Hipersuperfícies excepcionais

Daniela Gomes Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito para a obtenção do grau de Mestre junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFMG

Data da defesa: 16 de fevereiro de 2009.

Banca Examinadora:

Márcio G. Soares - UFMG - orientador

Rogério Santos Mol - UFMG

Renato Vidal Martins - UFMG

Introdução

Essa dissertação versa sobre parte do artigo

D. CERVEAU ET A. LINS NETO, *Hypersurfaces exceptionelles des endomorphismes de* $\mathbb{CP}(n)$, Bol. Soc. Bras. Mat. Soc., Vol 31, No 2, (2000), 155-161. [C-LN]

Nesse artigo são estudadas algumas propriedades de hipersuperfícies excepcionais para endomorfismos de $\mathbb{P}^n$, e o quão raros são estes conjuntos algébricos.

No capítulo 1 apresentamos a construção do espaço $\mathbb{P}^n$ e estudamos as características dos endomorfismos de $\mathbb{P}^n$, já que estes, por sua vez, irão definir as hipersuperfícies excepcionais.

No capítulo 2, demos a seguinte definição para hipersuperfícies excepcionais: dado um endomorfismo $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ induzido por $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $f = (f_0, \ldots, f_n)$, uma hipersuperfície H é excepcional para F se $F^{-1}(H) = H$. Exploramos algumas de suas características, além de exemplos para ilustrar o texto.

Finalmente, no capítulo 3, mostramos propriedades geométricas de tais hipersuperfícies, já que provamos que estas não podem ser lisas se o seu grau for maior do que 2.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, por iluminar o meu caminho. Ao meu orientador, Márcio, por me guiar, apoiar, incentivar, e por compreender as minhas limitações, sempre me ajudando a superá-las. À minha família, meu alicerce. Ao Pedro, pelo amor, carinho e apoio incondicionais. Aos amigos da Matemática, em especial à Marianna, irmã e companheira de trabalho. A todos, o meu muito obrigado.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços projetivos complexos

Em tudo o que segue o corpo de base é o corpo $\mathbb{C}$. No espaço vetorial $\mathbb{C}^{n+1}$ adotamos coordenadas $z = (z_0, \ldots, z_n)$.

O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ é o espaço quociente $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ onde a relação de equivalência $\sim$ é definida por

$$(a_0, \ldots, a_n) \sim (b_0, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_i = \xi\, b_i \quad \text{para algum} \quad \xi \in \mathbb{C}^*. \tag{1}$$

Denotamos a classe de um ponto $(z_0, \ldots, z_n)$ por $[z_0, \ldots, z_n]$.

Munimos $\mathbb{P}^n$ da topologia quociente induzida pela projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ (z_0, \ldots, z_n) &\longmapsto [z_0, \ldots, z_n] \end{aligned} \tag{2}$$

Assim sendo, $U \subset \mathbb{P}^n$ é aberto se, e só se, $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ é aberto.

Considere a identificação natural $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ dada por $(z_0, \ldots, z_n) = (x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n)$ (nessa ordem).

Tome a esfera unitária $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$, $S^{2n+1} = \{z : |z|^2 = \sum |z_i|^2 = 1\}$. Um subespaço complexo de $\dim_{\mathbb{C}} = 1$, $\mathbb{L} \cong \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^{n+1}$, intercepta S^{2n+1}

num círculo unitário. Isso diz que a restrição

$$\pi_{|S^{2n+1}} : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n \tag{3}$$

é sobre. Como π é contínua, $\mathbb{P}^n$ é um espaço compacto pois é imagem de um compacto de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Vamos agora dar uma estrutura de variedade complexa a $\mathbb{P}^n$. Cobrimos $\mathbb{P}^n$ com $n+1$ abertos U_i definidos por

$$U_i = \{[z] \in \mathbb{P}^n \,:\, z_i \neq 0\}, \;\; 0 \leq i \leq n. \tag{4}$$

No aberto U_i temos que $[z_0, \ldots, z_n] = [z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, 1, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i]$ e definimos a carta local $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$\begin{aligned} &\phi_i[z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, 1, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i] \\ &= (z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, \widehat{1}, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i) \\ &= (w_0, \ldots, w_{i-1}, \widehat{1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n \end{aligned} \tag{5}$$

A mudança de coordenadas $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ é dada, em $U_{ij} = U_i \cap U_j$, por

$$\begin{aligned} &\phi_j \circ \phi_i^{-1}(w_0, \ldots, w_{i-1}, \widehat{1}, w_{i+1}, \ldots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \ldots, w_n) \\ &= \phi_j \circ \phi_i^{-1}(z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, \widehat{1}, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_{j-1}/z_i, z_j/z_i, z_{j+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i) \\ &= [z_0/z_i, \ldots, z_{i-1}/z_i, 1, z_{i+1}/z_i, \ldots, z_{j-1}/z_i, z_j/z_i, z_{j+1}/z_i, \ldots, z_n/z_i] \\ &= [z_0/z_j, \ldots, z_{i-1}/z_j, z_i/z_j, z_{i+1}/z_j, \ldots, z_{j-1}/z_j, 1, z_{j+1}/z_j, \ldots, z_n/z_j] \\ &= (z_0/z_j, \ldots, z_{i-1}/z_j, z_i/z_j, z_{i+1}/z_j, \ldots, z_{j-1}/z_j, \widehat{1}, z_{j+1}/z_j, \ldots, z_n/z_j) \\ &= (u_0, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, \widehat{1}, u_{j+1}, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n \end{aligned} \tag{6}$$

ou seja,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(w) = u = \begin{cases} u_0 = w_0/w_j \\ \vdots \\ u_{i-1} = w_{i-1}/w_j \\ u_i = 1/w_j \\ u_{i+1} = w_{i+1}/w_j \\ \vdots \\ u_{j-1} = w_{j-1}/w_j \\ \widehat{u_j} \\ u_{j+1} = w_{j+1}/w_j \\ \vdots \\ u_n = w_n/w_j \end{cases} \tag{7}$$

e as mudanças são claramente holomorfas.

Se denotamos $U_i = \{[z]_i\}$ então essas mudanças de coordenadas são determinadas por:

$$[z]_j = \frac{z_i}{z_j}[z]_i. \tag{8}$$

1.2 Alguns resultados da Geometria Algébrica

A referência para todos os resultados dessa seção é [M].

Seja $\mathfrak{R} = \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Tome $\mathfrak{R}$ como um anel graduado, $\mathfrak{R} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{R}_d$, onde cada $\mathfrak{R}_d$ é um grupo abeliano e, dados $d, d' \geq 0$, $\mathfrak{R}_d \cdot \mathfrak{R}_{d'} \subseteq \mathfrak{R}_{d+d'}$. Os elementos de $\mathfrak{R}_d$ são chamados *homogêneos de grau d*.

