

Um Estudo da Geometria Hiperbólica Complexa

Aldo Peres C. Lopes

2009

Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, Minas Gerais -Brasil
aldop@ufmg.br, aldoelopes@hotmail.com

23 de abril de 2009

Aos meus amados pais:
Alfreu Peres Lopes
Eunice Soares Campos Peres Lopes

Mundo mundo vasto mundo
se eu me chamasse Raimundo
seria uma rima, não seria uma solução.
Mundo mundo vasto mundo,
mais vasto é meu coração.

CARLOS DRUMMOND DE ANDRADE

Resumo

Estudamos o espaço hiperbólico complexo de dimensão 2, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e seus modelos: o modelo projetivo, o modelo da bola, o domínio de Siegel e as coordenadas horoesféricas. Apresentamos as subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e interpretamos geometricamente a fronteira dessas subvariedades em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, ou seja, as cadeias e os \mathbb{R} -círculos. Estudamos também a classificação dos elementos de $\text{PU}(2,1)$, grupo de isometrias holomorfas e $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e finalizamos a dissertação apresentando alguns resultados a respeito da interseção de bissetores.

Sumário

Resumo	iii
Introdução	1
1 O espaço hiperbólico complexo	3
1.1 O modelo projetivo	3
1.2 O modelo da Bola Unitária	4
1.3 Isometrias - A ação do Grupo $PU(2, 1)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	5
2 Modelo do Parabolóide	8
2.1 A Transformação de Cayley	8
2.2 Coordenadas Horoesféricas	19
2.3 O Grupo de Similaridades	22
2.4 Matrizes que representam similaridades	26
3 Subvariedades Totalmente Geodésicas	27
3.1 Linhas Geodésicas	27
3.2 Geodésicas Complexas	29
3.2.1 O produto vetorial Hermitiano	30
3.2.2 Projeção Ortogonal e Inversão	31

3.3	Subespaços Totalmente Reais	33
4	Cadeias e \mathbb{R}-círculos	35
4.1	Cadeias	35
4.1.1	Vetores Polares a cadeias verticais	37
4.1.2	Vetores Polares a Cadeia Finitas	40
4.1.3	Inversões	40
4.2	\mathbb{R} -Círculos	43
5	Classificação de Isometrias	52
6	Bissetores	68
6.1	Bissetores equidistantes de um par de pontos	68
6.2	Decomposição em fatias de Mostow	69
6.3	Decomposição Meridional	71
6.4	Automorfismos de Bissetores	83
6.4.1	Inversões em fatias	83
6.4.2	Inversões em meridianos	85
6.5	Interseção de bissetores	86
6.6	Configuração de Cartan	87
6.7	Classificação de Bissetores Comeridionais	90
6.8	Invariante de Cartan	101
6.9	Pares de Esferas Espinhais	102
6.10	Interseção de Bissetores	104
6.11	Alguns resultados sobre Interseção de Bissetores	109
	Referências Bibliográficas	124

Introdução

O objeto principal de estudo desta dissertação é o espaço hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ de dimensão complexa 2. Apesar de vários resultados apresentados aqui também serem válidos para o espaço hiperbólico complexo de dimensão n , $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$, nos restringimos a enunciar e a demonstrar esses resultados apenas para o caso de dimensão dois, uma vez que estávamos interessados em escrever uma dissertação que pudesse eventualmente servir de referência para leitores sem muita experiência na área.

Desse modo, apesar de termos realizados estudos mais amplos daqueles presentes na dissertação (seguimos as referências GOLDMAN,[1] , e PARKER, [2]), não redigimos algumas partes da teoria da maneira mais abstrata possível, preferindo apresentar essa mesma teoria de um ponto de vista mais simples para um leitor que pretende se familiarizar com os objetos do espaço hiperbólico complexo. Partindo desse ponto de vista, detalhamos algumas demonstrações presentes nos textos citados acima e dividimos essa dissertação do seguinte modo.

No capítulo 1 apresentamos a definição do espaço hiperbólico complexo como o conjunto de linhas negativas em $\mathbb{C}^{2,1}$ munido da métrica de Bergman. Isto é, apresentamos o modelo projetivo para $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Em seguida, apresentamos o modelo da bola para $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

No capítulo 2 apresentamos as transformações de Cayley como uma consequência de uma mudança de base em $\mathbb{C}^{2,1}$ que tem por objetivo facilitar o cálculo do subgrupo de isotropia, em $\text{PU}(2,1)$, de um ponto em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Nesse capítulo também apresentamos as coordenadas horoesféricas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e apresentamos as similaridades de $\text{PU}(2,1)$, que são as aplicações de $\text{PU}(2,1)$ que fixam o ponto ideal.

No capítulo 3 apresentamos as subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$: linhas geodésicas, linhas complexas e subespaços totalmente reais. A interseção do fecho das linhas complexas e dos subespaços totalmente reais com $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, respectivamente, as cadeias e os \mathbb{R} -círculos, são estudados no capítulo 4.

No capítulo 5 apresentamos a classificação das isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ em elementos elípticos, parabólicos, hiperbólicos e loxodrômicos. E finalizamos a dissertação apresentando, no capítulo 6, um estudo de bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$: apresentamos as definições elementares da teoria de bissetores, a decomposição em fatias e meridianos, apresentamos alguns automorfismos de bissetores e alguns resultados a respeito da teoria de interseção de bissetores.

Portanto, nesta dissertação, apresentamos os conceitos básicos mais importantes do espaço hiperbólico complexo de dimensão dois. E recomendamos que pelo menos as referências bibliográficas citadas acima sejam analisadas por aqueles que pretendem perseguir seus estudos nessa área.

Capítulo 1

O espaço hiperbólico complexo

Existem vários modelos para o espaço hiperbólico complexo. Apresentaremos inicialmente o **modelo projetivo**. Em seguida, apresentaremos o modelo da bola unitária.

O modelo projetivo tem a grande vantagem de usar a Álgebra Linear para resolver muitos problemas relacionados ao espaço hiperbólico complexo.

1.1 O modelo projetivo

Denotaremos por $\mathbb{C}^{2,1}$ o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^3 munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não degenerada de assinatura $(2, 1)$:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$$

sendo que

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Considere então os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\} \\ V_+ &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0\} \\ V_- &= \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\} \end{aligned}$$

Os vetores em V_0, V_+ ou V_- são chamados, respectivamente de vetores **nulos**, **positivos** ou **negativos**.

Seja $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ a projeção natural sobre o espaço projetivo complexo de dimensão dois. O **espaço hiperbólico complexo** $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é a variedade analítica complexa definida como sendo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-)$, munido da métrica Riemanniana induzida da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pela projeção \mathbb{P} . Essa métrica induz uma função distância em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e é denotada por ρ e chamada de **métrica de Bergman**. A **distância de Bergman** ρ entre dois pontos $z, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é dada por:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, w)}{2} \right) = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}$$

onde \mathbf{z}, \mathbf{w} são vetores negativos em $\mathbb{C}^{2,1}$ que se projetam em z, w respectivamente. Ou dito de outra maneira, \mathbf{z} e \mathbf{w} são levantamentos dos pontos z e w de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ respectivamente.

Seja $U(2, 1)$ o grupo das aplicações lineares de $\mathbb{C}^{2,1}$ que preservam a forma hermitiana acima, ou seja, se $A \in U(2, 1)$, então

$$\langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle$$

A cada transformação linear unitária $f \in U(2, 1)$, podemos associar uma aplicação $\mathbf{f} : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ definida por $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(f\mathbf{z})$, onde $z = \mathbb{P}(\mathbf{z})$. É claro que \mathbf{f} é um biholomorfismo que deixa $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ invariante. Além disso, como f preserva a forma Hermitiana de $\mathbb{C}^{2,1}$, \mathbf{f} é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Por outro lado, se \mathbf{f} é um biholomorfismo que deixa $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ invariante, existe uma aplicação unitária $f \in U(2, 1)$ tal que $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(f\mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}$.

Denotamos o grupo dos biholomorfismos de \mathbb{CP}^2 por $Aut(\mathbb{CP}^2)$. O que fizemos acima foi definir uma aplicação $\mathbb{P} : U(2, 1) \rightarrow Aut(\mathbb{CP}^2)$. Essa aplicação é um homomorfismo cuja imagem $\mathbb{P}(U(2, 1)) = PU(2, 1)$ é o grupo de todos os biholomorfismos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. $PU(2, 1)$ é a projetivização do grupo unitário $U(2, 1)$. Os elementos de $PU(2, 1)$ são chamados de **transformações lineares projetivas**.

1.2 O modelo da Bola Unitária

Dado um vetor negativo $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{C}^{2,1}$, como $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 0$ tem-se que $z_3 \neq 0$. Desse modo podemos dividir todas as coordenadas de \mathbf{z} por z_3

para obtermos o seguinte vetor na mesma linha negativa de $\mathbb{C}^{2,1}$ determinada por z :

$$\begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $z'_1 = \frac{z_1}{z_3}$ e $z'_2 = \frac{z_2}{z_3}$, o vetor $\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$ satisfaz:

$$|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = \left| \frac{z_1}{z_3} \right|^2 + \left| \frac{z_2}{z_3} \right|^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_3|^2} < 1$$

pois $|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 0$. Portanto, o vetor $\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$ pertence a bola unitária \mathbb{B}^2 de \mathbb{C}^2 , onde:

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |x|^2 + |y|^2 < 1 \right\}$$

Reciprocamente, dado um ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2$ este define o seguinte vetor negativo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ em } \mathbb{C}^{2,1}.$$

Isto mostra que o espaço hiperbólico complexo pode ser naturalmente identificado com \mathbb{B}^2 . Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-) &\longrightarrow \mathbb{B}^2 \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-) \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Isometrias - A ação do Grupo $PU(2, 1)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Uma matriz em $U(2, 1)$, que é um múltiplo escalar não nulo da identidade, leva cada reta complexa passando pela origem de $\mathbb{C}^{2,1}$ nela mesma. Portanto, age trivialmente

sobre o espaço hiperbólico complexo. Como essa matriz é unitária com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o escalar tem necessariamente norma 1 (apresentaremos os detalhes no início do capítulo de classificação de isometrias). Por causa disso, o **Grupo Unitário Projetivo** $PU(2, 1)$ pode ser definido como o grupo quociente $U(2, 1)/U(1)$, onde $U(1)$ é identificado naturalmente com $\{e^{i\theta}I : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, onde I é a identidade em $U(2, 1)$. Às vezes, é útil considerar o grupo $SU(2, 1)$, das matrizes unitárias cujo determinante é 1.

A respeito da ação de $PU(2, 1)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, temos as seguintes proposições:

Proposição 1.3.1. *Dado um ponto qualquer $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe um elemento $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$ tal que $\mathbf{f}(0) = z$, sendo 0 a origem da bola \mathbb{B}^2 . Assim, $PU(2, 1)$ age transitivamente no espaço hiperbólico complexo.*

Demonstração

Considere $z \in \mathbb{B}^2$ cujo representante (ou levantante) em $\mathbb{C}^{2,1}$ é o vetor negativo \mathbf{z} . Como $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_1 < 0$, podemos tomar um representante na forma $\widehat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\sqrt{-\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}} \mathbf{z}$ que é um vetor negativo com $\langle \widehat{\mathbf{z}}, \widehat{\mathbf{z}} \rangle = -1$. Agora vamos construir uma matriz unitária $A \in U(2, 1)$ tal que

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \widehat{\mathbf{z}}$$

Vemos claramente que a terceira coluna dessa matriz é justamente o vetor $\widehat{\mathbf{z}}$. Podemos usar uma versão do processo de Gram-Schmidt em assinatura $(2, 1)$ para obtermos vetores E_1 e E_2 tais que

$$\langle E_1, E_1 \rangle = \langle E_2, E_2 \rangle = 1$$

e

$$\langle E_1, E_2 \rangle = \langle E_1, \widehat{\mathbf{z}} \rangle = \langle E_2, \widehat{\mathbf{z}} \rangle = 0$$

As duas primeiras colunas da matriz A são formadas pelos vetores E_1 e E_2 . Assim, por construção, a matriz A é uma matriz unitária em $U(2, 1)$. Projetivizando, temos que $\mathbb{P}(A)$ é um elemento de $PU(2, 1)$ levando $(0, 0)$ à z , como queríamos mostrar. \square

Proposição 1.3.2. *O grupo $PU(2, 1)$ age transitivamente na fronteira do espaço hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.*

Demonstração

Considere os pontos $x, y \in \partial\mathbb{B}^2$ cujos representantes são, respectivamente, X e Y . Queremos encontrar uma transformação linear unitária $A \in U(2, 1)$ tal que $AX = Y$.

Como X e Y são vetores nulos e linearmente independentes, temos que $\langle X, Y \rangle \neq 0$. Podemos assumir que $\langle X, Y \rangle$ é real. Seja $P = X + Y$. Definimos $A : \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$ por

$$A(Z) = -Z + 2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P$$

A transformação A é linear unitária. De fato,

$$\begin{aligned} \langle AZ, AW \rangle &= \langle -Z + 2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P, -W + 2 \frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \rangle \\ &= \langle Z, W \rangle - 2 \langle Z, \frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \rangle - 2 \langle \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P, W \rangle + 4 \langle \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P, \frac{\langle W, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \rangle \\ &= \langle Z, W \rangle - 4 \frac{\langle P, W \rangle}{\langle P, P \rangle} \langle Z, P \rangle + 4 \frac{\langle P, W \rangle}{\langle P, P \rangle} \langle Z, P \rangle \\ &= \langle Z, W \rangle \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} A(X) &= -X + 2 \frac{\langle X, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \\ &= -X + 2 \frac{\langle X, X + Y \rangle}{\langle X + Y, X + Y \rangle} (X + Y) \\ &= -X + \frac{2 \langle X, Y \rangle}{2 \langle Y, X \rangle} (X + Y) \\ &= Y \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P}(A) \in PU(2, 1)$ e leva x ao ponto y . □

Este resultado acima é um caso particular da seguinte proposição, que provaremos no capítulo de Classificação de Isometrias (veja a proposição 5.0.6).

Proposição 1.3.3. *Para quaisquer dois pares de pontos z, z' e w, w' em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe um elemento $g \in PU(2, 1)$ tal eu $g(z) = w$ e $g(z') = w'$. Neste caso, dizemos que a ação de $PU(2, 1)$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é duplamente transitiva.*

Capítulo 2

Modelo do Parabolóide

2.1 A Transformação de Cayley

Dado um ponto $x \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, veremos qual é o *subgrupo de isotropia* de x em $PU(2, 1)$, isto é, os elementos $g \in PU(2, 1)$ tais que $g(x) = x$. Por exemplo, no modelo da bola \mathbb{B}^2 , se $x = o$ é a origem da bola, então esse subgrupo de isotropia identifica-se naturalmente com $U(2)$. Para detalhes, veja o corolário 5.0.5.

Agora temos uma pergunta similar para os pontos da fronteira do espaço hiperbólico complexo. Ou seja, qual o subgrupo de isotropia de um ponto $x \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$? Como $PU(2, 1)$ age transitivamente na fronteira, podemos fixar este ponto.

Fixemos o ponto $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \partial\mathbb{B}^2$, que pode ser representado pelo seguinte vetor nulo em $\mathbb{C}^{2,1}$: $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,1}$. Assim, um elemento $g \in U(2, 1)$ define um elemento em $PU(2, 1)$ que fixa x_0 se, e somente se, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por causa disso, é conveniente mudar a base canônica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{C}^{2,1}$ para uma base $\{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3\}$ que inclua o vetor:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$$

Então vamos considerar a seguinte base $\widehat{E} = \{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3\}$ de \mathbb{C}^3 , onde:

$$\widehat{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \widehat{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \widehat{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{2}$$

A matriz mudança de base de \widehat{E} para E é:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

no sentido de $D \cdot [\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = [\mathbf{v}]_E$ em que $[\mathbf{v}]_{\widehat{E}}$ e $[\mathbf{v}]_E$ são matrizes coluna que representam as coordenadas de um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ respectivamente nas bases \widehat{E} e E .

Vamos agora expressar o produto interno $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2 - v_3 \bar{w}_3$ na base \widehat{E} . Para isso, observe primeiramente que, se

$$I_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [\mathbf{v}]_E$.

Daí,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [\mathbf{v}]_E \\ &= (D \cdot [\mathbf{w}]_{\widehat{E}})^* \cdot I_{2,1} \cdot (D \cdot [\mathbf{v}]_{\widehat{E}}) \\ &= [\mathbf{w}]_{\widehat{E}}^* \cdot (D^* \cdot I_{2,1} \cdot D) \cdot [\mathbf{v}]_{\widehat{E}} \end{aligned}$$

Por um cálculo imediato vemos que:

$$D^* \cdot I_{2,1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo, se $[\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Concluimos então que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 - v_2 \bar{w}_3 - v_3 \bar{w}_2$$

Notação. Vamos denotar por

$$I_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \widehat{I}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dados \mathbf{v} e \mathbf{w} em \mathbb{C}^3 , podemos calcular o valor do produto hermitiano $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ de dois modos diferentes:

- Utilizando a base canônica E de \mathbb{C}^3 , $[\mathbf{v}]_E = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_E = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2 - v_3 \bar{w}_3$$

- Por outro lado, utilizando a base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 para os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} , ou seja, se

$$[\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad e \quad [\mathbf{w}]_{\widehat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad \text{então}$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 - v_2 \bar{w}_3 - v_3 \bar{w}_2$$

Grupos Unitários

Em \mathbb{C}^3 vamos considerar a base canônica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e o produto Hermitiano de assinatura $(2, 1)$: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 + v_2 \bar{w}_2 - v_3 \bar{w}_3$.

Como sabemos $U(2, 1)$ é o grupo das aplicações lineares $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ que preservam este produto Hermitiano, ou seja,

$$\langle T\mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^3$$

Seja A a matriz, na base canônica E , de uma tal transformação linear T . Isto é,

$$[T\mathbf{v}]_E = A \cdot [\mathbf{v}]_E$$

Daí, $\langle T\mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, se e somente se,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [T\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [T\mathbf{v}]_E &= [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} [\mathbf{v}]_E \\ \Leftrightarrow (A \cdot [\mathbf{w}]_E)^* \cdot I_{2,1} \cdot (A \cdot [\mathbf{v}]_E) &= [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [\mathbf{v}]_E \\ \Leftrightarrow [\mathbf{w}]_E^* (A^* \cdot I_{2,1} \cdot A) [\mathbf{v}]_E &= [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [\mathbf{v}]_E \\ \Leftrightarrow A^* \cdot I_{2,1} \cdot A &= I_{2,1} \end{aligned}$$

Deste modo $U(2, 1)$ pode ser identificado com o grupo de matrizes $A \in GL(3, \mathbb{C})$ tais que $A^* \cdot I_{2,1} \cdot A = I_{2,1}$:

$$U(2, 1) = \{A \in GL(3, \mathbb{C}); A^* \cdot I_{2,1} \cdot A = I_{2,1}\}.$$

Observamos que aqui estamos identificando uma transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ com sua matriz na base canônica de \mathbb{C}^3 .

Vamos agora analisar como podemos expressar esse grupo unitário quando consideramos a base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 . Então, seja $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ uma transformação linear unitária $\langle T\mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Se \widehat{A} é uma matriz de T na base $\widehat{E} = \{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3\}$, então $[T\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = \widehat{A} \cdot [\mathbf{v}]_{\widehat{E}}$ e, repetindo o desenvolvimento feito acima, vemos que T é unitária se, e somente se

$$\widehat{A}^* \cdot \widehat{I}_{2,1} \cdot \widehat{A} = \widehat{I}_{2,1}$$

Deste modo, $U(2, 1)$ também pode ser identificado com o grupo de matrizes $\widehat{A} \in GL(3, \mathbb{C})$ tais que $\widehat{A}^* \cdot \widehat{I}_{2,1} \cdot \widehat{A} = \widehat{I}_{2,1}$:

$$\widehat{U}(2, 1) = \left\{ \widehat{A} \in GL(3, \mathbb{C}); \widehat{A}^* \cdot \widehat{I}_{2,1} \cdot \widehat{A} = \widehat{I}_{2,1} \right\}$$

Observamos que aqui estamos identificando uma transformação linear $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ com sua matriz na base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 .

Relembrando da matriz de mudança de base D , da base \widehat{E} para a base E , concluímos que:

$$\begin{aligned} D \cdot [T\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = [T\mathbf{v}]_E &\Rightarrow D \cdot \widehat{A} \cdot [\mathbf{v}]_{\widehat{E}} = A \cdot [\mathbf{v}]_E \\ &\Rightarrow D \cdot \widehat{A} \cdot D^{-1} [\mathbf{v}]_E = A \cdot [\mathbf{v}]_E \\ &\Rightarrow D \cdot \widehat{A} \cdot D^{-1} = A \quad \text{ou} \quad \widehat{A} = D^{-1} \cdot A \cdot D \end{aligned}$$

Deste modo, os grupos $U(2, 1)$ e $\widehat{U}(2, 1)$ estão relacionados do seguinte modo:

$$\widehat{U}(2, 1) = D^{-1} \cdot U(2, 1) \cdot D$$

O Espaço Hiperbólico Complexo

Como vimos no capítulo 1, o espaço hiperbólico complexo pode ser definido do seguinte modo. Em \mathbb{C}^3 considere a base canônica E e sejam $[\mathbf{z}]_E = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_E = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Usamos o produto Hermitiano $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$.

Se

$$\begin{aligned} V_- &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0 \} \\ V_0 &= \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0 \} \end{aligned}$$

então $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-)$ onde $\mathbb{P} : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$ é a projeção usual sobre o espaço projetivo complexo. Também vimos que o espaço hiperbólico complexo também pode ser apresentado no modelo da bola:

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \right\}$$

Considere agora a base \hat{E} de \mathbb{C}^3 . Como vimos, se $[\mathbf{v}]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 \bar{w}_1 - v_2 \bar{w}_3 - v_3 \bar{w}_2$. Assim, um vetor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$ é negativo se suas coordenadas $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ na base \hat{E} forem tais que

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = w_1 \bar{w}_1 - w_2 \bar{w}_3 - w_3 \bar{w}_2 < 0$$

ou seja, se $2\operatorname{Re}(w_2 \bar{w}_3) - |w_1|^2 > 0$.

Vejamos agora a mudança de base D induzida no quociente. Para isso, considere um vetor negativo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^3$. Vamos escrever $[\mathbf{z}]_E = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{z}]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Então:

$$D \cdot [\mathbf{z}]_{\hat{E}} = [\mathbf{z}]_E \quad e \quad D^{-1} [\mathbf{z}]_E = [\mathbf{z}]_{\hat{E}}$$

Essas duas últimas igualdades implicam que:

$$\begin{cases} z_1 = w_1 \\ z_2 = \frac{-2w_2+w_3}{2} \\ z_3 = \frac{2w_2+w_3}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = \frac{-z_2+z_3}{2} \\ w_3 = z_2 + z_3 \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{D^{-1}} & \begin{bmatrix} w_1 = z_1 \\ w_2 = \frac{-z_2+z_3}{2} \\ w_3 = z_2 + z_3 \end{bmatrix} \\ \mathbb{P} \downarrow & & \downarrow \mathbb{P} \\ \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_3} = \frac{z_1}{z_2+z_3} \\ \frac{w_2}{w_3} = \frac{-z_2+z_3}{2(z_2+z_3)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Deste modo, a mudança de base D^{-1} induz a seguinte aplicação:

$$C: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathfrak{H}^2$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} w_1 = \frac{z_1}{1+z_2} \\ w_2 = \frac{1-z_2}{2(1+z_2)} \end{bmatrix}$$

cuja inversa é:

$$D: \mathfrak{H}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 = \frac{2w_1}{1+2w_2} \\ z_2 = \frac{1-2w_2}{1+2w_2} \end{bmatrix}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 &\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \left| \frac{2w_1}{1+2w_2} \right|^2 + \left| \frac{1-2w_2}{1+2w_2} \right|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow 4|w_1|^2 + (1-2w_2)(1+2\bar{w}_2) < (1+2w_2)(1+2\bar{w}_2) \\
&\Leftrightarrow 4|w_1|^2 + 1 - 2\bar{w}_2 - 2w_2 + 4|w_2|^2 < 1 + 2\bar{w}_2 + 2w_2 + 4|w_2|^2 \\
&\Leftrightarrow 4|w_1|^2 - 8\operatorname{Re}(w_2) < 0 \\
&\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0
\end{aligned}$$

Portanto, se

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \right\} \quad e \quad \mathfrak{h}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0 \right\}$$

então $C : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ dada por

$$C \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 = \frac{z_1}{1+z_2} \\ w_2 = \frac{1-z_2}{2(1+z_2)} \end{bmatrix}$$

é uma isometria entre esses dois modelos do espaço hiperbólico complexo.

Definição. O conjunto \mathfrak{h}^2 é chamado *domínio de Siegel* e a aplicação C é a *transformação de Cayley*.

A Fronteira do Espaço Hiperbólico Complexo

A transformação de Cayley pode ser estendida à fronteira do espaço hiperbólico complexo:

$$\begin{aligned}\partial\mathbb{B}^2 &= \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\} \\ \partial\mathfrak{h}^2 &= \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 = 0 \right\} \cup \{p_\infty\}\end{aligned}$$

sendo p_∞ um ponto ideal em $\partial\mathfrak{h}^2$ correspondendo ao pólo Sul $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ em $\partial\mathbb{B}^2$.

Observe que o ponto ideal p_∞ no modelo da bola corresponde então ao ponto $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \partial\mathbb{B}^2$ que possui o seguinte levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$ (escrito na base canônica de \mathbb{C}^3):

$$P_\infty = [P_\infty]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, quando consideramos a base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 , esse vetor possui coordenadas $\widehat{P}_\infty = [P_\infty]_{\widehat{E}} = C \cdot [P_\infty]_E$, ou seja,

$$\widehat{P}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, um ponto finito $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$ tem como levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$ um vetor \widehat{w} cujas coordenadas na base \widehat{E} são dadas, por exemplo, por $\widehat{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Como

$$\begin{aligned}w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2 &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(w_2) = \frac{|w_1|^2}{2}\end{aligned}$$

vemos que w_2 tem a forma $w_2 = \frac{|w_1|^2 - iv}{2}$ para algum número real v . Portanto, para quaisquer $\zeta \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{R}$, temos que

$$w = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

são as coordenadas na base \widehat{E} de um vetor w que se projeta sobre $\partial\mathfrak{h}^2$. Desse modo, $\partial\mathfrak{h}^2$ pode ser visto como a compactificação em um ponto de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Lembre-se que, no início deste capítulo, formulamos o problema do cálculo do subgrupo de isotropia de um ponto na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Voltemos agora a esse problema. Mas antes, vejamos alguns outros resultados.

Lema 2.1.1. *O subgrupo de isotropia de um ponto na fronteira do espaço hiperbólico complexo age transitivamente na fronteira do espaço hiperbólico complexo.*

Demonstração

Como o grupo $PU(2,1)$ age transitivamente em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, vamos considerar, no domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 , o subgrupo de isotropia do ponto ideal p_{∞} . Vamos mostrar que existe uma isometria T de \mathfrak{h}^2 tal que $T(p_{\infty}) = P_{\infty}$ e T transforma o ponto $o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$ num dado ponto $w \in \partial\mathfrak{h}^2$. Para isso, vamos considerar a base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 e a isometria T agindo em \mathbb{C}^3 como transformação linear unitária. Identificamos T com sua matriz na base \widehat{E} e consideramos os levantamentos:

$$P_{\infty} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aqui, essas matrizes colunas são coordenadas dos respectivos pontos p_{∞} , o e w na base \widehat{E} de \mathbb{C}^3 . Como queremos $T(p_{\infty}) = P_{\infty}$ e $T(O) = \mathbf{w}$, a matriz de T na base \widehat{E} deve ter a forma:

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & \zeta \\ b & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T é unitária se, e somente se, $T^* \cdot \widehat{I}_{2,1} \cdot T = \widehat{I}_{2,1}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a\bar{a} - b\bar{c} - c\bar{b} & -c & a\bar{\zeta} - b - c\frac{|\zeta|^2 + iv}{2} \\ -\bar{c} & 0 & -1 \\ \bar{a}\zeta - \bar{c}\frac{|\zeta|^2 - iv}{2} - \bar{b} & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que tem solução se, e somente se:

$$c = 0, \quad |a| = 1, \quad a\bar{\zeta} - b = 0$$

Tomando $a = 1$, obtemos a solução: $a = 1$, $b = \bar{\zeta}$, $c = 0$.

