $(J_{g,opt}^p(F,G))$.

A seguir, como no caso escalar, separeremos esse programa em duas partes: o programa A e o programa B.

O progama A é composto das seguintes questões envolvendo $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$ e $(I^p_{g,opt}(F,G))$:

Questão 1A: Qual o valor exato (ou estimativas) de $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$?

Questão 2A: A desigualdade $(I^p_{g,opt}(F,G))$ é válida?

Questão 3A: A validade de $(I^p_{g,opt}(F,G))$ implica em alguma obstrução geométrica?

Questão 4A: $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente de g em alguma topologia?

Questão 5A: $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente de F e G em alguma topologia?

Questão 6A: $\mathcal{A}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente do parâmetro p?

Questão 7A: Qual o papel da geometria sobre essas questões?

O programa B consiste dos seguintes problemas envolvendo $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ e $(J^p_{g,opt}(F,G))$:

Questão 1B: Qual o valor exato (ou estimativas) de $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$?

Questão 2B: $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente de g em alguma topologia?

Questão 3B: $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente de F e G em alguma topologia?

Questão 4B: $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ depende continuamente do parâmetro p?

Questão 5B: A desigualdade $(J^p_{g,opt}(F,G))$ possui aplicação extremal?

Questão 6B: O conjunto das aplicações extremais, normalizadas por $\int_M F(U)\, dv_g = 1$, é compacto na topologia C^0?

Questão 7B: Qual o papel da geometria sobre essas questões?

2.2 Respostas parciais

Ao contrário do programa AB escalar, a versão vetorial é bastante recente, tendo somente sido abordada em um caso especial por Hebey em [48]. Algumas respostas são extremamente simples, já outras, bastante complexas.

Em 2006, Hebey [48] respondeu parcialmente as questões 1A, 2A, 4A, 5A, 1B, 5B e 6B no caso especial em que

$$F(t) = \sum_{i=1}^{k} |t_i|^{2^*}$$

e

$$G(x,t) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x) t_i t_j \,,$$

onde $a_{ij} \in C^\infty(M)$ para todo $i,j = 1,\dots,k$ e $(a_{ij}(x))$ é uma matriz positiva para todo

$x \in M$. Nessa situação, mostrou-se que

$$\mathcal{A}_0(2, F, G, g) = A_0(2, g)$$

e

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_M a_{ij} \geq \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2, g) \max_M Scal_g$$

para todo $i, j = 1, \ldots, k$. Além disso, quando essa última desigualdade é estrita, provou-se a existência e compacidade de aplicações extremais.

A seguir, destacaremos alguns fatos que são obtidos de maneira simples. Parte desses estão contidos no seguinte resultado:

Proposição 2.2.1. *Para cada $1 \leq p < n$, temos*

$$\mathcal{A}_0(p, F, G, g) = M_F^{p/p^*} A_0(p, g)\,.$$

Além disso, a desigualdade ($I^p_{g,opt}(F, G)$) é válida para $1 \leq p \leq 2$.

Demonstração: Como no início da demonstração da Proposição 2.1.1, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$, temos

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^p \right)^{\frac{p^*}{p}} dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_i|^{p^*}\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}}\,.$$

Por outro lado, segue diretamente da definição de $A_0(p, g)$ que para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $B_\varepsilon > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_i|^{p^*}\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p, g) + \varepsilon) \int_M \sum_{i=1}^k |\nabla_g u_i|^p\, dv_g + B_\varepsilon \int_M \sum_{i=1}^k |u_i|^p\, dv_g\,,$$

e das hipóteses sobre G que existe uma constante $m > 0$ tal que

$$G(x, t) \geq m \sum_{i=1}^k |t_i|^p$$

para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^k$. Daí, para qualquer $U \in H_k^{1,p}(M)$, obtemos

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} (A_0(p, g) + \varepsilon) \int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + \frac{B_\varepsilon M_F^{p/p^*}}{m} \int_M G(x, U)\, dv_g \quad (2.4)$$

e isso implica que

$$\mathcal{A}_0(p,F,G,g) \le M_F^{p/p^*} A_0(p,g)\,.$$

Considere agora constantes $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le \mathcal{A}\int_M |\nabla_g U|^p\,dv_g + \mathcal{B}\int_M G(x,U)\,dv_g$$

para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$. Escolhendo $U = t_0 u$, onde $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ é tal que $F(t_0) = M_F$, e $u \in H^{1,p}(M)$, encontramos uma constante $B_1 > 0$ tal que

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\,dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le \mathcal{A}M_F^{-p/p^*}\int_M |\nabla_g u|^p\,dv_g + B_1\int_M |u|^p\,dv_g\,.$$

Daí, segue da definição de $A_0(p,g)$ que

$$\mathcal{A}_0(p,F,G,g) = M_F^{p/p^*} A_0(p,g)\,.$$

Quando $1 \le p \le 2$, a desigualdade escalar ótima (4) é válida e assim, a utilizando no início dessa demonstração ao invés da desigualdade com ε, obtemos

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le M_F^{p/p^*} A_0(p,g)\int_M |\nabla_g U|^p\,dv_g + \frac{BM_F^{p/p^*}}{m}\int_M G(x,U)\,dv_g\,.$$

■

Note então que a primeira melhor constante da teoria vetorial não depende da geometria e nem de G, e depende continuamente de p e de F em relação a topologia C^0_{loc}. Observe também que a partir do argumento de redução, empregado na demonstração acima, podemos transportar alguns resultados da teoria escalar mencionados no Capítulo 1 ao contexto vetorial. Por exemplo, se (M,g) tem curvatura escalar positiva em algum ponto e $2 < p < \frac{n+2}{3}$, então a desigualdade ótima $(I^p_{g,opt}(F,G))$ não é válida. Por outro lado, $(I^p_{g,opt}(F,G))$ é válida para $1 < p < n$ no caso do toro *flat* $\mathbb{T}^n$. O resultado da teoria escalar sobre rigidez geométrica também se estende à teoria vetorial. Precisamente, se $(I^p_{g,opt}(F,G))$ é válida para algum $4 < p < \frac{n+4}{5}$, então g é *flat* e M é recoberta pelo toro $\mathbb{T}^n$. Por fim, no caso $p = 2$, temos uma estimativa geométrica para a segunda melhor constante da teoria vetorial. De fato, utilizando o argumento de redução em $(I^p_{g,opt}(F,G))$ e aplicando a Proposição 2.2.1, obtemos

$$\left(\int_M |u|^{2^*}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \le A_0(2,g)\int_M |\nabla_g u|^2\,dv_g + M_F^{-2/2^*}\mathcal{B}_0(2,F,G,g)\int_M G(x,t_0)u^2\,dv_g\,,$$

tal que

$$B_0(2, G(\cdot, t_0), g) \leq M_F^{-2/2^*} \mathcal{B}_0(2, F, G, g)\,.$$

Assim, da estimativa geométrica (1.3) da teoria escalar, segue que

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_{x \in M} G(x, t_0) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \max_M Scal_g$$

para todo $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$. Isso responde parcialmente as questões 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 7A e 1B no contexto geral.

2.3 As contribuições vetoriais

Nesta seção, apresentaremos nossas contribuições à teoria vetorial de melhores constantes as quais fornecem respostas parciais às questões 2B, 3B, 5B e 6B.

2.3.1 Continuidade em relação às funções

Obtemos resultados importantes sobre a continuidade da segunda melhor constante da teoria vetorial em relação à F e G.

Considere os seguintes cones

$$\mathcal{F}_q^1 = \{F \in C^1(\mathbb{R}^k) : \; F \text{ é q-homogênea e positiva}\},$$

com a topologia induzida de $C^1_{loc}(\mathbb{R}^k)$, e

$$\mathcal{G}_q^l = \{G \in C^0(M \times \mathbb{R}^k) : \; G \text{ é } q\text{-homogênea, positiva e de classe } C^l \text{ em } \mathbb{R}^k\},$$

com a topologia induzida de $C^0(M, C^l_{loc}(\mathbb{R}^k))$.

Precisamente, temos:

Teorema 2.3.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$, então a aplicação*

$$(F, G) \in \mathcal{F}_{2^*}^1 \times \mathcal{G}_2^0 \mapsto \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$$

é contínua.

Teorema 2.3.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* n. *Se* $n \geq 2$ *e* $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, *então a aplicação*

$$(F, G) \in \mathcal{F}^1_{p^*} \times \mathcal{G}^1_p \mapsto \mathcal{B}_0(p, F, G, g)$$

é contínua.

2.3.2 Existência de aplicações extremais

A seguir, enunciaremos os resultados de existência de aplicações extremais os quais respondem a questão 5B.

Nosso primeiro resultado é o seguinte:

Teorema 2.3.3. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* n. *Se* $n \geq 4$ *e*

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_{x \in M} G(x, t_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \max_M Scal_g$$

para todo $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}_2$ *tal que* $F(t_0) = M_F$, *então* $(J^2_{g,opt}(F, G))$ *possui aplicação extremal.*

Uma consequência direta desse resultado é:

Corolário 2.3.1. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* $n \geq 4$. *Se* $Scal_g \leq 0$, *então* $(J^2_{g,opt}(F, G))$ *possui aplicação extremal.*

Para $p \neq 2$, aplicações extremais sempre existem, como afirma o seguinte resultado:

Teorema 2.3.4. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta de dimensão* $n \geq 2$. *Se* $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, *então* $(J^p_{g,opt}(F, G))$ *possui aplicação extremal.*

2.3.3 Continuidade em relação à geometria

A seguir, apresentaremos os resultados sobre dependência contínua em relação à geometria, os quais respondem parcialmente a questão 2B.

Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão $n \geq 2$. Denote por $\mathcal{M}_2$ o espaço de métricas Riemannianas sobre M quando munido da topologia C^2 e por $\mathcal{M}_\infty$, quando munido da topologia de Fréchet usual.

Teorema 2.3.5. *Sejam* M *uma variedade diferenciável compacta de dimensão* n. *Se* $n \geq 4$, *então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_2 \mapsto \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$$

é contínua. Além disso, a topologia C^2 é sharp.

Teorema 2.3.6. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 2$ e $1 \leq p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_2 \mapsto \mathcal{B}_0(p, F, G, g)$$

é contínua.

Uma consequência direta dos dois teoremas acima é a seguinte:

Corolário 2.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$ e $1 \leq p \leq 2$ or $n = 2, 3$ e $1 \leq p < \sqrt{n}$, então a aplicação*

$$g \in \mathcal{M}_\infty \mapsto \mathcal{B}_0(p, F, G, g)$$

é contínua.

2.3.4 Compacidade C^0 de aplicações extremais

A seguir, enunciaremos os resultados sobre compacidade de aplicações extremais para uma métrica fixada.

Denote por $\mathcal{E}_p(F, G, g)$ o conjunto das aplicações extremais U associadas à $(J^p_{g,opt}(F, G))$, normalizadas por $\int_M F(U) dv_g = 1$.

Precisamente, temos:

Teorema 2.3.7. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 4$ e*

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_{x \in M} G(x, t_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \max_M Scal_g$$

para todo $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$, então o conjunto $\mathcal{E}_2(F, G, g)$ é compacto na topologia C^0.

Teorema 2.3.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Se $n \geq 2$ e $1 < p < \min\{2, \sqrt{n}\}$, então o conjunto $\mathcal{E}_p(F, G, g)$ é compacto na topologia C^0.*

CAPÍTULO 3

Demonstrações das contribuições escalares

Neste capítulo, justificaremos parte das contribuições escalares. Demonstraremos inicialmente os Teoremas 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3 sobre dependência contínua. Em seguida, utilizaremos o Teorema 1.3.1 na demonstração do Teorema 1.3.6. Por simplicidade de notação, faremos as demonstrações no caso clássico ($\beta \equiv 1$).

3.1 Demonstração do Teorema 1.3.1

Seja $(p_\alpha) \subset [1, 2)$ uma sequência convergindo à $p \in [1, 2)$ quando $\alpha \to +\infty$. Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|B_0(p_\alpha, g) - B_0(p, g)| > \varepsilon_0$ para infinitos α's. Então, pelo menos uma das seguintes situações ocorre:

$$B_0(p, g) - B_0(p_\alpha, g) > \varepsilon_0 \quad \text{ou} \quad B_0(p_\alpha, g) - B_0(p, g) > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Se a primeira situação ocorre, substituindo $B_0(p_\alpha, g)$ por $B_0(p, g) - \varepsilon_0$ na desigualdade ótima ($J^{p_\alpha}_{g,opt}(1)$) com $u \in C^\infty(M)$, e fazendo $\alpha \to +\infty$, contradizemos a definição da melhor constante $B_0(p, g)$. Assuma então que a segunda situação ocorre. Para cada $\alpha > 0$, considere o funcional

$$J_\alpha(u) = \int_M |\nabla_g u|^{p_\alpha}\, dv_g + (B_0(p, g) + \varepsilon_0) A_0(p_\alpha, g)^{-1} \int_M |u|^{p_\alpha}\, dv_g$$

definido sobre $\Lambda_\alpha = \{u \in H^{1,p_\alpha}(M) : \int_M |u|^{p^*_\alpha}\, dv_g = 1\}$. Da definição de $B_0(p_\alpha, g)$, segue que

$$\lambda_\alpha := \inf_{u \in \Lambda_\alpha} J_\alpha(u) < A_0(p_\alpha, g)^{-1} \ .$$

Por sua vez, esta desigualdade implica a existência de um minimizador não-negativo $v_\alpha \in \Lambda_\alpha$ de λ_α. A equação de Euler-Lagrange satisfeita por v_α é

$$-\Delta_{p_\alpha,g} v_\alpha + (B_0(p,g)+\varepsilon_0) A_0(p_\alpha,g)^{-1} v_\alpha^{p_\alpha-1} = \lambda_\alpha v_\alpha^{p_\alpha^*-1}, \qquad (E_\alpha)$$

onde $\Delta_{p_\alpha,g} u = \mathrm{div}_g(|\nabla_g u|^{p_\alpha-2}\nabla_g u)$ denota o operador de Laplace-Beltrami generalizado em relação à métrica g e ao parâmetro p_α. Da teoria elíptica clássica, segue que $v_\alpha \in C^1(M)$ e, do princípio do máximo, temos $v_\alpha > 0$ sobre M. Nosso objetivo agora é estudar a seqüência $(v_\alpha)_\alpha$ quando $\alpha \to +\infty$. Se $p = 1$, por um resultado devido a Druet [30], segue que $(v_\alpha)_\alpha$ converge uniformemente quando $p_\alpha \to 1$ e, daí, encontramos uma contradição uma vez que o limite de $(v_\alpha)_\alpha$ é uma função extremal associada a $B_0(1,g)+\varepsilon_0$. No que segue, assuma que $1 < p < 2$. Note que

$$\lambda_\alpha < A_0(p_\alpha,g)^{-1} \le c_0\,,$$

onde

$$c_0 := \max_{1\le p\le 2} A_0(p,g)^{-1}.$$

Daí,

$$\int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha}\, dv_g + (B_0(p,g)+\varepsilon_0) A_0(p_\alpha,g)^{-1} \int_M v_\alpha^{p_\alpha}\, dv_g \le c_0\,. \qquad (3.1)$$

Isso implica que para cada $1 < q < p$, a sequência $(v_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{1,q}(M)$ para $\alpha > 0$ grande. Logo, existe $v \in H^{1,q}(M)$ tal que, a menos de subsequência,

$$v_\alpha \rightharpoonup v \ \text{ fracamente em } H^{1,q}(M)$$

para qualquer $1 < q < p$, e

$$v_\alpha \to v \ \text{ fortemente em } L^r(M)$$

para qualquer $1 \le r < p^*$. Em particular, existem funções $g, h \in L^1(M)$ tal que

$$v_\alpha^{p_\alpha} \le g \ \text{ e } \ v_\alpha^{p_\alpha^*-1} \le h\,. \qquad (3.2)$$

De (3.1), para cada $1 < q < p$, segue que

$$\int_M |\nabla_g v_\alpha|^q\, dv_g \le v_g(M)^{1-q/p_\alpha} \left(\int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha}\, dv_g\right)^{\frac{q}{p_\alpha}} \le v_g(M)^{1-q/p_\alpha} c_0^{q/p_\alpha}$$

$$\le v_g(M)^{1-1/p^*} c_0^p$$

para todo $\alpha > 0$ grande, tal que $(v_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{1,p}(M)$. Utilizando o Teorema de Egorov como em [68], obtemmos

$$\int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha - 2} \langle \nabla_g v_\alpha, \nabla_g \varphi \rangle \, dv_g \to \int_M |\nabla_g v|^{p-2} \langle \nabla_g v, \nabla_g \varphi \rangle \, dv_g$$

para qualquer $\varphi \in C^\infty(M)$. Portanto, tomando o limite $\alpha \to +\infty$ na equação (E_α), usando (3.2) e assumindo que $\lambda_\alpha \to \lambda$, concluímos que v satisfaz fracamente

$$-\Delta_{p,g} v + (B_0(p,g) + \varepsilon_0) A_0(p,g)^{-1} v^{p-1} = \lambda v^{p^*-1} \ . \tag{E}$$

Analisemos agora dois casos. Assuma que $v \not\equiv 0$. Nesse caso, $(J^p_{g,opt}(1))$ e (E) implicam

$$\left(\int_M v^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} < A_0(p,g) \int_M |\nabla_g v|^p \, dv_g + (B_0(p,g) + \varepsilon_0) \int_M v^p \, dv_g$$

$$= A_0(p,g) \lambda \int_M v^{p^*} \, dv_g \leq \int_M v^{p^*} \, dv_g \ ,$$

pois $0 \leq \lambda \leq A_0(p,g)^{-1}$. Daí, $\int_M v^{p^*} dv_g > 1$, e isso contradiz

$$\int_M v^{p^*} \, dv_g \leq \liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g = 1 \ .$$

Assuma então que $v \equiv 0$ e buscaremos uma contradição. Para isso, afirmamos primeiro que

$$\lambda_\alpha \to A_0(p,g)^{-1} \tag{3.3}$$

quando $\alpha \to +\infty$, a menos de subsequência. De fato, de (3.2), tem-se

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_M v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g = 0 \ .$$

Tomando então o limite $\alpha \to +\infty$ na desigualdade uniforme em p_α da Proposição A.1 e depois $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g \geq A_0(p,g)^{-1},$$

pois $\int_M v_\alpha^{p_\alpha^*} dv_g = 1$. Combinando esta informação com

$$\int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g \leq \lambda_\alpha \, ,$$

segue (3.3).

A seguir, por questões didáticas, dividiremos a demonstração em seis passos.

Dizemos que $x \in M$ é um ponto de concentração da sequência $(v_\alpha)_\alpha$, se para cada $\delta > 0$,

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g > 0 \; .$$

Passo 1. *A sequência $(v_\alpha)_\alpha$ possui exatamente um ponto de concentração x_0, a menos de subsequência.*

Demonstração: A existência de um ponto de concentração segue diretamente da compacidade de M e da igualdade $||v_\alpha||_{p_\alpha^*} = 1$ para todo $\alpha > 0$. Quanto à unicidade, seja x_0 um ponto de concentração de $(v_\alpha)_\alpha$. Tome $\delta > 0$ pequeno e considere uma função $\eta \in C_0^\infty(B_g(x_0,\delta))$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta = 1$ em $B_g(x_0, \delta/2)$. Multiplicando (E_α) por $\eta^{p_\alpha} v_\alpha^k$, com $k > 1$ fixado, e integrando sobre M, encontramos

$$\lambda_\alpha \int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k+p_\alpha^*-1} \, dv_g = -\int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^k \Delta_{p_\alpha,g} v_\alpha \, dv_g \tag{3.4}$$

$$+(B_0(p,g) + \varepsilon_0) A_0(p_\alpha, g)^{-1} \int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k+p_\alpha-1} \, dv_g \; .$$

Note agora que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, independente de α, tal que

$$\int_M |\nabla_g(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}})|^{p_\alpha} \, dv_g \leq (\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha})^{p_\alpha}(1+\varepsilon) \int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k-1} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g$$

$$+C_\varepsilon ||\nabla_g \eta||_\infty^{p_\alpha} \int_M v_\alpha^{k+p_\alpha-1} \, dv_g \; .$$

Por integração direta, obtemos

$$-\int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^k \Delta_{p_\alpha,g} v_\alpha \, dv_g \geq k \int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k-1} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g - \int_M v_\alpha^k |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha-1} |\nabla_g(\eta^{p_\alpha})| \, dv_g \, ,$$

tal que de (3.4), segue que

$$\int_M |\nabla_g(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}})|^{p_\alpha} \, dv_g \leq \frac{(1+\varepsilon)}{k}(\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha})^{p_\alpha} \lambda_\alpha \int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k+p_\alpha^*-1} \, dv_g \tag{3.5}$$

$$+\frac{(1+\varepsilon)}{k}(\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha})^{p_\alpha} \int_M v_\alpha^k |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha-1} |\nabla_g(\eta^{p_\alpha})| \, dv_g + C_\varepsilon ||\nabla_g \eta||_\infty^{p_\alpha} \int_M v_\alpha^{k+p_\alpha-1} \, dv_g \; .$$

Da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_M \eta^{p_\alpha} v_\alpha^{k+p_\alpha^*-1}\, dv_g \le \left(\int_M (\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}})^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \left(\int_{B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{1-\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \tag{3.6}$$

e

$$\int_M v_\alpha^k |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha-1} |\nabla_g(\eta^{p_\alpha})|\, dv_g \le p_\alpha ||\nabla_g \eta||_\infty ||\nabla_g v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha-1} ||v_\alpha^k||_{p_\alpha}\ . \tag{3.7}$$

Além disso, da Proposição A.1, tem-se que para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $D_\varepsilon > 0$, independente de α, tal que

$$\left(\int_M (\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}})^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \le (A_0(p_\alpha,g)+\varepsilon)\int_M |\nabla_g(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}})|^{p_\alpha}\, dv_g \tag{3.8}$$
$$+D_\varepsilon \int_M v_\alpha^{k+p_\alpha-1}\, dv_g\ .$$

Da equação (E_α),

$$\left(\int_M |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha}\, dv_g\right)^{\frac{p_\alpha-1}{p_\alpha}} \le \left(\lambda_\alpha \int_M v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{\frac{p_\alpha-1}{p_\alpha}} \le A_0(p_\alpha,g)^{\frac{1-p_\alpha}{p_\alpha}}\ . \tag{3.9}$$

Assim, combinando (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), encontramos

$$A_\alpha \left(\int_M \left(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}}\right)^{p_\alpha^*} dv_g\right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \le B\int_M v_\alpha^{k+p_\alpha-1}\, dv_g + C\left(\int_M v_\alpha^{kp_\alpha}\, dv_g\right)^{\frac{1}{p_\alpha}}, \tag{3.10}$$

onde

$$A_\alpha = 1 - \frac{(1+\varepsilon)^2}{k}\left(\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}\right)^{p_\alpha} \lambda_\alpha A_0(p_\alpha,g)\left(\int_{B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{1-\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}},$$

$$B = A_0(p_\alpha,g)(1+\varepsilon)C_\varepsilon ||\nabla_g\eta||_\infty^{p_\alpha} + D_\varepsilon$$

e

$$C = p_\alpha \frac{(1+\varepsilon)^2}{k}\left(\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}\right)^{p_\alpha} ||\nabla_g \eta||_\infty A_0(p_\alpha,g)^{\frac{1}{p_\alpha}}\ .$$

Como x_0 é um ponto de concentração da sequência $(v_\alpha)_\alpha$, segue que

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\left(\int_{B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g\right)^{1-\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} = a > 0$$

e $a \le 1$, pois $||v_\alpha||_{p_\alpha^*} = 1$. Afirmamos que $a = 1$ para cada $\delta > 0$. Suponha, por contradição, que $a < 1$ para algum $\delta > 0$. Nesse caso, podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $k > 1$ próximo de 1, tal que $A_\alpha > A$, onde A é uma constante positiva independente de α. Como o lado direito de (3.10) é limitado para k suficientemente próximo de 1, encontramos uma constante $C_0 > 0$, independente de α, tal que

$$\left(\int_M \left(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}} \right)^{p_\alpha^*} dv_g \right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \leq C_0$$

para α grande. Usando novamente a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g = \int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^{k+p_\alpha-1}\, v_\alpha^{p_\alpha^*-p_\alpha-k+1}\, dv_g$$

$$\leq \left(\int_M \left(\eta v_\alpha^{\frac{k+p_\alpha-1}{p_\alpha}} \right)^{p_\alpha^*} dv_g \right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \left(\int_M v_\alpha^{p_\alpha^* - \frac{(k-1)p_\alpha^*}{p_\alpha^*-p_\alpha}}\, dv_g \right)^{1-\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}}$$

$$\leq C_0 \left(\int_M v_\alpha^{p_\alpha^* - \frac{(k-1)p_\alpha^*}{p_\alpha^*-p_\alpha}}\, dv_g \right)^{1-\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} .$$

Agora para k próximo de 1, tem-se

$$p_\alpha < p_\alpha^* - \frac{(k-1)p_\alpha^*}{p_\alpha^* - p_\alpha} < p_\alpha^* \ .$$

Assim, combinando $||v_\alpha||_{p_\alpha} \to 0$ com uma desigualdade de interpolação, encontramos

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g = 0 \ .$$

Mas isto contradiz o fato de que x_0 é um ponto de concentração. Portanto, $a = 1$ e

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_{B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g = 1$$

para todo $\delta > 0$. Como $||v_\alpha||_{p_\alpha^*} = 1$, segue diretamente que $(v_\alpha)_\alpha$ possui exatamente um ponto de concentração, a menos de subseqência. ■

Passo 2. *Seja $x_0 \in M$ o único ponto de concentração da sequência $(v_\alpha)_\alpha$. Então,*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} v_\alpha = 0 \ \text{ em } \ C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\}) \ . \tag{3.11}$$

Demonstração: Note que, como uma consequência de (3.10), existem constantes $\varepsilon, C_0 > 0$ tal que, para qualquer $\overline{\Omega} \subset\subset M \setminus \{x_0\}$,

$$\int_\Omega v_\alpha^{p_\alpha^*(1+\varepsilon)}\, dv_g \leq C_0 \, .$$

Então, (3.11) segue diretamente de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser da teoria elíptica (veja Serrin [71]). ■

Seja $x_\alpha \in M$ um ponto de máximo da função v_α, i.e.

$$v_\alpha(x_\alpha) = ||v_\alpha||_\infty \,,$$

e defina μ_α por

$$\mu_\alpha^{-\frac{n}{p_\alpha^*}} = ||v_\alpha||_\infty \ .$$

Segue dos passos 1 e 2 que $x_\alpha \to x_0$ quando $\alpha \to +\infty$, e $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$.

Passo 3. *Para cada $R > 0$,*

$$1 - \varepsilon_R \leq \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x_\alpha, R\mu_\alpha)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g \leq 1$$

onde ε_R é tal que $\varepsilon_R \to 0$ quando $R \to +\infty$.

