

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Subvariedades Lagrangianas
e
a equação de Hamilton-Jacobi**

por

Justino Muniz Júnior

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

2009

Subvariedades Lagrangianas e a equação de Hamilton-Jacobi

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por **Justino Muniz Júnior**.

Belo Horizonte, 16 de fevereiro de 2009.

Prof. **Mário Jorge Dias Carneiro**.

Orientador

Banca examinadora:

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda

Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera

Prof. Carlos Maria Carballo

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas, **ICEX**, como requisito para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

*"O homem vive de razão e sobrevive
de sonhos". Miguel de Unamuno*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus. Meus pais Justino e Carolina pelo apoio incondicional. Meus pais "reservas" Magela e Izabel por me acolherem sempre. Minhas irmãs e sobrinhos pela vibração. Júnior pelo incentivo. Minha prenda Ana Gabriela e toda sua família pela torcida. Família Cosa Nostra pela cumplicidade.

Pelo lado acadêmico, ainda na graduação, a todos da UFOP, em especial os professores Antônio, Gonzalo, Adilson, João e Paulo. Este último que me apontou o difícil caminho a ser trilhado. Na transição, ao professor Gastão por toda confiança e credibilidade depositadas. Já no mestrado a todos os amigos da pós-graduação pela boa vontade, especialmente o Alexandre. No que diz respeito à elaboração e conclusão deste trabalho agradeço à banca examinadora pelas correções e sugestões apresentadas, não esquecendo que nesta esteve presente meu orientador, o professor Mário Jorge, um matemático de excelência a quem tenho muita admiração.

Finalizando agradeço ao suporte financeiro da Capes que, certamente, foi indispensável e a todos que não mencionei, mas que tiveram importante papel nesta tão esperada conquista. Obrigado a todos!

Sumário

Introdução	6
1 Definições e Resultados Básicos	8
1.1 Lagrangianos	8
1.1.1 O Campo de Euler-Lagrange e seu Fluxo	13
1.2 Hamiltonianos	14
1.2.1 Subvariedades Lagrangianas	19
1.2.2 A equação de Hamilton-Jacobi	22
2 Teorema de Tonelli	23
2.1 Existência de Minimizantes de Tonelli	23
2.2 Regularidade das Minimizantes de Tonelli	27
3 Ação Potencial e Valor Crítico de Mañé	29
3.1 Propriedades do Valor Crítico	30
3.2 Minimizantes Globais	35
3.3 Barreira de Peierls	41
4 Subvariedades Lagrangianas e Subsoluções de Hamilton-Jacobi	46
4.1 Gráficos Lagrangianos	46
4.2 Subsoluções de Hamilton-Jacobi	50
4.3 O Teorema: Existência de Gráficos Lagrangianos Exatos	52
4.4 Subsoluções Críticas de Hamilton-Jacobi	58
Referências Bibliográficas	60

Introdução

A Dinâmica Lagrangiana descreve o movimento em um sistema mecânico e é dada por uma variedade M e uma função L (Lagrangiano) em seu fibrado tangente TM . A Mecânica Newtoniana está aí contida. Já a Hamiltoniana é dada por uma variedade N de dimensão par, uma estrutura simplética ω (uma 2-forma fechada não-degenerada) e uma função H (Hamiltoniano) definida na variedade simplética (N, ω) . Se L for superlinear e convexo nas fibras, então a Dinâmica Lagrangiana relaciona-se com a Hamiltoniana no seguinte sentido: a variedade N em questão é o fibrado cotangente T^*M de M e a Transformada de Legendre \mathcal{L} do Lagrangiano L é um difeomorfismo global de TM em T^*M .

O presente trabalho se propõe a estudar Subvariedades Lagrangianas. Estas são subvariedades de T^*M invariantes pelo Fluxo Hamiltoniano ϕ_t^H , cuja dimensão n é a metade da dimensão de T^*M . Faremos também um pequeno estudo da equação de Hamilton-Jacobi no caso autônomo, cujas soluções regulares definem Subvariedades Lagrangianas especiais (Gráficos Lagrangianos). O exemplo mais famoso de Subvariedade Lagrangiana é o gráfico. Em particular, no caso em que $M = T^n$, o toro de dimensão n , os toros invariantes do tipo KAM são Gráficos Lagrangianos. Trataremos também a equação de Hamilton-Jacobi, cujo desenvolvimento detalhado nos foge o objetivo. Para um estudo aprofundado consulte [5, capítulo 9]. A equação de Hamilton-Jacobi é considerada a peça central da mecânica analítica, que é responsável pelo grande desenvolvimento de fundamentos matemáticos da mecânica quântica como também na análise em variedades. A teoria de Hamilton-Jacobi é baseada não apenas nos trabalhos de Hamilton e Jacobi, como de seus precursores: Fermat, Newton, Huygens, Johann Bernoulli, Euler, Lagrange, Legendre, Monge, Plaff, Poisson, etc.. As contribuições de Lie, Poincaré e E. Cartan tiveram grande influência em seu entendimento atual.

Apresentaremos aqui um esboço do que será trabalhado em cada capítulo. No capítulo 1 daremos suporte preliminar aos demais capítulos. Desenvolveremos aspectos centrais no estudo Lagrangiano e Hamiltoniano via equação de Euler-Lagrange (usada na solução de

problemas de otimização, cujo objetivo é minimizar ou maximizar um certo funcional) usando o cálculo das variações. Devido à importância do Teorema de Tonelli reservamos o capítulo 2 para sua demonstração. O capítulo 3 se refere ao estudo de curvas especiais (minimizantes globais), cuja existência é caracterizada pelo Valor Crítico de Mañé $c(L)$. Definiremos a Barreira de Peierls, uma aplicação que caracteriza o conjunto de Aubry projetado (ou conjunto de Peierls). No último capítulo trabalharemos algumas propriedades de Gráficos Lagrangianos. Nosso resultado principal será um teorema que relaciona a existência de tais subvariedades com o valor crítico $c(L)$, cuja versão original pode ser encontrada em [6]. Este está diretamente ligado à existência de subsoluções regulares da equação de Hamilton-Jacobi. Finalizaremos com alguns resultados recentes sobre a existência de tais subsoluções.

Capítulo 1

Definições e Resultados Básicos

Como o próprio título sugere este capítulo destina-se a fornecer suporte aos desenvolvimentos posteriores. Abordaremos aqui a Dinâmica Lagrangiana e Hamiltoniana em sua essência.

1.1 Lagrangianos

Sejam M uma variedade C^∞ sem bordo, TM seu fibrado tangente e $\pi : TM \rightarrow M$, $(x, v) \mapsto x$, a projeção canônica tal que $\pi^{-1}(x) = T_x M$ para todo $x \in M$. Um Lagrangiano de M é uma função contínua $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é dita *absolutamente contínua* se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada família $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, N\}$ de subintervalos de $[0, T]$ disjuntos dois a dois satisfazendo $\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta$ tivermos que $\sum_{i=1}^N d_M(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) < \epsilon$.

Apesar de vários resultados tratados serem válidos para situações mais gerais, faremos algumas restrições. Nossas hipóteses serão:

1. M compacta;
2. L de classe C^r , $r \geq 2$;
3. L estritamente convexo nas fibras, ou seja, para cada $x \in M$ e todos $v, w \in T_x M$ tem-se

$$L(x, tv + (1-t)w) < tL(x, v) + (1-t)L(x, w), \forall t \in (0, 1);$$

4. L superlinear, isto é, dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$L(x, v) \geq A\|v\| - B \quad \forall (x, v) \in TM.$$

Um Lagrangiano L satisfazendo as hipóteses 2, 3 e 4 é dito *Lagrangiano de Tonelli*.

Definição 1.1. Se L é um Lagrangiano de M e $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é uma curva absolutamente contínua, definimos a ação $A_L(\gamma)$ de γ para L por

$$A_L(\gamma) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Dada uma classe C de curvas absolutamente contínuas em M , dizemos que γ é uma *minimizante para a classe C* se $A_L(\gamma) \leq A_L(\delta)$ para toda $\delta \in C$.

Definição 1.2. Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é uma curva C^r , uma variação C^r de γ é uma aplicação $\Gamma : [0, T] \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ de classe C^r , com $\epsilon > 0$, tal que $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Definição 1.3. (Curva Extremal) Dizemos que uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ de classe C^r é uma extremal de L se para cada variação de classe C^r $\Gamma : [0, T] \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ de γ , com $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ em uma vizinhança de $(0, 0)$ e $(T, 0)$, tivermos $\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = 0$.

Lema 1.1. Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é tal que $A_L(\gamma) \leq A_L(\delta)$ para toda δ de classe C^r tal que $\delta(0) = \gamma(0)$ e $\delta(T) = \gamma(T)$ então γ é extremal.

Prova: Para cada variação de classe C^r $\Gamma : [0, T] \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ de γ , com $\Gamma(t, s) = \gamma(t)$ em uma vizinhança de $(0, 0)$ e $(T, 0)$ defina

$$\lambda(s) = A_L(\Gamma) \Rightarrow \frac{d\lambda}{ds}(0) = \frac{d}{ds} A_L(\Gamma) |_{s=0}.$$

Como $\lambda(0) = A_L(\gamma) \leq \lambda(s)$ para todo $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, logo $\frac{d\lambda}{ds}(0) = 0$. ■

Trataremos de alguns resultados locais. Podemos supor, via cartas coordenadas, que M seja um aberto de \mathbb{R}^n . A equação

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

é conhecida como a *equação de Euler-Lagrange*.

Proposição 1.1. (Primeira Fórmula da Variação) Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ de classe C^r satisfaz à equação de Euler-Lagrange, então para qualquer variação Γ de classe C^r temos

$$\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(T), \dot{\gamma}(T)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(T, 0) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, 0).$$

Prova: Tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s) &= \int_0^T \frac{d}{ds} \left[L \left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) \right) \right] dt \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x} \left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, s) + \frac{\partial L}{\partial v} \left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) \right) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, s) \right] dt. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right] dt.$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)),$$

donde

$$\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = \int_0^T \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}(t, 0) \right] dt.$$

Mas o integrando da equação acima é a derivada da aplicação $t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)$ que é de classe C^{r-1} . Portanto

$$\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(T), \dot{\gamma}(T)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(T, 0) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, 0).$$

■

A seguinte proposição a caracteriza a equação de Euler-Lagrange em termos de extremais:

Proposição 1.2. (Euler-Lagrange) γ é extremal se, e somente se, satisfaz Euler-Lagrange.

Prova: Primeiramente provemos a recíproca. Pela Primeira Fórmula da Variação, observando que $\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(T, 0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, 0) = 0$, obtemos γ extremal. Suponha agora γ extremal e considere uma variação Γ de classe C^r definida por $\Gamma(t, s) = \gamma(t) + s\gamma_1(t)$ onde $\gamma_1 : [0, T] \rightarrow M$ é uma curva C^∞ tal que $\gamma_1 = 0$ em uma vizinhança de 0 e de T . Então a aplicação

$$t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t))$$

é de classe C^{r-1} e vale 0 em 0 e T . Logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) \right] dt = 0,$$

o que resulta em

$$\int_0^T \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) (\dot{\gamma}_1(t)) dt = - \int_0^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] (\gamma_1(t)) dt.$$

Pela demonstração da Primeira Fórmula da Variação temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} &= \int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) (\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) (\dot{\gamma}_1(t)) \right] dt \\ &= \int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \right\} (\gamma_1(t)) dt. \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{ds} \mathbb{L}(\Gamma_s)_{s=0} = 0$, temos

$$\int_0^T \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right] \right\} (\gamma_1(t)) dt = 0,$$

para qualquer curva $\gamma_1 : [0, T] \rightarrow M$ que vale zero em uma vizinhança de 0 e de T . Segue do lema de Dubois-Raymond abaixo que se γ é extremal, então γ satisfaz Euler-Lagrange. ■

Lema 1.2. (Dubois-Raymond) *Seja $A : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ contínua tal que, para toda curva $\gamma_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ que se anula em uma vizinhança de 0 e T satisfaz*

$$\int_0^T A(t) \gamma_1(t) dt = 0.$$

Então $A \equiv 0$.

Prova: Suponha por contradição que existam $t_0 \in [0, T]$ e $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $A(t_0)v_0 \neq 0$. Trocando v_0 por $-v_0$ se necessário, podemos supor $A(t_0)v_0 > 0$. Pela continuidade fixamos $\epsilon > 0$ tal que $A(t)v_0 > 0$ para todo $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\subset]0, T[$. Tomemos uma função bump $\varphi : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\varphi(t) = 0, t \notin]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\text{ e } \varphi(t_0) = 1.$$

Logo

$$0 = \int_0^T A(t) (\varphi(t)v_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} A(t) (\varphi(t)v_0) dt.$$

Por outro lado $\varphi(t)A(t)v_0$ é contínua, não-negativa em $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ e $A(t_0)v_0 > 0$. Com isso $\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} A(t) (\varphi(t)v_0) dt > 0$. ■

Considere a aplicação $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$, $(x, v) \mapsto (x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v))$, onde T^*M denota o fibrado cotangente da variedade M . Como L é estritamente convexo e de classe C^r , $r \geq 2$, então $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ é não-degenerada como forma quadrática e \mathcal{L} é de classe C^{r-1} . Afirmamos que \mathcal{L} é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Prova: Com efeito,

$$D\mathcal{L}(x, v) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \end{bmatrix}.$$

Como $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}$ é não-degenerada, logo $D\mathcal{L}(x, v)$ é isomorfismo. Portanto segue do teorema da função inversa que \mathcal{L} é um difeomorfismo local. Mostraremos agora que \mathcal{L} é injetiva. Suponhamos que $L_v(x, v) = L_v(x, w)$. Defina ψ por

$$\psi(t) = L_v(x, tv + (1-t)w)(v-w).$$

Note que $\psi(1) = L_v(x, v)(v-w) = L_v(x, w)(v-w) = \psi(0)$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (0, 1)$ tal que $\psi'(c) = 0$. Mas L é não-degenerado e

$$\psi'(t) = (v-w) L_{vv}(x, tv + (1-t)w)(v-w) > 0 \text{ se } v \neq w.$$

Portanto $v = w$ e com isso \mathcal{L} é injetiva. ■

A aplicação \mathcal{L} é conhecida como *Transformada de Legendre* associada ao Lagrangiano L . Mostraremos adiante usando a superlinearidade de L que a transformada de Legendre é na verdade um difeomorfismo global.