Desse modo obtemos a matriz

$$T_{(\zeta, v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pertencente ao grupo $\widehat{U}(2, 1)$ que induz uma aplicação $T : \mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ tal que $T(p_\infty) = p_\infty$ e T transforma $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$ num ponto genérico $\begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$. Isso termina a demonstração do lema. □

Definição. A *translação de Heisenberg* pelo vetor (ζ, v) é uma isometria do espaço hiperbólico complexo pertencente a $PU(2, 1)$. O levantamento age em \mathbb{C}^3 como uma transformação linear cuja matriz na base \widehat{E} é:

$$T_{(\zeta, v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Teorema 2.1.2.

$$T_{(\zeta_1, v_1)} \circ T_{(\zeta_2, v_2)} = T_{(\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2Im(\zeta_1 \bar{\zeta}_2))}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} T_{(\zeta_1, v_1)} \circ T_{(\zeta_2, v_2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 \\ \bar{\zeta}_1 & 1 & \frac{|\zeta_1|^2 - iv_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & 1 & \frac{|\zeta_2|^2 - iv_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 + \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 & 1 & \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + \frac{|\zeta_1|^2 - iv_1}{2} + \frac{|\zeta_2|^2 - iv_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mas observamos que

$$T_{(\zeta_1 + \zeta_2, v)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta_1 + \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 & 1 & \frac{|\zeta_1 + \zeta_2|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, comparando as matrizes, queremos encontrar um v tal que:

$$\frac{|\zeta_1 + \zeta_2|^2 - iv}{2} = \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + \frac{|\zeta_1|^2 - iv_1}{2} + \frac{|\zeta_2|^2 - iv_2}{2}$$

Temos então:

$$|\zeta_1|^2 + \zeta_1 \bar{\zeta}_2 + \zeta_2 \bar{\zeta}_1 + |\zeta_2|^2 - iv = 2\bar{\zeta}_1 \zeta_2 + |\zeta_1|^2 - iv_1 + |\zeta_2|^2 - iv_2$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} iv &= \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_1 \zeta_2 + iv_1 + iv_2 \\ iv &= 2i\text{Im}(\zeta_1 \bar{\zeta}_2) + iv_1 + iv_2 \\ v &= v_1 + v_2 + 2\text{Im}(\zeta_1 \bar{\zeta}_2) \end{aligned}$$

□

Definição . O *grupo de Heisenberg* é o conjunto $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ munido da seguinte operação de grupo:

$$(\zeta_1, v_1) * (\zeta_2, v_2) = (\zeta_1 + \zeta_2, v_1 + v_2 + 2\text{Im}(\zeta_1 \bar{\zeta}_2))$$

Observamos que da identificação $(\zeta, v) \in \mathcal{H} \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \end{array} \right) \in \partial\mathfrak{h}^2$ vemos que a fronteira do espaço hiperbólico complexo também pode ser identificada com a compactificação em um ponto do grupo de Heisenberg.

2.2 Coordenadas Horoesféricas

Um ponto $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ no domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 é tal que $2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0$. Se $u = 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2$, então $u > 0$ e $\operatorname{Re}(w_2) = \frac{|w_1|^2 + u}{2}$. Assim, temos que $w_2 = \frac{|w_1|^2 + u - iv}{2}$ para algum número real v . Logo, provamos que pontos do domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 são dados por $w = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \end{bmatrix}$ em que $\zeta \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}$ e $u > 0$.

A tripla $(\zeta, v, u) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ são as **coordenadas horoesféricas** do ponto $w \in \mathfrak{h}^2$. Desse modo, pontos no domínio de Siegel estão relacionados com suas coordenadas horoesféricas através das aplicações:

$$g: \quad \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathfrak{h}^2$$

$$(\zeta, v, u) \longmapsto \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$g^{-1}: \quad \mathfrak{h}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{cases} \zeta = w_1 \\ v = -2\operatorname{Im}(w_2) \\ u = 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 \end{cases}$$

Mudança de Coordenadas

Utilizando a transformação de Cayley $C: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ e $D: \mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$, onde $C = D^{-1}$, podemos dar coordenadas horoesféricas para pontos na bola:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathfrak{h}^2 \xrightarrow{D} \mathbb{B}^2$$

$$(\zeta, v, u) \longmapsto \begin{bmatrix} z_1 = \frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2+u-iv} \\ z_2 = \frac{1-|\zeta|^2-u+iv}{1+|\zeta|^2+u-iv} \end{bmatrix}$$

E

$$\mathbb{B}^2 \xrightarrow{C} \mathfrak{h}^2 \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{cases} \zeta = \frac{z_1}{1+z_2} \\ v = -Im\left(\frac{1-z_2}{1+z_2}\right) \\ u = Re\left(\frac{1-z_2}{1+z_2}\right) - \left|\frac{z_1}{1+z_2}\right|^2 \end{cases}$$

Para terminar esta seção, vejamos como uma translação de Heisenberg afeta as coordenadas horoesféricas de um ponto no espaço hiperbólico complexo.

Teorema 2.2.1. *Uma translação de Heisenberg $T_{(\zeta_0, v_0)}$ é tal que:*

$$\begin{aligned} T_{(\zeta_0, v_0)} : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ (\zeta, v, u) &\longmapsto (\zeta_0 + \zeta, v_0 + v + 2Im(\zeta_0 \bar{\zeta}), u) \end{aligned}$$

Demonstração

Sabemos qual é a expressão de $T_{(\zeta_0, v_0)}$ no domínio de Siegel (veja a matriz (2.1), na base \widehat{E}). Então vamos passar o ponto (ζ, v, u) em coordenadas horoesféricas para um ponto w no domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 . Utilizamos a expressão matricial de $T_{(\zeta_0, v_0)}$ no domínio de Siegel para fazermos o cálculo. Em seguida, retornamos às coordenadas horoesféricas.

Como vimos acima, as coordenadas horoesféricas (ζ, v, u) definem o seguinte ponto no domínio de Siegel $w = (\zeta, \frac{|\zeta|^2+u-iv}{2})$. Então:

$$\begin{aligned} T_{(\zeta_0, v_0)}(w) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 & 1 & \frac{|\zeta_0|^2-iv_0}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2+u-iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \zeta + \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0\zeta + \frac{|\zeta|^2+u-iv}{2} + \frac{|\zeta_0|^2-iv_0}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \zeta_0 + \zeta \\ \frac{2\bar{\zeta}_0\zeta + |\zeta|^2 + |\zeta_0|^2 + u - i(v+v_0)}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora iremos calcular as coordenadas horoesféricas do ponto $T_{(\zeta_0, v_0)} \cdot (w)$. Digamos que são (ζ', v', u') . Temos

$$\begin{aligned} \zeta' &= \zeta_0 + \zeta \\ v' &= -2Im \left(\frac{2\bar{\zeta}_0\zeta + |\zeta|^2 + |\zeta_0|^2 + u - i(v+v_0)}{2} \right) \\ u' &= 2Re \frac{2\bar{\zeta}_0\zeta + |\zeta|^2 + |\zeta_0|^2 + u - i(v+v_0)}{2} - |\zeta_0 + \zeta|^2 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \zeta' &= \zeta_0 + \zeta \\ v' &= -2Im (\bar{\zeta}_0\zeta) + v + v_0 = v + v_0 - 2Im (\bar{\zeta}_0\zeta) \\ &= v + v_0 + 2Im (\bar{\zeta}\zeta_0) \\ u' &= 2Re (\bar{\zeta}_0\zeta) + |\zeta|^2 + |\zeta_0|^2 + u - |\zeta_0 + \zeta|^2 \\ &= \bar{\zeta}_0\zeta + \zeta_0\bar{\zeta} + |\zeta|^2 + |\zeta_0|^2 + u - iv - (|\zeta_0|^2 + \bar{\zeta}_0 + \zeta_0\bar{\zeta} + |\zeta|^2) \\ &= u \end{aligned}$$

□

2.3 O Grupo de Similaridades

Voltemos para a pergunta formulada no início deste capítulo: qual é o subgrupo de isotropia em $PU(2, 1)$ de um ponto na fronteira do espaço hiperbólico complexo?

Para responder essa pergunta, vamos considerar o domínio de Siegel \mathfrak{h}^2 para o espaço hiperbólico complexo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^2 &= \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 > 0 \right\} \\ \partial\mathfrak{h}^2 &= \left\{ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}(w_2) - |w_1|^2 = 0 \right\} \cup \{p_\infty\}\end{aligned}$$

Como $PU(2, 1)$ age transitivamente em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, vamos considerar a pergunta acima calculando o subgrupo de isotropia do ponto ideal p_∞ . Isto é, vamos determinar matrizes $A \in \widehat{U}(2, 1)$ que induz aplicações $\mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ que fixa o ponto ideal.

Teorema 2.3.1. *Uma matriz $A \in \widehat{U}(2, 1)$ representa uma transformação $\mathfrak{h}^2 \rightarrow \mathfrak{h}^2$ que fixa o ponto ideal $p_\infty \in \partial\mathfrak{h}^2$ e o ponto $o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{h}^2$ se, e somente se, a menos de multiplicação por um escalar não nulo, A pode ser representada por*

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

com $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Demonstração

Os pontos p_∞ e o na fronteira de \mathfrak{h}^2 possuem levantamentos em \mathbb{C}^3 cujas coordenadas na base \widehat{E} são:

$$\mathbf{P}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $A \in \widehat{U}(2, 1)$ define uma isometria de \mathfrak{h}^2 que fixa p_∞ e \mathbf{o} se, e somente se, \mathbf{P}_∞ e \mathbf{O} são autovetores de A . Ou seja, A deve ser da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \beta & 0 \\ c & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Porém, A é uma matriz unitária se, e somente se, $A^t \widehat{I}_{2,1} \overline{A} = \widehat{I}_{2,1}$. Assim:

$$\begin{aligned}
 A^t J_2 \overline{A} &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 & 0 \\ \bar{b} & \bar{\beta} & 0 \\ \bar{c} & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 & 0 \\ -\bar{c} & 0 & -\bar{\lambda} \\ -\bar{b} & -\bar{\beta} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} |a|^2 - b\bar{c} - c\bar{b} & -c\bar{\beta} & -b\bar{\lambda} \\ -\bar{c}\beta & 0 & -\beta\bar{\lambda} \\ -\lambda\bar{b} & -\bar{\beta}\lambda & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Então, temos que $A^t \widehat{I}_{2,1} \overline{A} = \widehat{I}_{2,1}$ se, e somente se:

$$|a|^2 - b\bar{c} - c\bar{b} = 1, \quad c\bar{\beta} = 0, \quad b\bar{\lambda} = 0, \quad \beta\bar{\lambda} = 1$$

Se $\beta\bar{\lambda} = 1$ vemos que $\beta, \lambda \neq 0$. Juntamente com as igualdades acima, concluímos que $c = 0, b = 0$. Assim, chegamos às restrições: $|a| = 1$ e $\beta\bar{\lambda} = 1$. Logo, A deve ter a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

Se escrevermos $\beta = ke^{i\phi}$, obtemos: $\lambda = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{ke^{-i\phi}}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & ke^{i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k}e^{i\phi} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{i(\theta-\phi)} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Definições

- A *rotação de Heisenberg* ao redor do eixo vertical é o elemento R_θ representado pela matriz em $\widehat{U}(2, 1)$:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} e^\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A *dilatação de Heisenberg* é o elemento representado pela seguinte matriz em $\widehat{U}(2, 1)$:

$$D_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

Observe que $D_k \circ R_\theta = R_\theta \circ D_k$.

Teorema 2.3.2. *Seja $g \in P\widehat{U}(2, 1)$ um elemento que fixa o ponto ideal $p_\infty \in \partial\mathfrak{h}^2$. Então g é uma composição de uma rotação de Heisenberg, seguida de uma dilatação de Heisenberg e de uma translação de Heisenberg.*

Demonstração

Sejam p_∞ o ponto ideal em $\partial\mathfrak{h}^2$ e $\mathbf{o} \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ a origem do grupo de Heisenberg. Suponhamos que $g(\mathbf{o})$ tenha coordenadas horoesféricas (ζ, v) . Então $T_{(-\zeta, -v)} \circ g$ é um elemento que fixa \mathbf{o} e p_∞ . Como vimos no teorema anterior, devemos ter:

$$T_{(-\zeta, -v)} \circ g = D_k \circ R_\theta$$

Portanto:

$$g = T_{(\zeta, v)} \circ D_k \circ R_\theta$$

□

Veremos agora como são as dilatações e rotações de Heisenberg em coordenadas horoesféricas.

Teorema 2.3.3. *A dilatação de Heisenberg D_k e a rotação de Heisenberg R_θ afetam as coordenadas horoesféricas do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} D_k(\zeta, v, u) &= (k\zeta, k^2v, k^2u) \\ R_\theta(\zeta, v, u) &= (e^{i\theta}\zeta, v, u) \end{aligned}$$

Demonstração

Faremos o cálculo no domínio de Siegel e depois voltaremos às coordenadas horoesféricas.

A composição $D_k \circ R_\theta = R_\theta \circ D_k = A$ é representada pela matriz em $\widehat{U}(2, 1)$:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

As coordenadas horoesféricas (ζ, v, u) definem o seguinte ponto no domínio de Siegel:

$$w = \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \zeta \\ \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{i\theta} \zeta \\ k \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix} \\ &\simeq \begin{bmatrix} k e^{i\theta} \zeta \\ k^2 \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lembramos que o espaço hiperbólico complexo é a projeção das retas negativas (retas cujos vetores diretores são negativos). Se (ζ', v', u') são as coordenadas horoesféricas de $A(w)$, então temos:

$$\zeta' = k e^{i\theta} \zeta$$

$$v' = -2 \operatorname{Im} \left(k^2 \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \right) = k^2 v$$

$$u' = 2 \operatorname{Re} \left(k^2 \frac{|\zeta|^2 + u - iv}{2} \right) - |k e^{i\theta} \zeta|^2 = k^2 |\zeta|^2 + k^2 u - k^2 |\zeta|^2 = k^2 u$$

Portanto:

$$A(\zeta, v, u) = (ke^{i\theta}, k^2v, k^2u)$$

□

2.4 Matrizes que representam similaridades

Como vimos nesse capítulo, considerando a base \widehat{E} de $\mathbb{C}^{2,1}$, as matrizes das translações, rotações e dilatações de Heisenberg são dadas por:

$$\begin{aligned} T_{(\zeta, v)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \zeta \\ \bar{\zeta} & 1 & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_\theta &= \begin{bmatrix} e^\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Efetuada uma mudança de coordenadas, as matrizes dessas transformações na base E são:

$$\begin{aligned} T_{(\zeta, v)} &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \zeta \\ -\bar{\zeta} & 1 + \frac{-|\zeta|^2 + iv}{2} & \frac{-|\zeta|^2 + iv}{2} \\ \bar{\zeta} & \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} & 1 + \frac{|\zeta|^2 - iv}{2} \end{bmatrix} \\ R_\theta &= \begin{bmatrix} e^\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k^2+1}{2k} & \frac{-k^2+1}{2k} \\ 0 & \frac{-k^2+1}{2k} & \frac{k^2+1}{2k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Capítulo 3

Subvariedades Totalmente Geodésicas

Agora trataremos dos subespaços próprios totalmente geodésicos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Eles são de três tipos: linhas geodésicas, linhas complexas ou subespaços totalmente reais.

3.1 Linhas Geodésicas

Consideremos um par de vetores nulos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_0$. Podemos normalizar tais vetores, sem perda de generalidade, de forma que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$. Tais vetores correspondem a um par de pontos $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Proposição 3.1.1. *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_0$ com $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ corresponde ao vetor*

$$\gamma(t) = e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}$$

em $\mathbb{C}^{2,1}$. Então $\gamma = \{\gamma(t); t \in \mathbb{R}\}$ é geodésica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com extremos p e q , parametrizada por comprimento de arco t .

Demonstração

Estamos considerando a seguinte forma hermitiana:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1\bar{w}_3 + z_2\bar{w}_2 + z_3\bar{w}_1$$

Observamos inicialmente que $\gamma(t) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, ou seja $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle < 0$:

$$\begin{aligned} \langle e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}, e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q} \rangle &= e^t \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle + e^{-t} \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \\ &= 0 - 1 - 1 + 0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Para ver que γ é geodésica, é suficiente mostrar que $\rho(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ para todo s e t . Usamos a métrica de Bergman:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \left(\frac{\rho(\gamma(t), \gamma(s))}{2} \right) &= \frac{\langle \gamma(t), \gamma(s) \rangle \langle \gamma(s), \gamma(t) \rangle}{\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle} \\ &= \frac{\langle e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}, e^{\frac{s}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{s}{2}}\mathbf{q} \rangle \langle e^{\frac{s}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{s}{2}}\mathbf{q}, e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q} \rangle}{\langle e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}, e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q} \rangle \langle e^{\frac{s}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{s}{2}}\mathbf{q}, e^{\frac{s}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{s}{2}}\mathbf{q} \rangle} \\ &= \left(\frac{-e^{\frac{(t-s)}{2}} - e^{\frac{-t+s}{2}}}{-2} \right)^2 \\ &= \cosh^2 \left(\frac{t-s}{2} \right) \end{aligned}$$

□

Qualquer par de pontos $s, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ pertence a uma única geodésica. Veremos uma expressão para um ponto genérico no segmento geodésico em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ligando dois pontos.

Proposição 3.1.2. *Seja $\gamma(t) \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ geodésica parametrizada por comprimento de arco t . Suponha $\gamma(r)$ e $\gamma(s)$ correspondente aos pontos \mathbf{z}, \mathbf{w} em V_- com $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = -2$. Então:*

$$\gamma(t) = \frac{\sinh \frac{(t-s)}{2}}{\sinh \frac{(r-s)}{2}} \mathbf{z} + \frac{\sinh \frac{(r-t)}{2}}{\sinh \frac{(r-s)}{2}} \mathbf{w}$$

Demonstração

Suponha γ com os extremos \mathbf{p} e \mathbf{q} , vetores nulos com $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -1$. Assim

$$\gamma(t) = e^{\frac{t}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}}\mathbf{q}$$

Logo,

$$\mathbf{z} = e^{\frac{r}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{r}{2}}\mathbf{q} \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = e^{\frac{s}{2}}\mathbf{p} + e^{-\frac{s}{2}}\mathbf{q}$$

para certos valores de r e s .

Observe que

$$\begin{cases} 2 \sinh\left(\frac{r-s}{2}\right) \mathbf{p} = e^{-\frac{s}{2}} \mathbf{z} - e^{-\frac{r}{2}} \mathbf{w} \\ 2 \sinh\left(\frac{r-s}{2}\right) \mathbf{q} = -e^{-\frac{s}{2}} \mathbf{z} + e^{-\frac{r}{2}} \mathbf{w} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} 2e^{\frac{t}{2}} \sinh\left(\frac{r-s}{2}\right) \mathbf{p} = e^{\frac{t-s}{2}} \mathbf{z} - e^{\frac{t-r}{2}} \mathbf{w} \\ 2e^{-\frac{t}{2}} \sinh\left(\frac{r-s}{2}\right) \mathbf{q} = -e^{\frac{s-t}{2}} \mathbf{z} + e^{\frac{r-t}{2}} \mathbf{w} \end{cases}$$

Logo,

$$2 \sinh\left(\frac{r-s}{2}\right) \left(e^{\frac{t}{2}} \mathbf{p} + e^{-\frac{t}{2}} \mathbf{q} \right) = 2 \sinh\left(\frac{t-s}{2}\right) \mathbf{z} + 2 \sinh\left(\frac{r-t}{2}\right) \mathbf{w}$$

Daí, usando a proposição anterior, temos o resultado. □

3.2 Geodésicas Complexas

Seja S um subespço complexo bidimensional de $\mathbb{C}^{2,1}$. Se $S \cap V_- \neq \emptyset$, a imagem $\Sigma = \mathbb{P}(S \cap V_-)$ é um subespaço de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ chamado **geodésica complexa**.

Considerando o modelo da bola \mathbb{B}^2 , as geodésicas complexas são justamente interseções de retas complexas de \mathbb{C}^2 com a bola \mathbb{B}^2 . Vemos claramente que a dimensão complexa de geodésicas complexas é 1, e que a dimensão real é 2.

As geodésicas complexas são subvariedades holomorfas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ totalmente geodésicas. A fronteira de uma geodésica complexa é chamada de **cadeia** e é uma subvariedade unidimensional real de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Um fato simples é que para quaisquer dois pontos distintos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe uma única geodésica complexa contendo ambos os pontos. Neste caso dizemos que esses pontos geram essa geodésica.

Pode-se provar que qualquer geodésica complexa, no modelo da bola, é equivalente a

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \left\{ \left[\begin{array}{c} z_1 \\ 0 \end{array} \right] \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 < 1 \right\}$$

que é totalmente geodésico, devido a proposição 3.1.2

Observe que o levantamento de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ a $\mathbb{C}^{2,1}$ é o seguinte subespaço

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^1 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3; |z_1|^2 - |z_2|^2 < 0 \right\}$$

Seja $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vemos que $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ está em $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^1$ se, e somente se, $\langle Z, P \rangle = 0$.

Um tal vetor P é o vetor polar a $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{C}}^1$.

Como toda linha complexa é equivalente a $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$, temos que para uma linha complexa dada Σ existe um vetor positivo $P \in \mathbb{C}^{2,1}$. Observamos que um vetor $Z \in \mathbb{C}^{2,1}$ se projeta num ponto de Σ se, e somente se, $\langle P, Z \rangle = 0$. Esse vetor positivo P é um **vetor polar** a Σ .

3.2.1 O produto vetorial Hermitiano

Definição *O produto vetorial Hermitiano*

$$\boxtimes : \mathbb{C}^{2,1} \times \mathbb{C}^{2,1} \rightarrow \mathbb{C}^{2,1}$$

é definido por

$$v \boxtimes w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \boxtimes \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_3 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_3 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_3 - \bar{v}_3 \bar{w}_1 \\ \bar{v}_1 \bar{w}_2 - \bar{v}_2 \bar{w}_1 \end{bmatrix}$$

Esse produto vetorial Hermitiano cruzado \boxtimes desempenha no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^{2,1}$ de dimensão 3, um papel semelhante ao produto vetorial usual \times no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Isto é, o produto vetorial Hermitiano de dois vetores é um vetor perpendicular aos vetores originais, ou seja,

$$\langle v, v \boxtimes w \rangle = \langle w, v \boxtimes w \rangle = 0$$

Sejam A e B duas geodésicas complexas correspondentes aos vetores polares $v, w \in \mathbb{C}^{2,1}$. Considere o produto cruzado $u = v \boxtimes w$. Temos as seguintes possibilidades:

1. u é negativo. Nesse caso, A e B se intersectam no ponto $\mathbb{P}(u)$ correspondendo ao vetor negativo u . Denotamos $A \times B$.
2. u é nulo. Nesse caso A e B são assintóticas ou paralelas no ponto $\mathbb{P}(u) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Denotamos $A \parallel B$.
3. u é positivo. Então temos que A e B são ultraparalelos, ou seja, são disjuntas e têm uma única geodésica complexa ortogonal comum, que é polar a u e escrevemos $A \asymp B$.

Normalizamos: $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ e lembramos que $\langle u, u \rangle = \langle w, v \rangle \langle v, w \rangle - \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle$. Assim, os casos acima correspondem respectivamente a:

1. $|\langle v, w \rangle| < 1$, nesse caso $|\langle v, w \rangle| = \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre A e B .
2. $|\langle v, w \rangle| = 1$.
3. $|\langle v, w \rangle| > 1$, nesse caso $|\langle v, w \rangle| = \cosh\left(\frac{\rho}{2}\right)$, onde ρ é a distância entre A e B .

3.2.2 Projeção Ortogonal e Inversão

Definição Seja Σ uma geodésica complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. A **projeção ortogonal sobre Σ** é a aplicação $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ que associa a cada ponto $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, o único ponto $\Pi_{\Sigma}(z)$ de Σ mais próximo de z .

Evidentemente, a geodésica complexa contendo o par z e $\Pi_{\Sigma}(z)$ é ortogonal à Σ . Mais ainda, se P é um vetor polar à Σ , então a projeção ortogonal $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ é dada por

$$\Pi_{\Sigma}(z) = \mathbb{P}\left(Z - \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P\right)$$

onde Z é um levantamento de z em $\mathbb{C}^{2,1}$.

De fato, seja Σ uma linha complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com vetor polar P . Determinaremos a expressão, em termos de P , para a projeção ortogonal sobre Σ .

Consideramos o vetor v e v_1 a projeção ortogonal de sobre Σ e v_2 a projeção ortogonal de v sobre P . Então $v_2 = \alpha P$ e

$$v_1 + v_2 = v \Rightarrow v_1 = v - \alpha P$$

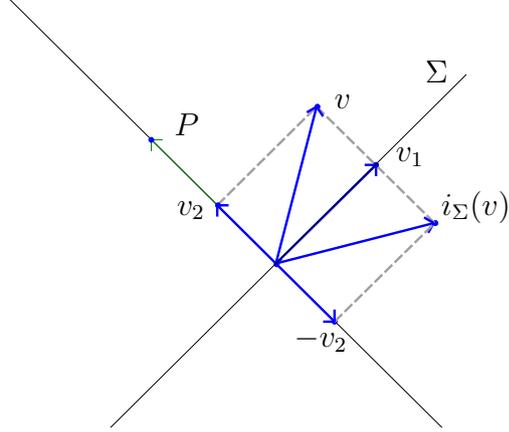


Figura 3.1: Projeção ortogonal e inversão sobre Σ com vetor polar P

Como $\langle v, P \rangle = 0$, obtemos:

$$0 = \langle v_1, P \rangle = \langle v, P \rangle - \alpha \langle P, P \rangle$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{\langle v, P \rangle}{\langle P, P \rangle}$$

Logo,

$$v_1 = \Pi_{\Sigma}(v) = v - \frac{\langle v, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \quad (3.1)$$

A **inversão** em Σ é uma isometria i_{Σ} de ordem 2 cujo conjunto dos pontos fixos é Σ . Então $\Pi(Z)$ é o ponto médio do segmento da linha complexa ligando Z a $i_{\Sigma}(Z)$. Para a inversão em Σ temos

$$i_{\Sigma}(Z) = Z - 2 \frac{\langle Z, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P$$

A expressão para a inversão em Σ pode ser obtida de maneira similar à feita para a projeção ortogonal. Continuamos com a mesma notação que fizemos para a

projeção ortogonal e lembramos que $v_1 + v_2 = v$. Temos que $i_\Sigma(v) = v_1 - v_2$. Logo:

$$i_\Sigma(v) = v - \frac{\langle v, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P - \frac{\langle v, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P \Rightarrow i_\Sigma(v) = v - 2 \frac{\langle v, P \rangle}{\langle P, P \rangle} P$$

Um fato importante sobre inversões é que, dado uma geodésica complexa Σ , existe uma única inversão i_Σ cujo conjunto dos pontos fixos de i_Σ seja Σ . Reciprocamente, o conjunto de pontos fixos de uma inversão é uma geodésica complexa.