Demonstração: Seja $\exp_{x_\alpha}$ a aplicação exponencial no ponto x_α em relação à métrica g. Claramente, existe $\delta > 0$, independente de α, tal que $\exp_{x_\alpha}$ é um difeomorfismo de $B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ sobre $B_g(x_\alpha, \delta)$. Defina para $x \in B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$,

$$g_\alpha(x) = (\exp_{x_\alpha})^* g(\mu_\alpha x)$$

e

$$\varphi_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n}{p_\alpha^*}} v_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)) \ .$$

Usando que $x_\alpha \to x_0$ e $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$, temos

$$g_\alpha \to \xi \ \text{ em } \ C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)\,, \tag{3.12}$$

onde ξ denota a métrica Euclideana em $\mathbb{R}^n$. Além disso, φ_α satisfaz

$$-\Delta_{p_\alpha, g_\alpha} \varphi_\alpha + (B_0(p,g) + \varepsilon_0) A_0(p_\alpha, g)^{-1} \mu_\alpha^{p_\alpha} \varphi_\alpha^{p_\alpha - 1} = \lambda_\alpha \varphi_\alpha^{p_\alpha^* - 1} \tag{3.13}$$

e

$$0 \leq \varphi_\alpha \leq 1 \ . \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13) e (3.14), segue de estimativas elípticas clássicas (veja [74]) que, a menos de subsequência,

$$\varphi_\alpha \to \varphi \ \text{ em } \ C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\ . \tag{3.15}$$

Em particular, $\varphi(0) = 1$, pois $\varphi_\alpha(0) = 1$, e

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B(0,1)} \varphi_\alpha^{p_\alpha}\, dv_{g_\alpha} = \int_{B(0,1)} \varphi^p\, dv_\xi > 0\ .$$

Tomando o limite na equação (3.13) e usando (3.3), (3.12) e (3.15), encontramos

$$-\Delta_{p,\xi}\varphi = A_0(p,g)^{-1}\varphi^{p^*-1}\ . \tag{3.16}$$

Mais ainda, $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Esse fato segue diretamente de (3.1) e

$$\int_{B(0,\delta\mu_\alpha^{-1})} |\nabla_{g_\alpha}\varphi_\alpha|^{p_\alpha}\, dv_{g_\alpha} = \int_{B(x_0,\delta)} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha}\, dv_g\ .$$

Mostremos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p^*} dv_\xi = 1\,. \tag{3.17}$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, segue de (3.16) que

$$A_0(p,g)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\xi^p\, dv_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p^*}\, dv_\xi\ ,$$

e, da definição de $A_0(p,g)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p^*}\, dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A_0(p,g)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|_\xi^p\, dv_\xi\,.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{p^*}\, dv_\xi \ge 1\ .$$

A igualdade segue então de (3.15) e

$$\int_{B(0,\delta\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_{g_\alpha} = \int_{B(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g \le 1\ .$$

Finalmente, de (3.17), temos

$$\int_{B_g(x_\alpha,R\mu_\alpha)} v_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_g = \int_{B(0,R)} \varphi_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_{g_\alpha}$$

e

$$\int_{B(0,R)} \varphi_\alpha^{p_\alpha^*}\, dv_{g_\alpha} \to \int_{B(0,R)} \varphi^{p^*}\, dv_\xi = 1 - \varepsilon_R\ .$$

■

Passo 4. *Existe uma constante $C > 0$, independente de $\alpha > 0$, tal que, para qualquer $x \in M$ e α grande,*

$$d_g(x, x_\alpha)^{\frac{n}{p_\alpha^*}} v_\alpha(x) \leq C\,.$$

onde d_g denota a distância em relação à métrica g

Demonstração: Para $x \in M$, defina

$$w_\alpha(x) = d_g(x, x_\alpha)^{\frac{n}{p_\alpha^*}} v_\alpha(x)$$

e suponha que a conclusão do passo 4 falha. Nesse caso, encontramos

$$\lim_{\alpha \to +\infty} ||w_\alpha||_\infty = +\infty\,,$$

a menos de subsequência. Seja $y_\alpha \in M$ um ponto de máximo da função w_α. Pelo passo 2, $y_\alpha \to x_0$, pois $v_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$. Note também que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d_g(y_\alpha, x_\alpha)}{\mu_\alpha} = +\infty\,, \tag{3.18}$$

pois

$$w_\alpha(y_\alpha) = d_g(y_\alpha, x_\alpha)^{\frac{n}{p_\alpha^*}} v_\alpha(y_\alpha) \leq d_g(y_\alpha, x_\alpha)^{\frac{n}{p_\alpha^*}} ||v_\alpha||_\infty = \left(\frac{d_g(y_\alpha, x_\alpha)}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{n}{p_\alpha^*}}\,.$$

Escolha $\delta > 0$ pequeno, e considere

$$\Omega_\alpha = v_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p_\alpha^*}{n}} \exp_{y_\alpha}^{-1}(B_g(x_\alpha, \delta))\,.$$

Para $x \in \Omega_\alpha$, defina

$$\widetilde{v}_\alpha(x) = v_\alpha(y_\alpha)^{-1} v_\alpha(\exp_{y_\alpha}(v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}} x))$$

e

$$h_\alpha(x) = (\exp_{y_\alpha})^* g(v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}} x)\,.$$

Claramente, temos

$$h_\alpha \to \xi \ \text{ in } \ C^2(B(0,2))\,. \tag{3.19}$$

Mostremos que $(\widetilde{v}_\alpha)$ é uniformemente limitada em $B(0,2)$ para $\alpha > 0$ suficientemente grande. De fato, para cada $x \in B(0,2)$, temos

$$d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}}x)) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - 2v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}} = (1 - 2w_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}})d_g(x_\alpha, y_\alpha) \ .$$

Como $w_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$, para $\alpha > 0$ grande, encontramos

$$d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}}x)) \geq \frac{1}{2}d_g(x_\alpha, y_\alpha) \ .$$

Portanto,

$$\widetilde{v}_\alpha(x) = v_\alpha(y_\alpha)^{-1}v_\alpha(\exp_{y_\alpha}(v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}}x))$$

$$\leq 2^{\frac{n}{p_\alpha^*}}d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{-\frac{n}{p_\alpha^*}}v_\alpha(y_\alpha)^{-1}w_\alpha(\exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}}x))$$

$$\leq 2^{\frac{n}{p_\alpha^*}}d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{-\frac{n}{p_\alpha^*}}v_\alpha(y_\alpha)^{-1}w_\alpha(y_\alpha) = 2^{\frac{n}{p_\alpha^*}},$$

tal que, para $\alpha > 0$ grande,

$$||\widetilde{v}_\alpha||_{L^\infty(B(0,2))} \leq 2^{\frac{n}{p_\alpha^*}} \ . \tag{3.20}$$

Por outro lado, $\widetilde{v}_\alpha$ satisfaz

$$-\Delta_{p_\alpha,h_\alpha}\widetilde{v}_\alpha + (B_0(p,g) + \varepsilon_0)A_0(p_\alpha, g)^{-1}v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha p_\alpha^*}{n}}\widetilde{v}_\alpha^{p_\alpha - 1} = \lambda_\alpha \widetilde{v}_\alpha^{p_\alpha^* - 1} \ \text{ em } \ \Omega_\alpha \ ,$$

tal que

$$-\Delta_{p_\alpha,h_\alpha}\widetilde{v}_\alpha \leq \lambda_\alpha \widetilde{v}_\alpha^{p_\alpha^* - 1} \ \text{ in } \ \Omega_\alpha \ . \tag{3.21}$$

Graças a (3.19) e (3.20), estimativas de De Giorgi-Nash-Moser aplicadas à (3.21) fornecem

$$1 = \widetilde{v}_\alpha(0) \leq \sup_{B(0,1)} \widetilde{v}_\alpha \leq C\int_{B(0,2)} \widetilde{v}_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_{h_\alpha} = C\int_{B_g(y_\alpha, 2v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}})} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g$$

para alguma constante $C > 0$ independente de α. A contradição desejada é então obtida se mostrarmos que a integral do lado direito converge a 0 quando $\alpha \to +\infty$. Pelo passo 3, é suficiente mostrar que

$$B_g(y_\alpha, 2v_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{p_\alpha^*}{n}}) \cap B_g(x_\alpha, R\mu_\alpha) = \emptyset \ .$$

Porém, esse fato segue diretamente de

$$w_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p_\alpha^*}{n}} = d_g(x_\alpha, y_\alpha)v_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p_\alpha^*}{n}} \geq 2 + Rv_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p_\alpha^*}{n}}\mu_\alpha$$

$$= 2 + Rv_\alpha(y_\alpha)^{\frac{p_\alpha^*}{n}}||v_\alpha||_\infty^{-\frac{p_\alpha^*}{n}},$$

que claramente se verifica para $\alpha > 0$ grande. ■

Passo 5. *Para cada $\delta > 0$, temos*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g}{\int_M v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g} = 0\ .$$

Demonstração: Pelo passo 2, estimativas de De Giorgi-Nash-Moser aplicadas à (E_α) fornecem

$$\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g \leq \left(\sup_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha\right)\left(\int_M v_\alpha^{p_\alpha-1}\ dv_g\right) \leq C||v_\alpha||_{p_\alpha}\int_M v_\alpha^{p_\alpha-1}\ dv_g$$

para alguma constante $C > 0$ independente de α. Daí, depois de uma integração em (E_α), encontramos

$$\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g \leq C_1||v_\alpha||_{p_\alpha}\int_M v_\alpha^{p_\alpha^*-1}\ dv_g\ .$$

Considere agora duas situações. Se $p_\alpha^* - 1 \leq p_\alpha$, da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g}{\int_M v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g} \leq C_2||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha^*-p_\alpha} \to 0\ .$$

Se $p_\alpha^* - 1 > p_\alpha$, novamente da desigualdade de Hölder e da identidade $||v_\alpha||_{p_\alpha^*} = 1$, encontramos

$$\frac{\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g}{\int_M v_\alpha^{p_\alpha}\ dv_g} \leq C_3||v_\alpha||_{p_\alpha}^{(n-p_\alpha^2)/p_\alpha} \to 0\,,$$

pois $p_\alpha \to p$ e $1 < p^2 < 4 \leq n$. ■

Passo 6. Este é o passo final. Tome $\delta > 0$ pequeno e considere uma função $\eta \in C_0^\infty(2\delta, +\infty)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ em $(0, \delta)$ e $|\eta'| \leq C/\delta$ para alguma constante $C > 0$ independente de δ. Defina $\eta_\alpha(x) = \eta(d_g(x, x_\alpha))$. No que segue, denotemos por C várias constantes positivas independentes de δ e α. Como x_α converge a x_0, as expansões de Cartan da métrica g nas cartas exponeniais centradas em x_α fornecem para $\alpha > 0$ grande,

$$(1 - Cd_g(x, x_\alpha)^2)\ dv_g \leq dv_\xi \leq (1 + Cd_g(x, x_\alpha)^2)\ dv_g \tag{3.22}$$

e

$$|\nabla(\eta_\alpha v_\alpha)|_\xi^{p_\alpha} \leq |\nabla_g(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha}(1 + C d_g(x, x_\alpha)^2) \ . \tag{3.23}$$

Claramente, (3.22) implica

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha v_\alpha)^{p_\alpha^*} \, dv_\xi \geq 1 - \int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g - C \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g \ . \tag{3.24}$$

Do passo 2, segue que

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g = o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \ ,$$

e do passo 4, tem-se

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g \leq C\delta^{2-p_\alpha} ||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha} \ .$$

Assim, (3.24) se transforma

$$\left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha v_\alpha)^{p_\alpha^*} \, dv_\xi \right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \geq 1 - o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) - C\delta^{2-p_\alpha} ||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha} \ . \tag{3.25}$$

Note que (3.22) e (3.23) implicam

$$A_0(p_\alpha, g) \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla(\eta_\alpha v_\alpha)|_\xi^{p_\alpha} \, dv_\xi \leq \tag{3.26}$$

$$A_0(p_\alpha, g) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} \, dv_g + C \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g \ .$$

Independentemente, usando que $||v_\alpha||_{p_\alpha^*} = 1$ e integração por partes em (E_α), encontramos

$$\begin{aligned} A_0(p_\alpha, g) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} \, dv_g &\leq 1 - \int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g \\ -(B_0(p, g) + \varepsilon_0) \int_{B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g &+ C\delta^{-p_\alpha} \int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g \\ &+C \int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g \ . \end{aligned}$$

Já sabemos que

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g = o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \ .$$

Para estimar as integrais restantes, considere uma função suave ζ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 0$ em $(0, \delta/2)$, $\zeta \equiv 1$ em $(\delta, +\infty)$, e defina $\zeta_\alpha(x) = \zeta(d_g(x, x_\alpha))$. Tomando $\zeta_\alpha^p v_\alpha$ como uma função teste em (E_α), integrando por partes, utilizando desigualdade de Young, o passo 5 e as estimativas feitas anteriormente, encontramos

$$\int_M \zeta_\alpha^{p_\alpha} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g \leq \int_M \zeta_\alpha^{p_\alpha} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g + C \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta/2)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g$$

$$\leq \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta/2)} v_\alpha^{p_\alpha^*} \, dv_g + C \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta/2)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g = o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \, .$$

Logo,

$$\int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta)} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g = o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \, . \tag{3.27}$$

Assim, chegamos a

$$A_0(p_\alpha, g) \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} |\nabla_g (\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} \, dv_g \leq 1 - (B_0(p, g) + \varepsilon_0) \int_{B_g(x_\alpha, \delta)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g \tag{3.28}$$

$$+ o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \, .$$

Tomando agora $\eta_\alpha^p v_\alpha$ como uma função teste em (E_α), onde η_α foi introduzida no início desse passo, integrando por partes e utilizando novamente a desigualdade de Young, o passo 5 e as estimatvas anteriores, obtemos

$$\int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} \eta_\alpha^{p_\alpha} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g \leq \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g$$

$$+ C \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta)} v_\alpha |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha - 1} \, dv_g$$

$$+ C \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} d_g(x, x_\alpha)^{2 - p_\alpha} \eta_\alpha v_\alpha \eta_\alpha^{p_\alpha - 1} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha - 1} d_g(x, x_\alpha)^{p_\alpha - 1} \, dv_g$$

$$\leq \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} v_\alpha^{p_\alpha^*} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g + C \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g + C \int_{M \setminus B_g(x_\alpha, \delta)} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} \, dv_g$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} \eta_\alpha^{p_\alpha} |\nabla_g v_\alpha|^{p_\alpha} d_g(x, x_\alpha)^2 \, dv_g + C \int_{B_g(x_\alpha, 2\delta)} d_g(x, x_\alpha)^{2 - p_\alpha} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g \, ,$$

tal que

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} d_g(x,x_\alpha)^2 \, dv_g \leq C\delta^{2-p_\alpha} ||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha} + o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \; . \tag{3.29}$$

Combinando (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) com a desigualdade de Sobolev Euclideana

$$\left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha v_\alpha)^{p_\alpha^*} \, dv_\xi \right)^{\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*}} \leq A_0(p_\alpha, g) \int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla(\eta_\alpha v_\alpha)|^{p_\alpha} \, dv_\xi \; ,$$

encontramos

$$(B_0(p,g) + \varepsilon_0) \int_{B_g(x_\alpha,\delta)} v_\alpha^{p_\alpha} \, dv_g \leq C\delta^{2-p_\alpha} ||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha} + o(||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}) \; .$$

Dividindo ambos os lados desta última desigualdade por $||v_\alpha||_{p_\alpha}^{p_\alpha}$, tomando o limite em α e usando novamente o passo 5, concluímos que

$$(B_0(p,g) + \varepsilon_0) \leq C\delta^{2-p}$$

para todo $\delta > 0$, que é claramente um absurdo. ■

3.2 Demonstração do Teorema 1.3.2

Seja $(g_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{M}$ uma sequência convergindo a $g \in \mathcal{M}$ na topologia C^2. Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|B_0(2, g_\alpha) - B_0(2, g)| > \varepsilon_0$ para infinitos α's. Então, pelo menos uma das seguintes situações ocorre:

$$B_0(2, g) - B_0(2, g_\alpha) > \varepsilon_0 \ \text{ ou } \ B_0(2, g_\alpha) - B_0(2, g) > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Se a primeira situação ocorre, então para qualquer $u \in H^{1,2}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{2/2^*} \leq A_0(2, g_\alpha) \int_M |\nabla_{g_\alpha} u|^2 \, dv_{g_\alpha} + (B_0(2, g) - \epsilon_0) \int_M u^2 \, dv_{g_\alpha} \ .$$

Tomando o limite $\alpha \to +\infty$ nessa desigualdade, encontramos

$$\left(\int_M |u|^{2^*} \, dv_g \right)^{2/2^*} \leq A_0(2, g) \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + (B_0(2, g) - \varepsilon_0) \int_M u^2 \, dv_g \ ,$$

contradizendo a definição de $B_0(2, g)$. Suponha que a segunda alternativa ocorre. Para cada $\alpha > 0$, considere o funcional

$$J_\alpha(u) = \int_M |\nabla_{g_\alpha} u|^2 \, dv_{g_\alpha} + (B_0(2, g) + \varepsilon_0) A_0(2, g_\alpha)^{-1} \int_M u^2 \, dv_{g_\alpha}$$

definido sobre $\Lambda_\alpha = \{u \in H^{1,2}(M) : \ \int_M |u|^{2^*} \, dv_{g_\alpha} = 1\}$. Da definição de $B_0(2, g_\alpha)$, segue que

$$\lambda_\alpha := \inf_{u \in \Lambda_\alpha} J_\alpha(u) < A_0(2, g_\alpha)^{-1} \ .$$

Por outro lado, essa condição implica a existência de um minimizador positivo e suave $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$ de λ_α. A equação de Euler-Lagrange satisfeita por u_α é

$$-\Delta_{g_\alpha} u_\alpha + (B_0(2, g) + \varepsilon_0) A_0(2, g_\alpha)^{-1} u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha^{2^*-1} \ . \qquad (E_{g_\alpha})$$

Nosso objetivo agora é estudar a sequência $(u_\alpha)_\alpha$ quando $\alpha \to +\infty$. Inicialmente, temos que

$$\int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha} + (B_0(2, g) + \varepsilon_0) A_0(2, g_\alpha)^{-1} \int_M u_\alpha^2 \, dv_{g_\alpha} = \lambda_\alpha < A_0(2, g_\alpha)^{-1}$$

e existe uma constante $C_0 > 0$, independente de α, tal que

$$\int_M u_\alpha^2 \, dv_g \leq C_0 \int_M u_\alpha^2 \, dv_{g_\alpha}$$

e

$$\int_M |\nabla_g u_\alpha|^2 \, dv_g \leq C_0 \int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha}$$

para $\alpha > 0$ grande. Claramente, essas desigualdades implicam que $(u_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{1,2}(M)$. Daí, existe $u \in H^{1,2}(M)$, $u \geq 0$, tal que $u_\alpha \rightharpoonup u$ fracamente em $H^{1,2}(M)$ e

$$\int_M u_\alpha^q \, dv_{g_\alpha} \to \int_M u^q \, dv_g$$

para cada $1 \leq q < 2^*$. Note também que $\lambda_\alpha \to \lambda$, com $0 \leq \lambda \leq A_0(2,g)^{-1}$, a menos de subsequência. Tomando o limite $\alpha \to +\infty$ na equação (E_{g_α}), desde que g_α converge a g na topologia C^2, concluímos que u satisfaz

$$-\Delta_g u + (B_0(2,g) + \varepsilon_0) A_0(2,g)^{-1} u = \lambda u^{2^*-1} \ . \tag{E_g}$$

Se $u \not\equiv 0$, então $(J^2_{g,opt}(1))$ e (E_g) implicam

$$\left(\int_M u^{2^*} \, dv_g \right)^{2/2^*} < A_0(2,g) \int_M |\nabla_g u|^2 \, dv_g + (B_0(2,g) + \varepsilon_0) \int_M u^2 \, dv_g$$

$$= A_0(2,g)\lambda \int_M u^{2^*} \, dv_g \leq \int_M u^{2^*} \, dv_g \ ,$$

tal que $||u||_{2^*} > 1$. Porém, isso entra em contradição com

$$\int_M u^{2^*} dv_g \leq \liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M u_\alpha^{2^*} dv_{g_\alpha} = 1 \ .$$

No que segue, assuma então que $u \equiv 0$. Nesse caso, afirmamos que $\lambda_\alpha \to A_0(2,g)^{-1}$ quando $\alpha \to +\infty$. De fato, utilizando que $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$ e $g_\alpha \to g$ na topologia C^2, obtemos que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_M u_\alpha^{2^*} \, dv_g = 1$$

e

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_M u_\alpha^2 \, dv_g = 0 \ .$$

Tomando o limite $\alpha \to +\infty$ em

$$\left(\int_M u_\alpha^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq A_0(2,g)\int_M |\nabla_g u_\alpha|^2\, dv_g + B_0(2,g)\int_M u_\alpha^2\, dv_g$$

e usando o limite acima, encontramos

$$\liminf_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla_g u_\alpha|^2\, dv_g \geq A_0(2,g)^{-1}\ .$$

Daí, a convergência de $(g_\alpha)_\alpha$ na topologia C^2 implica

$$\liminf_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2\, dv_{g_\alpha} \geq A_0(2,g)^{-1}\ .$$

A afirmação segue então de

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2\, dv_{g_\alpha} \leq \limsup_{\alpha\to+\infty}\lambda_\alpha \leq A_0(2,g)^{-1}\ .$$

No que segue, dividiremos a demonstração em seis passos.

Dizemos que $x \in M$ é um ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$, se para cada $\delta > 0$,

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{B_g(x,\delta)} u_\alpha^{2^*}\, dv_{g_\alpha} > 0\ .$$

Passo 1: *A sequência $(u_\alpha)_\alpha$ possui exatamente um ponto de concentração x_0, a menos de subsequência.*

Demonstração: A existência de pelo menos um ponto de concentração segue diretamente da compacidade de M, pois $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$. Seja $x_0 \in M$ um ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$. Tome $\delta > 0$ pequeno e considere uma função suave $\eta \in C_0^\infty(B_g(x_0,\delta))$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ em $B_g(x_0,\delta/2)$. Mutiplicando (E_{g_α}) por $\eta^2 u_\alpha^k$, $k > 1$, e integrando sobre M, obtemos

$$\lambda_\alpha \int_M \eta^2 u_\alpha^{k+2^*-1}\, dv_{g_\alpha} = -\int_M \eta^2 u_\alpha^k \Delta_{g_\alpha} u_\alpha\, dv_{g_\alpha} \tag{3.30}$$

$$+(B_0(2,g)+\varepsilon_0)A_0(2,g_\alpha)^{-1}\int_M \eta^2 u_\alpha^{k+1}\, dv_{g_\alpha}\ .$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, independente de α, pois g_α converge a g na topologia C^2, tal que

$$\int_M |\nabla_{g_\alpha}(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})|^2\, dv_{g_\alpha} \leq \frac{(k+1)^2}{4}(1+\varepsilon)\int_M \eta^2 u_\alpha^{k-1}|\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2\, dv_{g_\alpha} + C_\varepsilon ||\nabla\eta||_\infty^2 \int_M u_\alpha^{k+1}\, dv_{g_\alpha}$$

para $\alpha > 0$ grande. Por uma integração direta, temos

$$-\int_M \eta^2 u_\alpha^k \Delta_{g_\alpha} u_\alpha \, dv_{g_\alpha} \geq k \int_M \eta^2 u_\alpha^{k-1} |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha} - \int_M u_\alpha^k |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha| |\nabla_{g_\alpha}(\eta^2)| \, dv_{g_\alpha} \, ,$$

tal que, juntamente com (3.30),

$$\int_M |\nabla_{g_\alpha}(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})|^2 \, dv_{g_\alpha} \leq \frac{(k+1)^2}{4k}(1+\varepsilon)\lambda_\alpha \int_M \eta^2 u_\alpha^{k+2^*-1} \, dv_{g_\alpha} \tag{3.31}$$

$$+\frac{(k+1)^2}{4k}(1+\varepsilon) \int_M u_\alpha^k |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha| |\nabla_{g_\alpha}(\eta^2)| \, dv_{g_\alpha} + C_\varepsilon ||\nabla \eta||_\infty^2 \int_M u_\alpha^{k+1} \, dv_{g_\alpha} \, .$$

Da desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_M \eta^2 u_\alpha^{k+2^*-1} \, dv_{g_\alpha} \leq \left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{1-\frac{2}{2^*}} \tag{3.32}$$

e

$$\int_M u_\alpha^k |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha| |\nabla_{g_\alpha}(\eta^2)| \, dv_{g_\alpha} \leq 2||\nabla \eta||_\infty \left(\int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M u_\alpha^{2k} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \, . \tag{3.33}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $D_\varepsilon > 0$, independente de α, tal que

$$\left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{2/2^*} \leq (A_0(2, g_\alpha)^{-1} + \varepsilon) \int_M |\nabla_{g_\alpha}(\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})|^2 \, dv_{g_\alpha} \tag{3.34}$$

$$+D_\varepsilon \int_M u_\alpha^{k+1} \, dv_{g_\alpha}$$

para $\alpha > 0$ grande. Aqui foi usado que $(1-\varepsilon)g \leq g_\alpha \leq (1+\varepsilon)g$ no sentido de formas bilineares. De $J_\alpha(u_\alpha) < A_0(2, g_\alpha)^{-1}$, segue que

$$\left(\int_M |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha} \right)^{1/2} \leq \left(\lambda_\alpha \int_M u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \leq A_0(2, g_\alpha)^{-1/2} \, . \tag{3.35}$$

Daí, colocando juntos (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) e (3.35), encontramos

$$A_\alpha \left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq B \int_M u_\alpha^{k+1} \, dv_{g_\alpha} + C \left(\int_M u_\alpha^{2k} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} , \tag{3.36}$$

onde

$$A_\alpha = 1 - \frac{(k+1)^2}{4k}(1+\varepsilon)^2 \lambda_\alpha A_0(2, g_\alpha) \left(\int_{B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{1-\frac{2}{2^*}} ,$$

$$B = A_0(2, g_\alpha)(1+\varepsilon)C_\varepsilon ||\nabla \eta||_\infty^2 + D_\varepsilon$$

e

$$C = 2\frac{(k+1)^2}{4k}(1+\varepsilon)^2 ||\nabla\eta||_\infty A_0(2, g_\alpha)^{1/2} \ .$$

Como x_0 é um ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$, temos

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \left(\int_{B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{1-\frac{2}{2^*}} = a > 0,$$

com $a \leq 1$, pois $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$. Afirmamos que $a = 1$ para todo $\delta > 0$. De fato, se $a < 1$ para algum $\delta > 0$, tomando $\varepsilon > 0$ pequeno e $k > 1$ próximo de 1 tal que $A_\alpha > A$, onde $A > 0$ é uma constante independente de α. Como o lado direito de (3.36) é limitado para k próximo de 1, encontramos uma constante $C > 0$, independente de α, tal que

$$\left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq c$$

para $\alpha > 0$ grande. Da desigualdade de the Hölder, temos

$$\int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} = \int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^{k+1} \, u_\alpha^{2^*-1-k} \, dv_{g_\alpha}$$

$$\leq \left(\int_M (\eta u_\alpha^{\frac{k+1}{2}})^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M u_\alpha^{2^* - \frac{2^*(k-1)}{2^*-2}} \, dv_{g_\alpha} \right)^{1-\frac{2}{2^*}} \leq C \left(\int_M u_\alpha^{2^* - \frac{2^*(k-1)}{2^*-2}} \, dv_{g_\alpha} \right)^{1-\frac{2}{2^*}} \ .$$

Escolha k próximo de 1 tal que $2 < 2^* - \frac{2^*(k-1)}{2^*-2} < 2^*$. Como $||u_\alpha||_2 \to 0$, segue então de um argumento de interpolação que

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x_0,\frac{\delta}{2})} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} = 0 \ .$$

Isso claramente contradiz que x_0 é um ponto de concentração. Portanto, $a = 1$ e

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} = 1$$

para todo $\delta > 0$. Como $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$, obtemos que $(u_\alpha)_\alpha$ possui exatamente um ponto de concentração, a menos de subsequência. ■

Passo 2: *Seja $x_0 \in M$ o único ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$. Então,*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} u_\alpha = 0 \ \text{ em } \ C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\}) \ . \tag{3.37}$$

Demonstração: De (3.36), dado $\overline{\Omega} \subset M \setminus \{x_0\}$, existem constantes $\varepsilon, C_1 > 0$, independentes de α, tal que

$$\int_\Omega u_\alpha^{2^*(1+\varepsilon)}\, dv_{g_\alpha} \leq C_1$$

para $\alpha > 0$ grande. Por outro lado, da convergência de $(g_\alpha)_\alpha$ na topologia C^2, encontramos constantes γ e C_0 tal que $g_\alpha \geq \gamma\xi$, no sentido de formas bilineares, e $||(g_\alpha)_{ij}||_{C^0} \leq C_0$ para $\alpha > 0$ grande, onde ξ denota a métrica Euclideana sobre $\mathbb{R}^n$. Finalmente, a conclusão (3.37) segue diretamente de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser aplicadas a equação (E_{g_α}). Nesse ponto é importante notar que as constantes envolvidas nessas estimativas dependem somente de γ, C_0 e C_1. Veja, por exemplo, Serrin [71] para maiores detalhes. ∎

Seja $x_\alpha \in M$ um ponto de máximo da função u_α, isto é $u_\alpha(x_\alpha) = ||u_\alpha||_\infty$. Dos passos 1 e 2, temos que $x_\alpha \to x_0$ quando $\alpha \to +\infty$.

Passo 3: *Para cada $R > 0$, tem-se*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B_{g_\alpha}(x_\alpha, R\mu_\alpha)} u_\alpha^{2^*}\, dv_{g_\alpha} = 1 - \varepsilon_R \tag{3.38}$$

onde $\mu_\alpha = ||u_\alpha||_\infty^{-2^*/n}$ e $\varepsilon = \varepsilon_R \to 0$ quando $R \to +\infty$.