Enunciaremos agora um lema que admitiremos sem demonstração. A prova deste pode ser encontrada em [10, lema 2.2.8]:

Lema 1.3. *Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é uma extremal de classe C^1 , então existe $p \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que, para todo $t \in [0, T]$,*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Usaremos este e o fato da transformada de Legendre ser um difeomorfismo sobre sua imagem para provar o seguinte:

Proposição 1.3. *Toda extremal de classe C^1 é na verdade de classe C^r .*

Prova: Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ uma extremal de classe C^1 . Fixado t_0 considere

$$(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) = (x_0, v_0) \in TM.$$

Logo

$$\mathcal{L}^{-1} \left(x_0, \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0) \right) = (x_0, v_0).$$

Para t suficientemente próximo de t_0 ,

$$(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \mathcal{L}^{-1} \left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \right).$$

Pelo lema 1.3,

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Temos que $\frac{\partial L}{\partial v}$ é de classe C^1 , a mesma classe de diferenciabilidade de $p + \int_0^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$. Como \mathcal{L}^{-1} é de classe C^{r-1} , segue que $\dot{\gamma}$ é de classe C^1 , obtendo assim γ de classe C^2 . Repetindo o processo sucessivamente obtemos $\dot{\gamma}$ de classe C^{r-1} . ■

O seguinte teorema é apenas uma versão mais formal de como obter a caracterização da proposição 1.2 para variedades:

Teorema 1.1. (*Euler-Lagrange*) *Seja L um Lagrangiano em uma variedade M . Uma curva de classe C^r $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma extremal se e somente se satisfaz, em coordenadas, a equação de Euler-Lagrange.*

Prova: O resultado segue da proposição 1.2. Se γ é uma extremal, então para cada subintervalo $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ tal que $\gamma([\alpha, \beta])$ está contido em uma carta coordenada, a restrição $\gamma|_{[\alpha, \beta]}$ satisfaz em coordenadas a equação de Euler-Lagrange. Reciprocamente, se para $c \in [0, T]$ existir uma vizinhança $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ de c tal que $\gamma([\alpha, \beta])$ está contida em uma carta coordenada satisfazendo Euler-Lagrange, então γ é uma extremal. ■

1.1.1 O Campo de Euler-Lagrange e seu Fluxo

Se $v = \dot{x}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v + \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \dot{v}.$$

Como L é não-degenerado,

$$\dot{v} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right].$$

O campo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \left[\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \right]^{-1} \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) v \right]\end{aligned}$$

é dito *Campo de Euler-Lagrange* e denotado por X_L . Claramente X_L é de classe C^{r-2} . Se $r = 2$ não podemos garantir unicidade de soluções. Posteriormente mostraremos que este é na verdade de classe C^{r-1} . Suponhamos a priori $r \geq 3$ para que faça sentido ϕ_t^L ser o fluxo associado conhecido como o *Fluxo de Euler-Lagrange*.

1.2 Hamiltonianos

Seja T^*M o fibrado cotangente de uma variedade M . Defina a *1-forma de Liouville* Θ em T^*M por

$$\Theta_{(x,p)}(\xi) = p(d\pi_{(x,p)}^* \xi) \text{ com } (x,p) \in T^*M \text{ e } \xi \in T_{(x,p)}(T^*M),$$

onde $\pi^* : T^*M \rightarrow M$ é a projeção e $d\pi^* : T(T^*M) \rightarrow TM$ sua derivada. A *forma simplética canônica* em T^*M é definida como $\omega = -d\Theta$, que é uma 2-forma fechada e não-degenerada ($\omega(W, \cdot)$ é um isomorfismo).

Uma carta local $x = (x_1, \dots, x_n)$ de M induz uma carta local de T^*M da forma $(x, p) = (x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$, onde, para cada $(x, p) \in T^*M$ temos $p = \sum_i p_i(x) dx_i$. Nessas coordenadas as formas Θ e ω são dadas por

$$\begin{aligned}\Theta_{(x,p)} &= p \cdot dx = \sum_i p_i dx_i, \\ \omega_{(x,p)} &= -dp \wedge dx = \sum_i dx_i \wedge dp_i.\end{aligned}$$

Um *Hamiltoniano* é uma função $H : (N, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade simplética de classe C^r , $r \geq 2$. O *Campo Hamiltoniano* X_H associado a H é definido por

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot).$$

Estaremos interessados apenas em Hamiltonianos definidos no fibrado cotangente. Neste caso, em cartas locais, o Campo Hamiltoniano define o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_x,\end{aligned}$$

onde H_x e H_p são derivadas parciais de H com relação a x e p , ou seja,

$$X_H = J \cdot dH \text{ com } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma *Integral Primeira* para um campo é uma função que é constante ao longo das órbitas deste. Temos portanto que H é uma integral primeira de X_H . De fato,

$$\frac{d}{dt}H(x, p) = H_x \dot{x} + H_p \dot{p} = 0 \Rightarrow H(x, p) = c \in \mathbb{R}.$$

Seja $\phi_t^H : T^*M \rightarrow T^*M$ o *Fluxo Hamiltoniano*. Temos que ϕ_t^H é canônico ($(\phi_t^H)^* \omega = \omega$), ou seja, preserva a forma simplética ω . Com efeito, sabendo que

$$\mathcal{L}_X \eta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* \eta - \eta}{t}$$

denota a derivada de *Lie* de uma forma η com respeito a um campo X e de posse da fórmula de Cartan

$$\mathcal{L}_X \eta = di_X \eta + i_X d\eta$$

temos que

$$\frac{d}{dt}((\phi_t^H)^* \omega) = \mathcal{L}_{X_H} \omega = di_{X_H} \omega + i_{X_H} d\omega = d\omega(X_H, \cdot) + i_{X_H}(0) = d(dH) = 0,$$

onde $i_X \eta = \eta(X, \cdot)$ é a contração por X . Logo

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t^H)^* \omega - \omega}{t} = 0 \Rightarrow (\phi_t^H)^* \omega = (\phi_0^H)^* \omega = \omega.$$

Observação 1.1. L é superlinear se, e somente se, $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = +\infty$. De fato, se L é superlinear dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$L(x, v) + B \geq A \|v\| \Rightarrow \lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = +\infty.$$

Reciprocamente dado $A > 0$ existe $B_0 > 0$ tal que, se $\|v\| \geq B_0$, então

$$L(x, v) \geq A \|v\|.$$

Por outro lado, se $\|v\| \leq B_0$, seja $M = \min_{\|v\| \leq B_0} L(x, v)$ e $B = AB_0 + |M|$. Mas sabemos que $L(x, v) \geq -|M|$ e $A(\|v\| - B_0) \leq 0$,

$$L(x, v) \geq A(\|v\| - B_0) - |M| = A \|v\| - B.$$

Lema 1.4. *Se L é convexo para cada $x \in M$ é verdade que*

$$L(x, w) - L(x, v) \geq L_v(x, v)(w - v) \forall v, w \in T_x M.$$

Prova: Defina $f(t) = L(x, tv + (1-t)w)$. Logo

$$f'(t) = L_v(x, tv + (1-t)w)(v - w).$$

Se $t > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} &\leq \frac{L(x, tv + (1-t)w) - L(x, v)}{t - 1} \\ &\leq \frac{(t-1)L(x, v) + (1-t)L(x, w)}{t - 1} \\ &= L(x, v) - L(x, w). \end{aligned}$$

Logo

$$L_v(x, v)(w - v) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \leq L(x, v) - L(x, w).$$

■

Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos sua *Transformada de Fenchel* $f^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{px - f(x)\}.$$

Lema 1.5. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, superlinear e convexa, então f^* é superlinear e convexa. Além disso $f = f^{**}$.*

Prova: Dados $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^{n*}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} f^*(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)x - f(x)\} \\ &\leq \lambda \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p_1(x) - f(x)\} + (1-\lambda) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{p_2(x) - f(x)\} \\ &= \lambda f^*(p_1) + (1-\lambda) f^*(p_2) \end{aligned}$$

o que mostra a convexidade de f^* . Para a superlinearidade, dado $A > 0$ seja

$$B(A) = \sup_{\|x\|=A} f(x) < +\infty$$

pela continuidade. Logo

$$f^*(p) \geq \sup_{\|x\|=A} px - \sup_{\|x\|=A} f(x) = A \|p\| - B(A).$$

Agora, dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^{n*}$ temos $f^*(p) \geq px - f(x)$. Então

$$f(x) \geq \sup_{p \in \mathbb{R}^{n*}} \{px - f^*(p)\} = f^{**}(x).$$

Por outro lado, pela convexidade, $f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$. Portanto

$$f^*(df(x)) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{df(x)y - f(y)\} \leq df(x)x - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Segue que

$$f(x) \leq df(x)x - f^*(df(x)) \leq \sup_{p \in \mathbb{R}^{n*}} \{px - f^*(p)\} = f^{**}(x).$$

■

Estaremos interessados em Hamiltonianos da forma

$$H(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Observação 1.2. Pela superlinearidade de L , como $\frac{pv}{\|v\|}$ é limitado,

$$\frac{pv}{\|v\|} - \frac{L(x, v)}{\|v\|} \rightarrow -\infty \text{ quando } \|v\| \rightarrow \infty,$$

logo $pv - L(x, v) \rightarrow -\infty$ quando $\|v\| \rightarrow \infty$ e o máximo em v de $pv - L(x, v)$ será atingido em um compacto. Portanto

$$H(x, p) = \max_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Lema 1.6. $H(x, p) = pv - L(x, v)$ se, e somente se $p = L_v(x, v)$.

Prova: Se $H(x, p_0) = p_0v_0 - L(x, v_0)$, como $p_0v \leq H(x, p_0) + L(x, v)$,

$$p_0(v - v_0) \leq L(x, v) - L(x, v_0) \quad \forall v \in T_x M.$$

Em particular para $v = v_0 + \epsilon w$,

$$p_0w \leq \frac{L(x, v_0 + \epsilon w) - L(x, v_0)}{\epsilon} \rightarrow L_v(x, v_0)w \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Portanto $p_0w \leq L_v(x, v_0)w$ para todo $w \in T_x M$, então

$$p_0(-w) \leq L_v(x, v_0)(-w) \Rightarrow p_0w \geq L_v(x, v_0)w.$$

Reciprocamente, pelo lema 1.4,

$$L(x, v) - L(x, w) \geq L_v(x, w)(v - w) \Rightarrow L_v(x, w)w - L(x, w) \geq L_v(x, w)v - L(x, v).$$

Tomando o máximo em v obtemos

$$H(x, L_v(x, w)) \leq L_v(x, w) w - L(x, w) \leq H(x, L_v(x, w)).$$

■

A função $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $E(x, v) = L_v(x, v)v - L(x, v)$ é dita *função energia*. Lembramos que a transformada de Legendre é dada por $\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v))$. Pela observação acima temos que $E = H \circ \mathcal{L}$. Sob as hipóteses de L ser um Lagrangiano de Tonelli vimos que \mathcal{L} é difeomorfismo sobre sua imagem. Mostraremos que \mathcal{L} é sobrejetiva e, portanto, um difeomorfismo global. Com efeito, dado $(x, p) \in T^*M$, pela observação 1.2 existe $v \in T_xM$ tal que

$$H(x, p) = p v - L(x, v).$$

Logo, pelo lema 1.6, $p = L_v(x, v)$.

Observação 1.3. A função energia é constante ao longo de extremais. Segue imediatamente do fato de extremais satisfazerem Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [L_v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \dot{\gamma}(t) - L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))] \\ &= \frac{d}{dt} [L_v(\gamma, \dot{\gamma})] \dot{\gamma} + L_v(\gamma, \dot{\gamma}) \ddot{\gamma} - L_x(\gamma, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} - L_v(\gamma, \dot{\gamma}) \ddot{\gamma} = 0. \end{aligned}$$

Teorema 1.2. A Transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$, $\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v))$ conjuga o campo lagrangiano X_L com o campo hamiltoniano X_H .

Prova: Pelo lema 1.5 $H^* = L^{**} = L$. Se $p = L_v(x, v)$, pelo lema 1.6 $v = H_p(x, p)$. Então

$$\begin{aligned} H(x, p) &= L_v(x, v)v - L(x, v) \\ &= p \cdot H_p(x, p) - L(x, H_p(x, p)). \end{aligned}$$

Derivando em relação a x ,

$$\begin{aligned} H_x(x, p) &= p \cdot H_{px}(x, p) - L_x(x, H_p(x, p)) - L_v(x, H_p(x, p)) \cdot H_{px}(x, p) \\ &= [p - L_v(x, H_p(x, p))] \cdot H_{px}(x, p) - L_x(x, H_p(x, p)) \\ &= -L_x(x, H_p(x, p)). \end{aligned}$$

Usando Euler-Lagrange obtemos

$$\dot{x} = v = H_p \text{ e } \dot{p} = \frac{d}{dt} L_v = L_x = -H_x.$$

Assim,

$$D\mathcal{L} \cdot X_L = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ L_{vx} & L_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \tilde{X}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ L_{vx}v + L_{vv}\tilde{X}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ L_x \end{bmatrix},$$

onde $\tilde{X}_L = [L_{vv}]^{-1}[L_x - L_{vx}v]$.

Portanto

$$X_H(\mathcal{L}(x, v)) = D\mathcal{L} \cdot X_L(x, v).$$

Mas $\frac{d}{dt}(\phi_t^L) = X_L$, logo

$$\frac{d}{dt}[\phi_t^H \circ \mathcal{L}] = X_H|_{Im(\mathcal{L})} = D\mathcal{L} \cdot X_L = \frac{d}{dt}[\mathcal{L} \circ \phi_t^L].$$

Como $\phi_0^H \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \phi_0^L$ segue o resultado. ■

Corolário 1.1. *O campo de Euler-Lagrange X_L é de classe C^{r-1} .*

Prova: Basta mostrar que $X_H|_{Im(\mathcal{L})}$ é C^{r-1} , pois, como $D\mathcal{L}$ é isomorfismo, segue que X_L tem a mesma classe de X_H . Com efeito, se γ é uma extremal, então $\dot{\gamma}$ é C^{r-1} . Como L_x é C^{r-1} , logo $H_p, H_x \in C^{r-1}$, ou seja, X_H é C^{r-1} . ■

1.2.1 Subvariedades Lagrangianas

Seja (E, α) um espaço simplético, ou seja, um espaço vetorial E de $\dim E = 2n$ munido de uma forma bilinear alternada $\alpha : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ não-degenerada ($\alpha^\# : E \rightarrow E^*, v \mapsto \alpha(v, \cdot)$ é um isomorfismo). Dado um subespaço $F \subset E$ definimos seu *ortogonal simplético* por

$$F^\perp := \{v \in E | \alpha(v, w) = 0 \forall w \in F\}.$$

Se $u \in F$ e $\alpha(v, w) = 0$ para todo $w \in F$, então $v \in F^\perp$. Neste caso dizemos que u é *simpléticamente ortogonal* a v e denotamos por $u \perp v$. É fácil ver que $u \perp v$ implica em $v \perp u$. Observe que este conceito de ortogonalidade é muito diferente do euclideo, pois F e F^\perp podem não ser complementares.

Para qualquer subespaço $F \subset E$ tem-se que $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.

Prova: O isomorfismo $\alpha^\# : E \rightarrow E^*$ implica que a aplicação linear $\alpha_{F^\perp}^\# : F^\perp \rightarrow (E/F)^\perp$ é injetiva. Logo

$$\dim F^\perp \leq \dim (E/F)^\perp = \dim E - \dim F.$$

Considere agora $\hat{\alpha}_{F^\perp}^\# : E \rightarrow (F^\perp)^\perp$ tal que $\hat{\alpha}_{F^\perp}^\#(v) = \tau(\alpha^\#(v))$, onde $\tau : E^* \rightarrow (F^\perp)^\perp$ é dada por $\tau(p) = p|_{F^\perp}$. Logo

$$\dim F^\perp = \dim (F^\perp)^\perp \geq \text{posto}(\hat{\alpha}_{F^\perp}^\#) = \dim E - \dim \ker(\hat{\alpha}_{F^\perp}^\#) = \dim E - \dim F,$$

pois $\ker(\hat{\alpha}_{F^\perp}^\#) = \{v \in E \mid \alpha(v, w) = 0 \forall w \in F^\perp\} = F$. ■

Um subespaço F é dito *isotrópico* se $F \subset F^\perp$. Note que, se F é isotrópico, $\dim F \leq n$, pois, caso contrário, como $\dim F \leq \dim F^\perp$,

$$2n = \dim F + \dim F^\perp > 2n.$$

F é dito *Lagrangiano* se é isotrópico e $\dim F = n$.

Definição 1.4. Uma transformação linear $T : (E, \alpha) \rightarrow (E, \alpha)$ é dita ser *simplética* se $T^*\alpha = \alpha$.