Se h é um polinômio homogêneo de grau d, a propriedade *ser zero ou não ser zero* de h depende apenas da classe $[z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^n$ de $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Dado um conjunto S de elementos homogêneos de $\mathfrak{R}$, o conjunto de zeros de S é

$$Z(S) = \{p \in \mathbb{P}^n \, : \, g(p) = 0 \ \text{ para todo } g \in S\}.$$

Como $\mathfrak{R}$ é noetheriano, todo conjunto de elementos homogêneos S admite um subconjunto finito $g_1, \ldots, g_r$ tal que $Z(S) = Z(g_1, \ldots, g_r)$. Um ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}$ é um *ideal homogêneo* se $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{R}_d)$. O *radical* de $\mathfrak{a}$ é definido por:

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in \mathfrak{R} \, : \, f^r \in \mathfrak{a} \ \text{ para algum } \ r > 0\}.$$

Definição 1.2.1 *Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é um* CONJUNTO ALGÉBRICO *se existe um conjunto S de elementos homogêneos de $\mathfrak{R}$ tal que $X = Z(S)$.*

Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é um conjunto algébrico, o *ideal* de X é:

$$I(X) = \{f \in \mathfrak{R} \, : \, f(p) = 0 \ \text{ para todo } \ p \in X\}.$$

Proposição 1.2.2 *A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A interseção de qualquer família de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. O conjunto vazio, $\emptyset$, e todo o espaço, $\mathbb{P}^n$, são conjuntos algébricos.*

Esse resultado nos permite definir

Definição 1.2.3 *A* TOPOLOGIA DE ZARISKI *em $\mathbb{P}^n$ é a topologia cujos abertos são os conjuntos complementares de conjuntos algébricos.*

A topologia de Zariski não é tão fina quanto a topologia usual. Em contrapartida, sua grande vantagem é o fato de que seus abertos (todos eles) são densos na topologia de Baire, por definição.

Proposição 1.2.4 *(i) Se $S_1 \subseteq S_2$ são subconjuntos de $\mathfrak{R}_d$, é válido que $Z(S_1) \supseteq Z(S_2)$.*

(ii) Se $Y_1 \subseteq Y_2$ são subconjuntos algébricos de $\mathbb{P}^n$, então $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.

(iii) Para quaisquer dois subconjuntos algébricos Y_1, Y_2 de $\mathbb{P}^n$, vale a igualdade $I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.

(iv) Se $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{R}$ é um ideal homogêneo com $Z(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$, então $I(Z(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(v) Para qualquer subconjunto algébrico $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, $Z(I(Y)) = \overline{Y}$(fecho na topologia de Zariski).

O item *(iv)* da proposição 1.2.4 é o NULLSTELLENZATZ homogêneo, que afirma que, se $\mathfrak{a}$ é um ideal homogêneo e se f é um polinômio homogêneo de grau > 0, tal que $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(\mathfrak{a})$ em $\mathbb{P}^n$, então $f^r \in \mathfrak{a}$ para algum $r > 0$.

Definição 1.2.5 *Um subconjunto não-vazio Y de um espaço topológico X é* IRREDUTÍVEL *se ele não pode ser expresso como uma união $Y = Y_1 \cup Y_2$ de dois subconjuntos próprios, cada um dos quais é fechado em Y. O conjunto vazio não é irredutível.*

Definição 1.2.6 *Uma* VARIEDADE PROJETIVA *é um conjunto algébrico irredutível de $\mathbb{P}^n$, com a topologia induzida. A dimensão de uma variedade projetiva é sua dimensão como espaço topológico.*

Proposição 1.2.7 *Um conjunto algébrico irredutível é conexo sobre $\mathbb{C}^n$*

Demonstração : [M].

Note que este fato somente é verdadeiro em $\mathbb{C}^n$, e não em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.8 *Um conjunto algébrico $Y \subset \mathbb{P}^n$ se escreve de modo único como uma união*

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_s$$

de variedades projetivas, com $Y_i \not\subseteq Y_j$ para $i \neq j$. Essas são chamadas as componentes irredutiveis de Y.

Teorema 1.2.9 TEOREMA DE BÉZOUT *Sejam X^r, Y^s subvariedades de $\mathbb{P}^n$ e $X \cap Y = W_1 \cup \ldots \cup W_k$ a decomposição de $X \cap Y$ em componentes irredutíveis. Suponha que:*

(a) $\dim W_i = r + s - n$ *para todo* i.

(b) Para todo i, existe um ponto $x \in W_i$ tal que X e Y são lisas em x e que T_xX e T_xY são transversais em $T_x\mathbb{P}^n$, ou seja, $\dim(T_xX \cap T_xY) = r + s - n$.

Então

$$\deg X \cdot \deg Y = \sum_{i=1}^{k} \deg W_i.$$

$\square$

1.3 Endomorfismos de $\mathbb{P}^n$

Buscamos agora caracterizar um *mapa holomorfo não constante* $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, ou seja, caracterizar um *endomorfismo* de $\mathbb{P}^n$.

Um tal endomorfismo F é naturalmente induzido por uma aplicação $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $f = (f_0, \ldots, f_n)$, holomorfa, que preserva classes projetivas na fonte e na meta, ou seja,

$$f([z]) = [f(z)]. \tag{9}$$

e tal que

$$f^{-1}(0) = \{0\}. \tag{10}$$

(9) equivale a dizer que, dado $\lambda \neq 0$, existe $\mu = \mu(\lambda) \neq 0$ tal que

$$\mu f(z_0, \ldots, z_n) = f(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n). \tag{11}$$

Isso determina F de modo único através de

$$[z_0, \ldots, z_n] \xrightarrow{F} [f_0, \ldots, f_n]. \tag{12}$$

Trabalhando em cada coordenada de f temos

$$f_i(\lambda z) = \mu f_i(z) \tag{13}$$

para $0 \leq i \leq n$.

Afirmamos que (13) implica que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ são *polinômios homogêneos do mesmo grau*. De fato, por hipótese f_i é holomorfa e portanto dada por uma série de potências convergente (para esse argumento basta que f_i seja dada por uma série de potências *formal*).

Tome dois monômios quaisquer na expansão de f_i:

$$a_I z^I = a_{i_0 i_1 \ldots i_k} z_0^{i_0} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_k} \quad \text{e} \quad a_J z^J = a_{j_0 j_1 \ldots j_m} z_0^{j_0} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_m}$$

onde $|I| = i_0 + i_1 + \ldots + i_k$, $|J| = j_0 + j_1 + \ldots + j_m$. Sabemos que

$$a_I (\lambda z)^I = \lambda^{|I|} a_I z^I$$

De (13), temos

$$\sum_I \lambda^{|I|}\, a_I z^I = \sum_J \mu a_J z^J.$$

Se $a_I \neq 0$, $\lambda^{|I|}\, a_I = \mu\, a_J\ \ \forall\ I$ e então $\lambda^{|I|} = \mu$.

Portanto, já que λ é qualquer número complexo não nulo,

$$|I| = |J| \geq 1 \quad \text{pois } f \text{ não é constante.}$$

Segue que f_i é um polinômio homogêneo de grau $|I|$.

Agora, como μ é o mesmo independente do índice i escolhido, temos que $f_0, f_1, \ldots, f_n$ são todos polinômios homogêneos do mesmo grau, a saber, $|I|$.