Demonstração: De

$$1 = \int_M u_\alpha^{2^*}\, dv_{g_\alpha} \leq ||u_\alpha||_\infty^{2^*-2} \int_M u_\alpha^2\, dv_{g_\alpha}\ ,$$

encontramos $||u_\alpha||_\infty \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$, pois $\int_M u_\alpha^2\, dv_{g_\alpha} \to 0$. Daí, $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Seja $\exp_{x_\alpha}$ a aplicação exponencial em x_α em relação à métrica g. Como $x_\alpha \to x_0$, existe $\delta > 0$, independente de α, tal que $\exp_{x_\alpha}$ aplica $B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ sobre $B_g(x_\alpha, \delta)$ para $\alpha > 0$ grande. Para cada $x \in B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$, defina

$$\tilde{g}_\alpha(x) = (\exp_{x_\alpha}^* g_\alpha)(\mu_\alpha x)$$

e

$$\varphi_\alpha(x) = \mu_\alpha^{n/2^*} u_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x))\ .$$

Verifica-se facilmente que

$$-\Delta_{\tilde{g}_\alpha}\varphi_\alpha + (B_0(2,g) + \varepsilon_0)A_0(2,g_\alpha)^{-1}\mu_\alpha^2\varphi_\alpha = \lambda_\alpha \varphi_\alpha^{2^*-1}\ . \tag{$\tilde{E}_\alpha$}$$

Claramente,

$$\tilde{g}_\alpha \to \xi \ \text{ em } \ C^0_{loc}(\mathbb{R}^n) \ . \tag{3.39}$$

Assim, para cada aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existem constantes $\gamma, C_0 > 0$ tal que

$$\tilde{g}_\alpha \geq \gamma\xi \ \text{ em } \ \Omega \ , \tag{3.40}$$

no sentido de formas bilineares, e

$$||(\tilde{g}_\alpha)_{ij}||_{C^0(\Omega)} \leq C_0 \tag{3.41}$$

para $\alpha > 0$ grande. Daí, de (3.40), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_\alpha|^2 \, dv_\xi \leq C \int_{B(0,\delta\mu_\alpha^{-1})} |\nabla_{\tilde{g}_\alpha} \varphi_\alpha|^2 \, dv_{\tilde{g}_\alpha} = C \int_{B(x_\alpha,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^2 \, dv_{g_\alpha} \leq C A_0(2, g_\alpha)^{-1}$$

e

$$\int_\Omega \varphi_\alpha^{2^*} \, dv_\xi \leq C \int_{B(0,\delta\mu_\alpha^{-1})} \varphi_\alpha^{2^*} \, dv_{\tilde{g}_\alpha} = C \int_{B(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{2^*} \, dv_{g_\alpha} \leq C \ .$$

Portanto, a sequência $(\varphi_\alpha)_\alpha$, com $\alpha > 0$ grande, é limitada em $H^{1,2}(\Omega)$ para cada aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi_\alpha \rightharpoonup \varphi$ fracamente em $H^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, e $\int_\Omega \varphi_\alpha^q \, dv_\xi \to \int_\Omega \varphi^q \, dv_\xi$ para cada $1 \leq q < 2^*$, a menos de subsequência. Então, tomando o limite $\alpha \to +\infty$ em $(\tilde{E}_\alpha)$, utilizando (3.39), $\lambda_\alpha \to A_0(2, g)^{-1}$ e $\mu_\alpha \to 0$, concluímos que φ satisfaz

$$-\Delta\varphi = A_0(2, g)^{-1} \varphi^{2^*-1} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n \ . \tag{3.42}$$

Note também que $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Esse último fato segue diretamente de

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_\alpha|^2 \, dv_\xi \leq C A_0(2, g_\alpha)^{-1}$$

e $\varphi_\alpha \rightharpoonup \varphi$ em $H^{1,2}(\Omega)$. Graças à (3.40) e (3.41) e às limitações de $(\varphi_\alpha)_\alpha$ e $(\mu_\alpha)_\alpha$, podemos aplicar estimativas de Hölder para soluções (veja [61]) de $(\tilde{E}_\alpha)$, tal que $(\varphi_\alpha)_\alpha$ é uniformemente limitada em $C^\beta(\overline{\Omega})$ para cada aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha > 0$ grande. Logo, $\varphi_\alpha \to \varphi$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a menos de subsequência, tal que $\varphi \not\equiv 0$, pois $\varphi_\alpha(0) = 1$ para todo α. Da equação (3.42), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 \, dv_\xi = A_0(2, g)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{2^*} \, dv_\xi \ ,$$

pois $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Daí,

$$A_0(2,g)^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^{2^*}\,dv_\xi\right)^{\frac{2}{2^*}} \le \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^2\,dv_\xi = A_0(2,g)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^{2^*}\,dv_\xi\ ,$$

tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^{2^*}\,dv_\xi \ge 1\ .$$

Por outro lado, como

$$\int_\Omega \varphi_\alpha^{2^*}\,dv_{\tilde g_\alpha} \le \int_{B(0,\delta\mu_\alpha^{-1})}\varphi_\alpha^{2^*}\,dv_{\tilde g_\alpha} = \int_{B_{g_\alpha}(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{2^*}\,dv_{g_\alpha} \le 1\ ,$$

encontramos $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^{2^*}dv_\xi = 1$, tal que a conclusão desse passo segue diretamente da convergência

$$\int_{B_{g_\alpha}(x_\alpha,R\mu_\alpha)} u_\alpha^{2^*}\,dv_{g_\alpha} = \int_{B(0,R)}\varphi_\alpha^{2^*}\,dv_{\tilde g_\alpha} \to \int_{B(0,R)}\varphi^{2^*}\,dv_\xi\ .$$

■

Passo 4: *Existe uma constante $C>0$, independente de α, tal que, para qualquer $x\in M$ e $\alpha>0$ grande,*

$$d_g(x,x_\alpha)^{\frac{n}{2^*}}u_\alpha(x) \le C\ .$$

Demonstração: Seja

$$\omega_\alpha(x) = d_g(x,x_\alpha)^{n/2^*}u_\alpha(x)$$

para $x\in M$ e suponha, por contradição, que a conclusão desse passo falha. Nesse caso,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}||\omega_\alpha||_\infty = +\infty\ ,$$

a menos de subsequência. Seja $y_\alpha\in M$ um ponto de máximo de ω_α. Note que $u_\alpha(y_\alpha)\to +\infty$ e

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{d_g(y_\alpha,x_\alpha)}{\mu_\alpha} = +\infty\ , \tag{3.43}$$

pois

$$\frac{d_g(y_\alpha,x_\alpha)}{\mu_\alpha} = \frac{\omega_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}}{\mu_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}} \ge \omega_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}\ .$$

Seja $\exp_{x_\alpha}$ a aplicação exponencial em x_α em relação à métrica g. Para $x\in B(0,2)$, defina

$$\hat{g}_\alpha(x) = (\exp^*_{y_\alpha} g_\alpha)(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x)$$

e

$$v_\alpha(x) = u_\alpha(y_\alpha)^{-1}u_\alpha(\exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x)) \ .$$

Afirmamos que a sequência $(v_\alpha)_\alpha$ é uniformemente limitada em $B(0,2)$ para $\alpha > 0$ grande. De fato, para cada $x \in B(0,2)$ e $\alpha > 0$ grande,

$$d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x)) \geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - d_g(y_\alpha, \exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x))$$

$$= d_g(x_\alpha, y_\alpha) - 2u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n} = (1 - 2\omega_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n})d_g(x_\alpha, y_\alpha) \ .$$

Como $\omega_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$, para $\alpha > 0$ grande, temos

$$d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x)) \geq \frac{1}{2}d_g(x_\alpha, y_\alpha) \ . \tag{3.44}$$

Portanto,

$$v_\alpha(x) = u_\alpha(y_\alpha)^{-1}u_\alpha(\exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x))$$

$$\leq 2^{n/2^*}d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{-n/2^*}u_\alpha(y_\alpha)^{-1}\omega_\alpha(\exp_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}x))$$

$$\leq 2^{n/2^*}d_g(x_\alpha, y_\alpha)^{-n/2^*}u_\alpha(y_\alpha)^{-1}\omega_\alpha(y_\alpha) = 2^{n/2^*},$$

tal que

$$||v_\alpha||_{L^\infty(B(0,2))} \leq 2^{n/2^*} \ . \tag{3.45}$$

Por outro lado, v_α satisfaz

$$-\Delta_{\hat{g}_\alpha} v_\alpha + B_\alpha v_\alpha = \lambda_\alpha v_\alpha^{2^*-1} \quad \text{em} \quad B(0,2)$$

para uma certa constante $B_\alpha > 0$, tal que

$$-\Delta_{\hat{g}_\alpha} v_\alpha \leq \lambda_\alpha v_\alpha^{2^*-1} \quad \text{em} \quad B(0,2) \ . \tag{3.46}$$

Note também que

$$\hat{g}_\alpha \to \xi \quad \text{em} \quad C^0(\overline{B(0,2)})\ ,$$

tal que existem constantes $\gamma, C_0 > 0$ tal que

$$\hat{g}_\alpha \geq \gamma\xi \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.47}$$

no sentido de formas bilineares, e

$$||(\hat{g}_\alpha)_{ij}||_{C^0(\overline{B(0,2)})} \leq C_0 \tag{3.48}$$

para $\alpha > 0$ grande. Graças à (3.45), (3.47) e (3.48), estimativas de De Giorgi-Nash-Moser aplicadas à (3.46) fornecem

$$v_\alpha(0) \leq \sup_{x\in B(0,1)} v_\alpha(x) \leq C\int_{B(0,2)} v_\alpha^{2^*}\, dv_{\hat{g}_\alpha} = C\int_{B_{g_\alpha}(y_\alpha, 2u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n})} u_\alpha^{2^*}\, dv_{g_\alpha}$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo somente de γ e C_0. Como $v_\alpha(0) = 1$, obteremos uma contradição se mostrarmos que o lado direito converge a 0 quando $\alpha \to +\infty$. Do passo 3, é suficiente então mostrar que

$$B_{g_\alpha}(y_\alpha, 2u_\alpha(y_\alpha)^{-2^*/n}) \cap B_{g_\alpha}(x_\alpha, R\mu_\alpha) = \emptyset\ .$$

Como $(g_\alpha)_\alpha$ converge na topologia C^2 e M é compacto, existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que

$$d_{g_\alpha} \geq C d_g$$

para $\alpha > 0$ grande. A afirmação acima segue então de

$$d_{g_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha)u_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n} \geq C d_g(x_\alpha, y_\alpha)u_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}$$

$$= Cw_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n} \geq 2 + Ru_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}\mu_\alpha = 2 + Ru_\alpha(y_\alpha)^{2^*/n}||u_\alpha||_\infty^{-2^*/n},$$

a qual se verifica para $\alpha > 0$ grande, pois $w_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$. ∎

Passo 5: *Para cada $\delta > 0$, temos*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\int_{M\setminus B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^2\, dv_g}{\int_M u_\alpha^2\, dv_g} = 0\ . \tag{3.49}$$

Demonstração: Da desigualdade de Hölder,

$$\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^2\, dv_g \le \left(\sup_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha\right)\int_M u_\alpha\, dv_g$$

$$\le v_g(M)^{1/2}\left(\sup_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha\right)\left(\int_M u_\alpha^2\, dv_g\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Do passo 2, a convergência de $(g_\alpha)_\alpha$ na topologia C^2, (3.40) e (3.41), aplicando estimativas de De Giorgi-Nash-Moser à (E_{g_α}), encontramos constantes $C_1, C_2 > 0$, dependendo apenas somente de γ, C_0 e δ, tal que

$$\sup_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha \le C_1\int_M u_\alpha\, dv_{g_\alpha} \le C_2\int_M u_\alpha\, dv_g$$

para $\alpha > 0$ grande. Das duas desigualdades acima e (E_{g_α}), obtemos

$$\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^2\, dv_g \le C\left(\int_M u_\alpha^2\, dv_g\right)^{\frac{1}{2}}\int_M u_\alpha^{2^*-1}\, dv_g \tag{3.50}$$

para $\alpha > 0$ grande. Vamos analisar agora duas situações. Se $n = 4$, então

$$\frac{\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^2\, dv_g}{\int_M u_\alpha^2\, dv_g} \le c||u_\alpha||_2 \to 0 ,$$

pois $2^*-1 = 2$. Além disso, se $n > 4$, então $2^*-1 > 2$. Nesse caso, aplicando desigualdade de Hölder e usando que $u_\alpha \in \Lambda_\alpha$, concluimos que

$$\frac{\int_{M\backslash B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^2\, dv_g}{\int_M u_\alpha^2\, dv_g} \le c||u_\alpha||_2^{(n-4)/2} \to 0 .$$

■

Passo 6: Aqui é o argumento final. Da convergência de $(g_\alpha)_\alpha$ na topologia C^2, temos

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} \mathrm{inj}_{g_\alpha}(M) > 0 ,$$

onde $\mathrm{inj}_{g_\alpha}(M)$ denota o raio de injetividade de (M, g_α). Daí, existe $\delta > 0$, independente de α, tal que $B_{g_\alpha}(x_\alpha, \delta)$ é uma bola geodésica para todo $\alpha > 0$ grande. Além disso, se $\exp_{x_\alpha,g_\alpha}$ denota a aplicação exponencial em x_α em relação à métrica g_α, então $\exp_{x_\alpha,g_\alpha}\circ\exp_{x_0,g}^{-1}$ converge para a aplicação identidade $id : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^n$ na topologia C^3. Para cada $x \in B(0,\delta)$, defina

$$h_\alpha(x) = \exp^*_{x_\alpha,g_\alpha} g_\alpha(x)$$

e

$$v_\alpha(x) = u_\alpha(\exp_{x_\alpha, g_\alpha}(x)) \ .$$

Seja $\eta \in C_0^\infty(B(0,\delta))$ tal que $\eta \equiv 1$ em $B(0,\frac{\delta}{2})$ e $|\nabla \eta| \leq C/\delta$. No que segue, denotamos por C algumas constantes positivas independentes de α e δ. Da desigualdade de Sobolev Euclideana, temos

$$\left(\int_{B(0,\delta)} (\eta v_\alpha)^{2^*} \ dv_\xi \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq A_0(2,g_\alpha) \int_{B(0,\delta)} |\nabla \left(\eta v_\alpha\right)|^2 \ dv_\xi \ . \tag{3.51}$$

Note que

$$\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta v_\alpha)|^2 \ dv_\xi \leq \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha \Delta v_\alpha \ dv_\xi + c\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^2 \ dv_\xi \, .$$

Temos também

$$-\Delta v_\alpha = -\Delta_{h_\alpha} v_\alpha + (h_\alpha^{ij} - \delta_{ij})\partial_{ij} v_\alpha - h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k \partial_k v_\alpha \, ,$$

onde δ_{ij} e $\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k$ denotam, respectivamente, o delta de Kronecker e os símbolos Christoffel da conexão de Levi-Civita associada à métrica h_α. Assim,

$$\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta v_\alpha)|^2 \ dv_\xi \leq -\int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha \Delta_{h_\alpha} v_\alpha \ dv_\xi + c\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^2 \ dv_\xi$$

$$+ \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha (h_\alpha^{ij} - \delta_{ij})\partial_{ij} v_\alpha \ dv_\xi - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha h_\alpha^{ij} \Gamma(h_\alpha)_{ij}^k \partial_k v_\alpha \ dv_\xi \ ,$$

tal que integrando por partes, utilizando (E_{g_α}) e $\lambda_\alpha < A_0(2,g_\alpha)^{-1}$, obtemos

$$\int_{B(0,\delta)} |\nabla(\eta v_\alpha)|^2 \ dv_\xi \leq A_0(2,g_\alpha)^{-1} \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha^{2^*} \ dv_\xi$$

$$-(B_0(2,g)+\varepsilon_0)A_0(2,g_\alpha)^{-1} \int_{B(0,\delta)} (\eta v_\alpha)^2 \ dv_\xi$$

$$+C\delta^{-2} \int_{B(0,\delta)\setminus B(0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^2 \ dv_\xi - \int_{B(0,\delta)} \eta^2 (h_\alpha^{ij} - \delta_{ij}) \partial_i v_\alpha \partial_j v_\alpha \ dv_\xi$$

$$+\frac{1}{2} \int_{B(0,\delta)} \left(\partial_k h_\alpha^{ij} \Gamma(h_\alpha)_{ij}^k + \partial_{ij} h_\alpha^{ij}\right) (\eta v_\alpha)^2 \ dv_\xi \ .$$

De (3.51), encontramos então

$$(B_0(2,g)+\varepsilon_0) \int_{B(0,\delta)} (\eta v_\alpha)^2 \ dv_\xi \leq \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha^{2^*} \ dv_\xi - \left(\int_{B(0,\delta)} (\eta v_\alpha)^{2^*} \ dv_\xi \right)^{2/2^*}$$

$$+C\delta^{-2}\int_{B(0,\delta)\backslash B(0,\frac{\delta}{2})} v_\alpha^2\, dv_\xi + \frac{A_0(2,g_\alpha)}{2}\int_{B(0,\delta)} \partial_k\left(h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k + \partial_{ij}h_\alpha^{ij}\right)(\eta v_\alpha)^2\, dv_\xi$$

$$-A_0(2,g_\alpha)\int_{B(0,\delta)} \eta^2(h_\alpha^{ij}-\delta_{ij})\partial_i v_\alpha \partial_j v_\alpha\, dv_\xi\,.$$

Dividindo ambos os lados por $A_0(2,g_\alpha)\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi$ e tomando o limite em α, concluímos que

$$(B_0(2,g)+\varepsilon_0)A_0(2,g)^{-1} \leq A_0(2,g)^{-1}\limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{A_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi}$$

$$+\frac{1}{2}\limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{B_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi} + \limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{C_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi}, \tag{3.52}$$

onde

$$A_\alpha = \int_{B(0,\delta)} \eta^2 v_\alpha^{2^*}\, dv_\xi - \left(\int_{B(0,\delta)} (\eta v_\alpha)^{2^*}\, dv_\xi\right)^{\frac{2}{2^*}},$$

$$B_\alpha = \int_{B(0,\delta)} \left(\partial_k(h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k) + \partial_{ij}h_\alpha^{ij}\right)(\eta v_\alpha)^2\, dv_\xi$$

e

$$C_\alpha = \left|\int_{B(0,\delta)} \eta^2(h_\alpha^{ij}-\delta_{ij})\partial_i v_\alpha \partial_j v_\alpha\, dv_\xi\right|\,.$$

Um cálculo simples, usando a convergência $g_\alpha \to g$ na topologia C^2, fornece

$$\lim_{\alpha\to+\infty}(\partial_k(h_\alpha^{ij}\Gamma(h_\alpha)_{ij}^k) + \partial_{ij}h_\alpha^{ij})(0) = \frac{1}{3}Scal_g(x_0),$$

tal que, com o passo 5,

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{B_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi} = \frac{1}{3}Scal_g(x_0)+\varepsilon_\delta, \tag{3.53}$$

onde $\varepsilon_\delta \to 0$ quando $\delta \to 0$. Utilizando novamente a convergência na topologia C^2 e alguns cálculos simples, como feito em [24], encontramos

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{A_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi} \leq \frac{n-4}{12(n-1)}A_0(2,g)Scal_g(x_0)+\varepsilon_\delta \tag{3.54}$$

e

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\frac{C_\alpha}{\int_{B(0,\delta)} v_\alpha^2\, dv_\xi} \leq \varepsilon_\delta\,. \tag{3.55}$$

Usando (3.53), (3.54) e (3.55) em (3.52), obtemos, para cada $\delta > 0$ pequeno,

$$(B_0(2,g) + \varepsilon_0) A_0(2,g)^{-1} \leq \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g(x_0) + \varepsilon_\delta \ . \tag{3.56}$$

Tomando o limite $\delta \to 0$ em (3.56), obtemos a contradição desejada, pois para $n \geq 4$ temos

$$(B_0(2,g) + \varepsilon_0) A_0(2,g)^{-1} > \frac{n-2}{4(n-1)} Scal_g(x_0) \ .$$

A convergência na topologia C^2 é sharp como mostra o seguinte contra-exemplo. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$. Considere uma sequência $(f_\alpha)_\alpha \subset C^\infty(M)$ de funções positivas convergindo à função constante $f_0 \equiv 1$ em $L^p(M)$, $p > n$, tal que $\max_M f_\alpha \to +\infty$. Seja $u_\alpha \in C^\infty(M)$, $u_\alpha > 0$, a única solução da equação

$$-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u + u = f_\alpha(x) \ \text{ em } \ M \ .$$

Da L^p-teoria elíptica clássica, segue que $(u_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{2,p}(M)$, onde $H^{2,p}(M)$ denota o espaço de L^p-Sobolev de segunda ordem sobre M, tal que u_α converge à u_0 em $C^{1,\beta}(M)$ para algum $0 < \beta < 1$. Além disso, $u_0 \equiv 1$, pois f_α converge à f_0 em $L^p(M)$ e a constante 1 é a única solução do problema limite. Portanto, $g_\alpha = u_\alpha^{2^*-2} g$ são métricas Riemannianas suaves convergindo à g na topologia $C^{1,\beta}$. Note também que existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que

$$Scal_{g_\alpha} = (-\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u_\alpha + Scal_g u_\alpha) u_\alpha^{1-2^*} \geq f_\alpha u_\alpha^{1-2^*} - C u_\alpha^{2-2^*},$$

e, portanto,

$$\max_M Scal_{g_\alpha} \to +\infty \ .$$

Por outro lado, para $n \geq 4$, temos a seguinte limitação inferior

$$B_0(2, g_\alpha) \geq \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2, g_\alpha) \max_M Scal_{g_\alpha},$$

tal que $B_0(2, g_\alpha) \to +\infty$. Em particular,

$$B_0(2, g_\alpha) \not\to B_0(2, g) \ .$$

∎

3.3 Demonstração do Teorema 1.3.3

A idéia da demonstração no caso $1 < p < 2$ é muito parecida com aquela feita na seção anterior. Assim, vamos apenas fazer um esboço da demonstração, enfatizando os pontos essenciais. A demonstração no caso $p = 1$ é inspirada em [27]. Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|B_0(p, g_\alpha) - B_0(p, g)| > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Então,

$$B_0(p, g) - B_0(p, g_\alpha) > \varepsilon_0$$

ou

$$B_0(p, g_\alpha) - B_0(p, g) > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Se a primeira situação ocorre, temos, para qualquer $u \in H^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_{g_\alpha}\right)^{p/p^*} \leq A_0(p, g_\alpha) \int_M |\nabla_{g_\alpha} u|^p \, dv_{g_\alpha} + (B_0(p, g) - \varepsilon_0) \int_M |u|^p \, dv_{g_\alpha},$$

tal que, tomando o limite em α, encontramos uma contradição. Suponha então que $B_0(p, g) + \varepsilon_0 < B_0(p, g_\alpha)$ para infinitos α's. Para cada $\alpha > 0$, considere o funcional

$$J_{\alpha,p}(u) = \int_M |\nabla_{g_\alpha} u|^p \, dv_{g_\alpha} + (B_0(p, g) + \varepsilon_0) A_0(p, g_\alpha)^{-1} \int_M |u|^p \, dv_{g_\alpha}$$

definido em $\Lambda_{\alpha,p} = \{u \in H^{1,p}(M) : \int_M |u|^{p^*} \, dv_{g_\alpha} = 1\}$. Da definição de $B_0(p, g_\alpha)$, segue que

$$\lambda_{\alpha,p} := \inf_{u \in \Lambda_{\alpha,p}} J_{\alpha,p}(u) < A_0(p, g_\alpha)^{-1} \ .$$

Asssuma primeiro que $1 < p < 2$. Nesse caso, a desigualdade acima combinada com a teoria elíptica clássica implica na existência de um minimizador positivo $u_\alpha \in \Lambda_{\alpha,p}$ de $\lambda_{\alpha,p}$ em $C^1(M)$. A equação de Euler-Lagrange satisfeita por u_α é

$$-\Delta_{p,g_\alpha} u_\alpha + (B_0(p, g) + \varepsilon_0) A_0(p, g_\alpha)^{-1} u_\alpha^{p-1} = \lambda_{\alpha,p} u_\alpha^{p^*-1} \ . \qquad (E_{\alpha,p})$$

Da convergência de $(g_\alpha)_\alpha$ na topologia C^2, existem constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tal que $\gamma_1 g \leq g_\alpha \leq \gamma_2 g$ para $\alpha > 0$ grande. Este fato combinado com $J_{\alpha,p}(u_\alpha) < A_0(p, g_\alpha)^{-1}$ implica que $(u_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{1,p}(M)$, tal que $u_\alpha \rightharpoonup u$ em $H^{1,p}(M)$, $u \geq 0$, e

$$\int_M u_\alpha^q \, dv_{g_\alpha} \to \int_M u^q \, dv_g$$

para cada $1 \leq q < p^*$, a menos de subsequência. Assuma que $\lambda_{\alpha,p} \to \lambda_p$. Tomando o limite $\alpha \to +\infty$ em $(E_{\alpha,p})$ e usando argumentos da teoria da medida usuais, obtemos que u satisfaz

$$-\Delta_{p,g} u + (B_0(p,g) + \varepsilon_0) A_0(p,g)^{-1} u^{p-1} = \lambda_p u^{p^*-1} \ . \tag{E_p}$$

Se $u \not\equiv 0$, de $(J^p_{g,opt}(1))$, (E_p) e $0 \leq \lambda_p \leq A_0(p,g)^{-1}$, obtemos $\int_M u^{p^*} dv_g > 1$, e isso contradiz

$$\int_M u^{p^*} dv_g \leq \liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M u_\alpha^{p^*} \, dv_{g_\alpha} = 1 \ .$$

Se $u \equiv 0$, por argumentos similares aos que foram utilizados no caso $p = 2$, concluimos que $\lambda_{\alpha,p} \to A_0(p,g)^{-1}$. Nas demonstrações dos passos 1, 2, 3, 4 e 5, no caso $p = 2$, usamos fortemente estimativas locais de Hölder e estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para soluções fracas de equações elípticas lineares. No entanto, essas ferramentas são bem conhecidas no contexto quasilinear (veja [61] e [71] para resultados da teoria elíptica quasilinear). Para as equações acima, envolvendo uma família de operadores de Laplace-Beltrami generalizados associados às métricas g_α, tais estimativas requerem somente a convergência na topologia C^0 de g_α. De fato, necessitamos somente de constantes $\gamma, C_0 > 0$, independentes de α, tal que $g_\alpha \geq \gamma\xi$ e $||(g_\alpha)_{ij}||_{C^0} \leq C_0$ para $\alpha > 0$ grande. Daí, os passos 1, 2, 3, 4 e 5 permanecem válidos para $1 < p < 2$ (veja [27] para maiores detalhes). Precisamente, para $1 < p < 2$, esses passos são enunciados da seguinte forma:

Dizemos que $x \in M$ é um ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$, se para cada $\delta > 0$,

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x,\delta)} u_\alpha^{p^*} \, dv_{g_\alpha} > 0 \ .$$

Passo 1: *A sequência $(u_\alpha)_\alpha$ possui exatamente um ponto de concentração x_0, a menos de subsequência.*

Passo 2: *Seja $x_0 \in M$ o único ponto de concentração da sequência $(u_\alpha)_\alpha$. Então,*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} u_\alpha = 0 \ \text{ in } \ C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\}) \ . \tag{3.57}$$

Passo 3: *Para cada $R > 0$, temos*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{B_{g_\alpha}(x_\alpha,R\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*}\, dv_{g_\alpha} = 1-\varepsilon_R \tag{3.58}$$

onde $\mu_\alpha = ||u_\alpha||_\infty^{-p^*/n}$ *e* $\varepsilon = \varepsilon_R \to 0$ *quando* $R\to+\infty$.