Tanto a projeção quanto a inversão se estendem naturalmente para os fechos dos espaços envolvidos. As extensões são definidas pelas mesmas expressões acima.

3.3 Subespaços Totalmente Reais

Antes de definirmos um subespaço totalmente real, veremos um importante exemplo.

Exemplo

Considere

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ e } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

um subconjunto de \mathbb{B}^2 . Usando a proposição 3.1.2 é fácil ver que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é um subespaço totalmente geodésico de \mathbb{B}^2 .

Definição Um **subespaço totalmente real** do espaço hiperbólico complexo é a imagem de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ por uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Definiremos agora uma importante aplicação em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ usando o modelo da bola \mathbb{B}^2 . $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é o conjunto dos pontos fixos da isometria de ordem 2:

$$\begin{array}{ccc} i : \mathbb{B}^2 & \rightarrow & \mathbb{B}^2 \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Essa aplicação é chamada de inversão em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Dado um outro subespaço totalmente real R , por definição, existe uma isometria f de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $R = f(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$. A aplicação $i_R = f \circ i \circ f^{-1}$ é a **inversão** em R (observe o diagrama abaixo).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{i} & \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ f^{-1} \uparrow & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{i_R} & R \end{array}$$

A inversão i_R em R tem as seguintes propriedades: fixa cada ponto de R , tem ordem dois e é uma isometria anti-holomorfa de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Capítulo 4

Cadeias e \mathbb{R} -círculos

4.1 Cadeias

Uma subvariedade holomorfa totalmente geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é chamada de linha complexa. Esta intercepta a fronteira do espaço hiperbólico complexo numa *cadeia*. Demonstraremos que, no grupo de Heisenberg $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, uma cadeia pode ser de dois tipos:

- Infinita (uma reta vertical);
- Finita (Uma elipse ou um círculo)

Exemplos

1. A CADEIA VERTICAL

Considere a linha complexa

$$\Sigma_2 = \left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ z_2 \end{array} \right] \in \mathbb{B}^2; |z_2| < 1 \right\}$$

Passando para coordenadas horoesféricas temos:

$$z_1 = \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 + u - iv} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1 - |\zeta|^2 - u + iv}{1 + |\zeta|^2 + u - iv}$$

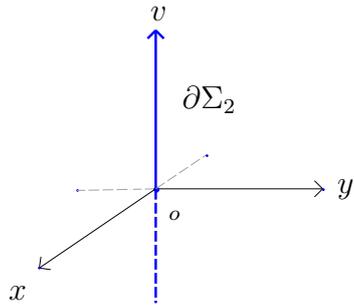


Figura 4.1: A cadeia vertical que contém a origem o e ∞

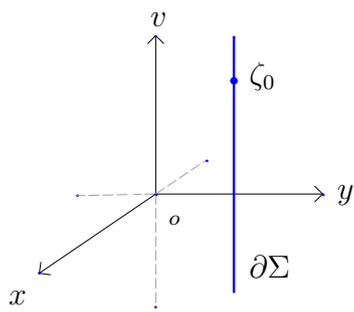


Figura 4.2: A cadeia vertical sobre ζ_0

Vemos que Σ_2 é dada pela equação $\zeta = 0$. Observe que os pontos ∞ e $\mathbf{o} = (0, 0) \in \partial\mathcal{H}$ pertencem a $\partial\Sigma_2$. Assim $\partial\Sigma_2$ no grupo de Heisenberg $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ coincide com a reta vertical $\{0\} \times \mathbb{R}$.

2.

Agora seja Σ uma linha complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tal que $\partial\Sigma$, no grupo de Heisenberg, contenha os pontos ∞ e $p_0 = (\zeta_0, v_0)$. Pela translação de Heisenberg $T_{(-\zeta_0, -v_0)}$ vemos que $T_{(-\zeta_0, -v_0)}(\Sigma)$ é uma linha complexa que contém os pontos ∞ e $\mathbf{o} = (0, 0)$. Isto significa que $T_{(-\zeta_0, -v_0)}(\Sigma)$ coincide com a cadeia vertical. Portanto:

$$\begin{aligned} (\zeta, v, u) \in \Sigma &\Leftrightarrow (-\zeta_0 + \zeta, -v_0 + v + 2Im(-\zeta_0\bar{\zeta}), u) \in \partial\Sigma_2 \\ &\Leftrightarrow -\zeta_0 + \zeta = 0 \\ &\Leftrightarrow \zeta = \zeta_0 \end{aligned}$$

Logo $\partial\Sigma$ no grupo de Heisenberg coincide com a reta vertical $\{\zeta_0\} \times \mathbb{R}$.

4.1.1 Vetores Polares a cadeias verticais

No exemplo 1, o vetor polar a cadeia Σ_2 é: $P = (1, 0, 0)$. Assim, no exemplo 2, o vetor polar da cadeia vertical sobre o ponto p_0 é dado por:

$$\begin{aligned} T_{(\zeta_0, v_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \zeta_0 & \zeta_0 \\ -\zeta_0 & 1 - \frac{|\zeta_0|^2 - iv_0}{2} & -\frac{|\zeta_0|^2 - iv_0}{2} \\ \bar{\zeta}_0 & \frac{|\zeta_0|^2 - iv_0}{2} & 1 + \frac{|\zeta_0|^2 - iv_0}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{\zeta}_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 3. A CADEIA UNITÁRIA DE CENTRO NA ORIGEM DE \mathcal{H}

Considere a seguinte linha complexa:

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2; |z_1| < 1 \right\}$$

Passando para coordenadas horoesféricas, temos:

$$z_1 = \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 + u - iv} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1 - |\zeta|^2 - u + iv}{1 + |\zeta|^2 + u - iv}$$

Vemos que Σ_1 é dada por $1 - |\zeta|^2 - u + iv = 0$, ou seja:

$$\begin{cases} |\zeta|^2 + u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

Assim, temos que $\partial\Sigma_1$ no grupo de Heisenberg $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ é dada por: $|\zeta| = 1, v = 0$, que descreve uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1 no plano complexo $\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \{0\}$.

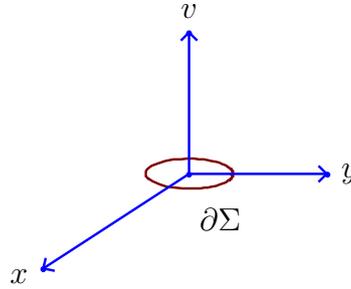


Figura 4.3: Cadeia Unitária de Centro na origem

Observação A cadeia $\partial\Sigma_1$ não contém o ponto ideal ∞ . Também é claro que, no espaço hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, dada uma linha complexa Σ e dado um ponto $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ então existe uma única linha complexa Σ' passando por p e ortogonal a Σ . No caso da linha complexa Σ_1 , vemos que a linha complexa Σ_2 é essa perpendicular que passa pelo ponto ideal. Também observe que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ é a origem da bola.

Exemplo 4. CADEIAS FINITAS

Considere uma linha complexa Σ em \mathbb{B}^2 que não contém o ponto ideal $q_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sejam Σ^\perp a linha complexa perpendicular a Σ tal que Σ^\perp contém o ponto ideal q_∞ e $p = \Sigma \cap \Sigma^\perp$.

A origem da bola possui coordenadas horoesféricas $\mathbf{o} = (0, 0, 1)$. Se p tem coordenadas horoesféricas (ζ_0, v_0, u_0) , temos que

$$D_{\frac{1}{\sqrt{u_0}}} \circ T_{(-\zeta_0, -v_0)}(\zeta_0, v_0, u_0) = (0, 0, 1)$$

Assim, concluímos que existe uma aplicação do tipo $D_k \circ T_{(\zeta, v)}$ que leva p na origem da bola.

Desse modo, $D_k \circ T_{(\zeta, v)}(\Sigma^\perp)$ é a linha complexa que passa por q_∞ e \mathbf{o} . Mas, como Σ_2 passa por esses pontos, concluímos que $D_k \circ T_{(\zeta, v)}(\Sigma^\perp) = \Sigma_2$. Da ortogonalidade de Σ e Σ^\perp em p e da ortogonalidade de Σ_1 e Σ_2 em \mathbf{o} , concluímos que $D_k \circ T_{(\zeta, v)}(\Sigma) = \Sigma_1$.

Logo,

$$\Sigma = T_{(-\zeta, -v)} \circ D_{\frac{1}{k}}(\Sigma_1)$$

Ou seja, qualquer cadeia que não passa pelo ponto ideal pode ser obtida da cadeia unitária $\partial\Sigma_1$ por uma dilatação de Heisenberg seguida de uma translação de Heisenberg.

Iremos analisar agora uma tal cadeia $C = T_{(\zeta_0, v_0)} \circ D_k(\partial\Sigma_1)$.

Seja $\Pi : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção dada por $\Pi(\zeta, v) = \zeta$. Então $\Pi(C) = k\zeta + \zeta_0$ é uma circunferência de centro ζ_0 e raio k . Como $\partial\Sigma_1$ pertence ao plano de contato $E_{(0,0)}$ vemos que C pertence ao plano de contato $E_{(\zeta_0, v_0)}$ (veja o primeiro exemplo da seção Decomposição Meridional do capítulo de Bissetores). Assim, vemos que C pode ser caracterizada como a interseção do plano $E_{(\zeta_0, v_0)}$ com o cilindro vertical sobre $\Pi(C)$. Ou seja, C é uma elipse de centro (ζ_0, v_0) .

Definição. Se $C = T_{(\zeta_0, v_0)} \circ D_k(\partial\Sigma_1)$ dizemos que C possui *centro* (ζ_0, v_0) e *raio* k .

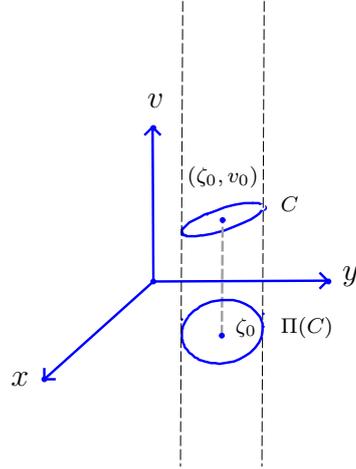


Figura 4.4: Cadeia Finita e sua projeção

4.1.2 Vetores Polares a Cadeia Finitas

No exemplo 3, o vetor polar a cadeia Σ_1 é $P = (0, 1, 0)$. Assim, no exemplo 4, o vetor polar da cadeia finita C de centro (ζ_0, v_0) e raio R é:

$$T_{(\zeta_0, v_0)} \circ D_k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_0 \\ 1 + k^2 - |\zeta_0|^2 + iv_0 \\ 1 - k^2 + |\zeta_0|^2 - iv_0 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Inversões

Considere os seguintes subespaços:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(z_1, 0) \in \mathbb{B}^2; |z_1| < 1\} \\ \Sigma_2 &= \{(0, z_2) \in \mathbb{B}^2; |z_2| < 1\} \end{aligned}$$

As inversões $i_1 : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ em Σ_1 e $i_2 : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ a inversão em Σ_2 possuem as

seguintes expressões respectivamente:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Os pontos z tais que $i_1(z) = z$ é o conjunto Σ_1 (similarmente para i_2). A representação matricial da inversão i_1 é:

$$i_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

E a representação de i_2 é:

$$i_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Calcularemos agora a inversão no grupo de Heisenberg $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathcal{H}$. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{B}^2 \\ f \uparrow & & \downarrow f^{-1} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \end{array}$$

Um ponto (ζ, v) é levado por $h = f^{-1} \circ i_2 \circ f$ para $(-\zeta, v)$. De fato,

$$\begin{aligned} (\zeta, v) &\xrightarrow{f} \begin{bmatrix} \frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2-iv} \\ \frac{1-|\zeta|^2+iv}{1+|\zeta|^2-iv} \end{bmatrix} \xrightarrow{i_2} \begin{bmatrix} \frac{-2\zeta}{1+|\zeta|^2-iv} \\ \frac{1-|\zeta|^2+iv}{1+|\zeta|^2-iv} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{f^{-1}} \left(-\frac{-2\zeta}{1+|\zeta|^2-iv}, -\operatorname{Im} \frac{1 - \frac{1-|\zeta|^2+iv}{1+|\zeta|^2-iv}}{1 + \frac{1-|\zeta|^2+iv}{1+|\zeta|^2-iv}} \right) \\ &\xrightarrow{f^{-1}} (-\zeta, v) \end{aligned}$$

De maneira análoga calculamos a inversão i_1 no grupo de Heisenberg. Ela é dada por

$$(\zeta, v) \mapsto \left(\frac{\zeta}{|\zeta|^2 - iv}, -\frac{v}{|\zeta|^4 + v^2} \right)$$

Agora podemos calcular a inversão i_1 no domínio de Siegel usando as transformações de Cayley. Observe o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{B}^2 \\ C^{-1} \uparrow & & \downarrow C \\ \mathfrak{h}^2 & \xrightarrow{g} & \mathfrak{h}^2 \end{array}$$

Um ponto $(w_1, w_2) \in \mathfrak{h}^2$ é levado por $g = C \circ i_1 \circ C^{-1}$ para o seguinte ponto $\left(\frac{1}{2} \frac{w_1}{w_2}, \frac{1}{4} \frac{1}{w_2}\right)$, pois calculamos a composição:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &\xrightarrow{C^{-1}} \left(\frac{2w_1}{1+2w_2}, \frac{1-2w_2}{1+2w_2} \right) \xrightarrow{i_1} \left(\frac{2w_1}{1+2w_2}, \frac{2w_2-1}{1+2w_2} \right) \\ &\xrightarrow{C} \left(\frac{\frac{2w_1}{1+2w_2}}{1 + \frac{2w_2-1}{1+2w_2}}, \frac{\frac{1}{2} \frac{1-2w_2-1}{1+2w_2}}{1 + \frac{2w_2-1}{1+2w_2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{w_1}{w_2}, \frac{1}{4} \frac{1}{w_2} \right) \end{aligned}$$

De modo análogo calculamos a inversão i_2 no domínio de Siegel e concluímos que:

$$i_2(w_1, w_2) = (-w_1, w_2)$$

4.2 \mathbb{R} -Círculos

Vamos caracterizar as interseções de variedades totalmente reais e totalmente geodésicas com a fronteira do espaço hiperbólico complexo, que são chamadas de \mathbb{R} -círculos .

Para caracterizar os \mathbb{R} -círculos, iremos utilizar o seguinte fato:

Todo espaço totalmente geodésico e totalmente real de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é equivalente por uma isometria ao plano puramente real:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

E a inversão nesse subespaço é dada por:

$$i : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

Exemplo 1. \mathbb{R} -CÍRCULO PURAMENTE REAL $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$

Consideremos o plano puramente real:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ e } x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$$

Passamos para coordenadas horoesféricas:

$$(\zeta, v, u) \mapsto \begin{bmatrix} z_1 = \frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2+u-iv} \\ z_2 = \frac{1-|\zeta|^2-u+iv}{1+|\zeta|^2+u-iv} \end{bmatrix}$$

Portanto para (ζ, v, u) definir um ponto em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ devemos ter z_2 é real. Ou seja, se $v = 0$. E fazendo $Im(z_1) = 0$, obtemos que $Im(\zeta) = 0$. Assim, em coordenadas horoesféricas $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é:

$$\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \{(\zeta, v) \in \mathcal{H}; Im(\zeta) = v = 0\}$$

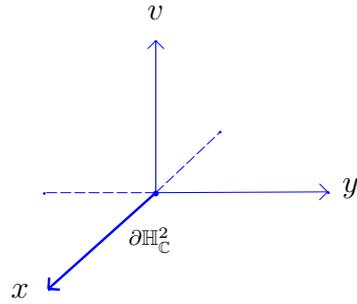


Figura 4.5: O \mathbb{R} -círculo puramente real $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$

Em coordenadas horoesféricas, a inversão no \mathbb{R} -círculo puramente real $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ é dada por:

$$i(\zeta, v) = (\bar{\zeta}, -v)$$

Para obtermos essa inversão no \mathbb{R} -círculo puramente real, basta utilizarmos a seguinte composição: $i = f^{-1} \circ i' \circ f$, veja

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}^2 & \xrightarrow{i'} & \mathbb{B}^2 \\ f \uparrow & & \downarrow f^{-1} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \end{array}$$

onde f representa a passagem do espaço de Heisenberg para o modelo da bola e i' é a inversão no plano puramente real no modelo da bola (como vimos no começo

desta seção) dada por $i'(z_1, z_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (\zeta, v) &\xrightarrow{f} \left(\frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv}, \frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) \xrightarrow{i'} \left(\frac{2\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2 + iv}, \frac{1 - |\zeta|^2 - iv}{1 + |\zeta|^2 + iv} \right) \\ &\xrightarrow{f^{-1}} (\bar{\zeta}, -v) \end{aligned}$$

Exemplo 2. \mathbb{R} -CÍRCULO FINITO PURAMENTE IMAGINÁRIO

$$J(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} iy_1 \\ iy_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2; y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ e } y_1^2 + y_2^2 < 1 \right\}$$

Observe que esse espaço é caracterizado como conjunto de pontos fixos da seguinte isometria anti-holomorfa de ordem 2 de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

$$i_J \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{z}_1 \\ -\bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

Chamaremos de R_J o \mathbb{R} -círculo que $\partial(J\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ define na fronteira do espaço hiperbólico complexo. Passamos para coordenadas horoesféricas:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \partial\mathbb{B}^2 \\ (\zeta, v) &\mapsto \begin{bmatrix} z_1 = \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv} \\ z_2 = \frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O ponto (z_1, z_2) acima está em R_J se, e somente se, as coordenadas desse ponto são números imaginários puros. Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) &= 0 & (*) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) &= 0 & (**) \end{aligned}$$

De (*), fazendo $\zeta = x + iy$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv} &= \frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv} \cdot \frac{1 + |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 + iv} \\ &= \frac{2\zeta(1 + |\zeta|^2 + iv)}{(1 + |\zeta|^2)^2 + v^2} \\ &= 2 \cdot \frac{x(1 + x^2 + y^2) - yv + i[y(1 + x^2 + y^2) + xv]}{(1 + |\zeta|^2)^2 + v^2} \end{aligned}$$

Portanto $Re(z_1) = 0$ se, e somente se,

$$x(1 + x^2 + y^2) - yv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{x}{y} \cdot (1 + x^2 + y^2) \quad (4.1)$$

Agora vejamos (**):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) &= \left(\frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) \cdot \frac{1 + |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 + iv} \\ &= \frac{(1 - |\zeta|^2)(1 + |\zeta|^2) - v^2 + i[v(1 - |\zeta|^2) + v(1 + |\zeta|^2)]}{(1 + |\zeta|^2)^2 + v^2} \end{aligned}$$

Assim de (**), temos que $Re(z_2) = 0$, se e somente se,

$$\begin{aligned} (1 - |\zeta|^2)(1 + |\zeta|^2) - v^2 = 0 &\Leftrightarrow 1 - |\zeta|^4 - v^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |\zeta|^4 + v^2 = 1 \end{aligned}$$

Juntando com a expressão que obtivemos em (4.1), temos:

$$\begin{aligned} v = \frac{x}{y}(1 + |\zeta|^2) &\Rightarrow v(1 - |\zeta|^2) = \frac{x}{y}(1 - |\zeta|^4) \\ &\Rightarrow v(1 - |\zeta|^2) = \frac{x}{y}v^2 \\ &\Rightarrow v = \frac{y}{x}(1 - |\zeta|^2) \end{aligned}$$

Desta última expressão para v , juntamente com (4.1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}(1 + |\zeta|^2) = \frac{y}{x}(1 - |\zeta|^2) &\Rightarrow x^2(1 + |\zeta|^2) = y^2(1 - |\zeta|^2) \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2)|\zeta|^2 + x^2 - y^2 = 0 \\ &\Rightarrow |\zeta|^4 + x^2 - y^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = 0 \end{aligned}$$

Esta última equação mostra que a projeção vertical do \mathbb{R} -círculo R_J é a *lemniscata de Bernoulli*:

$$|\zeta|^4 + \operatorname{Re}(\zeta^2) = 0$$

Considerando o \mathbb{R} -círculo R_J puramente imaginário observamos que ele pode ser parametrizado por:

$$R_J = \left\{ \begin{pmatrix} i \cos(t) \\ i \sin(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; t \in (0, 2\pi) \right\}$$

Passamos agora esse \mathbb{R} -círculo para coordenadas de Heisenberg \mathcal{H} :

$$\begin{pmatrix} i \cos(t) \\ i \sin(t) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix}$$

onde,

$$\zeta = \frac{\cos(t) \sin(t) + i \cos(t)}{1 + \sin^2(t)} \quad e \quad v = \frac{2 \sin(t)}{1 + \sin^2(t)}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Assim, utilizamos essas expressões para desenhar o \mathbb{R} -círculo em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Observação Em coordenadas horoesféricas, a inversão no \mathbb{R} -círculo R_J é dada por:

$$i_J(\zeta, v) = \left(\frac{-\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 + iv}, \frac{v}{|\zeta|^4 + v^2} \right)$$

Para achar essa expressão, usamos a inversão i'_J no modelo da bola (como já vimos) dada por $i'_J(z_1, z_2) = (-\bar{z}_1, -\bar{z}_2)$. Assim,

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathbb{B}^2 & \xrightarrow{i'_J} & \partial\mathbb{B}^2 \\ f \uparrow & & \downarrow f^{-1} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{i_J} & \mathbb{C} \times \mathbb{R} \end{array}$$

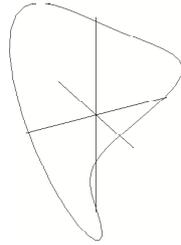


Figura 4.6: O \mathbb{R} -círculo puramente imaginário

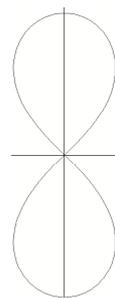


Figura 4.7: A projeção vertical do mesmo \mathbb{R} -círculo

temos que $i_J = f^{-1} \circ i'_J \circ f$, onde f é a aplicação que leva um ponto do modelo da bola para sua correspondente coordenada horoesférica. Calculando:

$$\begin{aligned} (\zeta, v) &\xrightarrow{f} \left(\frac{2\zeta}{1 + |\zeta|^2 - iv}, \frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) \\ &\xrightarrow{i'_J} \left(\frac{2\bar{\zeta}}{1 + |\zeta|^2 + iv}, \frac{+1 + |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 + iv} \right) \\ &\xrightarrow{f^{-1}} \left(\frac{-\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 + iv}, \frac{v}{|\zeta|^4 + v^2} \right) \end{aligned}$$

Teorema 4.2.1. *Todo \mathbb{R} -círculo infinito $R \subset \mathcal{H}$ é a imagem de R_J por uma aplicação de similaridade.*

Demonstração

Seja i_R a inversão no \mathbb{R} -círculo finito $R \subset \mathcal{H}$. Aplicando uma translação de Heisenberg podemos supor que o centro $i_R(\infty)$ de R é a origem $(0, 0)$ do grupo de Heisenberg. Desse modo vamos supor que $i_R(\infty) = (0, 0)$. Assim, a inversão i_R deixa invariante a cadeia vertical \mathbb{V} , pois esta é a única cadeia passando por ∞ e $(0, 0)$.

Por outro lado, como $i_R|_{\mathbb{V}}$ é uma involução anti-holomora, essa aplicação deve ter dois pontos fixos. Como $i_R|_{\mathbb{V}}$ permuta $(0, 0)$ e ∞ os seus pontos fixos devem ser da forma $(0, \pm R_0^2) \in \mathbb{V}$. Aplicando uma dilatação de Heisenberg, podemos supor que i_R fixa $(0, \pm 1) \in \mathbb{V}$.

Consideremos agora o \mathbb{R} -círculo puramente imaginário R_J e sua inversão i_J . É claro que a composição $i_R \circ i_J$ mantém \mathbb{V} invariante e fixa 4 de seus pontos: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, ∞ .

Logo $i_R \circ i_J$ fixa \mathbb{V} ponto a ponto o que implica que essa composição é uma rotação ao redor da cadeia vertical \mathbb{V} :

$$(\zeta, v) \longmapsto \rho_\theta(\zeta, v) = (e^{i\theta}\zeta, v)$$

Assim,

$$i_R \circ i_J = \rho_\theta \quad \Rightarrow \quad i_R = \rho_\theta \circ i_J = \rho_{\frac{\theta}{2}} \circ i_J \circ \rho_{-\frac{\theta}{2}}$$

uma vez que $i_J \circ \rho_\theta = \rho_{-\theta} \circ i_J$. Portanto, temos que $R = \rho_{\frac{\theta}{2}}(R_\theta)$.

□

Observação. Vamos representar por $\mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ o conjunto das ternas $x = (x_1, x_2, x_3)$ de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Quando os pontos x_1, x_2 e x_3 pertencem a uma mesma cadeia, vamos escrever $x \in \mathbf{Chain}$.

Teorema 4.2.2. *Seja $f : \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ uma função injetiva (não necessariamente contínua). Para $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$:*

$$x \in \mathbf{Chain} \iff f(x) \in \mathbf{Chain}$$

Então f é um automorfismo (possivelmente anti-holomorfo) de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Demonstração

Aplicando um automorfismo, suponhamos que f fixa ∞ . Uma cadeia por ∞ é uma linha vertical. O espaço das cadeias por ∞ podem ser identificado com a linha complexa \mathbb{C} que passa por $x \neq \infty$. Temos a projeção vertical $\Pi_V : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Como f leva cadeias em cadeias e fixa ∞ , segue que f induz um mapa \bar{f} de $\mathbb{C} = \Pi_V(\mathcal{H})$ para o qual o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{f} & \mathcal{H} \\ \Pi_V \uparrow & & \uparrow \Pi_V \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C} \end{array}$$

Como a projeção vertical de uma cadeia é um círculo em \mathbb{C} , a transformação do plano $\bar{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ preserva \mathbb{R} -círculos. Tal transformação é uma transformação complexa afim e uma transformação de Möbius.

Compondo com uma transformação de similaridade de Heisenberg assumimos que \bar{f} é identidade e $f(0) = 0$. Suponha que $x \in \mathcal{H}$ não é fixado por f e $z = \Pi_V(x) \neq 0 \in \mathbb{C}$. Seja C a cadeia passando por 0 e x . Assim, $f(C)$ é uma cadeia que passa pela origem distinta da cadeia C (C não é vertical). Logo, as seguintes cadeias

$$\Pi_V(C) \quad \text{e} \quad \Pi_V(f(C))$$

são círculos distintos em \mathbb{C} contendo 0 e z , contradizendo o fato de \bar{f} ser aplicação identidade em \mathbb{C} .

Então f fixa todos os pontos do eixo vertical. Repetindo o argumento acima com o 0 trocado por um outro ponto qualquer do eixo vertical, segue que f é a identidade.

□

Teorema 4.2.3. *Sejam $x_0, x_1 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ dois pontos distintos e $l \subset E_{x_0}$ uma linha no plano de contato em x_0 . Então um único \mathbb{R} -círculo passa por x_0, x_1 que é tangente a l em x_0 .*

Demonstração

Escolha coordenadas de Heisenberg de modo que x_0 seja a origem e x_1 é o ponto infinito ∞ no espaço de Heisenberg. Então \mathbb{R} -círculos por x_0, x_1 são as \mathbb{R} -linhas em E_{x_0} . □

O seguinte resultado é um corolário do teorema acima e será usado no teorema 6.11.1 que analisará a tangência de esferas espinhais.

Lema 4.2.4. *Sejam C_1, C_2 duas cadeias distintas que se intersectam no ponto p . Suponha que $q \in C_1 \setminus \{p\}$. Então existe um único \mathbb{R} -círculo R tal que:*

1. $p, q \in R$;
2. $T_p R \subset T_p C_1 + T_p C_2$.