Por outro lado, (10) é o mesmo que $f(z) \neq 0$ para $z \neq 0$, ou seja, denotando por

$$D_i = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}\ :\ f_i(z) = 0\}$$

devemos ter

$$D_0 \cap D_1 \cap \ldots \cap D_n = \{0\}. \tag{14}$$

Resumindo.,

Proposição 1.3.1 *Um endomorfismo de $\mathbb{P}^n$ é univocamente determinado por uma aplicação polinomial $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ satisfazendo:*

(i) f_i é homogênea de grau $\deg f_i = k \geq 1$, $i = 0, \ldots, n$.

(ii) $f_0, f_1, \ldots, f_n$ têm como zero comum apenas $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \overset{f = (f_0, \ldots, f_n)}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n & \overset{F}{\longrightarrow} & \mathbb{P}^n \end{array} \tag{15}$$

$\square$

Proposição 1.3.2 *Um endomorfismo* $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ *é sobrejetivo e, para* $p \in \mathbb{P}^n$ *genérico,* $\#F^{-1}(p) = k^n$ *onde* $k = \deg f_i$.

Demonstração : Dado $[1, a_1, \ldots, a_n] \in U_0$, com $a_i \neq 0$ para algum i, considere o sistema

$$\begin{cases} f_1(z) - a_1\, f_0(z) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_n(z) - a_n\, f_0(z) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Pelo teorema de Bézout, (16) tem precisamente k^n pontos em $\mathbb{P}^n$ como soluções, contando multiplicidades. Suponha que $z^0 = [z_0^0, z_1^0, \ldots, z_n^0]$ seja uma solução de (16) e que, ademais, $f_0(z^0) = 0$. Isso fornece $f_1(z^0) = \ldots = f_n(z^0) = 0$ e portanto $\mathbb{C}^{n+1} \ni z^0 \neq 0$ é um zero comum a todos os f_i, o que é absurdo. Logo, todo ponto $[w]$ que é solução de (16) não é zero de f_0. Por outro lado, se $a_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, (16) fica

$$\begin{cases} f_1(z) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n(z) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

e novamente, por Bézout, temos k^n soluções. Portanto, para qualquer que seja $[1, a_1, \ldots, a_n]$ existe $[w]$ tal que

$$F([w]) = \left[1, \frac{f_1(w)}{f_0(w)}, \ldots, \frac{f_n(w)}{f_0(w)}\right] = [1, a_1, \ldots, a_n]$$

e F é sobrejetiva no aberto U_0. Analogamente para os abertos U_i, $1 \leq i \leq n$, e concluímos que F é sobre. Considere agora a aplicação $g : \mathbb{C}^{n+1} \setminus D_0 \to U_1$ definida por:

$$g(z) = \left(\frac{f_1(z)}{f_0(z)}, \ldots, \frac{f_n(z)}{f_0(z)}\right). \tag{18}$$

Pelo teorema de Sard, os valores regulares de g formam um conjunto denso de pontos $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Mas isso nos diz precisamente que para um conjunto denso de escolhas de $(a_1, \ldots, a_n)$, as k^n soluções de (16) têm todas multiplicidade 1, ou seja, $\#F^{-1}[1, a_1, \ldots, a_n] = k^n$. $\square$

Vamos agora descrever algumas outras propriedades de um endomorfismo F. Para isso necessitamos de uma digressão.

Fatos sobre aplicações de tipo finito

Todo o assunto tratado nessa seção é válido para germes de aplicações, entretanto vamos nos concentrar na situação global.

Temos em mãos uma aplicação holomorfa

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{f = (f_0, \ldots, f_n)} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

tal que $f^{-1}(0) = \{0\}$. Uma tal f é um exemplo de *aplicação de tipo finito* e apresentamos agora algumas de suas propriedades.

Definição 1.3.3 *Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ uma aplicação holomorfa satisfazendo $f^{-1}(0) = \{0\}$. O* índice *ou* índice de Poincaré Hopf *de f em 0, notado $\mathcal{I}_0(f)$, é o grau de Brouwer da aplicação C^∞*

$$\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^{2n+1} \longrightarrow S_1^{2n+1}$$

onde S_ϵ^{2n+1} e S_1^{2n+1} são as esferas euclidianas de raio $\epsilon > 0$ e 1, respectivamente, centradas em $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Os seguintes fatos sobre $\mathcal{I}_0(f)$ podem todos ser encontrados em [S].

Observação 1 *$\mathcal{I}_0(f)$ não depende de $\epsilon > 0$ e , por ser f holomorfa, $\mathcal{I}_0(f)$ é um inteiro positivo.*

Proposição 1.3.4 *f é um biholomorfismo local se, e só se, $\mathcal{I}_0(f) = 1$.*

Proposição 1.3.5 *Seja $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ uma subvariedade lisa, compacta, conexa, com bordo , $dim_{\mathbb{R}} X = 2n+2$. Seja $g : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ uma aplicação holomorfa, $p \in X \setminus \partial X$, $g(p) = 0$ e $g^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$. Suponha que o grau da aplicação*

$$\frac{g}{|g|} : \partial X \longrightarrow S_1^{2n+1}$$

seja k. Então, a equação $g = 0$ tem um número finito de soluções no interior de X e a soma dos índices de g sobre esses pontos é exatamente k.

Proposição 1.3.6 *$\mathcal{I}_p(f)$ é o número de pontos no conjunto $f^{-1}(\zeta) \cap B_\varepsilon(p)$ onde ζ é um valor regular de f suficientemente próximo de 0.*

Teorema 1.3.7 ADITIVIDADE DO ÍNDICE DE POINCARÉ-HOPF *Suponha $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ holomorfa e 0 uma raiz isolada de f. Considere uma deformação holomorfa f_τ de $f = f_0$, dependendo do parâmetro $\tau \in \mathbb{C}^*$. Então,*

$$\mathcal{I}_0(f) = \sum_{p \in f_\tau^{-1}(0)} \mathcal{I}_p(f_\tau) \quad \textit{para} \quad 0 \leq |\tau| << 1. \tag{19}$$

Propriedades topológicas dos endomorfismos de $\mathbb{P}^n$

Proposição 1.3.8 *Seja $f = (f_0, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que f_i é um polinômio homogêneo de grau k, $0 \leq i \leq n$, e $f^{-1}(0) = \{0\}$. Então f é uma aplicação aberta.*

Demonstração :

(i) Mostramos inicialmente que f é aberta em 0. Tome uma bola $B_\epsilon(0)$, onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno para que a deformação holomorfa de f definida por:

$$f_\tau = f - \tau : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \ , \ \ \tau \in B_\epsilon(0), \tag{20}$$

satisfaça as hipóteses do teorema 1.3.7. Seja V qualquer aberto com $0 \in V$ e $f(V) \subset B_\epsilon(0)$. Suponha que $f(V)$ não é aberto. Então, usando proposição 1.3.6, existe $\zeta \in f(V)$ e uma sequência $(\zeta_n) \to \zeta$, com $\zeta_n \in B_\epsilon(0)$ e $\zeta_n \notin f(V)$.