Passo 4: *Existe uma constante* $C>0$*, independente de* α*, tal que*

$$d_g(x,x_\alpha)^{\frac{n}{p^*}} u_\alpha(x) \le C$$

para todo $x\in M$ *e* $\alpha>0$ *grande.*

Passo 5: *Para cada* $\delta>0$*, temos*

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{\int_{M\setminus B_g(x_0,\delta)} u_\alpha^p\, dv_g}{\int_M u_\alpha^p\, dv_g} = 0\ . \tag{3.59}$$

Passo 6: A convergência de g_α à g na topologia C^2 implica que

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} \mathrm{inj}_{g_\alpha}(M) > 0\ .$$

Assim, existe $\delta>0$ pequeno e independente de α tal que $B_{g_\alpha}(x_\alpha,\delta)$ é uma bola geodésica para todo $\alpha>0$ grande. Além disso, $\exp_{x_\alpha,g_\alpha}\circ\exp_{x_0,g}^{-1}$ converge para a aplicação identidade $id: B(0,\delta)\to\mathbb{R}^n$ na topologia C^3. Considere uma função suave η tal que $0\le\eta\le1$, $\eta\equiv1$ em $(0,\delta)$, $\eta\equiv0$ em $(2\delta,+\infty)$ e $|\nabla\eta|\le C/\delta$ para alguma constante $C>0$ independente de δ. Defina $\eta_\alpha(x)=\eta(d_g(x,x_\alpha))$. No que segue, denotaremos por C várias constantes independentes de δ e α. Como $x_\alpha\to x_0$ e $g_\alpha\to g$ na topologia C^2, a expansão de Cartan de g_α fornecem para $\alpha>0$ grande,

$$(1-Cd_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2)dv_{g_\alpha} \le dv_\xi \le (1+Cd_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2)dv_{g_\alpha} \tag{3.60}$$

e

$$|\nabla(\eta_\alpha u_\alpha)|^p(x) \le |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p(x)(1+Cd_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2)\ . \tag{3.61}$$

Claramente, (3.60) fornece

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}(\eta_\alpha u_\alpha)^{p^*}\, dv_\xi \ge 1-\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*}\, dv_{g_\alpha} - C\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{p^*} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha}\ . \tag{3.62}$$

Do passo 2,

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*}\, dv_{g_\alpha} = o(||u_\alpha||_p^p)\ ,$$

e, do passo 4,

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{p^*} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2 \, dv_{g_\alpha} \leq C\delta^{2-p}||u_\alpha||_p^p \, .$$

Daí, de (3.62), obtemos

$$\left(\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha u_\alpha)^{p^*} \, dv_\xi \right)^{\frac{p}{p^*}} \geq 1 - o(||u_\alpha||_p^p) - C\delta^{2-p}||u_\alpha||_p^p \, . \tag{3.63}$$

De (3.60) e (3.61), temos também

$$A_0(p,g_\alpha) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla(\eta_\alpha u_\alpha)|^p \, dv_\xi \leq A_0(p,g_\alpha) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p \, dv_{g_\alpha} \tag{3.64}$$

$$+C \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2 \, dv_{g_\alpha} \, .$$

Independentemente, utilizando que $J_{\alpha,p}(u_\alpha) = \lambda_{\alpha,p}$, $u_\alpha \in \Lambda_{\alpha,p}$ e $\lambda_{\alpha,p} < A_0(p,g_\alpha)^{-1}$, encontramos

$$A_0(p,g_\alpha) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p \, dv_{g_\alpha} \leq 1 - \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^{p^*} \, dv_{g_\alpha} - (B_0(p,g)+\varepsilon_0) \int_{B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p \, dv_{g_\alpha}$$

$$+C\delta^{-p} \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p \, dv_{g_\alpha} + C \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p \, dv_{g_\alpha} \, .$$

Para estimarmos as integrais acima, considere uma função suave ζ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 0$ em $(0,\delta)$, $\zeta \equiv 1$ em $(\delta,+\infty)$ e defina $\zeta_\alpha(x) = \zeta(d_g(x,x_\alpha))$. Tomando $\zeta_\alpha^p u_\alpha$ como uma função teste em $(E_{\alpha,p})$, integrando por partes, usando desigualdade de Young, encontramos

$$\int_M \zeta_\alpha^p |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p \, dv_{g_\alpha} \leq \int_M \zeta_\alpha^p u_\alpha^{p^*} \, dv_{g_\alpha} + C \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta/2)} u_\alpha^p \, dv_{g_\alpha}$$

$$\leq \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta/2)} u_\alpha^{p^*} \, dv_{g_\alpha} + C \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta/2)} u_\alpha^p \, dv_{g_\alpha} = o(||u_\alpha||_p^p) \, ,$$

tal que

$$\int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p \, dv_{g_\alpha} = o(||u_\alpha||_p^p) \, . \tag{3.65}$$

Portanto,

$$A_0(p,g_\alpha) \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p \, dv_{g_\alpha} \leq 1 - (B_0(p,g)+\varepsilon_0) \int_{B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p \, dv_{g_\alpha} \tag{3.66}$$

$$+o(||u_\alpha||_p^p)\,.$$

Tomando agora $\eta_\alpha^p u_\alpha d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2$ como uma função teste em (E_{g_α}), onde η_α foi introduzida no início deste argumento final, integrando por partes e usando novamente a desigualdade Young, temos que

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha} \le \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{p^*} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha}$$

$$+C\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^{p-1}\, dv_{g_\alpha}$$

$$+C\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^{2-p}\eta_\alpha u_\alpha \eta_\alpha^{p-1}|\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^{p-1} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^{p-1}\, dv_{g_\alpha}$$

$$\le \int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} u_\alpha^{p^*} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha} + C\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p\, dv_{g_\alpha} + C\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p\, dv_{g_\alpha}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} \eta_\alpha^p |\nabla_{g_\alpha} u_\alpha|^p d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha} + C\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^{2-p} u_\alpha^p\, dv_{g_\alpha},$$

tal que

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_{g_\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)|^p d_{g_\alpha}(x,x_\alpha)^2\, dv_{g_\alpha} \le C\delta^{2-p}||u_\alpha||_p^p + o(||u_\alpha||_p^p)\,. \tag{3.67}$$

Unindo (3.63)-(3.67) e a desigualdade de Sobolev Euclideana

$$\left(\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} (\eta_\alpha u_\alpha)^{p^*}\, dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A_0(p,g)\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla(\eta_\alpha u_\alpha)|^p\, dv_\xi\ ,$$

obtemos

$$(B_0(p,g)+\varepsilon_0)\int_{B_g(x_\alpha,\delta)} u_\alpha^p\, dv_{g_\alpha} \le C\delta^{2-p}||u_\alpha||_p^p + o(||u_\alpha||_p^p)\,.$$

Dividindo ambos os lados dessa desigualdade por $||u_\alpha||_p^p$, tomando o limite $\alpha \to +\infty$ e usando o passo 5, temos

$$(B_0(p,g)+\varepsilon_0) \le C\delta^{2-p}$$

para todo $\delta > 0$ pequeno. Essa contradição prova a continuidade de $B_0(p,g)$ em relação à g para $1 < p < 2$. Se $p = 1$, considere uma sequência $(p_\alpha)_\alpha \subset (1,2)$ tal que $p_\alpha \to 1$ e,

para cada $\alpha > 0$, tome um minimizador $u_\alpha \in \Lambda_{\alpha,p_\alpha}$ de $\lambda_{\alpha,p_\alpha}$. Como g_α converge à g na topologia C^2, usando algumas idéias da demonstração acima e um resultado chave devido a Druet [27], segue que $(u_\alpha)_\alpha$ converge uniformemente quando $\alpha \to +\infty$. Mas isso gera uma contradição, pois o limite de $(u_\alpha)_\alpha$ é uma função extremal associada a $B_0(1,g) + \varepsilon_0$.
■

3.4 Demonstração do Teorema 1.3.6

Sejam $(u_p)_p$ uma sequência em $E_{r,s}$ e $q \in [r,s]$ tal que $p \to q$, a menos de subsequência. Sabemos que as funções extremais u_p são suaves, positivas e satisfazem

$$-\Delta_{p,g} u_p + B_0(p,g) A_0(p,g)^{-1} u_p^{p-1} = A_0(p,g)^{-1} u_p^{p^*-1} \ . \tag{3.68}$$

Argumentando como no início da demonstração do Teorema 1.3.1, segue que $(u_p)_p$ é limitada em $H^{1,q}(M)$. Assim, podemos assumir que $u_p \rightharpoonup u$ fracamente em $H^{1,q}(M)$ e fortemente em $L^q(M)$. Além disso, temos que $u \geq 0$. Tomando o limite em p na equação (3.68) e aplicando o Teorema 1.3.1, concluímos que u satisfaz

$$-\Delta_{q,g} u + B_0(q,g) A_0(q,g)^{-1} u^{q-1} = A_0(q,g)^{-1} u^{q^*-1} \ . \tag{3.69}$$

Da teoria elíptica clássica, segue que $u \in C^1(M)$ e que $u \equiv 0$ ou $u > 0$ em M. A demonstração então se completa mostrando que $u > 0$. Suponha, por contradição, que $u \equiv 0$. Note que, nesse caso, temos

$$\lim_{p \to q} ||u_p||_p = 0 \ .$$

Procedendo de maneira análoga à demonstração do Teorema 1.3.1, segue que os cinco passos anteriores também são válidos para a sequência $(u_p)_p$. Em particular, o passo 5 fornece para qualquer $\delta > 0$,

$$\lim_{p \to q} \frac{\int_{M \setminus B_g(x_0,\delta)} u_p^p \, dv_g}{\int_M u_p^p \, dv_g} = 0 \ .$$

Por outro lado, os argumentos empregados no passo 6, aplicados a sequência $(u_p)_p$, nos conduzem a

$$B_0(p,g) \int_{B_g(x_p,\delta)} u_p^p \, dv_g \leq C \delta^{2-p} ||u_p||_p^p + o(||u_p||_p^p)$$

para alguma constante $C > 0$ independente de δ. Dividindo ambos os lados dessa última desigualdade por $||u_p||_p^p$, tomando o limite em p e utilizando o passo 5 e o Teorema 1.3.1, obtemos

$$B_0(q,g) = \lim_{p\to q} B_0(p,g) \leq C\delta^{2-q}$$

para todo $\delta > 0$. Isso é uma contradição, pois $q < 2$ e $B_0(q,g) > 0$. Portanto, $u > 0$ em M.

Mostremos agora que $u > 0$ implica que $u \in E_{r,s}$. De fato, existem duas medidas limitadas e não-negativas μ e ν tais que, a menos de subsequência,

$$|\nabla_g u_p|^p \, dv_g \rightharpoonup \mu, \quad u_p^{p^*} \, dv_g \rightharpoonup \nu \ .$$

Da Proposição B.1.1, existe no máximo um conjunto enumerável $\{x_j\}_{j\in\mathcal{T}}$ e números positivos $\{\mu_j\}_{j\in\mathcal{T}}$ e $\{\nu_j\}_{j\in\mathcal{T}}$ tal que

$$\mu \geq |\nabla_g u|^q \, dv_g + \sum_{j\in\mathcal{T}} \mu_j \delta_{x_j}, \quad \nu = u^{q^*} \, dv_g + \sum_{j\in\mathcal{T}} \nu_j \delta_{x_j}$$

com $A_0(q,g)\mu_j \geq \nu_j^{q/q^*}$ para todo $j \in \mathcal{T}$, onde δ_{x_j} denota a massa de Dirac centrada em x_j.

Afirmamos que $\mathcal{T} = \emptyset$. Caso contrário, escolhemos $k \in \mathcal{T}$ e uma função corte $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(B_g(x_k, 2\varepsilon))$ tal que $0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1$, $\eta_\varepsilon \equiv 1$ em $B_g(x_k, 2\varepsilon)$ e $|\nabla_g \eta_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$ para alguma constante $C > 0$ independente de ε. Tomando $\eta_\varepsilon u_p$ como uma função teste em (3.68),

$$\lim_{p\to q}\left(\int_M |\nabla_g u_p|^{p-2}\nabla_g u_p \cdot \nabla_g(\eta_\varepsilon u_p) \, dv_g + B_0(p,g)A_0(p,n)^{-1}\int_M \eta_\varepsilon u_p^p \, dv_g\right) \tag{3.70}$$

$$= \lim_{p\to q}\left(A_0(p,n)^{-1}\int_M \eta_\varepsilon u_p^{p^*} \, dv_g\right) = A_0(q,n)^{-1}\int_M \eta_\varepsilon \, d\nu \ .$$

Por outro lado,

$$\lim_{p\to q}\left(\int_M |\nabla_g u_p|^{p-2}\nabla_g u_p \cdot \nabla_g(\eta_\varepsilon u_p) \, dv_g + B_0(p,g)A_0(p,g)^{-1}\int_M \eta_\varepsilon u_p^p \, dv_g\right) \tag{3.71}$$

$$= \lim_{p\to q}\left(\int_M u_p|\nabla_g u_p|^{p-2}\nabla_g u_p \cdot \nabla_g \eta_\varepsilon \, dv_g + \int_M \eta_\varepsilon |\nabla_g u_p|^p \, dv_g\right.$$

$$\left. + B_0(p,g)A_0(p,g)^{-1}\int_M \eta_\varepsilon u_p^p \, dv_g\right)$$

$$= \lim_{p \to q} \left(\int_M u_p |\nabla_g u_p|^{p-2} \nabla_g u_p \cdot \nabla_g \eta_\varepsilon \, dv_g \right) + \int_M \eta_\varepsilon \, d\mu + B_0(q,g) A_0(q,g)^{-1} \int_M \eta_\varepsilon u^q \, dv_g \ .$$

Note que, quando $\varepsilon \to 0$,

$$\limsup_{p \to q} \left| \int_M u_p |\nabla_g u_p|^{p-2} \nabla_g u_p \cdot \nabla_g \eta_\varepsilon \, dv_g \right|$$

$$\leq C \limsup_{p \to q} \left[\left(\int_M |\nabla_g u_p|^p \, dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)} |\nabla_g \eta_\varepsilon|^n \, dv_g \right)^{\frac{1}{n}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)} u_p^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{1}{p^*}} \right]$$

$$\leq C \left[\frac{1}{\varepsilon^n} v_g(B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)) \right]^{\frac{1}{n}} \lim_{p \to q} \left(\int_{B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)} u_p^{p^*} dv_g \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\leq C \left(\int_{B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)} u^{q^*} \, dv_g + \sum_{j \in \mathcal{T}} \nu_j \delta_{x_j}(B_g(x_k, 2\varepsilon) \setminus B_g(x_k, \varepsilon)) \right)^{\frac{1}{q^*}} \to 0 \ .$$

Então, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.70) e (3.71), obtemos

$$\mu_k = A_0(q,g)^{-1} \nu_k,$$

tal que

$$\mu_k \geq A_0(q,g)^{-1} \ .$$

Portanto, encontramos a seguinte contradição

$$A_0(q,g)^{-1} = \lim_{p \to q} \left(\int_M |\nabla_g u_p|^p \, dv_g + B_0(p,g) A_0(p,g)^{-1} \int_M u_p^p \, dv_g \right)$$

$$\geq \int_M |\nabla_g u|^q \, dv_g + B_0(q,g) A_0(q,g)^{-1} \int_M u^q \, dv_g + \sum_{j \in \mathcal{T}} \mu_j > \mu_k \geq A_0(q,g)^{-1} \ .$$

Assim, $\mathcal{T} = \emptyset$ e isso implica que $||u_p||_{p^*} \to ||u||_{q^*} = 1$, tal que $u \in E_q \subset E_{r,s}$. Além disso, uma adaptação simples na prova do lema de Brézis-Lieb produz $||u_p - u||_{p^*} \to 0$ quando $p \to q$. Agora estamos prontos para a demonstração da compacidade C^0 da sequência $(u_p)_p$, a qual claramente segue de uma estimativa de $(u_p)_p$ em $C^0(M)$. Assuma, por contradição, que $||u_p||_\infty \to +\infty$ quando $p \to q$. Seja $x_p \in M$ um ponto de máximo de u_p. Assim, $x_p \to x_0$. Seja $\mu_p = ||u_p||_\infty^{-p^*/n}$. Considere a aplicação exponencial $\exp_{x_p} : B(0,\delta) \to B(x_p,\delta)$ com raio $\delta > 0$ pequeno e independente de p. Para cada $x \in B(0,\delta\mu_p^{-1})$, defina

$$v_p(x) = \mu_p^{n/p^*} u_p(\exp_{x_p}(\mu_p x))$$

e

$$g_p(x) = \exp_{x_p}^* g(\mu_p x) \ .$$

Note que v_p satisfaz

$$-\Delta_{p,g_p} v_p + B_0(p,g)A_0(p,g)^{-1}\mu_p^p v_p^{p-1} = A_0(p,g)^{-1} v_p^{p^*-1} \ . \qquad (3.72)$$

Estimativas elípticas aplicadas à (3.72) implica que $v_p \to v$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, temos que $v \not\equiv 0$, pois $v_p(0) = 1$ para todo p. Por outro lado, para cada $R > 0$ fixado, podemos escrever

$$\int_{B(0,R)} v^{p^*} \, dx = \int_{B(0,R)} v_p^{p^*} \, dv_{g_p} + o(1) = \int_{B(x_p,R\mu_p)} u_p^{p^*} \, dv_g + o(1)$$

$$= \int_{B(x_p,R\mu_p)} |u_p - u|^{p^*} \, dv_g + o(1) \ ,$$

onde $o(1)$ é tomado quando $p \to q$. Como $||u_p - u||_{p^*} \to 0$, encontramos

$$\int_{B(0,R)} v^{q^*} \, dx = 0,$$

que é uma contradição. ■

CAPÍTULO 4

Demonstrações das contribuições vetoriais

Neste capítulo, faremos as demonstrações das contribuições vetoriais. Algumas demonstrações são colocadas aqui de maneira bem reduzida pois seguem raciocínios similares aos das demonstrações dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 que são feitas com mais detalhes.

4.1 Demonstração do Teorema 2.3.1

Seja $(F_\alpha, G_\alpha)_\alpha$ uma sequência convergindo para (F, G) em $\mathcal{F}_2^1 \times \mathcal{G}_2^0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\min\limits_{\mathbb{S}_{2^*}^{k-1}} F = 1$ e $\min\limits_{\mathbb{S}_{2^*}^{k-1}} F_\alpha = 1$ para todo α. De fato, para constantes $C_\alpha > 0$ obtemos que

$$\mathcal{B}_0(2, C_\alpha F_\alpha, G_\alpha, g) = C_\alpha^{\frac{2}{2^*}} \mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)\,.$$

Assim, caso as funções F e F_α tenham mínimos diferentes de 1 na esfera $\mathbb{S}_{2^*}^{k-1}$ e o resultado seja válido quando os mínimos valem 1, colocamos $C_\alpha = (\min\limits_{\mathbb{S}_{2^*}^{k-1}} F)^{-1}$ e tomamos o limite

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) = \lim_{\alpha\to+\infty} C_\alpha^{-\frac{2}{2^*}} \mathcal{B}_0(2, C_\alpha F_\alpha, G_\alpha, g) = \mathcal{B}_0(2, F, G, g)\,.$$

Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) - \mathcal{B}_0(2, F, G, g)| > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Então, pelo menos uma das seguintes afirmações ocorre:

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) > \varepsilon_0$$

ou

$$\mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) - \mathcal{B}_0(2, F, G, g) > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Se a primeira situação ocorre, segue que, para todo $U \in H_k^{1,2}(M)$,

$$\left(\int_M F_\alpha(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M |\nabla_g U|^2\, dv_g + (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \varepsilon_0) \int_M G_\alpha(x, U)\, dv_g\,,$$

para infinitos α's. Tomando o limite nesta desigualdade, quando $\alpha \to +\infty$, encontramos

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^2\, dv_g + (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \varepsilon_0) \int_M G(x, U)\, dv_g\,,$$

o que contradiz a definição de $\mathcal{B}_0(2, F, G, g)$. Suponha então que a segunda situação ocorre, i.e. $\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0 < \mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)$ para infinitos α's. Assim, para cada α, considere o funcional

$$J_\alpha(U) = \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M |\nabla_g U|^2\, dv_g + (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0) \int_M G_\alpha(x, U)\, dv_g$$

definido em $\Lambda_\alpha = \{U \in H_k^{1,2}(M) : \int_M F_\alpha(U)\, dv_g = 1\}$. Da definição de $\mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)$, segue que

$$\lambda_\alpha := \inf_{U \in \Lambda_\alpha} J_\alpha(U) < 1\,.$$

Da Proposição E.1, existe um minimizador $U_\alpha \in \Lambda_\alpha$ para λ_α. Além disso, U_α satisfaz o sistema

$$-\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)\Delta_g u_\alpha^i + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0)\frac{\partial G_\alpha(x, U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_\alpha}{2^*}\frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i} \quad i = 1, ..., k \quad (S_\alpha)$$

Claramente a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,2}(M)$. Assim, existe uma aplicação $U \in H_k^{1,2}(M)$ tal que

$$U_\alpha \rightharpoonup U \quad \text{em } H_k^{1,2}(M)\,.$$

Multiplicando o sistema (S_α) por u_α^i, usando integração por partes e depois tomando o limite, obtemos

$$\int_M F(U) dv_g \geq \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^2 dv_g + (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0) \int_M G(x, U) dv_g\,.$$

Se $U \neq 0$, obtemos uma contradição com a validade da desigualdade de Sobolev em relação às funções F e G. Assim, suponha que $U \equiv 0$. Coloque $V_\alpha = \lambda_\alpha^{\frac{n-2}{4}} U_\alpha$. Note que V_α satisfaz

$$-\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)\Delta_g v_\alpha^i + \frac{1}{2}(\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0)\frac{\partial G_\alpha(x, V_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{1}{2^*}\frac{\partial F_\alpha(V_\alpha)}{\partial t_i} \quad i = 1, ..., k$$

A seguir, dividiremos a demonstração em três passos visando uma melhor organização.

Como $U \equiv 0$, segue do resultado de decomposição em k-bubbles, Proposição F.1, que existem k-bubbles generalizados $(\mathbf{B}_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, ..., k$, tal que, a menos de subsequência,

$$V_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{B}_{j,\alpha} + R_\alpha$$

e

$$\frac{1}{n}\int_M |V_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g = \frac{l}{n} + o(1)$$

para todo α, onde $R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,2}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$. Veja que

$$\frac{1}{n}\int_M |V_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g \leq \frac{1}{n}\,,$$

pois $\int_M F_\alpha(U_\alpha)dv_g = 1$ e $\min\limits_{\mathbb{S}_{2^*}^{k-1}} F_\alpha = 1$. Então, $l = 1$ ou $l = 0$. Mas $l = 0$ é impossível (se fosse $l = 0$, teríamos $V_\alpha = R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,2}(M)$ e, consequentemente, $\int_M F_\alpha(U_\alpha)dv_g \to 0$). Assim, $l = 1$ e existe um k-bubbles $(\mathbf{B}_\alpha)_\alpha$ tal que, a menos de subsequência,

$$V_\alpha = \mathbf{B}_\alpha + R_\alpha$$

para todo α, onde $R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,2}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$.

O primeiro passo é o seguinte.

Passo 1: *Existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que*

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{i=1}^{k} |v_\alpha^i| \leq C$$

para todo α e todo $x \in M$, onde os x_α's são os centros dos 1-bubbles que definem os k-bubbles $(\boldsymbol{B}_\alpha)_\alpha$. Em particular, os $|V_\alpha|_1$'s são uniformemente limitados em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \{x_0\}$, e $v_\alpha^i \to 0$ em $C_{loc}^0(M \setminus \{x_0\})$, para todo i, quando $\alpha \to +\infty$, onde x_0 é o limite dos x_α's.

Demonstração: Seja Ψ_α a função dada por

$$\Psi_\alpha(x) = d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{i=1}^{k} |v_\alpha^i(x)|.$$

então, o passo 1 é equivalente ao fato de que as funções Ψ_α's são uniformemente limitadas em $L^\infty(M)$. Sejam y_α's pontos em M tais que as funções Ψ_α's são máximas em y_α e

$\Psi_\alpha \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$. A menos de subsequência, podemos assumir que $|v_\alpha^{i_0}(y_\alpha)| \geq |v_\alpha^i(y_\alpha)|$ para algum $i_0 = 1, ..., k$, e todo i. Coloque $\mu_\alpha = |v_\alpha^{i_0}(y_\alpha)|^{-\frac{2}{n-2}}$. Assim, $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$, e

$$\frac{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}{\mu_\alpha} \to +\infty\,. \tag{4.1}$$

Seja $\delta > 0$ menor que o raio de injetividade de (M, g). Para $i = 1, ..., k$, definimos a função w_α^i em $B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$ por

$$w_\alpha^i(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} v_\alpha^i(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)),$$

onde $B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$ é uma bola Euclideana de raio $\delta\mu_\alpha^{-1}$ e com centro 0, e $\exp_{y_\alpha}$ é a aplicação exponencial em y_α. Dado $R > 0$ e $x \in B(0, R)$, a bola Euclideana de raio R e centro em 0, podemos escrever que

$$|w_\alpha^i(x)| \leq \frac{\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \Psi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))}{d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-2}{2}}}$$

para todo i, quando α é suficientemente grande. Para cada $x \in B(0, R)$,

$$\begin{aligned} d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) &\geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - R\mu_\alpha \\ &\geq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}\right) d_g(x_\alpha, y_\alpha) \end{aligned}$$

quando α é suficientemente grande de forma que, de (4.1), $d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) > 0$. Assim, graças a definição de y_α, obtemos que para qualquer i, e qualquer $x \in B(0, R)$,

$$|w_\alpha^i(x)| \leq k \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-2}{2}} \tag{4.2}$$

quando α é suficientemente grande. Em particular, de (4.1) e (4.2), a menos de subsequência, os w_α^i's são uniformemente limitados em qualquer compacto de $\mathbb{R}^n$ para todo i. Seja $W_\alpha = (w_\alpha^1, ..., w_\alpha^k)$. Temos que W_α é solução do sistema

$$-\Delta_{g_\alpha} w_\alpha^i + \frac{C_\alpha \mu_\alpha^2}{2} \partial_i \widetilde{G}_\alpha(x, W_\alpha) = \frac{M_{F_\alpha}^a m_{F_\alpha}^b}{2^*} \partial_i \widetilde{F}_\alpha(W_\alpha)$$

para algum a, b, e para todo i, onde

$$\widetilde{G}_\alpha(x, y) = G_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x), y)$$

e

$$g_\alpha(x) = (\exp_{y_\alpha}^* g)(\mu_\alpha x).$$

Para cada compacto K de $\mathbb{R}^n$, $g_\alpha \to \xi$ em $C^2(K)$ quando $\alpha \to +\infty$. Então, pela teoria elíptica, obtemos que as funções w_α^i's são uniformemente limitadas em $C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^n)$, para todo i, onde $0 < \theta < 1$. Em particular, a menos de subsequência, podemos assumir que $w_\alpha^i \to w_i$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $\alpha \to +\infty$ para todo i, onde os w_i's são funções em $C^2(\mathbb{R}^n)$. As funções w_i's são limitadas em $\mathbb{R}^n$ por (4.2), e são tais que $|w_{i_0}(0)| = 1$, por construção. Sem perda de generalidade, podemos assumir que os w_i's estão em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e em $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ para todo i. Denote $W = (w_1, ..., w_k)$. De acordo com o que foi dito acima, $W \neq 0$. Por construção, para cada $R > 0$,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g = \int_{B(0,R)} |W_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_{g_\alpha}.$$

Segue que para qualquer $R > 0$,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |W|_{2^*}^{2^*} dx + \varepsilon_R(\alpha),$$

onde $\varepsilon_R(\alpha)$ é tal que $\lim_R \lim_\alpha \varepsilon_R(\alpha) = 0$, e os limites são tomados quando $\alpha \to +\infty$ e $R \to +\infty$. Temos também com (4.1) que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |\mathbf{B}_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g = 0$$

para todo $R > 0$. Assim,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g \le C \int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |\mathbf{B}_\alpha|_{2^*}^{2^*} dv_g + o(1)$$

para todo α e $R > 0$, onde $C > 0$ é independente de α e R. Isso implica que, fazendo $\alpha \to +\infty$ e $R \to +\infty$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W|_{2^*}^{2^*} dx = 0,$$

e isto é uma contradição, pois $W \neq 0$. Em particular, as funções Ψ_α's são uniformente limitadas em $L^\infty(M)$. Isso mostra que existe $C > 0$, independente de α, tal que

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{i=1}^k |v_\alpha^i| \le C$$

para todo α e todo $x \in M$. Agora, se $x_0 \in M$ é o limite dos x_α's, esta última desigualdade implica que as funções $|V_\alpha|_1$'s são uniformemente limitadas em cada compacto de $M \setminus \{x_0\}$. Pela teoria elíptica, e pelo fato de $V_\alpha \to 0$ em $L^2(M)$, obtemos que $|V_\alpha|_1 \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ quando $\alpha \to +\infty$. ■

Passo 2: *Para todo $\delta > 0$,*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{M \setminus B(x_0, \delta)} |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} = 0\,.$$

Demonstração: Temos, das estimativas de De Giorgi-Nash-Moser, que existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que

$$\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} |V_\alpha|_2^2 dv_g \le \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \le C \int_M |V_\alpha|_2^{2^*} dv_g$$

$$\le C \sup_M |V_\alpha|_2^2 \int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \le C \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \ .$$

Assim,

$$\frac{\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \le C \int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \ .$$

Portanto, basta agora mostrarmos que

$$\int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \to 0 \ .$$

Vamos analisar dois casos. Primeiro, suponha que $4 \le n \le 6$. Neste caso, temos que $1 \le 2^* - 2 \le 2$. Assim, utilizando que

$$\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \to 0$$

e a continuidade da imersão $L^2(M) \hookrightarrow L^{2^*-2}(M)$, encontramos

$$\int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \to 0 \ .$$

Se $n > 6$, obtemos $1 < \frac{2}{2^*-2}$ e

$$\int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \le \sum_{i=1}^k \left(\int_M |v_\alpha^i|^{2^*-2} dv_g \right) \ .$$

Novamente, temos que

$$\int_M |V_\alpha|_2^{2^*-2} dv_g \to 0 \ .$$

Isso termina a demonstração do passo 2. ■

Passo 3: Este é o passo final. Seja $x_0 \in M$ o limite dos centros x_α dos 1-bubbles que definem os k-bubbles $(\mathbf{B}_\alpha)_\alpha$. Dado $\varepsilon > 0$, considere uma função corte η tal que $\eta = 1$ em $B(x_0, \delta_\varepsilon/4)$, $\eta = 0$ em $M \setminus B(x_0, \delta_\varepsilon/2)$, e $0 \le \eta \le 1$. Utilizando a Proposição G.1, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, para toda aplicação $U \in H_k^{1,2}(M)$ com suporte compact em $B(x_0, \delta_\varepsilon)$,

$$\left(\int_M F_\alpha(U)\, dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \le \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M |\nabla_g U|^2\, dv_g + \mathcal{B}_\varepsilon \int_M G_\alpha(x, U)\, dv_g \ .$$

Como já vimos anteriormente, $V_\alpha = \lambda_\alpha^{\frac{n-2}{4}} U_\alpha$ satisfaz o sistema (S_α) sem a constante λ_α. Tome $\varphi = \eta v_\alpha^i$. Note que

$$\int_M |\nabla_g \varphi|^2 dv_g = \int_M \eta^2 v_\alpha^i \Delta_g v_\alpha^i dv_g + \int_M |\nabla_g \eta|^2 (v_\alpha^i)^2 dv_g$$

e $|\nabla_g \eta| = 0$ em torno de x_0. Segue da desigualdade de Hölder que

$$\int_M \eta^2 |v_\alpha^i|^{2^*} dv_g = \int_M \eta^2 (v_\alpha^i)^2 |v_\alpha^i|^{2^*-2} dv_g \leq \left(\int_M |\eta v_\alpha^i|^{2^*} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M |v_\alpha^i|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}} .$$

Além disso, temos que

$$\int_M \eta^2 F_\alpha(V_\alpha) dv_g = \int_M \eta^2 F_\alpha(V_\alpha)^{\frac{2}{2^*}} F_\alpha(V_\alpha)^{\frac{2^*-2}{2^*}} dv_g$$

$$\leq \left(\int_M \left(\eta^2 F_\alpha(V_\alpha)^{\frac{2}{2^*}} \right)^{\frac{2^*}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_M F_\alpha(V_\alpha) dv_g \right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}$$

$$\leq \left(\int_M F_\alpha(\eta V_\alpha) dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)^{-1} .$$

Donde encontramos

$$\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M \eta^2 F_\alpha(V_\alpha) dv_g \leq \left(\int_M F_\alpha(\eta V_\alpha) dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} .$$

Portanto, usando a Proposição G.1 e a equação satisfeita por V_α, segue que

$$0 \leq \left(\int_M F_\alpha(\eta V_\alpha) dv_g \right)^{\frac{2}{2^*}} - \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M \eta^2 F_\alpha(V_\alpha) dv_g$$

$$\leq \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g(\eta V_\alpha)|^2 \, dv_g + \mathcal{B}_\varepsilon \int_M G_\alpha(x, \eta V_\alpha) \, dv_g$$

$$-\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g) \int_M \eta^2 |\nabla_g V_\alpha|^2 dv_g - (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0) \int_M \eta^2 G_\alpha(x, V_\alpha) dv_g$$

$$= -(\mathcal{B}_0(2, F, G, g) + \varepsilon_0) \int_M \eta^2 G_\alpha(x, V_\alpha) dv_g + \mathcal{B}_\varepsilon \int_M G_\alpha(x, \eta V_\alpha) \, dv_g$$

$$+ o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \, ,$$

pois

$$\int_{M \setminus B(x_0, \delta)} |V_\alpha|_2^2 dv_g = o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g$$

e

$$\int_M |\nabla_g(\eta v_\alpha^i)|^2 dv_g = \int_M \eta^2 |\nabla_g v_\alpha^i|^2 dv_g + \int_{M \setminus B(\delta_\varepsilon, x_0)} |v_\alpha^i|^2 dv_g$$

$$\leq \int_M \eta^2 |\nabla_g v_\alpha^i|^2 dv_g + o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g.$$