Demonstração

Duas cadeias que são tangentes num ponto coincidem. O seguinte subespaço:

$$T_p C_1 + T_p C_2 \subset T_p \mathcal{H}$$

de $T_p \mathcal{H}$ é um 2-plano transversal a E_p . Então

$$l = (T_p C_1 + T_p C_2) \cap E_p$$

tem dimensão 1 (pois uma cadeia é uma subvariedade de Legendre e como tal possui dimensão menor que 2 neste caso). Pelo teorema anterior, um único \mathbb{R} -círculo R passa por p, q e é tangente a l em p . □

Capítulo 5

Classificação de Isometrias

Uma matriz 3×3 complexa está no grupo unitário $U(2, 1)$ se, e somente se

$$\langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^{2,1}$$

Considere a matriz $A \in U(2, 1)$ da forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ou $Az = \lambda z$. Mas $A \in U(2, 1)$, ou seja, se $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^{2,1}$:

$$\langle Az, Az \rangle = \langle z, z \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3), (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3) \rangle = |z|^2$$

e obtemos:

$$|\lambda|^2 |z|^2 = |z|^2 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1$$

isto é, $A \in U(2, 1)$ se, e somente se, o autovalor tem norma 1. Temos o seguinte subgrupo $SU(2, 1) < U(2, 1)$ que é o conjunto das matrizes de $U(2, 1)$ com determinante 1. Podemos definir (assim como fizemos no fim do primeiro capítulo) o grupo de isometrias como sendo:

$$PU(2, 1) = \frac{U(2, 1)}{U(1)}$$

onde $U(1) = \{e^{i\theta} Id; 0 \leq \theta < 2\pi\}$. O grupo $SU(2, 1)$ é uma cobertura de 3 folhas de $PU(2, 1)$:

$$PU(2, 1) = \frac{SU(2, 1)}{\{Id, \omega Id, \omega^2 Id\}}$$

onde $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ é uma raiz cúbica da unidade (isso é análogo ao fato de $SL(2, \mathbb{C})$ ser uma cobertura dupla de $PSL(2, \mathbb{C})$).

Corolário 5.0.5. *O estabilizador de um ponto em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ sob $PU(2, 1)$ é $P(U(2) \times U(1))$ que é conjugado a $U(2)$. Mais ainda, o estabilizador da origem age no modelo da bola \mathbb{B}^2 com a usual ação de $U(2)$ em \mathbb{C}^2 .*

Demonstração

Lembramos que

$$Stab(x) = \{f \in PU(2, 1); f(x) = x\}$$

Mas temos que $f \in Stab(0)$, se e somente se, $gfg^{-1} \in Stab(x)$ para um $g \in PU(2, 1)$. De fato, seja g um elemento de $PU(2, 1)$ tal que $g(0) = x$. Então $gfg^{-1}(x) = gf(0) = g(0) = x$. E por outro lado, se $gfg^{-1}(x) = x$, então $gf(x) = g(x)$, daí temos que $f(x) = x$. Concluimos que $g \circ Stab(0) \circ g^{-1} = Stab(x)$.

Considere $A \in U(2, 1)$, matriz que fixa a origem, da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot o = \lambda \cdot o$, onde o é a origem cujo levantamento é $(0, 0, 1)$, temos que $c = f = 0$, $j = 1$. Como A é unitária, temos que $A^{-1} = I_{2,1}^{-1} A^* I_{2,1}$ e $1 = \det(A^{-1}A) = \det(I_{2,1}^{-1} A^* I_{2,1} A) = \det(A^*) \cdot \det(A)$. Da relação $A^{-1}A = Id$, concluímos que $g = h = 0$. Assim, a matriz A é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix}$$

onde $A_0 \in U(2)$ e $e^{i\theta} \in U(1)$. Projetivizando, podemos assumir que $e^{i\theta} = 1$. Como todas matrizes dessa forma estabilizam a origem, temos o resultado desejado. \square

Consideremos a ação de $PU(2, 1)$ na fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Usaremos agora a segunda forma hermitiana: se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_2 = z_1 \bar{w}_3 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_1$.

Sejam $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Então o seguinte vetor é ortogonal a \mathbf{p} e a \mathbf{q} :

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \bar{q}_2 - \bar{p}_2 \bar{q}_1 \\ \bar{p}_3 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 \bar{q}_3 \\ \bar{p}_2 \bar{q}_3 - \bar{p}_3 \bar{q}_2 \end{bmatrix}$$

Observamos que

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$$

Mostraremos agora que $PU(2,1)$ age duplamente transitivamente na fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Utilizaremos o domínio de Siegel.

Proposição 5.0.6. *Para qualquer par de pontos $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe um elemento em $PU(2,1)$ levando a origem o a p e ∞ a q .*

Demonstração

Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^{2,1}$ levantamentos de $p, q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Considere

$$\widehat{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}$$

Assim, $\langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle = 0 = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle$ e $\langle \widehat{\mathbf{p}}, \mathbf{q} \rangle = -1$. Seja \mathbf{n} o vetor ortogonal a \mathbf{p} e a \mathbf{q} . Temos então:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1 \quad e \quad \langle \mathbf{n}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{q} \rangle = 0$$

Considere A a matriz cujos vetores colunas são $\mathbf{q}, \mathbf{n}, \widehat{\mathbf{p}}$. Logo temos que $\widehat{I}_{2,1} = A^* \widehat{I}_{2,1} A$. Ou seja, A é uma matriz unitária. Mais ainda, projetivizando A em $PU(2,1)$, vemos que A leva o a p e ∞ a q . □

Se A é uma matriz unitária, então A age isometricamente no modelo projetivo do espaço hiperbólico complexo. Logo $PU(2,1)$ é um subgrupo do grupo de isometrias hiperbólicas complexas.

No entanto, existem isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que não estão em $PU(2,1)$. Considere a conjugação complexa:

$$z \longmapsto \bar{z}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \left(\frac{\rho(\bar{z}, \bar{w})}{2} \right) &= \frac{\overline{\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle} \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle}}{\overline{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}} \\ &= \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle} \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho(z, w)}{2} \right) \end{aligned}$$

Logo a conjugação complexa é também uma isometria do espaço hiperbólico complexo.

Mostraremos a seguir que o grupo de isometrias holomorfas de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é $PU(2,1)$ e que o inteiro grupo de isometrias é gerado por $PU(2,1)$ e por conjugação complexa.

Teorema 5.0.7. *Toda isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é holomorfa ou anti-holomorfa. Mais ainda, cada isometria holomorfa de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é dada por uma matriz em $PU(2, 1)$ e cada isometria anti-holomorfa é dada por uma conjugação complexa seguida de uma matriz em $PU(2, 1)$.*

Demonstração

Usaremos o modelo da bola. Seja ϕ uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Aplicando um elemento de $PU(2, 1)$ podemos assumir que ϕ fixa a origem. Usando o corolário 5.0.5 podemos assumir que $(\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{B}^2$ é levado a algum ponto $(x, 0) \in \mathbb{B}^2$ com $0 \leq x < 1$.

Sejam (z_1, z_2) um ponto qualquer de \mathbb{B}^2 e $(w_1, w_2) = \phi(z_1, z_2)$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - |z_1|^2 - |z_2|^2} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((z_1, z_2), (0, 0))}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((w_1, w_2), (0, 0))}{2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - |w_1|^2 - |w_2|^2} \end{aligned}$$

Logo

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2 \quad (5.1)$$

Desta igualdade, como $\phi(\frac{1}{2}, 0) = (x, 0)$, concluímos que ϕ fixa $(\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{B}^2$.

Para $0 < r < 1$, considere $\phi(r, 0) = (a + ib, c + id)$. Da mesma igualdade (5.1) que obtivemos acima, concluímos que

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Em particular, $a \leq r < 1$ e também $(1 - \frac{r}{2})^2 = (1 - \frac{a}{2})^2$. Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \frac{r}{2})^2}{(1 - r^2)(1 - \frac{1}{4})} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((r, 0), (\frac{1}{2}, 0))}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho((a + ib, c + id), (\frac{1}{2}, 0))}{2} \right) \\ &= \frac{(1 - \frac{a}{2})^2 + \frac{b^2}{4}}{(1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2)(1 - \frac{1}{4})} \end{aligned}$$

Logo temos que $(1 - \frac{r}{2})^2 = (1 - \frac{a}{2})^2 + \frac{b^2}{4}$. Ou seja, temos que

$$\left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{r}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{4}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)^2$$

Portanto, temos que $a = r$. E da expressão de r^2 temos que $b = c = d = 0$. Assim, $\phi(r, 0) = (r, 0)$. Ou seja, para $0 \leq r < 1$, temos que ϕ fixa $(r, 0)$.

Agora considere

$$\phi\left(0, \frac{1}{2}\right) = (a + ib, c + id)$$

Da expressão de r^2 , obtida da mesma maneira que fizemos acima, $\frac{1}{4} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Mais ainda, para todo $0 < r < 1$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)(1 - r^2)} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), (r, 0)\right)}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho\left((a + ib, c + id), (r, 0)\right)}{2} \right) \\ &= \frac{(1 - ar)^2 + (br)^2}{(1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

Assim, para todo $0 < r < 1$ temos $1 - 2ar + r^2(a^2 + b^2) = 1$ e concluímos que $a = b = 0$. Portanto,

$$\phi\left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, c + id)$$

Podemos aplicar um elemento de $PU(2, 1)$ que fixa $(r, 0)$ e leva $(0, c + id)$ para $(0, s)$ com $0 < s < 1$. É claro que $s = \frac{1}{2}$ e, calculando como fizemos acima, temos que $\phi(r, 0) = (r, 0)$ para todo $0 \leq r < 1$.

Agora considere $\phi(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$ e como fizemos inicialmente: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |w_1|^2 + |w_2|^2$. Para $0 < r < 1$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - rz_1)(1 - r\bar{z}_1)}{(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)(1 - r^2)} &= \cosh^2 \left(\frac{\rho\left((z_1, z_2), (r, 0)\right)}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \left(\frac{\rho\left((w_1, w_2), (r, 0)\right)}{2} \right) \\ &= \frac{(1 - rw_1)(1 - r\bar{w}_1)}{(1 - |w_1|^2 - |w_2|^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

Portanto, $|1 - rz_1|^2 = |1 - rw_1|^2$. Equiparando os coeficientes de r temos que $|z_1|^2 = |w_1|^2$ e $Re(z_1) = Re(w_1)$. Em outras palavras, temos que $z_1 = w_1$ ou $z_1 = \bar{w}_1$. Também:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - rz_2)(1 - r\bar{z}_2)}{(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2)(1 - r^2)} &= \cosh^2\left(\frac{\rho((z_1, z_2), (0, r))}{2}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho((w_1, w_2), (0, r))}{2}\right) \\ &= \frac{(1 - rw_2)(1 - r\bar{w}_2)}{(1 - |w_1|^2 - |w_2|^2)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

Assim como fizemos para z_1 e w_1 , concluímos que ou $z_2 = w_2$ ou $z_2 = \bar{w}_2$. Usando a métrica $\cosh^2\left(\frac{\rho(\cdot, \cdot)}{2}\right)$, vemos que $(z_1, z_2) \rightarrow (z_1, \bar{z}_2)$ e $(z_1, z_2) \rightarrow (\bar{z}_1, z_2)$ não são isometrias. Portanto ϕ é a identidade ou conjugação complexa.

Então uma isometria qualquer de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ou está em $PU(2, 1)$, que significa ser holomorfa, ou é um elemento de $PU(2, 1)$ seguido de uma conjugação complexa que significa que é anti-holomorfa. □

A tricotomia da geometria hiperbólica se aplica na geometria hiperbólica complexa. Uma isometria hiperbólica complexa A é dita:

1. *Loxodrômica* se fixa dois pontos de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$;
2. *Parabólica* se fixa um ponto de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$;
3. *Elíptica* se fixa pelo menos um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Uma isometria é *elíptica regular* se ela é elíptica e todos seus autovalores são distintos.

Provaremos o seguinte teorema. Para isso utilizaremos vários lemas apresentados a seguir. Esse teorema esgota todas as possibilidades da tricotomia acima.

Teorema 5.0.8. *Seja $A \in SU(2, 1)$. Então ocorre uma das seguintes possibilidades.*

1. *A tem dois autovetores nulos com autovalores λ e $\bar{\lambda}^{-1}$, onde $|\lambda| \neq 1$, nesse caso A é loxodrômico;*
2. *A tem autovalor de módulo unitário repetido cujo auto-espaço é gerado por um vetor nulo, nesse caso A é parabólico;*

3. A tem autovetor negativo, nesse caso A é elíptico.

É claro que um ponto fixo de uma isometria A em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ corresponde a um autovetor da matriz correspondente em $V_- = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\}$ ou $V_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\}$.

Lema 5.0.9. *Seja $A \in SU(2, 1)$ e λ um autovalor de A . Então $\bar{\lambda}^{-1}$ é um autovalor de A .*

Demonstração

Como $A \in SU(2, 1)$, então $\det A = 1$ e A é uma matriz unitária com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (isto é, preserva o produto interno). Assim temos:

$$v^* A^* I_{2,1} A w = \langle A w, A v \rangle = \langle w, v \rangle = v^* I_{2,1} w$$

Ou seja,

$$A^* I_{2,1} A = A \quad \Rightarrow \quad A = I_{2,1}^{-1} (A^*)^{-1} I_{2,1}$$

Então A tem o mesmo conjunto de autovalores de $(A^*)^{-1}$ (pois são matrizes conjugadas). O polinômio característico de A^* é o polinômio complexo conjugado de A . Logo, se λ é raiz (autovalor de A) do polinômio característico de A , então $\bar{\lambda}$ é raiz (autovalor de A^*) do polinômio caractístico de A^* . Portanto, $\bar{\lambda}^{-1}$ é autovalor de $(A^*)^{-1}$. Por ter o mesmo conjunto de autovalores, concluímos que A tem $\bar{\lambda}^{-1}$ como autovalor. □

Agora temos o seguinte corolário que segue facilmente do lema acima.

Corolário 5.0.10. *Se λ é autovalor de $A \in SU(2, 1)$ com $|\lambda| \neq 1$, então $\bar{\lambda}^{-1}$ é um autovalor distinto. Em particular, A tem todos três autovalores de valor absoluto 1 ou A tem um par de autovalores λ e $\bar{\lambda}^{-1}$ com $|\lambda| \neq 1$ e o terceiro autovalor $\bar{\lambda}\lambda^{-1}$.*

Mostraremos agora que qualquer autovalor de módulo $\neq 1$ corresponde a um autovetor nulo e que quaisquer autovetores que não são ortogonais possuem λ e $\mu = \bar{\lambda}^{-1}$ como autovalores.

Lema 5.0.11. *Sejam λ, μ autovalores de $A \in SU(2, 1)$ e sejam v, w quaisquer autovetores com autovalores λ e μ respectivamente. Assim temos*

1. $|\lambda| = 1$ ou $\langle v, v \rangle = 0$;

2. $\lambda\bar{\mu} = 1$ ou $\langle v, w \rangle = 0$.

Demonstração

(1) Observe que

$$\langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle$$

Logo,

$$|\lambda| = 1 \quad \text{ou} \quad \langle v, v \rangle = 0$$

(2) De forma análoga, temos

$$\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle \lambda v, \mu w \rangle = \lambda\bar{\mu} \langle v, w \rangle$$

Concluimos então que

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda\bar{\mu} = 1$$

□

O seguinte resultado é consequência da assinatura de $\mathbb{C}^{2,1}$.

Lema 5.0.12. *Se $v, w \in \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\}$ com $\langle v, v \rangle \leq 0$ e $\langle w, w \rangle \leq 0$ então ou $w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\langle v, w \rangle \neq 0$.*

Demonstração

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{C}^{2,1}$ com a primeira forma hermitiana. Ou seja:

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0 \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \langle e_2, e_2 \rangle = -\langle e_3, e_3 \rangle = 1 \end{aligned}$$

Escreva

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad \text{e} \quad w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$$

Como $\langle v, v \rangle \leq 0$ e $\langle w, w \rangle \leq 0$, temos:

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 \leq |v_3|^2 \quad \text{e} \quad |w_1|^2 + |w_2|^2 \leq |w_3|^2$$

Assim, v_3 e w_3 são ambos não nulos. Se $\langle v, w \rangle = 0$, temos:

$$v_1\bar{w}_1 + v_2\bar{w}_2 = v_3\bar{w}_3$$

Daí, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |v_3 - \lambda w_3|^2 &= |v_3|^2 - \bar{\lambda}v_3\bar{w}_3 - \lambda\bar{v}_3w_3 + |\lambda|^2|w_3|^2 \\ &\geq |v_1|^2 + |v_2|^2 - \bar{\lambda}v_1\bar{w}_1 - \lambda\bar{v}_2\bar{w}_2 - \lambda\bar{v}_1w_1 - \\ &\quad - \lambda\bar{v}_2w_2 + |\lambda|^2|w_1|^2 + |\lambda|^2|w_2|^2 \\ &= |v_1 - \lambda w_1|^2 + |v_2 - \lambda w_2|^2 \end{aligned}$$

Se escolhermos $\lambda = \frac{v_3}{w_3}$, teremos:

$$0 \geq |v_1 - \lambda w_1|^2 + |v_2 - \lambda w_2|^2 \geq 0$$

ou seja,

$$v_1 - \lambda w_1 = 0 = v_2 - \lambda w_2$$

isto é,

$$v_1 = \frac{v_3}{w_3}w_1 \quad e \quad v_2 = \frac{v_3}{w_3}w_2$$

Concluimos que $v_1 = \lambda w_1$, $v_2 = \lambda w_2$ e $v_3 = \lambda w_3$. Portanto $v = \lambda w$. □

Usando os resultados acima, provaremos o lema a seguir. Analisaremos os autovetores de $A \in SU(2, 1)$ com um autovetor de módulo não unitário. Este lema abaixo provará o caso (1) do teorema 5.0.8 onde temos um elemento loxodrômico.

Lema 5.0.13. *Suponha que os autovalores de $A \in SU(2, 1)$ sejam $re^{i\theta}$, $r^{-1}e^{i\theta}$, $e^{-2i\theta}$ onde $r \neq 1$ e que eles tenham respectivamente os autovetores u, v, w . Então:*

$$\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

e,

$$\langle w, w \rangle > 0 \quad e \quad \langle u, v \rangle \neq 0$$

Demonstração

Pelo Lema 5.0.11, temos $\langle u, u \rangle = 0 = \langle v, v \rangle$. Como $(re^{i\theta})e^{-2i\theta} \neq 1 \neq (r^{-1}e^{i\theta})e^{-2i\theta}$, também pelo mesmo lema citado, temos que $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$.

Como $\langle u, u \rangle = 0 = \langle v, v \rangle$, usando o lema anterior, temos que $\langle u, v \rangle \neq 0$. Se $\langle w, w \rangle \leq 0$, ainda pelo lema anterior, teríamos $\langle u, w \rangle \neq 0$. O que é uma contradição. \square

A partir de agora, assumiremos que todos os autovalores de A possuem módulo unitário. Começaremos com o caso em que todos são distintos. No lema a seguir temos um elemento elíptico, que é o caso (3) do teorema 5.0.8. Os outros lemas a seguir provarão ou o caso (2) ou o caso (3) do teorema.

Lema 5.0.14. *Suponha que os autovalores de $A \in SU(2, 1)$ são distintos com valor absoluto 1 e suponha que tenham autovetores u, v, w respectivamente. Então*

$$\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$$

e dois dos $\langle v, v \rangle, \langle u, u \rangle, \langle w, w \rangle$ são positivos enquanto o outro é negativo.

Demonstração

Pelo lema 5.0.11, como os autovalores são distintos, temos

$$\langle u, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, u \rangle = 0$$

Pelo lema 5.0.12, pelo menos um dos $\langle v, v \rangle, \langle u, u \rangle, \langle w, w \rangle$ é não positivo. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é indefinida e não degenerada, então nenhum dos $\langle v, v \rangle, \langle u, u \rangle, \langle w, w \rangle$ é zero e pelo menos um destes é negativo. \square

Consideraremos agora o caso de autovalores repetidos. Começaremos supondo que os autovalores são $e^{i\theta}, e^{i\theta}$ e $e^{-2i\theta}$, onde $e^{i\theta} \neq e^{-2i\theta}$.

Lema 5.0.15. *Suponha que $A \in SU(2, 1)$ tenha autovalor reptido $e^{i\theta}$. Suponha que o $e^{i\theta}$ -autoespaço seja gerado por v . Então $\langle v, v \rangle = 0$.*

Demonstração

Como $e^{i\theta}$ é um autovalor repetido, então existe um vetor u (que não é múltiplo de v) que satisfaz

$$Au = e^{i\theta}u + \lambda v, \quad \text{com} \quad \lambda \neq 0$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle Au, Av \rangle = \langle e^{i\theta}u + \lambda v, e^{i\theta}v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle + \lambda e^{-i\theta} \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle v, v \rangle = 0$$

□

Nesta lema acima temos um elemento parabólico, caso (2) do teorema 5.0.8. No lema abaixo, temos um elemento elíptico, que é o caso (3) do teorema 5.0.8.

Lema 5.0.16. *Suponha que $A \in SU(2, 1)$ tenha autovalores $e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{-2i\theta}$. Seja v um autovetor correspondente a $e^{i\theta}$ e w o autovetor correspondente a $e^{-2i\theta}$. Suponha que $\langle w, w \rangle \leq 0$. Então, de fato, $\langle w, w \rangle < 0$. Também $\langle v, w \rangle = 0$, $\langle v, v \rangle > 0$ e o $e^{i\theta}$ -autoespaço tem dimensão dois.*

Demonstração

Como v e w possuem autovalores distintos, pelo lema 5.0.11 temos que $\langle v, w \rangle = 0$. Se $\langle v, v \rangle \leq 0$, pelo lema 5.0.12 temos que $\langle v, w \rangle \neq 0$, uma contradição. Assim, $\langle v, v \rangle > 0$.

Usando o lema anterior, v não pode gerar o $e^{i\theta}$ -autoespaço. Logo, existem vetores ortogonais, os $e^{i\theta}$ -autovetores v, u tais que $\langle v, v \rangle > 0$ e $\langle u, u \rangle > 0$, por causa da assinatura de $\mathbb{C}^{2,1}$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é indefinida e não degenerada, temos que $\langle w, w \rangle < 0$. □

Neste próximo lema, temos um elemento parabólico (parte (1) do lema) ou um elemento elíptico (parte (2) do lema). Assim provamos os casos (2) ou (3) do teorema 5.0.8.

Lema 5.0.17. *Suponha que $A \in SU(2, 1)$ tenha autovalores $e^{i\theta}, e^{i\theta}, e^{-2i\theta}$. Seja v um autovetor correspondente a $e^{i\theta}$ e w autovetor correspondente a $e^{-2i\theta}$. Suponha que $\langle w, w \rangle > 0$. Acontece uma das alternativas:*

1. *O $e^{i\theta}$ -autoespaço é gerado por v e $\langle v, v \rangle = 0$;*
2. *O $e^{i\theta}$ -autoespaço tem dimensão dois e é indefinido.*

Demonstração

Se o $e^{i\theta}$ -autoespaço tem dimensão 1 e é gerado por v , então pelo lema 5.0.15, temos que $\langle v, v \rangle = 0$.

Por outro lado, suponha que u, v sejam $e^{i\theta}$ -autovalores linearmente independentes. Podemos assumir que $\langle u, v \rangle = 0$. Como $e^{i\theta} \cdot \overline{e^{-2i\theta}} \neq 1$, temos que

$$\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

Logo, u, v, w são linearmente independentes e formam uma base de $\mathbb{C}^{2,1}$. Seja $z = \alpha u + \beta v + \gamma w$ um vetor negativo de $\mathbb{C}^{2,1}$. Assim,

$$0 > \langle z, z \rangle = |\alpha|^2 \langle u, u \rangle + |\beta|^2 \langle v, v \rangle + |\gamma|^2 \langle w, w \rangle$$

Como $\langle w, w \rangle > 0$ por hipótese, pelo menos um dos $\langle v, v \rangle, \langle u, u \rangle$ é negativo. Pela assinatura de $\mathbb{C}^{2,1}$, um produto interno é negativo e o outro é positivo. \square

Para terminar a prova do teorema 5.0.8 temos o seguinte lema onde consideramos o caso no qual temos os 3 autovalores iguais. A irá satisfazer as condições (2) do teorema, onde temos um elemento parabólico.

Lema 5.0.18. *Suponha que $A \in SU(2, 1)$ tenha exatamente um autovalor. Então A é um múltiplo da identidade ou o autoespaço é gerado por um vetor nulo.*

Demonstração

O autoespaço A tem dimensão 1, 2 ou 3. Se tem dimensão 3, então é necessariamente um múltiplo da identidade. Se tem dimensão 1, pelo lema 5.0.15, esse autoespaço é gerado por um vetor nulo.

Agora veremos o que acontece no caso de dimensão 2. Suponha por contradição que existam dois vetores $v, w \in \mathbb{C}^{2,1}$ tais que

$$Av = e^{i\theta}v \quad e \quad Aw = e^{i\theta}w$$

Fazendo uma combinação de v e w se necessário e usando o lema 5.0.12, suponhamos por contradição que $\langle v, v \rangle \neq 0, \langle w, w \rangle \neq 0$ e $\langle v, w \rangle = 0$. Seja n o vetor ortogonal a v e a w . Como v, w são linearmente independente, vemos que $n \neq 0$. Também, desde que nem v nem w são nulos, $n \neq v, w$. Então v, w, n formam uma base ortonormal de $\mathbb{C}^{2,1}$. Assim,

$$An = \frac{\langle An, v \rangle}{\langle v, v \rangle}v + \frac{\langle An, w \rangle}{\langle w, w \rangle}w + \frac{\langle An, n \rangle}{\langle n, n \rangle}n$$

Agora temos,

$$\langle An, v \rangle = e^{i\theta} \langle An, Av \rangle = e^{i\theta} \langle n, v \rangle = 0$$

Portanto, $\langle An, v \rangle = 0$. Similarmente $\langle An, w \rangle = 0$. Concluimos que An é múltiplo de n . Daí n é um autovetor de A . Como A tem um só autovalor $e^{i\theta}$, então n está no espaço gerado por v e w , o que é uma contradição. \square

Agora estudaremos o traço de $A \in SU(2, 1)$ para determinarmos a classe de A . Do corolário 5.0.10, vemos que se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são autovalores de A , então $\bar{\lambda}_1^{-1}, \bar{\lambda}_2^{-1}, \bar{\lambda}_3^{-1}$ formam uma permutação de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Seja $p(x) = p_A(x)$ o polinômio característico de A . Suponha que

$$p(x) = x^3 - a_2x^2 + a_1x - a_0$$

então $a_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A)$ e $a_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = det(A) = 1$. Então o outro coeficiente é:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ &= \lambda_3^{-1} + \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} \\ &= \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \\ &= \overline{tr(A)} \end{aligned}$$

Denotaremos o traço de A por $\tau = tr(A)$. Assim temos

$$p(x) = x^3 - \tau x^2 + \bar{\tau}x - 1$$

Agora queremos estudar $A \in SU(2, 1)$ quando tem repetidos autovalores. Em outras palavras, queremos achar condições em τ tais que $p(x) = 0$ tenha soluções repetidas. Mas isso acontece se, e somente se, $p(x)$ e $p'(x)$ possuem raízes em comum. Observe que

$$p'(x) = 3x^2 - 2\tau x + \bar{\tau}$$

Dois polinômios possuem raízes em comum se, e somente se, a resultante deles se anula. Calculamos abaixo a resultante de $p(x)$ e $p'(x)$.

$$R(p, p') = \begin{vmatrix} 1 & -\tau & \bar{\tau} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tau & \bar{\tau} & -1 \\ 3 & -2\tau & \bar{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2\tau & \bar{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2\tau & \bar{\tau} \end{vmatrix} = |\tau|^4 - 8Re(\tau^3) + 18|\tau|^2 - 27$$

Teorema 5.0.19. *Seja $f(\tau) = |\tau|^4 - 8Re(\tau^3) + 18|\tau|^2 - 27$. Seja $A \in SU(2, 1)$. Então*

1. *A tem um autovalor λ com $|\lambda| \neq 1$ se, e somente se, $f(tr(A)) > 0$;*
2. *A tem autovalor repetido se, e somente se, $f(tr(A)) = 0$;*

3. *A tem autovalores distintos de módulo 1 se, e somente se, $f(\text{tr}(A)) < 0$.*

Demonstração

A parte (2) segue da discussão acima. Na parte (1) sabemos que os autovalores de A são da forma $re^{i\theta}, r^{-1}e^{i\theta}, e^{-2i\theta}$ com $r \neq 1$ pelo corolário 5.0.10 acima. Fazendo os cálculos (que não apresentaremos aqui pois são longos), observamos que

$$f(re^{i\theta} + r^{-1}e^{i\theta} + e^{-2i\theta}) = (r - r^{-1})^2(r + r^{-1} - 2\cos(3\theta))^2 > 0$$

Na parte (3) escrevemos os autovalores como sendo $e^{i\theta}, e^{i\phi}, e^{i\psi}$, onde θ, ϕ, ψ são distintos cuja soma é $0 \pmod{2\pi}$. Fazendo os cálculos necessários, temos que

$$f(e^{i\theta} + e^{i\phi} + e^{i\psi}) = -4(\sin(\theta - \phi) + \sin(\phi - \psi) + \sin(\psi - \theta))^2 < 0$$

Isso termina a prova do teorema. □

Este último teorema é equivalente ao seguinte. Seja $C_3 \subset \mathbb{C}$ o conjunto de raízes cúbicas da unidade.