Pelo teorema 1.3.7, o número de soluções da equação $f(z) = \tau$ em $f^{-1}(B_\epsilon(0))$ é finito e limitado por $\mathcal{I}_0(f)$, qualquer que seja $\tau \in B_\epsilon(0)$. Sejam $\xi \in V$ uma solução de $f(z) = \zeta$ e $\xi_n \in f^{-1}(B_\epsilon(0))$ tal que $f(\xi_n) = \zeta_n$, $n \geq 1$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor $(\xi_n) \to \xi$. Mas então, para $n >> 1$, $\xi_n \in V$ e portanto $f(\xi_n) = \zeta_n \in f(V)$, o que é absurdo. Logo, $f(V)$ é aberto.

(ii) Seja $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ um aberto limitado qualquer. Tome uma homotetia $h_t : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $h_t(z) = tz$, tal que $h_t(W) \subset V$, onde V é um aberto como em (i). Então, pelo mesmo argumento utilizado em (i), $f(h_t(W))$ é aberto. Como homotetias são homeomorfismos e $f(tz) = t^k f(z)$ temos $(h_{t^{-k}} \circ f \circ h_t)(W) = h_{t^{-k}}(f(h_t(W))) = f(W)$ e $f(W)$ é aberto.

Agora, qualquer aberto W em $\mathbb{C}^{n+1}$ pode ser exaurido por abertos limitados, $W = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$, A_i limitado, e então $f(W) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$ é aberto. $\square$

Corolário 1.3.9 *Um endomorfismo $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração : Recorde o diagrama (15):

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \overset{f = (f_0, \ldots, f_n)}{\longrightarrow} & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}^n & \overset{F}{\longrightarrow} & \mathbb{P}^n
\end{array}$$

Seja $U \subset \mathbb{P}^n$ aberto. Então $(\pi \circ f)(\pi^{-1}(U)) = \pi(f(\pi^{-1}(U))) = F(U)$. A aplicação quociente π é aberta pois, se $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é aberto, então $\pi^{-1}(\pi(W)) = \{tw \,:\, w \in W\,,\, t \in \mathbb{C}^*\}$ e esse conjunto é aberto. Como, pela proposição 1.3.8, $f(\pi^{-1}(U))$ é aberto, $F(U)$ também o é. $\square$

Proposição 1.3.10 *Um endomorfismo $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma aplicação fechada e própria.*

Demonstração : Isso segue da compacidade de $\mathbb{P}^n$. Se $C \subset \mathbb{P}^n$ é fechado, então C é compacto e portanto $F(C)$ é compacto, donde fechado. Se $K \subset \mathbb{P}^n$ é compacto, então $F^{-1}(K)$ é fechado pois F é contínua. Logo $F^{-1}(K)$ é compacto pois $\mathbb{P}^n$ o é. □

Proposição 1.3.11 *Seja $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ um endomorfismo de grau $d \geq 2$. Então o número de pontos fixos de F é*

$$\frac{d^{n+1}-1}{d-1}.$$

Demonstração : Seja $\mathfrak{i} = (z_0, \ldots, z_n)$ a identidade em $\mathbb{C}^{n+1}$. Introduza a variável auxiliar w e considere as $n+1$ equações homogêneas de grau d em $\mathbb{C}^{n+2} \simeq \{(z_0, \ldots, z_n, w)\}$:

$$\begin{cases} f_0(z) - w^{d-1} z_0 = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_n(z) - w^{d-1} z_n = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Essas definem uma variedade algébrica W em $\mathbb{P}^{n+1}$. W não intersecta o hiperplano no infinito $\{w = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1}$ uma vez que o sistema acima se reduz a

$$\begin{cases} f_0(z) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_n(z) = 0. \end{cases}$$

e $(z_0, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)$ é a única solução desse sistema. Logo, W é uma variedade analítica compacta no aberto afim $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{w = 0\}$ e é, portanto, um conjunto finito de pontos. Isso nos diz que W é a imagem, pela projeção $\pi : \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$, de um número finito de retas que passam pela origem. Por Bézout, o sistema $(*)$ possui d^{n+1} soluções. Agora, suponha que $(a_0, \ldots, a_n, w_0)$ seja uma solução de $(*)$. Se ζ é uma raiz da unidade de ordem $d-1$, então $(a_0, \ldots, a_n, \zeta w_0)$ também é solução. Por outro lado, as soluções $(0, \ldots, 0, \zeta w_0)$ são todas enviadas no ponto $[0, \ldots, 0, 1]$. Logo, temos $\dfrac{d^{n+1}-1}{d-1}$ soluções além do ponto $[0, \ldots, 0, 1]$. $\square$

Também faremos uso do seguinte

Teorema 1.3.12 *[M] Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade projetiva e F é um endomorfismo de $\mathbb{P}^n$, então $F(X)$ é uma variedade projetiva de dimensão igual à de X.*

Capítulo 2

Hipersuperfícies excepcionais

Uma *hipersuperfície* $H \subset \mathbb{P}^n$ é o conjunto algébrico definido por um polinômio homogêneo não identicamente nulo, $H = Z(h)$. Se h é irredutível então H é uma variedade projetiva.

Definição 2.0.13 *Seja $F : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ um endomorfismo induzido por $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $f = (f_0, \ldots, f_n)$. Uma hipersuperfície H é* EXCEPCIONAL *para F se $F^{-1}(H) = H$.*

Se H é excepcional para F, então $F(H) = H$. De fato, dado $p \in H$, $F^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_l\} \subset H$, já que H é excepcional. Então $p = F(q_1)$, o que implica $F(H) \supseteq H$. Por outro lado, como $F^{-1}(H) = \{p : h(F(p)) = 0\} = \{p : h(p) = 0\} = H$, se $p = F(q)$, $q \in H$, então $h(p) = h(F(q)) = 0$ e portanto $F(H) \subseteq H$.

Seja $h = h_1^{m_1} \ldots h_s^{m_s}$ a fatorização de h em polinômios irredutíveis. Denotamos por $\check{h} = h_1 \ldots h_s$ uma reduzida de h e observamos que $H = Z(h) = Z(\check{h})$. Nesse caso, $H_i = Z(h_i)$, $i = 1, \ldots, s$ são variedades projetivas e

$$H = H_1 \cup \cdots \cup H_s$$

é a decomposição de H em componentes irredutíveis. Observe que $F^{-1}(H_i) = Z(h_i \circ f)$.