Sabe-se que existe uma base na qual podemos escrever

$$\alpha(v, w) = \langle v, Jw \rangle,$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Outro fato conhecido é que $\Omega = \alpha \wedge \dots \wedge \alpha$ (n parcelas) é uma forma volume em E . Se $T^*\alpha = \alpha$,

$$T^*\Omega = T^*(\alpha \wedge \dots \wedge \alpha) = T^*\alpha \wedge \dots \wedge T^*\alpha = \Omega.$$

Portanto o determinante de uma transformação simplética é sempre positivo (caso contrário contradizeria o teorema de mudança de variáveis).

Lema 1.7. Se $T : (E, \alpha) \rightarrow (E, \alpha)$ é simplética da forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ e λ_0 é um autovalor de T , então $\bar{\lambda}_0$, $\frac{1}{\lambda_0}$ e $\frac{1}{\bar{\lambda}_0}$ também são autovalores.

Prova: Primeiramente, como $p(\lambda) = \det(T - \lambda I_n)$ tem coeficientes reais, logo os autovalores ocorrem em pares, ou seja, se λ_0 é autovalor $\bar{\lambda}_0$ também é. Resta mostrar que $\frac{1}{\lambda_0}$ é autovalor, pois, pelo argumento acima $\frac{1}{\bar{\lambda}_0}$ também será. De $T^*\alpha = \alpha$ e $\alpha(v, w) = \langle v, Jw \rangle$ obtemos que

$$\alpha(Tv, Tw) = \alpha(v, w) \Rightarrow \langle Tv, JT w \rangle = \langle v, T^t J T w \rangle = \langle v, Jw \rangle.$$

Logo $T^t J T = J$, implicando no determinante de T ser mais ou menos 1 (portanto 1) e $J T J^{-1} = (T^t)^{-1}$. Portanto

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(T - \lambda I_n) = \det(J(T - \lambda I_n)J^{-1}) = \det\left((T^t)^{-1} - \lambda I_n\right) \\ &= \det\left((T^t)^{-1}(I_n - \lambda T^t)\right) = \det((I_n - \lambda T)T^{-1}) = \det(I_n - \lambda T) \\ &= \det(-\lambda(-\lambda^{-1}I_n + T)) = \lambda^{2n}p(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Como 0 não é autovalor (Se $Tv_0 = 0$, então $\alpha(v_0, \cdot) = \alpha(Tv_0, T(\cdot))$ não é isomorfismo), $p(\lambda) = 0$ se só se $p(\lambda^{-1}) = 0$. ■

Definição 1.5. Uma subvariedade $N \subset T^*M$ é dita lagrangiana se, para cada $(x, p) \in N$, $T_{(x,p)}N \subset T_{(x,p)}T^*M$ é um subespaço lagrangiano.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1. As variedades estáveis/instáveis (veja, por exemplo [4]) dos pontos fixos hiperbólicos do Fluxo Hamiltoniano ϕ_t^H no tempo 1 são Subvariedades Lagrangianas de T^*M .

Prova: Se p é um ponto fixo hiperbólico e λ é um autovalor da transformação linear simplética $d\phi_1^H(p)$, também são autovalores $\bar{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}$ e $\frac{1}{\bar{\lambda}}$. Logo o número de autovalores de módulo maior que um é igual ao número de autovalores de módulo menor que um. Portanto a dimensão da variedade estável $W^s(p)$ de p é igual a n . Por outro lado, se $z \in W^s(p)$, do fato de $(\phi_t^H)^* \omega = \omega$,

$$\omega_z(u, v) = \omega_{\phi_1^H(z)}((d\phi_1^H(z))u, (d\phi_1^H(z))v) = \dots = \omega_{(\phi_1^H)^k(z)}((d\phi_1^H(z))^k u, (d\phi_1^H(z))^k v).$$

Mas $\|\omega\|$ é limitada, logo

$$|\omega_z(u, v)| \leq \|\omega\| \left\| (d\phi_1^H(z))^k u \right\| \left\| (d\phi_1^H(z))^k v \right\| \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.2. Seja $f : (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ um difeomorfismo com $\dim M_1 = \dim M_2$. Um fato conhecido em geometria simplética é que $M = M_1 \times M_2$ com $\Omega = \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2$ é uma variedade simplética, onde $\pi_i : M \rightarrow M_i$ é a projeção canônica. Considere a subvariedade $N = \{(p, f(p)) \in M : p \in M_1\}$. N é Lagrangiana se, e somente se, f é simplético.

Prova: Sejam $j : N \rightarrow M$ a inclusão, $q = (p, f(p)) \in N$ e $T_q N = \{(u, df_p(u)) : u \in T_p M_1\}$. Se $\hat{u} = (u, df_p(u))$, $\hat{v} = (v, df_p(v))$ e $x \in N$,

$$\begin{aligned} j^* \Omega_{(x)}(\hat{u}, \hat{v}) &= \Omega_{(x)}(dj_x(\hat{u}), dj_x(\hat{v})) \\ &= \omega_1(u, v) - \omega_2(df_p(u), df_p(v)) \\ &= (\omega_1 - f^* \omega_2)(u, v). \end{aligned}$$

Portanto

$$\Omega|_N = 0 \Leftrightarrow f^* \omega_2 = \omega_1.$$

Em particular, se $M_1 = M_2$ e f simplético, então o gráfico de f é uma Subvariedade Lagrangiana. ■

1.2.2 A equação de Hamilton-Jacobi

Dado um Hamiltoniano $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ a equação de Hamilton-Jacobi associada é dada por

$$H(x, du_x) = c, \quad (1.1)$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Uma solução de 1.1 é uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $H(x, du_x) = c$ para cada $x \in M$. A equação de Hamilton-Jacobi para o caso não-autônomo é dada por

$$\frac{\partial s}{\partial t}(x, t) + H\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}(x, t)\right) = 0. \quad (1.2)$$

Uma solução de 1.2 é uma função $s : W \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , onde $W \subset M \times \mathbb{R}$ aberto. Um resultado conhecido por *Método das Características* (que pode ser encontrado em [10, teorema 2.8.11]) afirma que, localmente, sempre existe uma solução de 1.2.

Capítulo 2

Teorema de Tonelli

Este capítulo se trata de um importante teorema que nos será muito útil no desenvolvimento dos demais capítulos. A princípio este nos dá a falsa impressão de ser uma generalização do teorema de Hopf-Rinow, porém a sutileza está no fato de as curvas tomadas estarem em uma classe de intervalo de definição fixo. A demonstração aqui apresentada foi baseada em [10, capítulo 3]

2.1 Existência de Minimizantes de Tonelli

Teorema 2.1. *Sejam M uma variedade compacta e conexa e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangiano de Tonelli (de classe C^r , $r \geq 2$, convexo e superlinear). Dados dois pontos $p, q \in M$ e $T > 0$ existe uma curva*

$$\gamma \in \mathcal{C}_T(p, q) := \{ \gamma : [0, T] \rightarrow M \text{ absolutamente contínua} : \gamma(0) = p, \gamma(T) = q \}$$

tal que, para toda curva $\gamma_1 \in \mathcal{C}_T(p, q)$,

$$A_L(\gamma) \leq A_L(\gamma_1).$$

A curva γ assim obtida é chamada de minimizante de Tonelli.

Fixando uma Métrica Riemanniana para referência, consideremos $C^0([0, T], M)$ o conjunto das curvas contínuas munido da topologia uniforme:

Se $\gamma_1, \gamma_2 \in C^0([0, T], M)$, então $Dist(\gamma_1, \gamma_2) = \sup \{ d_M(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), t \in [0, T] \}$.

Se $C^{ab}([0, T], M) \subset C^0([0, T], M)$ denota o subconjunto das curvas absolutamente contínuas definimos

$$d_{ac}(\gamma_1, \gamma_2) = \int_0^T d_{TM}(d\gamma_1(t), d\gamma_2(t)) dt,$$

onde $d_{TM} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ induzida pela métrica Riemanniana e $d\gamma_i(t) = (\gamma_i(t), \dot{\gamma}_i(t))$.

Lema 2.1. *Dados $c \geq 0$, $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que, para todos $x \in K$ e $y \in U$ com $\|y - x\| < \eta$ temos*

$$L(y, w) \geq L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(w - v) - \epsilon, \forall v, w \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|v\| \leq c.$$

Prova: Pela compacidade de K seja $\eta_0 > 0$ tal que

$$\bar{V}_{\eta_0}(K) = \{y \in \mathbb{R}^n / \exists x \in K, \|y - x\| \leq \eta_0\} \subset U.$$

Seja $A = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right\|, \|v\| \leq c, x \in K \right\}$. Pela superlinearidade existe C_1 tal que

$$L(y, w) \geq (A + 1)\|w\| + C_1$$

com $y \in \bar{V}_{\eta_0}(K)$. Se $C_2 = \sup \left\{ L(x, v) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)v : \|v\| \leq c \text{ e } x \in K \right\}$ e $\|w\| \geq C_2 - C_1$,

$$\begin{aligned} L(y, w) &\geq A\|w\| + C_2 \\ &\geq \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)w + L(x, v) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)v \\ &\geq L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(w - v) - \epsilon. \end{aligned}$$

Se $\|w\| \leq C_2 - C_1$, pela convexidade (lema 1.4),

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(w - v) \leq L(x, w) - L(x, v).$$

A continuidade de $L(\cdot, w)$ implica em existir $\eta_1 > 0$ tal que

$$\|y - x\| \leq \eta_1 \text{ e } \|L(y, w) - L(x, w)\| \leq \epsilon.$$

Logo

$$L(y, w) \geq L(x, w) - \epsilon \geq L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(w - v) - \epsilon.$$

Tomando $\eta = \min \{\eta_0, \eta_1\}$ segue o resultado. ■

Antes de enunciarmos uma proposição, vejamos uma definição: uma família de curvas S , definidas no intervalo $[0, T]$ é dita ser *absolutamente equicontínua se*, dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, se $\sum (a_i, b_i) < \delta$ tivermos

$$\sum d_M(\gamma(a_i), \gamma(b_i)) < \epsilon, \forall \gamma \in S,$$

para cada família $\{(a_i, b_i)\}$ de subintervalos de $[0, T]$ dois a dois disjuntos.

Proposição 2.1. *Para todo $c \in \mathbb{R}$ o conjunto $S_c = \{\gamma \in \mathcal{C}_T(p, q) / A_L(\gamma) \leq c\}$ é compacto na topologia uniforme.*

Prova: Pela superlinearidade existe $D > 0$ tal que $L(x, v) \geq \|v\| - D$ e podemos supor $L \geq 0$, pois L é limitado inferiormente. Dados $\gamma \in S_c$ e $s \in (0, T]$,

$$\int_0^s L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \leq \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \leq A_L(\gamma) \leq c \Rightarrow \int_0^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt - Ds \leq c,$$

ou seja,

$$d_M(\gamma(0), \gamma(s)) - Ds \leq \int_0^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt - Ds \leq c \Rightarrow d_M(\gamma(0), \gamma(s)) \leq c + DT.$$

Portanto

$$\begin{aligned} d_M(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) &\leq d_M(\gamma_1(s), \gamma_2(0)) + d_M(\gamma_2(0), \gamma_2(s)) \\ &= d_M(\gamma_1(s), \gamma_1(0)) + d_M(\gamma_2(0), \gamma_2(s)). \end{aligned}$$

Com isso

$$Dist(\gamma_1, \gamma_2) \leq 2[c + DT], \forall \gamma_1, \gamma_2 \in S_c,$$

o que garante a equilimitação de S_c . Para provarmos a equicontinuidade, temos, pela superlinearidade que $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{\|v\|} = \infty$, ou seja, dado $k > 0 \exists B > 0$ tal que $\|v\| > B$ implica $L(x, v) \geq k\|v\|$. Se $\gamma \in S_c$ e $E = \{t \in [0, T] / \|\dot{\gamma}(t)\| \geq B\}$, logo

$$\int_E \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \frac{1}{k} \int_E L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \leq \frac{A_L(\gamma)}{k} \leq \frac{c}{k}.$$

Tomando uma partição qualquer $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots < b_n \leq T$ de $[0, T]$ seja $J = \cup_{i=1}^n [a_i, b_i]$, então

$$\sum d_M(\gamma(a_i), \gamma(b_i)) \leq \sum \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_E \|\dot{\gamma}(t)\| dt + \int_{J-E} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \frac{c}{k} + Bm(J),$$

onde m é a medida de Lebesgue. Agora, dado $\epsilon > 0$ seja k tal que $k\epsilon > 2c$. Tome $\delta > 0$ de forma que $2\delta B < \epsilon$. Se $m(J) = \sum (a_i, b_i) < \delta$, logo

$$\sum d_M(\gamma(a_i), \gamma(b_i)) \leq \frac{c}{k} + Bm(J) < \frac{\epsilon}{2} + B\delta < \epsilon, \forall \gamma \in S_c.$$

Concluimos portanto que S_c é absolutamente equicontínua. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, toda γ_i em S_c possui uma subsequência γ_{i_j} uniformemente convergente em $C^0([0, T], M)$. Como γ_{i_j} é absolutamente contínua e a convergência de $\gamma_{i_j} \rightarrow \gamma$ é uniforme segue que

γ é absolutamente contínua, pois, dado $\epsilon > 0$ tome $\delta > 0$ tal que $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$ implica $\sum_{i=1}^k d_M(\gamma_n(a_i), \gamma_n(b_i)) < \frac{\epsilon}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $n_0(k) > 0$ tal que $Dist(\gamma_{n_0(k)}, \gamma) < \frac{\epsilon}{3k}$ e portanto se $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k d_M(\gamma(a_i), \gamma(b_i)) &\leq \sum_{i=1}^k d_M(\gamma(a_i), \gamma_{n_0}(a_i)) + \sum_{i=1}^k d_M(\gamma_{n_0}(a_i), \gamma_{n_0}(b_i)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k d_M(\gamma_{n_0}(b_i), \gamma(b_i)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{3k} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Para concluirmos resta provar o seguinte lema: ■

Lema 2.2. *Se $\gamma_n \rightarrow \gamma \in C^0([0, T], M)$ com $\gamma_n \in S_c$ uniformemente, então $\gamma \in S_c$, ou seja, $A_L(\gamma) \leq c$.*

Prova: Pela convergência uniforme podemos supor que $\gamma_n([0, T])$ está contida em um compacto K contido em uma vizinhança coordenada $U \supset \gamma([0, T])$. Dado $D > 0$ considere

$$E_D = \{t \in [0, T] / \|\dot{\gamma}(t)\| < D\}$$

Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Pelo lema 2.1 existe $\eta > 0$ e pela convergência uniforme existe $n_0 > 0$ tais que $n \geq n_0$ implica que $d_M(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \eta$ e

$$L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \geq L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t)) - \epsilon$$

em quase todo ponto. Integrando temos

$$\int_{E_D} L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) dt \geq \int_{E_D} \left[L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t)) \right] dt - \epsilon m(E_D).$$

Como existe $C(0)$ tal que $L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \geq C(0)$, podemos supor $L \geq 0$. Logo

$$\int_0^T L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) dt - \int_{E_D} L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) dt \geq 0.$$

Então

$$c \geq A_L(\gamma) \geq \int_{E_D} \left[L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t)) \right] dt - \epsilon m(E_D).$$

Afirmção: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_D} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) (\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t)) dt = 0$. Usando a afirmação obteremos, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, que

$$c \geq \int_{E_D} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Como $\dot{\gamma}$ existe e é finita q. t. p. obtemos que $m([0, T] \setminus E_D) \rightarrow 0$ quando $D \rightarrow \infty$. Pelo Teorema da convergência monótona (veja, por exemplo [1, teorema 22.15]), como $\chi_{E_n}(t) L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \uparrow L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ são mensuráveis não-negativas, então

$$\int_{E_D} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^T \chi_{E_n}(t) L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \uparrow \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

o que nos fornece $A_L(\gamma) \leq c$. ■

A prova da afirmação acima pode ser encontrada em [10, proposição 3.1.4]. Prossigamos com a demonstração do teorema 2.1:

Prova: Considere a sequência de compactos encaixados

$$S_n = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}_T(p, q) \mid A_L(\gamma) \leq C_{\text{inf}} + \frac{1}{n} \right\},$$

onde $C_{\text{inf}} = \inf \{A_L(\gamma)\}$. Como $A_L(\gamma) \geq 0$, logo $C_{\text{inf}} \geq 0$. $S_n \neq \emptyset$, pois, por definição, se somarmos $\frac{1}{n}$ ao ínfimo existirá uma γ_1 tal que $A_L(\gamma_1) = C_{\text{inf}} + \frac{1}{n}$ para todo $n > 0$. Pela proposição 2.1 $S_c \subset \mathcal{C}_T(p, q)$ é compacto, logo S_n também o é. Pelo fato de S_n ser uma sequência decrescente de compactos não-vazios temos, pelo Teorema da Intersecção de Cantor (veja, por exemplo [1, teorema 9.4]), $\cap S_n \neq \emptyset$. Se $\gamma \in \cap S_n$, então γ é uma minimizante de Tonelli. ■

2.2 Regularidade das Minimzantes de Tonelli

Teorema 2.2. *Se $\gamma \in \mathcal{C}_T(p, q)$ é uma minimizante de Tonelli, ou seja, $A_L(\gamma) \leq A_L(z)$*

para toda $z \in \mathcal{C}_T(p, q)$, então γ é uma extremal. Em particular γ tem a mesma classe de diferenciabilidade C^k , $k \geq 2$, do Lagrangiano.