Teorema 5.0.20. *A aplicação $\tau : SU(2, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida pelo traço é sobrejetiva. Se $A_1, A_2 \in SU(2, 1)$ satisfazem $\tau(A_1) = \tau(A_2) \in \mathbb{C} \setminus f^{-1}(0)$, então eles são conjugados. Seja $A \in SU(2, 1)$, então:*

1. *A é elíptico regular se, e somente se, $f(\tau(A)) < 0$;*
2. *A é loxodrômica se, e somente se, $f(\tau(A)) > 0$;*
3. *A é elíptico parabólica se, e somente se, A não é elíptica e $\tau(A) \in f^{-1}(0) \setminus 3C_3$;*
4. *$\tau(A) \in 3C_3$ se, e somente se, A representa um automorfismo unipotente de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ (é representado por uma transformação linear de $U(2, 1)$ tendo 1 como seu único autovalor).*

A curva $f^{-1}(0)$ é chamada de *deltóide*. Os pontos no interior da curva correspondem aos elementos elípticos regulares e os pontos no exterior correspondem aos elementos loxodrômicos. A fronteira corresponde aos elementos parabólicos. Fazendo $z = x + iy$, o deltóide é dado por:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 18) - 8x^3 + 24xy^2 = 27$$

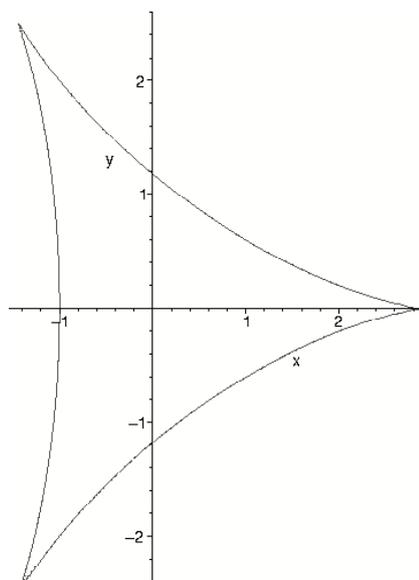


Figura 5.1: O Deltóide

Considere inicialmente uma aplicação loxodrômica A . Sabemos que A corresponde a uma matriz com autovalores $re^{i\theta}, r^{-1}e^{i\theta}, e^{-2i\theta}$, onde $r > 1$, com respectivos autovetores $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_0$ e $\mathbf{n} \in V_+$. Isso corresponde a um ponto fixo atrator p e um ponto fixo repulsor $q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. A linha complexa L gerada por p e q é representada por A . Essa linha tem vetor polar \mathbf{n} .

Agora considere uma aplicação parabólica A . Tal aplicação corresponde a uma matriz com um autovalor repetido de módulo unitário cujo autoespaço é gerado por um autovetor nulo \mathbf{p} . Esse vetor corresponde a um ponto fixo neutro $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Existem dois casos a considerar: quando A tem um só autovalor de multiplicidade 3 e quando A tem dois autovalores distintos, um dos quais é repetido. No primeiro caso dizemos que A é *parabólica pura*. Um tal mapa corresponde às translações de Heisenberg (veja translação de Heisenberg na equação (2.1)) e tem traço 3 ou $\frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$, ou seja, corresponde a uma das três quinas do deltóide.

No segundo caso, dizemos que A é *elíptico parabólica* (ou *screw parabólica*). Neste caso, o autovalor que não é repetido tem autovetor $\mathbf{n} \in V_+$. A linha complexa cujo vetor polar é \mathbf{n} fica preservada por A que atua como uma translação. Mais ainda, A gira $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ao redor dessa linha complexa. Aplicações elíptico-parabólicas correspondem aos pontos suaves do deltóide.

Finalmente, considere uma aplicação elíptica A . Temos três casos. Primeiro, suponha que A tem um autovalor repetido com autoespaço bidimensional contendo vetores positivos e negativos. Esse autoespaço corresponde a uma linha complexa L na qual A atua como a identidade. Em particular, existem pontos de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ fixados por A e por isso A é chamada de *elíptico na fronteira*. Como A fixa L e gira $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ em torno de L , A é uma *reflexão complexa* na linha L .

Se A não é elíptica na fronteira, então A tem um autoespaço gerado por um vetor negativo w que corresponde a um ponto fixo $w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Neste caso, A é chamada de *elíptico regular*. Existem dois casos possíveis. Ou A tem um autovalor repetido com um autoespaço gerado por dois vetores positivos. Nesse caso A é uma *reflexão complexa* no ponto w . Por outro lado, A pode ter três autovalores distintos. Reflexões complexas correspondem novamente aos pontos suaves do deltóide, enquanto outros mapas elípticos correspondem ao interior do deltóide.

Capítulo 6

Bissetores

6.1 Bissetores equidistantes de um par de pontos

Definição Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ dois pontos distintos. O *bissetor equidistante* de z_1 e z_2 é definido como:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2) = \{z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}$$

A dimensão real do bissetor é 3, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{B} = 3$. O bordo do bissetor em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é chamado de *esfera espinhal*.

Agora seja $\Sigma \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ a geodésica complexa passando por z_1, z_2 . Chamamos Σ de *espinha complexa* do bissetor \mathcal{B} (com respeito à z_1 e z_2). A *espinha* (ou *espinha real*) do bissetor \mathcal{B} (com respeito à z_1 e z_2) é igual a:

$$\sigma = \sigma(z_1, z_2) = \mathcal{B}(z_1, z_2) \cap \Sigma = \{z \in \Sigma; \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\}$$

Logo σ é uma geodésica real de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ ortogonal ao segmento de geodésica passando por z_1 e z_2 e passando por seu ponto médio (mediatriz).

Como $\rho(z, z_1) = \rho(z, z_2)$ para $z \in \mathcal{B}(z_1, z_2)$, podemos achar uma fórmula para o bissetor $\mathcal{B}(z_1, z_2)$. Neste caso temos:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, z_1)}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z, z_2)}{2} \right)$$

ou seja,

$$\frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$$

onde $\mathbf{z}, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^{2,1}$ são respectivamente os levantamentos de $z, z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Podemos supor que os levantamentos de z_1, z_2 são tais que $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle = \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle = -1$. Assim temos:

$$|\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}_1 \rangle| = |\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}_2 \rangle|$$

6.2 Decomposição em fatias de Mostow

Teorema 6.2.1 (Mostow). *Sejam Σ, σ a espinha complexa e a espinha do bisetor \mathcal{B} . Seja $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ a projeção ortogonal sobre Σ . Então:*

$$\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$$

Demonstração

Seja $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então, para $j = 1, 2$, temos¹

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, z_j)}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z, \Pi_{\Sigma}(z))}{2} \right) \cdot \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Pi_{\Sigma}(z), z_j)}{2} \right)$$

Logo, usando essa igualdade:

$$\begin{aligned} z \in \mathcal{B}(z_1, z_2) &\Leftrightarrow \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z) \\ &\Leftrightarrow \rho(z_1, \Pi_{\Sigma}(z)) = \rho(z_2, \Pi_{\Sigma}(z)) \\ &\Leftrightarrow \Pi_{\Sigma}(z) \in \sigma(z_1, z_2) \end{aligned}$$

□

Os hiperplanos complexos $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$ para $s \in \sigma$ são chamados de *fatias* do bisetor \mathcal{B} (com respeito a z_1 e z_2).

Agora provaremos que a fatia é uma linha complexa.

Proposição 6.2.2. *A fatia $\Pi_{\Sigma}^{-1}(s)$ é uma linha complexa.*

Demonstração

¹Veja o Lema 3.2.13, pg. 97 de [1].

Seja L uma linha complexa em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Existe uma isometria $f : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tal que:

$$f(L) = \Sigma_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; z_2 = 0\}$$

observe que o ponto ideal $p_{\infty} = (0, -1)$ não está nesta linha complexa. Se Π é a projeção ortogonal sobre L e Π_1 é a projeção ortogonal sobre Σ_1 , observe que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi_1 \\ L & \xrightarrow{f} & \Sigma \end{array}$$

temos $\Pi = f^{-1} \circ \Pi_1 \circ f$ e $\Pi^{-1}(x) = (f^{-1} \circ \Pi_1 \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \Pi_1^{-1} \circ f(x)$. Porém $\Pi_1(z_1, z_2) = (z_1, 0)$ e

$$\Pi^{-1}(z_1, 0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ e } \Pi(z_1, z_2) = (z_1, 0) \text{ e } |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

Fixe $(x_0, 0) \in \Sigma_1$ onde $x_0 \in \mathbb{C}$, $|x_0| < 1$. Seja L a única linha complexa por $(x_0, 0)$ ortogonal a Σ_1 , então o vetor polar a L é:

$$P \boxtimes Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -x_0 \end{pmatrix}$$

Um ponto $p = (x, y) \in L$ se, e somente se $\langle P, Q \rangle = 0$, ou seja,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\bar{x}_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow -x + \bar{x}_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Isto prova que $L = \Pi^{-1}(x)$

□

Corolário 6.2.3. *Um bissetor $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é uma hipersuperfície real (analítica real) difeomorfa à \mathbb{R}^3 . Uma esfera espinhal é uma hipersuperfície real (analítica real) de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ difeomorfa à S^2 .*

Demonstração

A projeção ortogonal $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ é uma fibração real analítica. Logo \mathcal{B} é um fibrado trivial.

□

Definição Os dois pontos finais da espinha real de um bissetor são os *vértices* do bissetor.

Sabemos que uma geodésica $\sigma \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ está unicamente determinada se conhecermos os seus pontos finais. Provaremos que um bissetor depende unicamente de seus vértices.

De fato, seja $\sigma \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ uma geodésica real. Provaremos que existe um único bissetor $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ cuja espinha é precisamente σ . Existe uma única linha complexa Σ contendo a geodésica real σ . Considere $R_{\sigma} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a única reflexão em Σ cujo conjunto dos pontos fixos é precisamente σ . Seja z_1 um ponto qualquer de $\Sigma - \sigma$ e definimos $z_2 = R_{\sigma}(z_1)$. Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$ o bissetor equidistante de z_1 e z_2 . Agora seja $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ a projeção ortogonal sobre Σ . Temos²

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z, z_j)}{2} \right) = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z, \Pi_{\Sigma}(z))}{2} \right) \cdot \cosh^2 \left(\frac{\rho(\Pi_{\Sigma}(z), z_j)}{2} \right)$$

Assim, como fizemos anteriormente na demonstração do teorema 6.2.1 temos $z \in \mathcal{B}(z_1, z_2) \Leftrightarrow \Pi_{\Sigma}(z) \in \sigma$ pois σ é o conjunto dos pontos fixos da inversão sobre σ . Logo $\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma)$ e assim \mathcal{B} é o único bissetor contendo a geodésica real σ (que define a geodésica complexa Σ).

Então acabamos de provar o seguinte teorema.

Teorema 6.2.4. *Existe uma bijeção natural entre bissetores $\mathcal{B} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.*

Definição Dois bissetores $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ são *estritamente coequidistantes* se

$$(\Sigma_1 - \sigma_1) \cap (\Sigma_2 - \sigma_2) \neq \emptyset$$

onde Σ_i denota a espinha complexa e σ_i é a espinha do bissetor \mathcal{B}_i . Observe que esta definição é equivalente a existência de três pontos z_0, z_1, z_2 tais que $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(z_0, z_i)$, $i = 1, 2$. Basta pegar $z_0 \in (\Sigma_1 - \sigma_1) \cap (\Sigma_2 - \sigma_2)$ e $z_1 = R_{\Sigma_1}(z_0)$ e $z_2 = R_{\Sigma_2}(z_0)$.

Também dizemos que dois bissetores $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ são *fracamente coequidistantes* se $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.

6.3 Decomposição Meridional

Antes de provarmos o teorema da decomposição em meridianos de um bissetor iremos provar o seguinte teorema que dá uma fórmula para os vértices.

²Veja o lema 3.2.13 de [1], pg. 97

Lema 6.3.1. *Sejam z_1, z_2 pontos distintos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. O bissetor $\mathcal{B}(z_1, z_2)$ tem vértices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ representados em $\mathbb{C}^{2,1}$ pelos vetores:*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{z}_1 + \xi \mathbf{z}_2 \quad e \quad \mathbf{v}_2 = \xi \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$$

onde $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ são os levantamentos de z_1, z_2 que são normalizados tais que $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle = \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle$ e $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle > 0$ e

$$\xi = \operatorname{sech} \left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2} \right) + i \tanh \left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2} \right)$$

Demonstração

Podemos escolher, sem perda de generalidade, representantes $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^{2,1}$ para $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tais que:

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle = \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle = -1 \quad e \quad \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle > 0$$

Consequentemente temos:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2} \right) = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$$

A geodésica complexa Σ se levanta para o seguinte 2-plano complexo em $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\Sigma' = \{a\mathbf{z}_1 + b\mathbf{z}_2; a, b \in \mathbb{C}\}$$

Se $|a| = |b|$ então o ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ representado em $\mathbb{C}^{2,1}$ por $\mathbf{p} = \mathbf{z}_1 + b\mathbf{z}_2$ é equidistante de z_1 e de z_2 se:

$$\cosh^2 \left(\frac{\rho(p, z_1)}{2} \right) = \frac{|a|^2 - k\alpha + |b|^2\alpha}{|a|^2 + |b|^2 - k\alpha} = \cosh^2 \left(\frac{\rho(z_2, p)}{2} \right)$$

onde $k = 2\operatorname{Re} a\bar{b}$, $\alpha = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$.

Considere agora um vetor $\mathbf{v} = a\mathbf{z}_1 + b\mathbf{z}_2 \in \Sigma'$ que representa um ponto equidistante de z_1 e z_2 , ou seja, $|a| = |b|$. Para \mathbf{v} ser vértice do bissetor $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$, v deve ser um vetor nulo:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow -|a|^2 - |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b})\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$$

Contudo, como v é um representante do vértice do bissetor, podemos multiplicá-lo por uma constante não nula. Logo, podemos supor $a = 1$ (observe que $a \neq 0$ sempre).

Logo $|b| = 1$ e assim:

$$\operatorname{Re}(\bar{b}) = \operatorname{Re}(b) = \frac{1}{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle} = \operatorname{sech}\left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2}\right)$$

Como $|b| = 1$ e usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sech}^2\theta + \tanh^2\theta = 1$ vemos que

$$\operatorname{Im}(b) = \tanh\left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2}\right)$$

Portanto

$$b = \operatorname{sech}\left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2}\right) + i \tanh\left(\frac{\rho(z_1, z_2)}{2}\right)$$

Portanto, os dois vértices do bissetor $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$ pode ser representado em $\mathbb{C}^{2,1}$ como:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{z}_1 + b\mathbf{z}_2 \text{ e } \mathbf{v}_2 = b\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$$

□

Teorema 6.3.2. *Seja $\sigma \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ uma linha geodésica. Então o bissetor \mathcal{B} tendo espinha σ é a união de todos os \mathbb{R}^2 -planos contendo σ .*

Demonstração

Seja Σ a única geodésica complexa contendo σ e sejam z_1, z_2 pontos em Σ tais que $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$.

Seja P' um \mathbb{R}^2 -plano contendo σ . Vamos mostrar que $P' \subset \mathcal{B}$. Temos que mostrar:

$$\rho(z_1, y) = \rho(z_2, y) \quad \forall y \in P'$$

Seja $i_{P'}$ a inversão em P' . Vemos que $i_{P'}$ preserva Σ e age como uma conjugação em σ . Assim $i_{P'}$ permuta z_1 com z_2 e portanto:

$$\rho(z_1, y) = \rho(i_{P'}(z_1), i_{P'}(y)) = \rho(z_2, y) \quad \forall y \in P'$$

Portanto $P' \subset \mathcal{B}$.

Provaremos agora que cada $y \in \mathcal{B}$ está contido num subespaço totalmente real contendo σ .

Considere agora $y \in \mathcal{B}$ e seja $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2,1}$ um representante de y . Vamos demonstrar que $y, \mathbb{P}(\mathbf{v}_1), \mathbb{P}(\mathbf{v}_2)$ geram um 2-plano totalmente real contendo σ e que está contido em \mathcal{B} . Lembramos aqui que 3 pontos $y, \mathbb{P}(\mathbf{v}_1), \mathbb{P}(\mathbf{v}_2)$ geram um 2-plano totalmente real se, e somente se

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle$$

Como $y \in \mathcal{B}$, então $\rho(z_1, y) = \rho(z_2, y)$, portanto:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{y} \rangle$$

Usando as expressões de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ do lema acima, vemos que:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{y} \rangle + b \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_1 \rangle \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{y} \rangle + \bar{b} \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{y} \rangle$$

é um número real (é uma soma da forma $A + \bar{A} + B + \bar{B}$, com $A, B \in \mathbb{C}$). Visto que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ é real, segue que o produto triplo hermitiano $\langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ é real e assim, os três pontos $y, \mathbb{P}(\mathbf{v}_1), \mathbb{P}(\mathbf{v}_2)$ geram um 2-plano totalmente real contendo a geodésica σ (que tem pontos finais $\mathbb{P}(\mathbf{v}_1), \mathbb{P}(\mathbf{v}_2)$). □

Corolário 6.3.3. *Sejam v_1 e $v_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ dois pontos distintos. Para todo $k \geq 1$ a esfera espinhal com vértices v_1 e v_2 é a união de todas as \mathbb{R}^k -esferas contendo v_1 e v_2 .*

Definição . Seja \mathcal{B} um bisetor com espinha σ . Os \mathbb{R}^2 -planos contendo a espinha σ são chamados *meridianos* de \mathcal{B} . Analogamente as \mathbb{R}^2 esferas contendo os dois vértices do bisetor são os *meridianos* da esfera espinhal.

Observação . Seja $S\{v_1, v_2\}$ a esfera espinhal em $\mathcal{H} \cup \{\infty\}$ cujos vértices são os pontos v_1 e v_2 . Então todos os \mathbb{R} -círculos contidos em S passam pelos pontos v_1 e v_2 .

Exemplos

1. O PLANO HORIZONTAL

Seja \mathcal{B} o bissetor com vértices p_0 e $p_\infty \in \mathbb{H}_\mathbb{C}^2$ representados pelos vetores em $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\mathbf{p}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}'_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

NA BOLA \mathbb{B}^2

Os vértices são $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (0, -1)$, o pólo norte e o pólo sul. Este bissetor tem espinha complexa Σ e espinha σ dados respectivamente por:

$$\Sigma = \{0\} \times \mathbb{H}_\mathbb{C}^1 \quad \text{e} \quad \sigma = \{0\} \times \mathbb{H}_\mathbb{R}^1$$

A projeção ortogonal sobre Σ , $\Pi_\Sigma : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma$, é dada por:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Pelo teorema de Mostow 6.2.1, este bissetor é dado por: $\mathcal{B} = \Pi_\Sigma^{-1}(\sigma)$, ou seja:

$$\mathcal{B} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; z_2 \in \mathbb{R}\}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < 1$, a fatia $\Pi_\Sigma^{-1}\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$ do bissetor \mathcal{B} é dada por:

$$S_t = \{(z, t) \in \mathbb{B}^2; |z|^2 < 1 - t^2\}$$

NO DOMÍNIO DE SIEGEL

Os vértices são $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \infty$. Este bissetor tem espinha complexa Σ e espinha σ dados respectivamente por:

$$\Sigma = \{(0, w_2) \in \mathfrak{h}^2; \text{Re}(w_2) > 0\} \quad \text{e} \quad \sigma = \{(0, t); t \in \mathbb{R}_+\}$$

A projeção ortogonal sobre Σ , $\Pi_\Sigma : \mathfrak{h}^2 \rightarrow \Sigma$ é:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema de Mostow, este bissetor é dado por $\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma)$ e assim:

$$\mathcal{B} = \{(w_1, w_2) \in \mathfrak{h}^2; w_2 \in \mathbb{R}_+\}$$

Para todo $u \in \mathbb{R}_+$, a fatia $\Pi_{\Sigma}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}\right)$ é dada por:

$$S_u = \{(w, u) \in \mathfrak{h}^2; 2u - \langle\langle w, w \rangle\rangle > 0\}$$

EM COORDENADAS HOROESFÉRICAS

Agora vejamos a esfera espinhal correspondente $S = \partial\mathcal{B} \subset \partial\mathfrak{h}^2 = \mathcal{H}$ em coordenadas horoesféricas (ζ, v) . Observe que os vértices deste bissetor, em coordenadas horoesféricas são a origem e o ponto ideal:

$$v_1 = (0, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = \infty$$

E a esfera espinhal é:

$$\partial\mathcal{B} = \{(w_1, w_2) \in \mathfrak{h}^2; w_2 \in \mathbb{R}_+, 2w_2 - |w_1|^2 = 0\}$$

Passando para coordenadas horoesféricas temos:

$$S = \{(\zeta, v) \in \mathcal{H}; v = 0\} \simeq \mathbb{C}$$

Para cada $u > 0$, a fatia

$$S_u = \{(w_1, w_2) \in \mathfrak{h}^2; \langle w_1, w_1 \rangle < 2u\}$$

se intersecta com o bordo em

$$\partial S_u = \{(w, u) \in \mathfrak{h}^2; \langle w_1, w_1 \rangle = 2u\}$$

e em coordenadas horoesféricas temos uma esfera centrada na origem:

$$\partial S; \{(\zeta, 0) \in \mathcal{H}; \langle\langle \zeta, \zeta \rangle\rangle = 2u\}$$

Os meridianos em S são subespaços totalmente reais de \mathbb{C} . As fatias são as circunferências centradas na origem contidas no plano \mathbb{C} e os meridianos são as retas euclidianas passando pela origem contida em \mathbb{C} .

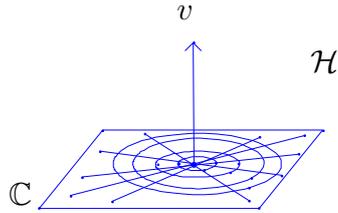


Figura 6.1: Fatias e Meridianos do plano horizontal

Observação. Este bissetor é invariante pelo grupo $U(1)$ das rotações de Heisenberg ao redor da origem e pelo grupo das dilatações de Heisenberg ao redor da origem. Observe que a esfera espinhal deste bissetor coincide com o *plano de contato* da origem $(0, 0) \in \mathcal{H}$, que é um de seus vértices.

Como o grupo $PU(2, 1)$ age duplamente transitivamente em vetores nulos e como um bissetor está definido por dois vetores nulos, vemos que $PU(2, 1)$ age transitivamente nos bissetores de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Deste modo, segue que todos os bissetores tendo ∞ como um vértice podem ser obtidos deste plano horizontal através de uma aplicação de similaridade. Porém, como o grupo das dilatações de Heisenberg e o grupo das rotações de Heisenberg ao redor da origem preservam \mathcal{B} , vemos que todos os bissetores tendo ∞ com um vértice pode ser obtido do plano horizontal \mathcal{B} via translação de Heisenberg $T_{(\zeta, v)}$. Como essas translações levam um plano de contato num plano de contato, vemos que o bissetor com vértice ∞ e um ponto $(\zeta_0, v_0) \in \mathcal{H}$ define uma esfera espinhal, que no espaço de Heisenberg coincide com o *plano de contato* em (ζ_0, v_0) :

$$E_{(\zeta_0, v_0)} = \{(\zeta, v) \in \mathcal{H}; v = v_0 - 2Im \langle \zeta, \zeta_0 \rangle\}$$

Exemplo

Iremos determinar, em coordenadas horoesféricas, a equação do bissetor com

vértices p_∞ e $(\zeta_0, v_0) \in \mathcal{H}$.

Seja \mathcal{B} o bissetor de vértices p_∞ e (ζ_0, v_0) . Se $T_{(-\zeta_0, -v_0)}$ é a translação de Heisenberg por $(-\zeta_0, -v_0)$ então

$$(\zeta, v, u) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow T_{(-\zeta_0, -v_0)} \in \mathcal{B}\{q_0, q_\infty\}$$

onde $\mathcal{B}\{q_0, q_\infty\}$ é o bissetor de vértices p_∞ e $(0, 0) \in \mathcal{H}$.

Logo,

$$(\zeta, v, u) \in \mathcal{B}\{q_0, q_\infty\} \Leftrightarrow (-\zeta_0 + \zeta, -v_0 + v + 2\text{Im}(-\zeta_0\bar{\zeta}), u) \in \mathcal{B}\{q_0, q_\infty\}$$

Ou seja, a equação do bissetor é dada por:

$$-v_0 + v + 2\text{Im}(-\zeta_0\bar{\zeta}) = 0$$

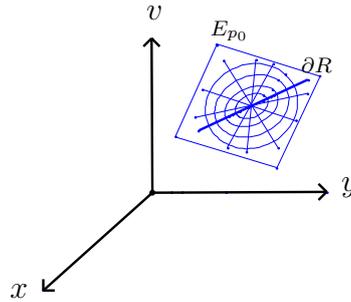


Figura 6.2: Decomposição em fatias e meridianos no plano $E_{(\zeta_0, v_0)}$

2. A ESFERA ESPINHAL UNITÁRIA

Seja \mathcal{B}_0 o bissetor com vértices $v_1 = (0, 1)$ e $v_2 = (0, -1)$ no espaço de Heisenberg \mathcal{H} .