Proposição 2.0.14 *Se H é excepcional para F, então $F(H_i)$ é uma componente irredutível de H, bem como o é $F^{-1}(H_i)$, para todo $i = 1, \dots, s$. Além disso, existe um inteiro positivo α_i tal que $F^{\circ\alpha_i}(H_i) = F^{-\circ\alpha_i}(H_i) = H_i$.*

Demonstração : Segue do teorema 1.3.12 que $F(H_i) = H_j$ para algum j. Como $F(H) = H$, não podemos ter $F(H_i) = F(H_j)$ para $i \neq j$ e portanto F induz uma permutação no conjunto $\{H_1, \dots, H_s\}$. Assim sendo, iterando F temos que existe um menor inteiro positivo α_i tal que

$$F^{\circ\alpha_i}(H_i) = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{\alpha_i \text{ vezes}}(H_i) = H_i. \tag{2.1}$$

Agora, se $F^{-1}(H_i) = H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_k}$, então

$$H_i = F(F^{-1}(H_i)) = F(H_{i_1} \cup \cdots \cup H_{i_k}) = F(H_{i_1}) \cup \cdots \cup F(H_{i_k}) = H_{j_1} \cup \cdots \cup H_{j_k},$$

o que é absurdo a menos que $k = 1$. Logo, $F^{-1}(H_i) = H_j$ para algum j e, por (2.1), F^{-1} induz a mesma permutação que F nas componentes irredutíveis de H:

$$F^{-\circ\alpha_i}(H_i) = \underbrace{F^{-1} \circ \cdots \circ F^{-1}}_{\alpha_i \text{ vezes}}(H_i) = H_i. \tag{2.2}$$

□

Exemplo 2.0.15 *Em $\mathbb{P}^2$, com coordenadas $[x, y, z]$, considere a curva redutível H definida por*

$$h = h_1 h_2 h_3 = x(x - y)(y - z)$$

onde $h_1(x, y, z) = x$, $h_2(x, y, z) = x - y$ e $h_3(x, y, z) = y - z$.

Escrevemos $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, com sua decomposição nas componentes irredutíveis $H_1 = \{x = 0\}, H_2 = \{x - y = 0\}$ e $H_3 = \{y - z = 0\}$. Seja

$$f(x, y, z) = (x^2, 2xy - y^2, 2xy - 2y^2 + 2yz - z^2),$$

que induz um endomorfismo $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ de grau 2 (é fácil ver que $f^{-1}(0) = \{0\}$).

Para buscar $F^{-1}(H)$ *simplesmente resolvemos* $(h \circ f)(x,y,z) = 0$ *e analogamente para* $F^{-1}(H_i)$. *Obtemos, respectivamente,*

(i) $(h \circ f)(x,y,z) = x^2(x-y)^2(y-z)^2$ *e* H *é excepcional para* F.

(ii) $(h_1 \circ f)(x,y,z) = x^2$ *e portanto* $F^{-1}(H_1) = H_1$.

(iii) $(h_2 \circ f)(x,y,z) = (x-y)^2$ *e* $F^{-1}(H_2) = H_2$.

(iv) $(h_3 \circ f)(x,y,z) = (y-z)^2$ *e* $F^{-1}(H_3) = H_3$.

Além disso, denotando $f(x,y,z) = (X,Y,Z)$,

(v) $f(0,y,z) = (0, -y^2, -y^2 - (y-z)^2)$ *e* $F(H_1) = H_1 = \{X = 0\}$.

(vi) $f(x,x,z) = (x^2, x^2, 2xz - z^2)$ *e* $F(H_2) = H_2 = \{X = Y\}$.

(vii) $f(x,y,y) = (x^2, 2xy - y^2, 2xy - y^2)$ *e* $F(H_3) = H_3 = \{Y = Z\}$.

Então,

$$F \rightsquigarrow \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.0.16 *Tome* h *como no exemplo 2.0.15 e seja* F *o endomorfismo induzido por*

$$f(x,y,z) = (x^2, x^2 - y^2 + 2yz - z^2, -2y^2 - z^2 + 2yz + 2xy).$$

Novamente temos que H *é excepcional para* F, *mas aqui* $F^{-1}(H_1) = H_1$, $F^{-1}(H_2) = H_3$, $F^{-1}(H_3) = H_2$ *e* $F(H_1) = H_1$, $F(H_2) = H_3$, $F(H_3) = H_2$, *ou seja,*

$$F \rightsquigarrow \begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ H_1 & H_3 & H_2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.0.17 *[F-S] Sejam* $H \subset \mathbb{P}^n$ *uma hipersuperfície excepcional para algum morfismo* F *de* $\deg d \geq 2$ *e* $\check{h} = h_1 \cdots h_s$ *a equação reduzida de* H. *Então,*

(i) existe um $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ *tal que* $\check{h} \circ f = c\check{h}^d$.

(ii) $\deg \check{h} = \sum \deg h_i \leq n+1$.

(iii) H está contida no conjunto crítico de F.

Demonstração : Passando a um iterado de f, caso necessário, temos $Z(h_i \circ f) = H_i$, $h_i \circ f$ se anula precisamente ao longo de H_i e daí temos $h_i \circ f = c_i\, {h_i}^k$, onde c_i é um complexo não nulo. Agora, $\deg(h_i \circ f) = d \deg h_i$ e portanto $k = d$. Isso mostra (i).

Escolha um ponto $p \in \check{h}^{-1}(0)$ tal que $\check{h}^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é lisa em p e em $f(p)$. Agora, por (i), $(\check{h} \circ f)'(p) = \check{h}'(f(p)).f'(p) = c\, d\, \check{h}^{d-1}(p)\, \check{h}'(p) = 0$. Portanto, $\dim \ker f'(p) > 0$ e $\det Jf(p) = \det \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(p) \right) = 0$. Mas como tal fato ocorre para todo ponto numa vizinhança aberta de p em $\check{h}^{-1}(0)$, concluímos que $Z(\det Jf) \supseteq Z(\check{h}^{d-1})$. Logo, $\check{h}^{d-1}$ é fator de $\det Jf$. Como $\deg \det Jf = (d-1)(n+1)$, chegamos a

$$\deg \check{h}(d-1) \leq \deg \det Jf = (d-1)(n+1) \quad \text{e então} \quad \deg \check{h} \leq n+1.$$

Isso mostra (ii) e (iii). □

Corolário 2.0.18 *Se $\deg \check{h} = n+1$ então $F : \mathbb{P}^n \backslash H \longrightarrow \mathbb{P}^n \backslash H$ é um recobrimento de grau d^n.*

Demonstração : Nesse caso, $\det Jf = c\, \check{h}^{d-1}$ e o conjunto crítico de F é exatamente H. Pelo argumento usado na demonstração da proposição 1.3.2 (teorema de Bézout), temos que para todo $p \in \mathbb{P}^n \backslash H$, p é valor regular de F e $\#F^{-1}(p) = d^n$. □

Exemplo 2.0.19 *Escolha números complexos não nulos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ satis-*

fazendo $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ *sempre que* $i \neq j$. *Considere a matriz de Vandermonde*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \\ 1 & \lambda_{n+1} & \dots & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

cujo determinante é $\det \Lambda = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. *Sejam*

$$\mathrm{f}_j = z_0^d + \lambda_j z_1^d + \dots + \lambda_j^n z_n^d \ , \quad j = 0, \dots, n.$$

Cada $\mathrm{f}_j : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ *possui um único ponto crítico isolado em* $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ *e portanto* $Z(\mathrm{f}_j) \subset \mathbb{P}^n$ *é uma hipersuperfície lisa. Agora, o sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n \\ 1 & \lambda_{n+1} & \dots & \lambda_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0^d \\ z_1^d \\ \vdots \\ z_{n-1}^d \\ z_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possui a única solução $z_0 = 0, z_1 = 0, \dots, z_n = 0$ *e então temos que* $Z(\mathrm{f}_0) \cap \dots \cap Z(\mathrm{f}_n) = \emptyset$ *em* $\mathbb{P}^n$. *Seja* F_d *o endomorfismo de* $\mathbb{P}^n$ *induzido por* $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_0, \dots, \mathrm{f}_n)$. *Como o conjunto crítico de* F_d *é vazio em* $\mathbb{P}^n$, *pelo teorema 2.0.17,* F_d *não admite hipersuperfície excepcional.*

Com isso em mãos vamos mostrar o quão raros são os endomorfismos de $\mathbb{P}^n$ que admitem hipersuperfícies excepcionais.