Faremos algumas etapas da prova. Os demais fatos podem ser encontrados em [10, teorema 3.7.1].

Prova: Provaremos o resultado em um aberto $U \subset M$ (domínio de uma carta). Para a globalização é necessário obter estimativas uniformes para garantir que pequenos trechos

das extremais são minimizantes entre quaisquer dos seus pontos. Suponha $s : U \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a equação de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial s}{\partial t}(x, t) + H\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}(x, t)\right) = 0.$$

Como $H(x, p) \geq p(v) - L(x, v)$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $p = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)$ (veja o lema 1.6), dada uma curva absolutamente contínua $z : [0, T] \rightarrow U$ com $z(0) = p$ e $z(T) = q$ temos

$$L(z(t), \dot{z}(t)) \geq \left\langle \frac{\partial s}{\partial x}(z(t), t), \dot{z}(t) \right\rangle - H\left(z(t), \frac{\partial s}{\partial x}(z(t), t)\right) = \frac{d}{dt}s(z(t), t).$$

Integrando em $[0, T]$ obtemos

$$s(z(T), T) - s(z(0), 0) \leq \int_0^T L(z(t), \dot{z}(t)) dt = A_L(z),$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\frac{\partial s}{\partial x}(z(t), t) = \frac{\partial L}{\partial v}(z(t), \dot{z}(t))$, para quase todo ponto na medida de Lebesgue. Usando a transformada de Legendre

$$(z(t), \dot{z}(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left(z(t), \frac{\partial s}{\partial x}(z(t), t)\right),$$

obtemos z de classe C^1 , pois o lado direito da expressão acima é contínuo e definido em $(0, T)$. Logo obtemos que uma minimizante de Tonelli em U é de classe C^1 . Se z for uma minimizante de Tonelli, tomando uma variação Γ de classe C^1 de z em U e usando o lema 1.1 obtemos z extremal. Pela proposição 1.3 z é de classe C^r . ■

Capítulo 3

Ação Potencial e Valor Crítico de Mañé

Como sabemos, o Teorema de Tonelli nos fornece uma minimizante com tempo fixo, ou seja, para algum $T > 0$. Estamos interessados em curvas que minimizem ação com tempo livre, que posteriormente chamaremos de minimizantes globais. Apresentaremos neste capítulo uma introdução da teoria de Mather sob o ponto de vista de Mañé. Finalizaremos com a barreira de Peierls caracterizando o conjunto de Aubry projetado. A menos que seja dito, todas as curvas aqui consideradas serão absolutamente contínuas. Para $x, y \in M$ sejam

$$\mathcal{C}_T(x, y) = \{ \gamma : [0, T] \rightarrow M \mid \gamma(0) = x, \gamma(T) = y \}$$

e

$$\mathcal{C}(x, y) := \bigcup_{T>0} \mathcal{C}_T(x, y).$$

Se $k \in \mathbb{R}$ definimos a *ação potencial* $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por

$$\Phi_k(x, y) := \inf_{\gamma \in \mathcal{C}(x, y)} A_{L+k}(\gamma).$$

Note que, se existir uma curva γ fechada com ação $L + k$ negativa, então $\Phi_k(x, y) = -\infty$ para todo $x, y \in M$. Com efeito, se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$, $\gamma(0) = \gamma(T) = x$ e $\eta : [0, S] \rightarrow M$, $\eta(0) = x$, $\eta(S) = y$ defina $\gamma_n : [0, nT + S] \rightarrow M$ por $\gamma_n(t) = \overbrace{\gamma * \dots * \gamma}^n * \eta(t)$ com $n \in \mathbb{N}$, onde $*$ indica justaposição. Logo

$$\begin{aligned} A_{L+k}(\gamma_n) &= \int_0^{nT} [L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) + k] dt + \int_0^S [L(\eta(t), \dot{\eta}(t)) + k] dt \\ &= nA_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\eta). \end{aligned}$$

Portanto

$$\Phi_k(x, y) \leq nA_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\eta), \forall n > 0.$$

Consideremos agora os conjuntos

$$D_1 = \{k \in \mathbb{R} \mid \exists \gamma \text{ fechada com } A_{L+k}(\gamma) < 0\} \text{ e } D_2 = \{k \in \mathbb{R} \mid A_{L+k}(\gamma) \geq 0 \forall \gamma \text{ fechada}\}.$$

Observe que a função $k \mapsto A_{L+k}(\gamma)$ é crescente e, pela superlinearidade, L é limitado inferiormente. Logo existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $L + k \geq 0$. Portanto D_1 é limitado superiormente, de modo que D_2 é limitado inferiormente.

Definimos o *valor crítico de Mañé* $c = c(L) := \sup D_1 = \inf D_2$.

3.1 Propriedades do Valor Crítico

Proposição 3.1.

1. Se $k \in \mathbb{R}$, $\Phi_k(x, z) \leq \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, z), \forall x, y, z \in M$.
2. Se $k < c(L)$, $\Phi_k(x, y) = -\infty, \forall x, y \in M$.
3. Se $k \geq c(L)$, $\Phi_k(x, y) \in \mathbb{R}, \forall x, y \in M$.
4. Se $k \geq c(L)$, $\Phi_k(x, x) = 0, \forall x \in M$.
5. Se $k \geq c(L)$, a ação potencial Φ_k é Lipschitz.
6. Se $k \geq c(L)$, $\Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x) \geq 0, \forall x, y \in M$.
7. Se $x \neq y$ e $k > c(L)$, $\Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x) > 0$.

Prova: 1. Se $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ e $\eta \in \mathcal{C}(y, z)$, então $\gamma * \eta \in \mathcal{C}(x, z)$. Logo

$$\Phi_k(x, z) \leq A_{L+k}(\gamma * \eta) = A_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\eta).$$

Finalizamos tomando o ínfimo em $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ e $\eta \in \mathcal{C}(y, z)$.

2. Se $k < c(L)$, então $k \in D_1$. Logo existe γ fechada com $A_{L+k}(\gamma) < 0$. Como já foi observado isto implica que $\Phi_k(x, y) = -\infty$ para todo $x, y \in M$.

3. Suponha por contradição que $\Phi_k(x, y) = -\infty$ para algum $k \in \mathbb{R}$ e $x, y \in M$, logo

$$\Phi_k(x, x) \leq \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x) = -\infty.$$

Então existe $\gamma \in \mathcal{C}(x, x)$ fechada com $A_{L+k}(\gamma) < 0$ (caso contrário $A_{L+k}(\eta) \geq 0$ para toda $\eta \in \mathcal{C}(x, x)$ implicando $\Phi_k(x, x) \geq 0$). Logo $k \in D_1 = (D_2)^c$. Como $k \in D_2$, absurdo.

4. Como M é compacta, existe $Q > 0$ tal que

$$|L(x, v) + k| \leq Q, \text{ para } \|v\| \leq 2.$$

Considere uma geodésica $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ com $\|\dot{\gamma}\| = 1$ e $\gamma(0) = x$. Então

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, x) &\leq \Phi_k(x, \gamma(\varepsilon)) + \Phi_k(\gamma(\varepsilon), x) \\ &\leq A_{L+k}(\gamma|_{[0, \varepsilon]}) + A_{L+k}(\gamma(\varepsilon - t)|_{[0, \varepsilon]}) \\ &= \int_0^\varepsilon (L(\gamma, \dot{\gamma}) + k) dt + \int_0^\varepsilon (L(\gamma, -\dot{\gamma}) + k) dt \\ &\leq 2Q\varepsilon. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos $\Phi_k(x, x) \leq 0$. Por outro lado, como $k \geq c(L)$, $k \in D_2$. Portanto para toda curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, x)$, $A_{L+k}(\gamma) \geq 0$, donde $\Phi_k(x, x) \geq 0$.

5. Sejam $x_1, x_2 \in M$. Como M é completa, pelo teorema de Hopf-Rinow, existe uma curva $\gamma : [0, d_M(x_1, x_2)] \rightarrow M$ geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco ligando x_1 a x_2 tal que $|L(\gamma, \dot{\gamma}) + k| \leq Q$ (pelo item anterior). Temos que

$$\Phi_k(x_1, x_2) \leq A_{L+k}(\gamma) \leq Q d_M(x_1, x_2).$$

Se $y_1, y_2 \in M$, então pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \Phi_k(x_1, y_1) - \Phi_k(x_2, y_2) &\leq \Phi_k(x_1, x_2) + \Phi_k(y_2, y_1) \\ &\leq Q [d_M(x_1, x_2) + d_M(y_1, y_2)]. \end{aligned}$$

Trocando os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) na desigualdade acima, obtemos

$$\Phi_k(x_1, y_1) - \Phi_k(x_2, y_2) \leq Q d_{M \times M}((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

6. Pelos itens 1 e 4 temos

$$0 = \Phi_k(x, x) \leq \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x)$$

pois $k \geq c(L)$.

7. Suponha $k > c(L)$, $x \neq y$ e $\Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x) = 0$. Seja $\gamma_n : [0, T_n] \rightarrow M$, $\gamma_n \in \mathcal{C}(x, y)$ uma sequência tal que

$$\Phi_k(x, y) = \lim_n A_{L+k}(\gamma_n).$$

Suponhamos que $\liminf_n T_n = 0$. Seja $A > 0$, pela superlinearidade de L , existe $B > 0$ tal que $L(x, v) \geq A \|v\| - B, \forall (x, v) \in TM$. Então

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, y) &= \lim_n \int_0^{T_n} L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n) + k \\ &\geq \liminf_n \left\{ A \int_0^{T_n} \|\dot{\gamma}_n\| dt + (k - B) T_n \right\} \\ &\geq Ad_M(x, y). \end{aligned}$$

Fazendo $A \rightarrow +\infty$ obtemos $\Phi_k(x, y) = +\infty$ que é um absurdo. Portanto $\liminf_n T_n$ não pode ser 0.

Agora seja $\eta_n : [0, S_n] \rightarrow M, \eta_n \in \mathcal{C}(y, x)$ com $\lim_n A_{L+k}(\eta_n) = \Phi_k(y, x)$. Analogamente $\liminf_n S_n \neq 0$. Escolha $T, S > 0$ tais que

$$0 < T < \liminf_n T_n \text{ e } 0 < S < \liminf_n S_n.$$

Para n suficientemente grande $T_n > T$ e $S_n > S$. Como $c = c(L) < k$,

$$\begin{aligned} \Phi_c(x, x) &\leq A_{L+c}(\gamma_n * \eta_n) \\ &\leq A_{L+c}(\gamma_n) + A_{L+c}(\eta_n) \pm kT_n \pm kS_n \\ &= A_{L+k}(\gamma_n) + (c - k)T_n + A_{L+k}(\eta_n) + (c - k)S_n \\ &\leq A_{L+k}(\gamma_n) + A_{L+k}(\eta_n) + (c - k)(T + S). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Phi_c(x, x) &\leq \lim_n \{ \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x) + (c - k)(T + S) \} \\ &= (c - k)(T + S) < 0, \end{aligned}$$

contradizendo o item 4. ■

Observação 3.1. A ação potencial, em geral, não é simétrica. Os itens 1, 4, 6 e 7 implicam que

$$d_k(x, y) = \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, x)$$

é uma métrica para $k > c(L)$ e uma pseudo-métrica para $k = c(L)$, ou seja, pode ocorrer $d_c(x, y) = 0$ com $x \neq y$.

Exemplo 3.1. (Lagrangiano Simétrico) Sejam M compacta e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) = L(x, -v).$$

Então $c(L) = -L(x_0, 0) = -\min_{x \in M} L(x, 0)$.

Prova: De fato, como L é convexo nas fibras,

$$L(x, tv + (1-t)w) \leq tL(x, v) + (1-t)L(x, w).$$

Fazendo $w = -v$ e $t = 1/2$,

$$L(x_0, 0) \leq L(x, 0) = L\left(x, \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v\right) \leq \frac{1}{2}L(x, v) + \frac{1}{2}L(x, -v) = L(x, v).$$

Logo $L(x, v) - L(x_0, 0) \geq 0$ e $A_{L-L(x_0, 0)}(\gamma) \geq 0$ para toda curva γ . Dado $(x_0, 0) \in TM$,

$$A_{L-L(x_0, 0)}(x_0) = \int_0^T L(x_0, 0) - L(x_0, 0) = 0.$$

Se $T, \epsilon > 0$,

$$A_{L-L(x_0, 0) - \epsilon}(x_0) = -\epsilon T < 0.$$

■

Exemplo 3.2. (Lagrangiano Mecânico) Seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - U(x).$$

Temos que este é um caso particular do Lagrangiano Simétrico. Logo

$$c(L) = -\min_{x \in M} L(x, 0) = -\min_{x \in M} -U(x) = \max_{x \in M} U(x).$$

Exemplo 3.3. (Lagrangiano Magnético) Seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle + \omega_x(v),$$

onde ω é uma 1-forma em M não-fechada. Neste caso $c(L) > 0$.

Prova: Com efeito, considere U vizinhança coordenada tal que $d\omega \neq 0$ em U . Podemos supor $d\omega|_{TS} \neq 0$, onde S é uma superfície bidimensional em U cujo bordo é uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ parametrizada proporcional ao comprimento de arco ($\|\dot{\gamma}\| = K$) e orientada positivamente. Tome (x, y) coordenadas locais em $S \subset U$, logo

$$d\omega|_S = g(x, y) dx \wedge dy.$$

Pela continuidade podemos supor $g(x, y) < 0$ (caso contrário orientamos γ negativamente).