NA BOLA \mathbb{B}^2

No modelo da bola tais vértices são:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix}$$

de modo que a espinha complexa Σ e a espinha σ são respectivamente:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0\} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \{(0, z_2) \in \mathbb{B}^2; |z_2| < 1\} \\ \sigma &= \{0\} \times i \cdot \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 = \{(0, it) \in \mathbb{B}^2; |t| < 1, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ou seja, a espinha é:

$$\sigma = \{(0, it) \in \mathbb{B}^2; -1 < t < 1\}$$

A projeção ortogonal sobre Σ é dada por $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma$:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Portanto, no modelo da bola esse bissetor é:

$$\mathcal{B} = \{(z, it) \in \mathbb{B}^2; |z|^2 < 1 - t^2\}$$

NO DOMÍNIO DE SIEGEL

Agora, aplicando a transformação de Cayley, iremos ver esse bissetor no domínio de Siegel:

$$w_1 = \frac{z}{1+it} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{1-i}{2} \frac{1-it}{1+it}$$

w_2 é um número complexo de norma $\frac{1}{2}$ e assim podemos escrevê-lo na forma $w_2 = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. Como estamos no domínio de Siegel $Re(w_2) > 0$. Logo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Contudo, pela equação que define o domínio de Siegel, devemos ter:

$$2Re(w_2) - \langle w_1, w_1 \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta - |w_1|^2 > 0$$

Portanto o bissetor \mathcal{B} em \mathfrak{h}^2 com vértices $(0, 1)$ e $(0, -1)$ em \mathcal{H} é dado por:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ w, \frac{e^{i\theta}}{2} \in \mathfrak{h}^2; |w|^2 < \cos \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Agora vejamos a esfera espinhal desse bissetor $\partial\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ em coordenadas horoesféricas:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ w, \frac{e^{i\theta}}{2} \in \mathfrak{h}^2; |w|^2 < \cos \theta, -\frac{\pi}{2} = \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

EM COORDENADAS HOROESFÉRICAS

Utilizando o domínio de Siegel, passamos para coordenadas horoesféricas em \mathcal{H} :

$$\zeta = w_1 \quad \text{e} \quad v = -\sin \theta$$

Assim temos:

$$|\zeta|^2 = \cos \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - v^2}$$

A esfera espinhal é então a *esfera de Heisenberg*:

$$\partial\mathcal{B}_0 = \{(\zeta, v) \in \mathcal{H}; |\zeta|^4 + v^2 = 1\} \subset \mathcal{H}$$

Essa esfera espinhal menos os dois pontos do vértice é folheada de duas maneiras distintas:

- Por fatias que são circunferências ortogonais ao eixo vertical \mathbb{V} .
- \mathbb{R} -círculos passando pelos vértices.

Podemos achar a equação da esfera espinhal de outro modo, utilizando as coordenadas horoesféricas. Vemos que o bissetor \mathcal{B} com vértices v_1 e v_2 é dado também por:

$$\mathcal{B} = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; \operatorname{Re}(z_2) = 0\}$$

Agora seja dado um ponto $(\zeta, v) \in \mathcal{H}$ qualquer. Como este ponto representa o vetor $(z_1, z_2) \in \partial\mathbb{B}^2$, dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2-iv} \\ \frac{1-|\zeta|^2+iv}{1+|\zeta|^2-iv} \end{bmatrix}$$

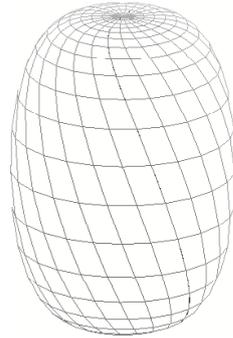


Figura 6.3: A Esfera de Heisenberg

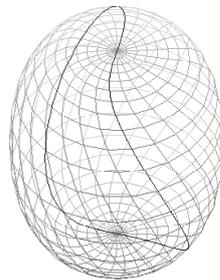


Figura 6.4: Fatias da Esfera de Heisenberg

temos que (ζ, v) é um ponto da esfera espinhal $S = \partial\mathcal{B}$ se, e somente se,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 - |\zeta|^2 + iv}{1 + |\zeta|^2 - iv} \right) = 0$$

Porém, podemos verificar que esta equação é equivalente a equação da esfera unitária de Heisenberg:

$$|\zeta|^4 + v^2 = 1$$

6.4 Automorfismos de Bissetores

6.4.1 Inversões em fatias

Teorema 6.4.1. *Seja $S \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um hiperplano complexo e seja i_S a inversão em S .*

1. *Sejam $u_1, u_2 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então S é uma fatia do bissetor \mathcal{B} tendo vértices u_1 e u_2 se, e somente se, i_S permuta u_1 e u_2 .*
2. *Sejam z_1 e $z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então S é uma fatia do bissetor $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$ contendo o ponto médio $\mu = \text{mid}(z_1, z_2)$ se, e somente se, i_S permuta z_1 e z_2 .*

Demonstração

1. Sejam respectivamente σ, Σ a espinha e a espinha complexa do bissetor \mathcal{B} com vértices u_1 e u_2 . Denotamos por $\Pi : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \Sigma$ projeção ortogonal sobre Σ .

Agora suponhamos que S seja uma fatia do bissetor \mathcal{B} . Logo S intersecta Σ ortogonalmente num único ponto $\Pi(S) = x \in \sigma$. Visto que $S \perp \Sigma$ segue que i_S deixa Σ invariante e fixa $x \in \Sigma$. Vendo Σ como o disco de Poincaré concluímos que $i_S|_{\Sigma}$ age como uma inversão em x e assim mantém invariante todas as geodésicas passando por x , permutando seus pontos extremos. Como $\sigma \subset \Sigma$, concluímos que i_S deixa σ invariante e permuta os pontos u_1, u_2 .

Suponhamos agora que a inversão i_S permuta u_1 e u_2 . Como σ é a única geodésica ligando u_1 e u_2 , segue que i_S deixa σ invariante e assim a restrição de i_S a σ é reflexão em algum ponto $x \in \sigma$. Daí $x \in S$ pois i_S fixa x .

Agora vamos olhar para $T_x\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e para a isometria $di_S(x) : T_x\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow T_x\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Como temos $i_S(s) = s$ se $s \in S$, então $di_S(x)$ se restringe à identidade em $T_xS \subset T_x\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Visto que i_S é uma reflexão em x quando restrita à σ , segue que di_S se restringe à $-Id$ em $T_x\sigma \subset T_x\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Como $di_S(x)$ é uma isometria, segue que estes subespaços T_xS e $T_x\sigma$ são ortogonais. Portanto S e σ se encontram ortogonalmente em x .

Desse fato segue imediatamente que $S = \Pi_{\Sigma}^{-1}(x)$ é uma fatia de \mathcal{B} .

2. Suponhamos que i_S permuta z_1 e z_2 . Denotemos por $\Pi_S : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow S$ a projeção ortogonal sobre S .

Afirmção: $\mu = \Pi_S(z_1) = \Pi_S(z_2)$

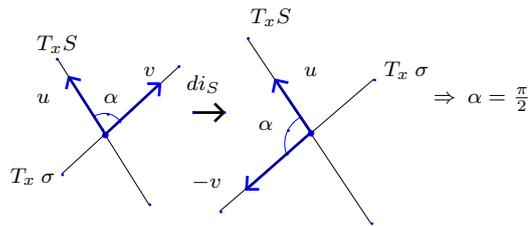


Figura 6.5: Ação da isometria di_S

De fato, seja γ a geodésica de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ passando por z_1, z_2 . Como i_S permuta z_1 e z_2 , segue que i_S deixa invariante γ e fixa μ , pois:

$$i_S(\mu) = \text{mid}(i_S(z_1), i_S(z_2)) = \text{mid}(z_1, z_2) = \mu$$

o que implica $\mu \in S$. Portanto a diferencial $di_S(\mu)$ restrita à $T_{\mu}\gamma$ é igual a $-Id$ e restrita à $T_{\mu}S$ é igual a identidade. Daí segue que γ e S se intersectam ortogonalmente em μ . Isto significa que $\gamma = \Pi_S^{-1}(\mu)$. E em particular, temos que $\mu = \Pi_S(z_1) = \Pi_S(z_2)$.

◇

Iremos demonstrar agora que S é uma fatia de \mathcal{B} . Para cada $s \in S$ temos

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{\rho(z_1, s)}{2}\right) &= \cosh^2\left(\frac{\rho(z_1, \mu)}{2}\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{\rho(\mu, s)}{2}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho(z_2, \mu)}{2}\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{\rho(\mu, s)}{2}\right) \\ &= \cosh^2\left(\frac{\rho(z_2, s)}{2}\right) \end{aligned}$$

Concluimos que $\rho(z_1, s) = \rho(z_2, s)$. Ou seja, $s \in \mathcal{B}$ o que implica $S \subset \mathcal{B}$. Como vimos, as subvariedades holomorfas maximais de um bissetor são somente suas fatias. Segue que um hiperplano complexo contido num bissetor deve ser uma fatia. Logo S é uma fatia de \mathcal{B} .

Agora Suponhamos que S é uma fatia de \mathcal{B} contendo o ponto médio μ . Como S intersecta a espinha complexa Σ ortogonalmente num único ponto segue que i_S deixa Σ invariante e fixa $\mu \in \Sigma$. Assim, qualquer geodésica em Σ passando por μ é invariante pela ação de i_S . Logo σ é invariante por i_S . Concluimos finalmente que i_S deve permutar z_1 e z_2 pois eses dois pontos são equidistantes de μ . □

6.4.2 Inversões em meridianos

Teorema 6.4.2. *Sejam $P \subset \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e i_P a inversão em P .*

1. *Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então P é um meridiano do bissetor $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$ se, e somente se, i_P permuta z_1 e z_2 .*
2. *Sejam u_1 e $u_2 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então P é um meridiano do bissetor cujos vértices são u_1 e u_2 se, e somente se, i_P fixa os pontos u_1 e u_2 .*

Demonstração

1. Denotamos respectivamente por σ e Σ a espinha e a espinha complexa do bissetor \mathcal{B} .

Suponha que i_P permuta z_1 e z_2 . Segue que $i_P(\Sigma) = \Sigma$ pois i_P leva subespaço totalmente complexo em subespaço totalmente complexo. Mais ainda, i_P age em Σ como uma reflexão em σ . Em particular, $i_P(s) = s$ se $s \in \sigma$. Assim, $\sigma \subset P$ e portanto P é um meridiano de \mathcal{B} como o teorema 6.2.1.

Suponhamos agora que P é um meridiano do bissetor $\mathcal{B} = \mathcal{B}(z_1, z_2)$. Temos que $P \cap \Sigma = \sigma$. Segue que P intersecta Σ ortogonalmente em σ e que i_P restrito a Σ é uma reflexão em σ . Logo i_P permuta z_1 e z_2 . □

Agora provaremos o seguinte lema que utilizaremos mais adiante na demonstração da Configuração de Cartan.

Lema 6.4.3. *Seja S uma esfera espinhal e C uma fatia de S . Se $i = i_C$ denota a inversão em C , então i deixa invariante todos os meridianos de S .*

Demonstração

Sejam p, q vértices de S e R um meridiano qualquer de S . Temos que R é folheado por \mathbb{R} -círculos da seguinte forma: dados dois pontos quaisquer $z_1, z_2 \in R \cap S$, o único \mathbb{R} -círculo passando pelos quatro pontos p, q, z_1, z_2 está em R .

Como i permuta p e q e fixa todos os pontos de S (em particular z_1, z_2), vemos que $i(R)$ é um subespaço totalmente real de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ folheado pelos \mathbb{R} -círculos passando pelos pontos p, q, z_1, z_2 . Por unicidade, temos $i(R) = R$. □

6.5 Interseção de bissetores

Dizemos que dois bissetores são *coespinhais* quando eles possuem a mesma espinha complexa.

Suponhamos que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sejam bissetores distintos no modelo da bola com espinhas σ_1 e σ_2 nas quais estão numa mesma linha complexa Σ . Seja $\Pi_{\Sigma} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma$ a projeção ortogonal sobre Σ . Desse modo:

$$\mathcal{B}_i = \Pi_{\Sigma}^{-1}(\sigma_i)$$

Temos três caso possíveis:

1. $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{p\} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Nesse caso $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \Pi_{\Sigma}^{-1}(p)$ é uma fatia comum desses dois bissetores, isto é, uma hipersuperfície complexa de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Como demonstraremos abaixo, o ângulo de interseção ao longo de $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é constante.
2. $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{v\} \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Neste caso as fatias de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são ultraparalelas e as esferas espinhais $\partial\mathcal{B}_1$ e $\partial\mathcal{B}_2$ possuem o mesmo vértice v .
3. σ_1 e σ_2 são ultraparalelos. Portanto $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Teorema 6.5.1. *Suponhamos que σ_1 e σ_2 são geodésicas numa linha complexa Σ que se intersectam num ponto p formando um ângulo θ . Então para cada $u \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \Pi_{\Sigma}^{-1}(p)$ os bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 se intersectam em u num ângulo θ .*

Demonstração

Seja ν o fibrado normal à $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Logo, para todo $u \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, $\dim_{\mathbb{R}} \nu_u = 2$. Pela própria definição de projeção ortogonal vemos que a imagem de ν pela diferencial $d\Pi_{\Sigma}$ deve estar em $T_p\Sigma$ pois Σ encontra \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 ortogonalmente. Daí temos que $d\Pi_{\Sigma} : \nu_u \rightarrow T_p\Sigma$ é uma isometria.

Como σ_1 é ortogonal a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ e σ_2 é ortogonal a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ vemos que os vetores normais em u à \mathcal{B}_1 e à \mathcal{B}_2 devem formar um ângulo θ . □

6.6 Configuração de Cartan

Um outro tipo de interseção de bissetores ocorre quando eles possuem um meridiano em comum. Para estudar esses bissetores precisamos primeiramente estudar as aplicações no grupo de Heisenberg \mathcal{H} que preservam subespaços totalmente reais e totalmente geodésicos. Mas antes, iremos introduzir algumas notações.

Notações

- Se \mathcal{X} é um conjunto e $k > 1$, denotamos por $\mathcal{C}_k(\mathcal{X})$ o conjunto de todas as k -uplas $x = (x_1, \dots, x_k)$ de pontos *distintos* de \mathcal{X} .
- Se $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ denotamos por $\mathbf{chain}\{x_1, x_2\}$ a única cadeia de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ passando por x_1 e x_2 .

Agora vamos definir uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$. Dizemos que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Chain}$ se, e somente se, os pontos x_1, x_2, x_3 pertencem a uma mesma cadeia. Equivalentemente, isto ocorre se, e somente se,

$$\mathbf{chain}\{x_1, x_2\} = \mathbf{chain}\{x_2, x_3\}$$

O que implica

$$\mathbf{chain}\{x_1, x_2\} = \mathbf{chain}\{x_2, x_3\} = \mathbf{chain}\{x_3, x_1\}$$

- Definimos também uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_k(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$. Dizemos que $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbf{Real}$ se, e somente se, x_1, x_2, \dots, x_k pertencem a um subespaço totalmente real e totalmente geodésico de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.
- Finalmente, dados dois pontos distintos $v_1, v_2 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, denotamos a esfera espinhal cujos vértices são v_1 e v_2 por $S\{v_1, v_2\}$.

Para estudarmos bissetores tendo um meridiano em comum precisamos entender quais são as aplicações de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que preservam \mathbb{R} -círculos. Para caracterizarmos tais aplicação precisamos dos dois seguintes teoremas. O primeiro teorema abaixo demonstraremos na próxima seção.

Teorema 6.6.1. *Seja $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ três pontos distintos. Então $(x_1, x_2, x_3) \notin \mathbf{Chain}$ se, e somente se, existe um ponto $x'_1 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, $x'_1 \neq x_1, x_2, x_3$, tal que x_1, x'_1, x_2 e x_1, x'_1, x_3 pertencem à \mathbb{R} -círculos.*

Teorema 6.6.2. *Sejam x_1, x_2, x_3 três pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Chain}$ se, e somente se, existem quatro pontos y_1, y_2, y_3, y_4 em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ contidos num \mathbb{R} -círculo, que não contém nenhum dos pontos x_1, x_2, x_3 , tais que as seis triplas de pontos abaixo estão contidas em \mathbb{R} -círculos.*

$$\begin{array}{ll} \{y_1, y_2, x_1\} & \{y_3, y_4, x_1\} \\ \{y_1, y_2, x_2\} & \{y_3, y_4, x_2\} \\ \{y_1, y_2, x_3\} & \{y_3, y_4, x_3\} \end{array}$$

O teorema 6.6.2 é chamado *Configuração de Cartan* para 1 cadeia e 7 \mathbb{R} -círculos. Tal teorema demonstraremos mais adiante, daqui a duas seções. Observe que esses dois teoremas caracterizam completamente uma das relações de equivalência **Chain** ou **Real** em termos da outra, como provaremos no seguinte lema. Mas enunciaremos antes um teorema necessário para provar o lema.

Como consequência imediata da caracterização da relação de equivalência **Real** em termos de equivalência **Chain**, as aplicações de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que preservam \mathbb{R} -círculos devem ser automorfismos pelo seguinte teorema.

Teorema 6.6.3. *Seja $f : \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ uma aplicação injetiva, não necessariamente contínua. Se para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$,*

$$x \in \mathbf{Chain} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Chain}$$

então f é um automorfismo de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ (provavelmente anti-holomorfo).

Lema 6.6.4. *Seja $f : \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ uma aplicação injetiva, não necessariamente contínua. Então f preserva a relação de \mathbb{R} -círculos se, e somente se, f preserva a relação de cadeias.*

Demonstração

Se f preserva a relação de cadeias, então f deve ser um automorfismo. Portanto f deve preservar a relação de \mathbb{R} -círculos

Agora suponhamos que f preserva a relação de \mathbb{R} -círculos, ou seja, para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$:

$$x \in \mathbf{Real} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Real}$$

Vamos mostrar que f preserva a relação de cadeias, ou seja, para todo $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$,

$$x \in \mathbf{Chain} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Chain}$$

Suponhamos que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Chain}$. Pelo teorema 6.6.2 acima existem quatro pontos $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ satisfazendo a configuração de Cartan. Como f preserva a relação de \mathbb{R} -círculos, vemos que $f(y_1), f(y_2), f(y_3), f(y_4)$ também satisfaz a configuração de Cartan, o que implica, pelo mesmo teorema 6.6.2, que $f(x) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3)) \in \mathbf{Chain}$.

Agora suponhamos que $f(x) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3)) \in \mathbf{Chain}$. Por absurdo, suponhamos que $x \notin \mathbf{Chain}$. Pelo Teorema 6.6.1, existe um ponto $x'_1 \neq x_1, x_2, x_3$ tal que x_1, x'_1, x_2 e x_1, x'_1, x_3 pertencem a \mathbb{R} -círculos. Como f preserva \mathbb{R} -círculos, segue que $f(x_1), f(x'_1), f(x_2)$ e $f(x_1), f(x'_1), f(x_3)$ pertencem a \mathbb{R} -círculos e assim, pelo teorema 6.6.1 novamente, segue que $f(x) = (f(x_1), f(x_2), f(x_3)) \notin \mathbf{Chain}$, o que é um absurdo. □

Triplas não pertencentes a uma Cadeia

Nessa seção demonstraremos o Teorema 6.6.1 que enunciamos na seção anterior. A próxima seção será dedicada a demonstração do Teorema 6.6.2 da configuração de Cartan, que necessita da caracterização de bissetores comeridionais. Observamos que o Teorema 6.6.1 é equivalente ao apresentado abaixo, pela decomposição meridional.

Teorema 6.6.5. *Se $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(x_1, x_2, x_3) \notin \mathbf{Chain}$.
2. *Existe uma esfera espinhal com vértice x_1 contendo x_2 e x_3 .*

3. Existe uma esfera espinhal com vértice x_2 contendo x_3 e x_1 .

4. Existe uma esfera espinhal com vértice x_3 contendo x_1 e x_2 .

Demonstração

É suficiente mostrar a equivalência (1) \Leftrightarrow (2), pois as outras seguem por simetria.

(2) \Rightarrow (1). Como o grupo de isometrias age duplamente transitivamente nos pontos da fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, podemos escolher coordenadas no modelo de Heisenberg \mathcal{H} de modo que $x_1 = p_{\infty}$ e $x_2 = (0, 0)$. Neste caso, a esfera espinhal com vértice x_1, x_2 é o plano de contato $E_{(0,0)} = \mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Observe que um tal plano de contato é transversal às cadeias verticais e encontram cada cadeia vertical em exatamente um ponto. Assim, se $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Chain}$, então x_2 e x_3 devem estar numa cadeia vertical, que encontra E_u num único ponto. Portanto $x_2 = x_3$ o que é uma contradição.

(1) \Rightarrow (2). Seja Σ a cadeia que passa por x_2, x_3 . Como (x_1, x_2, x_3) não estão numa cadeia por hipótese, então $x_1 \notin \Sigma$. Então $i_{\Sigma}(x_1) \neq x_1$.

Assim, Σ é uma fatia de $S\{x_1, i_{\Sigma}(x_1)\}$. Portanto $x_1, x_2, x_3 \in S\{x_1, i_{\Sigma}(x_1)\}$. □

6.7 Classificação de Bissetores Comeridionais

Dizemos que dois bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são **comeridionais** se eles possuem um meridiano em comum. Isto é, se as suas espinhas estão num mesmo subespaço totalmente real e totalmente geodésico de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Em cada decomposição meridional, vemos que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são comeridionais se, e somente se, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ contém um \mathbb{R}^2 -plano.

Teorema 6.7.1. *Suponhamos que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são dois bissetores distintos em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tendo um meridiano P em comum (P é um \mathbb{R}^2 -plano). Sejam Σ_i e $\sigma_i \subset P$ as respectivas espinhas complexas e as espinhas de \mathcal{B}_i . Então exatamente uma das afirmações abaixo ocorre:*

1. Se $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é um ponto de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, então $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ e $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P$.
2. Se $\sigma_1 \cap \sigma_2$ é um ponto de $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, então $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ e $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P$.
3. Se $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Seja σ a única geodésica de P ortogonal à σ_1 e à σ_2 e seja Σ a geodésica complexa contendo σ . Então $\Sigma \perp \Sigma_i$ em $\sigma \cap \sigma_i$ e assim, pela

decomposição em fatias de Mostow, vemos que $\Sigma \subset \mathcal{B}_i$ é uma fatia comum de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 . De fato, $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P \cup \Sigma$, onde $P \cap \Sigma = \sigma$.

Demonstração

Inicialmente, vamos escolher coordenadas adequadas de modo que $P = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}^2$, no modelo da bola. A espinha do bisetor \mathcal{B}_1 é $\sigma_1 = \{0\} \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}}^1 = \{(0, t); |t| < 1\}$. Desse modo, $\Sigma_1 = \{0\} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 = \{0\} \times \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^1$ é a espinha complexa de \mathcal{B} e assim, se $\Pi_V : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma_1$ denota a projeção vertical, dada por $\Pi_V(z_1, z_2) = (0, z_2)$, temos que $\mathcal{B}_1 = \Pi_V^{-1}(\sigma_1)$. Portanto

$$\mathcal{B}_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; \text{Im}(z_2) = 0\}$$

Agora iremos provar os três casos.

(1) Suponhamos que σ_1 e σ_2 se encontram em algum ponto no interior de \mathbb{B}^2 . Podemos escolher coordenadas adequadas para σ_2 de modo que seus vértices sejam os seguintes pontos de ∂P :

$$v_1 = (\sin \theta, \cos \theta) \quad \text{e} \quad v_2 = (-\sin \theta, -\cos \theta)$$

O vetor polar \mathbf{P} da linha complexa que contém \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 (estes são os levantamentos de v_1 e v_2 em $\mathbb{C}^{2,1}$) é:

$$\mathbf{P} = \mathbf{v}_1 \boxtimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar o vetor polar como sendo:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como vimos anteriormente (veja a equação (3.1)), a projeção sobre a espinha complexa Σ_2 de \mathcal{B}_2 é:

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ \Pi(z) &= \mathbf{Z} - \frac{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{P} \rangle}{\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle} \end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima do vetor polar \mathbf{P} , temos:

$$\begin{aligned} \Pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 - z_1 \cos^2 \theta + z_2 \sin \theta \cos \theta \\ z_2 + z_1 \sin \theta \cos \theta - z_2 \sin^2 \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 \sin^2 \theta + z_2 \sin \theta \cos \theta \\ z_2 \cos^2 \theta + z_1 \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Projetando no modelo da bola:

$$\Pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta (z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta) \\ \cos \theta (z_2 \cos \theta + z_1 \sin \theta) \end{pmatrix}$$

Sabemos que um ponto $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{B}_2$ se, e somente se, $\Pi(z) \in \sigma$. Contudo, um ponto $w = (w_1, w_2) \in \sigma$ se, e somente se, $w = t(w_1, w_2)$, $t \in \mathbb{R}$. Mas, em nosso caso, temos

$$\Pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta) \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

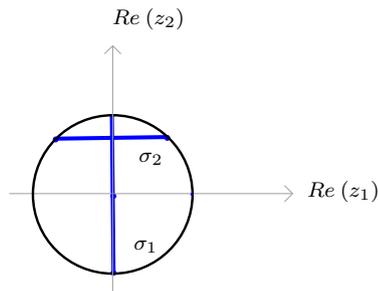


Figura 6.6: Caso 1 do teorema 6.7.1

Logo,

$$\Pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \sigma \quad \Leftrightarrow \quad (z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta) \in \mathbb{R}$$

Portanto, temos o bissetor \mathcal{B}_2 :

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}^2; \operatorname{Im}(z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta) = 0 \right\}$$

Lembramos que o bissetor \mathcal{B}_1 é dado por:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}^2; \operatorname{Im}(z_2) = 0 \right\}$$

Assim, um ponto $z = (z_1, z_2) \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z_2) = 0 \\ \operatorname{Im}(z_1 \sin \theta + z_2 \cos \theta) = 0 \end{cases}$$

Vemos que $\operatorname{Im}(z_1) = 0$, pois $\sin \theta \neq 0$. Portanto $z = (z_1, z_2) \in P$.

(2) Suponhamos agora que $\sigma_1 \cap \sigma_2$ seja um ponto em $\partial \mathbb{B}^2$. Assim, podemos escolher coordenadas para σ_1 de modo que seus vértices em ∂P sejam os pontos:

$$v_1 = (0, -1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1, 0)$$

Iremos determinar qual é o vetor polar \mathbf{P} a Σ_2 , para calcularmos a projeção em Σ_2 . O vetor polar é dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{v}_1 \boxtimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Agora podemos calcular a projeção $\Pi_{\Sigma_2} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma_2$ sobre Σ_2 , que é dada por:

$$\Pi_{\Sigma_2}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} - \frac{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{P} \rangle}{\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle} \mathbf{P}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\Sigma_2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{z_1 - z_2 - 1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_2 + 1 \\ z_1 - 1 \\ -z_1 + z_2 + 2 \end{pmatrix} \\
&\simeq \begin{pmatrix} \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 1} \\ \frac{z_1 - 1}{-z_1 + z_2 + 2} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Assim, se $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$, então temos (veja a equação (3.1)):

$$\Pi_{\Sigma_2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 1} \\ \frac{z_1 - 1}{-z_1 + z_2 + 2} \end{pmatrix}$$

Iremos identificar como é a geodésica Σ_2 que contém a espinha σ_2 de \mathcal{B}_2 . Temos que Σ_2 é uma linha complexa que passa pelo ponto $(0, -1)$ e tem direção do vetor $(1, 1)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \{z(1, 1) + (0, -1); z \in \mathbb{C}\} \cap \mathbb{B}^2 \\
&= \{(z, z - 1); z \in \mathbb{C}\} \cap \mathbb{B}^2 \\
&= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; z_2 = z_1 - 1\}
\end{aligned}$$

Portanto, a geodésica real σ_2 é:

$$\sigma_2 = \{(t, t - 1); |t| < 1\}$$

Precisamos da projeção vertical $\Pi_{\Sigma_2} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma_2$ sobre Σ_2 para obtermos o bissetor

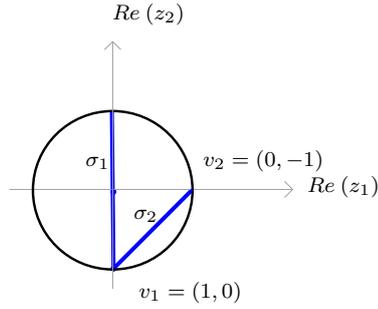


Figura 6.7: Caso 2 do teorema 6.7.1

\mathcal{B}_2 e também de σ_2 , pois $\mathcal{B}_2 = \Pi_{\Sigma_2}^{-1}(\sigma_2)$. Então obtemos o bissetor:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; \left(\begin{array}{c} \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 1} \\ \frac{z_1 - 1}{-z_1 + z_2 + 2} \end{array} \right) \in \sigma_2 \right\} \\ &= \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; \operatorname{Im} \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 2} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Fazendo $w_1 = \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 1}$ e $w_2 = \frac{z_1 - 1}{-z_1 + z_2 + 2}$, vemos que $w_2 = w_1 - 1$. Então para um ponto (z_1, z_2) pertencer ao bissetor \mathcal{B}_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im}(w_1) = \frac{z_2 + 1}{-z_1 + z_2 + 2} \cdot \frac{-\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2}{-\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2} \\ &= \frac{1}{|-z_1 + z_2 + 2|^2} \cdot (-z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + 2z_2 - \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2) \end{aligned}$$

Ou seja, um ponto $(z_1, z_2) \in \mathcal{B}_2$ se, e somente se,

$$\operatorname{Im}(z_2 + 1)(-\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2) = 0$$

Portanto a interseção $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é constituída dos pontos $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ tais que:

$$\begin{cases} \operatorname{Im} z_2 = 0 \\ \operatorname{Im}(z_2 + 1)(-\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + 2) = 0 \end{cases}$$

Um par (z_1, z_2) resolve simultaneamente as duas equações se, e somente se, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$. Portanto $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P$.