Dado um polinômio homogêneo g, de grau d, identifique-o com os seus coeficientes. Lembrando que, se g é um polinômio homogêneo de grau d, a propriedade *ser zero ou não ser zero* de g depende apenas da classe $[z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^n$ de $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, temos que o conjunto de todas as $(n+1)$-uplas de polinômios homogêneos de grau d se identifica a

$$\mathbb{P}^N\,, \quad \text{onde} \quad N = (n+1)\frac{(d+n)!}{d!\,n!} - 1.$$

Seja $\mathcal{H}_d$ o conjunto dos endomorfismos de $\mathbb{P}^n$, de grau d. Um $F \in \mathcal{H}_d$ é dado por $n+1$ polinômios homogêneos de grau d, $f = (f_0, \ldots, f_n)$ e, para tal f existe um aberto onde o posto é máximo, concluímos que $\mathcal{H}_d \subset \mathbb{P}^N$ é um aberto de Zariski.

Teorema 2.0.20 *[F-S] O conjunto dos endomorfismos de $\mathbb{P}^n$ que não admitem hipersuperfícies excepcionais é um aberto de Zariski em $\mathcal{H}_d$.*

Demonstração : Pelo teorema 2.0.17 basta considerar hipersuperfícies definidas por equações reduzidas $\check{h} = 0$ onde $\deg \check{h} \leq n+1$. Para cada $k \leq n+1$ identifique o espaço de polinômios de grau k com $\mathbb{P}^{N_k}$, seu espaço de coeficientes. Seja

$$\Sigma_k = \left\{(F, \check{h}) \in \mathcal{H}_d \times \mathbb{P}^{N_k} \,:\, \check{h} \circ f = c\,\check{h}^d \ \text{ para algum } \ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right\}.$$

Se F admite hipersuperfície excepcional, então $(F, \check{h}) \in \Sigma_k$, para algum $\check{h}$. A imagem de Σ_k pela projeção $P_1 : \Sigma_k \longrightarrow \mathcal{H}_d$ é um conjunto algébrico. Agora, para cada d, o endomorfismo F_d dado no exemplo 2.0.19 está em $\mathcal{H}_d$ e não admite hipersuperfície excepcional. Portanto, $P_1(\Sigma_k) \subset \mathcal{H}_d$ é um fechado de Zariski e o resultado segue. $\square$

Capítulo 3

Resultados

Teorema 3.0.21 *Seja H uma hipersuperfície excepcional. Se* $\deg H \geq 3$, *então H não é lisa.*

Demonstração : Dizer que H é lisa significa que o polinômio homogêneo h possui uma singularidade isolada em 0, ou seja, seu índice de Poincaré-Hopf é finito.

Defina o campo

$$X_{ij} = \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Podemos aplicar o campo X_{ij} na igualdade $h \circ f = ch^d$. Sem perda de generalidade, iremos considerar a igualdade $h \circ f = h^d$. Faremos para o caso $i = 0$ e $j = 1$. Segue-se então, $X_{01}(h \circ f) = X_{01}(h^d)$. Da segunda parte da igualdade, $dh^{d-1}h^{'} \cdot X_{01}$, analisamos:

$$h^{'} \cdot X_{01} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_0}, \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial h}{\partial x_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_0} = 0.$$

$$\Rightarrow X_{01}(h \circ f) = 0.$$

Assim,

$$f'(x) \cdot X_{01} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial h}{\partial x_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_0} \end{pmatrix}.$$

E então:

$$X_{01}(h \circ f) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_0} \circ f, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \circ f\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0}\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x_0} \circ f\right) X_{01}(f_0) + \ldots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_n} \circ f\right) X_{01}(f_n) = 0.$$

Finalmente,

$$X_{01}(h \circ f) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_k} \circ f\right) X_{01}(f_k) = 0.$$

Gereralizando, seja

$$X_{ij} = X \Rightarrow X(h \circ f) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial x_k} \circ f\right) X(f_k) = 0. \tag{3.1}$$

Chame
$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\circ f\right) = g_k \qquad \text{e} \qquad X(f_k) = \alpha_k.$$

Note que, pela definição dos g_i's, a condição $f^{-1}(0) = 0$ implica que a origem é o único ponto onde os g_i's se anulam simultaneamente. Temos $\alpha_0 g_0 + \ldots + \alpha_n g_n \equiv 0$. Queremos mostrar que existem polinômios homogêneos β_{kl} tais que
$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \sum \beta_{kl}(0, \ldots, g_l, 0, \ldots, 0, -g_k, 0, \ldots, 0)$$
sendo que g_l a g_k ocupam a k-ésima e a l-ésima posições, respectivamente.

Vamos supor, por contradição, que H é lisa, ou seja, H tem a origem como seu único ponto crítico. Tome
$$g = (g_0, \ldots, g_n) : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

Como H é lisa, $g^{-1}(0) = 0$ e temos $\{g_0, \ldots, g_n\}$ é uma sequência regular, isto é, g_i não é divisor de zero em
$$\frac{\mathbb{C}(z_0, \ldots, z_n)}{< g_0, \ldots, g_{i-1} >} \qquad \text{para} \qquad i = 0, \ldots, n.$$

De (3.1), ou seja, $\sum \alpha_k g_k = 0$, podemos reescrever
$$\alpha_n g_n = -\alpha_0 g_0 - \alpha_1 g_1 - \ldots - \alpha_{n-1} g_{n-1}.$$

Como g_n não é divisor de zero em $\dfrac{\mathbb{C}(z_0, \ldots, z_n)}{< g_0, \ldots, g_{n-1} >}$, a igualdade acima só é possível se a classe de α_n for a classe nula, mostrando que α_n é combinação dos elementos do ideal. Isso nos dará
$$\alpha_n = \alpha_{n_0} g_0 + \ldots + \alpha_{n_{n-1}} g_{n-1} = X(f_n).$$

O mesmo acontece para todos os α_i's. De maneira geral, temos
$$\alpha_n g_n = -\alpha_0 g_0 - \alpha_1 g_1 - \ldots - \alpha_{n-1} g_{n-1}$$
$$\Rightarrow \alpha_n = \alpha_{n_0} g_0 + \alpha_{n_1} g_1 + \ldots + \alpha_{n_{n-1}} g_{n-1}$$

$$\alpha_{n-1}g_{n-1} = -\alpha_0 g_0 - \alpha_1 g_1 - \ldots - \widehat{\alpha_{n-1}g_{n-1}} - \alpha_n g_n$$

$$\Rightarrow \alpha_{n-1} = \alpha_{(n-1)_0} g_0 + \alpha_{(n-1)_1} g_1 + \ldots + \widehat{g_{n-1}} + \alpha_{(n-1)_n} g_n$$

$$\vdots$$

$$\alpha_0 g_0 = -\alpha_1 g_1 - \ldots - \alpha_n g_n$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_{0_1} g_1 + \ldots + \alpha_{0_n} g_n$$

e podemos representar as igualdades acima da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \\ \vdots \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{0_1} & \ldots & \alpha_{0_n} \\ \alpha_{1_0} & 0 & \ldots & \alpha_{1_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-1)_0} & \ldots & 0 & \alpha_{(n-1)_n} \\ \alpha_{n_0} & \ldots & \alpha_{n_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ \\ \vdots \\ \\ g_n \end{pmatrix}$$

como gostaríamos.