Para $\epsilon > 0$, pelo Teorema de Green,

$$A_{L+\epsilon}(\gamma) = \frac{TK^2}{2} + \epsilon T + \int_0^T \omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \frac{T(k^2 + 2\epsilon)}{2} - \int_S -d\omega.$$

Seja γ_ϵ uma reparametrização de γ tal que $K = \sqrt{\epsilon}$. Como $n = \int_S -d\omega > 0$ e $TK = T\sqrt{\epsilon} = l$ (constante), tomando $\epsilon < \left(\frac{2n}{3l}\right)^2$,

$$A_{L+\epsilon}(\gamma_\epsilon) = \frac{3T\epsilon}{2} - n = \frac{3l\epsilon}{2\sqrt{\epsilon}} - n = \frac{3l\sqrt{\epsilon}}{2} - n < n - n = 0.$$

Portanto $\epsilon \leq c(L)$. Por absurdo, se $c(L) = 0$ e $\delta > 0$, então $\Phi_\delta(p, p) = 0$. Pelo argumento acima ($A_{L+\delta}(\gamma_\delta) < 0$) $\Phi_\delta(p, p) = -\infty$. ■

Defina $e_0 = \min C$, onde $C = \{k \in \mathbb{R} : \pi|E^{-1}(k) \rightarrow M \text{ é sobrejetora}\}$.

Lema 3.1. *Tem-se que*

$$e_0 = \max_{x \in M} \{E(x, 0)\} = \max_{x \in M} \{-L(x, 0)\}.$$

Prova: Pela convexidade, $L(x, v) - L(x, w) \geq L_v(x, w)(v - w)$. Fazendo $v = 0$,

$$L(x, 0) - L(x, w) \geq -L_v(x, w)(w).$$

Logo

$$E(x, w) = L_v(x, w)w - L(x, w) \geq -L(x, 0) = E(x, 0).$$

Dados $k \in C$ e $x \in M$ existe $v \in T_x M$ tal que $E(x, v) = k$. Portanto

$$k \geq E(x, 0) \Rightarrow e_0 \geq \max_{x \in M} \{E(x, 0)\}.$$

Por outro lado, pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\begin{aligned} E(x, v) &= E(x, 0) + \int_0^{\|v\|} \frac{d}{ds} \left[E\left(x, s \frac{v}{\|v\|}\right) \right] ds \\ &= -L(x, 0) + \int_0^{\|v\|} \left[L_{vv}\left(x, s \frac{v}{\|v\|}\right) \frac{v}{\|v\|} \frac{v}{\|v\|} \right] ds. \end{aligned}$$

Pela observação ?? L satisfaz a condição de limitação, logo

$$E(x, v) \geq -\psi(0) + \int_0^{\|v\|} D ds \Rightarrow E(x, v) \geq D\|v\| - \psi(0).$$

Com isso $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} E(y, v) = +\infty$. Segue da continuidade da aplicação $v \mapsto E(y, v)$ que sua imagem é $[E(y, 0), +\infty)$. Como $\max_{x \in M} \{E(x, 0)\} \in [E(y, 0), +\infty)$, existe v tal que

$$E(y, v) = \max_{x \in M} \{E(x, 0)\}.$$

Logo $\max_{x \in M} \{E(x, 0)\} \geq e_0$. ■

Observação 3.2. Segue do lema 3.1 que, no caso do Lagrangiano Mecânico, $c(L) = e_0$.

3.2 Minimizantes Globais

Definição 3.1. Uma curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ é uma *minimizante global* ou *minimizante de tempo livre* para $L + k$ se $k \geq c(L)$ e $A_{L+k}(\gamma) = \Phi_k(x, y)$.

Lema 3.2. Seja $x : [0, T] \rightarrow M$ uma curva absolutamente contínua e $k \in \mathbb{R}$. Dado $\lambda > 0$, seja $x_\lambda(t) = x(\lambda t)$ e $\mathcal{A}(\lambda) = A_{L+k}(x_\lambda)$. Então

$$\mathcal{A}'(1) = \int_0^T [E(x(t), \dot{x}(t)) - k] dt.$$

Prova: Como $x_\lambda : [0, \frac{T}{\lambda}] \rightarrow M$ e $\dot{x}_\lambda(t) = \lambda \dot{x}(\lambda t)$, fazendo $u = \lambda t$ ($dt = \frac{du}{\lambda}$),

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^{\frac{T}{\lambda}} [L(x(\lambda t), \lambda \dot{x}(\lambda t)) + k] dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^T [L(x(u), \lambda \dot{x}(u)) + k] du.$$

Logo

$$\mathcal{A}'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^T [L(x(u), \lambda \dot{x}(u)) + k] du + \frac{1}{\lambda} \int_0^T L_v(x(u), \lambda \dot{x}(u)) \dot{x}(u) du.$$

Portanto

$$\mathcal{A}'(1) = \int_0^T [L_v(x(u), \dot{x}(u)) \dot{x}(u) - L(x(u), \dot{x}(u)) - k] du = \int_0^T [E(x(u), \dot{x}(u)) - k] dt. \quad \blacksquare$$

Proposição 3.2. Uma minimizante global para $L + k$ tem energia $E \equiv k$.

Prova: Se γ é uma minimizante global, então

$$\mathcal{A}(1) = A_{L+k}(\gamma) = \inf A_{L+k}(\gamma_\lambda) \leq \mathcal{A}(\lambda) \quad \forall \lambda > 0.$$

Portanto $\mathcal{A}'(1) = 0$. Em particular γ é uma minimizante de Tonelli, logo uma extremal (solução de Euler-Lagrange) com energia $E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \equiv E$ constante. Segue que

$$0 = \mathcal{A}'(1) = \int_0^T [E(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - k] dt = T(E - k). \quad \blacksquare$$

Na continuação provaremos alguns resultados necessários para garantir a existência de minimizantes globais. Para $k \geq c(L)$ e $x, y \in M$ definimos a *ação potencial para tempo fixo* $T > 0$ por

$$\Phi_k(x, y; T) := \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_T(x, y)} A_{L+k}(\gamma).$$

Proposição 3.3.

1. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Phi_k(x, y; \epsilon) = +\infty$, se $k \geq c(L)$, $x \neq y$.
2. $\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_k(x, y; T) = +\infty$, se $k > c(L)$. Além disso, se M compacta, então o limite é uniforme.
3. Dado $k \in \mathbb{R}$, $R \subseteq M$ um subconjunto compacto e $\epsilon > 0$, a função $(x, y, t) \mapsto \Phi_k(x, y; t)$ é localmente Lipschitz em $R \times R \times [\epsilon, +\infty[$ para todo $\epsilon > 0$. Em particular contínua.

Prova: 1. Pela superlinearidade, dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que $L(x, v) + k > A \|v\| - B + k$. Se $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(\epsilon) = y$,

$$\begin{aligned}
\Phi_k(x, y; \epsilon) &= \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_\epsilon(x, y)} A_{L+k}(\gamma) \\
&\geq \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_\epsilon(x, y)} \left\{ \int_0^\epsilon [A \|\dot{\gamma}(t)\| - B + k] dt \right\} \\
&\geq A \inf_{\gamma \in \mathcal{C}(x, y)} \left\{ \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right\} + (k - B) \epsilon \\
&= Ad_M(x, y) + (k - B) \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Phi_k(x, y; \epsilon) \geq Ad_M(x, y)$. Tomando A suficientemente grande, segue o resultado.

2. Se $k - c(L) > 0$ e $\gamma \in \mathcal{C}_T(x, y)$,

$$\begin{aligned}
A_{L+k}(\gamma) &= \int_0^T [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k] dt \\
&= \int_0^T [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + c + k - c] dt \\
&= A_{L+c}(\gamma) + (k - c)T.
\end{aligned}$$

Logo

$$\Phi_k(x, y; T) = \Phi_c(x, y; T) + (k - c)T \geq \Phi_c(x, y) + (k - c)T.$$

Portanto

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_k(x, y; T) \geq \lim_{T \rightarrow +\infty} [\Phi_c(x, y) + (k - c)T] = +\infty.$$

Como M é compacta e a aplicação $(x, y) \rightarrow \Phi_c(x, y)$ é contínua (Lipschitz pelo item 5 da proposição 3.1),

$$\Phi_k(x, y, T) \geq \min_{x, y \in M} \{\Phi_c(x, y)\} + (k - c)T.$$

3. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Defina $B(s) := A_{L+k}(\gamma_s)$, onde $\gamma_s : [0, s] \rightarrow M$ dada por $\gamma_s(t) = \gamma\left(\frac{t}{s}\right)$. Se $0 \leq t \leq T$, fazendo $u = \frac{t}{T}$, teremos $T du = dt$, $0 \leq u \leq 1$. Portanto

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^T \left[L\left(\gamma\left(\frac{t}{T}\right), \frac{1}{T}\dot{\gamma}\left(\frac{t}{T}\right)\right) + k \right] dt \\ &= T \int_0^1 \left[L\left(\gamma(u), \frac{1}{T}\dot{\gamma}(u)\right) + k \right] du \end{aligned}$$

Derivando

$$\begin{aligned} B'(T) &= \int_0^1 \left[L\left(\gamma(u), \frac{1}{T}\dot{\gamma}(u)\right) + k \right] du - T \int_0^1 \left[L_v\left(\gamma(u), \frac{1}{T}\dot{\gamma}(u)\right) \frac{\dot{\gamma}(u)}{T^2} \right] du \\ &= \int_0^1 \left[k - \left(\frac{1}{T} L_v\left(\gamma(u), \frac{1}{T}\dot{\gamma}(u)\right) \dot{\gamma}(u) - L\left(\gamma(u), \frac{1}{T}\dot{\gamma}(u)\right) \right) \right] du \end{aligned}$$

Mas $\frac{d}{dt}\left(\gamma\left(\frac{t}{T}\right)\right) = \frac{1}{T}\dot{\gamma}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{\dot{\gamma}(u)}{T}$, então

$$B'(T) = \frac{1}{T} \int_0^T [k - E(\gamma_T(t), \dot{\gamma}_T(t))] dt.$$

Dados $\epsilon > 0$ e $T \geq \epsilon$ seja $\xi : [0, d_M(x, y)] \rightarrow M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Defina $\eta(t) := \xi\left(\frac{d_M(x, y)}{T}t\right)$, $0 \leq t \leq T$. Logo

$$\|\dot{\eta}\| = \left\| \dot{\xi} \right\| \frac{d_M(x, y)}{T} \leq \frac{d_M(x, y)}{\epsilon}.$$

Seja $C(\epsilon) := \max_{\|v\| \leq \frac{d_M(x, y)}{\epsilon}} L(x, v)$. Existe $\alpha \in \mathcal{C}_T(x, y)$ uma minimizante de Tonelli. Defina $\alpha_s(t) = \alpha\left(\frac{T}{s}t\right)$, logo $B(s) = A_{L+k}(\alpha_s) = \Phi_k(x, y, s) := h(s)$. Então

$$\frac{h(T+\delta) - h(T)}{\delta} \leq \frac{B(T+\delta) - B(T) + B(T) - h(T)}{\delta} = \frac{B(T+\delta) - B(T)}{\delta}.$$

Logo

$$f(T) := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{h(T+\delta) - h(T)}{\delta} \leq B'(T).$$

Pela convexidade, $L(x, v) - L(x, w) \geq L_v(x, w)(v - w)$. Fazendo $v = 0$ obtemos $L(x, 0) - L(x, w) \geq -L_v(x, w)(w)$. Logo

$$E(x, w) \geq -L(x, 0) \Rightarrow k - E(x, w) \leq k + C(\epsilon).$$

Segue que

$$B'(T) = \frac{1}{T} \int_0^T [k - E(\alpha_T(t), \dot{\alpha}_T(t))] dt \leq k + C(\epsilon).$$

Então

$$f(T) \leq k + C(\epsilon).$$

Se $S, T \geq \epsilon$,

$$\Phi_k(x, y, S) - \Phi_k(x, y, T) = h(S) - h(T) \leq \int_T^S f(t) dt.$$

Portanto

$$\Phi_k(x, y, S) - \Phi_k(x, y, T) \leq [k + C(\epsilon)](S - T).$$

■

Sabemos que, para o caso $k < c(L)$, $\Phi_k \equiv -\infty$. Logo não existem minimizantes globais. Analisaremos os demais casos.

Proposição 3.4. *Se $k > c(L)$ e $x \neq y$, então existe $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ tal que*

$$A_{L+k}(\gamma) = \Phi_k(x, y),$$

ou seja, existe uma minimizante global. Além disso sua energia é $E(\gamma, \dot{\gamma}) \equiv k$.

Prova: Pela proposição 3.3 $f(t) = \Phi_k(x, y, t)$ é contínua, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \Phi_k(x, y; \epsilon) = +\infty$ e $\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_k(x, y; T) = +\infty$. Para $\epsilon > 0$ pequeno e $Q > 0$ grande $f|_{[\epsilon, Q]}$ é uniformemente contínua. Logo existe $T_0 > 0$ tal que

$$f(T_0) \leq f(t) \forall t > 0 \Rightarrow \Phi_k(x, y) = \Phi_k(x, y, T_0).$$

Por Tonelli existe $\gamma \in \mathcal{C}_{T_0}(x, y)$ tal que $A_{L+k}(\gamma) = \Phi_k(x, y)$. Como $k > c(L)$ segue que γ é minimizante global. Da proposição 3.2 $E(\gamma, \dot{\gamma}) \equiv k$. ■

Para o caso $k = c(L)$ observe que $c = c(L)$ e, para toda curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$, temos

$$A_{L+c}(\gamma) \geq \Phi_c(x, y) \geq -\Phi_c(y, x).$$

Definição 3.2. Uma curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ é dita *semi-estática* se

$$A_{L+c}(\gamma) = \Phi_c(x, y).$$

Se $\gamma \in \mathcal{C}(x, y)$ é tal que

$$A_{L+c}(\gamma) = -\Phi_c(y, x)$$

então diremos γ é *estática*.

Segue da definição que curvas estáticas são semi-estáticas. A recíproca é válida desde que $d_c(x, y) = \Phi_c(x, y) + \Phi_c(y, x) = 0$. Note que curvas estáticas e semi-estáticas são minimizantes globais.

Corolário 3.1. *Curvas semi-estáticas tem energia $E = c(L)$.*

Prova: Se γ é semi-estática, logo é uma minimizante global. Portanto o resultado segue da proposição 3.2. ■

Definição 3.3.

$$\begin{aligned}\Sigma(L) &:= \{w \in TM | x_w : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ é semi-estática} \}, \\ \widehat{\Sigma}(L) &:= \{w \in TM | x_w : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ é estática} \}, \\ \Sigma^-(L) &:= \{w \in TM | x_w :] - \infty, 0] \rightarrow M \text{ é semi-estática} \}, \\ \Sigma^+(L) &:= \{w \in TM | x_w : [0, +\infty[\rightarrow M \text{ é semi-estática} \},\end{aligned}$$

onde x_w é uma curva tal que $(x_w(t_0), \dot{x}_w(t_0)) = w$. $\widehat{\Sigma}(L)$ é conhecido como conjunto de Aubry.

Seja $v \in TM$. Denote por $\alpha(v)$ e $\omega(v)$ alfa e ômega limites, respectivamente, de v pelo fluxo ϕ_t^L de Euler-Lagrange.

Lema 3.3. *Sejam $u, v \in \widehat{\Sigma}(L)$. Considere a relação*

$$u \sim v \Leftrightarrow d_c(\pi(u), \pi(v)) = 0.$$

Então \sim é uma relação de equivalência. Denotamos por $[u]$ a respectiva classe estática.