(3) Suponhamos que σ_1 e σ_2 não se encontram em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ (isto é, em $\mathbb{B}^2 \cup \partial\mathbb{B}^2$). Podemos escolher coordenadas adequadas para σ_2 de modo que os vértices do bissetor \mathcal{B}_2 em ∂P sejam:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right), \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) \\ v_2 &= \left(\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right), -\operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

onde ρ é a distância hiperbólica entre σ_1 e σ_2 . Isto acontece porque a distância Euclideana R e a distância hiperbólica ρ entre dois pontos de \mathbb{B}^2 estão relacionadas por $R = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)$.

Iremos agora determinar o vetor polar \mathbf{P} a Σ_2 . Considere os levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$ de v_1 e v_2 :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ -\operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

O vetor polar \mathbf{P} é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{v}_1 \boxtimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ -\operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 0 \\ \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \cdot \operatorname{sech}\frac{\rho}{2} \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} \operatorname{cotanh}\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

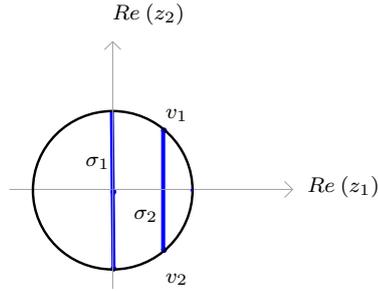


Figura 6.8: Caso 3 do teorema 6.7.1

Portanto, a projeção vertical sobre Σ_2 é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\Sigma_2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \left(z_1 \cotgh \left(\frac{\rho}{2} \right) - 1 \right) \begin{pmatrix} \cotgh \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_1 \cosh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) - \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) \cdot \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ 0 \\ z_1 \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) \cdot \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) - \sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -z_1 \sinh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ z_2 \\ -z_1 \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) + \cosh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right) \end{pmatrix} \\
&\simeq \begin{pmatrix} \frac{\sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) (-z_1 \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right))}{\cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) (-z_1 \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) + \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right))} \\ \frac{z_2}{-z_1 \sinh \left(\frac{\rho}{2} \right) \cosh \left(\frac{\rho}{2} \right) + \cosh^2 \left(\frac{\rho}{2} \right)} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tanh \left(\frac{\rho}{2} \right) \\ \frac{z_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\rho}{2} \right)}{1 - z_1 \tanh \left(\frac{\rho}{2} \right)} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A projeção $\Pi_{\Sigma_2} : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma_2$ sobre Σ_2 é então dada por:

$$\Pi_{\Sigma_2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \\ \frac{z_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}{1 - z_1 \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} \end{bmatrix}$$

A espinha σ_2 do bissetor \mathcal{B}_2 é:

$$\sigma_2 = \left\{ \left(\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right), t \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) \in \mathbb{B}^2; |t| < 1 \right\}$$

Assim, vemos que o bissetor \mathcal{B}_2 é dado por:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2; \operatorname{Im} \left(\frac{z_2 \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right)}{1 - z_1 \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} \right) = 0 \right\}$$

Logo, a interseção dos bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 é constituída dos pontos $(z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2$ tais que:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(z_1) = 0 \\ \operatorname{Im} \left(\frac{z_2 \operatorname{sech}\left(\frac{\rho}{2}\right)}{1 - z_1 \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} \right) = 0 \end{cases}$$

Porém,

$$\left(\frac{z_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\rho}{2}\right)}{1 - z_1 \tanh^2\left(\frac{\rho}{2}\right)} \right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z_2 \left(1 - \bar{z}_1 \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \right) = 0$$

Portanto, analisando esta equação, vemos que $(z_1, z_2) \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ se, e somente se, ou $z_2 = 0$ ou $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im} z_2 = 0$. Assim,

$$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P \bigcup_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \times \{0\}} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$$

Observamos que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \times \{0\}$ é a única geodésica real de P que encontram as espinhas σ_1 e σ_2 ortogonalmente e que $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\}$ é a geodésica complexa que a contém. Observamos que $\Sigma \perp \Sigma_1$ em $\sigma \cap \sigma_i$ e Σ é uma fatia comum de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 e também $P \cap \Sigma = \sigma$.

□

Corolário 6.7.2. *Sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 dois bissetores tais que as esferas espinhais $\partial\mathcal{B}_1$ e $\partial\mathcal{B}_2$ possuem propriamente um \mathbb{R} -círculo ∂P na sua interseção. Então \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bissetores comeridionais e suas espinhas σ_1 e σ_2 são ultraparalelas ($\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$). Neste caso existe uma fatia comum Σ à \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 tal que $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = P \cup \Sigma$*

Demonstração

Como vimos anteriormente, os únicos \mathbb{R} -círculos contidos numa esfera espinhal devem passar pelos seus vértices. Segue que ∂P deve ser um meridiano comum de $\partial\mathcal{B}_1$ e $\partial\mathcal{B}_2$. Visto que ∂P determina P , segue que P é um meridiano comum de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 . Como $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ contém propriamente P , pelo teorema anterior, segue que σ_1 e σ_2 são ultraparalelos e neste caso $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ é a união de P com uma fatia comum de \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 . □

Com a classificação de bissetores comeridionais feita, podemos provar o Teorema 6.6.2 que determina a configuração de Cartan.

Demonstração (do teorema 6.6.2).

Suponhamos que C seja uma cadeia contendo três pontos distintos x_1, x_2, x_3 e seja i_C a inversão em C . Seja $y_1 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ um ponto qualquer tal que $y_1 \notin C$ e seja $y_2 = i_C(y_1)$. Seja $\partial\mathcal{B}_1$ a esfera espinhal com vértices y_1, y_2 . Pelo teorema de inversão em fatias, temos que C é uma fatia de \mathcal{B}_1 .

Seja $\partial\mathcal{B}_1 \setminus (C \cup \{y_1, y_2\})$ e seja $y_4 = i_C(y_3)$. Seja $\partial\mathcal{B}_2$ a esfera espinhal com vértices y_3 e y_4 . Também temos que C é uma fatia de \mathcal{B}_2 . Seja ∂P o meridiano de \mathcal{B}_1 passando por y_3 . Temos que i_C deixa ∂P invariante e fixa C ponto a ponto. Isto implica que ∂P encontra C ortogonalmente e assim temos que $y_4 \in \partial P$. Assim todos os pontos y_1, y_2, y_3, y_4 pertencem ao \mathbb{R} -círculo ∂P . Mais ainda, pela decomposição meridional temos que:

$$\begin{array}{l} \{y_1, y_2, x_1\} \\ \{y_1, y_2, x_2\} \\ \{y_1, y_2, x_3\} \end{array} \quad \text{estão contidos, cada um, num meridiano de } \mathcal{B}_1$$

$$\begin{array}{l} \{y_3, y_4, x_1\} \\ \{y_3, y_4, x_2\} \\ \{y_3, y_4, x_3\} \end{array} \quad \text{estão contidos, cada um, num meridiano de } \mathcal{B}_2$$

Reciprocamente, suponhamos que é dada uma configuração de Cartan de uma cadeia e sete \mathbb{R} -círculos para os pontos

$$x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3, y_4$$

satisfazendo as relações do teorema. Sejam $\partial\mathcal{B}_1$ a esfera espinhal com vértices y_1, y_2 e $\partial\mathcal{B}_2$ a esfera espinhal com vértices y_3, y_4 . Seja ∂P o \mathbb{R} -círculo contendo os pontos y_1, y_2, y_3 e y_4 . Vemos que ∂P é um meridiano comum de $\partial\mathcal{B}_1$ e $\partial\mathcal{B}_2$ (pelo corolário 6.3.3). Similarmente, como cada x_i está contido num \mathbb{R} -círculo contendo y_1 e y_2 segue que cada $x_i \in \mathcal{B}_1$. Analogamente, temos que $x_i \in \mathcal{B}_2$. Assim,

$$\{x_1, x_2, x_3\} \subset \partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2$$

Por hipótese $\partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2$ contém propriamente o \mathbb{R} -círculo ∂P . Pelo corolário acima, temos que $\partial\mathcal{B}_1 \cap \partial\mathcal{B}_2 = \partial P \cup C$ onde C é uma cadeia comum a \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 . Como cada $x_i \notin \partial P$, vemos que

$$x_1, x_2, x_3 \in C$$

como queríamos demonstrar. □

6.8 Invariante de Cartan

Considere $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$. Para $i = 1, 2, 3$, escolha levantamentos $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^{2,1}$, ou seja, $x_i = \mathbb{P}(\mathbf{x}_i)$.

O seguinte produto triplo Hermitiano é negativo:

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \rangle$$

Cada \mathbf{x}_i é um vetor nulo. Assim nenhum dos produtos Hermitianos se anulam. O *invariante angular de Cartan* é definido por:

$$\mathbb{A}(x) = \arg(-\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle)$$

Observamos que o valor do argumento é independente da escolha de levantamentos e satisfaz:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Para verificar que o invariante de Cartan independe do levantamento, considere outro levantamento $\widehat{\mathbf{x}}_i$, isto é, $\mathbb{P}(\widehat{\mathbf{x}}_i) = x_i$. Temos que $\widehat{\mathbf{x}}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\}$. Então,

$$\langle \widehat{\mathbf{x}}_1, \widehat{\mathbf{x}}_2, \widehat{\mathbf{x}}_3 \rangle = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\lambda_3|^2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle$$

Mas, nesse caso como um produto triplo é múltiplo escalar do outro, temos:

$$\arg(-\langle \widehat{\mathbf{x}}_1, \widehat{\mathbf{x}}_2, \widehat{\mathbf{x}}_3 \rangle) = \arg(-\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle)$$

Tal invariante é o único para uma tripla de pontos.

Teorema 6.8.1. *Suponha que $x \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$. Então:*

$$x \in \mathbf{Real} \Leftrightarrow \mathbb{A}(x) = 0$$

Demonstração

Sejam $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}_3(\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ e \mathbf{x}_i o levantamento de x_i . Suponha que,

$$\mathbb{A}(x) = \arg(-\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle) = 0$$

Logo $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle \in \mathbb{R}$. Portanto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Real}$.

Por outro lado, se $x \in \mathbf{Real}$, então $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \in \mathbb{R}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Portanto $\mathbb{A}(x) = 0$. □

Agora temos o seguinte importante e útil corolário que facilitará a conta para obetermos uma esfera espinhal.

Corolário 6.8.2. *Sejam $x, y \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então a esfera espinhal com vértices x, y é igual ao conjunto:*

$$\{u \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2; \mathbb{A}(x, y, u) = 0\}$$

Demonstração

Seja σ a geodésica em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ com pontos finais x, y . Sabemos que a esfera espinhal $\partial\mathcal{B}$ com espinha σ é a união de todas as \mathbb{R} -esferas contendo x, y . Pelo teorema anterior, u está num \mathbb{R} -círculo contendo x, y se, e somente se, $\mathbb{A}(x, y, u) = 0$. Assim temos o resultado desejado. □

6.9 Pares de Esferas Espinhais

Para $i = 1, 2$, denotamos por \mathcal{B}_i o bissetor com espinha σ_i e espinha complexa Σ_i . Temos a projeção ortogonal sobre Σ_i , $\Pi_i : \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2} \rightarrow \overline{\Sigma_i}$. Considere a esfera espinhal $S_i = \partial\mathcal{B}_i$ com os vértices $q_i^{\pm} = \partial\sigma_i$. Os bissetores $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ (e respectivamente S_1, S_2) são:

1. Coequidistante se, e somente se, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$;
2. Covertical se, e somente se, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$;
3. Comeridional se, e somente se, eles possuem um meridiano em comum;
4. Coespinhal se, e somente se $\Sigma_1 = \Sigma_2$;
5. Cotranchal se, e somente se, eles possuem uma fatia em comum.

Lema 6.9.1. *Um par de esferas espinhais coequidistantes ou covértices nunca são cotranchal.*

Demonstração

Suponha por absurdo que as espinhas complexas Σ_1, Σ_2 são ortogonais à uma fatia comum Σ . Os três pontos de interseção ($\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma$, $\Sigma_2 \cap \Sigma$) estão num subespaço geodésico totalmente real formando um triângulo com dois ângulos retos, uma contradição. \square

Teorema 6.9.2. *Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dois bissetores em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ contendo x . Então ou \mathcal{B}_1 encontra \mathcal{B}_2 transversalmente em x (neste caso a fatia de \mathcal{B}_1 contendo x é transversal a fatia de \mathcal{B}_2 contendo x) ou existe uma fatia comum $S \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ que contém x .*

Demonstração

Sabemos que $T_x \mathcal{B}_1, T_x \mathcal{B}_2$ são hiperplanos reais em $T_x \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Temos que \mathcal{B}_1 intersecta \mathcal{B}_2 transversalmente em x ou $T_x \mathcal{B}_1 = T_x \mathcal{B}_2$. Suponha que \mathcal{B}_1 não é transversal a \mathcal{B}_2 em x . Seja S_i a fatia de \mathcal{B}_i contendo x . Como $T_x S_i$ é o subespaço maximal complexo de $T_x \mathcal{B}_i$, então S_1, S_2 possuem o mesmo espaço tangente em x , $T_x S_1 = T_x S_2$, como eles são totalmente geodésicos, $S_1 = S_2$ como desejado. \square

Corolário 6.9.3. *Dois bissetores coequidistantes ou covértices se intersectam transversalmente.*

Demonstração

Pelo teorema anterior, dois bissetores $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ que não se intersectam transversalmente possuem uma fatia S em comum. Desde que $S \perp \Sigma_i$, para $i = 1, 2$, segue que $\Sigma_1 \asymp \Sigma_2$, contradizendo que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sejam coequidistantes ou covértices. \square

6.10 Interseção de Bissetores

Exemplo de Bissetores com Interseção Desconexa

Um método geral de construir bissetores com interseção desconexa é a seguinte. Começamos com um par de bissetores \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 cuja interseção é a união de uma geodésica complexa e um \mathbb{R}^2 -plano. As esferas espinhais correspondentes $S_j = \partial\mathcal{B}_j$ intersectam uma cadeia C e um \mathbb{R} -círculo R tal que $C \cap R$ é um par de pontos distintos. Afirmamos que uma perturbação genérica neste par de bissetores tem interseção desconexa.

Escolhemos coordenadas para S_1 e S_2 tais que:

1. A esfera espinhal S_1 é o plano horizontal $v = 0$ com vértices $(0, 0)$ e ∞ ;
2. A fatia comum C é o círculo unitário $|\zeta| = 1, v = 0$;
3. O meridiano comum R é o eixo real $Im(\zeta) = v = 0$.

Como R é o meridiano de S_2 , então os vértices de S_2 estão em R . Logo, devem ser da forma $v_1 = (u_1, 0)$ e $v_2 = (u_2, 0)$ com $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$. Como C é uma fatia de \mathcal{B}_2 , então a inversão em C permuta os vértices de S_2 , portanto $u_1 u_2 = 1$. Para cada $u_1 \neq 0, \pm 1, \infty$, tomamos $u_2 = \frac{1}{u_1}$ para obtermos o par (S_1, S_2) . Seja $a = \frac{u_1 + u_2}{2}$. Agora determinaremos a equação de S_2 em coordenadas de Heisenberg $(\zeta, v) = (x + iy, v)$. Fazemos o cálculo utilizando o invariante de Cartan. Inicialmente fazemos os levantamentos de v_1, v_2 e $z = (\zeta, v)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ para $\mathbb{C}^{2,1}$. Temos

$$v_1 = (u_1, 0) \mapsto \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{1}{2}(1 - u_1^2) \\ \frac{1}{2}(1 + u_1^2) \end{pmatrix}, \quad v_2 = (u_2, 0) \mapsto \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(1 - u_2^2) \\ \frac{1}{2}(1 + u_2^2) \end{pmatrix}$$

E,

$$z = (\zeta, v) \mapsto \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \frac{1}{2}(1 - |\zeta|^2 + iv) \\ \frac{1}{2}(1 + |\zeta|^2 - iv) \end{pmatrix}$$

Agora, para calcularmos o invariante de Cartan, devemos calcular os produtos internos abaixo. Lembramos que utilizamos a forma hermitiana $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + z_3 \bar{w}_3$.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{z} \rangle = \frac{u_2^2 |\zeta|^2 + i v u_2^2 + 1 + 2 u_2 \bar{\zeta}}{2}$$

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{1 + 2 u_1 \zeta + u_1^2 |\zeta|^2 - i v u_1^2}{2}$$

Agora podemos calcular a equação da esfera espinhal S_2 . Então fazemos:

$$\text{Im}(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_1 \rangle) = 0$$

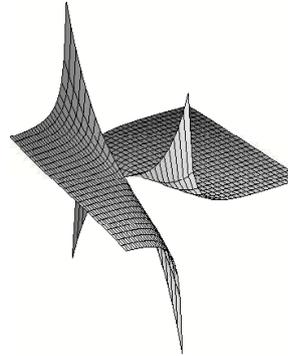


Figura 6.9: Superfície $v = f(x, y)$ com $a = 2$

Fazemos a conta e simplificamos. Obtemos a esfera espinhal S_2 :

$$v = f(x, y) = \frac{-y(x^2 + y^2 - 1)}{x - a} \tag{6.1}$$

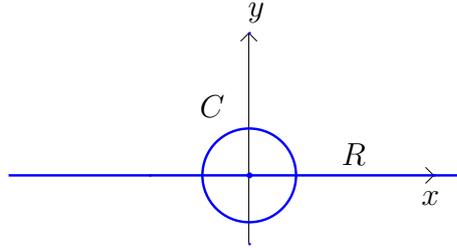


Figura 6.10: $S_1 \cap S_2$

Portanto S_2 é o gráfico da superfície $v = f(x, y)$. É claro que a interseção $S_1 \cap S_2$ é o conjunto de nível $f^{-1}(0)$ que é igual a $C \cap R$ como afirmado, onde

$$C : x^2 + y^2 - 1 = 0, v = 0 \quad e \quad R : y = 0, v = 0$$

Agora considere a esfera espinhal $S_1(v_0)$ dada pelo plano horizontal de equação $v = v_0$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Então a interseção $S_1(v_0) \cap S_2$ corresponde ao conjunto de nível $f^{-1}(v_0)$. Afirmamos que para v_0 suficientemente pequeno este conjunto de nível é desconexo. Para provar isto iremos estudar os extremos da função f . Estes pontos são dados pelas equações $f_x(x, y) = 0$ e $f_y(x, y) = 0$. Ou seja,

$$f_x(x, y) = -\frac{y(x^2 - 2ax - y^2 + 1)}{(x - a)^2} \quad e \quad f_y = -\frac{x^2 + 3y^2 - 1}{x - a}$$

Assim, temos que os extremos de f são soluções de:

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2ax - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Da primeira equação: $3y^2 = 1 - x^2$. Substituindo na segunda equação temos:

$$3x^2 - 6ax - 1 + x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 3ax + 1 = 0$$

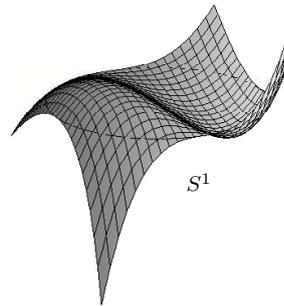


Figura 6.11: A superfície $v = f(x, y)$, com $a = 2$, próxima da origem

E obtemos,

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8}}{4} \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{\frac{1 - x^2}{3}}$$

Assim, obtemos quatro possíveis valores para os extremos de f . Suponhamos agora que $u_1 u_2 > 0$, de modo que $a > 1$. Se $a > 1$, os extremos de f são os pontos:

$$\begin{aligned} \text{MÁXIMO:} \quad x &= \frac{a - \sqrt{9a^2 - 8}}{4}, & y &= -\frac{\sqrt{8 - 6a^2 + 2a\sqrt{9a^2 - 8}}}{4} \\ \text{MÍNIMO:} \quad x &= \frac{a + \sqrt{9a^2 - 8}}{4}, & y &= \frac{\sqrt{8 - 6a^2 + 2a\sqrt{9a^2 - 8}}}{4} \end{aligned}$$

Da equação $x^2 + 3y^2 = 1$ vemos que $x^2 + y^2 < 1$ de modo que estes dois pontos são os únicos extremos locais de f dentro do disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Fora deste disco a função f é monótona.

Deste modo, para v_0 suficientemente pequeno, o conjunto de nível $f^{-1}(v_0)$ é desconexo: ele é constituído de uma curva fechada simples dentro de D e de uma curva fora de D .

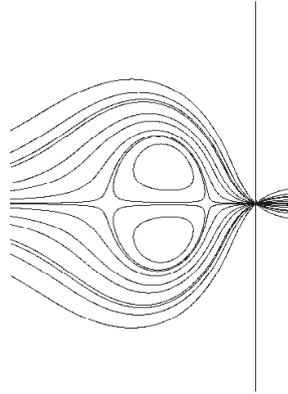


Figura 6.12: As curvas de nível de $v = f(x, y)$ com $a = 2$

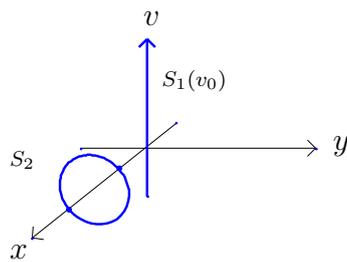


Figura 6.13: $S_1(v_0)$ é a reta $x = y = 0$ e S_2 é uma elipse

Desenhamos o bordo das espinhas complexas das esferas espinhais $S_1(v_0)$ e S_2 . Estas esferas espinhais nunca são coequidistantes nem covértices (veja o teorema 9.2.6, pg. 290 de [1]). Observe que a distância entre estas espinhas pode ser tomada arbitrária e sempre acharemos exemplo de interseção conexa e desconexa variando somente v_0 .

6.11 Alguns resultados sobre Interseção de Bissetores

Teorema 6.11.1. *Sejam $S_1, S_2 \subset \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ esferas espinhais que se intersectam tangencialmente num dado ponto $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Suponha que S_1 e S_2 não tenham uma fatia (cadeia) comum em p . Então acontece exatamente uma das possibilidades a seguir:*

1. $S_1 \cap S_2 = \{p\}$;
2. $S_1 \cap S_2 \setminus \{p\}$ é um ponto;
3. $S_1 \cap S_2 \setminus \{p\}$ é uma curva simples fechada;
4. $S_1 \cap S_2$ é uma curva simples fechada contendo p ;
5. $S_1 \cap S_2$ é a união de duas curvas simples fechadas, cada uma delas contendo p .

A demonstração deste teorema envolve uma análise direta das equações das esferas espinhais S_1 e S_2 em coordenadas de Heisenberg (ζ, v) . Para determinarmos estas equações iremos introduzir as seguintes notações:

- C_i é a cadeia de S_i que passa por p ;
- R_i é o \mathbb{R} -círculo de S_i que passa por p ;
- q_i é o único ponto de \mathcal{H} tal que $C_i \cap R_i = \{p, q_i\}$.

Considere duas cadeias distintas C_1, C_2 se intersectando num ponto p . Determinamos os pontos $q_i \in C_i$ que serão os antípodas a p com respeito a S_i . Conforme vimos na seção de \mathbb{R} -círculos, para quaisquer pontos $q_i \in C_i$ diferentes de p , existem \mathbb{R} -círculos R_i contendo p, q_i tais que

$$T_p R_i = (T_p C_1 + T_p C_2) \cap E_p$$

Lema 6.11.2. *Suponha que $C_1, C_2 \subset \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ são cadeias distintas intersectando em p e suponha $p \neq q_1 \in C_1$.*

1. *Existe um único \mathbb{R} -círculo R' por p e q_1 que intersecta C_2 .*
2. *Existe um único \mathbb{R} -círculo R por p e q_1 tal que*

$$T_p R = (T_p C_1 + T_p C_2) \cap E_p$$

3. *R é a imagem de R' sobre uma reflexão de ordem 4 em C_1 .*

Demonstração

Escolhemos coordenadas de Heisenberg tais que p corresponde a ∞ e C_1 , e C_2 são respectivamente as cadeias verticais $\zeta = -1$ e $\zeta = 1$. O estabilizador do par (C_1, C_2) consiste em translações verticais. Fixamos coordenadas tais que:

$$q_1 = (-1, -u) \quad e \quad q_2 = (1, u)$$

para um único $u \in \mathbb{R}$. Os \mathbb{R} -círculos que passam por p, q_1 (respectivamente p, q_2) são retas euclidianas por $(-1, -u)$ (respectivamente $(1, u)$) que estão no plano de contato E_{q_1} (respectivamente E_{q_2}).

Como vimos no exemplo do plano horizontal, o plano de contato em $(1, u)$ é:

$$E_{q_2} = \{(\xi_2, v_2) \in \mathcal{H}; v_2 = u - 2Im \xi_2\}$$

O \mathbb{R} -círculo que passa por q_1 e p é uma reta euclidiana contida neste plano de contato E_{q_2} . Tal reta contida neste plano e que passa por $(1, u)$ é parametrizada por

$$R_2 = \{(1, u) + s(\xi_2, -2Im \xi_2); \forall s \in \mathbb{R}\}$$

onde ξ_2 é um número complexo unitário.

De forma análoga, o plano de contato em $q_1 = (-1, -u)$ é:

$$E_{q_1} = \{(\xi_1, v_1) \in \mathcal{H}; v_1 = -u + 2Im \xi_1\}$$

Assim, o \mathbb{R} -círculo por $(-1, -u)$ é (ξ_1 é um número complexo unitário):

$$R_1 = \{(-1 + s\xi_1, -u + 2sIm \xi_1); \forall s \in \mathbb{R}\}$$

Quando ξ_1 é real, R_1 é o único \mathbb{R} -círculo tal que

$$R_1 \cap C_1 = \{p, q_1\}$$

e que intersecta C_2 em p .

Estamos estudando o caso em que S_1 e S_2 são tangentes em p . Para analisarmos a tangência, iremos considerar a inversão na cadeia unitária $\{|\zeta| = 1, v = 0\}$ e vamos considerar que o ponto de tangência é a origem de \mathcal{H} .