Daí,

$$\varepsilon_0 \int_M \eta^2 G_\alpha(x, V_\alpha) dv_g + (\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \mathcal{B}_\varepsilon) \int_M G_\alpha(x, \eta V_\alpha)\, dv_g \leq o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \,.$$

Mas para $\alpha > 0$ grande, temos que

$$\left(\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)}{m_{F_\alpha, G_\alpha}} Scal_g(x_0)\right) \geq$$

$$\left(\frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2, F, G, g)}{m_{F,G}} \max_M Scal_g\right.$$

$$\left. - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)}{m_{F_\alpha, G_\alpha}} Scal_g(x_0)\right) = o(1)$$

e

$$\varepsilon_0 \int_M \eta^2 G_\alpha(x, V_\alpha) dv_g \geq m_{G_\alpha} \varepsilon_0 \int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g \,,$$

onde $m_{G_\alpha} = \min\limits_{M \times \mathbb{S}_2^{k-1}} G_\alpha$. Portanto, obtemos que

$$m_{G_\alpha} \frac{\int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \varepsilon_0 \leq o(1) + \varepsilon M.$$

Tomando o limite $\alpha \to +\infty$ nesta última desigualdade, obtemos a contradição desejada, pois $m_{G_\alpha} \to m_G > 0$ e

$$\frac{\int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \to 1 \,.$$

■

4.2 Demonstração do Teorema 2.3.2

Seja $(F_\alpha, G_\alpha)_\alpha$ uma sequência convergindo para (F, G) em $\mathcal{F}_p^1 \times \mathcal{G}_p^1$. Novamente, sem perda de generalidade, vamos supor que $\min\limits_{\mathbb{S}_{p^*}^{k-1}} F = 1$ e $\min\limits_{\mathbb{S}_{p^*}^{k-1}} F_\alpha = 1$ para todo α. Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g) - \mathcal{B}_0(p, F, G, g)| > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Então, pelo menos uma das seguintes afirmações ocorre:

$$\mathcal{B}_0(p,F,G,g) - \mathcal{B}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g) > \varepsilon_0$$

ou

$$\mathcal{B}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g) - \mathcal{B}_0(p,F,G,g) > \varepsilon_0$$

para infinitos α's. Se a primeira situação ocorre, segue que, para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F_\alpha(U)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + (\mathcal{B}_0(p,F,G,g) - \varepsilon_0)\int_M G_\alpha(x,U)\, dv_g\,,$$

para infinitos α's. Tomando o limite nesta desigualdade, quando $\alpha \to +\infty$, encontramos

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + (\mathcal{B}_0(p,F,G,g) - \varepsilon_0)\int_M G(x,U)\, dv_g\,,$$

o que contradiz a definição de $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$. Suponha então que a segunda situação ocorre, isto é $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)+\varepsilon_0 < \mathcal{B}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)$ para infinitos α's. Assim, para cada α, considere o funcional

$$J_\alpha(U) = \mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\int_M |\nabla_g U|^p\, dv_g + (\mathcal{B}_0(p,F,G,g) + \varepsilon_0)\int_M G_\alpha(x,U)\, dv_g$$

definido em $\Lambda_{\alpha,p} = \{U \in H_k^{1,p}(M) :\ \int_M F_\alpha(U)\, dv_g = 1\}$. Da definição de $\mathcal{B}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)$, segue que

$$\lambda_{\alpha,p} := \inf_{U\in\Lambda_\alpha} J_\alpha(U) < 1\ .$$

Da Proposição E.1, existe um minimizador $U_\alpha \in \Lambda_{\alpha,p}$ para $\lambda_{\alpha,p}$. Além disso, U_α satisfaz o sistema

$$-\mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\Delta_{p,g}u_\alpha^i + \frac{1}{p}(\mathcal{B}_0(p,F,G,g)+\varepsilon_0)\frac{\partial G_\alpha(x,U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_{\alpha,p}}{p^*}\frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}\quad i=1,...,k\ (S_\alpha)$$

Claramente, a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,p}(M)$, e existe uma aplicação $U \in H_k^{1,p}(M)$ tal que

$$\int_M F(U)dv_g \geq \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U|^p dv_g + (\mathcal{B}_0(p,F,G,g) + \varepsilon_0)\int_M G(x,U)dv_g\ .$$

Se $U \neq 0$, obtemos uma contradição com a validade da desigualdade de Sobolev em relação às funções F e G. Assim, suponha que $U \equiv 0$. Coloque $V_\alpha = \lambda_{\alpha,p}^{\frac{n-p}{p^2}} U_\alpha$. Vamos mostrar que, pelo fato da aplicação U ser nula, outra contradição surge. Dividimos a demonstração em alguns passos.

Como $U \equiv 0$, segue do resultado de decomposição em k-bubbles, Proposição F.1, que existem k-bubbles generalizados $(\mathbf{B}_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, ..., k$, tais que, a menos de subsequência,

$$V_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{B}_{j,\alpha} + R_\alpha$$

e

$$\frac{1}{n} \int_M |V_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g = \frac{l}{n} + o(1)$$

para todo α, onde $R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,p}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$. Veja que

$$\frac{1}{n} \int_M |V_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g \leq \frac{1}{n}.$$

Então, $l = 1$ ou $l = 0$. Mas $l = 0$ é impossível. Assim, $l = 1$ e existe um k-bubbles generalizado $(\mathbf{B}_\alpha)_\alpha$ tal que, a menos de subsequência,

$$V_\alpha = \mathbf{B}_\alpha + R_\alpha$$

para todo α, onde $R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,p}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$.

O primeiro passo é o seguinte.

Passo 1: *Existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que*

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-p}{p}} \sum_{i=1}^{k} |v_\alpha^i| \leq C$$

para todo α e todo $x \in M$, onde os x_α's são os centros dos 1-bubbles que definem os k-bubbles $(\boldsymbol{B}_\alpha)_\alpha$. Em particular, os $|V_\alpha|_1$'s são uniformemente limitados em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \{x_0\}$, e $v_\alpha^i \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, para todo i, quando $\alpha \to +\infty$, onde x_0 é o limite dos x_α's.

Demonstração: Seja Ψ_α a função dada por

$$\Psi_\alpha(x) = d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-p}{p}} \sum_{i=1}^{k} |v_\alpha^i(x)|.$$

então, o passo 1 é equivalente ao fato de que as funções Ψ_α's são uniformemente limitadas em $L^\infty(M)$. Sejam y_α's pontos em M tais que as funções Ψ_α's são máximas em y_α e $\Psi_\alpha \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$. A menos de subsequência, podemos assumir que $|v_\alpha^{i_0}(y_\alpha)| \geq |v_\alpha^i(y_\alpha)|$ para algum $i_0 = 1, ..., k$, e todo i. Coloque $\mu_\alpha = |v_\alpha^{i_0}(y_\alpha)|^{-\frac{p}{n-p}}$. Assim, $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$, e

$$\frac{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}{\mu_\alpha} \to +\infty\,. \tag{4.3}$$

Seja $\delta > 0$ menor que o raio de injetividade de (M, g). Para $i = 1, ..., k,$, definimos a função w_α^i em $B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$ colocando

$$w_\alpha^i(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} v_\alpha^i(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)),$$

onde $B(0, \delta\mu_\alpha^{-1})$ é uma bola Euclideana de raio $\delta\mu_\alpha^{-1}$ e com centro 0, e $\exp_{y_\alpha}$ é a aplicação exponencial em y_α. Dado $R > 0$ e $x \in B(0, R)$, a bola Euclideana de raio R e centro em 0, podemos escrever que

$$|w_\alpha^i(x)| \leq \frac{\mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \Psi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))}{d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{n-p/p}}$$

para todo i, quando α é suficientemente grande. Para cada $x \in B(0, R)$,

$$\begin{aligned} d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) &\geq d_g(x_\alpha, y_\alpha) - R\mu_\alpha \\ &\geq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}\right) d_g(x_\alpha, y_\alpha) \end{aligned}$$

quando α é suficientemente grande de forma que, de (4.3), $d_g(x_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) > 0$. Assim, graças a definição de y_α, obtemos que para qualquer i, e qualquer $x \in B(0, R)$,

$$|w_\alpha^i(x)| \leq k \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{d_g(x_\alpha, y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-p}{p}} \tag{4.4}$$

quando α é suficientemente grande. Em particular, de (4.3) e (4.4), a menos de subsequência, os w_α^i's são uniformemente limitados em qualquer compacto de $\mathbb{R}^n$ para todo i. Seja $W_\alpha = (w_\alpha^1, ..., w_\alpha^k)$. Temos que W_α é solução do sistema

$$-\Delta_{p,g_\alpha} w_\alpha^i + \frac{C_\alpha \mu_\alpha^p}{p} \partial_i \widetilde{G}_\alpha(x, W_\alpha) = \frac{M_{F_\alpha}^a m_{F_\alpha}^b}{p^*} \partial_i \widetilde{F}_\alpha(W_\alpha)$$

para algum a, b, e para todo i, onde

$$\widetilde{G}_\alpha(x, y) = G_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x), y)$$

e

$$g_\alpha(x) = (\exp_{y_\alpha}^* g)(\mu_\alpha x).$$

Para cada compacto K de $\mathbb{R}^n$, $g_\alpha \to \xi$ em $C^1(K)$ quando $\alpha \to +\infty$. Então, pela teoria elíptica, obtemos que as funções w_α^i's são uniformemente limitadas em $C_{loc}^{0,\theta}(\mathbb{R}^n)$, para todo i, onde $0 < \theta < 1$. Em particular, a menos de subsequência, podemos assumir que $w_\alpha^i \to w_i$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $\alpha \to +\infty$ para todo i, onde os w_i's são funções em $C^0(\mathbb{R}^n)$. As funções w_i's são limitadas em $\mathbb{R}^n$ por (4.4), e são tais que $|w_{i_0}(0)| = 1$, por construção. Sem perda de generalidade, podemos assumir que os w_i's estão em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ para todo i. Denote $W = (w_1, ..., w_k)$. De acordo com o que foi dito acima, $W \neq 0$. Por construção, para cada $R > 0$,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g = \int_{B(0,R)} |W_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_{g_\alpha}.$$

Segue que para qualquer $R > 0$,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |W|_{p^*}^{p^*} dx + \varepsilon_R(\alpha),$$

onde $\varepsilon_R(\alpha)$ é tal que $\lim_R \lim_\alpha \varepsilon_R(\alpha) = 0$, e os limites são tomados quando $\alpha \to +\infty$ e $R \to +\infty$. Temos também com (4.3) que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |\mathbf{B}_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g = 0$$

para todo $R > 0$. Assim,

$$\int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |V_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g \leq C \int_{B(y_\alpha, R\mu_\alpha)} |\mathbf{B}_\alpha|_{p^*}^{p^*} dv_g + o(1)$$

para todo $\alpha > 0$ e $R > 0$, onde $C > 0$ é independente de α e R, e $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Isso implica que, tomando os limites $\alpha \to +\infty$ e $R \to +\infty$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |W|_{p^*}^{p^*} dx = 0,$$

e itso é uma contradição, pois $W \neq 0$. Em particular, as funções Ψ_α's são uniformente limitadas em $L^\infty(M)$. Isso mostra que existe $C > 0$, independente de α, tal que

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-p}{p}} \sum_{i=1}^k |v_\alpha^i| \leq C$$

para todo α e todo $x \in M$. Agora, se $x_0 \in M$ é o limite dos x_α's, esta última desigualdade implica que as funções $|V_\alpha|_1$'s são uniformemente limitadas em cada compacto de $M \setminus \{x_0\}$. Pela teoria elíptica, e da convergência $V_\alpha \to 0$ em $L^p(M)$, obtemos que $|V_\alpha|_1 \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$ quando $\alpha \to +\infty$.

Observe que, pela definição da aplicação V_α, o passo acima continua sendo válido para U_α.

Passo 2: *Para todo $\delta > 0$, temos que*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g}{\int_M |U_\alpha|_1^p dv_g} = 0\ .$$

Demonstração: Do sistema (S_α) obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{M\backslash B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g &\leq C\sum_{i=1}^k \int_M \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i} u_\alpha^i dv_g \\ &\leq C\sup_M |U_\alpha|_1 \int_M |U_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} dv_g\,,\end{aligned}$$

onde C é independente de α. Desta desigualdade e das esimativas de De Giorgi-Nash-Moser, encontramos que

$$\int_{M\backslash B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g \leq C\int_M |U_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} dv_g \sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_\alpha^i|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

Usando desigualdade de interpolação, segue que

$$\int_{M\backslash B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g \leq C\int_M |U_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} dv_g \sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_\alpha^i|^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\int_M |U_\alpha|_1^{p^*-1} dv_g \left(\int_M |U_\alpha|_1^p dv_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_M |U_\alpha|_1^p dv_g\right)^{\frac{n}{p^2}}\ .$$

Assim,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\int_{M\backslash B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g}{\int_M |U_\alpha|_1^p dv_g} = 0\ ,$$

pois $p^2 < n$.

Passo 3: Seja $\delta > 0$ pequeno, e considere uma função suave η tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ em $(0,\delta)$, $\eta = 0$ em $(2\delta, +\infty)$ e $|\nabla\eta| \leq C/\delta$ para alguma constante $C > 0$ independente de δ. Defina $\eta_\alpha(x) = \eta(d_g(x, x_\alpha))$. No que segue, várias constantes diferentes e positivas, que são independentes de δ e α, são denotadas por C. Como $x_\alpha \to x_0$ quando $\alpha \to +\infty$, a expansão de Cartan da métrica g providenciam, para α grande,

$$(1 - Cd_g(x,x_\alpha)^2)dv_g \leq dv_\xi \leq (1 + Cd_g(x,x_\alpha)^2)dv_g \tag{4.5}$$

e

$$|\nabla(\eta_\alpha u_\alpha^i)|_\xi^p \leq |\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|^p(1 + Cd_g(x,x_\alpha)^2)\,. \tag{4.6}$$

Segue de (4.5) que

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} F_\alpha(\eta_\alpha U_\alpha)\ dv_\xi \geq 1 - \int_{M\backslash B_g(x_\alpha,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\ dv_g - C\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} F_\alpha(U_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2\ dv_g\ . \tag{4.7}$$

Do passo 1, temos que

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\ dv_g = o(\|\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|\|_p^p),$$

e

$$\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} F_\alpha(U_\alpha) d_g(x,x_\alpha)^2\ dv_g \le C\delta^{2-p}\|\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|\|_p^p\ .$$

Daí e de (4.7),

$$\left(\int_{B(x_\alpha,2\delta)} F_\alpha(\eta_\alpha U_\alpha)\ dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \ge 1 - o(\|\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|\|_p^p) - C\delta^{2-p}\|\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|\|_p^p\ . \tag{4.8}$$

Note que (4.6) também implica que

$$\mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla(\eta_\alpha u_\alpha^i)|_\xi^p\ dv_\xi \le \mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|_g^p\ dv_g \tag{4.9}$$

$$+C\int_{B(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|^p d_g(x_\alpha,x)^2\ dv_g\ .$$

Independentemente, usando o sistema de equações que a aplicação U_α satisfaz, $\int_M F_\alpha(U_\alpha)dv_g = 1$ e integração por partes, encontramos

$$\mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\sum_{i=1}^k\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} |\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|^p\ dv_g \le 1 - \int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\ dv_g$$

$$-(\mathcal{B}_0(p,F,G,g)+\varepsilon_0)\int_{B_g(x_\alpha,\delta)} G_\alpha(x,U_\alpha)\ dv_g + C\delta^{-p}\sum_{i=1}^k\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} (u_\alpha^i)^p\ dv_g$$

$$+C\sum_{i=1}^k\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} |\nabla_g(U_\alpha)^i|^p\ dv_g\ .$$

Relembre que

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\ dv_g = o(\|\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|\|_p^p)\ .$$

Agora, considere uma função suave ζ tal que $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 0$ em $(0,\delta)$, $\zeta = 1$ em $(\delta,+\infty)$ e defina $\zeta_\alpha(x) = \zeta(d_g(x,x_\alpha))$. Multiplicando $\zeta_\alpha^p u_\alpha^i$ pelo sistema satisfeito por U_α, integrando por partes, usando desigualdade de Young, o passo 2 e as estimativas feitas acima, encontramos

$$\sum_{i=1}^{k}\int_M \zeta_\alpha^p|\nabla_g u_\alpha^i|^p\,dv_g \le C\sum_{i=1}^{k}\int_M \zeta_\alpha^p|u_\alpha^i|^{p^*}\,dv_g + C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta/2)}|u_\alpha^i|^p\,dv_g$$

$$\le C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta/2)}|u_\alpha^i|^{p^*}\,dv_g + C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta/2)}|u_\alpha^i|^p\,dv_g = o(\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p),$$

tal que

$$\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)}|\nabla_g U_\alpha|^p\,dv_g = o(\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p)\ . \tag{4.10}$$

Assim,

$$\mathcal{A}_0(p,F_\alpha,G_\alpha,g)\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}|\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|^p\,dv_g \le 1 \tag{4.11}$$

$$-\mathcal{B}_0(p,F,G,g)\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,\delta)}|u_\alpha^i|^p\,dv_g - \varepsilon_0\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,\delta)}|u_\alpha^i|^p\,dv_g + o(\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p)\,.$$

Agora, multiplicando $\eta_\alpha^p u_\alpha^i$ pelo sistema satisfeito por U_α, onde η_α foi dada no início deste passo, integrando por partes e usando novamente a desigualdade de Young, o passo 2 e as estimativas feitas acima, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}\eta_\alpha^p|\nabla_g u_\alpha^i|^p d_g(x,x_\alpha)^2\,dv_g \le C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}|u_\alpha^i|^{p^*}d_g(x,x_\alpha)^2\,dv_g$$

$$+C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)}u_\alpha^i|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-1}\,dv_g$$

$$+C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}d_g(x,x_\alpha)^{2-p}\eta_\alpha u_\alpha^i\eta_\alpha^{p-1}|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-1}d_g(x,x_\alpha)^{p-1}\,dv_g$$

$$\le C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}|u_\alpha^i|^{p^*}d_g(x,x_\alpha)^2\,dv_g + C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)}|u_\alpha^i|^p\,dv_g$$

$$+C\sum_{i=1}^{k}\int_{M\setminus B_g(x_\alpha,\delta)}|\nabla_g u_\alpha^i|^p\,dv_g$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}\eta_\alpha^p|\nabla_g u_\alpha^i|^p d_g(x,x_\alpha)^2\, dv_g + C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} d_g(x,x_\alpha)^{2-p}|u_\alpha^i|^p\, dv_g,$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}|\nabla_g(\eta_\alpha u_\alpha^i)|^p d_g(x,x_\alpha)^2\, dv_g \leq C\delta^{2-p}\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p + o(\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p)\ . \tag{4.12}$$

Juntando (4.8)-(4.12) e a desigualdade de Sobolev Euclideana

$$\left(\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)} F_\alpha(\eta_\alpha U_\alpha)\, dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F_\alpha,n)\int_{B_g(x_\alpha,2\delta)}|\nabla_g(\eta_\alpha U_\alpha)|^p\, dv_\xi,$$

obtemos que

$$(\mathcal{B}_0(p,F,G,g)+\varepsilon_0)\sum_{i=1}^{k}\int_{B_g(x_\alpha,\delta)}|u_\alpha^i|^p\, dv_g \leq C\delta^{2-p}\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p + o(\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p)\ .$$

Dividindo ambos os lados desta última desigualdade por $\|\sum_{i=1}^{k}|u_\alpha^i|\|_p^p$, tomando o limite $\alpha\to+\infty$ e usando novamente o passo 2, encontramos

$$(\mathcal{B}_0(p,F,G,g)+\varepsilon_0)\leq C\delta^{2-p}$$

para todo $\delta>0$. Isso é uma contradição. ■

4.3 Demonstração do Teorema 2.3.3

Suponha primeiramente que a função G seja de classe C^1 em $\mathbb{R}^k$. Seja $(\alpha) \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $0 < \alpha < \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$ e $\alpha \to \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$. Considere o funcional

$$J_\alpha(U) = \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^2 \, dv_g + \alpha \int_M G(x, U) \, dv_g$$

definido em $\Lambda = \{U \in H_k^{1,2}(M) : \int_M F(U) \, dv_g = 1\}$. Da definição de $\mathcal{B}_0(2, F, G, g)$, segue que

$$\lambda_\alpha := \inf_{U \in \Lambda} J_\alpha(U) < 1 \, .$$

Mas, da Proposição E.1, isso implica na existência de um minimizador $U_\alpha \in \Lambda$ para λ_α. Assim, U_α satisfaz o sistema

$$-\mathcal{A}_0(2, F, G, g)\Delta_g u_\alpha^i + \frac{1}{2}\alpha \frac{\partial G(x, U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_\alpha}{2^*} \frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i} \quad i = 1, ..., k \quad (S_\alpha)$$

Como nas demonstrações anteriores, existe uma aplicação $U \in H_k^{1,2}(M)$ tal que

$$\int_M F(U) dv_g \geq \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^2 dv_g + \mathcal{B}_0(2, F, G, g) \int_M G(x, U) dv_g \, .$$

Se $U \neq 0$, temos que U é uma aplicação extremal. Suponha, por contradição, que $U \equiv 0$. Novamente do resultado de decomposição em bubbles, temos que, a menos de subsequência,

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{B}_{j,\alpha} + \mathbf{R}_\alpha$$

para todo α, onde $(\mathbf{B}_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, ..., l$, são k-bubbles generalizados e $(\mathbf{R}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência em $H_k^{1,2}(M)$ que converge fortemente para 0 em $H_k^{1,2}(M)$. Aqui ainda valem os passos 1 e 2 da demonstração do Teorema 2.3.1. Seguindo um raciocínio análogo ao do passo 3 na demonstração do Teorema 2.3.1, temos também que

$$(\alpha - \mathcal{B}_\varepsilon) \, m_G \int_M |\eta V_\alpha|_2^2 \, dv_g \leq o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \, ,$$

isto é,

$$m_G \left(\alpha - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(p, F, G, g)}{m_{F,G}} Scal_g(x_0) \right) \frac{\int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \leq o(1) + \varepsilon M \, .$$

Tomando o limite $\alpha \to \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$, obtemos uma contradição pois

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(p, F, G, g)}{m_{F,G}} Scal_g(x_0) > 0$$

e

$$\frac{\int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \to 1 \, .$$

Assim, no caso em que a função G é de classe C^1 na segunda variável, obtemos aplicações extremais. Agora, no caso geral em que G é apenas contínua, tome uma sequência $(G_\alpha)_\alpha$ tal que:

a. As funções G_α são de classe C^1 em $\mathbb{R}^k$ e positivas;

b. As funções G_α são 2-homogênea em $\mathbb{R}^k$;

c. $G_\alpha \to G$ em C^0_{loc}.

Neste caso, usando o Teorema 2.3.1, temos que $m_{F,G_\alpha} \to m_{F,G}$ e $\mathcal{B}_0(2, F, G_\alpha, g) \to \mathcal{B}_0(2, F, G, g)$. Assim, para $\alpha > 0$ grande,

$$m_{F,G_\alpha} > \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2, F, G_\alpha, g)}{\mathcal{B}_0(2, F, G_\alpha, g)} \max_M Scal_g \, .$$

Como G_α é de classe C^1 na segunda variável, segue do caso anterior que existe uma sequência $(U_\alpha)_\alpha$ em $H^{1,2}_k(M)$ tal que

$$-\mathcal{A}_0(2, F, G_\alpha, g)\Delta_g u^i_\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{B}_0(2, F, G_\alpha, g)\frac{\partial G_\alpha(x, U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{1}{2^*}\frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i} \quad i = 1, ..., k \, .$$

Da limitação da sequência $(U_\alpha)_\alpha$, existe $U \in H^{1,2}_k(M)$ tal que

$$\int_M F(U) dv_g \geq \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \int_M |\nabla_g U|^2 dv_g + \mathcal{B}_0(2, F, G, g) \int_M G(x, U) dv_g \, .$$

Se $U \neq 0$, obtemos que U é uma aplicação extremal. Suponha que $U \equiv 0$. Novamente do resultado de decomposição em bubbles, temos que, a menos de subsequência,

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{B}_{j,\alpha} + \mathbf{R}_\alpha$$

para todo α, onde $(\mathbf{B}_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, ..., l$, são k-bubbles generalizados e $(\mathbf{R}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência em $H^{1,2}_k(M)$ que converge fortemente para zero em $H^{1,2}_k(M)$. Novamente, aqui ainda valem os passos 1 e 2 da demonstração do Teorema 2.3.1. Mais ainda,

$$(\mathcal{B}_0(2, F, G_\alpha, g) - \mathcal{B}_\varepsilon) \, m_G \int_M |\eta V_\alpha|_2^2 \, dv_g \leq o(1) \int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g \, ,$$

isto é,

$$\left(\mathcal{B}_0(2, F, G_\alpha, g) - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2, F, G_\alpha, g)}{m_{F,G_\alpha}} Scal_g(x_0)\right) \frac{\int_M \eta^2 |V_\alpha|_2^2 dv_g}{\int_M |V_\alpha|_2^2 dv_g} \leq o(1) + \varepsilon M.$$

Agora, tomando $\alpha \to +\infty$, obtemos uma contradição. ∎

4.4 Demonstração do Teorema 2.3.4

Considere o funcional

$$J_\alpha(U) = \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U|^p dv_g + \alpha \int_M G(x,U)dv_g$$

onde $0 < \alpha < \mathcal{B}_0(p,F,G,g)$ e $\alpha \to \mathcal{B}_0(p,F,G,g)$. Coloque

$$\lambda_{\alpha,p} = \inf_{U\in\Lambda_p} J_\alpha$$

onde

$$\Lambda_p = \left\{ U \in H_k^{1,p}(M); \int_M F(U)dv_g = 1 \right\}.$$

Assim, $\lambda_{\alpha,p} < 1$ e, consequentemente, existe um minimizador $U_\alpha \in \Lambda_p$ para J_α satisfazendo o sistema

$$-\mathcal{A}_0(p,F,G,g)\Delta_p u_\alpha^i + \frac{1}{p}\alpha\frac{\partial G(x,U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_{\alpha,p}}{p^*}\frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i}.$$

Note que

$$\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p dv_g \le \mathcal{A}_0(p,F,G,g)^{-1}\lambda_{\alpha,p}.$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^p \le CF(U_\alpha)^{\frac{p}{p^*}}$$

implica que, usando a desigualdade de Hölder,

$$\int_M \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^p dv_g \le C\int_M F(U_\alpha)^{\frac{p}{p^*}} dv_g$$

$$\le C\left(\int_M F(U_\alpha)^{\frac{p}{p^*}} dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = C.$$

Portanto, $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,p}(M)$. Aqui, obtemos que se $U \neq 0$, então U é aplicação extremal. Suponha, então, que $U \equiv 0$. Usando novamente o resultado de decomposição em bubbles, como na demonstração do resultado de continuidade em relação às funções no caso $p \neq 2$, obtemos os seguintes fatos:

Primeiro: *A menos de subsequência:*

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^l \mathbf{B}_\alpha + R_\alpha,$$

onde $R_\alpha \to 0$ fortemente em $H_k^{1,p}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$.

Segundo: *Coloque $V_\alpha = \lambda_\alpha^{\frac{n-p}{p^2}} U_\alpha$. Existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que*

$$d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n-p}{p}} \sum_{i=1}^{k} |v_\alpha^i| \leq C$$

para todo α e todo $x \in M$, onde os x_α's são os centros dos 1-bubbles que definem os k-bubbles $(\boldsymbol{B}_\alpha)_\alpha$. Em particular, os $|V_\alpha|_1$'s são uniformemente limitados em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \{x_0\}$, e $v_\alpha^i \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})$, para todo i, quando $\alpha \to \infty$, onde x_0 é o limite dos x_α's.

Terceiro: *Para todo $\delta > 0$ pequeno,*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{M \setminus B(x_0,\delta)} |U_\alpha|_p^p dv_g}{\int_M |U_\alpha|_1^p dv_g} = 0 \ .$$

Argumento final: Usando os fatos acima, obtemos que para todo $\delta > 0$,

$$\alpha \mathcal{A}_0(p, F, G, g)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_g(x_\alpha,\delta)} (u_\alpha^i)^p \, dv_g \leq C\delta^{2-p} ||U_\alpha||_p^p + o(\| \sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i| \|_p^p) \ .$$

Assim, dividindo ambos os lados desta última desigualdade por $o(\| \sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i| \|_p^p)$, tomando o limite $\alpha \to +\infty$ e usando novamente o terceiro fato, encontramos

$$\mathcal{B}_0(p, F, G, g) \leq C\delta^{2-p}$$

para todo $\delta > 0$. E isto é claramente uma contradição. ■

4.5 Demonstração do Teorema 2.3.5

Novamente, veja que a demonstração do Teorema 2.3.1 foi feita considerando que $g_\alpha = g$ para todo α. No caso mais geral em que $g_\alpha \to g$ na topologia C^2, basta tomarmos os cuidados necessários, em relação à variação das métricas g_α, como foi feito na demonstração do Teorema 1.3.2 no caso escalar. Desta forma, a demonstração do Teorema 2.3.5 é uma mistura dos argumentos encontrados nas demonstrações dos Teoremas 1.3.2 e 2.3.1. ■

4.6 Demonstração do Teorema 2.3.6

Note que a demonstração do Teorema 2.3.2 foi feita considerando que $g_\alpha = g$ para todo α. Quando o caso é diferente mas com convergência $g_\alpha \to g$ na topologia C^2, basta tomarmos os cuidados necessários, em relação à variação das métricas g_α, como foi feito na demonstração do Teorema 1.3.3 no caso escalar. Desta forma, a demonstração do Teorema 2.3.6 é uma mesclagem dos argumentos encontrados nas demonstrações dos Teoremas 1.3.3 e 2.3.2. ∎

CAPÍTULO 5

Considerações finais

Neste capítulo, apresentaremos alguns exemplos mostrando que as hipóteses assumidas nos Teoremas 2.3.3 e 2.3.4 não são necessárias. Destacaremos também exemplos de desigualdades de Sobolev vetoriais que não possuem aplicação extremal. Por fim, apresentaremos as conclusões finais.