Fixe k e suponha $X_{ij}(f_k) = 0 \ \forall \ i, j$.

$$X_{ij}(f_k) = \frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

$$dh \wedge df_k = \left(\frac{\partial h}{\partial x_0}dx_0 + \ldots + \frac{\partial h}{\partial x_n}dx_n\right) \wedge \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_0}dx_0 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x_0}dx_0 \wedge \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_0}dx_0 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}dx_n\right) + \ldots +$$

$$+\frac{\partial h}{\partial x_i}dx_i \wedge \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_0}dx_0 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}dx_n\right) + \ldots + \frac{\partial h}{\partial x_n}dx_n \wedge \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_0}dx_0 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial x_0}\frac{\partial f_k}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial f_k}{\partial x_0}\right) dx_0 \wedge dx_1 + \ldots + \left(\frac{\partial h}{\partial x_0}\frac{\partial f_k}{\partial x_n} - \frac{\partial h}{\partial x_n}\frac{\partial f_k}{\partial x_0}\right) dx_0 \wedge dx_n +$$

$$+\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial f_k}{\partial x_2}-\frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)dx_1\wedge d_2+\ldots+\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial f_k}{\partial x_n}-\frac{\partial h}{\partial x_n}\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)dx_1\wedge dx_n+\ldots$$

$$\Rightarrow dh\wedge df_k=\sum_{i<\,j}X_{ij}(f_k)\ \ dx_i\wedge dx_j=0.$$

Como h é homogêneo reduzido, então concluir que $dh\wedge df_k=0$ nos diz que $df_k=\ell_k dh$, onde ℓ_k é um polinômio homogêneo de grau fixo, já que f_i tem mesmo grau $\forall i$.

$$df_k=\ell_k dh\ \Rightarrow\ \frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\ell_k\frac{\partial h}{\partial x_i}\ \Rightarrow\ x_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\ell_k x_i\frac{\partial h}{\partial x_i}$$

Somando em i:

$$\sum_i x_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\sum_i \ell_k x_i\frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Pela Fórmula de Euler, temos $\deg(f_k)f_k=\ell_k\deg(h)h$, o que implica que h divide cada componente de f, os f_i's. Porém, o único zero comum dos f_i's é a origem, uma contradição, já que h possui zero fora da origem.

Agora tome

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}-\frac{\partial h}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\neq 0.$$

Analisando pelo grau, temos

$$\deg(X_{ij}(f_k))=(\underbrace{\deg(h)-1}_{\deg\frac{\partial h}{\partial x}})+d-1$$

$$\deg(\frac{\partial h}{\partial x_i}\circ f)=(\deg(h)-1)d.$$

E então

$$\underbrace{X_{ij}(f_k)}_{(\deg(h)-1)+(d-1)} = \sum \alpha_{kl} \underbrace{g_l}_{(\deg(h)-1)d}$$

$$\deg(h) - 1 + d - 1 \geq (\deg(h) - 1)d$$

$$d - 1 \geq (\deg(h) - 1)(d - 1)$$

$$\text{Como } \ d > 2 \Rightarrow \deg(h) \leq 2$$

Absurdo. □

A demonstração do Teo (3.0.21) não se aplica para grau 2. No caso das quádricas, podemos dizer

Teorema 3.0.22 *Uma quádrica lisa $H \subset \mathbb{P}^n$ não pode ser excepcional em dimensão ≥ 2.*

Demonstração : Seja $f = (f_0, \ldots, f_n)$ sendo a quádrica H definida pela equação $h = x_0^2 + \ldots + x_n^2$. Considerando H hipersuperfície excepcional, vamos chegar a uma contradição pela igualdade

$$h \circ f = f_0^2 + \ldots + f_n^2 = (x_0^2 + \ldots + x_n^2)^d$$

sendo que $d = \deg f$. Seja $\mathrm{O}(n+1, \mathbb{C})$ o grupo linear ortogonal complexo

$$\mathrm{O}(n+1, \mathbb{C}) = \{g \in Gl(n+1, \mathbb{C}), g\, g^T = I\}.$$

Esse grupo é caracterizado pela preservação da forma quadrática $h = x_0^2 + \ldots + x_n^2 = x^T\, I\, x$, ou seja,

$$\mathrm{O}(n+1, \mathbb{C}) = \{g \in Gl(n+1, \mathbb{C}), h \circ g = h\}.$$

$\mathrm{O}(n+1, \mathbb{C})$ não é compacto para $n \geq 1$ e possui duas componentes conexas. Denotamos por $\mathrm{SO}(n+1, \mathbb{C})$ a componente neutra, isto é, a componente que contém a identidade (um subgrupo normal).

Sua álgebra de Lie, $\mathrm{so}(n+1,\mathbb{C})$, se identifica com a álgebra gerada pelos campos lineares

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

que veremos como derivações ou como matrizes.

Da igualdade $h \circ f = f_0^2 + \ldots + f_n^2 = (x_0^2 + \ldots + x_n^2)^d = h^d$ temos

$$X_{ij}(h^d) = d.\, h^{d-1} X_{ij}(h) = d.\, h^{d-1}(2x_j x_i - 2x_i x_j) = 0$$

e como

$$X_{ij}(h^d) = X_{ij}(h \circ f) = X_{ij}(f_0^2 + \ldots + f_n^2) = 2 \sum_k f_k \, X_{ij}(f_k)$$

obtemos a relação

$$\sum_k f_k \, X_{ij}(f_k) = 0.$$

Agora, se $X \in \mathrm{so}(n+1,\mathbb{C})$, então X é combinação linear dos X_{ij} e portanto

$$\sum_k f_k \, X(f_k) = 0 \quad \forall \; X \in \mathrm{so}(n+1,\mathbb{C}). \tag{3.2}$$

Por outro lado, $f_0, \ldots, f_n$ formam uma sequência regular e a relação (3.2) é portanto trivial. Isso quer dizer:

$$\begin{aligned} X(f_0) &= \sum_{j \neq 0} A_{0j} \, f_j \\ X(f_1) &= \sum_{j \neq 1} A_{1j} \, f_j \\ &\vdots \\ X(f_n) &= \sum_{j \neq n} A_{nj} \, f_j \end{aligned}$$

Como $\deg X(f_i) = d$, os A_{ij} são números complexos. Manipulando (3.2) temos

$$A_{01} f_0 f_1 + f_0 \left(\sum_{j=2}^{n} A_{0j} \, f_j \right) + A_{10} f_0 f_1 + f_1 \left(\sum_{j=2}^{n} A_{1j} \, f_j \right) + \sum_{j \geq 2} f_i X(f_i) = 0.$$

Assim,

$$(A_{01}+A_{10})f_0f_1 = f_0B_0(f_2,\ldots,f_n)+f_1B_1(f_2,\ldots,f_n)-\sum_{j\geq 2} f_j\,X(f_j) \quad (3.3)$$

onde $B_0(f_2,\ldots,f_n)=\sum\limits_{j=2}^{n} A_{0j}\,f_j$ e $B_1(f_2,\ldots,f_n)=\sum\limits_{j=2}^{n} A_{1j}\,f_j$.