Facilmente verificamos que $i(C_1)$ é a cadeia de centro $(-\frac{1}{2}, 0)$ e raio $\frac{1}{2}$ e que $i(C_2)$ é a cadeia de centro $(\frac{1}{2}, 0)$ e raio também $\frac{1}{2}$, ambos passando pela origem. O espaço tangente $T_{(0,0)}i(C_1)$ é a interseção do plano de contato $E_{(-\frac{1}{2}, 0)}$ com o plano $x = 0$ e o espaço tangente $T_{(0,0)}i(C_2)$ é a interseção do plano de contato $E_{(\frac{1}{2}, 0)}$ com o plano $x = 0$. Podemos voltar ao exemplo do plano horizontal (no início da parte de bissetores) para observarmos que:

$$E_{(-\frac{1}{2}, 0)} \text{ tem equação: } \zeta = y$$

$$E_{(\frac{1}{2}, 0)} \text{ tem equação: } \zeta = -y$$

Portanto,

$$T_{(0,0)}i(C_1) = \left[\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$T_{(0,0)}i(C_2) = \left[\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

onde estamos considerando $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ a base ortonormal de \mathcal{H} . Agora podemos calcular $i(R_1)$ e $i(R_2)$. Seja R'_1 o \mathbb{R} -círculo infinito passando pela origem e paralelo ao vetor ξ . Então R'_1 e R_1 são tangentes no infinito (pois eles possuem projeções ortogonais paralelas). Isto significa que $T_{(0,0)}i(R_1)$ é paralelo a $T_{(0,0)}i(R'_1)$. Como $i(R'_1) = R'_1$, isto significa que $T_{(0,0)}i(R_1)$ é paralelo a ξ_1 e assim,

$$T_{(0,0)}i(R_1) = \left[\operatorname{Re}(\xi_1) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im}(\xi_1) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

Do mesmo modo, prova-se que

$$T_{(0,0)}i(R_2) = \left[\operatorname{Re}(\xi_2) \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{Im}(\xi_2) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

Como as esferas espinhais $i(S_1)$ e $i(S_2)$ são tangentes em $(0, 0)$ e ambas possuem dimensão dois, vemos que $T_{(0,0)}i(S_1) = T_{(0,0)}i(S_2)$ e este espaço é gerado pelos vetores tangentes às cadeias $T_{(0,0)}i(C_1)$ e $T_{(0,0)}i(C_2)$. Portanto,

$$T_{(0,0)}i(S_1) = T_{(0,0)}i(S_2) = \left[\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \right]$$

Mas,

$$[T_{(0,0)}C_1 + T_{(0,0)}C_2] \cap E_{(0,0)}$$

e como um \mathbb{R} -círculo é sempre uma curva horizontal, temos que S_1 e S_2 são tangentes se, e somente se,

$$T_{(0,0)}i(R_1) \in \frac{\partial}{\partial y} \quad e \quad T_{(0,0)}i(R_2) \in \frac{\partial}{\partial y}$$

Mas isso ocorre se, e somente se, ξ_1 e ξ_2 são números complexos puramente imaginários. Sobre esta hipótese, as esferas S_1 e S_2 são tangentes e vale:

$$T_p S_1 = T_p C_1 + T_p R_1 = T_p C_2 + T_p R_2 = T_p S_2$$

□

Estudaremos agora esferas espinhais com fatia e meridianos dados. Determinaremos esferas epinhais S_i tendo C_i como fatia e R_i como meridiano. Tais esferas espinhais são tangentes no ponto p desde que já estão colocadas com:

$$T_p S_1 = T_p C_1 + T_p R_1 = T_p C_2 + T_p R_2 = T_p S_2$$

Os vértices de S_i são então quaisquer pares de pontos em $R_i \setminus \{p, q_i\}$ relacionados pela inversão em C_i .

Demonstração do Teorema 6.11.1

O objetivo agora é determinar os vértices de S_1 e S_2 e depois determinarmos as equações explícitas de S_1 e S_2 . Os vértices de S_1 são pontos sobre o \mathbb{R} -círculo R_1 , cuja equação é:

$$R_1 = \{(-1 + is, -u + 2s); s \in: \mathbb{R}\}$$

Os dois vértices estão relacionados pela inversão na cadeia C_1 . Se $i_v(\zeta, v) = (-\zeta, v)$ denota a inversão na cadeia vertical $\zeta = 0$, a inversão em C_1 é dada por:

$$i_1 = T_{(-1,0)} \circ i_v \circ T_{(1,0)}$$

Calculando a composição:

$$\begin{aligned} (\zeta, v) &\xrightarrow{T_{(1,0)}} (1 + \zeta, v + 2Im \langle 1, \zeta \rangle) \xrightarrow{i_v} (-1 - \zeta, v + 2Im \langle 1, \zeta \rangle) \\ &\xrightarrow{T_{(-1,0)}} (-1 - 1 - \zeta, v + 2Im \langle 1, \zeta \rangle + 2Im \langle -1, -1 - \zeta \rangle) \end{aligned}$$

Portanto, a inversão na cadeia C_1 é dada por:

$$i_1(\zeta, v) = (-2 - \zeta, v - 4Im \zeta)$$

Assim, se $q_1^- = (-1 + is, -u + 2s)$ denota um vértice da esfera espinhal S_1 , então o outro vértice é dado por:

$$q_1^+ = i_1(q_1^-) = (-2 - (-1 + is), -u + 2s - 4s)$$

assim $q_1^+ = (-1 - is, -u - 2s)$.

Agora vamos calcular a inversão na cadeia C_2 para determinarmos os vértices dos bissetores que possuem C_2 como fatia e R_2 como meridiano. Temos

$$i_2 = T_{(1,0)} \circ i_v \circ T_{(-1,0)}$$

Calculando a inversão:

$$\begin{aligned} (\zeta, v) &\xrightarrow{T_{(-1,0)}} (-1 + \zeta, v + 2Im \langle -1, \zeta \rangle) \xrightarrow{i_v} (1 - \zeta, v - Im \langle 1, \zeta \rangle) \\ &\xrightarrow{T_{(1,0)}} (1 + 1 - \zeta, v - 2Im \langle 1, \zeta \rangle + 2Im \langle 1, 1 - \zeta \rangle) \end{aligned}$$

Portanto, a inversão em C_2 é dada por:

$$i_2(\zeta, v) = (2 - \zeta, v + 4Im \zeta)$$

Logo, se $q_2^- = (1 + it, u - 2t)$ denota um vértice da esfera espinhal S_2 , o outro deve ser:

$$q_2^+ = i_2(q_2^-) = (2 - (1 + it), u - 2t + 4t) \Rightarrow q_2^+ = (1 - it, u + 2t)$$

Com os vértices q_1^- e q_1^+ da esfera S_1 podemos encontrar sua equação, pois um ponto $p = (\zeta = x + iy, v) \in S_1$ se, e somente se, $\mathbb{A}(p, q_1^-, q_1^+) = 0$. Esta conta é

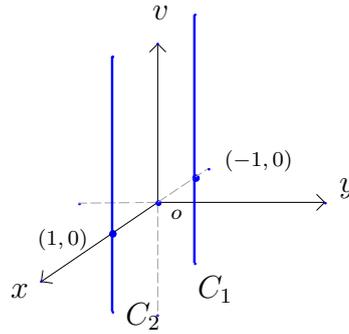


Figura 6.14: As cadeias verticais C_1 e C_2

demasiadamente longa e foi feita no Maple. Fazendo a conta e simplificando, obtemos a equação de S_1 :

$$v - 2y + u = \frac{x + 1}{y}((x + 1)^2 + y^2 + s^2) \quad (6.2)$$

A equação de S_2 pode ser encontrada do mesmo modo e obtemos:

$$v + 2y - u = \frac{x - 1}{y}((x - 1)^2 + y^2 + t^2) \quad (6.3)$$

Das equações de S_1 e S_2 podemos eliminar o parâmetro v (subtraindo as equações) e assim obtemos os pontos correspondentes da interseção $S_1 \cap S_2$:

$$1 + 3y^2 - uy + 3x^2 + xs^2 + 3x + x^3 + s^2 + xy^2 = -1 - 3y^2 + uy + xt^2 - t^2 + x^3 - 3x^2 + xy^2 + 3x$$

que é equivalente a

$$2 + 6y^2 - 2uy + 6x^2 + xs^2 + s^2 - xt^2 + t^2 = 0$$

Logo, a interseção é dada pela equação:

$$6x^2 + 6y^2 + x(s^2 - t^2) - 2uy + (2 + s^2 + t^2) = 0$$

Completando quadrados, essa equação pode ser escrita da forma:

$$\left(x + \frac{(s^2 - t^2)^2}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{u}{6}\right)^2 + \frac{2 + s^2 + t^2}{6} - \frac{(s^2 - t^2)^2}{144} - \frac{x^2}{36} = 0$$

Reescrevendo, vemos que a interseção é dada por:

$$\left(x + \frac{(s^2 - t^2)^2}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{u}{6}\right)^2 + \frac{F(s, t, u)}{144} = 0 \quad (6.4)$$

onde $F(s, t, u) = 24(2 + s^2 + t^2) - (s^2 - t^2)^2 - 4u^2$.

CASO 1. Se $F(s, t, u) > 0$, então (6.4) não possui soluções. Neste caso $S_1 \cap S_2$ consiste somente do ponto p .

CASO 2. Se $F(s, t, u) = 0$, então (6.4) possui uma única solução:

$$x = \frac{t^2 - s^2}{12} \quad e \quad y = \frac{u}{6}$$

entretanto, este ponto pode determinar uma coordenada finita ou infinita para v , dependendo das equações de S_1 e S_2 . A coordenada v possui pólo para valores finitos de x e y se, e somente se, $y = 0$. Logo, se $F(s, t, u) = 0$, com $u = 0$, então a solução encontrada corresponde ao ponto p , ou seja, $S_1 \cap S_2 = \{p\}$. Mas, se $F(s, t, u) = 0$ com $u \neq 0$ então obtemos uma solução finita e assim a interseção $S_1 \cap S_2$ consiste de dois pontos.

Finalmente, suponha que $F(s, t, u) < 0$. Logo a solução de (6.4) é um círculo de centro $(\frac{t^2 - s^2}{12}, \frac{u}{6})$ e raio $R = \frac{\sqrt{-F(s, t, u)}}{12}$.

Temos novamente que as soluções descritas por estes pontos podem corresponder ao ponto ideal se este círculo corta a reta $y = 0$. Existem três casos possíveis dependendo se a interseção tem nenhum, um ou dois pontos. O círculo corta a reta $y = 0$ se, e somente se $R \geq \frac{u}{6}$ o que é equivalente a:

$$\frac{u^2}{36} + \frac{F(s, t, u)}{144} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 24(2 + s^2 + t^2) \leq (s^2 - t^2)^2$$

CASO 3. Se $24(2 + s^2 + t^2) > (s^2 - t^2)^2$ então o círculo não encontra a reta $y = 0$. Neste caso, a interseção é o ponto p mais uma curva fechada simples (um círculo).

CASO 4. Se $24(2 + s^2 + t^2) = (s^2 - t^2)^2$ então o círculo e a reta $y = 0$ são tangentes. Neste caso a interseção $S_1 \cap S_2$ é uma curva fechada simples contendo o ponto p .

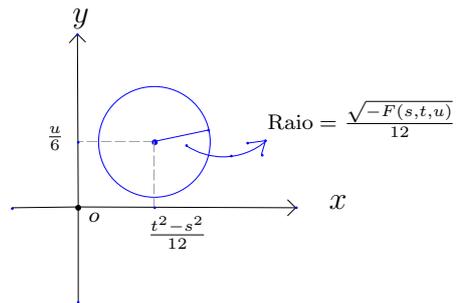


Figura 6.15: Solução de (6.4) para $F(s, t, u) < 0$

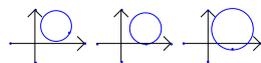


Figura 6.16: Casos de (6.4) para $F(s, t, u) < 0$

CASO 5. Se $24(2 + s^2 + t^2) < (s^2 - t^2)^2$ então o círculo encontra a reta $y = 0$ em dois pontos distintos. Neste caso $S_1 \cap S_2$ é conexo. Porém p divide esta interseção em duas componentes. □

Lema 6.11.3. *Suponha que S_1 e S_2 são duas esferas espinhais coequidistantes ou covértices tangentes no ponto $p \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então $S_1 \cap S_2 = \{p\}$*

Demonstração

Como S_1 e S_2 é um par coequidistante ou covertical, eles não são cotranchal (não possuem fatia em comum). Logo, as fatias de S_1 e S_2 contendo p são distintas. Escolhemos coordenadas de Heisenberg como acima na demonstração do teorema 6.11.1, para que as cadeias passando por p tenham coordenadas $\zeta = -1$ para S_1 e $\zeta = 1$ para S_2 .

A espinha complexa Σ_1 de S_1 é a única cadeia que passa pelos vértices q_1^+ e q_1^- . Como a projeção vertical da cadeia Σ_1 sobre o plano $\mathbb{C} = \{v = 0\}$ é uma circunferência e como Σ_1 está contida inteiramente no plano de contato definido pelo seu centro, é claro então que Σ_1 é a cadeia de centro $q_1 = (-1, -u)$ e raio s . Os vértices de S_1 são:

$$q_1^+ = (-1 + is, -u + 2s) \quad e \quad q_1^- = (-1 - is, -u - 2s)$$

Fazemos os levantamentos desses vértices em $\mathbb{C}^{2,1}$ e calculamos o vetor polar:

$$\hat{c}_1 = \left(\begin{array}{c} -1 + is \\ \frac{1}{2}(1 - |-1 + is|^2 + i(-u + 2s)) \\ \frac{1}{2}(1 + |-1 + is|^2 - i(-u + 2s)) \end{array} \right) \boxtimes \left(\begin{array}{c} -1 - is \\ \frac{1}{2}(1 - |-1 - is|^2 + i(-u - 2s)) \\ \frac{1}{2}(1 + |-1 - is|^2 + i(u + 2s)) \end{array} \right)$$

Assim, fazemos a conta e obtemos,

$$\hat{c}_1 = \left(\begin{array}{c} 2si \\ -is^3 - su \\ -2is + is^3 + us \end{array} \right) \simeq \left(\begin{array}{c} -2i \\ u + is^2 \\ -u + i(2 - s^2) \end{array} \right)$$

Analogamente, a espinha complexa Σ_2 é a única cadeia que passa pelos vértices:

$$q_2^- = (1 + it, u - 2t) \quad e \quad q_2^+ = (1 - it, u + 2t)$$

Essa cadeia tem centro $q_2 = (1, u)$ e raio t . Portanto, o vetor polar de Σ_2 pode ser representado pelo seguinte vetor em $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$\widehat{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 + it \\ \frac{1}{2}(1 - |1 + it|^2 + i(u - 2t)) \\ \frac{1}{2}(1 + |1 + it|^2 + i(-u + 2t)) \end{pmatrix} \boxtimes \begin{pmatrix} 1 - it \\ \frac{1}{2}(1 - |1 - it|^2 + i(u + 2t)) \\ \frac{1}{2}(1 + |1 - it|^2 - i(u + 2t)) \end{pmatrix}$$

Assim obtemos,

$$\widehat{c}_2 \begin{pmatrix} -2it \\ t(u - it^2) \\ t(-u + i(t^2 - 2)) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2i \\ -u + it^2 \\ u + i(2 - t^2) \end{pmatrix}$$

Por hipótese, as esferas espinhais são coequidistantes ou covértices. Isso significa que $\overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2 \neq \emptyset$. Mas isso significa que, se $c = \widehat{c}_1 \boxtimes \widehat{c}_2$, então ou c é um vetor negativo ou é um vetor nulo. Como

$$\langle c, c \rangle = \langle \widehat{c}_2, \widehat{c}_1 \rangle \langle \widehat{c}_1, \widehat{c}_2 \rangle - \langle \widehat{c}_2, \widehat{c}_2 \rangle \langle \widehat{c}_1, \widehat{c}_1 \rangle$$

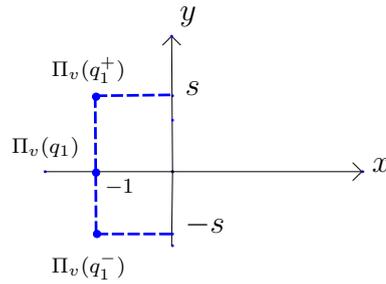


Figura 6.17: Projeção do centro q_1 da cadeia Σ_1

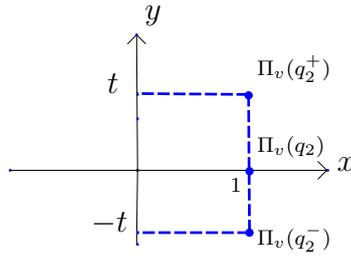


Figura 6.18: Projeção do centro q_2 da cadeia Σ_2

vemos que as esferas espinhais S_1 e S_2 são coequidistantes ou covértices se, e somente se,

$$\langle \widehat{c}_2, \widehat{c}_1 \rangle \langle \widehat{c}_1, \widehat{c}_2 \rangle - \langle \widehat{c}_2, \widehat{c}_2 \rangle \langle \widehat{c}_1, \widehat{c}_1 \rangle \leq 0$$

Calculando, vemos que essa desigualdade é equivalente à:

$$G(s, t, u) = (s^2 - t^2) - 8(s^2 + t^2) + 4(4 + u^2) \leq 0$$

Mas observamos que

$$F(s, t, u) + G(s, t, u) = 64 + 16(s^2 + t^2)$$

Como $G(s, t, u) \leq 0$, vemos que

$$F(s, t, u) = -G(s, t, u) + 64 + 16(s^2 + t^2) > 0$$

Para $F(s, t, u) > 0$, pela demonstração do teorema anterior 6.11.1, temos que $S_1 \cap S_2 = \{p\}$

□

No ponto de tangência de um par de esferas espinhais coequidistante ou covertical S_1, S_2 , as esferas espinhais se intersectam com contato de segunda ordem como demonstraremos a seguir.

Lema 6.11.4. *Suponha que S_1 e S_2 são duas esferas espinhais coequidistantes ou covertices, tangentes no ponto p . Então, num sistema de coordenadas locais em p que lineariza S_1 , temos que S_2 é expressa como gráfico de uma função quadrática definida localmente em S_1 .*

Demonstração

Calculamos os planos tangentes das imagens de S_1 e S_2 sobre a inversão i no círculo unitário. Fazemos $\zeta = x + iy$. A inversão no círculo unitário é dada por:

$$i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{|\zeta|^2 - iv} \\ \frac{-v}{|\zeta|^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

A inversão i tem ordem 2, logo, um ponto $(\zeta, v) \in i(S_1)$ se, e somente se, $i(\zeta, v) \in S_1$. A equação da esfera espinhal S_1 já obtivemos (veja a equação (6.2)). Fazendo então a substituição na equação de S_1 e calculando com ajuda do Maple, obtemos

$$\begin{aligned} (1 + s^2)v^2 &- (3 + s^2)vy + 3y^2 - uy^3 + (1 + s^2)y^4 \\ &+ [1 - uv + (3 + s^2)y^2]x + [3 - uy + 2(1 + s^2)y^2]x^2 \\ &+ [3 + s^2]x^3 + [1 + s^2]x^4 = 0 \end{aligned}$$

E analogamente, obtemos $i(S_2)$:

$$\begin{aligned} (1 + t^2)v^2 &+ (3 + t^2)vy + 3y^2 - uy^3 + (1 + t^2)y^4 \\ &+ [-1 - uv - (3 + t^2)y^2]x + [3 - uy + 2(1 + t^2)y^2]x^2 \\ &- [3 + t^2]x^3 + [1 + t^2]x^4 = 0 \end{aligned}$$

Ambas as inversões possuem plano tangente $x = 0$ na origem. Expandindo a expressão de $i(S_1)$ na origem, temos:

$$x = -(1 + s^2)v^2 + (3 + s^2)vy - 3y + \text{termos de ordem superior}$$

Agora expandimos a expressão de $i(S_2)$ em torno da origem:

$$x = (1 + t^2)v^2 + (3 + t^2)vy + 3y^2 + \text{termos de ordem superior}$$

Num sistema de coordenadas locais (ξ, η, ν) que coincide com o sistema de coordenadas locais (x, y, z) para primeira ordem e para o qual S_1 é localmente dado por $\xi = 0$, vemos que S_2 é dado por:

$$\xi = (2 + s^2 + t^2)\nu^2 + (t^2 - s^2)\nu\eta + 6\eta^2 + \text{termos de ordem superior}$$

A matriz Hessiana é dada por:

$$\begin{pmatrix} 6 & \frac{t^2 - s^2}{2} \\ \frac{t^2 - s^2}{2} & 2 + s^2 + t^2 \end{pmatrix}$$

que tem determinante:

$$12 + 6(s^2 + t^2) - \frac{(t^2 - s^2)^2}{4} = -\frac{G(s, t, u)}{4} + 16 + (u^2 + 4s^2 + 4t^2)$$

onde $G(s, t, u)$ é a função definida no lema anterior 6.11.3. O ponto crítico é não degenerado, isto é,

$$\det \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$$

Ou seja, a matriz Hessiana é invertível no ponto 0. Pelo lema de Morse (veja [3] capítulo 5, seção 9), neste sistema de coordenadas locais $i(S_2)$ é o gráfico de uma função quadrática positiva definida próxima da origem, o que termina a prova do lema. □

Estudaremos agora bissetores com espinhas complexas ortogonais. O próximo passa para provar o teorema 6.11.6 é o caso especial de pares de esferas espinhais com espinhas complexas ortogonais.

Teorema 6.11.5. *Suponha que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são bissetores com as respectivas espinhas σ_1 e σ_2 tais que suas respectivas espinhas complexas Σ_1 e Σ_2 são geodésicas complexas ortogonais. Seja $o = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ e $\rho_j = \rho(o, \Sigma_j)$. Então a interseção $\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2$ é vazia, um ponto ou é um 2-disco fechado, dependendo se,*

$$\tanh^2 \left(\frac{\rho_1}{2} \right) + \tanh^2 \left(\frac{\rho_2}{2} \right)$$

é maior, igual ou menor que 1 respectivamente.

Demonstração

Escolhemos coordenadas no modelo da bola tal que o corresponde a origem e

$$\Sigma_1 = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \times \{0\} \quad e \quad \Sigma_2 = \{0\} \times \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$$

Seja i_j a reflexão (anti-holomorfa) $i_j : \Sigma_j \rightarrow \Sigma_j$ que fixa σ_j . Assim, \mathcal{B}_j é igual a hipersuperfície equidistante de o e $i_j(o)$. O estabilizador da tripla (o, Σ_1, Σ_2) é o subgrupo representado pela matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} \in U(2)$$

onde $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$. Os pontos $o, i_1(o), i_2(o)$ são então representados pelos vetores negativos $\mathbf{O}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ em $\mathbb{C}^{2,1}$. $i_1(o)$ é a inversão da origem. Aplicando um elemento de $U(2)$, podemos supor que $i_1(o)$ está no eixo real. Observamos que $2\rho_1 = \text{disth}(o, i_1(o))$ (usamos uma construção similar para i_2). Lembramos que a coordenada euclideana r está relacionada com a distância hiperbólica por $r = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)$. Assim, temos:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} \sinh(\rho_1) \\ 0 \\ \cosh(\rho_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\rho_2) \\ \cosh(\rho_2) \end{pmatrix}$$

Pelo teorema de inversão em fatias, como i_j permuta o e $i_j(o)$ então σ_j é fatia do bissetor $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_j(o, i_j(o))$, o bissetor equidistante de o e $i_j(o)$. Assim, se $z \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$:

$$\rho(z, i_1(o)) = \rho(z, o) = \rho(z, i_2(o))$$

Assim, lembrando que, se $x, y \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ tem levantamento $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2,1}$, temos

$$\cosh^2\left(\frac{\rho(x, y)}{2}\right) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$$

Logo, para $z \in \overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2$ temos:

$$\frac{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{I}_1 \rangle \langle \mathbf{I}_1, \mathbf{Z} \rangle}{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_1 \rangle} = \frac{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{O} \rangle \langle \mathbf{O}, \mathbf{Z} \rangle}{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{O}, \mathbf{O} \rangle} = \frac{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{I}_2 \rangle \langle \mathbf{I}_2, \mathbf{Z} \rangle}{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_2 \rangle}$$

onde o levantamento de $z \in \overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2$ é seguinte vetor negativo:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos,

$$\langle \mathbf{I}_1, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{Z}, \mathbf{I}_1 \rangle = \langle \mathbf{I}_2, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{Z}, \mathbf{I}_2 \rangle = \langle \mathbf{O}, \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{Z}, \mathbf{O} \rangle = 1$$

Então temos que as coordenadas de z satisfazem:

$$|z_j - \coth(\rho_j)| = \operatorname{csch}(\rho_j) \quad \text{para } i, j = 1, 2$$

A solução da equação acima mais próxima da origem é dada por:

$$z_j = \coth(\rho_j) - \operatorname{csch}(\rho_j) = \tanh\left(\frac{\rho_j}{2}\right)$$

Essa última igualdade é obtida usando as identidades trigonométricas: $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$, $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$. Temos então:

$$\begin{aligned} \coth(\rho_1) - \operatorname{csch}(\rho_1) &= \frac{\cosh(\rho_1) - 1}{\sinh(\rho_1)} \\ &= \frac{\cosh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right) - 1}{2 \sinh\left(\frac{\rho_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho_1}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \sinh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\rho_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho_1}{2}\right)} \\ &= \tanh\left(\frac{\rho_1}{2}\right) \end{aligned}$$

Em particular este ponto z está em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ se, e somente se,

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \tanh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{\rho_2}{2}\right) < 1$$

Agora, $z \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ se, e somente se,

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \tanh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{\rho_2}{2}\right) = 1$$

Finalmente, $z \notin \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ se, e somente se,

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \tanh^2\left(\frac{\rho_1}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{\rho_2}{2}\right) > 1$$

como desejado. □

Teorema 6.11.6. *A interseção de um par de esferas espinhais coequidistante ou covértice é conexa.*

Demonstração

Suponha por absurdo que S_1 e S_2 são esferas espinhais cuja interseção é desconexa. Sejam σ_j e Σ_j as espinhas e espinhas complexas de S_j . Então existem caminhos suaves $\{g_t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset PU(2, 1)$ tal que $g_0 = 1$ e $\Sigma(t) = g_t(\Sigma)$ intersecta Σ_1 com um ângulo crescendo monotamente a $\frac{\pi}{2}$.

Considere o espaço:

$$\varepsilon = Emb(S^2, S^3) \times Emb(S^2, S^3)$$

de pares de mergulhos suaves (C^1) $S^2 \hookrightarrow S^3$ com o par de esferas transversais. Tal espaço forma um conjunto aberto denso $\varepsilon_{transversal} = \varepsilon_{tr}$. A função $N : \varepsilon_{tr} \rightarrow \mathbb{Z}$ que associa a um par o número de componentes conexas da interseção é localmente constante.

Seja $\varepsilon_{Tangente} = \varepsilon_T$ o subespaço de ε consistindo de pares que se intersectam transversalmente exceto para um ponto de tangência com contato de segunda ordem. Então $\varepsilon_{tr} \cup \varepsilon_T$ é um subconjunto aberto denso.

Pelo corolário 6.9.3 e os lemas 6.11.3 e 6.11.4, o caminho

$$S(t) = (S_1, g_t(S_2))$$

em ε está em $\varepsilon_{tr} \cup \varepsilon_T$. Podemos reparametrizar esse caminho e assumir que $S(t)$ intersecta ε_T transversalmente.

Se $S(t)$ encontra ε_T transversalmente em $t = t_0$, então a interseção tangencial em $S_1 \cap g_{t_0}$ pode ou bifurcar a uma interseção transversal (que será um círculo) ou desaparecer.

Pelo teorema anterior 6.11.5, temos que $N(S(1)) \leq 1$ e juntamente com o lema 6.11.3 temos que $N(S(t)) \leq 1 \forall t \leq 1$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] Goldman, William M. Complex Hyperbolic Geometry, Oxford Press, 1999
- [2] Parker, John R., Notes on Complex Hyperbolic Geometry, 2003.
- [3] Lima, Elon Lages. Curso de Análise vol 2, oitava edição, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [4] J.G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer, 1994.
- [5] Beardon, A. F. (1983) *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics **91**, Springer-Verlag, New-York.