5.1 Exemplos e contra-exemplos

Começamos esta seção com uma proposição sobre estimativas para a segunda melhor constante da teoria vetorial $\mathcal{B}_0(p, F, G, g)$ em função da correspondente da teoria escalar $B_0(p, g)$. Nossos exemplos e contra-exemplos serão motivados por essas estimativas. No que segue, as funções F e G serão assumidas apenas contínuas, homogêneas e positivas.

Proposição 5.1.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq 2$. Para cada $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$, temos*

$$\frac{M_F^{p/p^*} B_0(p, g)}{\max_{x \in M} G(x, t_0)} \leq \mathcal{B}_0(p, F, G, g) \leq \frac{M_F^{p/p^*} B_0(p, g)}{m_G}$$

onde

$$m_G = \min_{M \times \mathbb{S}_p^{k-1}} G\ .$$

Em particular, se existe $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$ e $m_G = \max\limits_{x \in M} G(x, t_0)$, então

$$\mathcal{B}_0(p, F, G, g) = \frac{M_F^{p/p^*} B_0(p, g)}{m_G}$$

e, além disso, se $(J^p_{g,opt}(1))$ possui função extremal, então $(J^p_{g,opt}(F, G))$ possui aplicação extremal.

Demonstração: Temos que, para cada $U \in H_k^{1,p}(M)$,

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le M_F^{p/p^*} A_0(p,g) \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \mathcal{B}_0(p,F,G,g) \int_M G(x,U)\, dv_g \,.$$

Assim, tomando $U = ut_0$ com $u \in H^{1,p}(M)$, obtemos

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A_0(p,g) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + \mathcal{B}_0(p,F,G,g) M_F^{-p/p^*} \max_{x \in M} G(x,t_0) \int_M |u|^p \, dv_g \,.$$

Da definição de $B_0(p,g)$, encontramos então

$$\mathcal{B}_0(p,F,G,g) \ge \frac{M_F^{p/p^*} B_0(p,g)}{\max_{x\in M} G(x,t_0)} \,.$$

Por outro lado, temos da demonstração da Proposição 2.2.1 que

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le A_0(p,g) M_F^{p/p^*} \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \frac{M_F^{p/p^*} B_0(p,g)}{m_G} \int_M G(x,U)\, dv_g.$$

para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$. Então, da definição de $\mathcal{B}_0(p,F,G,g)$, temos

$$\mathcal{B}_0(p,F,G,g) \le \frac{M_F^{p/p^*} B_0(p,g)}{m_G} \,.$$

■

Exemplo 1: Existência de aplicações extremais para $p = 2$

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \ge 4$ tal que

$$B_0(2,g) = \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2,g) \max_M Scal_g$$

e $(J^2_{g,opt}(1))$ possui função extremal.

Seja $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $G(x,t) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)|t_i||t_j|$, onde A_{ij} são funções contínuas não-negativas tal que $A_{i_0 i_0} > 0$ não depende de x e $A_{ii} \ge A_{i_0 i_0}$ para algum i_0. Claramente,

$$A_{i_0 i_0}|t|^2 \le \sum_{i=1}^k A_{ii}(x)|t_i|^2 \le \sum_{i,j} A_{ij}(x)|t_i||t_j| \,.$$

Assim, $m_G = A_{i_0 i_0}$.

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e 2^*-homogênea tal que $F(e_{i_0}) = M_F$, onde e_{i_0} é o i_0-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^k$. Então, pela Proposição 5.1.1,

$$\mathcal{B}_0(2,F,G,g) = \frac{M_F^{2/2^*} B_0(2,g)}{A_{i_0 i_0}} .$$

Seja $u_0 \in H^{1,2}(M)$ uma função extremal de $(J^2_{g,opt}(1))$. Então, como pode ser verificado facilmente, $U = ue_{i_0}$ é uma aplicação extremal para $J^2_{g,opt}(F,G)$.

Note que nesse exemplo, a desigualdade estrita no Teorema 2.3.3 e a regularidade da função F não foram necessárias. ■

Exemplo 2: Existência de aplicações extremais para $1 < p < 2$

Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$ e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea que não depende de $x \in M$. Considere também uma função $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ contínua, positiva e p^*-homogênea. Dado $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $m_G = G(t_0)$, escolha uma aplicação linear injetiva $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tal que $A(t_1) = t_0$, onde $t_1 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ é tal que $F(t_1) = M_F$. Então, pela Proposição 5.1.1, $J^p_{g,opt}(F \circ A, G)$ possui aplicação extremal.

Note que nesse exemplo, a regularidade das funções F e G não foi necessária. ■

Exemplo 3: Não-existência de aplicações extremais para $p = 2$

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 4$ tal que

$$B_0(2,g) = \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2,g) \max_M Scal_g$$

e $(J^2_{g,opt})$ não possui função extremal. Seja $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $G(x,t) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)|t_i||t_j|$, onde A_{ij} são funções contínuas não-negativas tal que $A_{i_0 i_0} > 0$ não depende de x e $A_{ii} \geq A_{i_0 i_0}$ para algum i_0. Claramente,

$$A_{i_0 i_0}|t|^2 \leq \sum_{i=1}^k A_{ii}(x)|t_i|^2 \leq \sum_{i,j} A_{ij}(x)|t_i||t_j| .$$

Assim, $m_G = A_{i_0 i_0}$.

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e 2^*-homogênea tal que $F(e_{i_0}) = M_F$, onde e_{i_0} é o i_0-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^k$. Então, pela Proposição 5.1.1,

$$\mathcal{B}_0(2,F,G,g) = \frac{M_F^{2/2^*} B_0(2,g)}{A_{i_0 i_0}} .$$

Suponha, por contradição, que existe uma aplicação extremal U_0 de $(J^2_{g,opt}(F,G))$. Então,

$$\mathcal{B}_0(2,F,G,g)\int_M \sum_{i,j=1}^k A_{ij}|u_0^i||u_0^j|\, dv_g = \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} - M_F^{2/2^*} A_0(2,g)\int_M |\nabla_g U_0|^2\, dv_g$$

$$\leq M_F^{2/2^*}\sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_0^i|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} - M_F^{2/2^*} A_0(2,g)\int_M |\nabla_g U_0|^2\, dv_g$$

$$\leq M_F^{2/2^*} A_0(2,g)\sum_{i=1}^k \int_M |\nabla u_0^i|^2\, dv_g + M_F^{2/2^*} B_0(2,g)\sum_{i=1}^k \int_M |u_0^i|^2\, dv_g$$

$$-M_F^{2/2^*} A_0(2,g)\int_M |\nabla_g U_0|^2\, dv_g \leq \frac{M_F^{2/2^*} B_0(2,g)}{A_{i_0 i_0}}\int_M \sum_{i,j=1}^k A_{ij}|u_0^i||u_0^j|\, dv_g\,,$$

pois

$$A_{i_0 i_0}\sum_{i=1}^k |u_0^i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^k A_{ij}|u_0^i||u_0^j|\,.$$

Isto implica que

$$\sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_0^i|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} = A_0(2,g)\sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_0^i|^2\, dv_g + B_0(2,g)\int_M \sum_{i=1}^k |u_0^i|^2\, dv_g\,. \quad (5.1)$$

Independentemente, segue da desigualdade de Sobolev ótima escalar clássica, $(J^2_{g,opt}(1))$, que

$$\left(\int_M |u_0^i|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq A_0(2,g)\int_M |\nabla_g u_0^i|^2\, dv_g + B_0(2,g)\int_M |u_0^i|^2\, dv_g\,, \quad (5.2)$$

para cada i. Portanto, de (5.1) e (5.2), existe $j \in \{1,...,k\}$ tal que $u_0^j \neq 0$ e

$$\left(\int_M |u_0^j|^{2^*}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} = A_0(2,g)\int_M |\nabla_g u_0^j|^2\, dv_g + B_0(2,g)\int_M |u_0^j|^2\, dv_g\,,$$

contradizendo nossa hipótese inicial de que $(J^2_{g,opt}(1))$ não possui função extremal. ■

5.2 Conclusões finais

Um série de trabalhos têm sido dedicados ao estudo de desigualdades de Sobolev ótimas ao longo dos últimos 30 anos. Isso se deve principalmente à sua conexão com alguns problemas geométricos e analíticos importantes. De fato, tais desigualdades estão relacionadas, por exemplo, com o problema de Yamabe, desigualdades isoperimétricas e propriedades de não colapsamento do fluxo de Ricci. Uma teoria escalar de melhores constantes associadas à desigualdade de Sobolev clássica foi então desenvolvida em paralelo ao estudo de alguns problemas geométricos. Resultados importantes sobre a validade de desigualdades de Sobolev ótimas, existência ou não-existência de funções extremais, caracterização e compacidade de funções extremais foram obtidos nas últimas décadas.

Nossas primeiras investigações foram concentradas no estudo de dependência contínua de melhores constantes em relação ao parâmetro e à geometria, e da compacidade de funções extremais. Fornecemos assim contribuições à teoria escalar de melhores constantes: mostramos que a segunda melhor constante de Sobolev depende continuamente tanto em relação ao parâmetro quanto à geometria, fato até então desconhecido na literatura, e estendemos alguns resultados sobre compacidade de funções extremais.

Toda a teoria escalar de melhores constantes, incluindo nossos resultados sobre dependência contínua e compacidade de funções extremais, se coloca naturalmente a um contexto vetorial. Parte dessa tese foi então dedicada à teoria vetorial de melhores constantes. Observamos que alguns fatos conhecidos da teoria escalar são facilmente estendíveis ao caso vetorial. Por outro lado, outros fatos se mostraram mais complexos e exigiram o desenvolvimento de ferramentas disponíveis apenas no contexto escalar. Além de contribuir com essas ferramentas, fornecemos também condições suficientes para a existência de aplicações extremais no caso $p = 2$, e mostramos que a existência de aplicações extremais sempre se verifica no caso $p \neq 2$. Resultados de compacidade de aplicações extremais, bem como de dependência contínua, também foram estabelecidos.

Embora a teoria vetorial de melhores constantes, desenvolvida até aqui, já estende muito do que há na teoria escalar, algumas questões surgem nesse novo contexto. Por exemplo, fornecemos uma condição suficiente para a existência de aplicações extremais para $p = 2$, com F de classe C^1 e G apenas contínua, e para $p \neq 2$, com F e G de classe C^1. A partir dos exemplos e contra-exemplos apresentados na seção anterior, esperamos que alguns resultados sejam válidos para funções F e G apenas contínuas. Acreditamos também em resultados mais gerais de não-existência de aplicações extremais que dependam apenas da geometria e não das funções F e G, como mostrado no exemplo 3 da seção anterior. Para isso, a introdução da noção de aplicações críticas forneça um caminho nesta direção. Outra questão interessante é a seguinte:

"Dadas funções F e G, podemos garantir que $(J^2_{g,opt}(F,G))$ possui aplicação extremal se, e somente se, existe $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$, com $F(t_0) = M_F$, tal que $(J^2_{g,opt}(G(\cdot,t_0)))$ possui função extremal?"

O exemplo 3 da seção anterior mostra que de fato isso ocorre em um caso particular. Entretanto, não está claro que isso ocorra em geral. O que sabemos é que se existe $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$, com $F(t_0) = M_F$, tal que

$$B_0(2, G(\cdot, t_0), g) = M_F^{-2/2^*} \mathcal{B}_0(2, F, G, g)\,,$$

então a existência de função extremal para $(J^2_{g,opt}(G(\cdot, t_0)))$ implica na existência de aplicação extremal para $(J^2_{g,opt}(F, G))$. Porém, mesmo no caso em que a igualdade acima se verifica, não é claro que a não-existência de funções extremais para $(J^2_{g,opt}(G(\cdot, t_0)))$ implica na não-existência de aplicações extremais para $(J^2_{g,opt}(F, G))$. Uma outra situação que pode ocorrer, é as desigualdades

$$M_F^{-2/2^*} \mathcal{B}_0(2, F, G, g) > B_0(2, G(\cdot, t_0), g) \min_M G(\cdot, t_0) > \frac{n-2}{4(n-1)} A_0(2, g) \max_M Scal_g$$

se verificarem para algum $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$. Nesse caso, segue da teoria escalar que $(J^2_{g,opt}(G(\cdot, t_0)))$ possui função extremal. Todavia, a desigualdade estrita acima não garante a existência de aplicações extremais para $(J^2_{g,opt}(F, G))$, pois a princípio pode acontecer que

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_M G(\cdot, t_1) = \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \max_M Scal_g$$

para algum $t_1 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$ com $F(t_1) = M_F$, e, nesse caso, o Teorema 2.3.3 não se aplica. Essas observações mostram que existe um leque de problemas interessantes e desafiadores.

Para finalizar, listamos outras questões que surgem a partir dos resultados dessa tese.

(a) Dado que a curvatura escalar é constante, podemos garantir que $(J^2_{g,opt}(F, G))$ possui aplicação extremal independentemente da escolha das funções F e G?

(b) Para quaisquer funções F e G, existe uma métrica h conforme a métrica dada g tal que $(J^2_{h,opt}(F, G))$ possui aplicação extremal?

(c) A condição suficiente do Teorema 2.3.3 também é uma condição suficiente quando $n = 3$?

(d) A desigualdade $(J^2_{g,opt}(F, G))$ possui aplicação extremal quando $n = 3$?

(e) Suponha que existe $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$, com $F(t_0) = M_F$, tal que

$$\mathcal{B}_0(2, F, G, g) \min_M G(\cdot, t_0) = \frac{n-2}{4(n-1)} \mathcal{A}_0(2, F, G, g) \max_M Scal_g\,.$$

O conjunto das aplicações extremais, normalizadas por $\int_M F(U) dv_g = 1$, é compacto na topologia C^0?

APÊNDICE A

Desigualdades de Sobolev uniformes

Neste primeiro apêndice, destacamos uma versão uniforme em relação à p da desigualdade de Sobolev Riemanniana escalar assintoticamente ótima.

Precisamente, temos:

Proposição A.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe uma constante $D_\varepsilon > 0$, dependendo apenas de ε e g, tal que para todo $p \in [1, n-\varepsilon]$ e $u \in H^{1,p}(M)$,*

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p,g)+\varepsilon)\int_M |\nabla_g u|^p\, dv_g + D_\varepsilon \int_M |u|^p\, dv_g\ .$$

Demonstração: Como M é compacta, podemos escolher um atlas finito (Ω_k, ψ_k) sobre M, $k = 1, \ldots, m$, tal que as componentes de g, em cada carta, satisfazem

$$(1-\varepsilon_1)\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq (1+\varepsilon_1)\delta_{ij}, \tag{A.1}$$

onde $\varepsilon_1 = o(\varepsilon)$. Considere uma partição da unidade (η_k) subordinada à cobertura $M = \cup_k \Omega_k$. Claramente, existe uma constante $C > 0$, independente de p, tal que

$$|\nabla_g(\eta_k^{1/p})| \leq C\ . \tag{A.2}$$

Escolhendo $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno, e usando que $p \in [1, n-\varepsilon]$, segue de (A.1) que

$$\left(\int_M |\eta_k^{1/p} u|^{p^*}\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p,g)+\varepsilon/2)\int_M |\nabla_g(\eta_k^{1/p} u)|^p\, dv_g \tag{A.3}$$

para todo $u \in C^\infty(M)$ e $k = 1, ..., m$. Assim, obtemos

$$\left(\int_M |u|^{p^*}\, dv_g\right)^{p/p^*} = \left(\int_M (u^p)^{p^*/p}\, dv_g\right)^{p/p^*} = ||u^p||_{L^{\frac{p^*}{p}}(M)} = \left\|\sum_{k=1}^m \eta_k u^p\right\|_{L^{\frac{p^*}{p}}(M)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} ||\eta_k u^p||_{L^{\frac{p^*}{p}}(M)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_M (\eta_k^{1/p} u)^{p^*} \, dv_g \right)^{p/p^*}$$

$$\leq (A_0(p,g) + \varepsilon/2) \sum_{k=1}^{m} \int_M |\nabla_g(\eta_k^{1/p} u)|^p \, dv_g$$

$$\leq (A_0(p,g) + \varepsilon/2) \sum_{k=1}^{m} \int_M \left(\eta_k^{1/p} |\nabla_g u| + |u| |\nabla_g(\eta_k^{1/p})| \right)^p \, dv_g$$

$$\leq (A_0(p,g)+\varepsilon/2) \int_M \sum_{k=1}^{m} \left(|\nabla_g u|^p \eta_k + p\mu_p |\nabla_g u|^{p-1} |\nabla_g(\eta_k^{1/p})| \eta_k^{\frac{(p-1)}{p}} |u| + \mu_p |u|^p |\nabla_g(\eta_k^{1/p})|^p \right) \, dv_g,$$

onde usamos que $\mu_p = \max\{1, 2^{p-2}\}$ satisfaz

$$(1+r)^p \leq 1 + p\mu_p r + \mu_p r^p$$

para todo $r \geq 0$. Escolha $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $p \in [1, n-\varepsilon]$,

$$(A_0(p,g) + \varepsilon/2)(1+\varepsilon_0) \leq (A_0(p,g) + \varepsilon) \; .$$

Independentemente, a desigualdade de Young implica

$$p r^{p-1} \gamma \leq \lambda(p-1) r^p + \lambda^{1-p} \gamma^p$$

para qualquer r, γ, $\lambda \geq 0$. Tomando $r = |\nabla_g u|$, $\gamma = |u|$ e $\lambda = \frac{\varepsilon_0}{(p-1)\mu_p m C}$, onde C é dado em (A.2), obtemos

$$p\mu_p m C |\nabla_g u|^{p-1} |u| \leq \varepsilon_0 |\nabla_g u|^p + D_p |u|^p,$$

onde

$$D_p = \mu_p m C \left(\frac{\varepsilon_0}{(p-1)\mu_p m C} \right)^{1-p} \; .$$

Portanto, para qualquer $u \in C^\infty(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p,g) + \varepsilon/2)(1+\varepsilon_0) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B_p \int_M |u|^p \, dv_g$$

$$\leq (A_0(p,g) + \varepsilon) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + B_p \int_M |u|^p \, dv_g,$$

onde

$$B_p = (A_0(p,g) + \varepsilon/2)(D_p + \mu_p m C^p)\ .$$

Notando que

$$D_\varepsilon \sup_{p\in[1,n-\varepsilon]} B_p < +\infty,$$

segue a conclusão desejada. ■

APÊNDICE B

Princípios de concentração

Neste apêndice, apresentaremos dois princípios de concentração: uma versão escalar e outra vetorial.

B.1 Princípio de concentração I

O princípio de concentração a seguir é uma versão em que o parâmetro p varia e sua demonstração requer a Proposição A.1.

Proposição B.1.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$ e $1 \leq q < n$. Se $(u_p)_p \subset H^{1,q}(M)$ é uma sequência tal que*

$$u_p \rightharpoonup u \text{ em } H^{1,q}(M),$$

$$|\nabla_g u_p|^p \, dv_g \rightharpoonup \mu,$$

$$|u_p|^{p^*} \, dv_g \rightharpoonup \nu$$

quando $p \to q$, onde μ e ν são medidas não-negativas e limitadas, então existe no máximo um conjunto enumerável $\{x_j\}_{j \in \mathcal{T}}$ e números positivos $\{\mu_j\}_{j \in \mathcal{T}}$ e $\{\nu_j\}_{j \in \mathcal{T}}$ tal que

$$\mu \geq |\nabla_g u|^q \, dv_g + \sum_{j \in \mathcal{T}} \mu_j \delta_{x_j}, \quad \nu = |u|^{q^*} \, dv_g + \sum_{j \in \mathcal{T}} \nu_j \delta_{x_j}$$

com $A_0(q, g)\mu_j \geq \nu_j^{q/q^*}$ para todo $j \in \mathcal{T}$, onde δ_{x_j} representa a massa de Dirac concentrada em x_j.

Demonstração: Escreva $w_p = u_p - u$. Claramente, $w_p \rightharpoonup 0$ em $H^{1,q}(M)$. Defina $\theta = \nu - |u|^{q^*} dv_g$. Pelo lema de Brézis-Lieb, temos

$$w_p^{p^*} dv_g \rightharpoonup \theta \ .$$

Além disso, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$|\nabla_g w_p|^p \, dv_g \rightharpoonup \lambda$$

para alguma medida limitada e não-negativa λ. Basta agora mostrarmos a desigualdade de Hölder reversa para a medida θ em relação à medida λ, pois o restante da demonstração segue por argumentos padrões. Pela Proposição A.1, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma constante $D_\varepsilon > 0$, independente de p, tal que

$$\left(\int_M |u|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p,g) + \frac{\varepsilon}{2}) \int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g + D_\varepsilon \int_M |u|^p \, dv_g$$

para todo $u \in H^{1,p}(M)$. Tomando $u = \varphi w_p$ nessa desigualdade, onde $\varphi \in C^1(M)$, encontramos

$$\left(\int_M |\varphi|^{p^*} |w_p|^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0(p,g) + \frac{\varepsilon}{2}) \int_M |\nabla_g (\varphi w_p)|^p \, dv_g + D_\varepsilon \int_M |\varphi w_p|^p \, dv_g$$

$$\leq (A_0(p,g) + \frac{\varepsilon}{2}) \int_M |\varphi|^p |\nabla_g w_p|^p \, dv_g + C_\varepsilon \int_M |\varphi \nabla_g w_p|^{p-1} |w_p \nabla_g \varphi| \, dv_g$$

$$+ C_\varepsilon \int_M |w_p \nabla_g \varphi|^p \, dv_g + D_\varepsilon \int_M |\varphi w_p|^p \, dv_g$$

$$\leq (A_0(p,g) + \varepsilon) \int_M |\varphi|^p |\nabla_g w_p|^p \, dv_g + \tilde{C}_\varepsilon \max_M \{ |\nabla_g \varphi|^p + |\varphi|^p \} \int_M |w_p|^p \, dv_g \ .$$

Como $||w_p||_p \to 0$ quando $p \to q$, segue da desigualdade acima que

$$\left(\int_M |\varphi|^{q^*} \, d\theta \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq (A_0(q,g) + \varepsilon) \int_M |\varphi|^q \, d\lambda$$

para todo $\varepsilon > 0$, tal que a desigualdade de Hölder reversa

$$\left(\int_M |\varphi|^{q^*} \, d\theta \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq A_0(q,g) \int_M |\varphi|^q \, d\lambda$$

ocorre. ■

B.2 Princípio de concentração II

A seguir, enunciaremos uma versão vetorial de um princípio de compacidade. Tal princípio é essencial no Apêndice G para obtenção de uma desigualdade de Sobolev vetorial local envolvendo curvatura escalar.

Denote por $\mathcal{D}_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Sobolev Euclideano vetorial $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)\times\ldots\times\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$||\nabla U||_{\mathcal{D}_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde

$$U = (u_1, \ldots, u_k),$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2\, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^2\, dx\ .$$

Proposição B.2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e 2^*-homogênea. Considere uma sequência $(U_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{D}_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$, tal que*

$$U_\alpha \rightharpoonup U \ \text{em}\ \mathcal{D}_k^{1,2}(\mathbb{R}^n),$$

$$|\nabla(u_\alpha^i - u^i)|^2\, dx \rightharpoonup \mu_i,\ i = 1, \ldots, k,$$

$$F(U_\alpha - U)\, dx \rightharpoonup \nu,$$

$$U_\alpha \to U \ \text{q.t.p. em}\ \mathbb{R}^n,$$

onde μ_i e ν são medidas não-negativas e limitadas e $U_\alpha = (u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^k)$, e defina

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \mu_i,$$

$$\nu^\infty = \lim_{R\to+\infty} \left(\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_{[|x|\geq R]} F(U_\alpha) dx\right),$$

$$\mu_i^\infty = \lim_{R\to+\infty} \left(\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_{[|x|\geq R]} |\nabla u_\alpha^i|^2 dx\right).$$

Então,

$$||\nu||^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\mu,$$

$$(\nu^\infty)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\sum_{i=1}^{k}\mu_i^\infty,$$

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_\alpha^i|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u^i|^2dx + ||\mu_i|| + \mu_i^\infty,\ i=1,\ldots,k,$$

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}F(U_\alpha)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}F(U)\,dx + ||\nu|| + \nu^\infty\,.$$

Além disso, se $U=0$ e $||\nu||^{\frac{2}{2^*}} = \mathcal{A}_0(2,F,n)\mu$, então $\mu=0$ ou μ está concentrada em um único ponto.

Demonstração: Escreva $W_\alpha = U_\alpha - U$. Logo, $W_\alpha \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Defina $\theta = \nu - F(U)dx$. Pelo Lema de Brézis-Lieb generalizado (veja [2]), tem-se generalizado,

$$F(W_\alpha)dx \rightharpoonup \theta\ .$$

Além disso, a menos de subsequência, temos que

$$|\nabla_g W_\alpha|^2\,dx \rightharpoonup \lambda$$

para alguma medida limitada e não-negativa λ. Como na seção anterior, o ingrediente essencial desta demonstração é uma desigualdade de Hölder reversa para a medida θ em relação à medida λ. De fato, escolhendo $U=\varphi W_\alpha$, com $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, na desigualdade de Sobolev Euclideana vetorial

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}F(U)\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U|^p\,dx,$$

encontramos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^{2^*}F(W_\alpha)\,dx\right)^{2/2^*} \leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla(\varphi W_\alpha)|^2\,dx$$

$$\leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2|\nabla W_\alpha|^2\,dx + C_\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi\nabla w_\alpha^i||w_\alpha^i\nabla\varphi|\,dx$$

$$+C_\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}|w_\alpha^i\nabla\varphi|^2\,dx$$

$$\leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2|\nabla W_\alpha|^2\,dx + \tilde{C}_\varepsilon \max_{\mathbb{R}^n}\left\{|\nabla\varphi|^2+\varphi^2\right\}||W_\alpha||_2^2\ .$$

Como $||W_\alpha||_2 \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$, segue da desigualdade acima que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|^{2^*}\,d\theta\right)^{2/2^*} \leq \mathcal{A}_0(2,F,n)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2\,d\lambda\ .$$

Assim, obtemos a desigualdade de Hölder reversa desejada. ■

APÊNDICE C

Regularidade de soluções

Nesta seção, destacaremos um resultado de regularidade de soluções fracas $U = (u_1, \ldots, u_k)$ do sistema

$$-\mathcal{A}_0(p, F, G, g)\Delta_p u_i + \frac{1}{p}\mathcal{B}_0(p, F, G, g)\frac{\partial G(x, U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*}\frac{\partial F(U)}{\partial t_i}, \; i = 1, \cdots, k, \qquad (S)$$

quando as funções F e G que satisfazem algumas condições de regularidade e homogeneidade.

Proposição C.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, de classe C^1 na segunda variável, positiva e p-homogênea. Se $U = (u_1, ..., u_k) \in H_k^{1,p}(M)$ é uma solução fraca de (S), então $u_i \in C^1(M)$ para todo $i = 1, \ldots, k$.*

Demonstração: Para $l, \beta > 1$, definimos as funções ímpares $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(s) = \begin{cases} s^\beta & \text{se } 0 \leq s \leq l, \\ \beta l^{\beta-1}(s-l) + l^\beta & \text{se } s > l, \end{cases}$$

$$\psi(s) = \begin{cases} s^{(\beta-1)p+1} & \text{se } 0 \leq s \leq l, \\ ((\beta-1)p+1)\, l^{(\beta-1)p}(s-l) + l^{(\beta-1)p+1} & \text{se } s > l\ . \end{cases}$$

As funções φ e ψ são claramente Lipschitz. Em particular, $\varphi(u), \psi(u) \in H^{1,p}(M)$ para toda função $u \in H^{1,p}(M)$. Note também que existe uma constante $c > 0$, independente de l, tal que

$$c\varphi'(s)^p \leq \psi'(s) \qquad (C.1)$$

para todo s.