Prova: Temos que a relação é claramente reflexiva e simétrica. Mostraremos a transitividade. Pelos itens 1 e 6 da proposição 3.1, se $u \sim v$ e $v \sim w$, então

$$\Phi_c(x, z) \leq \Phi_c(x, y) + \Phi_c(y, z) \text{ e } \Phi_c(z, x) \leq \Phi_c(z, y) + \Phi_c(y, x).$$

onde $\pi(u) = x$, $\pi(v) = y$ e $\pi(w) = z$. Logo

$$0 \leq \Phi_c(x, z) + \Phi_c(z, x) \leq \Phi_c(x, y) + \Phi_c(y, x) + \Phi_c(y, z) + \Phi_c(z, y) = 0.$$

■

Proposição 3.5. *Se $v \in \Sigma(L)$, então $\alpha(v), \omega(v) \in \widehat{\Sigma}(L)$. Além disso $\alpha(v)$ e $\omega(v)$ estão contidos, cada um, em uma classe estática.*

Prova: Provaremos que $\omega(v) \subset \widehat{\Sigma}(L)$. O fato que $\alpha(v) \subset \widehat{\Sigma}(L)$ segue analogamente. Seja $\gamma(t) = \pi\phi_t^L(v)$. Suponha $(\gamma(t_n), \dot{\gamma}(t_n)) \rightarrow w \in TM$ com $t_n \rightarrow +\infty$. Se w for singularidade, então

$$\Phi_c(\pi(w), \pi(w)) = 0$$

e o resultado está provado. Caso contrário sejam $\eta(t) = \pi\phi_t^L(w)$ e $\gamma_n = \gamma|_{[t_n - s, t_n + s]}$, $s > 0$. Como η e γ são soluções de Euler-Lagrange e $(\gamma(t_n), \dot{\gamma}(t_n)) \rightarrow w$, ponto regular, pelo teorema do Fluxo Tubular,

$$(\gamma_n, \dot{\gamma}_n) \rightarrow (\eta|_{[-s, s]}, \dot{\eta}|_{[-s, s]})$$

para $s > 0$ suficientemente pequeno. Como

$$\begin{aligned} A_{L+c}(\gamma|_{[t_n - s, t_m - s]}) &= \int_{t_n - s}^{t_n + s} L(\gamma, \dot{\gamma}) + c + \int_{t_n + s}^{t_m - s} L(\gamma, \dot{\gamma}) + c \\ &= A_{L+c}(\gamma_n) + A_{L+c}(\gamma|_{[t_n + s, t_m - s]}). \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n,m} \Phi_c(\gamma(t_n - s), \gamma(t_m - s)) = \lim_{n,m} \{A_{L+c}(\gamma_n) + \Phi_c(\gamma(t_n + s), \gamma(t_m - s))\},$$

pois $A_{L+c}(\gamma|_{[\alpha, \beta]}) = \Phi_c(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))$. Portanto

$$\begin{aligned} A_{L+c}(\eta|_{[-s, s]}) + \Phi_c(\eta(s), \eta(-s)) &= \lim_{n,m} \{A_{L+c}(\gamma_n) + \Phi_c(\gamma(t_n + s), \gamma(t_m - s))\} \\ &= \lim_{n,m} \Phi_c(\gamma(t_n - s), \gamma(t_m - s)) \\ &= \Phi_c(\eta(-s), \eta(-s)) = 0, \end{aligned}$$

implicando $w \in \widehat{\Sigma}(L)$. Agora seja $u \in \omega(v)$. Existe $\{s_n\}$ com $t_n < s_n < t_{n+1}$ tal que $(\gamma(s_n), \dot{\gamma}(s_n)) \rightarrow u$. Como $\gamma(t_n) \rightarrow \pi(w)$, $\gamma(s_n) \rightarrow \pi(u)$ e

$$A_{L+c}(\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]})) = A_{L+c}(\gamma|_{[t_n, s_n]}) + A_{L+c}(\gamma|_{[s_n, t_{n+1}]}),$$

então

$$\begin{aligned} d_c(\pi(w), \pi(u)) &= \Phi_c(\pi(w), \pi(u)) + \Phi_c(\pi(u), \pi(w)) \\ &= \lim_n A_{L+c}(\gamma|_{[t_n, s_n]}) + \lim_n A_{L+c}(\gamma|_{[s_n, t_{n+1}]}) \\ &= \lim_n A_{L+c}(\gamma|_{[t_n, t_{n+1}]}) \\ &= \lim_n \Phi_c(\gamma(t_n), \gamma(t_{n+1})) \\ &= \Phi_c(\pi(w), \pi(w)) = 0, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

3.3 Barreira de Peierls

Dados $x, y \in M$ e $T > 0$ defina

$$h_T(x, y) := \Phi_c(x, y; T) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_T(x, y)} A_{L+c}(\gamma).$$

Curvas que realizam $h_T(x, y)$ são minimizantes de Tonelli em $\mathcal{C}_T(x, y)$. Definimos a barreira de Peierls por

$$h(x, y) = \liminf_{T \rightarrow \infty} h_T(x, y).$$

Note que na barreira de Peierls as curvas devem ser definidas em intervalos de tempo arbitrariamente grandes. Obviamente

$$h(x, y) = \liminf_{T \rightarrow \infty} h_T(x, y) \geq \inf_T h_T(x, y) = \Phi_c(x, y).$$

Proposição 3.6. *Se $h : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é finita, então*

1. $\forall x, y \in M, h(x, y) \geq \Phi_c(x, y)$. Em particular $h(x, x) \geq 0, \forall x \in M$.
2. $h(x, z) \leq h(x, y) + h(y, z), \forall x, y, z \in M$.
3. h é Lipschitz.
4. $h(x, y) \leq \Phi_c(x, p) + h(p, q) + \Phi_c(q, y), \forall x, y, p, q \in M$.
5. Se $\widehat{\Sigma} \neq \emptyset$, então $h(x, y) \leq \inf_{p \in \pi(\widehat{\Sigma})} \{\Phi_c(x, p) + \Phi_c(p, y)\}$.

Prova: 1. Já observamos que $h(x, y) \geq \Phi_c(x, y)$ para todos $x, y \in M$. Conseqüentemente

$$h(x, x) \geq \Phi_c(x, x) = 0.$$

2. Dados $S, T > 0$ e $x, y, z \in M$ seja γ tal que $\gamma(0) = x, \gamma(T) = y$ e $\gamma(T+S) = z$.

Logo

$$h_{T+S}(x, z) \leq A_{L+c}(\gamma) = \int_0^T [L(\gamma) + c] dt + \int_T^{T+S} [L(\gamma) + c] dt.$$

Tomando o ínfimo em $\mathcal{C}_T(x, y)$ e em $\mathcal{C}_T(y, z)$,

$$h_{T+S}(x, z) \leq \Phi_c(x, y) + \Phi_c(y, z) \leq h_T(x, y) + h_S(y, z). \quad (3.1)$$

Logo

$$h(x, z) = \liminf_{T \rightarrow \infty} h_{T+S}(x, z) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \{h_T(x, y) + h_S(y, z)\} = h(x, y) + h_S(y, z). \quad (3.2)$$

Portanto

$$h(x, z) \leq h(x, y) + h(y, z).$$

3. Tomando o ínfimo em S na equação 3.2 obtemos

$$h(x, z) \leq h(x, y) + \Phi_c(y, z). \quad (3.3)$$

Pelo item 5 da proposição 3.1 (Φ_c é Lipschitz),

$$\Phi_c(y, z) = \Phi_c(y, z) - \Phi_c(z, z) \leq Q[d_M(y, z) + d_M(z, z)].$$

Logo, pela equação 3.3,

$$h(x, z) - h(x, y) \leq \Phi_c(y, z) \leq Qd_M(y, z).$$

Pela equação 3.1

$$h(x, q) = \liminf_{S \rightarrow \infty} h_{T+S}(x, q) \leq \liminf_{S \rightarrow \infty} \{h_T(x, p) + h_S(p, q)\} = h_T(x, p) + h(p, q).$$

Tomando o ínfimo em T ,

$$h(x, q) - h(p, q) \leq \Phi_c(x, p) \leq Qd_M(x, p).$$

Portanto

$$\begin{aligned} h(x, y) - h(p, q) &= h(x, y) - h(x, q) + h(x, q) - h(p, q) \\ &\leq Q[d_M(y, q) + d_M(x, p)] \\ &= Qd_{M \times M}((x, y), (p, q)). \end{aligned}$$

4. Temos que, se $S > T > 0$,

$$\inf_{S > 0} h_S(x, y) \leq \Phi_c(x, p) + \Phi_c(p, q) + \Phi_c(q, y) \leq \Phi_c(x, p) + h(p, q) + \Phi_c(q, y).$$

Portanto

$$h(x, y) \leq \Phi_c(x, p) + h(p, q) + \Phi_c(q, y).$$

5. Pelo item 4,

$$h(x, y) \leq \Phi_c(x, p) + h(p, p) + \Phi_c(p, y) = \Phi_c(x, p) + \Phi_c(p, y)$$

se $p \in \pi(\widehat{\Sigma})$. Segue que

$$h(x, y) \leq \inf_{p \in \pi(\widehat{\Sigma})} \Phi_c(x, p) + \Phi_c(p, y).$$

■

Assumiremos a demonstração do seguinte lema que pode ser encontrada em [10, corolário 4.3.2]:

Lema 3.4. *Seja L um Lagrangiano de Tonelli em uma variedade compacta M . Se $t > 0$ é fixo, existe um subconjunto compacto $K_t \subset M$ tal que, para toda $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ extremal com $T \geq t$ tem-se que*

$$(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \in K_t \forall s \in [0, T].$$

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses da proposição acima $h(x, x) = 0$ se, e somente se, $x \in \pi(\widehat{\Sigma})$*

(A projeção do conjunto de Aubry).

Prova: Primeiramente provaremos que se $p \in \widehat{\Sigma}$, então $h(p, p) = 0$. Tome $v \in \widehat{\Sigma}$ tal que $\pi(v) = p$ e $y \in \pi(\omega(v))$. Sejam

$$\gamma(t) = \pi\phi_t^L(v) \text{ e } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \gamma(t_n) \rightarrow y.$$

Pela equação 3.3 e o item 1.,

$$0 \leq h(p, p) \leq h(p, y) + \Phi_c(y, p).$$

Mas $h_{t_n}(p, \gamma(t_n)) \leq A_{L+c}(\gamma|_{[0, t_n]})$ implica que

$$h(p, y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} h_{t_n}(p, \gamma(t_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c}(\gamma|_{[0, t_n]}).$$

Logo, usando o fato de γ ser estática ($A_{L+c}(\gamma|_{[0, t_n]}) = -\Phi_c(\gamma(t_n), p)$),

$$h(p, y) + \Phi_c(y, p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{-\Phi_c(\gamma(t_n), p)\} + \Phi_c(y, p) = 0.$$

Reciprocamente, se $h(p, p) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \Phi_c(p, p; T) = 0$, por definição existe $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\Phi_c(p, p; t_n) \rightarrow 0$. Podemos tomar $\gamma_n \in \mathcal{C}_{t_n}(p, p)$ minimizantes de Tonelli tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c}(\gamma_n) = 0. \quad (3.4)$$

Dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\int_0^{t_n} (L(\gamma_n, \dot{\gamma}_n) + c) dt < \epsilon \text{ se } n \geq N. \quad (3.5)$$

Pelo lema acima existe um compacto $K_\epsilon \subset M$ tal que, para cada $n \geq N$ que satisfaz $t_n \geq \epsilon$ tem-se que

$$(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) \in K_\epsilon \forall s \in [0, t_n].$$

Em particular $(\gamma_n(0), \dot{\gamma}_n(0)) \in K_\epsilon$. Portanto existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $\dot{\gamma}_{n_k}(0) \rightarrow v$. Seja $\eta(t) = \pi\phi_t^L(x, v)$ com $\dot{\eta}(0) = v$. Como $\gamma_{n_k}(0) = \eta(0)$ e $\dot{\gamma}_{n_k}(0) \rightarrow \dot{\eta}(0)$, pelo teorema do Fluxo Tubular $\gamma_{n_k}|_{[0, s]} \xrightarrow{C^1} \eta|_{[0, s]}$ para s suficientemente pequeno. Logo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi_c(p, \eta(s)) + \Phi_c(\eta(s), p) \\ &\leq A_{L+c}(\eta|_{[0, s]}) + \Phi_c(\eta(s), p) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \{A_{L+c}(\gamma_{n_k}|_{[0, s]}) + \Phi_c(\eta(s), \gamma_{n_k}(s)) + \Phi_c(\gamma_{n_k}(s), p)\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \{A_{L+c}(\gamma_{n_k}|_{[0, s]}) + \Phi_c(\eta(s), \gamma_{n_k}(s)) + A_{L+c}(\gamma_{n_k}|_{[s, t_n])}\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \{A_{L+c}(\gamma_{n_k}|_{[0, t_n]}) + \Phi_c(\eta(s), \gamma_{n_k}(s))\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

pela equação 3.4 e porque $\gamma_{n_k}|_{[0, s]} \rightarrow \eta|_{[0, s]}$ implica em $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_c(\eta(s), \gamma_{n_k}(s)) = 0$. Portanto $\Phi_c(p, \eta(s)) = -\Phi_c(\eta(s), p)$, o que significa que a curva η é estática. ■

Temos portanto uma caracterização do conjunto de Aubry projetado através da barreira. Vejamos em um exemplo:

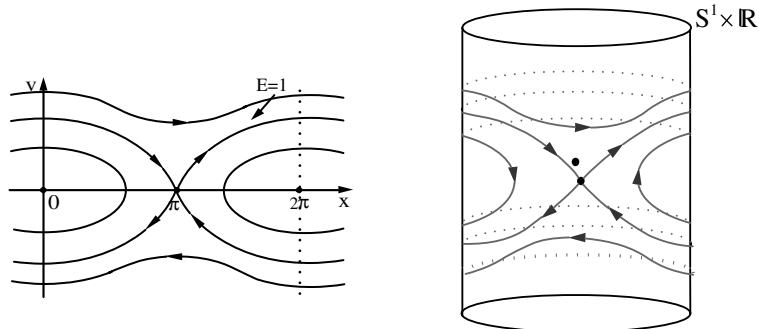
Exemplo 3.4. (Pêndulo Simples) Considere o Lagrangiano Mecânico $L : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, v) = \frac{v^2}{2} + \cos x.$$

A função energia é da forma $E(x, v) = \frac{v^2}{2} - \cos x$ e o sistema de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \text{sen } x. \end{aligned}$$

Temos que $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ são as singularidades do tipo centro e sela, respectivamente. O valor crítico, como sabemos (exemplo 3.2), vale $c(L) = \max_{x \in S^1} E(x, 0) = -\cos \pi = 1$.



Logo

$$\Phi_c(x, x; T) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}_T(x, x)} \left\{ \int_0^T \left(\frac{(\dot{\gamma})^2}{2} + \cos \gamma + 1 \right) dt \right\}.$$

Portanto $\Phi_c(x, x; T) = 0$ com o ínfimo atingido em $\gamma(t) = \pi$ ($\dot{\gamma}(t) = 0$). Então $h(x, x) = 0$ se só se $x = \pi$ e o conjunto de Aubry $\widehat{\Sigma} = \{(\pi, 0)\} \subset E^{-1}(1)$.

Capítulo 4

Subvariedades Lagrangianas e Subsoluções de Hamilton-Jacobi

Trataremos neste capítulo de algumas Subvariedades Lagrangianas especiais, os Gráficos Lagrangianos. Caracterizaremos o valor crítico em termos da existência de tais subvariedades e finalizaremos com um breve relato sobre a equação de Hamilton-Jacobi e resultados recentes sobre subsoluções.