Escolha um ponto p tal que $f_0(p)\neq 0$, $f_1(p)\neq 0$ e $f_2(p)=\cdots=f_n(p)=0$. Concluímos que $A_{01}+A_{10}=0$ e analogamente, $A_{ij}+A_{j\,i}=0$.

Logo, temos uma matriz anti-simétrica $\sigma(X)$ tal que

$$X(f)=\sigma(X).f. \quad (3.4)$$

A aplicação $X\longmapsto\sigma(X)$ define um morfismo $\sigma:\mathrm{so}(n+1,\mathbb{C})\hookleftarrow$, de núcleo trivial. Com efeito, se $\sigma(X)=0$ para algum X não nulo então

$$\sigma(X)f=X(f)=0\Rightarrow (X(f_0),X(f_1),\ldots,X(f_n))=0.$$

$$\begin{cases} X(f_0)=0 \\ \qquad\vdots \\ X(f_n)=0 \end{cases} \Rightarrow df_0(p)\wedge\ldots\wedge df_n(p)=0$$

em todos os pontos nos quais X é não nulo.

Como $df_0(p)\wedge\ldots\wedge df_n(p)=\det(Jf)(p)\,dx_0\wedge\ldots\wedge dx_n=0$, $\det(Jf)=0$ no aberto definido pelos pontos onde o campo X não se anula. Sabemos que a aplicação $\det(Jf):\mathbb{C}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{C}$ é analítica e se anula num aberto, então $\det(Jf)\equiv 0$, o que nos mostra que f não tem posto máximo (neste caso, $n+1$). Tome o conjunto aberto $\{p\in\mathbb{C}^{n+1}\mid \text{o posto de } f(p) \text{ é máximo}\}$. Pelo teorema do posto, f não é aberta, o que contradiz a proposição 1.3.8.

Vamos agora explorar a igualdade (3.4), $X(f)=\sigma(X).f$.

Integramos o lado esquerdo, isto é, olhamos para o fluxo de X ao longo de f: $f(\exp tX)$. Aqui cabe um pouco de notação. Para cada ponto p, $\exp tX$ denota a única solução de X por p, $\varphi_p(t)$ onde $\varphi_p(0) = p$ (translação do subgrupo a 1-parâmetro definido por X ao ponto p). Temos então

$$\frac{d}{dt} f(\exp tX) = f'(\exp tX). \exp tX.X.$$

Avalie em $t = 0$ e obtenha $f'(p).Id.X(p) = f'(p).X(p) = X(f)(p)$. Logo, qualquer que seja p:

$$\frac{d}{dt} f(\exp tX) = X(f). \tag{3.5}$$

Integramos agora o lado direito de (3.4) e obtemos $\exp t\sigma(X).f$. Novamente, a interpretação é: tomamos a órbita $\exp t\sigma(X).f$ pelo ponto p no tempo 0. Temos

$$\frac{d}{dt} \exp t\sigma(X).f = \sigma(X). \exp t\sigma(X).f.$$

Avaliando em $t = 0$ ficamos com $\sigma(X).Id.f(p) = \sigma(X).f(p)$. Logo,

$$\frac{d}{dt} \exp t\sigma(X).f = \sigma(X).f. \tag{3.6}$$

Finalmente, pela unicidade dos subgrupos a 1-parâmetro (veja [T]),

$$f(\exp tX) = \exp t\sigma(X) \cdot f, \quad \forall \ t \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

Vamos iterar (3.7) por f. Temos

$$f \circ f(\exp tX) = f^2(\exp tX) = f(\exp t\sigma(X) \cdot f)$$

$$= \exp t\sigma(\sigma(X)) \cdot f^2 = \exp t\sigma^2(X) \cdot f^2 \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Assim sendo,

$$f^m(\exp tX) = \exp t\sigma^m(X) \cdot f^m \quad \forall t \in \mathbb{C}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Agora, $\sigma \in Aut(so(n+1,\mathbb{C}))$ e por um teorema de [B], o iterado de ordem suficientemente alta de um tal automorfismo é um automorfismo interior, isto é, para $k >> 1$, $\exists\, A \in SO(n+1,\mathbb{C})$ tal que

$$\sigma^k(X) = A^{-1}XA \qquad \forall X. \tag{3.9}$$

Como

$$\exp t\sigma^k(X) = \exp tA^{-1}XA = A^{-1}\, \exp t\, XA$$

ficamos com

$$(A.f^k)(\exp tX) = (\exp tX)(A.f^k) \quad \forall\, t, \quad \forall\, X. \tag{3.10}$$

Como A é invertível, a aplicação g definida por $g = A.f^k$ é um endomorfismo que satisfaz $g(\exp tX) = (\exp tX)g \ \ \forall\, t, \forall\, X$.

Por (3.10), denotando $\exp tX = M_t$, temos que $M_t\, g = g\, M_t$, ou seja, g comuta com uma infinidade de elementos de $SO(n+1)$.

Seja p um ponto fixo de g. Então

$$g(M_t(p)) = M_t(g(p)) = M_t(p)$$

o que mostra que $M_t(p)$ também é um ponto fixo de g. Logo, o endomorfismo g admite uma infinidade de pontos fixos, o que é um absurdo pela Proposição 1.3.11. $\square$

Referências Bibliográficas

[B] BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Vol. 7-8, Hermann, Paris.

[C-LN] D. CERVEAU ET A. LINS NETO, *Hypersurfaces exceptionelles des endomorphismes de* $\mathbb{CP}(n)$, Bol. Soc. Bras. Mat. Soc., Vol 31, No 2, (2000), 155-161.

[LN] A. LINS NETO, *Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações*, Publicações Matemáticas, IMPA, ISBN 978-85-244-0251-7, 2007.

[F-S] J.E.FORNAESS & N.SIBONY, *Complex dynamics in higher dimension.I.*, Astérisque **222**, 201-231.

[M] D.MUMFORD, *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties*, Corrected Second Printing, ISBN 3-540-07603-4 Springer-Verlag (1976).

[MS] M.SEBASTIANI, *Introdução à Geometria Analítica Complexa*, Projeto Euclides, ISBN 85-244-0218-0 Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2004)

[S] M.G.SOARES, *Lectures on Point Residues*, Monografias del IMCA n°28, ISBN 9972-899-09-8 Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines (2002).

[T] K.TAPP, *Matrix Groups for undergraduates*, Student Mathematical Library, Vol 29, ISBN 0-8218-3785-0 (2005).