No que segue, é conveniente escolher $\beta > 1$ tal que $\beta p \leq p^*$ e reescrever o sistema (S) como

$$-\Delta_{p,g} u_i = F_i(x, U) \text{ em } M,\ i = 1, \ldots, n\ . \tag{C.2}$$

Observe, das condições de regularidade e homogeneidade sobre F e G, que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|F_i(x,t)| \leq C_0(|t|^{p^*-1} + 1) \tag{C.3}$$

para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^k$. Tomando $\psi(u_i)$ como uma função teste na i-ésima equação de (C.2), temos

$$\int_M |\nabla_g u_i|^{p-2} \langle \nabla_g u_i, \nabla_g \psi(u_i) \rangle \, dv_g = \int_M F_i(x,U) \psi(u_i) \, dv_g\ .$$

Daí, de (C.1) e (C.3), existe uma constante $C_1 > 0$, independente de l, tal que

$$\int_M |\nabla_g \left(\varphi(u_i) \right)|^p \, dv_g = \int_M |\nabla_g u_i|^p \varphi'(u_i)^p \, dv_g \leq C_1 \int_M |U|^{p^*-1} \psi(|u_i|) \, dv_g + C_1$$

$$\leq C_1 \int_M |U|^{p^*-1} \psi(|U|) \, dv_g + C_1\ .$$

Observe que existe uma constante $C > 0$, independente de l, tal que

$$s^{p-1} \psi(s) \leq C \varphi(s)^p$$

para todo $s > 0$. Assim, obtemos

$$\int_M |\nabla_g \left(\varphi(u_i) \right)|^p \, dv_g \leq C C_1 \int_M |U|^{p^*-p} \varphi(|U|)^p \, dv_g + C_1\ .$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev escalar clássica, encontramos uma constante $C_2 > 0$, independente de l, tal que

$$\left(\int_M \varphi(|u_i|)^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_2 \int_M \varphi(|u_i|)^p \, dv_g + C_2 \int_M |U|^{p^*-p} \varphi(|U|)^p \, dv_g + C_2$$

$$\leq C_2 \int_M \varphi(|U|)^p \, dv_g + C_2 \int_M |U|^{p^*-p} \varphi(|U|)^p \, dv_g + C_2\ .$$

Por outro lado, conclui-se facilmente da definição de φ que existe uma constante $C_3 > 0$, independente de l, tal que

$$\varphi(|U|) \leq C_3 \sum_{i=1}^{n} \varphi(|u_i|) \ .$$

Daí, utilizando desigualdades de Hölder e Young, encontramos uma constante $C_4 > 0$, independente de l, tal que

$$\left(\int_M \varphi(|U|)^{p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_4 \int_M \varphi(|U|)^p \, dv_g + C_4 \ .$$

Tomando então o limite $l \to +\infty$ na desigualdade acima, encontramos

$$\left(\int_M |U|^{\beta p^*} \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_4 \int_M |U|^{\beta p} \, dv_g + C_4 \ .$$

Portanto, obtemos $|U| \in L^q(M)$ com $q = \beta p^* > p^*$, e a conclusão segue da teoria clássica de EDPs elípticas quasilineares. ■

APÊNDICE D

Estimativas de De Giorgi-Nash-Moser

A seguir, apresentaremos algumas extensões de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser de soluções de equações elípticas à soluções $U_\alpha = (u_\alpha^1, \dots, u_\alpha^k)$ do sistema

$$-\mathcal{A}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g)\Delta_p u_i + \frac{1}{p}\mathcal{B}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g)\frac{\partial G_\alpha(x,U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*}\frac{\partial F_\alpha(U)}{\partial t_i}\ ,\ i = 1, \cdots, k\ . \quad (S_\alpha)$$

Para $p = 2$, temos os seguintes resultados:

Proposição D.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, F_α de classe C^1, positivas e 2^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e 2-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \ \text{em}\ C^0_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \ \text{em}\ C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k)\ .$$

Neste caso, existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que para qualquer solução fraca $U_\alpha \in H_k^{1,2}(M)$ de (S_α),

$$\int_M |U_\alpha|_2^2 \, dv_g \leq C \int_M |U_\alpha|_2^{2^*} \, dv_g$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração: Denote

$$A_\alpha = \frac{\mathcal{B}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)}{\mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)}$$

e

$$B_\alpha = \mathcal{A}_0(2, F_\alpha, G_\alpha, g)^{-1} \ .$$

Note que $(A_\alpha)_\alpha$ e $(B_\alpha)_\alpha$ são sequências limitadas. Para qualquer função positiva $\varphi \in C^1(M)$, temos

$$\int_M \langle \nabla_g |U_\alpha|_2^2, \nabla_g \varphi \rangle \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M 2u_\alpha^i \langle \nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g \varphi \rangle \, dv_g$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_M 2 \langle \nabla_g u_\alpha^i, (\nabla(u_\alpha^i \varphi) - \varphi \nabla_g u_\alpha^i) \rangle \, dv_g$$

$$= 2\sum_{i=1}^k \int_M \langle \nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g (u_\alpha^i \varphi) \rangle \, dv_g - 2\sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_\alpha^i|^2 \varphi \, dv_g$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^k \int_M \left(\frac{1}{2^*} B_\alpha \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i} - \frac{1}{2} A_\alpha \frac{\partial G_\alpha(x, U_\alpha)}{\partial t_i} \right) (u_\alpha^i \varphi) \, dv_g$$

$$= 2B_\alpha \int_M F_\alpha(U_\alpha)\varphi \, dv_g - 2A_\alpha \int_M G_\alpha(x, U_\alpha)\varphi \, dv_g$$

$$\leq C \int_M |U_\alpha|_2^{2^*} \varphi \, dv_g - 2m \int_M |U_\alpha|_2^2 \varphi \, dv_g,$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de α. Seja $m > 0$ uma constante independente de α tal que

$$G_\alpha(x, t) \geq m|t|_2^2$$

para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^k$.

Escolha agora $\varphi \in C^1(M)$ como a solução positiva da equação

$$-\Delta_g \varphi + 2m\varphi = 1 \text{ em } M \ .$$

Assim,

$$\int_M |U_\alpha|_2^2 \, dv_g = \int_M |U_\alpha|_2^2 (-\Delta_g \varphi + 2m\varphi) \, dv_g$$

$$= \int_M \langle \nabla_g |U_\alpha|_2^2, \nabla_g \varphi \rangle \, dv_g + 2m \int_M |U_\alpha|_2^2 \varphi \, dv_g$$

$$\leq C \int_M |U_\alpha|_2^{2^*} \varphi \, dv_g \leq C \int_M |U_\alpha|_2^{2^*} \, dv_g \ .$$

■

Proposição D.2. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, F_α de classe C^1, positivas e 2^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e 2-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^0_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k)\ .$$

Então, dado $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$, dependente de $\delta > 0$ e independente de α, tal que para qualquer solução fraca $U_\alpha \in H^{1,2}_k(M)$ de (S_α),

$$\sup_{M \setminus B_\delta(x_0)} |U_\alpha|_2^2 \leq C_\delta \int_M |U_\alpha|_2^2 \, dv_g$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração: De acordo com a demonstração acima, temos que $|U_\alpha|_2^2$ satisfaz, no sentido fraco,

$$-\Delta_g |U_\alpha|_2^2 + 2m|U_\alpha|_2^2 \leq C|U_\alpha|_2^{2^*}\ .$$

Então, a conclusão segue diretamente de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para equações elípticas. Isso finaliza a demonstração. ∎

O resultado principal para $p \neq 2$ é o seguinte:

Proposição D.3. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α, G de classe C^1 na segunda variável, positivas e p-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0(M, C^1_{loc}(\mathbb{R}^k))\ .$$

Então, existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que para qualquer solução fraca $U_\alpha \in H^{1,p}_k(M)$ de (S_α),

$$\sup_M |U_\alpha|_1 \leq C \left(\int_M |U_\alpha|_p^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração: Denote

$$A_\alpha = \frac{\mathcal{B}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g)}{\mathcal{A}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g)}$$

e

$$B_\alpha = \mathcal{A}_0(p, F_\alpha, G_\alpha, g)^{-1} \,.$$

Note que $(A_\alpha)_\alpha$ e $(B_\alpha)_\alpha$ são sequências limitadas. Temos que

$$-\Delta_p u_\alpha^i = F_i(x, U_\alpha)\,, \tag{D.1}$$

onde

$$F_i(x, U_\alpha) = \frac{1}{p^*} B_\alpha \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i} - \frac{1}{p} A_\alpha \frac{\partial G_\alpha(x, U_\alpha)}{\partial t_i} \,.$$

Para $k > 1$, coloque $t = k + p - 1$. Veja que

$$|||u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1} \nabla u_\alpha^i||_p^p = \int_M |u_\alpha^i|^{t-p} |\nabla u_\alpha^i|^p dv_g \,. \tag{D.2}$$

Multiplicando a equação D.1 por $|u_\alpha^i|^k$, obtemos:

$$k \int_M |\nabla u_\alpha^i|^p |u_\alpha^i|^{k-1} dv_g = \int_M |u_\alpha^i|^k \Delta_p u_\alpha^i dv_g = \int_M F_i(x, U_\alpha) |u_\alpha^i|^k dv_g \,. \tag{D.3}$$

Da desigualdade de Sobolev, segue que

$$||u_\alpha^i||_{t\frac{p^*}{p}}^t = |||u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}}||_{p^*}^p \le A_0(p, g) \left(\frac{t}{p}\right)^p |||u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1} \nabla u_\alpha^i||_p^p + B||u_\alpha^i||_t^t \,. \tag{D.4}$$

Utilizando (D.2), encontramos

$$k|||u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1} \nabla u_\alpha^i||_p^p = k \int_M |u_\alpha^i|^{t-p} |\nabla u_\alpha^i|^p dv_g \tag{D.5}$$

$$= k \int_M |u_\alpha^i|^{k-1} |\nabla u_\alpha^i|^p dv_g = |\int_M |u_\alpha^i|^k \Delta_p u_\alpha^i dv_g| = |\int_M F_i(x, U_\alpha) |u_\alpha^i|^k dv_g|$$

$$\le \left(\int_M |F_i(x, U_\alpha)|^r dv_g\right)^{\frac{1}{r}} ||u_\alpha^i||_{kr}^k \,,$$

onde r, $s > 1$ e $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$. Segue de (D.4) que

$$||u_\alpha^i||_{t\frac{p^*}{p}}^t \le A_0(p, g) \left(\frac{t}{p}\right)^p \frac{1}{k} ||F_i(\cdot, U_\alpha)||_s ||u_\alpha^i||_{kr}^k + B||u_\alpha^i||_t^t$$

e, da desigualdade de Hölder, segue que

$$||u_\alpha^i||_{t\frac{p^*}{p}}^t \leq A_0(p,g)\left(\frac{t}{p}\right)^p \frac{1}{k}||F_i(\cdot,U_\alpha)||_s||u_\alpha^i||_{rt}^k v_g(M)^{\frac{p-1}{rt}} + B||u_\alpha^i||_{rt}^t v_g(M)^{1-\frac{1}{r}}\,.$$

Portanto,

$$||u_\alpha^i||_{t\frac{p^*}{p}} \leq \max\{A_0(p,g),B\} v_g(M)^{\frac{p-1}{rt}}\left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{p}{t}}\Big(||F_i(\cdot,U_\alpha)||_s$$

$$+v_g(M)^{\frac{(r-1)t+1-p}{rt}}\Big)^{\frac{1}{t}}\max\{\frac{1}{k^t},||u_\alpha^i||_{rt}\}\,,$$

ou seja

$$||u_\alpha^i||_{t\frac{p^*}{p}} \leq \left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{p}{t}} C^{\frac{1}{t}}\max\{\frac{1}{k^t},||u_\alpha^i||_{rt}\}\,, \tag{D.6}$$

onde, sem perda de generalidade, C é uma constante que independe de t. Do resultado de regularidade, podemos escolher $s > \frac{n}{p}$ e $r < \frac{p^*}{p}$. Seja $a > 0$ tal que $r(1+a) = \frac{p^*}{p}$ e coloque $\gamma = 1+a$ e $t = \gamma^j$, onde j é um número inteiro não-negativo. De (D.6), obtemos que

$$||u_\alpha^i||_{t\gamma^{j+1}} \leq \left(\frac{\gamma^j}{p}\right)^{\frac{p}{\gamma^i}} C^{\frac{1}{\gamma^j}}\max\{\frac{1}{k^{\gamma^j}},||u_\alpha^i||_{r\gamma^j}\}\,.$$

Fazendo então iterações, encontramos

$$||u_\alpha^i||_{t\gamma^{j+1}} \leq \left(C^{\sum_{l=1}^{j}\frac{l}{\gamma^l}}\right)\frac{\gamma^{p\left(\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{\gamma^l}\right)}}{\left(p\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{\gamma^l}\right)}||u_\alpha^i||_r\,.$$

Como as séries $\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{\gamma^l}$ e $\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{l}{\gamma^l}$ são convergentes, o resultado segue. ∎

APÊNDICE E

Soluções minimizantes

Nesta seção, destacaremos um resultado básico sobre existência de soluções de energia mínima $U = (u_1, \ldots, u_k)$ para o sistema

$$-\mathcal{A}_0(p, F, G, g)\Delta_p u_i + \frac{1}{p}\mathcal{B}_0(p, F, G, g)\frac{\partial G(x, U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*}\frac{\partial F(U)}{\partial t_i}\,,\ i = 1, \cdots, k\,. \qquad (S)$$

Considere o funcional $I : H_k^{1,p}(M) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_p(U) = \mathcal{A}_0(p, F, G, g)\int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \mathcal{B}_0(p, F, G, g)\int_M G(x, U)\, dv_g\,.$$

Defina

$$\lambda_p = \inf_{U \in \Lambda_p} I_p(U)\,,$$

onde

$$\Lambda_p = \{U \in H_k^{1,p}(M) : \int_M F(U)\, dv_g = 1\}\,.$$

Denote por $\mathcal{L}_k^q(M)$ o espaço de Lebesgue Riemanniano vetorial $L^q(M) \times \ldots \times L^q(M)$ munido da norma

$$||U||_{\mathcal{L}_k^q(M)} = \left(\int_M |U|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}\,.$$

Proposição E.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, de classe C^1 na segunda variável, positiva e p-homogênea. Se $\lambda_p < 1$, então (S) possui uma solução fraca $U_0 \in \Lambda_p$ de classe C^1 tal que $I_p(U_0) = \lambda_p$.*

Demonstração: Seja $(U_\alpha)_\alpha$ uma sequência minimizante para λ_p. Claramente, $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H^{1,p}_k(M)$. Assim, a menos de subsequência, temos

$$U_\alpha \rightharpoonup U_0 \text{ em } H^{1,p}_k(M),$$

$$U_\alpha \to U_0 \text{ em } \mathcal{L}^p_k(M)\ .$$

Da convergência fraca em $H^{1,p}_k(M)$, segue que

$$\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p \, dv_g = \int_M |\nabla_g (U_\alpha - U_0)|^p \, dv_g + \int_M |\nabla_g U_0|^p \, dv_g + o(1) \tag{E.1}$$

quando $\alpha \to +\infty$. Pelo Lema de Brézis-Lieb generalizado (veja [2]), também temos

$$\int_M F(U_\alpha) \, dv_g = \int_M F(U_\alpha - U_0) \, dv_g + \int_M F(U_0) \, dv_g + o(1) \tag{E.2}$$

quando $\alpha \to +\infty$. Pela Proposição 2.2.1, temos

$$\left(\int_M F(U_\alpha - U_0) \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,G,g) \int_M |\nabla_g (U_\alpha - U_0)|^p \, dv_g + \mathcal{B} \int_M G(x, U_\alpha - U_0) \, dv_g\ . \tag{E.3}$$

Logo, de (E.1), (E.2) e (E.3), encontramos

$$\left(1 - \int_M F(U_0) \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} = \left(\int_M F(U_\alpha - U_0) \, dv_g \right)^{\frac{p}{p^*}} + o(1)$$

$$\leq \mathcal{A}_0(p,F,G,g) \int_M |\nabla_g (U_\alpha - U_0)|^p \, dv_g + C \int_M |U_\alpha - U_0|_p^p \, dv_g + o(1)$$

$$= \mathcal{A}_0(p,F,G,g) \left(\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p \, dv_g - \int_M |\nabla_g U_0|^p \, dv_g \right) + C \int_M |U_\alpha - U_0|_p^p \, dv_g + o(1)$$

$$= \mathcal{A}_0(p,F,G,g) \left(\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p \, dv_g - \int_M |\nabla_g U_0|^p \, dv_g \right) + o(1)$$

quando $\alpha \to +\infty$. Como

$$\int_M G(x, U_\alpha) \, dv_g = \int_M G(x, U_0) \, dv_g + o(1),$$

temos

$$\mathcal{A}_0(p,F,G,g) \left(\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p \, dv_g - \int_M |\nabla_g U_0|^p \, dv_g \right) = I_p(U_\alpha) - I_p(U_0) + o(1)$$

$$= \lambda_p - I_p(U_0) + o(1)\ .$$

Assim,

$$\left(1 - \int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \lambda_p - I_p(U_0) + o(1),$$

tal que de

$$I_p(U_0) \geq \lambda_p \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}},$$

encontramos

$$\left(1 - \int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \lambda_p \left(1 - \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\right) + o(1)\ .$$

Por outro lado, pelo Lema de Fatou,

$$\int_M F(U_0)\, dv_g \leq \liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M F(U_\alpha)\, dv_g = 1\ .$$

Se

$$\int_M F(U_0)\, dv_g < 1,$$

de $\lambda_p < 1$, temos

$$\left(1 - \int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} < 1 - \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} + o(1),$$

contradizendo a desigualdade

$$1 \leq \left(1 - \int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} + \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\ .$$

Logo,

$$\int_M F(U_0)\, dv_g = 1,$$

tal que

$$\mathcal{A}_0(p,F,G,g)\left(\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p\, dv_g - \int_M |\nabla_g U_0|^p\, dv_g\right) = \lambda_p - I_p(U_0) + o(1)$$

$$\leq \lambda_p - \lambda_p \left(\int_M F(U_0)\, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} + o(1) = o(1)\ .$$

Assim, de (E.1), concluímos que

$$\int_M |\nabla_g(U_\alpha - U_0)|^p \, dv_g = o(1),$$

tal que $U_\alpha \to U_0$ em $H_k^{1,p}(M)$ e $I_p(U_0) = \lambda_p$. A regularidade C^1 segue diretamente da Proposição C.1. ■

APÊNDICE F

Decomposição em bubbles

Nesta seção, apresentaremos um resultado fundamental na demonstração de existência de aplicações extremais no caso regular. Tal resultado fornece uma decomposição de soluções do sistema

$$-\Delta_p u_i + \frac{1}{p} A_\alpha \frac{\partial G_\alpha(x,U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*} B_\alpha \frac{\partial F_\alpha(U)}{\partial t_i}\ ,\ i = 1, \cdots, k\ , \tag{S_α}$$

onde $A_\alpha \to A$ e $B_\alpha \to B$, em funções elementares denominadas de bubbles.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$. Para sequências $(x_\alpha)_\alpha \subset M$ e $(R_\alpha)_\alpha \subset (0, +\infty)$ tal que $R_\alpha \to +\infty$, definimos um 1-bubbles generalizado como uma sequência $(B_\alpha)_\alpha$ de funções em M definidas por

$$B_\alpha(x) = \eta_{\delta, x_\alpha}(x) \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u(\mu_\alpha exp_{x_\alpha}^{-1}(x))\ ,$$

onde u é uma solução não-nula da equação

$$-\Delta_g u = |u|^{p^*-2} u \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

$0 < \delta < i_g(M) =$ raio de injetividade de (M, g), $\eta_{\delta, x_\alpha} = \eta_\delta \circ exp_{x_\alpha}^{-1}$, onde η_δ é uma função suave em $\mathbb{R}^n$ tal que $\eta_\delta = 1$ em $B_\delta(0)$ e $\eta_\delta = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(0)$. Neste caso, dizemos que os pontos x_α são os centros e que os números μ_α são os pesos do 1-bubbles $(B_\alpha)_\alpha$.

Um k-bubbles generalizado é definido como uma sequência $(\mathbf{B}_\alpha)_\alpha$ de aplicações de M em $\mathbb{R}^k$ tal que, escrevendo $\mathbf{B}_\alpha = (B_\alpha^1, ..., B_\alpha^k)$, tem-se que $(B_\alpha^i)_\alpha$ é um 1-bubbles generalizado para algum i, e $(B_\alpha^j)_\alpha$ é uma sequência nula para $j \neq i$.

Proposição F.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e*

$G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e p-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que

$$F_\alpha \to F \ \text{em} \ C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \ \text{em} \ C^0_{loc}(\mathbb{R}^k)\ .$$

Seja $U_\alpha \in H_k^{1,p}(M)$ uma solução fraca de (S_α). Se a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,p}(M)$, então existe $U \in H_k^{1,p}(M)$ tal que

$$B \int_M F(U)\, dv_g \geq \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + A \int_M G(x, U)\, dv_g\ .$$

Além disso, se $U = 0$, a menos de subsequência, temos

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^{l} \boldsymbol{B}_{j,\alpha} + \boldsymbol{R}_\alpha$$

para todo $\alpha > 0$, onde $(\boldsymbol{B}_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, \ldots, l$, são k-bubbles generalizados e $(\boldsymbol{R}_\alpha)_\alpha \subset H_k^{1,p}(M)$ é tal que $\boldsymbol{R}_\alpha \to 0$ em $H_k^{1,p}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$.

Antes de iniciarmos a demonstração, é conveniente fixarmos algumas notações básicas.

Sem perda de generalidade, vamos supor que $A_\alpha \equiv 1$ e $B_\alpha \equiv 1$. Considere $I_{p,\alpha} : H_k^{1,p}(M) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I_{p,\alpha}(U) = \frac{1}{p} \int_M |\nabla_g U|^p \, dv_g + \frac{1}{p} \int_M G_\alpha(x, U)\, dv_g - \frac{1}{p^*} \int_M F_\alpha(U)\, dv_g$$

para todo $U \in H_k^{1,p}(M)$.

Uma sequência $(U_\alpha)_\alpha$ em $H_k^{1,p}(M)$ é dita de Palais-Smale para a sequência de funcionais $(I_{p,\alpha})_\alpha$, se

$$(I_{p,\alpha}(U_\alpha))_\alpha \text{ é limitada},$$

$$DI_{p,\alpha}(U_\alpha) \to 0 \text{ em } H_k^{1,p}(M)^*\ .$$

Denote por $\mathcal{L}_k^q(M)$ o espaço de Lebesgue Riemanniano vetorial $L^q(M) \times \ldots \times L^q(M)$ munido da norma

$$||U||_{\mathcal{L}_k^q(M)} = \left(\int_M |U|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}\ .$$

Demonstração: Note primeiramente que a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,p}(M)$. Assim, existe $U \in H_k^{1,p}(M)$ tal que, a menos de subsequência,

$$U_\alpha \rightharpoonup U$$

fracamente em $H_k^{1,p}(M)$. Assim, das hipóteses de convergência sobre F_α e G_α, e do teorema da convergência dominada, segue que

$$\int_M F(U)dv_g \geq \int_M |\nabla_g U|^p dv_g + \int_M G(x,U)dv_g \, .$$

Esta é a primeira parte do resultado. Suponha agora que $U \equiv 0$. Afirmamos que

$$\int_M |\nabla_g U_\alpha|^{p-2} \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle dv_g = o(1)$$

para todo $\Theta \in H_k^{1,p}(M)$, onde

$$|\nabla_g U_\alpha|^{p-2} \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle = \sum_{i=1}^{k} |\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2} \langle \nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g \Theta^i \rangle \, .$$

Demonstremos esta afirmação. Denote

$$X_\alpha = |\nabla_g U_\alpha|^{p-2} \nabla_g U_\alpha = \sum_{i=1}^{k} |\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2} \nabla_g u_\alpha^i \, .$$

Então, $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L_k^{\frac{p}{p-1}}(M)$ e, a menos de subsequência, $(X_\alpha)_\alpha$ converge fracamente em $L_k^{\frac{p}{p-1}}(M)$ para algum $X \in L_k^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Dado $\delta > 0$, segue do teorema de Egoroff que existe $E_\delta \subset M$ tal que

$$\int_{M \setminus E_\delta} dv_g < \delta$$

e $(U_\alpha)_\alpha$ converge uniformemente para 0 em E_δ. Como uma consequência, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar α, grande o suficiente, tal que $|U_\alpha| < \varepsilon/2$ em E_δ. Agora, defina a função $\beta_\varepsilon = (\beta_\varepsilon^1, ..., \beta_\varepsilon^k)$ por

$$\beta_\varepsilon^i(t) = t_i$$

se $|t| < \varepsilon$, e

$$\beta_\varepsilon^i(t) = \frac{\varepsilon t_i}{|t|}$$

se $|t| \geq \varepsilon$. Daí, encontramos que

$$\sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g(\beta_\varepsilon^i \circ (U_\alpha))\rangle \geq 0$$

em quase todo ponto em M. Para ver isso, basta observar que a função $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\kappa(z) = |z|^p$, satisfaz

$$\langle |z|^{p-2}z - |w|^{p-2}w, z - w\rangle \geq 0 ,$$

pois $p > 1$. Segue então que para todo α grande o suficiente,

$$\int_{E_\delta}\sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i), \nabla_g(u_\alpha^i)\rangle dv_g \leq \int_M \sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i), \nabla_g(\beta_\epsilon^i \circ (U_\alpha))\rangle dv_g \ .$$

Note que $\beta_\varepsilon \circ (U_\alpha)$ converge fracamente para zero em $H_k^{1,p}(M)$. Temos também que, para α grande o suficiente,

$$\int_M \sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g(\beta_\varepsilon^i \circ (U_\alpha))\rangle dv_g < \varepsilon \ ,$$

pois $(\beta_\varepsilon \circ (U_\alpha))_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,p}(M)$,

$$DI_{\alpha,k}(U_\alpha)(\beta_\varepsilon \circ (U_\alpha)) = o(1) \ ,$$

onde $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Portanto,

$$\int_M \sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g(\beta_\varepsilon^i \circ (U_\alpha))\rangle dv_g = o(1) + I_1 + I_2 \, ,$$

onde

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left|\int_M \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}(\beta_\varepsilon \circ (U_\alpha))_i dv_g\right| \\ &\leq C\varepsilon \, , \end{aligned}$$

com C independente de α e, para α grande o suficiente,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left|\int_M \sum_{i=1}^{k} G_\alpha(x, U_\alpha)u_\alpha^i dv_g\right| \\ &\leq \varepsilon C \, , \end{aligned}$$

onde C é independente de α. Como uma consequência disso, obtemos que

$$\limsup_{\alpha\to+\infty}\int_{E_\delta}\sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i),\nabla_g(u_\alpha^i)\rangle dv_g \le C\varepsilon\ .$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$\sum_{i=1}^{k}\langle(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i),\nabla_g(u_\alpha^i)\rangle \to 0$$

em $L_k^1(E_\delta)$ e, a menos de subsequência, converge para zero em quase todo ponto em E_δ. Agora, para obtermos que $\nabla_g U_\alpha \to 0$ em quase todo ponto em E_δ, vamos usar que, se uma sequêcia $(z_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\langle |z_\alpha|^{p-2}z_\alpha - |z|^{p-2}z, z_\alpha - z\rangle \to 0\,,$$

então $z_\alpha \to z$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, isso implica que $\nabla_g U_\alpha \to 0$ em quase todo ponto em M e, como uma consequência, $X_\alpha \to 0$ em quase todo ponto em M. Como $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L_k^{\frac{p}{p-1}}(M)$, obtemos que

$$X_\alpha \rightharpoonup 0$$

em $L_k^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Assim, $X = 0$. Portanto,

$$\int_M |\nabla_g U_\alpha|^{p-2}\langle\nabla_g U_\alpha, \nabla_g\Theta\rangle dv_g = o(1)\ .$$

E isto é o final da demonstração de nossa primeira afirmação. Agora, pelo teorema da convergência dominada, encontramos

$$\int_M\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g = \int_M\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F(U)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g + o(1)$$

e

$$\int_M G_\alpha(x,U_\alpha)dv_g = \circ(1)\ .$$

Como $u_\alpha^i \rightharpoonup 0$ em $H^{1,p}(M)$, segue que

$$\int_M |\nabla_g u_\alpha^i|^p dv_g = o(1)\ ,$$

para todo $i = 1, ..., k$. Assim,

$$\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p dv_g + \int_M G_\alpha(x,U_\alpha)dv_g = o(1)\,.$$

Logo,

$$I_{\alpha,k}(U_\alpha) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M F_\alpha(U_\alpha) dv_g + o(1)$$

$$= L_k(U_\alpha) + o(1)\,,$$

onde

$$L_k(U_\alpha) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g U_\alpha|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M F(U_\alpha) dv_g\ .$$

Por outro lado, temos que

$$DI_{\alpha,k}(U_\alpha)\Theta = \int_M \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta\rangle dv_g + \frac{1}{p}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial G_\alpha(x,U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g$$

$$-\frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g\,.$$

Como

$$\frac{1}{p}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial G_\alpha(x,U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g + \int_M \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta\rangle dv_g = \frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g = o(1)\,.$$

e

$$\int_M \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta\rangle dv_g = o(1)\ ,$$

encontramos que

$$DI_{\alpha,k}(U_\alpha)\Theta = \int_M \langle \nabla_g U_\alpha, \nabla_g \Theta\rangle dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial F_\alpha(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g + o(1) = DL_k(U_\alpha)\Theta + o(1)$$

Assim, se $(U_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para $I_{\alpha,k}$, então $(U_\alpha)_\alpha$ também é uma sequência de Palais-Smale para L_k. Note que

$$DL_k(U_\alpha)\Theta = \int_M \sum_{i=1}^k \langle \nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g \Theta_i\rangle dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g\ .$$

Como

$$\frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^k \frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i}\Theta_i dv_g = o(1)$$

e

$$\frac{1}{p^*}\int_M \sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i|^{p^*-2}u_\alpha^i \Theta_i dv_g = o(1) ,$$

obtemos que, se $(U_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para L_k, então $(u_\alpha^i)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para L_α^i, $i = 1, ..., k$, onde

$$L_\alpha^i(u_\alpha^i) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g u_\alpha^i|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u_\alpha^i|^{p^*} dv_g .$$

Desta forma, para cada i existe um k_i e um 1-bubbles generalizado $(B_{j,\alpha}^i)_\alpha$, $j = 1, ..., k_i$, tal que, a menos de subsequência,

$$u_\alpha^i = \sum_{j=1}^{k_i} B_{j,\alpha}^i + R_\alpha$$

e

$$L_\alpha^i(u_\alpha^i) = \sum_{j=1}^{k_i} E(u_j^i) + \circ(1) ,$$

onde $u_j^i \in \mathcal{D}_1^p(\mathbb{R}^n)$ é uma solução não trivial da equação

$$-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u ,$$

com a qual o 1-bubbles $(B_{j,\alpha}^i)_\alpha$ é definido, e

$$E(u_j^i) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_j^i|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^n} |u_j^i|^{p^*} dx .$$

Para esta última afirmação, veja, por exemplo, Druet-Hebey-Robert [33] e Saintier [66]. Para finalizar, coloque $l = \sum_{i=1}^{k} k_i$. ■

Observação F.0.1. Também segue dos trabalhos [33] e [66] que

$$\frac{1}{n}\int_M |U_\alpha|^{p^*} dv_g = \frac{l A_0(p,g)^{-\frac{n}{p}}}{n} + o(1) .$$

APÊNDICE G

Desigualdades locais envolvendo curvatura escalar

Neste apêndice, estabelecemos uma desigualdade de Sobolev Riemanniana vetorial local envolvendo a curvatura escalar. Tal desigualdade é fundamental no estudo de existência de aplicação extremal.