4.1 Gráficos Lagrangianos

Teorema 4.1. *(Hamilton-Jacobi) Seja T^*M o fibrado cotangente da variedade M munido da forma simplética canônica ω . $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante em uma Subvariedade Lagrangiana N se, e somente se N é invariante por ϕ_t^H .*

Prova: Se H é constante em N , então $dH(y)|_{T_y N} = 0$ para todo $y \in N$. Logo $dH(y)v = \omega_y(X_H(y), v) = 0$ para todo $v \in T_y N$, o que implica $X_H(y) \in (T_y N)^\perp = T_y N$. Pelo teorema de existência e unicidade $X_H|_N$ tem soluções em N que devem ser órbitas de ϕ_t^H (pela unicidade), o que garante a invariância pelo fluxo. Reciprocamente, se $y \in N$, então as curvas $t \mapsto \phi_t^H(y) \in N$ tem velocidade $X_H(y) \in T_y N$ para $t = 0$. Como N é lagrangiana, $dH(y)v = \omega_y(X_H(y), v) = 0$ para todo $v \in T_y N$. Portanto $dH|_N = 0$. ■

Lema 4.1. *Dada η uma 1-forma em M , então $\text{Graf}(\eta) := \{(x, \eta_x) | x \in M\} \subset T^*M$ é uma Subvariedade Lagrangiana se, e somente se, η for fechada.*

Prova: Primeiramente temos que $\eta^* \Theta = \eta$. De fato, usando coordenadas locais (x_1, \dots, x_n)

de M podemos escrever

$$\eta_x = \sum_i \eta_i(x) dx_i.$$

Nessas coordenadas $\eta : M \rightarrow T^*M$ é dada por

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n; \eta_1(x), \dots, \eta_n(x)),$$

então, se $W = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$,

$$(\eta^* \Theta)_x W = \Theta_{\eta(x)}(d\eta_x(W)) = (\sum_i \eta_i(x) dx_i) (X_1, \dots, X_n; d\eta_x^{n+1}(W), \dots, d\eta_x^{2n}(W)) = \eta_x W.$$

Desse fato obtemos

$$d\eta = \eta^* d\Theta = -\eta^* \omega.$$

Por outro lado, $\eta : M \rightarrow T^*M$ induz um difeomorfismo de M sobre $Graf(\eta)$. Logo

$$d\eta|_M = 0 \Leftrightarrow \omega|_{Graf(\eta)} = 0.$$

■

Gráficos de 1-formas que são Subvariedades Lagrangianas são ditos *Gráficos Lagrangianos*. Podemos associar a cada gráfico $Graf(\eta)$ uma classe de cohomologia $[\eta] \in H^1(M, \mathbb{R})$. Gráficos Lagrangianos com classe de cohomologia trivial são gráficos de 1-formas exatas. Estes são chamados *Gráficos Lagrangianos Exatos*. Veremos a seguir que todo Gráfico Lagrangiano é localmente exato. Mais geralmente temos:

Lema 4.2. *Seja $N \subset T^*M$ um Gráfico Lagrangiano. Para cada $y \in N$ existe uma função $S : U \subset T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que U é uma vizinhança aberta de y e $N \cap U = Graf(dS)$. A função S assim obtida é dita Função Geradora.*

Prova: Dados I, J multi-índices tais que $I \cup J = \{1, \dots, n\}$ e $I \cap J = \emptyset$ sejam

$$x_J = X_J(x_I, p_J) \text{ e } p_I = P_I(x_I, p_J)$$

uma parametrização local de N . Temos que a 1-forma fechada

$$\eta(x_I, p_J) = \sum_{i \in I} P_i(x_I, p_J) dx_i + \sum_{j \in J} p_j dX_j(x_I, p_J)$$

definida em T^*M é localmente exata. Podemos reescrever η da seguinte forma:

$$\eta(x_I, p_J) = \sum_{i \in I} P_i(x_I, p_J) dx_i + \sum_{j \in J} p_j \left(\sum_{i \in I} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k \in I} \frac{\partial X_j}{\partial p_k} dp_k \right).$$

Como η é fechada,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i \in I, l \in J} \left[\frac{\partial P_i}{\partial p_l} + \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + \sum_{j \in I} p_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial p_l} \right] dp_l \wedge dx_i + \sum_{i \in I, l \in J} \left[\sum_{j \in I} p_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial p_l \partial x_i} \right] dx_i \wedge dp_l \\
&= \sum_{i \in I, l \in J} \left[\frac{\partial P_i}{\partial p_l} + \frac{\partial X_l}{\partial x_i} + \sum_{j \in I} p_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial p_l} - \sum_{j \in I} p_j \frac{\partial^2 X_j}{\partial p_l \partial x_i} \right] dp_l \wedge dx_i \\
&= \sum_{i \in I, l \in J} \left[\frac{\partial P_i}{\partial p_l} + \frac{\partial X_l}{\partial x_i} \right] dp_l \wedge dx_i.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_l} = -\frac{\partial X_l}{\partial x_i}.$$

Defina

$$S(x_i, p_j) = - \int_0^{p_j} X_j(x_i, t) dt.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x_i}(x_i, p_j) &= - \int_0^{p_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x_i, t) dt \\
&= \int_0^{p_j} \frac{\partial P_i}{\partial p_j}(x_i, t) dt \\
&= P_i(x_i, p_j).
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial S}{\partial p_j}(x_i, p_j) = -X_j(x_i, p_j).$$

Portanto $P_i dx_i - X_j dp_j$ é localmente exata. Com isso obtemos uma parametrização local de N

$$(x_I, p_J) \mapsto \left(x_I, -\frac{\partial S}{\partial p_J}, \frac{\partial S}{\partial x_I}, p_J \right).$$

■

Observação 4.1. Podemos sempre supor $I \cap J = \emptyset$. Justificaremos com um exemplo. Suponha que a parametrização local de $N \subset T^*\mathbb{R}^2$ seja dada por

$$(x_1, p_1) \mapsto (x_1, f_1(x_1, p_1), p_1, f_2(x_1, p_1)).$$

Como N é lagrangiana,

$$d(p_1 dx_1 + f_2 df_1) = 0.$$

Logo

$$\det(df) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} - \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1.$$

Se $\frac{\partial f_2}{\partial p_1} \neq 0$, pelo teorema da função implícita existe $g_1(x_1, p_2) = p_1$ tal que

$$(x_1, p_2) \mapsto (x_1, f_1(x_1, p_2), g_1(x_1, p_2), p_2).$$

Caso contrário, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \neq 0$. Novamente podemos utilizar o teorema da função implícita e obter uma função $g_2(x_1, x_2) = p_1$ tal que

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, g_2(x_1, x_2), f_2(x_1, g_2(x_1, x_2))).$$

É claro que se $\pi|_N$ for um difeomorfismo local, então a parametrização obtida é da forma (x, dS_x) . Pontos críticos de π são conhecidos como *Singularidades Lagrangianas* e o conjunto crítico $\{y \in N : d\pi_y|_{T_y N} \text{ tem posto } \leq n - 1\}$ é chamado *Cáustica*. Pelo lema 4.2 a cáustica é caracterizada pela equação

$$\text{Posto} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial p_j \partial p_k} \right) \leq |J| - 1.$$

Vejamos um exemplo de cáustica:

Exemplo 4.1. Consideremos $\mathbb{R}^4 = T^*\mathbb{R}^2$ e S uma subvariedade de dimensão 2 em \mathbb{R}^4 dada por $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\varphi(u, v) = \left(uv - u^3, v, u, -\frac{u^2}{2} \right).$$

Tem-se que

$$d\varphi_{(u,v)} = \begin{pmatrix} v - 3u^2 & u \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -u & 0 \end{pmatrix}.$$

Dados $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$ com $w_1 = (a, b)$ e $w_2 = (c, d)$ obtemos que

$$d\varphi_{(u,v)} w_1 = (av - 3au^2 + bu, b, a, -au)$$

e

$$d\varphi_{(u,v)} w_2 = (cv - 3cu^2 + du, d, c, -cu).$$

Logo, dado $p \in S$ tem-se que

$$\begin{aligned}
 \omega_p(d\varphi_{(u,v)}w_1, d\varphi_{(u,v)}w_2) &= \langle d\varphi_{(u,v)}w_1, Jd\varphi_{(u,v)}w_2 \rangle \\
 &= \langle (av - 3au^2 + bu, b, a, -au), (c, -cu, 3cu^2 - cv - du, -d) \rangle \\
 &= acv - 3acu^2 + bcu - bcu + 3acu^2 - acv - adu + adu \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto $S \subset \mathbb{R}^4$ é uma Subvariedade Lagrangiana. Por outro lado seja π a projeção de S sobre o plano (base do fibrado), logo

$$\det(d\pi) = v - 3u^2,$$

o que significa que a curva $\gamma(t) = \left(2t^3, 3t^2, t, -\frac{t^2}{2}\right)$ (que é regular em S) é uma cáustica.

4.2 Subsoluções de Hamilton-Jacobi

Relembramos que a equação de Hamilton-Jacobi para Hamiltonianos Autônomos é

$$H(x, du_x) = k, \quad u : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dizemos que uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *subsolução* da equação de Hamilton-Jacobi se u for diferenciável e

$$H(x, du_x) \leq k$$

em quase todo ponto na medida de Lebesgue. Portanto uma subsolução de classe C^1 da equação de Hamilton-Jacobi induz um Gráfico Lagrangiano Exato contido no nível de energia k .

Uma função u diz-se *dominada* por $L + k$ (notação: $u \prec L + k$) se

$$u(y) - u(x) \leq \Phi_k(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Se $k < c(L)$ sabemos que $\Phi_k(x, y) = -\infty$, logo estaremos interessados em funções dominadas para $k \geq c(L)$. Pela desigualdade triangular, $\Phi_k(y, y) - \Phi_k(y, x) \leq \Phi_k(x, y)$. Logo a função $u(x) = \Phi_k(y, x)$ é dominada para todo $y \in M$.

Lema 4.3.

1. Se $u \prec L + k$, então u é Lipschitz com a mesma constante de Lipschitz que Φ_k .
2. Se $u \prec L + k$, então para todo x onde u é diferenciável tem-se $H(x, du_x) \leq k$.

Prova: 1. Pela condição de limitação,

$$u(y) - u(x) \leq \Phi_k(x, y) \leq Qd_M(x, y) = Qd_M(y, x).$$

2. Temos que, para todo $s > 0$ e $\gamma \in \mathcal{C}_s(x, y)$,

$$u(\gamma(s)) - u(\gamma(0)) \leq \int_0^s [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k] dt$$

Se u é diferenciável em x , $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x M$ e $f(s) = \int_0^s [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k] dt$,

$$\begin{aligned} du_x \cdot v &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{u(\gamma(s)) - u(\gamma(0))}{s} \\ &\leq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^s [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k] dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s) - f(0)}{s} \\ &= L(x, v) + k. \end{aligned}$$

Por outro lado sabemos que

$$H(x, du_x) = \sup_{v \in T_x M} \{du_x \cdot v - L(x, v)\},$$

logo

$$H(x, du_x) \leq k.$$

■

O resultado na seguinte seção nos fornece uma caracterização muito geométrica do valor crítico em termos da existência de Gráficos Lagrangianos. Este estabelece que o valor crítico é o ínfimo dos valores reais k tais que $H^{-1}(-\infty, k)$ contém um Gráfico Lagrangiano Exato.

4.3 O Teorema: Existência de Gráficos Lagrangianos Exatos

Provaremos que, se $k > c(L)$, então existe uma subsolução de classe C^1 da equação de Hamilton-Jacobi e para $k < c(L)$ não existem subsoluções diferenciáveis. Neste caso não existe subsolução sequer fracamente diferenciável, como veremos posteriormente.

Teorema 4.2. *Se M é uma variedade compacta, então*

$$c(L) = \inf F,$$

onde $F = \{k \in \mathbb{R} / \exists f \in C^1(M, \mathbb{R}) \text{ satisfazendo } H(x, df_x) < k\}$.

Para a prova precisaremos de alguns resultados:

Lema 4.4. *Se existe uma função de classe C^1 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H(x, df_x) < k$, então $k \geq c(L)$.*

Prova: Como $H(x, df_x) = \max_{v \in T_x M} \{df_x \cdot v - L(x, v)\} < k$, então, para todo $(x, v) \in TM$,

$$df_x \cdot v - L(x, v) < k.$$

Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é uma curva absolutamente contínua fechada,

$$\int_0^T df_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^T \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = 0.$$

Logo

$$\int_0^T [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k] dt = \int_0^T [L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k - df_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)] dt > 0.$$

Portanto $k \geq c(L)$. ■

Dizemos que uma função $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é *fracamente diferenciável* se, para toda $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ com suporte compacto existirem *distribuições* $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, para cada i ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\varphi(x) g_i(x) + u(x) \frac{d\varphi}{dx_i}(x) \right) dx = 0.$$

Em análise distribuições são objetos que generalizam funções. A noção de funções generalizadas foi introduzida em 1935 por Sergei Sobolev e, independentemente, por Laurent Schwartz em 1940. Schwartz foi quem formalizou e desenvolveu a teoria de distribuições.

Em nossa definição de derivada fraca as distribuições em questão são funções Lebesgue integráveis.

Um conjunto W de uma variedade M de dimensão n tem medida nula se, dado $\epsilon > 0$ existir uma cobertura enumerável $\cup B_k \supset W$ tal que

$$\sum_k \text{vol}(\psi_k(B_k)) < \epsilon,$$

onde $\{U_j, \psi_j\}$ é uma estrutura diferenciável para M ($\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$) e $\text{vol}(\cdot)$ representa a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n . Assim sendo, uma condição vale em quase todo ponto de M se é válida a menos de um conjunto de medida nula.

Lema 4.5. *Se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é fracamente diferenciável e*

$$H(x, du_x) \leq k \text{ em quase todo ponto } x \in M,$$

então para todo $\delta > 0$ existe $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ tal que $H(x, df_x) < k + \delta$ para todo $x \in M$.

Prova: Suponhamos $M \subset \mathbb{R}^N$ mergulhada (Whitney). Sejam U uma vizinhança tubular de M em \mathbb{R}^N e $\xi : U \rightarrow M$ uma projeção de classe C^∞ ao longo do fibrado normal que está bem definida pela compacidade de M . Defina $\bar{u} : U \rightarrow \mathbb{R}$ por $\bar{u}(z) = u(\xi(z))$. Segue que \bar{u} é também fracamente diferenciável valendo

$$d\bar{u}_z = du_{\xi(z)} \cdot d\xi_z$$

em todo ponto $z \in U$ onde ξ é diferenciável. Façamos a extensão do lagrangiano L a U :

$$\bar{L}(z, v) = L(\xi(z), d\xi_z \cdot v) + \frac{1}{2} \|v - d\xi_z \cdot v\|_{\mathbb{R}^N}^2.$$

Se $p \in T_{\xi(z)}^*M$,

$$\begin{aligned} \bar{H}(z, p \cdot d\xi_z) &= \max_{v \in T_z U} \left\{ p \cdot d\xi_z \cdot v - L(\xi(z), d\xi_z \cdot v) - \frac{1}{2} \|v - d\xi_z \cdot v\|_{\mathbb{R}^N}^2 \right\} \\ &\leq \max_{v \in T_z U} \{p \cdot d\xi_z \cdot v - L(\xi(z), d\xi_z \cdot v)\} - \min_{v \in T_z U} \left\{ \frac{1}{2} \|v - d\xi_z \cdot v\|_{\mathbb{R}^N}^2 \right\} \\ &= \max_{d\xi_z \cdot v \in T_{\xi(z)} M} \{p \cdot d\xi_z \cdot v - L(\xi(z), d\xi_z \cdot v)\} \\ &\leq \max_{w \in T_{\xi(z)} M} \{p \cdot w - L(\xi(z), w)\} \\ &= H(\xi(z), p). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\max_{v \in T_z U} \{\cdot\} \geq \max_{v \in T_{\xi(z)} M} \{\cdot\}$ e $d\xi_z \cdot v = v$ para todo $v \in T_{\xi(z)} M$,

$$\bar{H}(z, p \cdot d\xi_z) \geq H(\xi(z), p) \Rightarrow \bar{H}(z, p \cdot d\xi_z) = H(\xi(z), p).$$

Se \bar{u} é diferenciável em z ,

$$\bar{H}(z, d\bar{u}_z) = H(\xi(z), du_{\xi(z)}) \leq k.$$

Dado $\delta > 0$, seja $\epsilon > 0$ tal que:

a) A 3ϵ -vizinhança de M em \mathbb{R}^N esteja contida em U .

b) Se $x \in M$, $(y, p) \in T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$, $\bar{H}(y, p) \leq k$ e $d_{\mathbb{R}^N}(x, y) < \epsilon$, então $\bar{H}(x, p) < k + \delta$ (isto é possível pela continuidade de $\bar{H}(\cdot, p)$).