Dado uma aberto Ω em uma variedade, represente por $C^{\infty}_{0,k}(\Omega)$ o espaço produto $C^{\infty}_{0}(\Omega) \times \ldots \times C^{\infty}_{0}(\Omega)$.

Precisamente, temos:

Proposição G.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e $x_0 \in M$. Se $n \geq 4$, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $r_\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $U \in C^{\infty}_{0,k}(B_g(x_0, r_\varepsilon))$,*

$$\left(\int_{B_g(x_0,r_\varepsilon)} F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, G, g) \int_{B_g(x_0,r_\varepsilon)} |\nabla_g U|^2\, dv_g + \mathcal{B}_\varepsilon \int_{B_g(x_0,r_\varepsilon)} G(x, U)\, dv_g\,,$$

onde

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(p, F, G, g)}{m_{F,G}} Scal_g(x_0) + \varepsilon,$$

com

$$m_{F,G} = \min_{(x,t) \in M \times K_F} G(x, t),$$

e $K_F = \{t \in \mathbb{S}_2^{k-1} :\ F(t) = M_F\}$.

Demonstração: Para cada $r > 0$ e $\varepsilon > 0$, defina

$$\lambda_{r,\varepsilon} = \inf_{U\in C^\infty_{0,k}(B_g(x_0,r))\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_{B_g(x_0,r)}|\nabla_g U|^2 dv_g + \mathcal{B}_\varepsilon \int_{B_g(x_0,r)} G(x,U)dv_g}{\left(\int_{B_g(x_0,r)} F(U)dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

Assuma que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $r > 0$,

$$\lambda_r := \lambda_{r,\varepsilon_0} < 1\,.$$

Seja então $(r_\alpha)_\alpha$ uma sequência de números reais positivos tal que $r_\alpha \to 0$. Assim, existe uma sequência $(U_\alpha)_\alpha$ em $H^{1,2}_k(M)$ satisfazendo:

$$-\mathcal{A}_0(2,F,G,g)\Delta_g u^i_\alpha + \frac{1}{2}\mathcal{B}_{\varepsilon_0}\frac{\partial G(x,U_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_\alpha}{2^*}\frac{\partial F(U_\alpha)}{\partial t_i} \quad \text{em} \quad B_g(x_0,r_\alpha)\,, \tag{G.1}$$

$$U_\alpha = 0 \quad \text{em} \quad \partial B_g(x_0,r_\alpha)$$

e

$$\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} F(U_\alpha)dv_g = 1\,.$$

Agora vamos estudar a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ quando $\alpha \to +\infty$. Seja $x_\alpha \in B_g(x_0,r_\alpha)$ um ponto onde $|U_\alpha|_\infty$ assume seu máximo e coloque

$$|U_\alpha(x_\alpha)|_\infty = \mu_\alpha^{1-\frac{n}{2}}\,.$$

Aqui estamos usando que $|U_\alpha(x)|_\infty = \max\limits_{1\le i\le k}|u^i_\alpha(x)|$. Temos que

$$1 = \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} F(U_\alpha)dv_g \le c\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} |U_\alpha|^{2^*}dv_g \le cVol_g(B_g(x_0,r_\alpha))\mu_\alpha^{-n}\,.$$

Assim, $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Além disso, da desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} |U_\alpha|^2 dv_g \le Vol_g(B_g(x_0,r_\alpha))^{\frac{2}{n}}\left(\int_{B_g(x_0,r_\alpha)}|U_\alpha|^{2^*}dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \le C^{-\frac{2}{2^*}}Vol_g(B_g(x_0,r_\alpha))^{\frac{2}{n}}\,.$$

Portanto,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha)dv_g = 0\,.$$

Vamos dividir o restante da demonstração em 5 passos. O primeiro passo é o seguinte:

Passo 1. *Temos que* $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\lambda_\alpha = 1$.

Demonstração: Note que para cada $\varepsilon > 0$ existe $B(\varepsilon) > 0$ tal que

$$1 \leq (\mathcal{A}_0(2,F,G,g)+\varepsilon) \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} |\nabla_g U_\alpha|^2 dv_g + B(\varepsilon) \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g \,.$$

Assim,

$$1 \leq (\mathcal{A}_0(2,F,G,g)+\varepsilon) \left(\lambda_\alpha - \mathcal{B}_{\varepsilon_0} \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g \right)$$

$$+B(\varepsilon) \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g \,,$$

pois

$$\int_B |\nabla_g U_\alpha|^2 dv_g + \mathcal{B}_{\varepsilon_0} \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g = \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \lambda_\alpha \,.$$

Desta forma, utilizando que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g = 0,$$

encontramos

$$(\mathcal{A}_0(2,F,G,g)+\varepsilon) \liminf_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \lambda_\alpha \geq 1$$

para todo $\varepsilon > 0$. Segue então que

$$\liminf_{\alpha \to +\infty} \lambda_\alpha \geq 1 \,.$$

Como $\lambda_\alpha \leq 1$, concluímos daí que

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \lambda_\alpha = 1 \,.$$

■

Passo 2. *Temos que* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} |\nabla_g U_\alpha|^2 dv_g = \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1}$.

Demonstração: Integrando a equação (G.1), encontramos

$$\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} |\nabla_g U_\alpha|^2 dv_g + \mathcal{B}_{\varepsilon_0} \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x,U_\alpha) dv_g = \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \lambda_\alpha,$$

pois $\int_{B_g(x_0,r_\alpha)} F(U_\alpha) dv_g = 1$. Assim, utilizando que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_{B_g(x_0,r_\alpha)} G(x, U_\alpha) dv_g = 0$ e o passo 1, obtemos o resultado afirmado neste passo. ■

Passo 3. Seja

$$\Omega_\alpha = \mu_\alpha^{-1} exp_{x_\alpha}^{-1} \left(B_g(x_0, r_\alpha)\right) \subset \mathbb{R}^n$$

e

$$g_\alpha(x) = \left(exp_{x_\alpha}^{*} g\right)(\mu_\alpha x)$$

para todo $x \in \Omega_\alpha$. Considere também

$$V_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n}{2}-1} U_\alpha \left(exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)$$

para todo $x \in \Omega_\alpha$, e $V_\alpha(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_\alpha$. Temos que $V_\alpha(x) = 0$ em $\partial\Omega_\alpha$, $\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) dv_{g_\alpha} = 1$ e

$$-\mathcal{A}_0(2, F, G, g)\Delta_{g_\alpha} v_\alpha^i + \mathcal{B}_{\varepsilon_0} \frac{\mu_\alpha^2}{2} \frac{\partial G(exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x), V_\alpha)}{\partial t_i} = \frac{\lambda_\alpha}{2^*} \frac{\partial F(V_\alpha)}{\partial t_i}\,. \tag{G.2}$$

Dos passos 1 e 2, e da equação (G.2) acima, segue que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha}}{\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) dv_{g_\alpha}} = \mathcal{A}_0(2, F, G, g)^{-1}\,.$$

Da expansão de Cartan, existe uma constante $C > 1$ tal que

$$dv_{g_\alpha} \geq \left(1 - \frac{1}{C}\mu_\alpha^2\right) dv_\xi\,,$$

$$|\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha} \leq \left(1 + C\mu_\alpha^2\right) dv_\xi\,.$$

Daí, do passo 2, da identidade $\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) dv_{g_\alpha} = 1$ e da desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V_\alpha|_\xi^2 dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n} F(V_\alpha) dv_\xi} = \mathcal{A}_0(2, F, G, g)^{-1}\,. \tag{G.3}$$

Portanto, temos que a sequência $(V_\alpha)_\alpha$ é limitada em $H_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Assim, existe $V \in H_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que, a menos de subsequência,

$$V_\alpha \rightharpoonup V$$

fracamente em $H_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\sup_{\Omega_\alpha} |V_\alpha|_1 = |V_\alpha(0)|_1 = 1\,. \tag{G.4}$$

Além disso, $(V_\alpha)_\alpha$ é limitada em L^∞ e, aplicando estimativas de De Giorgi-Nash-Moser na equação (G.2), encontramos uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer α,

$$1 = \sup_{\Omega_\alpha \cap B_{g_\alpha}(0,\frac{1}{2})} |V_\alpha|_2^2 \leq C \left(\int_{\Omega_\alpha \cap B_{g_\alpha}(0,\frac{1}{2})} F(V_\alpha) dv_\xi \right)^{\frac{1}{2^*}}\,.$$

Assim, o princípio de concentração (Teorema B.2.1), e (G.3) fornecem

$$\lim_{\alpha \to +\infty} V_\alpha = V \tag{G.5}$$

fortemente em $H_k^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Temos também que, desta última identidade, V é uma aplicação extremal para a desigualdade ótima de Sobolev Euclideana. Da proposição 2.1.1, existe $t_0 \in \mathbb{S}_2^{k-1}$, tal que $F(t_0) = \max_{\mathbb{S}_2^{k-1}} F$, e existe uma função extremal v de forma que $V = vt_0$.

Passo 4. *Existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que*

$$|V_\alpha(x)|_2 |x|_2^{\frac{n}{2}} \leq C$$

para todo α e qualquer $x \in \Omega_\alpha$.

Demonstração: Defina

$$W_\alpha(x) = |V_\alpha(x)|_2 |x|_2^{\frac{n}{2}}$$

e tome $y_\alpha \in \Omega_\alpha$ um ponto onde W_α atinge seu máximo. Assuma que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} W_\alpha(y_\alpha) = +\infty\,.$$

Coloque

$$\widetilde{\Omega_\alpha} = \nu_\alpha^{-1} exp_{y_\alpha}^{-1}(\Omega_\alpha)$$

$$\nu_\alpha^{-\frac{n}{2}} = |V_\alpha(y_\alpha)|_2$$

$$h_\alpha(x) = exp_{y_\alpha}^* g_\alpha(\nu_\alpha x)$$

$$\Phi_\alpha(x) = |V_\alpha(y_\alpha)|_2^{-1} V_\alpha\left(exp_{y_\alpha}(\nu_\alpha x)\right)$$

onde exp_{y_α} é a aplicação exponencial no ponto y_α em relação à métrica g. Temos que

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{|y_\alpha|_2}{\nu_\alpha}=+\infty \tag{G.6}$$

e

$$\lim_{\alpha\to+\infty}|y_\alpha|_2=+\infty\,. \tag{G.7}$$

Seja $x\in B_{g_\alpha}(y_\alpha,\nu_\alpha)$. Assim,

$$|x|_2=d_{g_\alpha}(0,x)\geq d_{g_\alpha}(0,y_\alpha)-d_{g_\alpha}(x,y_\alpha)$$

$$\geq d_{g_\alpha}(0,y_\alpha)-|V_\alpha|_2(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}\geq |y_\alpha|_2-\frac{1}{2}|y_\alpha|_2$$

e, pela definição de y_α,

$$|V_\alpha(y_\alpha)|_2|y_\alpha|_2^{\frac{n}{2}}\geq |V_\alpha(x)|_2|x|_2^{\frac{n}{2}}\,.$$

Portanto,

$$||V_\alpha||_{L^\infty(B_{g_\alpha}(y_\alpha,\nu_\alpha))}\leq C|V_\alpha(y_\alpha)|_2\,.$$

Isso nos permite aplicar as estimativas de De Giorgi-Nash-Moser na equação verificada por Φ_α em relação à métrica h_α, e obter uma constante $C>0$ tal que

$$C\leq\int_{B_\xi(0,1)\cap\widetilde{\Omega_\alpha}}|\Phi_\alpha|_2^2dv_{h_\alpha}=\int_{B_{g_\alpha}(y_\alpha,\nu_\alpha)\cap\Omega_\alpha}|V_\alpha|_2^2dv_{g_\alpha}\,.$$

Isso contradiz (G.5), (G.6) e (G.7). Assim, $|W(x)|_1\leq C$, para todo $x\in\mathbb{R}^n$. ∎

Defina agora o operador L_α pondo

$$L_\alpha u=-\mathcal{A}_0(2,F,G,g)\Delta_{g_\alpha}u+2\mathcal{B}_{\varepsilon_0}\mu_\alpha^2m_Gu-2\lambda_\alpha M_F|u|^{2^*-2}u\,.$$

Seja $H(x)=\left(\frac{R}{|x|_2}\right)^\omega$, onde $\omega,R>0$. Um cálculo direto e o passo 4 nos fornecem

$$L_\alpha H\geq 0$$

em $\Omega_\alpha\setminus B_\xi(0,R)$, para R grande o suficiente. Além disso, temos que

$$L_\alpha|V_\alpha|_2^2\leq 0\,.$$

Então, aplicando o princípio do máximo encontrado em Aubin-Li [8], Lema 3.4, segue que

$$|V_\alpha|_2^2 \leq C \left(\frac{R}{|x|_2} \right)^\omega \tag{G.8}$$

em $\Omega_\alpha \setminus B_\xi(0,R)$. Como isso já é verdadeiro em $B_\xi(0,R)$, obtemos que esta desigualdade é válida em Ω_α.

Passo 5. Aqui está o passo final. Vamos utilizar a seguinte notação

$$G(V_\alpha) := G(x, V_\alpha) := G(exp_{x_\alpha}(x), V_\alpha)\,.$$

Agora vamos encontrar uma expansão assintótica para as quantidades

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla V_\alpha|_\xi^2 dv_\xi$$

e

$$\int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) dv_\xi\,,$$

quando $\alpha \to +\infty$. Para encontrarmos estas expansões, necessitamos dos seguintes resultados:

$$\frac{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 Ric_g(x_\alpha)_{ij} x^i x^j dv_{g_\alpha}}{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha}} \to \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 Ric_g(x_0)_{ij} x^i x^j dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 dv_\xi} \tag{G.9}$$

$$\int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) Ric_g(x_\alpha)_{ij} x^i x^j dv_{g_\alpha} \to \int_{\mathbb{R}^n} G(V) Ric_g(x_0)_{ij} x^i x^j dv_\xi \tag{G.10}$$

A relação (G.10) é obtida com (G.5) e (G.8). Para mostrarmos a relação (G.9), é suficiente mostrarmos que

$$\int_{\Omega_\alpha \setminus B_\xi(0,c_\alpha)} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 |x|_2^2 dv_{g_\alpha} \to 0\,,$$

onde $(c_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de números reais verificando $c_\alpha \to +\infty$. Para mostrar isso, multiplicamos a equação (G.2) por $v_\alpha^i |x|_2^2$ e integramos sobre $\Omega_\alpha \setminus B_\xi(0,c_\alpha)$. Um cálculo direto usando (G.8) e (G.10) fornece o resultado. Note que para qualquer função radial f,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f x^i x^j dv_\xi = \frac{\delta_{ij}}{n} \int_{\mathbb{R}^n} f |x|_2^2 dv_\xi\,.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 Ric_g(x_\alpha)_{ij} x^i x^j dv_{g_\alpha}}{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha}} \to \frac{Scal_g(x_0)}{n} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 |x|^2 dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 dv_\xi} \tag{G.11}$$

$$\int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) Ric_g(x_\alpha)_{ij} x^i x^j dv_{g_\alpha} \to \frac{Scal_g(x_0)}{n} \int_{\mathbb{R}^n} G(V)|x|_2^2 dv_\xi \tag{G.12}$$

Pela expansão de Cartan da métrica g_α em 0, encontramos

$$dv_\xi = \left(1 + \frac{\mu_\alpha^2}{6} Ric_g(x_\alpha)_{ij} x^i x^j + o(\mu_\alpha^2 |x|_2^2)\right) dv_{g_\alpha}$$

$$|\nabla V_\alpha|_\xi^2 = |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{6} \sum_i Rm_g(x_\alpha)\left(\nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i, x, x, \nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i\right) + o\left(|\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 \mu_\alpha^2 |x|_2^2\right) .$$

Portanto, com (G.11) e (G.12), obtemos que

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla V_\alpha|_\xi^2 dv_\xi = \int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha} \left(1 + \frac{\mu_\alpha^2 Scal_g(x_0)}{6n} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 |x|_2^2 dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 dv_\xi} \right. \tag{G.13}$$

$$\left. + \frac{\mu_\alpha^2}{6} \sum_i \frac{\int_{\Omega_\alpha} Rm_g(x_\alpha)\left(\nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i, x, x, \nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i\right) dv_{g_\alpha}}{\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha}} + o(\mu_\alpha^2)\right)$$

e

$$\int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) dv_\xi = 1 + \frac{\mu_\alpha^2 Scal_g(x_0)}{6n} \int_{\mathbb{R}^n} G(V)|x|_2^2 dv_\xi + o(\mu_\alpha^2) . \tag{G.14}$$

Como v^i é radial, e os vetores $\nabla_{g_\alpha} v^i$ e x são colineares, segue que

$$\int_{\Omega_\alpha} Rm_g(x_\alpha)\left(\nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i, x, x, \nabla_{g_\alpha} v_\alpha^i\right) dv_{g_\alpha} \to 0 .$$

Donde,

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla V_\alpha|_\xi^2 dv_\xi = \int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha} \left(1 + \frac{\mu_\alpha^2 Scal_g(x_0)}{6n} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 |x|_2^2 dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla V|_\xi^2 dv_\xi} + o(\mu_\alpha^2)\right) . \tag{G.15}$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) dv_\xi = 1 + \frac{\mu_\alpha^2}{6} Ric_g(x_\alpha)_{ij} \int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) x^i x^j dv_{g_\alpha} + o\left(\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) \mu_\alpha^2 |x|_2^2 dv_{g_\alpha}\right) .$$

De (G.8) e de $F(V_\alpha) \to F(V)$, tiramos que

$$\int_{\Omega_\alpha} F(V_\alpha) dv_\xi = 1 + \frac{\mu_\alpha^2 Scal_g(x_0)}{6n} \int_{\mathbb{R}^n} F(V)|x|_2^2 dv_\xi + o\left(\mu_\alpha^2\right) .$$

Da equação (G.2), obtemos

$$\int_{\Omega_\alpha} |\nabla_{g_\alpha} V_\alpha|^2 dv_{g_\alpha} \leq \mathcal{A}_0(2,F,G,g)^{-1} \left(1 - \mathcal{B}_{\varepsilon_0} \mu_\alpha^2 \lambda_\alpha^{-1} \int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) dv_{g_\alpha} \right) . \tag{G.16}$$

Agora, usando a relação

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha} G(V_\alpha) dv_{g_\alpha} &= \int_{\Omega_\alpha} G(V) dv_{g_\alpha} + o(1) \\ &= \int_{\Omega_\alpha} G(vt_0) dv_{g_\alpha} + o(1) , \end{aligned}$$

a desigualdade ótima de Sobolev Euclideana e as relações (G.13)-(G.16), encontramos que

$$\left(\mathcal{B}_{\varepsilon_0} - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2,F,G,g)}{m_{F,G}} Scal_g(x_0) \right) \mu_\alpha^2 + o(\mu_\alpha^2) \leq 0 .$$

Isso gera a desejada contradição, pois

$$\mathcal{B}_{\varepsilon_0} - \frac{n-2}{4(n-1)} \frac{\mathcal{A}_0(2,F,G,g)}{m_{F,G}} Scal_g(x_0) = \varepsilon_0 > 0 .$$

■

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[2] Amster, Pablo; De Nápoli, Pablo; Mariani, Maria Cristina - *Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent.* Electron. J. Differential Equations 49, (2002) 13 pp.

[3] T. Aubin - *Métrique riemanniennes et courbure*, J. Differential Geom. 4 (1970) 383-424.

[4] T. Aubin - *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pure Appl. 55 (1976) 269-296.

[5] T. Aubin - *Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes* , Bull. Sci. Math. 100 (1976) 149-173.

[6] T. Aubin - *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. 11 (4) (1976) 573-598.

[7] T. Aubin - *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, in: Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[8] T. Aubin, Y.Y Li - *On the best Sobolev inequality*, J. Math. Pures Appl. 78 (1999), 353-387.

[9] D. Bakry - *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes*, Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992), 1-114, Lectures Notes in Mathematics, 1581, Springer, Berlin, 1994.

[10] E. Barbosa - *Extremal maps in Sobolev type inequalities: some remarks*, Bull. Sci. Math.. To appear (2008).

[11] E. Barbosa, M. Montenegro - *A note on extremal functions for sharp Sobolev inequalities*, Electronic Journal of Differential Equations, 87 (2007) 1-5.

[12] E. Barbosa, M. Montenegro - *A note on scalar curvature type problems in dimension 4*, J. Math. Anal. Appl. , 344 (2008) 699-702.

[13] E. Barbosa, M. Montenegro - *Extremal maps in best constants vector theory*. Preprint.

[14] E. Barbosa, M. Montenegro - *New examples of multiple metrics for the prescribed scalar curvature problem*. Preprint.

[15] E. Barbosa, M. Montenegro - *On the continuity of the second Sobolev best constant*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 345 (2007) 579-582.

[16] E. Barbosa, M. Montenegro - *The second Sobolev best constant along the Ricci flow*, Bull. Braz. Math. Soc.. To appear (2008).

[17] E. Barbosa, M. Montenegro - *On the p-dependence of Riemannian L^p-Sobolev best constants*. Preprint (2008).

[18] E. Barbosa, M. Montenegro - *On the geometric dependence of Riemannian Sobolev best constants*. Preprint (2008).

[19] A. Besse - *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik Und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Bd. 10. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1987.

[20] G. Bliss - *An integral inequality*, J. London Math. Soc. 5 (1930) 40-46.

[21] I. Chavel - *Riemannian Geometry: a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1993.

[22] C. B. Croke - *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. 59 (1984) 187-192.

[23] F. Demengel, E. Hebey - *On some nonlinear equations involving the p-Laplacian with critical growth*, Adv. Diff. Equations. 3 (1998) 533-574.

[24] Z. Djadli, O. Druet - *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds*, Calc. Var. 12 (2001) 59-84.

[25] O. Druet - *From one bubble to several bubbles: the low dimensional case*, J. Diff. Geo. 63 (2003) 399-473.

[26] O. Druet - *Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 130A (2000) 767-788.

[27] O. Druet - *Isoperimetric inequalities on compact manifolds*, Geometriae Dedicata 90 (2002) 217-236.

[28] O. Druet - *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 159 (1998) 217-242.

[29] O. Druet - *Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature*, Proc. A.M.S., 130 (2002) 2351-2361.

[30] O. Druet - *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Math. Ann. 314 (1999) 327-346.

[31] O. Druet, E. Hebey - *Sharp asymptotics and compactness for local low energy solutions of critical elliptic systems in potential form*, Calc. Var. Partial Differential Equations 31 (2008), no. 2, 205-230.

[32] O. Druet, E. Hebey - *The AB program in geometric analysis: sharp Sobolev inequalities and related problems*, Mem. Amer. Math. Soc. 160 (761) (2002).

[33] O. Druet, E. Hebey, F. Róbert - *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, Princeton University Press. Princeton, New Jersey. 2004.

[34] O. Druet, E. Hebey, M. Vaugon - *Sharp Sobolev inequalities with lower order remainder terms*, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2000) 269-289.

[35] H. Federer, W H. Fleming - *Normal integral currents*, Annals of Mathematics, 72 (1960) 458-520.

[36] W. H. Fleming, R. Rishel - *An integral formulafor total gradient variation*, Arch. Math. 11 (1960) 218-222.

[37] S. Gallot - *Inégalités isopérimetriques et analytiques sur les variétés Riemanniennes*, Société Mathématique de France, Astérisque, 163-164, 1988, p. 31-91.

[38] S. Gallot - *Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvture*, Société Mathématique de France, Astérisque, 157-158, 1988, p. 191-216.

[39] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine - *Riemannian Geometry*, Universitex, Springer-Verlag, 1993.

[40] G. Gilbarg, N. S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Second Edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224, Springer, Berlin-New York, 1983.

[41] M. Guedda, L. Véron - *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents* , Nonlinear Analysis TMA. 13 (1989), 879-902.

[42] E. Hebey - *Courbure Scalaire et géometrie conforme*, Journal of Geometry and Physics 10 (1993) 345-380.

[43] E. Hebey - *Critical elliptic systems in potential form*, Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 5, 511-600.

[44] E. Hebey - *Diagonal compactness for critical elliptic systems in potential form*, Comm. Partial Differential Equations 32 (2007), no. 10-12, 1837-1881.

[45] E. Hebey - *Fonctions extrémales pour une inégalité de Sobolev optimale dans la classe conforme de la sphére.*, J. Math. Pures Appl. 77 (1998) 721-733.

[46] E. Hebey - *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*, Fondations, Diderot Editeurs, Arts et Sciences, 1997.

[47] E. Hebey - *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, in: Courant Lect. Notes Math., Vol. 5, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1999.

[48] E. Hebey - *Sharp Sobolev inequalities for vector valued maps*, Math. Z. 253, no. 4 (2006), 681-708.

[49] E. Hebey, M. Vaugon - *From best constants to critical functions*, Math. Z. 237 (2001) 737-767.

[50] E. Hebey, M. Vaugon - *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), no. 2, 377-407.

[51] E. Hebey, M. Vaugon - *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Ann. Inst. H. Poincaré. 13 (1996), 57-93.

[52] E. Hebey, J. Vétois - *Multiple solutions for critical elliptic systems in potential form*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), no. 3, 715-741.

[53] S-Y. Hsu - *Uniform Sobolev inequalities for manifolds evolving by Ricci flow*, arXiv:math.DG/07080893 v1 August 7, 2007.

[54] S. Ilias - *Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés Riemanniennes compactes*, Annales de l'Institut Fourier, 33, 1983, p. 151-165.

[55] J. Jost - *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitex, Springer-Verlag, 1995.

[56] J. Kazdan, F. Warner - *A direct approach to determination of Gaussian and scalar curvature functions*, Invent. Math. 28 (1975) 227-230.

[57] J. Kazdan, F. Warner - *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. Math. 99 (1974) 14-47.

[58] J. Kazdan, F. Warner - *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differ. Geom. 10 (1975) 113-134.

[59] B. Kleiner - *An isoperimetric comparison theorem*, Invent. Math. 108 (1992) 37-47.

[60] O. Kobayashi - *Scalar curvature of a metric with unit volume*, Math. Ann. 279 (1987) 253-265.

[61] O. A. Ladyzhenskaya, N. Uraltseva - *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[62] P. L. Lions - *The concentration-compactness principle in the calcuclus of variations, the limit case, parts 1 and 2.* Rev. Mat. Iberoamericana 1(1/2) 145-201, 45-121 (1985).

[63] P. Petersen - *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 171, Springer-Verlag, 1998.

[64] H. Poincaré - *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 18 (1904) 45-110. (*Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953, p. 498).

[65] G. Rosen - *Minimum value for c in the Sobolev inequality*, SIAM J. Appl. Math. 21 (1971) 30-32.

[66] N. Saintier - *Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p-Laplacian*, Cal. Var. 25(3) (2006) 299-331.

[67] T. Sakai - *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 149, AMS, 1996.

[68] R. Schoen - *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. 20 (1984) 479-495.

[69] R. Schoen - *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, pp. 120-154 in Topics in calculus of variations (Montecatini Terme, 1987), edited by M. Giaquinta, Lect. Notes Math. 1365, Springer, Berlin, 1989.

[70] R. Schoen, S. T. Yau - *Lectures on Differential geometry*, Conference and Proceedings and Lectures Notes in Geometry and Topology, vol I, International Press, 1994.

[71] J. Serrin - *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. 111 (1964) 247-302.

[72] S.L. Sobolev - *On a theorem of functional analysis*, Transl. Amer. Math. Soc. (2) , 34 (1963) pp. 39-68; Mat. Sb. , 4 (1938) pp. 471-497.

[73] G. Talenti - *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (iv) 110 (1976) 353-372.

[74] P. Tolksdorf - *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations. 51 (1984) 126-150.

[75] N. S. Trudinger - *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 22 (1968) 265-274.

[76] A. Weil - *Sur les surfaces à courbure négative*, C. R. Acad. Sci. Paris. 182 (1926) 1069-1071.

[77] J. L. Vázquez - *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. and Optimiz. 12 (1984) 191-202.

[78] H. Yamabe - *On a deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960) 21-37.

[79] R. Ye - *The logarithmic Sobolev inequality along the Ricci flow*, arXiv:math.DG/07072424 v2 July 20, 2007.

[80] Qi S. Zhang - *A uniform Sobolev inequality under Ricci flow*, arXiv:math.DG/07061594 v1 June 12, 2007.