Considere a função bump $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$\psi(x) \geq 0, \text{ suporte}(\psi) \subset (-\epsilon, \epsilon) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\|x\|_{\mathbb{R}^N}^2) dx = 1.$$

Defina $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $K(x, y) = \psi(\|x - y\|_{\mathbb{R}^N}^2)$ seja N_ϵ a ϵ -vizinhança de M em \mathbb{R}^N . Se $f : N_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(y) K(x, y) dy,$$

então f é de classe C^∞ em N_ϵ . Como \bar{u} é fracamente diferenciável e $K(x, \cdot)$ é de classe C^∞ com suporte em $B_\epsilon(x)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(K(x, y) d\bar{u}_y + \bar{u}(y) \frac{\partial K}{\partial y}(x, y) \right) dy = 0.$$

Mas $\frac{\partial K}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial K}{\partial y}(x, y)$ e $df_x = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(y) \frac{\partial K}{\partial x}(x, y) dy$, logo

$$df_x = - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{u}(y) \frac{\partial K}{\partial y}(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} d\bar{u}_y K(x, y) dy.$$

Agora, se $x \in M$, para quase todo $y \in \text{suporte}(K(x, \cdot)) \subset B_\epsilon(x)$ tem-se pela escolha de $\epsilon > 0$ que

$$\bar{H}(x, d\bar{u}_y) < k + \delta.$$

Por outro lado $K(x, y) dy$ é uma medida de probabilidade. Como $d\bar{u}_y$ é integrável e $\bar{H}(x, \cdot)$ é convexa, pela desigualdade de Jensen (ver, por exemplo, [2, teorema 3.3]),

$$\bar{H}(x, df_x) = \bar{H}\left(x, \int_{\mathbb{R}^N} d\bar{u}_y K(x, y) dy\right) \leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{H}(x, d\bar{u}_y) K(x, y) dy.$$

Portanto

$$H(x, df_x) = \bar{H}(x, df_x) < k + \delta$$

para todo $x \in M$. ■

Proposição 4.1. *Se $k > c(L)$, então $k \in F$.*

Prova: Fixado $y \in M$, seja $u(x) = \Phi_c(y, x)$ com $c = c(L)$. O teorema de Rademacher (ver, por exemplo, [3, teorema 2, página 81]) nos diz que toda função Lipschitz é diferenciável em quase todo ponto. Sabemos que $u \prec L + c$, logo, pelo lema 4.3 e por Rademacher u é Lipschitz satisfazendo

$$H(x, du_x) \leq c$$

em quase todo ponto na medida de Lebesgue. Além disso u é fracamente diferenciável. Como $k > c$, seja $\delta > 0$ tal que $c + \delta \leq k$. Segue do lema 4.5 que existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que

$$H(x, df_x) < c + \delta \leq k \text{ para todo } x \in M.$$

■

Faremos agora a prova do teorema 4.2:

Prova: Pelo lema 4.4 temos que $c(L)$ é cota inferior para F . Por outro lado, dado $\delta > 0$ existe $c(L) < k < c(L) + \delta$ e, pela proposição 4.1 $k \in F$. Portanto

$$c(L) = \inf F.$$

■

Note que, se $k < c(L)$, então não existe subsolução fracamente diferenciável. De fato, suponha por absurdo que exista uma subsolução $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de Hamilton-Jacobi fracamente diferenciável. Pelo lema 4.5 dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno existe $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ tal que

$$H(x, df_x) < k + \delta \leq c(L),$$

o que contraria o fato de $c(L)$ ser ínfimo de F . Portanto para $k < c(L)$ não existem subsoluções fracas de Hamilton-Jacobi.

Aplicaremos agora os resultados vistos estudando o seguinte Lagrangiano Magnético: Considere $L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 + \cos(2\pi x_1) v_2$ definido no toro plano T^2 . Este seria o modelo de uma partícula sob influência de um campo magnético não-trivial sem potencial eletrostático. Este modelo aparece no fenômeno relatado pelo efeito Hall (veja [7]). O valor crítico neste caso é $\frac{1}{2}$. De fato, se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva fechada temos que

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \cos(2\pi x) \dot{y} = \frac{(\dot{y} + \cos(2\pi x))^2 + \dot{x}^2}{2} - \frac{\cos^2(2\pi x)}{2} \geq -\frac{1}{2},$$

Então

$$A_{L+1/2}(\alpha) = \int_0^T \left(L(\alpha, \dot{\alpha}) + \frac{1}{2} \right) dt \geq 0,$$

o que implica $c(L) \leq 1/2$. Por outro lado, se $0 < k \leq 1/2$ a curva fechada $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2kt}\right)$ é solução de Euler-Lagrange com energia $E = k$ e, conseqüentemente,

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_0^T (L(\gamma, \dot{\gamma}) + k) dt = \int_0^T (2k - \sqrt{2k}) dt < 0 \text{ se } k < 1/2$$

e

$$A_{L+k}(\gamma) = 0 \text{ se } k = \frac{1}{2}.$$

Logo $c(L) = 1/2$. Façamos o estudo do campo de Euler-Lagrange. De

$$L_x(x, v) = \frac{d}{dt} L_v(x, v)$$

obtemos o campo de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -2\pi \operatorname{sen}(2\pi x_1) Jv, \end{aligned}$$

onde $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A função energia de L é dada por

$$E(x, v) = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2},$$

que sabemos ser constante ao longo das extremas pela observação 1.3. Logo, se E é uma constante positiva e $v_1^2 + v_2^2 = 2E$, podemos parametrizar $v = (v_1, v_2)$ por $v_1 = \sqrt{2E} \cos \varphi$ e $v_2 = \sqrt{2E} \operatorname{sen} \varphi$, onde φ é o ângulo que v faz com a direção horizontal. Seja $(x(t), v(t))$ uma solução. Derivando v_1 e v_2 em relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\dot{\varphi} \sqrt{2E} \operatorname{sen} \varphi \\ \dot{v}_2 &= \dot{\varphi} \sqrt{2E} \cos \varphi \end{aligned}$$

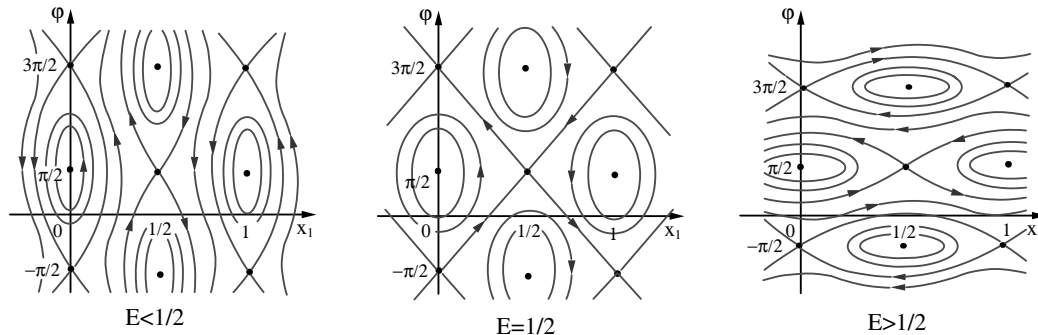
Dessa forma, para cada valor positivo E , obtemos um novo sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{2E} \cos \varphi \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{2E} \operatorname{sen} \varphi \\ \dot{\varphi} &= 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x_1) \end{aligned}$$

Como a terceira equação só depende da variável x_1 podemos restringir nosso estudo ao sistema abaixo para analisar a dinâmica em cada seção do plano (x_1, φ) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{2E} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} &= 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x_1) \end{aligned}$$

As singularidades desse sistema serão $x_1 = \frac{k}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$ com $k, l \in \mathbb{Z}$. Note que a função $F(x_1, \varphi) = \sqrt{2E} \sin(\varphi) + \cos(2\pi x_1)$ é uma integral primeira para o sistema. Calculando o determinante da Hessiana de F aplicada nos pontos singulares $p_{k,l} = (\frac{k}{2}, \frac{\pi}{2} + l\pi)$ obtemos que: se $k+l$ for ímpar $p_{k,l}$ é sela e se $k+l$ for par $p_{k,l}$ é centro. Segue um esboço qualitativo para os três possíveis casos referentes aos possíveis valores de E :



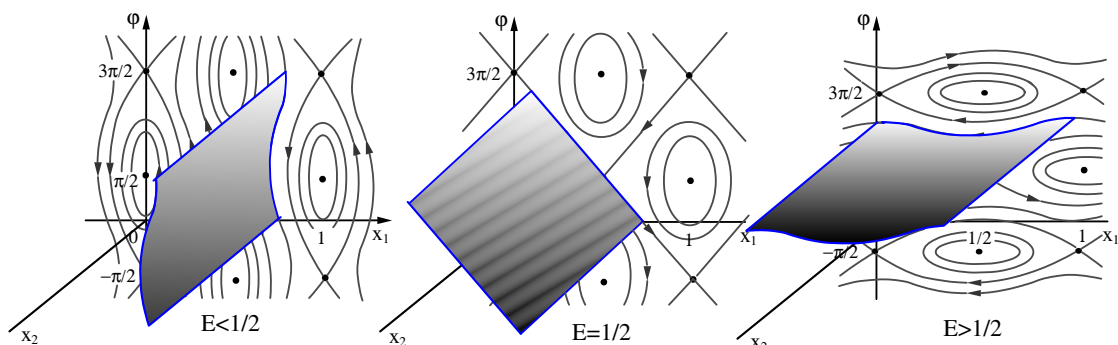
O Hamiltoniano associado neste caso será

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \max_v \{ 2pv - \|v\|^2 - 2 \cos(2\pi x_1) v_2 \}.$$

Completando quadrados obtemos que o máximo é atingido em $v_1 = p_1$ e $v_2 = p_2 - \cos(2\pi x_1)$. Logo obtemos

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \|p - (0, \cos(2\pi x_1))\|^2.$$

Pelo teorema 4.2 se $k > \frac{1}{2}$, então $H^{-1}(-\infty, k)$ possui um Gráfico Lagrangiano Exato. Como os campos Hamiltonianos e Lagrangianos são conjugados pela transformada de Legendre, é suficiente observarmos gráficos presentes no caso Lagrangiano. Neste exemplo notamos que o caso $k = 1/2$ também possui um Gráfico Lagrangiano:



4.4 Subsoluções Críticas de Hamilton-Jacobi

Já temos tratado algumas peculiaridades da equação de Hamilton-Jacobi autônoma. É praticamente impossível obter uma solução C^1 da equação 1.1. Portanto admite-se soluções mais gerais, como as *soluções muito fracas*, que são funções $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz satisfazendo 1.1 em quase todo ponto. Este tipo de solução pode aparecer com muita abundância, logo a noção de *solução fraca* aparece quando se obtém um número pequeno de soluções. $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é uma *subsolução* (respectivamente *supersolução*) *de viscosidade* de 1.1 se para toda função C^1 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente $g : M \rightarrow \mathbb{R}$) satisfazendo $f(x) \geq u(x)$ (respectivamente $g(x) \leq u(x)$) para todo $x \in M$ e cada $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = u(x_0)$ (respectivamente $g(x_0) = u(x_0)$) temos que $H(x_0, df_{x_0}) \leq k$ (respectivamente $H(x_0, dg_{x_0}) \geq k$). Uma *solução de viscosidade* é uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ que é, ao mesmo tempo, uma subsolução e uma supersolução de viscosidade.

Temos mostrado que no caso $k > c(L)$ existem subsoluções regulares de 1.1, não ocorrendo o mesmo no caso $k < c(L)$. No caso $k = c(L)$, se existir uma subsolução a chamaremos de *subsolução crítica*. Existem vários casos onde podemos construir tais subsoluções. Relataremos aqui uma série de resultados que podem ser encontrados em [9]. Se M for completa e L satisfizer certas condições de limitação, superlinearidade e convexidade uniformes valem os seguintes:

1. Existem subsoluções críticas de classe C^1 .
2. Existe uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $H(x, du_x) = c(L)$ se $x \in \pi(\hat{\Sigma})$ (conjunto de Aubry projetado) e $H(x, du_x) < c(L)$ se $x \notin \pi(\hat{\Sigma})$. Ou seja, u é uma solução crítica sobre o conjunto de Aubry projetado e uma subsolução fora deste.
3. Suponha M compacta e $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma subsolução crítica. Para cada $\epsilon > 0$ existe uma função C^1 $\bar{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, se $x \in \pi(\hat{\Sigma})$, então $\bar{u}(x) = u(x)$ e $H(x, du_x) = c(L)$, e, se $x \notin \pi(\hat{\Sigma})$, então $|u(x) - \bar{u}(x)| < \epsilon$ e $H(x, du_x) < c(L)$.
4. $\Phi_{c(L)}(x, \cdot)$ é uma subsolução crítica. Em particular é uma solução de viscosidade em $M \setminus \{x\}$.
5. Se a barreira de Peierls $h : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ for finita, então, para cada $x \in M$ a função $h(x, \cdot)$ é uma solução crítica de viscosidade.
6. $\Phi_{c(L)}(x, \cdot)$ é uma solução de viscosidade se só se $x \in \pi(\hat{\Sigma})$.

7. $\Phi_{c(L)}(x, \cdot)$ é diferenciável em x se e só se $x \in \pi(\hat{\Sigma})$.

Em 2007 (ver [11]) Bernard provou que, se M for compacta, H satisfizer superlinearidade e convexidade uniforme e existir uma subsolução crítica, então existe uma subsolução crítica de classe C^1 com derivada Lipschitz. Além disso Bernard provou que, o conjunto de subsoluções críticas de classe C^1 com derivada Lipschitz é denso no conjunto de subsoluções críticas na topologia uniforme.

Uma pergunta que poderia surgir é a seguinte: as hipóteses de Bernard são suficientes para garantir a existência de subsoluções críticas de classe C^2 ? A resposta é negativa e o contra-exemplo foi apresentado pelo próprio Bernard em [11].

Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, R. G., *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1964.
- [2] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Inc., 1970.
- [3] EVANS, L. C., GARIEPY, R. F., *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [4] KATOK, A., HASSELBLATT, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] GIAQUINTA, M., HILDEBRANDT, S., *Calculus of Variations II*, Springer-Verlag, 1996.
- [6] CONTRERAS, G., ITURRIAGA, R., PATERNAIN, G. P., PATERNAIN, M., *Lagrangian graphs, minimizing measures and Mañé's critical values*. *Geom. Funct. Anal.* 8, n° 5, 788–809, 1998.
- [7] CARNEIRO, M. J. D., LOPES, A., *On the minimal action function of autonomous lagrangians associated to magnetic fields*, *Annales de L 'I. H. P., Section C*, 1999.
- [8] CONTRERAS, G., ITURRIAGA, R., *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians*, CIMAT, 2000.
- [9] FATHI, A., SICONOLFI, A., *Existence of C^1 critical subsolutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Springer-Verlag, 2003.
- [10] FATHI, A., *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*, Workshop and School on Conservative Dynamics, 2006.
- [11] BERNARD, P., *Existence of $C^{1,1}$ Critical Sub-solutions of the Hamilton-Jacobi equation on compact manifolds*, *Annales Scientifiques de L 'École Normale Supérieure*, 2007.